Міністерство освіти і науки України
Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

М. І. ЖАЛДАК,
Г. О. МИХАЛІН,
С. Я. ДЕКАНОВ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

КИЇВ-2007

М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник. — Київ, НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. — 430 с.

У посібнику здійснено оригінальне подання диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних. Кожен підрозділ закінчується контрольними запитаннями і завданнями, які можна використовувати на практичних заняттях, колоквіумах, екзаменах, при написанні курсових та дипломних робіт. Наприкінці кожного розділу наведено коротку історичну довідку, яка сприятиме розширенню кругозору майбутніх учителів математики.

Для студентів і викладачів математичних спеціальностей вищих педагогічних закладів освіти.

Іл. 52. Бібліогр. 32 назви

Рецензенти:

М. В. Працьовитий, доктор фіз.-мат. наук, професор Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова

Ю. В. Триус, доктор пед. наук, професор Черкаського Нац. ун-ту імені Богдана Хмельницького

Затверджено до друку Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова

Адреса видавництва: Україна, 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Зміст

Передмова

Цей посібник створено на основі багаторічного досвіду роботи авторів у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова. Призначений він у першу чергу для студентів і викладачів педагогічних інститутів, проте автори сподіваються, що він буде цікавим і корисним для всіх, хто вивчає математичний аналіз або викладає його. Метою посібника є подання основ диференціального та інтегрального числення функцій багатьох змінних на сучасному і водночас доступному рівні. Через це окремі питання, які входять у програму з математичного аналізу для педагогічних інститутів, викладено повніше й детальніше, порівняно з іншими виданнями авторів даного посібника.

Вступ до аналізу функцій багатьох змінних подано на базі довільного метричного простору, а не тільки простору $\mathbb{R}^n$. Як показує досвід, часто загальніший погляд на певні речі робить їх простішими і зрозумілішими. Вивчення таких важливих понять аналізу як границя й неперервність у довільному метричному просторі — це якраз той випадок. Розглядаючи загальний метричний простір, ми ніби на певний час забуваємо про природу його елементів, а досліджуємо лише ті їх властивості, які пов'язані з метрикою. У результаті, майже елементарними логічними міркуваннями дістаємо факти, застосовні одразу до багатьох конкретних просторів.

Застосування елементів функціонального аналізу при вивченні функцій багатьох змінних здійснюється з метою полегшення розуміння матеріалу, поглиблення міжтемних зв'язків та ознайомлення майбутніх (чи вже працюючих) учителів математики з сучасними методами аналізу. Після вивчення метричних просторів природно ознайомити читачів з поняттями лінійного, нормованого, евклідового та гільбертового простору.

Весь матеріал перших двох розділів так чи інакше використовується у наступних розділах. Наприклад, теорема Банаха про стиск покладена в основу доведення теореми про існування неявної функції, а ідея поповнення метричного простору використана для побудови теорії інтеграла Лебега.

У посібнику широко використовується метод аналогій. Наприклад, поняття диференційовної функції (навіть вектор-функції) багатьох змінних та її похідної введено у такому самому вигляді, як і для функцій однієї змінної. Зрозуміло, що при цьому всі об'єкти та співвідношення між ними набувають нового змісту. Але суть понять залишається тією самою.

Метод аналогій дозволяє досить змістовно і грунтовно та водночас доступно викласти інтегральне числення функцій багатьох змінних, причому у спосіб, дещо відмінний від традиційного для навчальної літератури.

По-перше, поняття інтеграла Рімана від функції кількох змінних спочатку вивчається для випадку так званого елементарного прямокутника. Це дозволяє суттєво використати аналогію з інтегралом Рімана по відрізку. Після цього майже елементарними міркуваннями доводиться, що вимірність за Жорданом деякої множини еквівалентна інтегровності за Ріманом характеристичної функції цієї множини по елементарному прямокутнику, що містить дану множину. Властивості міри Жордана є надзвичайно простими наслідками відповідних властивостей інтеграла. Так само просто дістаємо результати, що стосуються інтеграла по довільній вимірній за Жорданом множині.

По-друге, при вивченні криволінійних інтегралів подання матеріалу ведеться так, що одразу можна дістати результати як для функцій дійсних змінних, так і для функцій комплексної змінної. Це дозволяє дістати у вигляді застосувань інтегрального числення найважливіші теореми комплексного аналізу: інтегральну теорему Коші, теорему про інтегральну формулу Коші та наслідки з неї. Зокрема, строго доводиться еквівалентність аналітичності функції в області як такої, що має у цій області неперервну похідну, так і такої, що диференційовна у цій області.

По-третє, теорія міри та інтеграла Лебега викладена в стилі видатного угорського математика Ф. Рісса [21]. Головна ідея такого підходу полягає в наступному. Спочатку описуються так звані множини L-міри нуль, вводиться інтегральна норма на множині східчастих функцій і отримується неповний нормований простір SP. Цей простір поповнюється за допомогою фундаментальних послідовностей, а кожній фундаментальній послідовності ставиться у відповідність певна функція (L-інтегровна) та число (L-інтеграл). У результаті дістаємо повний нормований простір LP, що є поповненням простору SP. Визначене у такий спосіб поняття L-інтеграла еквівалентне класичному поняттю інтеграла Лебега, що акуратно доводиться в окремому підрозділі. Такий підхід значно спрощує доведення багатьох важливих результатів теорії інтеграла Лебега, а основні факти теорії міри Лебега перетворюються на прості наслідки з теорії інтеграла Лебега.

Ідея реалізації зазначеного підходу до побудови теорії інтеграла та міри Лебега належить видатному українському математику Владиславу Кириловичу Дзядику. Тільки замість східчастих функцій він пропонував розглядати неперервні.

У посібнику широко використовується логічна символіка та деякі інші скорочення, зміст яких розкривається у наступній таблиці.

Символ	**Які слова замінює даний символ**
$\forall$	"для будь-якого", "для кожного", "для всіх" тощо
$\exists$	"існує", "знайдеться" тощо
$\exists!$	"існує єдиний", "знайдеться єдиний" тощо
$:$	"такий, що", "тих, кожен з яких", "а саме" тощо
$:=$, $=:$	"дорівнює за означенням", "надається значення" тощо
$\Longrightarrow$	"випливає", "якщо ..., то" тощо
$\Longleftrightarrow$	"тоді й тільки тоді", "необхідно й достатньо" тощо, а в означенні — слово "якщо"
$\square$	"Початок доведення"
$\blacksquare$	"Кінець доведення"

1. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ

У першому розділі здійснено узагальнення просторів $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}$ на випадок довільних непорожніх множин шляхом введення відстані між елементами цих множин.

1.1. Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів

Першим кроком побудови теорії метричних просторів є введення понять відстані та метричного простору.

1.1.1. Простори $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$. Поняття відстані є одним з найважливіших понять математики. Відстань $\rho(x,y)$ між довільними дійсними або комплексними числами $x=(x_1)$ та $y=(y_1)$ найчастіше визначається за допомогою рівності

$$\rho(x,y)=\rho(x_1,y_1)=|x_1-y_1|=\sqrt{|x_1-y_1|^2}\,. \tag{1}$$

При цьому з властивостей модуля випливає, що ця відстань задовольняє умови:

1) (невід'ємності): $\rho(x,y)\geqslant 0\ \forall x$ і y;

2) (рівності нулеві): $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

3) (симетричності): $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x$ і y;

4) (нерівності трикутника): $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y$ і z.

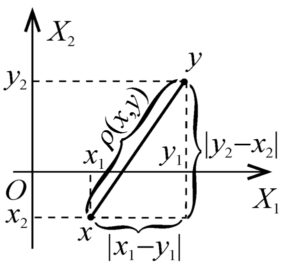

Рис. 1

Якщо $x=(x_1,x_2)$ і $y=(y_1,y_2)$ — точки двовимірного простору $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, тобто точки площини, то відстань $\rho(x,y)$ між цими точками можна визначити за формулою (див. рис. 1):

$$\rho(x,y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}=$$
$$=\sqrt{\sum_{k=1}^{2}|x_k-y_k|^2}\,. \tag{2}$$

При цьому неважко показати, що ця відстань задовольняє вказані вище умови 1) − 4).

Відстань $\rho(x,y)$ між довільними точками $x=(x_1,x_2,x_3)$ та $y = (y_1,y_2,y_3)$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ можна визначити за формулою

$$\rho(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2+|x_3-y_3|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3}|x_k-y_k|^2}\,. \quad (3)$$

Ця відстань також задовольняє умови 1) − 4).

Використовуючи аналогію, природно узагальнити формули (1) − (3), поклавши

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2} \quad (4)$$

для довільних точок $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ та $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, і назвати $\rho(x,y)$ *відстанню між точками x і $y\in\mathbb{R}^n$*.

□ Легко бачити, що ця відстань задовольняє умови невід'ємності, рівності нулеві та симетричності. Доведемо, що $\rho(x,y)$ задовольняє також нерівність трикутника.

Нехай $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ та $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ − довільні фіксовані точки простору $\mathbb{R}^n$. Тоді нерівність $\rho(x,y)\leqslant \rho(x,z)+\rho(z,y)$ набуває вигляду

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|x_k-z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|z_k-y_k|^2}\,. \quad (5)$$

Позначимо $|x_k-z_k| = a_k$, $|z_k-y_k| = b_k$. Тоді $|x_k-y_k| = |x_k-z_k+z_k-y_k| \leqslant |x_k-z_k|+|z_k-y_k| = a_k+b_k$ і нерівність (5) випливатиме з нерівності

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} \quad (6)$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\cdot\sum_{k=1}^{n}a_kb_k + \sum_{k=1}^{n}b_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_k^2 + 2\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2} + \sum_{k=1}^{n}b_k^2$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{k=1}^{n}a_kb_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\ \Leftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \,. \tag{7}$$

Нерівності (6) та (7) називають *нерівностями Коші – Буняковського.*

Для доведення нерівності (7) введемо позначення:

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2,\ B = \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \ \text{ і }\ C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \,.$$

Тоді якщо $A = 0$ або $B = 0$, то зрозуміло, що й $C = 0$, а тому нерівність (7) матиме вигляд $0 \leqslant 0$, отже, є правильною. Якщо $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то нерівність (7) рівносильна нерівності $C^2 - AB \leqslant 0$, а це рівносильно тому, що квадратний тричлен $At^2 - 2Ct + B \geqslant 0\ \forall t \in \mathbb{R}$. Остання умова виконується, оскільки

$$At^2 - 2Ct + B = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 t^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k t + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 t^2 - 2a_k b_k t + b_k^2) = \sum_{k=1}^{n} (a_k t - b_k)^2 \geqslant 0\ \forall t \in \mathbb{R}\,.$$

Отже, нерівність (7), а разом з нею нерівності (6) і (5), доведено. Тому відстань $\rho(x,y)$, що визначається рівністю (4), задовольняє усі умови 1) – 4). ■

Зауважимо, що в проведених міркуваннях можна вважати, що числа x_k, y_k і z_k є довільними комплексними числами, тобто відповідні точки x, y і z є довільними точками n-вимірного простору $\mathbb{C}^n$, де $\mathbb{C}^1 := \mathbb{C}$, а $\mathbb{C}^{n+1} := \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Отже, має місце

Теорема 1 (про властивості відстані у просторах $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$). *Якщо у просторах $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$ відстань $\rho(x,y)$ між довільними точками x і y визначено за формулою* (4), *то ця відстань задовольняє умови невід'ємності, рівності нулеві, симетричності та нерівності трикутника.*

1.1.2. Поняття відстані та метричного простору. Простір ізольованих точок. Теорема 1 навіює наступні означення.

Відстанню на множині $M \neq \varnothing$, або *метрикою множини M*, називають будь-яку функцію $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, що задовольняє умови (або аксіоми)

1) (невід'ємності): $\rho(x,y) \geqslant 0\ \forall x$ і $y \in M$;

2) (рівності нулеві): $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;

3) (симетричності): $\rho(x,y)=\rho(y,x)\ \forall x$ і $y\in M$;

4) (нерівності трикутника): $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,\ y$ і $z\in M$.

При цьому значення $\rho(x,y)$ називають *відстанню між елементами* x і y множини M.

Множину $M\neq\varnothing$ разом з визначеною метрикою (відстанню) ρ називають *метричним простором* або простором і позначають (M,ρ), а елементи множини M називають *точками простору* (M,ρ).

Враховуючи дані означення, можна сформулювати теорему 1 дещо в іншій формі.

Теорема 1* (про метричність просторів $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$). *Простори $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{C}^n$ з відстанню, що визначається за формулою* (4), *є метричними просторами. При цьому* $\rho(x,y)$ *називають* ***евклідовою метрикою (відстанню).***

Виникає питання: чи кожну множину $M\neq\varnothing$ можна зробити метричним простором, ввівши на ній якимось чином відстань? Відповідь на це питання дає

Теорема 2 (про метричний простір ізольованих точок). *Якщо M — довільна непорожня множина, а*

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{коли } x\neq y,\\ 0, & \text{коли } x=y,\end{cases}\quad \forall x\ \text{ і }\ y\in M,$$

то (M,ρ) *— метричний простір, який називають* ***простором ізольованих точок.***

□ Умови невід'ємності, рівності нулеві та симетричності очевидні. Доведення потребує лише нерівність трикутника.

Нехай x, y і z — довільні фіксовані точки множини M. Тоді якщо $x=y$, то нерівність трикутника набуває вигляду $0=\rho(x,x)\leqslant \leqslant\rho(x,z)+\rho(z,x)=2\rho(x,z)$ і ця нерівність правильна за умовою невід'ємності відстані. Якщо $x\neq y$, то $x\neq z$ або $y\neq z$, і тому $\rho(x,z)=1$ або $\rho(z,y)=1$, тобто $\rho(x,z)+\rho(z,y)\geqslant 1=\rho(x,y)$. ■

Отже, теорема 2 стверджує, що *кожну непорожню множину можна перетворити принаймні у метричний простір ізольованих точок*. Функцію $\rho(x,y)$ з теореми 2 називають *тривіальною метрикою на множині* M.

Виявляється, що на даній множині M відстань можна визначити, взагалі кажучи, не єдиним чином.

Наприклад, на множині $\mathbb{R}^n$ відстань $\rho(x,y)$, крім формули (4), можна визначити за формулами

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \quad (\textit{октаедрична метрика (відстань)})$$

або

$$\rho(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - y_k| \quad (\textit{кубічна метрика (відстань)}).$$

Пропонуємо читачеві самостійно впевнитися, що вказані функції $\rho(x,y)$ задовольняють усі умови відстані. Надалі символом $\mathbb{R}^n$ будемо позначати метричний простір $(\mathbb{R}^n, \rho)$ з евклідовою метрикою і називатимемо його *n-вимірним евклідовим простором*.

Розглянемо ще декілька важливих прикладів метричних просторів.

1.1.3. Простір $C[a;b]$. *Простір $C[a;b]$* — це множина функцій, неперервних на даному відрізку $[a;b]$, з відстанню

$$\rho(x,y) = \max_{[a;b]} |x(t) - y(t)| \quad \forall x = x(t) \text{ і } y = y(t) \in C[a;b].$$

За відомими властивостями неперервних функцій (якими?) вказана відстань існує, є невід'ємною, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x = y$, тобто $x(t) = y(t)\ \forall t \in [a;b])$ і $\rho(x,y) = \rho(y,x)\ \forall x$ і $y \in C[a;b]$.

Для доведення нерівності трикутника зауважимо, що для будь-яких $x = x(t)$, $y = y(t)$ і $z = z(t) \in C[a;b]$

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - z(t) + z(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{[a;b]} |x(t) - z(t)| + \max_{[a;b]} |z(t) - y(t)| = \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall t \in [a;b].$$

Права частина останньої нерівності не залежить від t, а тому

$$\rho(x,y) = \max_{[a;b]} |x(t) - y(t)| \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall x, y \text{ і } z \in C[a;b].$$

Отже, *простір $C[a;b]$ є метричним простором.*

1.1.4. Простір $CR[a;b]$. *Простір $CR[a;b]$* — це множина функцій, неперервних на даному відрізку $[a;b]$, з відстанню

$$\rho(x,y) = (R)\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \quad \forall x = x(t) \text{ і } y = y(t) \in CR[a;b].$$

За властивостями R-інтеграла (інтеграла Рімана) функція

$\rho(x,y)$ є невід'ємною, $\rho(x,y)=0$, коли $x=x(t)=y=y(t)$ $\forall t\in[a;b]$, і $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

Припустимо, що $\exists t_0\in[a;b]$: $x(t_0)\neq y(t_0)$. Тоді якщо $\alpha(t)=|x(t)-$ $-y(t)|$, то $\alpha(t_0)=|x(t_0)-y(t_0)|>0$ і за властивостями неперервних функцій існує окіл $O(t_0)$ точки t_0 такий, що $\alpha(t)>\frac{1}{2}\alpha(t_0)$ $\forall t\in O(t_0)\cap$ $\cap[a;b]=(a_1;b_1)$. Звідси за адитивною властивістю R-інтеграла

$$(R)\int_a^b\alpha(t)\,dt=(R)\int_a^{a_1}\alpha(t)\,dt+(R)\int_{a_1}^{b_1}\alpha(t)\,dt+(R)\int_{b_1}^{b}\alpha(t)\,dt\geqslant$$

$$\geqslant(R)\int_{a_1}^{b_1}\alpha(t)\,dt\geqslant\frac{1}{2}\alpha(t_0)(b_1-a_1)>0,\ \text{тобто } \rho(x,y)>0.$$

Отже, $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, тобто $x(t)=y(t)$ $\forall t\in[a;b]$.

Для доведення нерівності трикутника зауважимо, що

$$|x(t)-y(t)|\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\ \ \forall t\in[a;b].$$

Звідси за властивостями монотонності та лінійності R-інтеграла дістаємо

$$\rho(x,y)=(R)\int_a^b|x(t)-y(t)|\,dt\leqslant(R)\int_a^b|x(t)-z(t)|\,dt+$$

$$+(R)\int_a^b|z(t)-y(t)|\,dt=\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \ \forall x,y \text{ і } z\in CR[a;b]\,.$$

Отже, *простір $CR[a;b]$ є метричним простором.*

1.1.5. Простір $\boldsymbol{m}$. *Простір $\boldsymbol{m}$* — це множина обмежених числових послідовностей з відстанню

$$\rho(x,y)=\sup_{n\in N}|x_n-y_n|\ \ \forall x=(x_n)\text{ і } y=(y_n)\in\boldsymbol{m}.$$

Пропонуємо читачеві самостійно впевнитися, що $\boldsymbol{m}$ *є метричним простором.*

1.1.6. Простір l^p. *Простір l^p*, $p\geqslant 1$ — фіксоване, — це множина числових послідовностей $x=(x_n)$, для яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ є збіжним, з відстанню

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\quad\forall x=(x_n)\ \text{і}\ y=(y_n)\in l^p.$$

Оскільки із збіжності рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\max\{|a_n|,|b_n|\}$ (переконайтеся у цьому), а

$$|x_n-y_n|^p\leqslant(|x_n|+|y_n|)^p\leqslant 2^p\max\{|x_n|^p,|y_n|^p\},$$

то вказана відстань існує $\forall x$ і $y\in l^p$.

Для цієї відстані ρ доведення потребує лише нерівність трикутника, яка набуває вигляду

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k-z_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}|z_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\qquad(8)$$

Ця нерівність очевидна, коли $p=1$, тому вважаємо $p>1$. Як і при доведенні нерівності (5) позначимо $a_k=|x_k-z_k|$, $b_k=|z_k-y_k|$. Тоді нерівність (8) випливатиме з нерівності

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.\qquad(9)$$

Нерівність (9) називають *нерівністю Мінковського*.

Якщо $a_k=0\ \forall k\in\mathbb{N}$ або $b_k=0\ \forall k\in\mathbb{N}$, то, враховуючи невід'ємність чисел a_k і b_k, дістанемо, що нерівність (9) очевидно є правильною. Тому вважаємо, що $\exists k_1$ і k_2: $a_{k_1}>0$ і $b_{k_2}>0$. Тоді нерівність (9) рівносильна нерівності

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^p\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\right),\qquad(10)$$

де $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}>0$. Враховуючи, що $p=\frac{p+q}{q}=1+\frac{p}{q}$ і

$$(a_k+b_k)^p=(a_k+b_k)(a_k+b_k)^{\frac{p}{q}}=a_k(a_k+b_k)^{\frac{p}{q}}+b_k(a_k+b_k)^{\frac{p}{q}},$$

дістанемо нерівність (10) з нерівностей

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(a_k+b_k)^{\frac{p}{q}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left((a_k+b_k)^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(a_k+b_k)^{\frac{p}{q}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left((a_k+b_k)^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

які мають вигляд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{11}$$

де $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\alpha_k \geqslant 0$ і $\beta_k \geqslant 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Нерівність (11) називають *нерівністю Гельдера*.

Якщо позначити $A_k = \frac{\alpha_k^p}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p}$, $B_k = \frac{\beta_k^q}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^q}$, то нерівність (11) буде рівносильною нерівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^{\frac{1}{p}} \cdot B_k^{\frac{1}{q}} \leqslant 1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{\infty} A_k + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} B_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A_k}{p}+\frac{B_k}{q}\right),$$

яка випливає з нерівностей

$$A_k^{\frac{1}{p}} \cdot B_k^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{A_k}{p}+\frac{B_k}{q} \ \forall k \Leftrightarrow$$

$$A_k^{\alpha} \cdot B_k^{1-\alpha} \leqslant A_k \cdot \alpha + B_k \cdot (1-\alpha) \ \forall \alpha \in (0;1),\ A_k \geqslant 0 \text{ і } B_k \geqslant 0.$$

Ця нерівність правильна, коли $A_k = 0$ або $B_k = 0$. А якщо $A_k > 0$ і $B_k > 0$, то вона рівносильна нерівності

$$\left(\frac{A_k}{B_k}\right)^{\alpha} \leqslant \frac{A_k}{B_k}\cdot\alpha + (1-\alpha) \Leftrightarrow x^{\alpha} \leqslant x\alpha + (1-\alpha) \ \forall x>0 \Leftrightarrow$$

$$x^{\alpha} - \alpha \cdot x \leqslant 1-\alpha \ \forall x > 0.$$

Для доведення останньої нерівності розглянемо функцію

$$f(x) = x^{\alpha} - \alpha x,$$

де $0<\alpha<1$, а $x>0$.

Оскільки $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1}-1) > 0$, коли $x \in (0;1)$, і $f'(x) < 0$, коли $x>1$, то

$$f(1) = 1-\alpha = \max_{(0;\infty)} f(x) \Rightarrow x^{\alpha} - \alpha x < f(1) = 1-\alpha \ \forall x > 0.$$

Цим завершено доведення нерівності (8) і твердження про те, що l^p *є метричним простором.*

1.1.7. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Простір $\mathbb{R}^1$ — це множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел, на якій якимось чином введено відстань між будь-якими двома точками.
2. Нерівність трикутника у просторі $\mathbb{R}^n$ рівносильна нерівності Коші — Буняковського $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2$.
3. Відстань між дійсними числами можна визначити тільки єдиним способом.
4. Множину $\mathbb{R}$ можна зробити простором ізольованих точок.
5. Кожну непорожню множину можна зробити метричним простором, причому не єдиним способом.
6. Якщо метричні простори (M_1, ρ_1) і (M_2, ρ_2) різні, то і точки в них — об'єкти різної природи, тобто $M_1 \neq M_2$.
7. Якщо (M, ρ) — метричний простір, а $M_1 \subset M$, то (M_1, ρ) — метричний простір.
8. Якщо метричні простори (M_1, ρ_1) і (M_2, ρ_2) різні, то відстані в них визначаються різними способами.
9. Якщо $M = \mathbb{N}$ або $M = \mathbb{Q}$, а $\rho(x,y) = |x-y|$, то (M, ρ) — метричний простір.
10. Якщо $M = \mathbb{R}$, а $\rho(x,y) = \sin^2(x-y)$, то (M, ρ) — метричний простір.
11. Якщо $M = \mathbb{R}$, а $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, то (M, ρ)— метричний простір.
12. Якщо $M = \mathbb{R}$, а $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, де функція $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ фіксована, то (M, ρ) — метричний простір тоді й тільки тоді, коли $f(x) \neq f(y)\ \forall x \neq y$.
13. Якщо (M, ρ) — метричний простір, а зростаюча функція $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ така, що $f(0) = 0$ і $f(t_1 + t_2) \leqslant f(t_1) + f(t_2)\ \forall t_1$ і $t_2 \geqslant 0$, то (M, ρ_1) є метричним простором, коли $\rho_1(x,y) = f(\rho(x,y))\ \forall x$ і $y \in M$.
14. Умови твердження 13 задовольняють функції а) $f(t) = t^3$; б) $f(t) = = \ln(1+t)$; в) $f(t) = t^\alpha\ \forall \alpha \in (0;1)$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо (M, ρ) — метричний простір, то $\forall x_k \in M$, $k \in \overline{1,n}$, правильна нерівність
$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \rho(x_k, x_{k+1})\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2. Нехай $\rho(x,y)$ задовольняє аксіоми симетрії і нерівність трикутника $\forall x,y$ і $z\in M$. Тоді
   а) $|\rho(x,z)-\rho(y,z)|\leqslant\rho(x,y)$ $\forall x,$ y і $z\in M$;
   б) $|\rho(x,y)-\rho(a,b)|\leqslant\rho(x,a)+\rho(y,b)$ $\forall x,$ $y,$ a і $b\in M$.

1.2. Збіжні послідовності у метричних просторах

Поняття відстані дозволяє узагальнити поняття збіжної числової послідовності на випадок послідовності точок довільного метричного простору.

1.2.1. Поняття збіжної послідовності та її границі. Згадаємо означення скінченної границі числової послідовності (x_n):

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\;\exists n_0(\varepsilon):\;|x_n-a|<\varepsilon\;\forall n>n_0(\varepsilon).$$

Оскільки у цьому означенні $|x-a|=\rho(x,a)$ — відстань між точками x і a у просторі $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$, то природно узагальнити поняття границі послідовності на випадок, коли члени цієї послідовності є точками довільного фіксованого метричного простору.

Послідовність (x_n) точок метричного простору (M,ρ) називають *збіжною до точки* $a\in M$ і записують $a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ або $x_n\to a$ $(n\to\infty)$, якщо $\forall\varepsilon>0\;\exists n_0(\varepsilon)$: $\rho(x_n,a)<\varepsilon\;\forall n>n_0(\varepsilon)$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\rho(x_n,a)\to0$ $(n\to\infty)$.

При цьому елемент a називають *границею послідовності* (x_n) у просторі (M,ρ). Також кажуть, що (x_n) *збігається* (або *прямує*) до a у просторі (M,ρ). Суть даного поняття полягає у тому, що $x_n\overset{\text{я.з.}}{\approx}a$, коли $n\overset{\text{д.}}{\approx}\infty$, тобто x_n як завгодно близькі до a для всіх достатньо великих номерів n.

Якщо послідовність (x_n) не має границі, то кажуть, що вона *розбіжна*, або *розбігається*.

Дослідимо умови збіжності послідовності у деяких метричних просторах.

1.2.2. Умови збіжності у просторах $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^m$.

$\square$ Нехай $(x_n)=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\ldots,x_m^{(n)})$ — послідовність точок простору $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$, $m\in\mathbb{N}$, і $a=(a_1,a_2,\ldots,a_m)\in\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$. Тоді

$$x_n\to a\;(n\to\infty)\Leftrightarrow\rho(x_n,a)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}|x_k^{(n)}-a_k|^2}\to0\;(n\to\infty)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x_k^{(n)} - a_k \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall k \in \overline{1,m} \Leftrightarrow x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ $\forall k \in \overline{1,m}$. ■

Отже, має місце

Теорема 1 (критерій збіжності послідовності у просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$). *Для того щоб послідовність* $(x_n) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ *точок простору* $\mathbb{R}^m$ *або* $\mathbb{C}^m$ *була збіжною до точки* $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ *або* $\mathbb{C}^m$*, необхідно й досить, щоб вона була* ***покоординатно збіжною до цієї точки,*** *тобто* $x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ $\forall k \in \overline{1,m}$.

Приклад 1. Якщо $x_n = \left(\frac{\sin n}{n}, n \sin \frac{1}{n}\right)$, то $x_1^{(n)} = \frac{1}{n}\sin n \to 0$ $(n \to \infty)$ як добуток нескінченно малої на обмежену; $x_2^{(n)} = \frac{\sin 1/n}{1/n} \to 1$ $(n \to \infty)$ за першою чудовою границею. Тому $x_n \to (0,1)$ $(n \to \infty)$ у просторі $\mathbb{R}^2$.

1.2.3. Умови збіжності у просторі l^p. Розглянемо тепер послідовність $(x_n) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}, \dots)$ точок простору l^p, $p \geqslant 1$. Легко довести (пропонуємо читачеві зробити це), що коли $x_n \to a$ $(n \to \infty)$, де $a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \in l^p$, то $x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, тобто x_n збігається до a покоординатно. Разом з цим обернене твердження неправильне.

Дійсно, якщо $x_1 = (1,0,0,\dots,0,\dots)$, $x_2 = (0,1,0,\dots,0,\dots)$, $x_3 = (0,0,1,0,\dots,0,\dots)$ і взагалі, $x_n = (\underbrace{0,\dots,0}_{n-1 \text{ нулів}},1,0,\dots,0,\dots)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то ця послідовність покоординатно збігається до точки $a = (0,0,\dots,0,\dots) \in l^p$. Але $\rho(x_n, a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - a_k| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тобто $\rho(x_n, a) \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, ця послідовність не є збіжною у просторі l^p.

Таким чином, *для послідовності* (x_n) *точок з простору* l^p, $p \geq 1$, *її покоординатна збіжність є необхідною, але не є достатньою умовою збіжності у просторі* l^p.

Приклад 2. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ у просторі l^p, якщо $x_n = \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2^{\frac{nk}{p}}}\right)$, n, $k \in \mathbb{N}$. Покоординатно $x_k^{(n)} \to a_k = \frac{1}{k^2}$ $(n \to \infty)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо $a = (a_k)$ і знайдемо $\rho^p(x_n, a) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - a_k|^p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nk}} = \frac{1}{2^n - 1} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ у просторі l^p, де $a = \left(\frac{1}{k^2}\right)$.

1.2.4. Умови збіжності у просторі ізольованих точок.

☐ Нехай (x_n) – послідовність точок простору (M,ρ) ізольованих точок і $a \in M$. Тоді $x_n \to a$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow \rho(x_n, a) \to 0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow$
$$\forall \varepsilon \in (0;1]\ \exists n_0\colon\ \rho(x_n,a) < \varepsilon \leqslant 1\ \forall n > n_0.$$
Остання нерівність за означенням простору ізольованих точок можлива тоді й тільки тоді, коли $x_n = a$ $\forall n > n_0$. Таку *послідовність* називають *стаціонарною*. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (критерій збіжності у просторі ізольованих точок). *Для того, щоб послідовність була збіжною у просторі ізольованих точок, необхідно й досить, щоб вона була стаціонарною.*

1.2.5. Умови збіжності у просторі $C[a;b]$.

☐ Розглянемо послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ точок з простору $C[a;b]$. Тоді якщо $x = x(t) \in C[a;b]$, то $x_n \to x$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow$
$$\rho(x_n,x) = \max_{[a;b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0\ \Leftrightarrow x_n(t) \rightrightarrows x(t)\ (n \to \infty) \text{ на } [a;b],$$
тобто функціональна послідовність $(x_n(t))$ є рівномірно збіжною до функції $x = x(t)$ на відрізку $[a;b]$. ■

Отже, доведена

Теорема 3 (критерій збіжності у просторі $C[a;b]$). *Для того щоб послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ була збіжною до $x = x(t)$ у просторі $C[a;b]$, необхідно й досить, щоб ця послідовність була рівномірно збіжною до функції $x = x(t)$ на відрізку $[a;b]$.*

Приклад 3. 1) Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = \sqrt{t+\varepsilon_n}$, де $t \in [0;1]$, $0 < \varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$, і знайдемо її границю у просторі $C[0;1]$.

Поточково $x_n(t) \to \sqrt{t}$ $(n \to \infty)$ $\forall t \in [0;1]$. Знайдемо у просторі $C[0;1]$ відстань $\rho(x_n,x) = \max\limits_{[0;1]} |\sqrt{t+\varepsilon_n} - \sqrt{t}| = \max\limits_{[0;1]} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{t+\varepsilon_n}+\sqrt{t}} = \sqrt{\varepsilon_n} \to 0$ $(n \to \infty)$. Отже, $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ у просторі $C[0;1]$.

2) Послідовність $x_n = t^n$, $t \in [0;1]$, поточково збігається до функції $x(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ 1, & t = 1, \end{cases}$ яка є розривною на відрізку $[0;1]$. Тому у просторі $C[0;1]$ ця послідовність (x_n) не має границі.

1.2.6. Умови збіжності у просторі $CR[a;b]$. Зауважимо, що умова рівномірної збіжності є достатньою для того, щоб послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ була збіжною до $x = x(t)$ у просторі $CR[a;b]$. Це випливає з нерівності

$$\rho(x_n,x) = (R)\int\limits_a^b |x_n(t)-x(t)|\,dt \leqslant \max_{[a;b]}|x_n(t)-x(t)|\cdot(b-a).$$

Разом з тим для послідовності $(x_n) = (t^n)$, $t \in [0;1]$, маємо:

$$\rho(x_n,0) = (R)\int\limits_0^1 |t^n-0|\,dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0 \ (n\to\infty),$$

але $t^n \not\rightrightarrows 0$ на $[0;1]$, бо $\max\limits_{[0;1]}|t^n-0| = 1 \not\to 0$ $(n\to\infty)$.

Отже, *умова рівномірної збіжності є достатньою, але не є необхідною для того, щоб послідовність* $(x_n) = (x_n(t))$ *була збіжною у просторі* $CR[a;b]$.

1.2.7. Властивості границі послідовності. Оскільки означення границі послідовності у довільному метричному просторі за формою таке саме, як і у просторі $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$, то природно чекати, що й властивості границі послідовності у метричному просторі (M,ρ) нагадують властивості границі послідовності у просторі $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$. І це дійсно так. Сформулюємо ці властивості:

1° (про єдиність границі). *Кожна послідовність у просторі* (M,ρ) *має не більше однієї границі.*

2° (про границю підпослідовності). *Якщо* $x_n \to a$ $(n\to\infty)$, *то* $x_{n_k} \to a$ $(k\to\infty)$ $\forall n_k \uparrow \infty$ $(k\to\infty)$.

3° (про неперервність відстані). *Якщо* $x_n \to a$ *і* $y_n \to b$ $(n\to\infty)$ *у метричному просторі* (M,ρ), *то* $\rho(x_n,y_n) \to \rho(a,b)$ $(n\to\infty)$.

Щоб сформулювати наступну властивість, введемо поняття обмеженої послідовності у метричному просторі: послідовність (x_n), де $x_n \in M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, називають *обмеженою* у просторі (M,ρ), якщо $\forall a \in M$ $\exists H>0$: $\rho(x_n,a) \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

4° (про обмеженість збіжної послідовності). *Якщо послідовність є збіжною у метричному просторі* (M,ρ), *то вона є обмеженою у цьому просторі.*

□ Для доведення властивості 1° припустимо, що деяка послідовність (x_n) у деякому метричному просторі (M,ρ) має більше однієї границі. Тоді у цьому просторі існують точки a і b такі, що $a \neq b$, але $x_n \to a$ і $x_n \to b$ $(n \to \infty)$. Враховуючи нерівність трикутника, маємо $\rho(a,b) \leq \rho(a,x_n) + \rho(x_n,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Звідси, враховуючи, що $\rho(a,x_n) = \rho(x_n,a) \to 0$ і $\rho(x_n,b) \to 0$ $(n \to \infty)$, дістаємо, що $\rho(a,b) \leqslant 0$. Але $\rho(a,b) > 0$, оскільки $a \neq b$, тобто дістали протиріччя, яке доводить властивість 1°. ■

□ Для доведення властивості 3° зауважимо, що коли $\rho(x_n,y_n) - -\rho(a,b) \geqslant 0$, то

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(a,b)| = \rho(x_n,y_n) - \rho(a,b) \leqslant \rho(x_n,a) + \rho(a,y_n) - \rho(a,b) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_n,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y_n) - \rho(a,b) = \rho(x_n,a) + \rho(y_n,b).$$

До такої самої нерівності приходимо і у випадку, коли $\rho(x_n,y_n) - -\rho(a,b) \leqslant 0$. Тому $|\rho(x_n,y_n) - \rho(a,b)| \leqslant \rho(x_n,a) + \rho(y_n,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\rho(x_n,a) \to 0$ і $\rho(y_n,b) \to 0$ $(n \to \infty)$, то з останньої нерівності за відомими властивостями (якими?) границі числової послідовності дістанемо, що $|\rho(x_n,y_n) - \rho(a,b)| \to 0$, тобто $\rho(x_n,y_n) \to \rho(a,b)$ $(n \to \infty)$. ■

Інші властивості пропонуємо читачеві довести самостійно.

Зауваження. Природно виникає питання про те, чи є правильним у довільному метричному просторі критерій Коші збіжності послідовності. Відповідь на це питання дана у підрозділі 1.6.

1.2.8. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо (x_n) збігається до a у метричному просторі (M,ρ), то $\exists \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\rho(x_n,a) < \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Якщо $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ у метричному просторі (M,ρ), то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $|x_n - a| < \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$.
4. Якщо $x_n \in M_1 \subset M$ $\forall n$ і $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ в (M,ρ), то $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ в (M_1,ρ).
5. Якщо $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ у метричному просторі (M,ρ), то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\rho(x_m,x_n) < \varepsilon$ $\forall m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon)$.
6. Твердження, обернене до 5, є правильним.
7. Якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $\rho(x_m,x_n) < \varepsilon$ $\forall m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon)$, то послідовність (x_n) обмежена у метричному просторі (M,ρ).
8. Якщо $\exists n_k \uparrow \infty$: $\rho(x_{n_k},a) \to 0$ $(k \to \infty)$, то послідовність (x_n) є збіжною у метричному просторі (M,ρ).

9. Якщо виконано умови тверджень 7 і 8, то послідовність (x_n) є збіжною у метричному просторі (M, ρ).
10. Якщо (x_n) є збіжною у метричному просторі (M, ρ), то (x_n) є стаціонарною у цьому просторі.
11. Твердження, обернене до 10, є правильним.
12. Якщо функціональна послідовність $(x_n(t))$ є рівномірно збіжною на відрізку $[a; b]$, то послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ є збіжною у метричному просторі $C[a; b]$.
13. Існує метричний простір, у якому кожна послідовність є обмеженою.
14. Послідовність (x_n) обмежена у метричному просторі (M, ρ) тоді й тільки тоді, коли $\exists a \in M$ і $\exists H > 0$: $\rho(x_n, a) < H\ \forall n \in \mathbb{N}$.
15. Кожна послідовність у даному метричному просторі має єдину границю.
16. Якщо $\forall n_k \uparrow \infty$ підпослідовність (x_{n_k}) є збіжною у метричному просторі (M, ρ), то й послідовність (x_n) є збіжною у метричному просторі (M, ρ).
17. Якщо $\rho(x_n, y_n) \to \rho(a, b)$ $(n \to \infty)$, то $x_n \to a$ і $y_n \to b$ $(n \to \infty)$ у метричному просторі (M, ρ).
18. У метричному просторі $\mathbb{C}^1$ послідовність (z_n) є збіжною тоді й тільки тоді, коли $(|z_n|)$ є збіжною послідовністю.
19. У метричному просторі $\mathbb{C}^1$ $z_n \to 0$ $(n \to \infty) \Leftrightarrow |z_n| \to 0$ $(n \to \infty)$.
20. У метричному просторі $\boldsymbol{m}$ обмежених послідовностей послідовність $(x_n) = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, \ldots)$ є збіжною до $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots) \in \boldsymbol{m}$ тоді й тільки тоді, коли а) $x_k^{(n)} \to a_k$ $(n \to \infty)$ $\forall k$ або б) $x_k^{(n)} \rightrightarrows a_k$ $(n \to \infty)$ на множині $\mathbb{N}$.
21. У метричному просторі l^p послідовність $(x_n) = ((x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}, \ldots))$ є збіжною до $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots) \in l^p$ тоді й тільки тоді, коли $x_k^{(n)} \rightrightarrows a_k$ $(n \to \infty)$ на множині $\mathbb{N}$.

II. Довести дані твердження.

1. Послідовність (x_n), де $x_n = (x_k^{(n)})$, а $x_k^{(n)} = 0$, коли $k \neq n$, і $x_n^{(n)} = 1$, є послідовність з простору m, яка покоординатно збігається, але не збігається у просторі m.
2. Послідовність (x_n), де $x_n = (x_k^{(n)})$, а $x_k^{(n)} = \frac{1}{n^{1/p}}$, $\forall k \in \overline{1, n}$, і $x_k^{(n)} = 0\ \forall k > n$, є послідовністю з простору l^p $p \geqslant 1$, причому $x_k^{(n)} \rightrightarrows 0$ $(n \to \infty)$ на множині $\mathbb{N}$, але (x_n) не є збіжною у просторі l^p.

3. Послідовність (x_n) обмежена у метричному просторі (M,ρ) тоді й тільки тоді, коли $\exists a \in M$, $H > 0$ і $n_0 > 0$: $\rho(x_n, a) \leqslant H$ $\forall n \geqslant n_0$.

1.3. Класифікація точок метричного простору стосовно даної множини

У даному підрозділі цілком природно вводяться поняття зовнішньої, внутрішньої, межової, граничної, ізольованої точок і точки дотику даної множини у метричному просторі. Зокрема, стає зрозумілою назва простору ізольованих точок.

1.3.1. Поняття кулі, замкненої кулі та сфери. Із шкільного курсу математики відомо, що множину точок тривимірного простору, віддалених від даної точки a на відстань, меншу за дане число $r > 0$, називають *кулею*. За аналогією це поняття узагальнюється на довільний метричний простір: *кулею (замкненою кулею) у просторі* (M,ρ) *із центром у точці* $a \in M$ *і радіусом* $r > 0$ називають множину

$$K(a,r) = \{x \in M : \ \rho(x,a) < r\} \ (\overline{K}(a,r) = \{x \in M : \ \rho(x,a) \le r\}).$$

При цьому множину $S(a,r) = \{x \in M : \ \rho(x,a) = r\}$ *називають сферою із центром у точці* a *і радіусом* $r > 0$.

Геометричну ілюстрацію кулі, замкненої кулі і сфери для просторів $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$ дано відповідно на рис. 2, 3 та 4.

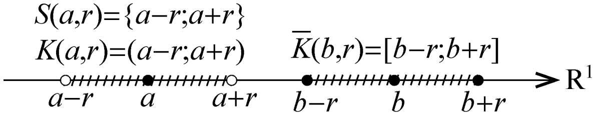

Рис. 2

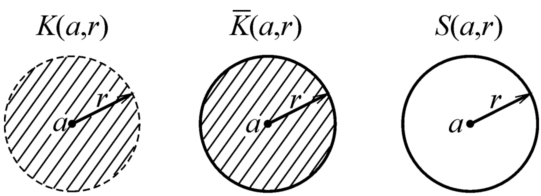

Рис. 3

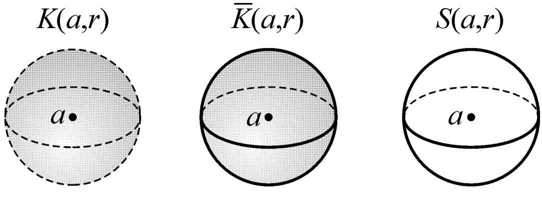

Рис. 4

Приклад 1. Для простору $C[a;b]$ точками кулі $K(a,r)$ (замкненої кулі $\overline{K}(a,r)$) є функції $x = x(t) \in C[a;b]$, графіки яких лежать у відкритій (замкненій) криволінійній смузі P ($\overline{P}$), зображеній на рис. 5.

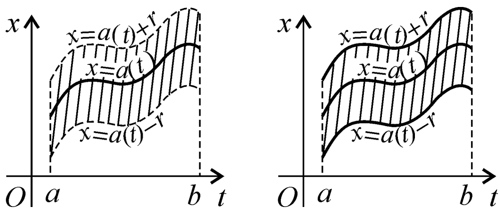

Рис. 5

Точками сфери $S(a,r)$ у просторі $C[a;b]$ є функції $x = x(t) \in C[a;b]$, графіки яких лежать у замкненій смузі $\overline{P}$, причому мають спільні точки з графіком або функції $x = a(t) + r$, або функції $x = a(t) - r$.

Кулю $K(a,r)$ називають також *r-околом* або *околом точки a* у метричному просторі (M,ρ) і позначають $O_r(a)$ або $O(a)$. *Проколеним r-околом* (*проколеним околом*) *точки a у просторі* (M,ρ) називають множину $O_r^*(a) := O_r(a) \setminus \{a\} =: O^*(a)$.

1.3.2. Класифікація точок метричного простору стосовно даної множини. Нехай E — довільна множина точок з метричного простору (M,ρ). Тоді точку a називають

- *внутрішньою точкою* множини E, якщо вона належить E разом із своїм деяким околом, тобто $\exists \varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a) \subset E$;
- *зовнішньою точкою* множини E, якщо у деякому околі цієї точки немає жодної точки з множини E, тобто $\exists \varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a) \cap$ $\cap E = \varnothing$;
- *межовою точкою* множини E, якщо у довільному околі цієї точки є як точки з множини E так і точки, що не належать E, тобто $O_\varepsilon(a) \cap E \neq \varnothing$ і $O_\varepsilon(a) \cap (M \setminus E) \neq \varnothing$ $\forall \varepsilon > 0$;

- *ізольованою точкою* множини E, якщо у деякому околі цієї точки є лише одна точка з E, а саме a, тобто $\exists\varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(a)\cap$ $\cap E = \{a\}$;
- *точкою дотику* множини E, якщо у довільному околі цієї точки є точки з множини E, тобто $O_\varepsilon(a)\cap E \neq \varnothing$ $\forall\varepsilon > 0$;
- *граничною точкою* множини E, якщо у довільному проколеному околі цієї точки є точки з множини E, тобто $O^*_\varepsilon(a)\cap$ $E \neq \varnothing$ $\forall\varepsilon > 0$.

Назва простору ізольованих точок пояснюється тим, що кожна точка цього простору є ізольваною для нього.

Приклад 2. Якщо $E = [0;1)\cup\{2\}$, то у просторі $\mathbb{R}^1$ внутрішніми для E є точки інтервалу $(0;1)$, зовнішніми є точки множини $(-\infty;0)\cup(1;2)\cup$ $\cup(2;+\infty)$, межовими є точки 0, 1 і 2, ізольованою є точка 2, точками дотику є точки множини $[0;1]\cup\{2\}$, граничними є точки відрізка $[0;1]$.

Для даної множини E з метричного простору (M,ρ) розглядають множини:

- *внутрішність* E — множину E° усіх внутрішніх точок множини E;
- *зовнішність* E — множину усіх зовнішніх точок множини E;
- *межу* E — множину ∂E усіх межових точок множини E;
- *замикання* E — множину $\overline{E}$ усіх точок дотику множини E;
- *похідну множину* E — множину E' усіх граничних точок множини E.

Приклад 3. Легко бачити, що коли $E = K(a,r)$, то $E^\circ = K(a,r)$ — внутрішність E, $\{x : \rho(x,a) > r\}$ — зовнішність E, $\partial E = S(a,r)$ — межа E, $\overline{E} = \overline{K}(a,r)$ — замикання E, а $E' = \overline{K}(a,r)$, коли $E\subset\mathbb{R}^n$, і $E' = \varnothing$, коли E — множина з простору ізольованих точок.

Для ілюстрації методів доведення цих тверджень доведемо співвідношення $E^\circ = E$.

□ Якщо $x_0\in K(a,r)$, то $\rho(x_0,a) = r_1 < r$, а тому $\varepsilon = r - r_1 > 0$. Розглянемо $O_\varepsilon(x_0)$. Оскільки $\rho(x,x_0) < \varepsilon = r - r_1$ $\forall x\in O_\varepsilon(x_0)$, то за нерівністю трикутника $\rho(x,a) \leqslant \rho(x,x_0)+\rho(x_0,a) < r - r_1 + r_1 = r$, тобто $x\in K(a,r)$, якщо $x\in O_\varepsilon(x_0)$. Отже, $\exists\varepsilon > 0$: $O_\varepsilon(x_0)\subset K(a,r)$, а тому довільна точка x_0 кулі $K(a,r)$ є внутрішньою точкою цієї кулі. Якщо $x_0\notin K(a,r)$, то $\forall\varepsilon > 0$ $O_\varepsilon(x_0)\not\subset K(a,r)$, а тому внутрішність кулі $K(a,r)$ збігається з цією кулею. ■

1.3.3. Критерії граничної точки і точки дотику. Розглянемо детальніше поняття граничної точки множини.

□ 1) З'ясуємо, чи може деякий проколений окіл $O^*_\varepsilon(x_0)$ граничної точки x_0 множини E містити в собі тільки скінченну кількість точок множини E. Припустимо, що це так, тобто $\exists\varepsilon > 0$: $O^*_\varepsilon(x_0) \cap \cap E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Позначивши $\delta = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \rho(x_0, x_k)$, помітимо, що $O^*_\delta(x_0) \cap E = \varnothing$, що суперечить означенню граничної точки.

Отже, *якщо* x_0 *— гранична точка множини* E*, то в будь-якому її околі міститься нескінченна кількість точок множини* E. Зрозуміло, що правильне і обернене твердження.

2) Встановимо тепер зв'язок між поняттям граничної точки і поняттям збіжності. Нехай $x_0 \in E'$, тобто $\forall\varepsilon > 0$ $O^*_\varepsilon(x_0) \cap E \neq \varnothing$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in O^*_{1/n}(x_0) \cap E \Rightarrow \exists(x_n)$: $x_0 \neq x_n \in E$ $\forall n$ і $0 < \rho(x_n, x_0) < < 1/n \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Нехай тепер $\exists(x_n)$: $x_0 \neq x_n \in E$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Тоді $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$: $0 < \rho(x_n, x_0) < \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in O^*_\varepsilon(x_0) \cap E \Rightarrow O^*_\varepsilon(x_0) \cap \cap E \neq \varnothing$ $\forall\varepsilon > 0$, тобто $x_0 \in E'$. ■

Отже, має місце

Теорема 1 (критерії граничної точки). *Для того щоб точка* x_0 *була граничною точкою множини* E*, необхідно й досить, щоб виконувалась будь-яка з умов:* 1) *у довільному околі точки* x_0 *міститься безліч точок з множини* E; 2) $\exists(x_n)$: $x_0 \neq x_n \in E$ $\forall n$ *і* $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Зміст поняття точки дотику стає більш зрозумілим після того, як його пов'язати з поняттям відстані від точки до множини.

Нехай точка x_0 і множина $E \neq \varnothing$ лежать у метричному просторі (M, ρ). Назвемо *відстанню від точки* x_0 *до множини* E число

$$\rho(x_0, E) := \inf_{y\in E} \rho(x_0, y).$$

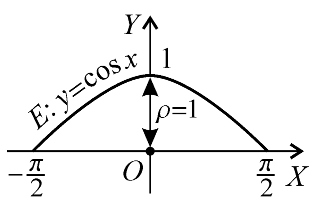

Рис. 6

Приклад 4. 1) Якщо $E = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\rho(a, E) = 0$, але не навпаки.

2) Якщо $E = \{(x, \cos x)\colon x \in [-\pi/2; \pi/2]\}$, $O = (0,0)$, то у просторі $\mathbb{R}^2$ $\rho(O, E) = = \min\limits_{[-\pi/2;\pi/2]} \sqrt{x^2 + \cos^2 x} = 1$ (рис. 6).

З'ясуємо, як можна трактувати рівність $\rho(x_0, E) = 0$.

□ За критерієм інфімуму $\rho(x_0, E) = \inf\limits_{y\in E} \rho(x_0, y) = 0 \Leftrightarrow \big(\forall\varepsilon > 0$

$\exists y \in E\colon 0 \leqslant \rho(x_0,y) < \varepsilon\big) \Leftrightarrow \big(\forall \varepsilon > 0\ \exists y \in O_\varepsilon(x_0) \cap E\big) \Leftrightarrow x_0 \in \overline{E}$, тобто x_0 — точка дотику множини E. ■

Отже, правильна

Теорема 2 (критерій точки дотику). *Для того щоб точка* x_0 *була точкою дотику множини* E *у просторі* (M,ρ), *необхідно й досить, щоб* $\rho(x_0,E) = 0$.

Інакше кажучи, $\overline{E} = \{x \in M\colon \rho(x,E) = 0\}$.

З теореми 2 випливає очевидний

Наслідок 1. *Якщо* $x_0 \notin \overline{E}$, *то* $\rho(x_0,E) > 0$.

1.3.4. Теореми Больцано — Вейєрштрасса. Відомо, що кожна нескінченна обмежена множина E з простору $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$ має принаймні одну граничну точку. Покажемо, що це твердження має місце для довільного простору $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$.

Насамперед, назвемо множину E *обмеженою у метричному просторі* (M,ρ), якщо вона повністю лежить у кулі $S(a,r)$ з центром у довільній точці $a \in M$ і досить великого радіуса $r > 0$. Отже, множина E обмежена у просторі (M,ρ), якщо

$$\forall a \in M\ \exists r > 0\colon \rho(x,a) < r\ \forall x \in E.$$

Виявляється, що дане означення можна сформулювати дещо інакше: множина E обмежена у просторі (M,ρ), якщо

$$\exists a \in M \text{ і } \exists r > 0\colon \rho(x,a) < r\ \forall x \in E.$$

Пропонуємо читачеві самостійно впевнитися у цьому.

☐ Розглянемо тепер довільну нескінченну обмежену множину E з простору $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$. У ній існує зчисленна підмножина $E_1 \subset E$, елементи якої утворюють послідовність (x_n) з попарно різними членами $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)})$. Зрозуміло, що (x_n) — обмежена послідовність, а тому для елемента $a = (0,0,\ldots,0)$ з простору $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ існує $r > 0$ таке, що

$$\rho(x_n,a) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)} - 0|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k^{(n)}|^2} < r\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що для фіксованого $k \in \overline{1,m}$ $|x_k^{(n)}| < r\ \forall n \in \mathbb{N}$, тобто числова послідовність $(x_k^{(n)})$ є обмеженою у просторі $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$ $\forall k \in \overline{1,m}$. Відомо, що кожна обмежена числова послідовність має принаймні одну скінченну часткову границю. Тому існує

$(x_1^{(n_i^{(1)})})$ — збіжна до a_1 підпослідовність послідовності $(x_1^{(n)})$. Так само існують: $(x_2^{(n_i^{(2)})})$ — збіжна до a_2 підпослідовність послідовності $(x_2^{(n_i^{(1)})})$, $(x_3^{(n_i^{(3)})})$ — збіжна до a_3 підпослідовність послідовності $(x_3^{(n_i^{(2)})})$ і взагалі, $(x_k^{(n_i^{(k)})})$ — збіжна до a_k підпослідовність послідовності $(x_k^{(n_i^{(k-1)})})$ $\forall k \in \overline{2,m}$. Враховуючи, що за побудовою послідовність $(x_k^{(n_i^{(m)})})$ є підпослідовністю послідовності $(x_k^{(n_i^{(k)})})$ $\forall k \in \overline{1,m}$, дістанемо: $x_k^{(n_i^{(m)})} \to a_k$ $(i \to \infty)$ $\forall k \in \overline{1,m}$. Звідси за критерієм збіжності послідовності у просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ маємо: $x_{n_i^{(m)}} \in E$ $\forall i$ та

$$x_{n_i^{(m)}} = \left(x_1^{(n_i^{(m)})}, x_2^{(n_i^{(m)})}, \ldots, x_m^{(n_i^{(m)})}\right) \to (a_1, a_2, \ldots, a_m) = a \ (i \to \infty),$$

причому для всіх досить великих номерів $n_i^{(m)}$ члени $x_{n_i^{(m)}} \neq a$, оскільки вони попарно різні. Згадуючи теорему 1, дістанемо, що a є граничною точкою множини E. ■

Враховуючи проведені міркування, приходимо до висновку, що мають місце наступні теореми.

Теорема 3 (Больцано — Вейєрштрасса про збіжну підпослідовність обмеженої послідовності). *Кожна обмежена у просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ послідовність (x_n) має збіжну у цьому просторі підпослідовність.*

Теорема 4 (Больцано — Вейєрштрасса про існування граничної точки множини). *Кожна нескінченна обмежена множина з простору $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ має принаймні одну граничну точку.*

1.3.5. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. У довільному метричному просторі будь-яка замкнена куля є кулею.
2. Будь-яка замкнена куля з простору $\mathbb{R}^n$ не є кулею у цьому просторі.
3. У просторі ізольованих точок будь-яка замкнена куля є кулею.
4. У просторі ізольованих точок будь-яка куля радіуса $r_1 = 2$ співпадає з будь-якою кулею радіуса $r_1 > 1$.
5. Множина $M = [0; +\infty)$ з відстанню $\rho(x,y) = |x-y|$ є метричним простором.

6. Якщо $K(0,2) = E_1$ і $E_2 = K(1,\sqrt{2})$ − кулі з метричного простору твердження 5, то $E_1 \subset E_2$, тобто куля більшого радіуса може бути частиною кулі меншого радіуса.
7. У довільному метричному просторі (M,ρ) $O^*(a) \neq \varnothing\ \forall a \in M$.
8. $O^*(a) \neq \varnothing\ \forall a \in \mathbb{R}^m$.
9. Якщо множина E скінченна, то вона не має а) внутрішніх точок, б) граничних точок.
10. Якщо $E \neq M$, то зовнішність множини E у просторі (M,ρ) не може бути а) порожньою; б) скінченною.
11. Якщо $a \notin E$, то a − зовнішня точка E.
12. Твердження, обернене до 11, є правильним.
13. Точка $a \in E$, якщо вона є для множини E а) внутрішньою точкою; б) межовою точкою; в) точкою дотику; г) ізольованою точкою; д) граничною точкою.
14. Відстань $\rho(x_0,E)$ існує для будь-яких точки x_0 і множини $E \neq \varnothing$ метричного простору (M,ρ).
15. Якщо $a \in E^\circ$, то $a \in E'$.
16. Твердження 15 є правильним, якщо $E \subset \mathbb{R}^n$.
17. Кожна точка дотику множини E є або граничною точкою E, або ізольованою точкою E.
18. Існує метричний простір, в якому будь-яка множина не має а) граничних точок; б) межових точок.
19. Внутрішня точка множини не може бути ізольованою точкою цієї множини.
20. Якщо $x_0 \in E'$, то а) $x_0 \in E$, б) $x_0 \notin E$.
21. Якщо a − гранична точка множини E у метричному просторі $\mathbb{R}^1$, то a − гранична точка E у метричному просторі $\mathbb{R}^2$.
22. Якщо у твердженні 21 слово "гранична" замінити словом "внутрішня", то дістанемо правильне твердження.
23. Якщо $E \neq M$, то а) $E' \neq M$, б) $\partial E \neq M$, в) $E^\circ \neq M$.
24. Якщо $E = \mathbb{Q}$, то у просторі $\mathbb{R}^1$ $E' = \mathbb{R}$.

II. Довести дані твердження.

1. $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
2. $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$, але, взагалі кажучи, $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, але, взагалі кажучи, $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

5. $(A\cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$, але, взагалі кажучи, $(A\cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.
6. $(A\cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
7. $\partial E = \overline{E}\setminus E^\circ$.
8. $\overline{E} = E\cup E' = E\cup \partial E$.
9. $\partial(A\cup B)\subset \partial A\cup\partial B$, але, взагалі кажучи, $\partial(A\cup B)\neq \partial A\cup\partial B$.
10. Сфера $S(a,r)$ містить межу $\partial K(a,r)$ кулі $K(a,r)$, проте не обов'язково $S(a,r)=\partial K(a,r)$.

III. Знайти A°, ∂A, A', точки дотику, зовнішні та ізольовані точки даної множини $A\subset\mathbb{R}^1$:

1. $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{n+1/n\}$; 2. $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{k+1/n\}$;

3. $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)$; 4. $A=(0;1)\cup\left\{1,\frac12,\frac13,\dots,\frac1n,\dots\right\}$;

5. $A=\mathbb{Q}$; 6. $A=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

7. A — множина дійсних алгебраїчних чисел.

IV. Знайти A°, ∂A, A', точки дотику, зовнішні та ізольовані точки даної множини $A\subset\mathbb{C}^1$:

1. $A=\{z:\ 0\leqslant r\leqslant |z-z_0|<R\leqslant+\infty\}$.
2. $A=\{z:\ -\pi<\alpha\leqslant\arg(z-z_0)<\beta\leqslant\pi\}$.
3. $A=\{z:\ |z-1|+|z+1|=2\}$.
4. $A=\{z:\ \frac{2\operatorname{Re}z}{|z|^2}>1\}$. 5. $A=\{z:\ \frac{\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z}{|z|}\leqslant 1\}$.
6. $A=\{z:\ |z|-\operatorname{Im}z\leqslant 1\}$. 7. $A=\{z:\ \frac{\operatorname{Im}z}{|z|}\leqslant\frac12\}$.

1.4. Відкриті, замкнені і досконалі множини у метричних просторах

Поняття відкритої, замкненої і досконалої множини є певним узагальненням понять числових проміжків та їх об'єднань.

1.4.1. Поняття відкритої, замкненої і досконалої множини. Множину E з метричного простору (M,ρ) називають

- *відкритою*, якщо вона не містить жодної своєї межової точки, тобто $\partial E\cap E=\varnothing$;
- *замкненою*, якщо вона містить усі свої межові точки, тобто $\partial E\subset E$;
- *досконалою*, якщо вона замкнена і не має ізольованих точок.

Приклад 1. Кожна куля $K(a,r)$ є відкритою множиною, бо жодна точка сфери $S(a,r) \supset \partial K(a,r)$ не належить до кулі $K(a,r)$. Зрозуміло, що кожна замкнена куля $\overline{K}(a,r)$ є замкненою множиною, а якщо $\overline{K}(a,r) \subset \mathbb{R}^n$, то $\overline{K}(a,r)$ − досконала множина. Зокрема, у просторі $\mathbb{R}^1$ інтервал $(a;b)$ − відкрита множина, відрізок $[a;b]$ − замкнена і досконала множина, а півінтервал $(a;b]$ не є ні відкритою, ні замкненою множиною.

Знайдемо зв'язок між відкритими і замкненими множинами.

□ Нехай E − довільна множина з простору (M,ρ), а $F = M \setminus E$. Зрозуміло, що $\partial E = \partial F$ (впевніться у цьому). Тому жодна точка ∂E не міститься у E тоді і тільки тоді, коли ця точка міститься у F, тобто $\partial E \cap E = \varnothing \Leftrightarrow \partial F \subset F$. Отже, E − відкрита $\Leftrightarrow F = M \setminus E$ − замкнена, причому $E = M \setminus F = C_M F$. Так само доводимо, що E − замкнена $\Leftrightarrow F = M \setminus E$ − відкрита. ■

Отже, має місце

Теорема 1 (про зв'язок між відкритими та замкненими множинами). *Для того щоб множина E була відкритою (замкненою) у метричному просторі* (M,ρ), *необхідно й досить, щоб множина* $F = C_M E$ *була замкненою (відкритою) у метричному просторі* (M,ρ), *причому* $E = C_M F$.

1.4.2. Критерії відкритої, замкненої і досконалої множин.

□ Нехай G − довільна відкрита множина у метричному прострі (M,ρ). Тоді будь-яка точка $x_0 \in G$ не є межовою точкою G, тобто існує окіл цієї точки, який складається тільки з точок множини G.

Отже, будь-яка точка відкритої множини G є внутрішньою точкою цієї множини.

Нехай тепер будь-яка точка множини G є внутрішньою точкою G. Тоді будь-яка межова точка G не може належати G, тобто G − відкрита множина. ■

Цим самим доведена

Теорема 2 (критерій відкритої множини). *Для того щоб множина G була відкритою у просторі* (M,ρ), *необхідно й досить, щоб кожна точка множини G була внутрішньою точкою цієї множини.*

Знайдемо умови замкненості множини.

□ 1) Розглянемо довільну замкнену множину F у метричному просторі (M,ρ) і візьмемо довільну граничну точку x_0 цієї множини.

Припустимо, що $x_0 \notin F$. Тоді у будь-якому околі точки x_0 є точки з множини F і з множини $M \setminus F$, тобто $x_0 \in \partial F \subset F \Rightarrow x_0 \in F$, а це суперечить припущенню, що $x_0 \notin F$. Отже, *кожна гранична точка замкненої множини F належить цій множині, тобто $F' \subset F$.*

2) Нехай $F' \subset F$. Тоді $\overline{F} = F' \cup F \subset F$, а тому $\overline{F} = F$.

3) Нехай $\overline{F} = F$. Візьмемо довільну послідовність (x_n): $x_n \in F\ \forall n$ та (x_n) збіжна у метричному просторі (M, ρ) до деякої точки x_0. Тоді, якщо $\exists n_0$: $x_0 = x_{n_0}$, то $x_0 \in F$, а якщо $x_n \neq x_0\ \forall n$, то за критерієм граничної точки $x_0 \in F' \subset F \Rightarrow x_0 \in F$. Отже, якщо $\overline{F} = F$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$ для будь-якої збіжної послідовності (x_n): $x_n \in F\ \forall n \in \mathbb{N}$.

4) Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$ для будь-якої збіжної послідовності (x_n): $x_n \in F\ \forall n$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \partial F$. Якщо припустити, що $x_0 \notin F$, то у будь-якому проколеному околі точки x_0 є точки з множини F. Тому $x_0 \in F'$ і за критерієм граничної точки $\exists (x_n)$: $x_0 \neq x_n \in E\ \forall n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow x_0 \in F$, що суперечить припущенню. Отже, якщо $x_0 \in \partial F$, то $x_0 \in F$. Тому $\partial F \subset F$, тобто F — замкнена множина. ■

Проведені міркування показують, що правильна

Теорема 3 (критерії замкненої множини). *Нехай F — довільна множина з метричного простору (M, ρ). Тоді твердження 1) — 4) є еквівалентними: 1) F — замкнена множина; 2) $F' \subset F$; 3) $\overline{F} = F$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F$ для будь-якої збіжної послідовності (x_n): $x_n \in F\ \forall n$.*

Знайдемо тепер критерій досконалої множини.

□ Нехай E — досконала множина. Тоді E — замкнена множина і без ізольованих точок. Тому кожна точка $x_0 \in E$ є граничною точкою E, тобто $E \subset E'$. За теоремою 3 $E' \subset E$ і тому $E' = E$.

Нехай тепер $E' = E$. Тоді $E' \subset E$ і за теоремою 3 E — замкнена множина. Крім того $E \subset E'$, тобто кожна точка E не може бути ізольованою точкою E, бо є граничною точкою множини E. ■

Отже, доведена

Теорема 4 (критерій досконалої множини). *Для того, щоб множина E була досконалою у метричному просторі (M, ρ), необхідно й досить, щоб $E' = E$.*

1.4.3. Об'єднання та переріз відкритих і замкнених множин. Легко бачити, що об'єднання будь-якої кількості інтервалів є відкритою множиною у просторі $\mathbb{R}^1$. Природно виникає питання, *чи є відкритою множиною довільне об'єднання множин, відкритих у довільному просторі* (M,ρ), та аналогічне питання про переріз відкритих множин.

□ Нехай G_k — відкриті множини у метричному просторі (M,ρ) $\forall k \in \Lambda$, а $G = \bigcup\limits_k G_k$. Тоді $\forall x_0 \in G$ $\exists k_0$: $x_0 \in G_{k_0}$ і за теоремою 2 $\exists O(x_0) \subset G_{k_0} \Rightarrow O(x_0) \subset G$, а тому знову за теоремою 2 множина G є відкритою.

Якщо $G_k = \left(-\frac{1}{k};\frac{1}{k}\right)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то G_k — відкриті множини у просторі $\mathbb{R}^1$, але множина $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k};\frac{1}{k}\right) = \{0\}$ не є відкритою у просторі $\mathbb{R}^1$.

Отже, переріз нескінченної кількості відкритих множин може не бути відкритою множиною.

Розглянемо відкриті множини G_1 і G_2 та їх переріз $G = G_1 \cap G_2$. Тоді $\forall x_0 \in G$ маємо $x_0 \in G_1$ і $x_0 \in G_2$. За теоремою 2 $\exists O_{r_1}(x_0) \subset G_1$ і $O_{r_2}(x_0) \subset G_2$, а тому $O_r(x_0) \subset G_1 \cap G_2$, де $r = \min\{r_1, r_2\}$. Отже, за теоремою 2 множина $G = G_1 \cap G_2$ відкрита.

Методом математичної індукції легко довести, що у довільному метричному просторі $\forall n \in \mathbb{N}$ множина $G = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ є відкритою, якщо множини G_k відкриті $\forall k \in \overline{1,n}$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 5 (про об'єднання та переріз відкритих множин). 1. *Об'єднання будь-якої кількості відкритих множин є відкритою множиною.* 2. *Переріз нескінченної кількості відкритих множин може не бути відкритою множиною, але переріз будь-якої скінченної кількості відкритих множин є відкритою множиною.*

Аналогічними міркуваннями можна довести, що правильна

Теорема 6 (про об'єднання та переріз замкнених множин). 1. *Переріз будь-якої кількості замкнених множин є замкненою множиною.* 2. *Об'єднання нескінченної кількості замкнених множин може не бути замкненою множиною, але об'єд-*

нання будь-якої скінченної кількості замкнених множин є замкненою множиною.

Пропонуємо читачеві самостійно довести теорему 6 та вирішити питання про об'єднання та переріз досконалих множин.

1.4.4. Структура лінійних відкритих, замкнених і досконалих множин. *Лінійною множиною* називають довільну множину E з простору $\mathbb{R}^1$. Визначимо будову такої множини за умови, що вона є відкритою, замкненою чи досконалою.

$\square$ Припустимо що $G \neq \varnothing$ − відкрита множина у просторі $\mathbb{R}^1$. Тоді за теоремою 2 кожна точка $x_0 \in G$ є внутрішньою точкою G, тобто $\exists O_r(x_0) = (x_0 - r; x_0 + r) \subset G \Rightarrow [x_0; x_0 + r) \subset G$. Звідси випливає, що множина $E = \{b\colon [x_0; b) \subset G\}$ є непорожньою, а тому $\exists \beta = \sup E \leqslant +\infty$.

Припустимо, що $\beta \in G$. Тоді $\exists \varepsilon > 0\colon (\beta - \varepsilon; \beta + \varepsilon) \subset G$ і за критерієм супремуму $\exists b \in E\colon b > \beta - \varepsilon$, тобто

$$[x_0; b) \subset G \text{ і } [b; \beta + \varepsilon) \subset G \Rightarrow [x_0; \beta + \varepsilon) \subset G,$$

тобто $\beta + \varepsilon \in E$. Останнє суперечить тому, що $\beta = \sup\{b\colon [x_0; b) \subset \subset G\} = \sup E$. Отже, $\beta = \sup E \notin G$.

Візьмемо довільну точку $x^* \in [x_0; \beta)$. Тоді $x_0 \leqslant x^* < \beta$ і за критерієм супремуму

$$\exists b \in E : \ b > x^* \Rightarrow [x_0; b) \subset G \text{ і } x_0 \leqslant x^* < b,$$

тобто $x^* \in G$. Отже, кожна точка проміжку $[x_0; \beta)$ належить G і тому $[x_0; \beta) \subset G$, але $\beta \notin G$.

Так само показуємо існування $\alpha \geqslant -\infty$, для якого $(\alpha; x_0] \subset G$, але $\alpha \notin G$.

Отже, $\forall x_0 \in G\ \exists (\alpha; \beta)\colon x_0 \in (\alpha; \beta) \subset G$, але $\alpha \notin G$ і $\beta \notin G$.

Інтервал $(\alpha; \beta)$, який повністю лежить у G, а його кінці не належать до G, називається *складовим інтервалом множини* G. $\blacksquare$

Таким чином, доведена

Лема 1 (про існування складових інтервалів відкритої множини). *Кожна точка x непорожньої відкритої лінійної множини G належить певному складовому інтервалу* $(\alpha; \beta) = (\alpha(x); \beta(x))$ *цієї множини.*

Дослідимо, чи можуть перетинатися різні складові інтервали даної множини.

□ Нехай x і y — різні точки множини G, а $(\alpha(x);\beta(x))$ і $(\alpha(y);\beta(y))$ — відповідні їм складові інтервали множини G, тобто $x \in (\alpha(x);\beta(x)) \subset G$, $y \in (\alpha(y);\beta(y)) \subset G$ і точки $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha(y)$, $\beta(y) \notin G$.

Припустимо, що ці інтервали перетинаються. Тоді якийсь із кінців одного складового інтервалу, наприклад $\alpha(x)$, належить іншому складовому інтервалу: $\alpha(x) \in \big(\alpha(y);\beta(y)\big) \Rightarrow \alpha(x) \in G$, що неможливо. Отже, для даних складових інтервалів можливі лише випадки, коли вони не перетинаються, або коли вони збігаються. ■

Таким чином, має місце

Лема 2 (про різні складові інтервали множини). *Різні складові інтервали множини G попарно не перетинаються.*

Визначимо тепер, *скільки складових інтервалів може мати дана лінійна множина G.*

□ Можливо, що G взагалі не має складових інтервалів. Якщо ж існують складові інтервали G, то поставимо у відповідність кожному такому інтервалу $(\alpha;\beta)$ фіксовану раціональну точку $x_{(\alpha;\beta)} \in$ $\in (\alpha;\beta)$. Тоді, враховуючи лему 2, дістанемо взаємно однозначне відображення множини складових інтервалів G на певну підмножину $\mathbb{Q}_1$ множини $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. За відомим твердженням $\mathbb{Q}_1$ — не більш ніж зчисленна множина, а тому не більш ніж зчисленною є і множина складових інтервалів множини G. ■

Цим самим доведена

Лема 3 (про кількість складових інтервалів). *Кожна лінійна множина має не більш ніж зчисленну кількість складових інтервалів.*

□ Розглянемо довільну лінійну відкриту множину $G \neq \varnothing$. За лемою 1 вона має складові інтервали, яких за лемою 3 не більш ніж зчисленна кількість. Позначимо ці інтервали $(\alpha_k;\beta_k)$, де $k \in \mathbb{N}$ або $k \in \overline{1,n}$ для деякого $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $(\alpha_k;\beta_k) \subset G$, то $\bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k) \subset G$. З іншого боку за лемою 1 $\forall x \in G\ \exists k_0$: $x \in (\alpha_{k_0};\beta_{k_0})$, тобто $G \subset \bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)$. Отже, $G =$ $= \bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)$, причому за лемою 2 інтервали $(\alpha_k;\beta_k)$ попарно не перетинаються.

Навпаки, якщо $G = \bigcup\limits_k(\alpha_k;\beta_k)$, то за теоремою 5 множина G є відкритою у просторі $\mathbb{R}^1$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 7 (про структуру лінійної відкритої множини). *Для того щоб лінійна множина G була відкритою необхідно й досить, щоб вона була об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості інтервалів $(\alpha_k;\beta_k)$ (складових інтервалів G), які попарно не перетинаються.*

Приклад 2. Множина $G_1 = (0;1)\cup(1;2)\cup(2;3)$ є відкритою множиною з трьома складовими інтервалами, а відкрита множина $G_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(n;n+1)$ має зчисленну кількість складових інтервалів. Множина $E = [0;1)$ не має складових інтервалів і непорожня, тому за теоремою 7 вона не є відкритою у просторі $\mathbb{R}^1$.

□ Розглянемо тепер будову лінійної замкненої множини.

Нехай F — довільна лінійна множина. За теоремою 1 F є замкненою у $\mathbb{R}^1 \Leftrightarrow G = \mathbb{R}\setminus F$ відкрита у $\mathbb{R}^1$, причому $F = \mathbb{R}\setminus G$. Звідси за теоремою 7 дістаємо, що F — замкнена у просторі $\mathbb{R}^1 \Leftrightarrow$ $F = \mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k}(\alpha_k;\beta_k)$, де інтервали $(\alpha_k;\beta_k)$ попарно не перетинаються, їх не більш ніж зчисленна кількість, а кожен із скінченних кінців цих інтервалів належить множині F. ■

Інтервал $(\alpha;\beta)$, в якому немає жодної точки з множини F, а кожен скінченний кінець цього інтервалу належить до F, називається *суміжним інтервалом множини F*.

Враховуючи сказане, дістаємо, що правильна

Теорема 8 (про структуру лінійної замкненої множини). *Для того щоб лінійна множина F була замкненою, необхідно й досить, щоб її можна було дістати з числової прямої шляхом викидання не більш ніж зчисленної кількості інтервалів* $(\alpha_k;\beta_k)$ *— суміжних інтервалів F, які попарно не перетинаються.*

Визначимо специфіку доведеного критерію для випадку обмеженої множини.

□ Припустимо, що $F \neq \varnothing$ — обмежена замкнена лінійна множина, $a = \inf F$ і $b = \sup F$. Тоді за властивостями супремуму та інфімуму маємо, що $a \in \partial F$ і $b \in \partial F$, а тому за означенням замкненої множини $a \in F$ і $b \in F$. Звідси випливає, що $(-\infty;a) =: (\alpha_1;\beta_1)$

і $(b;+\infty) =: (\alpha_2;\beta_2)$ − суміжні інтервали множини F. Тому, якщо F має інші суміжні інтервали $(\alpha_k;\beta_k)$, $k = 3,4,\ldots$, то, враховуючи теорему 8, маємо $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1}(\alpha_k;\beta_k) = \Big(\mathbb{R} \setminus \big((-\infty;a)\cup(b;+\infty)\big)\Big)\setminus$ $\setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 3}(\alpha_k;\beta_k) = [a;b] \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 3}(\alpha_k;\beta_k)$.

Відрізок $[a;b]$, де $a = \inf F$, $b = \sup F$, називають *найменшим відрізком, що містить F*. ■

Отже, доведена

Теорема 9 (про структуру лінійної обмеженої замкненої множини). *Для того щоб лінійна обмежена множина F була замкненою, необхідно й досить, щоб її можна було дістати з найменшого відрізка, що містить F, шляхом викидання не більш ніж зчисленної кількості інтервалів $(\alpha_k;\beta_k)$, які попарно не перетинаються.*

Приклад 3. Для множини $F = [0;1]\cup\{2\}$ найменшим відрізком, що містить F, є відрізок $[0;2]$, а суміжними інтервалами є інтервали $(-\infty;0)$, $(1;2)$ і $(2;+\infty)$. Ця множина задовольняє умови теорем 8 і 9, а тому є замкненою лінійною множиною.

Легко бачити, що при викиданні з $\mathbb{R}$ або з відрізка $[a;b]$ суміжних інтервалів множини F можуть утворитися ізольовані точки F тоді й тільки тоді, коли інтервали, котрі викидаються, мають спільні кінці або один з одним або з відрізком $[a;b]$.

Враховуючи це та теореми 8 і 9, дістаємо, що має місце

Теорема 10 (про структуру лінійної досконалої множини). *Для того щоб лінійна множина F була досконалою, необхідно й досить, щоб її можна було дістати з числової прямої* (*або з найменшого відрізка* $[a;b]$, *що містить F*) *шляхом викидання не більш ніж зчисленної кількості інтервалів* $(\alpha_k;\beta_k)$, *які попарно не перетинаються і не мають спільних кінців один з одним* (*та з найменшим відрізком* $[a;b]$, *що містить F*).

Приклад 4. Для множини F з прикладу 3 суміжні інтервали $(1;2)$ і $(2;+\infty)$ мають спільний кінець. Тому ця множина не є досконалою. Довільний же відрізок $[a;b]$ є досконалою множиною, якщо $a < b$.

1.4.5. Відкрита та досконала множини Кантора. Поділимо відрізок $[0;1]$ на три рівні відрізки точками $\frac{1}{3}$ та $\frac{2}{3}$ і викинемо серединний інтервал, тобто $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$, з відрізка $[0;1]$. Утворилося два відрізки $[0;\frac{1}{3}]$ і $[\frac{2}{3};1]$, кожен з яких поділимо на три рівні відрізки точками $\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{7}{9}$ та $\frac{8}{9}$ і викинемо серединні інтервали, тобто $(\frac{1}{9};\frac{7}{9})$ і $(\frac{7}{9};\frac{8}{9})$. Утворилося чотири нових відрізки, кожен з яких поділимо на три рівні відрізки, викинемо серединні інтервали і т. д. (див. рис. 7).

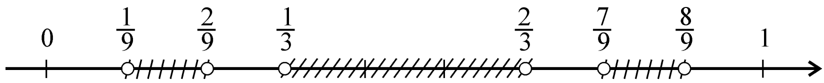

Рис. 7

Отже, з відрізка $[0;1]$ викидаємо інтервали: на першому кроці один інтервал довжиною $\frac{1}{3}=\frac{1}{3^1}$, на другому кроці два інтервала довжиною $\frac{1}{9}=\frac{1}{3^2}$, на третьому кроці чотири інтервала довжиною $\frac{1}{27}=\frac{1}{3^3}$ і т. д. На n-му кроці викидаємо 2^{n-1} інтервалів довжиною $\frac{1}{3^n}$ кожен. В цьому можна впевнитись методом математичної індукції. Позначимо інтервали, що викидаємо, $(\alpha_k;\beta_k)$, $k=1,2,\ldots$. Зрозуміло, що цих інтервалів зчисленна кількість, вони попарно не перетинаються і не мають спільних кінців один з одним та з відрізком $[0;1]$. Тому за теоремою 7 множина

$$G_0=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\alpha_k;\beta_k)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)\cup\ldots$$

є відкритою множиною, а множина $P_0=[0;1]\setminus G_0$ за теоремою 10 є досконалою множиною. Множину G_0 називають *відкритою множиною Кантора*, а множину P_0 — *досконалою множиною Кантора*.

На перший погляд множина P_0 містить лише точки поділу та точки 0 і 1, а тому є зчисленною. Але це не так.

□ Дійсно, якщо $P_0^*=[0;1)\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[\alpha_k;\beta_k)$, то $P_0^*\subset P_0$. Згадуючи нескінченні трійкові дроби, як частинний випадок нескінченних r-кових дробів, бачимо, що при побудові множини P_0^* на першому кроці з піввідрізка $[0;1)$ викидаються ті й тільки ті числа x, для яких відповідний трійковий дріб $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ має $a_1=1$. На другому кроці побудови множини P_0^* з піввідрізка $[0;1)$ викидаються ті й тільки ті числа, для яких відповідний трійковий дріб $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ має $a_2=1$. На третьому кроці з піввідрізка $[0;1)$ викидаються ті й тільки ті числа x, для яких $a_3 = 1$ і т. д. Отже, множина P_0^* складається з тих і тільки тих чисел, для яких відповідні трійкові дроби $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ мають трійкові знаки $a_k = 0$ або $a_k = 2$, причому серед чисел a_k є нескінченна кількість, відмінних від 2. Якщо кожному такому дробу $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$ поставити у відповідність нескінченний двійковий дріб $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$, вважаючи, що $b_k = \begin{cases} 0, & \text{коли } a_k = 0, \\ 1, & \text{коли } a_k = 2, \end{cases}$ то дістанемо взаємно однозначне відображення множини P_0^* на множину нескінченних двійкових дробів, що заповнюють піввідрізок $[0;1)$. Отже, множини P_0^* і $[0;1)$ еквівалентні, тобто P_0^* — континуальна множина, а тому континуальною є й множина $P_0 \supset P_0^*$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 11 (про потужність досконалої множини Кантора). *Досконала множина Кантора P_0 є континуальною множиною.*

Виявляється, що будь-яка досконала лінійна непорожня множина є континуальною множиною. Доведення цього можна знайти, наприклад, у посібнику [18].

1.4.6. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо F — замкнена множина, то кожна точка множини F є граничною точкою F.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Якщо множина F не є замкненою, то вона є а) відкритою, б) нескінченною.
4. Порожня множина і весь метричний простір є а) замкненими, б) відкритими, в) досконалими множинами.
5. F — замкнена множина тоді й тільки тоді, коли $x \notin F' \ \forall x \notin F$.
6. Якщо F — замкнена множина і точка $x \notin F$, то $\rho(x, F) > 0$.
7. Множина G відкрита тоді й тільки тоді, коли вона містить усі свої внутрішні точки.
8. Існує метричний простір, у якому кожна множина є і замкненою і відкритою.
9. У просторі $\mathbb{R}^1$ множини $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{A}$ — дійсних алгебраїчних чисел, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ є а) відкритими, б) замкненими, в) досконалими.

10. Внутрішність E° будь-якої множини E є відкритою множиною.
11. Відкрита множина не має ізольованих точок.
12. Якщо $A \cup B$ − замкнена (відкрита) множина, то A і B замкнені (відкриті) множини.
13. Якщо $A \cap B$ − замкнена (відкрита) множина, то A і B замкнені (відкриті) множини.
14. Похідна множина E' будь-якої множини E є замкненою множиною.
15. Множина ∂E будь-якої множини E є замкненою множиною.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо F − лінійна множина, $F \neq \varnothing$ і $F \neq \mathbb{R}$, то F не може бути одночасно відкритою і замкненою.
2. Якщо $[a;b] = F_1 \cup F_2$ і $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, причому $F_1 \neq \varnothing$ і $F_2 \neq \varnothing$, то F_1 і F_2 не можуть бути одночасно замкненими множинами.
3. Якщо $f \in C[a;b]$, то $\forall c \in \mathbb{R}$ множина $F_c = \{x \in [a;b]\colon f(x) \geqslant c\}$ є замкненою, а множина $G_c = \{x \in (a;b)\colon f(x) > c\}$ є відкритою у просторі $\mathbb{R}^1$.
4. Кожна лінійна досконала множина $P \neq \varnothing$ є континуальною множиною.

1.5. Компактні і зв'язні множини у метричному просторі

Поняття компактної і зв'язної множин також є узагальненнями поняття числового проміжку.

1.5.1. Поняття обмежено компактної множини. З теорем Больцано − Вейєрштрасса, доведених у п. 1.3.4, зокрема випливає, що коли $E \subset \mathbb{R}^n$, а (x_n) − довільна обмежена послідовність, члени якої належать E, то існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}) така, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in E$, за умови замкненості множини E.

У зв'язку з цим вводять наступне означення. Множину $E \subset M$ називають *обмежено компактною* у просторі (M,ρ), якщо для будь-якої обмеженої послідовності (x_n): $x_n \in E$ $\forall n$, існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}), границя якої належить множині E.

Приклад 1. Будь-який простір $\mathbb{R}^n$ є обмежено компактною множиною, зокрема, $\mathbb{R}^1$ − обмежено компактна множина. Будь-яка замкнена множина з простору $\mathbb{R}^n$, зокрема будь-який відрізок $[a;b]$, є також обмежено компактною множиною, а будь-який скінченний інтервал $(a;b)$ не є обмежено компактною множиною, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(a+1/n) = a \notin (a;b)$.

Знайдемо зв'язок обмеженої компактності із замкненістю.

□ Нехай E — обмежено компактна множина у просторі (M,ρ). Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in E$ для будь-якої збіжної послідовності (x_n): $x_n \in E$ $\forall n$, оскільки $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in E$, а $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Згадуючи критерій замкненої множини, дістаємо, що E — замкнена множина.

Легко бачити, що замкненість множини не гарантує її обмеженої компактності.

Дійсно, якщо (M,ρ) — простір ізольованих точок і $M = \{1/n\colon n\in\mathbb{N}\}$, то послідовність $(x_n) = (1/n)$ обмежена у (M,ρ), але не має збіжної підпослідовності. Разом з тим M — замкнена і обмежена множина у просторі ізольованих точок, бо $M' = \varnothing \subset M$. ■

Отже, має місце

Теорема 1 (про зв'язок обмеженої компактності із замкненістю). *Якщо E — обмежено компактна множина у просторі (M,ρ), то E — замкнена множина у цьому просторі, проте не навпаки.*

1.5.2. Поняття компактної множини. Частинним випадком обмежено компактної множини є *компактна множина*, тобто така множина K, для будь-якої послідовності (не обов'язково обмеженої) точок якої, існує збіжна підпослідовність, границя якої належить K. Отже, K — компактна тоді й тільки тоді, коли

$$(\forall (x_n):\ x_n \in K\ \forall n) \quad \exists x_{n_k}:\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in K.$$

Знайдемо зв'язок компактності із замкненістю та обмеженістю.

□ Оскільки компактна множина $K \subset (M,\rho)$ є обмежено компактною, то за теоремою 1 вона є замкненою множиною. Припустимо, що K — необмежена множина. Тоді $\exists b \in M$: $K \not\subset O_n(b)$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n \in K$: $\rho(x_n,b) \geqslant n \to \infty$ $(n\to\infty)$.

Якщо K — компактна множина, то $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K \Rightarrow \rho(x_{n_k},b) \leqslant \rho(x_{n_k},a) + \rho(a,b) \leqslant H_1 + \rho(a,b) = H$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Отже, $\rho(x_{n_k},b) \leqslant H$ $\forall k$ і $\rho(x_{n_k},b) \to +\infty$ $(k\to\infty)$, що неможливо. Тому компактна множина не може бути необмеженою.

При доведенні теореми 1 фактично було показано, що замкненість і обмеженість множини не гарантує її компактності. ■

Доведена

Теорема 2 (про зв'язок компактності із замкненістю та обмеженістю). *Якщо K — компактна множина у просторі (M,ρ), то K — замкнена і обмежена у цьому просторі, проте не навпаки.*

Розглянемо у просторі (M,ρ) компактну множину K і замкнену множину F. З'ясуємо, чи не буде переріз цих множин компактною множиною.

□ Для довільної послідовності (x_n): $x_n \in F \cap K$ $\forall n$ маємо $x_n \in F$ і $x_n \in K$ $\forall n$. Оскільки K — компактна множина, то $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Оскільки F — замкнена множина, а $x_{n_k} \in F$ $\forall k$ і (x_{n_k}) — збіжна послідовність, то за критерієм замкненості $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in F$. Тому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in \in F \cap K$, тобто $F \cap K$ — компактна множина. ■

Отже, доведена

Теорема 3 (про переріз замкненої і компактної множин). *Якщо F — замкнена, а K — компактна множина у просторі (M,ρ), то $F \cap K$ — компактна множина у (M,ρ).*

Приклад 2. Кожна скінченна множина є компактною множиною. Відрізок $[a;b]$ є компактною множиною, тоді як інтервал $(a;b)$ не є компактною множиною у просторі $\mathbb{R}^1$.

1.5.3. Критерії компактності. Теорема 2 стверджує, що у довільному просторі (M,ρ) замкнена обмежена множина може не бути компактною множиною. Але для просторів $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$ має місце

Теорема 4 (критерій компактності у просторах $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{C}^n$). *Для того щоб множина K була компактною у просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$, необхідно й досить, щоб K була замкненою і обмеженою множиною у цьому просторі.*

□ Дійсно, якщо множина K компактна у просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$, то за теоремою 2 вона замкнена і обмежена в $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$.

Нехай тепер K — замкнена і обмежена множина в $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$. Тоді будь-яка послідовність (x_n): $x_n \in K$ $\forall n$ є обмеженою у просторі $\mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$. За теоремою Больцано — Вейєрштрасса $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in \mathbb{R}^n$ або $\mathbb{C}^n$. Оскільки K — замкнена множина, то за критерієм замкненості $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K$. Отже, $\big(\forall (x_n)\colon x_n \in K\ \forall n\big)$ $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$, тобто K є компактною множиною. ■

Оскільки компактність визначена через поняття границі послідовності, яке тісно пов'язане з поняттям граничної точки, то природно пов'язати компактність з граничними точками.

□ Нехай K — компактна множина у метричному просторі (M,ρ), а E — її нескінченна підмножина. Тоді $\exists(x_n)$: $x_n \in E$ $\forall n$ і члени x_n попарно різні. За означенням компактності $\exists(x_{n_k})$: $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$. Оскільки члени x_{n_k} попарно різні, то $x_{n_k} \neq a$ $\forall k > k_0$. Звідси за критерієм граничної точки маємо, що a є граничною точкою множини E. Отже, $a \in E'$ і $a \in K \Rightarrow a \in E' \cap K \Rightarrow E' \cap K \neq \varnothing$ для будь-якої нескінченної підмножини E множини K.

Нехай тепер $E' \cap K \neq \varnothing$ для будь-якої нескінченної підмножини E множини K. Візьмемо довільну послідовність (x_n): $x_n \in K$ $\forall n$. Можливі два випадки: 1) $\exists(x_{n_k})$: $x_{n_k} = a$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і 2) члени x_n попарно різні $\forall n \geqslant n_0$.

Якщо має місце випадок 1), то $a = \lim x_{n_k} \in K$, а якщо 2), то множина $E = \{x_n\colon n \geqslant n_0\} \subset K$ і нескінченна. Тому за припущенням $E' \cap K \neq \varnothing$, тобто $\exists(x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K$. Отже, $\big(\forall(x_n)\colon x_n \in K$ $\forall n\big)$ $\big(\exists x_{n_k}\colon \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K\big)$. Тому K — компактна множина. ■

Цим самим доведена

Теорема 5 (критерій компактності мовою граничних точок). *Множина K є компактною тоді й тільки тоді, коли $E' \cap K \neq \varnothing$ для будь-якої нескінченної підмножини $E \subset K$.*

Для формулювання наступної теореми введемо нове важливе поняття.

Систему множин G_α, $\alpha \in \Lambda$, називають *покриттям множини* E, якщо $E \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Якщо при цьому всі множини G_α відкриті, то *покриття* $\{G_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ називається *відкритим*.

Якщо $\{G_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ — покриття множини E, то *скінченним підпокриттям* цього покриття називають систему $\{G_{\alpha_k}\colon k \in \overline{1,n}\}$ таку, що $G_{\alpha_k} \in \{G_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ $\forall k \in \overline{1,n}$ і $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{\alpha_k}$.

Приклад 3. Інтервали $(n-1;n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, утворюють відкрите покриття множини $\mathbb{N}$, а інтервали $\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, утворюють відкрите покриття інтервала $(0;1)$. Якщо до множини інтервалів $\left(\frac{1}{n+2};\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, добавити інтервали $(1-\varepsilon;1+\varepsilon)$ і $(-\varepsilon;\varepsilon)$ $\forall \varepsilon > 0$, то дістанемо відкрите покриття відрізка $[0;1]$.

Легко бачити, що з останнього покриття можна виділити скінченне підпокриття відрізка $[0;1]$, а з двох попередніх покриттів не можна виділити скінченні підпокриття відповідних множин. Природно виникає питання: *коли будь-яке відкрите покриття множини E має скінченне підпокриття цієї множини?*

Відповідь на це питання дає

Теорема 6 (критерій компактності мовою покриттів). *Для того щоб множина K була компактною у метричному просторі (M,ρ), необхідно й досить, щоб будь-яке відкрите покриття множини K мало скінченне підпокриття множини K.*

Для доведення теореми 6 розглянемо три допоміжні леми.

Лема 1 (про відстань між точками компактної множини). *Нехай K — компактна множина, $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число, а множина $E_\varepsilon \subset K$ така, що $\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$ $\forall x$ і $y \in E_\varepsilon$, $x \neq y$. Тоді множина E_ε скінченна.*

☐ Припустимо, що множина E_ε нескінченна. Тоді $\exists (x_k)$: $x_k \in K$ $\forall k \in \mathbb{N}$ і $\rho(x_k, x_i) \geqslant \varepsilon$ $\forall k \neq i$. За означенням компактної множини $\exists (x_{k_n})$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a \in K$. Тому $\exists\, n_0(\varepsilon)$: $n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_{k_n}, a) < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$$\rho(x_{k_n}, x_{k_m}) \leqslant \rho(x_{k_n}, a) + \rho(x_{k_m}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \forall m > n_0 \text{ і } n > n_0.$$

Але $\rho(x_{k_m}, x_{k_n}) \geqslant \varepsilon$ $\forall m \neq n$. Отже, множина E_ε не може бути нескінченною. ■

Приклад 4. Для випадку $K = [a;b]$ суть леми 1 полягає у тому, що для довільного $\varepsilon > 0$ відрізок $[a;b]$ можна розбити на скінченну кількість відрізків $[x_k; x_{k+1}]$, $k \in \overline{0; n-1}$, довжина кожного з яких є меншою за ε. Тоді кожен відрізок $[x_k; x_{k+1}]$ містить хіба що одну точку з множини E_ε. Тому кількість точок у множині E не перевищує n.

Лема 2 (про покриття компактної множини кулями). *Якщо K — компактна множина, то її можна покрити скінченною кількістю куль, радіуси яких рівні і як завгодно малі, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m = m(\varepsilon) \text{ і } x_i = x_i(\varepsilon) \in K,\ i \in \overline{1,m}\colon\ K \subset \bigcup_{i=1}^{m} K(x_i, \varepsilon).$$

☐ Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване. Якщо у множині K не існує двох різних точок x і y, для яких $\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$, то $\forall x_1 \in K$ відстань $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ $\forall x \in K$, тобто $K \subset K(x_1, \varepsilon)$. А якщо $\exists x$ та $y \in K$:

$\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$, то за лемою 1 ці точки утворюють скінченну множину $E_\varepsilon = \{x_1, x_2, \ldots, x_{m(\varepsilon)}\}$. Тому $\forall x \in K$ $\exists i = i(x) \in \overline{1, m(\varepsilon)}$: $\rho(x, x_i) < \varepsilon$, тобто $x \in K(x_i, \varepsilon)$. Отже, $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K(x_i, \varepsilon)$. ■

Лема 3 (про покриття нескінченної кількості куль). *Нехай $\{G_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ — відкрите покриття компактної множини K, $x_n \in K$ $\forall n$, $0 < r_n \to 0$, коли $n \to \infty$, і $K_n = K(x_n, r_n)$. Тоді існують $\alpha_0 \in \Lambda$ і $n_i \uparrow \infty$ такі, що $K_{n_i} \subset G_{\alpha_0}$, тобто деяка з множин G_α покриває нескінченну кількість куль K_n.*

□ За означенням компактної множини для даної послідовності (x_n) $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a \in K$. Оскільки $K \subset \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, то $\exists \alpha_0 \in \Lambda$: $a \in G_{\alpha_0}$. Множина G_{α_0} відкрита, а тому $\exists O_\delta(a) = K(a, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. За означенням границі для числа $\delta/2 > 0$ $\exists k_0$: $r_{n_k} < \delta/2$ і $\rho(x_{n_k}, a) < \delta/2$ $\forall k > k_0$. Тому $\forall x \in K(x_{n_k}, r_{n_k})$ маємо:

$$\rho(x,a) \leqslant \rho(x, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) =$$

$$= r_{n_k} + \rho(x_{n_k}, a) < \delta/2 + \delta/2 = \delta,$$

тобто $K(x_{n_k}, r_{n_k}) \subset K(a, \delta) \subset G_{\alpha_0}$ $\forall k > k_0$ і $n_k \uparrow \infty$. ■

Тепер легко довести теорему 6.

□ Нехай K — компактна множина. Припустимо, що деяке відкрите покриття $\{G_\alpha\colon \alpha \in \Lambda\}$ множини K не має скінченного підпокриття цієї множини. За лемою 2

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m = m_n \text{ і } x_k = x_k(n) \in K,\ k \in \overline{1,m}\colon K \subset \bigcup_{k=1}^{m} K(x_k, 1/n).$$

Зрозуміло, що для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ якусь із куль $K(x_k, 1/n)$, $k \in \overline{1,m}$, не можна покрити ніякою скінченною кількістю множин G_α з даного покриття. Нехай це буде куля $K_n = K(x_{k_n}, 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Кулі K_n задовольняють умови леми 3, а тому $\exists n_i \uparrow \infty$ і $\alpha_0 \in \mathbb{Z}$: $K_{n_i} \subset G_{\alpha_0}$ $\forall i$. Це суперечить тому, що кулю K_{n_i} не можна покрити скінченною кількістю множин G_α з покриття $\{G_\alpha\colon \alpha \in \mathbb{Z}\}$. Отже, зроблене припущення неправильне, а тому кожне відкрите покриття компактної множини K має скінченне підпокриття цієї множини.

Необхідність теореми 6 доведено.

Припустимо тепер, що будь-яке відкрите покриття множини K має скінченне підпокриття цієї множини. Доведемо, що K — компактна множина. Скористаємося теоремою 5.

Візьмемо довільну нескінченну множину $E \subset K$ і припустимо, що $E' \cap K = \varnothing$. Тоді $\forall x \in K\ \exists \delta = \delta(x) > 0$: $O^*_\delta(x) \cap E = \varnothing$, тобто куля $K(x,\delta) = O_\delta(x)$ містить хіба що одну точку з множини E.

Кулі $K(x,\delta(x))$, $x \in K$, покривають множину K, а тому існує скінченна кількість цих куль: $K(x_i,\delta(x_i))$, $i \in \overline{1,n}$, які покривають K. Отже, $E \subset K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} K(x_i,\delta(x_i))$, тобто множина E хіба що скінченна. Це суперечить нескінченності множини E. Отже, припущення, що $E' \cap K = \varnothing$, неправильне, і тому $E' \cap K \neq \varnothing$ для будь-якої нескінченної множини $E \subset K$. За теоремою 5 множина K є компактною.

На цьому завершено доведення достатності теореми 6. ■

1.5.4. Поняття зв'язної множини. Непорожні *множини* E_1 і E_2 називають *відокремленими* у просторі (M,ρ), якщо існують відкриті множини $G_1 \supset E_1$ і $G_2 \supset E_2$ такі, що $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

Приклад 5. Якщо x_1 і x_2 – різні точки з простору (M,ρ), то $E_1 = \{x_1\}$ і $E_2 = \{x_2\}$ – відокремлені множини у цьому просторі. Множини $E_1 = [0;1)$ і $E_2 = (1;2]$ є відокремленими у просторі $\mathbb{R}^1$, а множини $F_1 = [0;1]$ і $F_2 = (1;2]$ не є відокремленими в $\mathbb{R}^1$.

□ Зрозуміло, що коли E_1 і E_2 – відокремлені множини, то кожна точка $x_0 \in E_1$ не є точкою дотику множини E_2, бо досить малий окіл цієї точки $O(x_0) \subset G_1$, а $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ і $G_2 \supset E_2$. Отже, $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$. Аналогічно і $E_2 \cap \overline{E_1} = \varnothing$.

Припустимо тепер, що множини E_1 і E_2 непорожні, причому $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$ і $E_2 \cap \overline{E_1} = \varnothing$. Тоді за наслідком 1 п. 1.3.3 $\rho(x,\overline{E_2}) = \gamma(x) > 0\ \forall x \in E_1$ і $\rho(y,\overline{E_1}) = \delta(y) > 0\ \forall y \in E_2$. Позначимо

$$G_1 = \bigcup_{x\in E_1} O_{\gamma(x)/2}(x), \quad G_2 = \bigcup_{y\in E_2} O_{\delta(y)/2}(y).$$

Множини G_1 і G_2 відкриті (за теоремою 5 п. 1.4.3) причому $G_1 \supset E_1$, $G_2 \supset E_2$. Покажемо, що $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Справді, якщо $\exists z_0 \in G_1 \cap G_2$, то $\exists x_0 \in E_1$, $y_0 \in E_2$: $z_0 \in O_{\gamma(x_0)/2}(x_0) \cap O_{\delta(y_0)/2}(y_0)$. Звідси, припускаючи, що $\gamma(x_0) \leqslant \delta(y_0)$, дістанемо суперечність:

$$\rho(y_0,\overline{E_1}) \leqslant \rho(x_0,y_0) \leqslant \rho(x_0,z_0) + \rho(z_0,y_0) <$$

$$< \gamma(x_0)/2 + \delta(y_0)/2 \leqslant \delta(y_0) = \rho(y_0,\overline{E_1}).$$

Аналогічно прийдемо до суперечності у випадку $\gamma(x_0) > \delta(y_0)$.

Отже, показано, що E_1 та E_2 — відокремлені множини. ■

Цим самим доведена

Теорема 7 (критерій відокремленості). *Для того щоб непорожні множини E_1 і E_2 були відокремленими, необхідно й досить, щоб $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$ і $\overline{E_1} \cap E_2 = \varnothing$, тобто щоб кожна з цих множин не містила точок дотику іншої з них.*

Множину E з простору (M, ρ) називають *незв'язною*, якщо вона є об'єднанням двох відокремлених множин E_1 і E_2, тобто $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ і G_1 та G_2 — відкриті множини у метричному просторі (M, ρ). *Множину*, яка не є незв'язною, називають *зв'язною*.

Приклад 6. Об'єднання двох відокремлених множин є незв'язною множиною. Зокрема, у просторі $\mathbb{R}^1$ незв'язною є множина $G = (0;1) \cup \cup (1;2)$ і взагалі, будь-яка відкрита в $\mathbb{R}^1$ множина, у якої кількість складових інтервалів більша за одиницю.

Покажемо, що будь-який інтервал є зв'язною множиною у просторі $\mathbb{R}^1$.

□ Припустимо, що якийсь інтервал $(a;b)$ є незв'язною множиною. Тоді $(a;b) = E_1 \cup E_2$, де E_1 і E_2 — відокремлені множини, тобто непорожні і такі, що існують відкриті множини G_1 і G_2, для яких $G_1 \supset E_1$, $G_2 \supset E_2$ і $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Звідси дістаємо: $(a;b) \subset G_1 \cup G_2 \Rightarrow (a;b) \subset (G_1 \cap (a;b)) \cup (G_2 \cap (a;b)) \subset (a;b)$, а тому $(a;b) = G_3 \cup G_4$, де $G_3 = G_1 \cap (a;b)$ і $G_4 = G_2 \cap (a;b)$ — відкриті непорожні множини, що не перетинаються. Звідси за теоремою про структуру лінійної відкритої множини маємо, що інтервал $(a;b)$ має принаймні два складових інтервали і один лежить у G_3, а другий у G_4. Але інтервал $(a;b)$ має єдиний складовий інтервал, яким є сам інтервал $(a;b)$. Отже, припущення, що $(a;b)$ — незв'язна множина, привело до протиріччя. ■

Тому *будь-який інтервал у просторі $\mathbb{R}^1$ є зв'язною множиною.*

Природно виникає питання про те, *який вигляд мають множини, зв'язні у просторі $\mathbb{R}^1$.*

Оскільки $[a;b) = (a;b) \cup \{a\}$, $(a;b] = (a;b) \cup \{b\}$ і $[a;b] = (a;b) \cup \cup \{a,b\}$, причому точки a і b є граничними точками множини $E = \langle a;b \rangle$, то виникає гіпотеза про правильність у довільному метричному просторі (M, ρ) наступного твердження.

Лема 4 (про зв'язність об'єднання). *Якщо E — зв'язна множина, а $E_1 \subset E'$, то $E \cup E_1$ — зв'язна множина. Зокрема, замикання будь-якої зв'язної множини також є зв'язною множиною.*

☐ Оскільки $E \cup E_1 = E \cup (E_1 \setminus E)$, то твердження леми 4 правильне, коли $E_1 \setminus E = \varnothing$, тобто $E_1 \subset E$.

Нехай $E_2 = E_1 \setminus E \neq \varnothing$. Тоді $E_2 \subset E'$ і $E_2 \cap E = \varnothing$. Припустимо, що $E \cup E_1 = E \cup E_2$ — незв'язна множина, тобто $E \cup E_2 = X \cup Y$, де X і Y — відокремлені множини. Зрозуміло, що $E = (X \setminus E_2) \cup (Y \setminus E_2)$.

Припустимо, що $X \setminus E_2 = \varnothing$. Тоді $X \subset E_2 \subset E'$, а $Y \supset E$ і тому X містить точки дотику множини Y, що суперечить відокремленості множин X та Y.

Отже, $X \setminus E_2 \neq \varnothing$ і аналогічно $Y \setminus E_2 \neq \varnothing$, причому $X \setminus E_2$ та $Y \setminus E_2$ — відокремлені множини і $E = (X \setminus E_2) \cup (Y \setminus E_2)$, тобто E — незв'язна множина. Таким чином, припущення, що $E \cup E_1$ — незв'язна множина, неправильне і лема 4 доведена. ■

Враховуючи, що інтервал є зв'язною множиною у просторі $\mathbb{R}^1$, з леми 4 дістаємо, що *будь-який проміжок $\langle a; b\rangle$ є зв'язною множиною у просторі* $\mathbb{R}^1$.

Визначимо, чи є правильним обернене твердження.

☐ Нехай E — довільна зв'язна множина у просторі $\mathbb{R}^1$. Якщо $E = \varnothing$ або $E = \{x_1\}$ — одноточкова множина, то $E = \langle a; b\rangle$. Припустимо, що E містить принаймні дві різні точки, і нехай $a = \inf E$, $b = \sup E$. Покажемо, що $(a; b) \subset E$. Припустимо, що якась точка $x^* \in (a; b)$ не належить E. Тоді дістанемо відкриті множини $G_1 = (-\infty; x^*)$ і $G_2 = (x^*; +\infty)$, що не перетинаються, причому

$$E_1 = (-\infty; x^*) \cap E \neq \varnothing \text{ і } E_2 = (x^*; +\infty) \cap E \neq \varnothing,$$

оскільки за критерієм супремуму та інфімуму $\exists x \in E : x < x^*$ і $\exists y \in E : y > x^*$. Отже, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \subset G_1$, $E_2 \subset G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ і G_1 та G_2 — відкриті множини. Це означає, що E — незв'язна множина, а це не так. Тому $(a; b) \subset E$. З іншого боку $E \subset [a; b]$. Тому 1) $E = (a; b)$, коли $a \notin E$ і $b \notin E$, 2) $E = [a; b)$, коли $a \in E$ і $b \notin E$, 3) $E = (a; b]$, коли $a \notin E$ і $b \in E$, 4) $E = [a; b]$, коли $a \in E$ і $b \in E$. ■

Отже, доведена

Теорема 8 (критерій зв'язності у просторі $\mathbb{R}^1$). *Множина E є зв'язною у просторі $\mathbb{R}^1$ тоді й тільки тоді, коли вона є деяким проміжком.*

У просторах $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, та $\mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$, такої простої характеристики зв'язної множини не існує, але для відкритих множин з цих просторів існує схожа характеристика зв'язної множини (п. 2.3.7).

1.5.5. Контрольні запитання та завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо $E = \mathbb{R}^m$, то E — обмежено компактна множина у просторі $\mathbb{R}^m$.
2. Кожна замкнена множина у просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ є обмежено компактною множиною у цьому просторі.
3. Якщо множина E обмежено компактна у метричному просторі (M,ρ), то E — компактна у (M,ρ).
4. Твердження, обернене до 3, є правильним.
5. Множина E компактна у метричному просторі (M,ρ) тоді й тільки тоді, коли E обмежена і обмежено компактна у (M,ρ).
6. Якщо будь-яка послідовність (x_n): $x_n \in K$ $\forall n$, має збіжну підпослідовність, то K — компактна множина.
7. Твердження, обернене до 6, є правильним.
8. Кожна скінченна множина з метричного простору (M,ρ) є компактною множиною.
9. У просторі ізольованих точок множина K є компактною тоді й тільки тоді, коли вона є скінченною.
10. Множина K є компактною у метричному просторі (M,ρ), якщо не існує множини $E \subset K$ такої, що $E' \neq \varnothing$, а $E' \cap K = \varnothing$.
11. Якщо K замкнена множина в (M,ρ), то K — компактна множина.
12. Якщо множина $G \neq \varnothing$ відкрита в (M,ρ), то G не є компактною множиною в (M,ρ).
13. Якщо замкнена (або відкрита) обмежена множина $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha_k;\beta_k)$, то існує $\{(\alpha_{k_i};\beta_{k_i})\colon i \in \overline{1,n}\}$ така, що $E \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\alpha_{k_i};\beta_{k_i})$.
14. Якщо $[a;b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k;\beta_k]$, то існує $\{[\alpha_{k_i};\beta_{k_i}]\colon i \in \overline{1,n}\}$ така, що $[a;b] \subset$ $\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [\alpha_{k_i};\beta_{k_i}]$.
15. Об'єднання компактних множин є компактною множиною.
16. Переріз компактних множин є компактною множиною.

17. Якщо множини E_1 і E_2 відокремлені, то кожна з них не містить точок дотику іншої.
18. Твердження, обернене до 17, є правильним.
19. Відкриті або замкнені множини G_1 і G_2 відокремлені тоді й тільки тоді, коли $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.
20. Об'єднання зв'язних множин є зв'язною множиною.
21. Переріз зв'язних множин є зв'язною множиною.

II. Довести дані твердження.

1. Множина $E_A = \{x = x(t) \in C[0;1]\colon |x(t)| \leqslant A \ \forall t \in [0;1]\} \ \forall A > 0$ є замкненою, обмеженою, але не є компактною у метричному просторі $C[0;1]$.
2. Якщо K_i — компактні непорожні множини, причому $K_{i+1} \subset K_i \ \forall i$, то $\bigcap\limits_i K_i \neq \varnothing$. А якщо при цьому $\operatorname{diam} K_i = \sup\limits_{x,y \in K_i} \rho(x,y) \to 0 \ (i \to \infty)$, то $\exists! a\colon \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \{a\}$ (аксіома Кантора у метричному просторі).
3. Кожна зв'язна множина, яка має більше однієї точки, не має ізольованих точок.
4. Множина E є зв'язною тоді й тільки тоді, коли $\forall x_1$ і $x_2 \in E \ \exists X \subset E$: X — зв'язна множина, що містить точки x_1 і x_2.
5. Якщо M — зв'язна множина у просторі (M,ρ), то у цьому просторі множина X є одночасно замкненою і відкритою тоді й тільки тоді, коли $X = \varnothing$ або $X = M$.
6. Для того, щоб множина E була зв'язною, необхідно й досить, щоб з умов $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, $E_1 \neq \varnothing$ і $E_2 \neq \varnothing$ випливало, що принаймні одна з множин E_1 або E_2 містить хоча б одну граничну точку іншої множини, тобто $E_1 \cap E_2' \neq \varnothing$ або $E_2 \cap E_1' \neq \varnothing$.

1.6. Повні метричні простори

У даному підрозділі вивчаються метричні простори, у яких має місце критерій Коші збіжності послідовності.

1.6.1. Поняття фундаментальної послідовності. Зв'язок фундаментальності зі збіжністю та обмеженістю. У пункті 1.2.7 поставлено питання про те, чи є правильним критерій Коші збіжності послідовності у довільному метричному просторі.

У зв'язку з цим вводять наступне поняття: послідовність (x_n) називають *фундаментальною* у метричному просторі (M,ρ), якщо

$\lim\limits_{m \geqslant n \to \infty} \rho(x_m, x_n) = 0$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon): \; \rho(x_m, x_n) < \varepsilon, \text{ коли } m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Суть поняття фундаментальної послідовності полягає у тому, що $x_m \approx x_n$ (як завгодно близькі), коли номери m і n досить великі.

Приклад 1. Послідовність $(1/n)$ є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^1$, але не є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}$ з тривіальною метрикою.

Визначимо, який зв'язок між фундаментальністю, збіжністю та обмеженістю послідовності.

☐ 1. Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, тобто $\rho(x_n, a) \to 0 \; (n \to \infty)$, то

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, a) + \rho(a, x_n) \to 0, \text{ коли } m \geqslant n \to \infty.$$

Отже, *кожна збіжна послідовність у просторі (M, ρ) є фундаментальною у цьому просторі.*

2. Якщо (x_n) — фундаментальна послідовність у метричному просторі (M, ρ), то для числа $\varepsilon = 1 \; \exists n_0$: $m \geqslant n \geqslant n_0 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < 1$. Візьмемо довільну точку $a \in M$ і позначимо $H_1 = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant n_0} \rho(x_n, a)$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x_n, a) \leqslant \begin{cases} H_1, \text{ коли } n \leqslant n_0, \\ \rho(x_n, x_{n_0}) + \rho(x_{n_0}, a) < 1 + H_1, \text{ коли } n > n_0. \end{cases}$$

Отже, $\forall a \in M \; \exists H = H_1 + 1$: $\rho(x_n, a) < H \; \forall n \in \mathbb{N}$, тобто *послідовність (x_n) обмежена, якщо вона фундаментальна.*

3. Припустимо, що фундаментальна послідовність (x_n) має збіжну підпослідовність (x_{n_k}): $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0(\varepsilon)$:

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon/2, \text{ коли } m \geqslant n \geqslant n_0,$$

а $\rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2$, коли $n_k \geqslant n_0$.

Враховуючи це, для кожного $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ знайдемо $n_k \geqslant n$ і дістанемо $\rho(x_n, a) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, a) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \; \forall \, n \geqslant n_0(\varepsilon)$, тобто $\rho(x_n, a) \to 0 \; (n \to \infty)$, або $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Отже, *якщо фундаментальна послідовність (x_n) має збіжну підпослідовність (x_{n_k}), то (x_n) є збіжною послідовністю.*

4. Нехай послідовність (x_n) збігається до точки a у метричному просторі (M, ρ), причому $x_n \neq a \; \forall n$. Тоді вона фундаментальна у цьому просторі, а також у просторі (M_1, ρ), де $M_1 = M \setminus \{a\}$.

Якщо припустити, що (x_n) є збіжною послідовністю у метричному просторі (M_1,ρ), тобто $\exists b \in M_1$: $\rho(x_n,b) \to 0$ $(n \to \infty)$, то (x_n) є збіжною послідовністю до точки b і в просторі (M,ρ). Отже, у просторі (M,ρ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, що неможливо за властивістю єдиності границі. ■

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що має місце

Теорема 1 (про зв'язок фундаментальності із збіжністю). 1. *Кожна збіжна у просторі* (M,ρ) *послідовність є фундаментальною у цьому просторі, але не навпаки.* 2. *Кожна фундаментальна послідовність є обмеженою.* 3. *Фундаментальна послідовність є збіжною, якщо вона має збіжну підпослідовність.* 4. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *у просторі* (M,ρ), *причому* $x_n \neq a$ $\forall n$, *а* $M_1 = M \setminus \{a\}$, *то послідовність* (x_n) *є фундаментальною, але розбіжною, у просторі* (M_1,ρ).

1.6.2. Поняття повного метричного простору. Повнота просторів $\mathbb{R}^p$ та $\mathbb{C}^p$. У зв'язку з теоремою 1 вводять наступне означення. Метричний простір (M,ρ) називають *повним метричним простором*, якщо кожна послідовність, фундаментальна у (M,ρ), є збіжною у цьому просторі. В іншому разі метричний простір (M,ρ) називають *неповним*.

Приклад 2. *Критерій Коші збіжності послідовності у просторі* $\mathbb{R}^1$ *або* $\mathbb{C}^1$ *стверджує, що ці простори є повними.* Якщо з цих просторів $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$ викинути множину E, принаймні одна точка якої є граничною точкою множини $\mathbb{R}^1 \setminus E$ або $\mathbb{C}^1 \setminus E$, то дістанемо приклади неповних метричних просторів. Зокрема, *простір* $\mathbb{Q}$ *раціональних чисел з метрикою* $\rho(x,y) = |x-y|$ *є неповним метричним простором.*

Дослідимо простори $\mathbb{R}^p$ та $\mathbb{C}^p$ на повноту.

□ Нехай послідовність (x_n), де $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_p^{(n)})$, є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^p$ (або $\mathbb{C}^p$). Тоді $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0(\varepsilon)$:

$$\rho(x_m,x_n) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} |x_k^{(m)} - x_k^{(n)}|^2} < \varepsilon, \text{ коли } m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon), \Rightarrow$$

$|x_k^{(m)} - x_k^{(n)}| < \varepsilon$ $\forall k \in \overline{1,p}$, коли $m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon)$, тобто числові послідовності $(x_k^{(n)})$ $\forall k \in \overline{1,p}$ є фундаментальними у просторі $\mathbb{R}^1$ (або $\mathbb{C}^1$). За сказаним вище ці послідовності є збіжними у просторі $\mathbb{R}^1$ (або $\mathbb{C}^1$), і за теоремою 1 пункту 1.2.2 послідовність (x_n) є збіжною у просторі $\mathbb{R}^p$ (або $\mathbb{C}^p$).

Отже, *простори* $\mathbb{R}^p$ *та* $\mathbb{C}^p$ *є повними метричними просторами.* ■

1.6.3. Повнота простору ізольованих точок.

□ Розглянемо довільну послідовність (x_n), фундаментальну у просторі ізольованих точок. Тоді, якщо $0 < \varepsilon \leqslant 1$, то $\exists n_0(\varepsilon)$: $m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon \leqslant 1 \Rightarrow \rho(x_m, x_n) = 0$, тобто $x_n = x_{n_0}$ $\forall n \geqslant n_0$. Отже, якщо послідовність (x_n) є фундаментальною у просторі ізольованих точок, то вона є стаціонарною, а тому збіжною у цьому просторі.

Таким чином, *простір ізольованих точок є повним метричним простором.* ■

Приклад 3. Якщо на множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел ввести метрику простору ізольованих точок, то дістанемо повний метричний простір (порівняйте з прикладом 2).

1.6.4. Повнота простору $C[a;b]$.

□ Припустимо, що послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ є фундаментальною у просторі $C[a;b]$. Тоді $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)$: $m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$$\rho(x_m, x_n) = \max_{[a;b]} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon/2\ \forall t \in [a;b]$, коли $m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Тому для довільного фіксованого $t \in [a;b]$ числова послідовність $(x_n(t))$ є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^1$ або $\mathbb{C}^1$, а отже і збіжною, тобто $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)\ \forall t \in [a;b]$.

Враховуючи це, спрямуємо у нерівності $|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon/2$ $\forall t \in [a;b]$ номер m до $+\infty$ і дістанемо

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon\ \forall t \in [a;b] \text{ і } \forall n \geqslant n_0(\varepsilon).$$

Це означає, що послідовність $(x_n(t))$ є рівномірно збіжною на відрізку $[a;b]$. Тому $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) \in C[a;b]$, тобто фундаментальна у просторі $C[a;b]$ послідовність $(x_n) = (x_n(t))$ є збіжною у цьому просторі.

Отже, *простір* $C[a;b]$ *є повним метричним простором.* ■

1.6.5. Повнота простору $CR[a;b]$. Раніше показано (див. теорему 1), що коли у повному метричному просторі (M, ρ) звузити множину M, то можна дістати неповний метричний простір (M_1, ρ), $M_1 \subset M$. Виявляється, що зміна метрики також може привести від повного метричного простору до неповного.

□ Розглянемо простір $CR[a;b]$ неперервних функцій з інтегральною метрикою. Для простоти міркувань вважатимемо, що $[a;b] = [-1;1]$. Візьмемо послідовність $(x_n) = (x_n(t))$, де

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{коли} \quad -1 \leqslant t \leqslant -1/n, \\ nt, & \text{коли} \quad -1/n \leqslant t \leqslant 1/n, \\ 1, & \text{коли} \quad 1/n \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $x_n(t) \in C[-1;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n(t)| \leqslant 1$ $\forall n$, $\forall t$, а коли $m \geqslant n$, то $x_m(t) = x_n(t)$ $\forall t \in [-1;-1/n] \cup [1/n;1]$.

Тому

$$\rho(x_m, x_n) = \int\limits_{-1}^{1} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt = \int\limits_{-1}^{-1/n} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt +$$

$$+ \int\limits_{-1/n}^{1/n} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt + \int\limits_{1/n}^{1} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt =$$

$$= \int\limits_{-1/n}^{1/n} |x_m(t) - x_n(t)|\, dt \leqslant 2 \cdot 2/n \to 0, \text{ коли } m \geqslant n \to \infty.$$

Отже, $(x_n(t))$ — фундаментальна послідовність у просторі $CR[-1;1]$.

Припустимо, що ця послідовність є збіжною до якоїсь функції $x = x(t)$ у просторі $CR[-1;1]$. Тоді

$$\rho(x_n, x) = \int\limits_{-1}^{1} |x_n(t) - x(t)|\, dt \to 0 \ (n \to \infty)$$

і тому $\int\limits_{0}^{1} |x_n(t) - x(t)| dt \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $(x_n(t))$ збігається до $x(t)$ у просторі $CR[0;1]$. Але якщо $y(t) = 1$ $\forall t$, то

$$\int\limits_{0}^{1} |x_n(t) - 1|\, dt = \rho(x_n, 1) =$$

$$= \int\limits_{0}^{1/n} |x_n(t) - 1| dt \leqslant 2 \cdot 1/n \to 0 \ (n \to \infty),$$

тобто $(x_n(t))$ збігається у просторі $CR[0;1]$ до функції $y(t)\equiv 1$. За властивістю єдиності границі $x(t)=1\ \forall t\in[0;1]$. Аналогічно можна показати, що $x(t)=-1\ \forall t\in[-1;0]$. Отже, $x(0)=1$ і $x(0)=-1$, що неможливо, а тому припущення про збіжність послідовності $(x_n(t))$ у просторі $CR[-1;1]$ є неправильним твердженням.

Таким чином, у просторі $CR[a;b]$ існують фундаментальні розбіжні послідовності, тобто *простір* $CR[a;b]$ *є неповним метричним простором.* ■

Отже, повнота простору суттєво залежить не тільки від його елементів, а й від метрики.

1.6.6. Повнота просторів $\boldsymbol{m}$ і l^p.

□ Якщо послідовність (x_n) де $x_n=(x_k^{(n)})$, є фундаментальною у метричному просторі $\boldsymbol{m}$ обмежених послідовностей, то

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\colon\ m\geqslant n\geqslant n_0(\varepsilon)\Rightarrow \rho(x_m,x_n)=\sup_k|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|<\varepsilon/2.$$

Звідси випливає, що $\forall k\in\mathbb{N}$

$$|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|<\varepsilon/2,\ \text{ коли }\ m\geqslant n\geqslant n_0(\varepsilon),$$

тобто числова послідовність $(x_k^{(n)})$ є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^1$ для кожного фіксованого $k\in\mathbb{N}$. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty}x_k^{(n)}=a_k\ \forall k\in\mathbb{N}$. За теоремою 1 послідовність (x_n) є обмеженою, тобто

$$\forall b\in\boldsymbol{m}\ \exists H>0\colon \rho(x_n,b)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k^{(n)}-b_k|\leqslant H\ \forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|x_k^{(n)}-b_k|\leqslant H\ \forall n\ \text{ і }\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}|x_k^{(n)}-b_k|=\left|\lim_{n\to\infty}x_k^{(n)}-b_k\right|=|a_k-b_k|\leqslant H\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Тому, вважаючи $b_k=0\ \forall k$, дістанемо $|a_k|\leqslant H\ \forall k\in\mathbb{N}$, тобто $a=(a_k)\in\boldsymbol{m}$.

Враховуючи це, перейдемо у нерівності $|x_k^{(m)}-x_k^{(n)}|<\varepsilon/2$ до границі при $m\to\infty$ і дістанемо $|a_k-x_k^{(n)}|<\varepsilon/2$, коли $n\geqslant n_0(\varepsilon)\ \forall k\in\mathbb{N}$. Тому $\rho(x_n,a)=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|x_k^{(n)}-a_k|\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon\ \forall n\geqslant n_0(\varepsilon)$, тобто кожна послідовність (x_n), що є фундаментальною у просторі $\boldsymbol{m}$, є також збіжною у цьому просторі. ■

Отже, *простір* $\boldsymbol{m}$ *є повним метричним простором.*

Майже аналогічними міркуваннями можна показати, що *простір l^p є повним метричним простором* $\forall p \geqslant 1$.

Підсумовуючи сказане, наведемо таблицю деяких повних і неповних метричних просторів:

Повні метричні простори	**Неповні метричні простори**
$\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^m$ $\forall m \in \mathbb{N}$	Простір $\mathbb{Q}$ з евклідовою метрикою
$C[a;b]$	$CR[a;b]$
Простір ізольованих точок	Простір (M_1, ρ), де $M_1 = M \setminus E$ і $E \cap M_1' \neq \varnothing$
$\boldsymbol{m}$	Простір $\boldsymbol{m}$ без точки $\theta = (0)$
l^p $\forall p \geqslant 1$	Простір l^p без точки $\theta = (0)$

1.6.7. Поняття поповнення метричного простору. Придивимося уважніше до неповних метричних просторів, до яких зокрема належить простір $\mathbb{Q}$ раціональних чисел з метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$. Якщо доповнити цей простір ірраціональними числами, то він перетвориться у повний простір $\mathbb{R}$ з тією ж метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$. Зауважимо, що $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ і кожне ірраціональне число повністю визначається певною послідовністю раціональних чисел, наприклад, послідовністю раціональних наближень x_n^- з недостачею і з точністю до 10^{-n}.

Виникає питання, чи не можна схожим способом поповнити будь-який неповний метричний простір.

Повний метричний простір (M_1, ρ_1) назвемо *поповненням неповного простору* (M, ρ), якщо $\overline{M} = M_1$ (тобто множина M є *скрізь щільною* у просторі (M_1, ρ)) і $\rho_1(x,y) = \rho(x,y)$ $\forall x,y \in M$.

За даним означенням *відстань* $\rho_1(x,y)$ *у просторі* (M_1, ρ_1) *між елементами* x *і* y *простору* (M, ρ) *така сама як і* $\rho(x,y)$ *у просторі* (M, ρ). *Тому замість* ρ_1 *часто писатимемо* ρ.

Приклад 4. Простір $\mathbb{R}^1$ є поповненням простору $\mathbb{Q}^1$, тобто простору $\mathbb{Q}$ з метрикою $\rho(x,y) = |x-y|$, проте простір $\mathbb{R}$ з метрикою простору ізольованих точок не є поповненням простору $\mathbb{Q}^1$.

1.6.8. Звичайні та ідеальні елементи метричного простору. Розглянемо довільний неповний метричний простір (M, ρ). Елементи множини M назвемо *звичайними елементами* простору

(M,ρ), а *ідеальними елементами простору* (M,ρ) назвемо послідовності $x^* = (x_n)$, які є фундаментальними, але розбіжними у просторі (M,ρ).

Приклад 5. Будь-яка збіжна у просторі $\mathbb{R}^1$ послідовність раціональних чисел $x^* = (x_n)$ є ідеальним елементом простору $\mathbb{Q}$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \notin \mathbb{Q}$.

Зрозуміло, що ідеальний елемент $x^* = (x_n)$ простору (M,ρ) не належить цьому простору. Об'єднаємо множину M з множиною M^* ідеальних елементів простору (M,ρ) і позначимо $M_1 = M \cup M^*$.

Введемо відстань на множині M_1. При цьому за аналогією з простором Q відстань слід ввести так, щоб для ідеального елемента $x^* = (x_n)$ звичайні елементи x_n були наближеннями x^*, а похибка наближення $x_n \approx x^*$ була б як завгодно малою для всіх досить великих номерів n. Отже, бажано задовольнити умову $\rho(x_n, x^*) \to 0$, коли $n \to \infty$. Тому природно покласти, що *відстань між звичайним елементом x простору (M,ρ) та ідеальним елементом $x^* = (x_n)$ цього простору* дорівнює числу

$$\rho(x,x^*) := \lim_{n\to\infty} \rho(x,x_n), \tag{1}$$

а *відстань між ідеальними елементами $x^* = (x_n)$ та $y^* = (y_n)$ простору* (M,ρ) дорівнює числу

$$\rho(x^*,y^*) := \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n). \tag{2}$$

Покажемо, що в к а з а н і г р а н и ц і о б о в'я з к о в о і с н у ю т ь. Розглянемо лише другу границю, а першу пропонуємо читачеві розглянути самостійно.

□ Нехай $\alpha_n = \rho(x_n,y_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. У пункті 1.2.7 при доведенні властивості 3° границі послідовності зокрема показано, що

$$|\alpha_m - \alpha_n| = |\rho(x_m,y_m) - \rho(x_n,y_n)| \leqslant \rho(x_m,x_n) + \rho(y_m,y_n).$$

Тому, враховуючи фундаментальність послідовностей $(x_n) = x^*$ та $(y_n) = y^*$, дістанемо, що $|\alpha_m - \alpha_n| \to 0$, коли $m \geqslant n \to \infty$. Отже, послідовність (α_n) є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^1$, а тому і збіжною у цьому просторі. Цим доведено існування границі $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n)$ для будь-яких ідеальних елементів $x^* = (x_n)$ та $y^* = (y_n)$ простору (M,ρ). ■

□ Зрозуміло, що для кожного ідеального елемента x^* і для кожного звичайного елемента x маємо $\rho(x,x^*) > 0$ і тому природно вважати $x \neq x^*$. Вважатимемо також *ідеальні елементи* $x^* = (x_n)$ *та* $y^* = (y_n)$ *рівними* тоді й тільки тоді, коли $\rho(x^*,y^*) = 0$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n) = 0$. Враховуючи це, тепер легко довести, що на множині $M_1 = M \cup M^*$ відстань ρ задовольняє усі умови відстані: 1) $\rho(x,y) \geqslant 0$ $\forall x$ і $y \in M_1$, 2) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, 3) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $\forall x$ і $y \in M_1$ і 4) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$ $\forall x,y$ і $z \in M_1$. ■

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що має місце

Теорема 2 (про метричність неповного простору після доповнення його ідеальними елементами). *Якщо неповний метричний простір* (M,ρ) *доповнити його ідеальними елементами і ввести відстань цих елементів від звичайних та ідеальних елементів відповідно за формулами* (1) *та* (2), *то дістанемо простір* (M_1,ρ), *який є метричним простором.*

1.6.9. Існування поповнення неповного метричного простору. Дослідимо повноту метричного простору (M_1,ρ) з теореми 2.

□ Покажемо спочатку, що $\overline{M} = M_1$, тобто кожна точка множини M_1 є точкою дотику множини M. Нехай x – довільна точка множини M_1. Тоді, якщо $x \in M$, то x – точка дотику M. А якщо $x \notin M$, то x – ідеальний елемент простору (M,ρ), тобто $x = (x_n)$, де (x_n) – фундаментальна послідовність у просторі (M,ρ). Тому

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon)\colon m \geqslant n \geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(x_m,x_n) < \varepsilon/2 \Rightarrow$$

$\rho(x,x_n) := \lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_m,x_n) \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$, тобто в будь-якому ε-околі точки x є точки $x_n \in M$. Отже, x – точка дотику множини M.

Візьмемо тепер довільну послідовність (x_n), фундаментальну у просторі (M_1,ρ). Тоді $\rho(x_m,x_n) \to 0$, коли $m \geqslant n \to \infty$, і оскільки $\overline{M} = M_1$, то

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists y_n \in M\colon \rho(x_n,y_n) < 1/n.$$

Звідси випливає, що

$$\rho(y_m,y_n) \leqslant \rho(x_m,y_m) + \rho(x_m,y_n) \leqslant \rho(y_m,x_m) + \rho(x_m,x_n) +$$

$$+\rho(y_n,x_n) \leqslant 1/m + 1/n + \rho(x_m,x_n) \to 0,\ \text{коли}\ m \geqslant n \to \infty.$$

Отже, (y_n) – фундаментальна послідовність у просторі (M,ρ). Якщо ця послідовність збігається у просторі (M,ρ) до певного елемента y, тобто $\rho(y_n,y) \to 0$, $n \to \infty$, то

$$\rho(x_n,y) \leqslant \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y) \leqslant 1/n + \rho(y_n,y) \to 0,\ \text{коли}\ n \to \infty.$$

А якщо (y_n) — розбіжна фундаментальна послідовність у просторі (M,ρ), то вона визначає ідеальний елемент $y^* = (y_n)$. При цьому

$$\rho(x_n,y^*) \leqslant \rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y^*) \leqslant$$

$$\leqslant 1/n+\lim_{m\to\infty}\rho(y_n,y_m) \to 0, \text{ коли } n\to\infty,$$

оскільки $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)\colon m\geqslant n\geqslant n_0(\varepsilon) \Rightarrow \rho(y_m,y_n)<\varepsilon/2 \Rightarrow$

$$\lim_{m\to\infty}\rho(y_n,y_m)\leqslant\varepsilon/2<\varepsilon\ \forall n\geqslant n_0(\varepsilon).$$

Отже, довільна фундаментальна у просторі (M_1,ρ) послідовність (x_n) є збіжною у цьому просторі. Тому (M_1,ρ) — повний метричний простір, а оскільки $\overline{M}=M_1$, то простір (M_1,ρ) є поповненням простору (M,ρ). ■

Таким чином, доведена

Теорема 3 (про існування поповнення неповного метричного простору). *Метричний простір* (M_1,ρ) *з теореми* 2 *є поповненням неповного метричного простору* (M,ρ).

Простір (M_1,ρ) надалі називатимемо *поповненням простору* (M,ρ) *за допомогою ідеальних елементів.*

1.6.10. Єдиність поповнення неповного метричного простору. Природно виникає питання про те, скільки існує поповнень неповного метричного простору (M,ρ).

□ Нехай простір (M_2,ρ_2) є поповненням простору (M,ρ). Тоді $\rho_2(x,y)=\rho(x,y)\ \forall x$ і $y\in M$ і $\overline{M}=M_2$. Звідси випливає, що

$$\forall y^{**}\in M_2\setminus M\ \exists(y_n)\colon y_n\in M\ \forall n\in\mathbb{N} \text{ і } \rho_2(y_n,y^{**})\to 0\ (n\to\infty).$$

За теоремою 1 послідовність (y_n) є фундаментальною у просторі (M_2,ρ_2), а оскільки $\rho_2(y_m,y_n)=\rho(y_m,y_n)$, то (y_n) є фундаментальною і розбіжною у просторі (M,ρ). Тому існує ідеальний елемент $y^*=(y_n)$ простору (M_1,ρ) з теореми 2. Покладемо

$$\varphi(y^{**})=y^*\ \forall y^{**}\in M_2\setminus M \text{ і } \varphi(y)=y\ \forall y\in M.$$

Зрозуміло, що коли $y_1^{**}\neq y_2^{**}$, то

$$\varphi(y_1^{**})=y_1^*=(y_n^{(1)})\neq\varphi(y_2^{**})=y_2^*=(y_n^{(2)}),$$

бо в іншому разі $\rho(y_n^{(1)},y_n^{(2)})\to 0\ (n\to\infty)\Rightarrow$

$$\rho_2(y_1^{**},y_2^{**})\leqslant\rho_2(y_1^{**},y_n^{(1)})+\rho_2(y_n^{(1)},y_n^{(2)})+\rho_2(y_n^{(2)},y_2^{**})\to 0\ (n\to\infty)\Rightarrow$$

$\rho_2(y_1^{**},y_2^{**})=0$, тобто $y_1^{**}=y_2^{**}$. Далі, якщо $x^*=(x_n)$ — довільний ідеальний елемент простору (M,ρ), то послідовність (x_n) є фундаментальною у просторі (M,ρ), а тому і в просторі (M_2,ρ_2). Оскільки (M_2,ρ_2) — повний метричний простір, то

$$\exists x^{**} \in M_2\colon \rho_2(x_n,x^{**}) \to 0 \ (n\to\infty) \Rightarrow \varphi(x^{**}) = x^*.$$

Таким чином, відображення φ є взаємно однозначним відображенням M_2 на M_1.

Візьмемо довільні точки y і $z \in M_2$ і знайдемо $\varphi(y)$ та $\varphi(z)$. Тоді можливі випадки:

1) y і $z \in M \Rightarrow \varphi(y) = y$ і $\varphi(z) = z \Rightarrow$
$$\rho_2(y,z) = \rho(y,z) = \rho(\varphi(y),\varphi(z));$$

2) $y \in M$, а $z \in M_2 \setminus M \Rightarrow \varphi(y) = y$, а $\varphi(z) = (z_n) \in M_1 \setminus M \Rightarrow$
$$\rho_2(y,z) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(y,z_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y,z_n) = \rho(\varphi(y),\varphi(z));$$

3) $y \in M_2 \setminus M$, а $z \in M \Rightarrow \rho_2(y,z) = \rho(\varphi(y),\varphi(z))$;

4) y і $z \in M_2 \setminus M \Rightarrow \varphi(y) = (y_n) \in M_1 \setminus M$ і $\varphi(z) = (z_n) \in M_1 \setminus M \Rightarrow$
$$\rho_2(y,z) = \lim_{n\to\infty} \rho_2(y_n,z_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(y_n,z_n) = \rho(\varphi(y),\varphi(z)).$$

Отже, якщо метричний простір (M_2,ρ_2) є поповненням метричного простору (M,ρ), а простір (M_1,ρ) є поповненням простору (M,ρ) за допомогою ідеальних елементів, то $\exists\varphi\colon M_2 \leftrightarrow M$ таке, що $\rho_2(y,z) = \rho(\varphi(y),\varphi(z))$ $\forall y$ і $z \in M_2$. ■

Взаємно однозначне відображення $\varphi\colon M_2 \leftrightarrow M_1$, що зберігає відстань між відповідними елементами, тобто $\rho_2(y,z) = \rho(\varphi(y),\varphi(z))$ $\forall y$ і $z \in M_2$ називають *ізометрією,* а *простори* (M_2,ρ_2) і (M_1,ρ) називають при цьому *ізометричними.*

Приклад 6. Простори $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{C}$ є ізометричними, оскільки $\varphi(z) = (x,y)$ $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$ є взаємно однозначним відображенням $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}^2$, що зберігає відстань:

$$\rho_{\mathbb{C}}(z_1,z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} =$$
$$= \rho_{\mathbb{R}^2}\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) \ \forall z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2.$$

Два ізометричні простори можна ототожнювати, якщо нехтувати природою об'єктів, що є точками цих просторів. Якщо це роблять, то кажуть, що вказані *простори рівні з точністю до ізометрії.*

Враховуючи сказане, дістаємо наступну теорему.

Теорема 4 (про єдиність поповнення). *Якщо метричний простір* (M_2,ρ_2) *є поповненням метричного простору* (M,ρ), *а простір* (M_1,ρ) *є поповненням метричного простору* (M,ρ) *за допомогою ідеальних елементів, то простори* (M_2,ρ_2) *і* (M_1,ρ) *є рівними з точністю до ізометрії.*

Іншими словами, поповнення неповного метричного простору (M,ρ) єдине з точністю до ізометрії.

Приклад 7. Простір дійсних чисел з евклідовою метрикою можна ввести за допомогою нескінченних десяткових, двійкових, трійкових і взагалі, r-кових дробів, чи за допомогою послідовностей раціональних чисел, фундаментальних у просторі $\mathbb{Q}$. Усі способи дають один і той же метричний простір $\mathbb{R}^1$ з точністю до ізометрії.

1.6.11. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Критерій Коші збіжності послідовності має місце у довільному метричному просторі.
2. Якщо послідовність (x_n) фундаментальна у просторі (M,ρ), то $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0(\varepsilon)$: $m\geqslant n_0(\varepsilon)$ і $n\geqslant n_0(\varepsilon)\Rightarrow\rho(x_m,x_n)<\varepsilon$.
3. Твердження, обернене до 2, є правильним.
4. Якщо послідовність (x_n) не є фундаментальною у просторі (M,ρ), то $\exists\varepsilon>0$: $\forall n_0(\varepsilon)\ \exists m$ і n: $m\geqslant n\geqslant n_0$ і $\rho(x_m,x_n)\geqslant\varepsilon$.
5. Якщо (x_n) — необмежена послідовність, то вона не є фундаментальною послідовністю.
6. Якщо (x_n) — розбіжна послідовність у просторі (M,ρ), то вона не є фундаментальною у цьому просторі.
7. Існує метричний простір, у якому кожна фундаментальна послідовність є розбіжною.
8. Якщо з метричного простору (M,ρ) викинути одну точку $a\in M$, то дістанемо неповний метричний простір (M_1,ρ), де $M_1=M\setminus\{a\}$.
9. Якщо метричний простір (M,ρ) повний, а метричний простір $(M\setminus\{a\},\rho)$ неповний, то $a\in M'$.
10. Якщо (M,ρ) — неповний метричний простір, то кожна послідовність (x_n), що є фундаментальною у (M,ρ), не є збіжною у цьому просторі.
11. На множині $\mathbb{Q}$ раціональних чисел можна так ввести метрику ρ, що дістанемо повний метричний простір $(\mathbb{Q},\rho)$.

12. На множині $\mathbb{R}$ дійсних чисел можна так ввести метрику ρ, що дістанемо неповний метричний простір $(\mathbb{R},\rho)$.
13. У просторі $C[a;b]$ не кожна фундаментальна послідовність є збіжною.
14. Множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел з метрикою $\rho(m,n) = |m-n|$ є повним метричним простором.
15. Множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел з метрикою

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1+\frac{1}{m+n}, & \text{коли } m \neq n, \\ 0, & \text{коли } m = n, \end{cases}$$

є неповним метричним простором $(\mathbb{N},\rho)$.
16. Якщо в метричному просторі $(\mathbb{N},\rho)$ з твердження 15 взяти замкнені кулі $K_n = K\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\overline{K}_1 \supset \overline{K}_2 \supset \dots \supset \overline{K}_n \supset \dots$ і $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n = \varnothing$.

II. Довести дані твердження.

1. Нехай $\overline{K}_n = \overline{K}(a_n, r_n)$ — замкнені кулі у метричному просторі (M,ρ). Тоді, якщо (M,ρ) — повний метричний простір, $\overline{K}_n \supset \overline{K}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $r_n \to 0$ $(n \to \infty)$, то $\exists! x^* \in M$: $x^* \in \overline{K}_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Якщо (M,ρ) неповний метричний простір, то існують замкнені кулі $\overline{K}_n = \overline{K}(a_n, r_n)$ такі, що $\overline{K}_n \supset \overline{K}_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n \to 0$ $(n \to \infty)$, але $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n = \varnothing$.
3. Якщо множина M_1 є компактною у метричному просторі (M,ρ), то (M_1,ρ) — повний метричний простір.
4. Якщо метричні простори (M_1,ρ_1) і (M_2,ρ_2) ізометричні, то вони одночасно або повні, або неповні.

1.7. Лінійні, нормовані, евклідові та гільбертові простори

Поняття метричного простору є природним узагальненням множин $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ у напрямі введення відстані між об'єктами досить довільної природи. Вводячи операції додавання цих об'єктів (векторів) та множення їх на число, визначаючи поняття довжини (норми) вектора або кута між векторами, дістаємо узагальнення множин $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$ в інших напрямах.

У даному підрозділі літерою $\mathcal{P}$ позначатиметься поле $\mathbb{R}$ дійсних або $\mathbb{C}$ комплексних чисел (скалярів).

1.7.1. Лінійні простори. Непорожню множину L називають *лінійним* або *векторним простором* над полем $\mathcal{P}$, а елементи множини L називають *векторами*, якщо $\forall x$ і $y \in L$ $\exists(x+y) \in L$ — *сума* векторів x і y, а також $\forall x \in L$ і $\forall \lambda \in \mathcal{P}$ $\exists(\lambda x) \in L$ — *добуток вектора x на число* (скаляр) λ, причому виконуються умови $A_1 - A_4$ і $B_1 - B_3$:

A. *Властивості суми векторів:*

A_1: $x+y=y+x$ $\forall x$ і $y \in L$ (комутативність суми);
A_2: $x+(y+z)=(x+y)+z$ $\forall x, y$ і $z \in L$ (асоціативність суми);
A_3: $\exists \theta \in L$: $x+\theta=x$ $\forall x \in L$ (існування нуля);
A_4 : $\forall x \in L$ $\exists(-x) \in L$: $x+(-x)=\theta$ (існування протилежного елемента).

B. *Властивості добутку вектора на число:*

B_1: $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$ $\forall \lambda$ і $\mu \in \mathcal{P}$ і $\forall x \in L$ (асоціативність добутку);
B_2: $1 \cdot x = x$ $\forall x \in L$ (множення на одиницю);
B_3: $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$ і $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$ $\forall \lambda$ і $\mu \in \mathcal{P}$ і $\forall x$ і $y \in L$ (дистрибутивна властивість).

Властивості $A_1 - A_4$ та $B_1 - B_3$ називають ще *аксіомами лінійного простору L*. З їх допомогою так само, як і для дійсних чисел, можна дістати інші властивості лінійного простору.

Зокрема, суму $x+(-y)$ доцільно назвати *різницею* $x-y$. При цьому 1) $x=y \Leftrightarrow x-y=\theta$, 2) $x+y=z \Leftrightarrow x=z-y$, 3) $-(-x)=x$.

Також легко довести, що

$$\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y;\ (\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x;\ \alpha x=\theta \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ або } x=\theta.$$

Приклад 1. Лінійними просторами є:

1) простори $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^m$, якщо вважати

$$x+y:=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_m+y_m)$$

та

$$\lambda x:=(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m)\ \forall x \text{ і } y \in \mathbb{R}^m \text{ (або } \mathbb{C}^m)$$

і $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$). При цьому $\theta:=(0,0,\ldots,0)$, а $(-x):=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_m)$;

2) множина $C[a;b]$ числових функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, якщо вважати $(f+\varphi)(x)=f(x)+\varphi(x)$ і $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$. При цьому

$$f=\theta \Leftrightarrow f(x)=0\ \forall x \in [a;b], \text{ а } (-f)(x):=-f(x);$$

3) множина $\boldsymbol{m}$ обмежених числових послідовностей $x=(x_n)$ та множина l^p числових послідовностей $x=(x_n)$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<+\infty$, де $p \geqslant 1$

фіксоване, якщо вважати

$$x+y=(x_n+y_n) \text{ і } \lambda x=(\lambda x_n) \ \forall x=(x_n) \text{ і } y=(y_n) \text{ та } \forall\lambda\in\mathcal{P}.$$

При цьому

$$\theta=(x_n)\Leftrightarrow x_n=0\ \forall n\in\mathbb{N}, \text{ а } -(x_n)=(-x_n).$$

Пропонуємо читачеві самостійно перевірити аксіоми лінійного простору для вказаних множин.

Лінійний простір L над полем $\mathbb{R}$ називають *дійсним*, а над полем $\mathbb{C}$ – *комплексним лінійним простором*. Якщо $A\subset L$ і $B\subset L$, а $\lambda\in\mathcal{P}$, то вважають

$$A+B:=\{x+y\colon\ x\in A,\ y\in B\},\ \ \lambda A:=\{\lambda x\colon\ x\in A\}.$$

Зупинимося коротко ще на деяких поняттях і фактах, які мають місце у лінійних просторах.

Скінченну систему векторів $M=\{x_1,\dots,x_n\}\subset L$ називають *лінійно залежною,* якщо можна вказати ненульовий набір скалярів $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{P}$ таких, що $\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_nx_n=\theta$. В іншому разі система M є *лінійно незалежною*. Неважко виявити ***найпростіші властивості лінійної залежності (незалежності):***

- система $M=\{x\}$, що складається з одного вектора $x\in L$, є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли $x=\theta$;
- якщо в системі $M=\{x_1,\dots,x_n\}$ більше одного вектора, то вона є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли принаймні один з її векторів *лінійно виражається* через решту, наприклад, $x_1=\beta_2x_2+\ldots+\beta_nx_n$;
- якщо хоч один з векторів системи M нульовий, то така система лінійно залежна;
- будь-яка підсистема лінійно незалежної системи є лінійно незалежною.

Можливий випадок, коли у просторі L існує така лінійно незалежна система векторів $M=\{e_1,\dots,e_n\}$, через яку будь-який вектор $x\in L$ лінійно виражається: $x=\alpha_1e_1+\ldots+\alpha_ne_n$, $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathcal{P}$. Тоді простір L називається *n-вимірним* або *скінченновимірним;* система M називається його *базисом,* а числа $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ – *координатами вектора x у базисі M*. Кількість векторів у базисі M називають *розмірністю простору L*. Неважко довести, що:

- кількість векторів у будь-якому базисі скінченновимірного простору L однакова;

— в n-вимірному просторі L будь-яка лінійно незалежна система, яка складається з n векторів, є базисом;

— в n-вимірному просторі L будь-яка система, яка складається більше, ніж з n векторів, є лінійно залежною;

— координати будь-якого вектора у фіксованому базисі визначаються однозначно.

Нескінченну систему векторів $M = \{x_i\colon x_i \in L,\ i \in \Lambda\}$ називають *лінійно незалежною*, якщо такою є будь-яка її скінченна підсистема. Простір, що не є скінченновимірним, називається *нескінченновимірним*. Тільки у таких просторах існують нескінченні лінійно незалежні системи.

Приклад 2. 1) Простори $\mathbb{R}^m$ і $\mathbb{C}^m$ з прикладу 1 мають, очевидно, базис $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, $\dots$, $e_m = (0,0,\dots,1)$ і тому вони m-вимірні;

2) у просторі $C[a;b]$ можна вказати нескінченну лінійно незалежну систему векторів, яка складається з функцій $1, x, \dots, x^n, \dots$, і тому цей простір нескінченновимірний;

3) нескінченновимірними є також простори $\boldsymbol{m}$ та l^p, оскільки вони містять нескінченну лінійно незалежну систему векторів $e_1 = (1,0,0,0,\dots)$, $e_2 = (0,1,0,0,\dots)$, $e_3 = (0,0,1,0,\dots)$, $\dots$.

Підмножина L_1 лінійного простору L називається його *підпростором,* якщо вона є лінійним простором з тими самими операціями додавання і множення на скаляри, які діють в усьому просторі. Для того щоб множина L_1 була підпростором простору L, необхідно й досить, щоб $\alpha x + \beta y \in L_1$ $\forall x, y \in L_1$ та $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$. Згідно з цим критерієм очевидно, що коли задано деяку сукупність підпросторів L_ξ, простору L, то і їх перетин $V = \bigcap\limits_{\xi} L_\xi$ теж є підпростором для L.

Яка б не була непорожня множина $M \subset L$, існує найменший підпростір $L(M)$ простору L, який містить цю множину. Його називають *підпростором, породженим множиною* M, або *лінійною оболонкою множини* M. Так, лінійна оболонка якогось базису M скінченновимірного простору L збігається з самим простором L. Неважко з'ясувати також, що $L(M)$ завжди складається з усіляких скінченних лінійних комбінацій елементів множини M.

1.7.2. Нормовані простори. Лінійний простір L називають *нормованим простором*, якщо кожен вектор $x \in L$ має *норму* $\|x\|$, що задоволняє умови

1) $\|x\| \geqslant 0 \; \forall x \in L$;

2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \; \forall x \in L$ і $\forall \lambda \in \mathcal{P}$;

4) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \;\; \forall \, x$ і $y \in L$.

При цьому умови 1) – 4) називають *аксіомами норми*.

Приклад 3. Нормованими просторами є:

1) простори $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^m$, якщо вважати, що

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2} \;\; \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \text{ (або } \mathbb{C}^m\text{)};$$

2) простір $C[a;b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, якщо вважати, що

$$\|x\| = \max_{[a;b]} |x(t)| \;\; \forall x = x(t) \in C[a;b];$$

3) простір $CR[a;b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a;b]$, з нормою

$$\|x\| = (R) \int_a^b |x(t)| \, dt \;\; \forall x = x(t) \in CR[a;b];$$

4) простір $\boldsymbol{m}$ обмежених послідовностей з нормою

$$\|x\| = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| \;\; \forall x = (x_k) \in \boldsymbol{m};$$

5) простір l^p $(p \geqslant 1)$ послідовностей $x = (x_k)$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < +\infty$. При цьому

$$\|x\| := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} \quad \forall x = (x_k) \in l^p.$$

Пропонуємо читачеві перевірити аксіоми норми у випадках 1) – 4). Стосовно простору l^p, аксіоми 1) – 3) очевидні, а аксіома 4) випливає з нерівності Мінковського (див. п. 1.1.6, нерівність (9)).

Зауважимо, що при $0 < p < 1$ простір l^p не є нормованим, оскільки у ньому не виконується аксіома трикутника, наприклад, для таких точок: $x = (2^{\frac{1}{p}}, 0, 0, \ldots)$ та $y = (0, 3^{\frac{1}{p}}, 0, \ldots)$.

Усі нормовані простори, розглянуті у прикладі 3, є метричними просторами з метрикою $\rho(x,y) = \|x-y\|$ (див. пп. 1.1.2 – 1.1.6). Це наводить на думку, що має місце

Теорема 1 (про зв'язок нормованих просторів з метричними). *Кожен нормований простір* L *є метричним простором з метрикою* $\rho(x,y)=\|x-y\|\ \forall x,y\in L$.

$\square$ Дійсно, 1) $\rho(x,y)=\|x-y\|\geqslant 0\ \forall x$ і $y\in L$;

2) $\rho(x,y)=\|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=\theta \Leftrightarrow x=y$;

3) $\rho(y,x)=\|y-x\|=\|(-1)(x-y)\|=|-1|\cdot\|x-y\|=\|x-y\|= =\rho(x,y)\ \forall x$ і $y\in L$;

4) $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|= =\rho(x,z)+\rho(z,y)\ \forall x,y$ і $z\in L$. $\blacksquare$

Оскільки кожен нормований простір є метричним, то для нього мають місце усі факти, що мають місце для метричних просторів, а також деякі інші факти, що не мають місця у довільних метричних просторах. Наприклад, якщо послідовності (x_n) та (y_n) є збіжними у нормованому просторі L, то

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n+\beta y_n)=\alpha\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\beta\lim\limits_{n\to\infty}y_n\ \forall\alpha$ і $\beta\in\mathcal{P}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-a)=\theta\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|=0$.

У нормованому просторі L можна також ввести поняття *ряду*, тобто виразу вигляду

$$x_1+x_2+\ldots+x_k+\ldots,\ \text{або}\ \sum_{k=1}^{\infty}x_k, \tag{1}$$

де елемент $x_k\in L$ називається k-тим членом ряду (1).

Як і для числових рядів, для ряду (1) можна ввести поняття *послідовності його часткових сум*: $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$, $n\in\mathbb{N}$, та *суми* цього *ряду*: $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, якщо остання границя існує. При цьому кажуть, що *ряд* (1) *збігається до* S і записують $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=S$.

Властивості рядів у нормованому просторі багато в чому нагадують властивості числових рядів, зокрема:

1°. Якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=S$, то $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=\theta$ (необхідна умова збіжності ряду).

2°. Ряд (1) та будь-який його n-ний залишок $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}x_k:=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_{n+k}$ одночасно збігаються або ні. При цьому, якщо $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k=S$, то

$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x_k = r_n = S - S_n.$

3°. Якщо ряд (1) є *абсолютно збіжним*, тобто збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$, то він також є збіжним, коли простір L є повним.

4°. Якщо ряд (1) є абсолютно збіжним до суми S, а простір L є повним, то будь-яка перестановка цього ряду збігається абсолютно до S.

Наведемо доведення властивості 3°.

□ Якщо $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, то $\rho(S_m, S_n) = \|S_m - S_n\| = \left\|\sum\limits_{k=n+1}^{m} x_k\right\| \leqslant \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{m} \|x_k\| \to 0$, коли $m > n \to \infty$. Тому (S_n) − фундаментальна послідовність у просторі L, а оскільки цей простір повний, то (S_n) є збіжною послідовністю, тобто ряд (1) є збіжним. ■

Простором Банаха або B-простором називають кожен повний нормований простір.

Приклад 4. Простори $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$, $C[a;b]$, $\boldsymbol{m}$ і l^p є просторами Банаха, а простір $CR[a;b]$ не є простором Банаха, оскільки він є неповним нормованим простором.

Нехай a і b − вектори лінійного простору L. Тоді *відрізком* (або *напрямленим відрізком*) $[a;b]$ простору L називають множину векторів $x = a(1-t) + bt$, $t \in [0;1]$. Отже, $[a;b] := \{x = a(1-t) + +bt\colon t \in [0;1]\}$. Аналогічно, *інтервалом* $(a;b)$ називають множину $(a;b) := \{x = a(1-t) + bt\colon t \in (0;1)\}$.

Множину E лінійного простору L називають *опуклою*, якщо $[a;b] \subset E$ $\forall a$ і $b \in E$.

Приклад 5. 1) Якщо L є нормованим простором, то *кожна куля* $K(x_0, r) \subset L$ *є опуклою множиною*.

Дійсно, якщо a і $b \in K(x_0, r)$, то $\|a - x_0\| < r$ і $\|b - x_0\| < r$. Тому $\forall t \in \in [0;1]$ маємо $x = a(1-t) + bt$ і

$$\|x - x_0\| = \|(a(1-t) + bt) - (x_0(1-t) + x_0 t)\| =$$
$$= \|(a - x_0)(1-t) + (b - x_0)t\| \leqslant$$
$$\leqslant (1-t)\|a - x_0\| + t\|b - x_0\| < r(1-t) + rt = r.$$

Отже, $[a;b] \subset K(x_0, r)$ $\forall a$ і $b \in K(x_0, r)$, тобто $K(x_0, r)$ − опукла множина.

2) У просторі $\mathbb{R}^m$ опуклою множиною є так званий *відкритий елементарний прямокутник* $P = (a_1; b_1) \times (a_2; b_2) \times \ldots \times (a_m; b_m)$.

Справді, якщо $x,y \in P$, а $z = (1-t)x + ty$, $t \in [0;1]$, то з нерівностей $a_k < x_k$, $y_k < b_k$, $k \in \overline{1,m}$, випливають нерівності $a_k < (1-t)x_k + ty_k < b_k$, $k \in \overline{1,m}$, тобто $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m) \in P$.

3) Будь-який лінійний простір є опуклою множиною.

Раніше було встановлено, що збіжність у просторах $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^m$ рівносильна покоординатній збіжності (див. п. 1.2.2). Перевіримо, чи справедливо це у довільному скінченновимірному нормованому просторі L.

$\square$ Зафіксуємо у просторі L певний базис $M = \{e_1, \ldots, e_n\}$ і розглянемо довільну послідовність $(x^{(k)}) = (\alpha_1^{(k)} e_1 + \ldots + \alpha_n^{(k)} e_n)$.

Спробуємо довести, що $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_i^{(k)} = a_i \ \forall i \in \overline{1,n}$, якщо $a = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$.

Оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} (x^{(k)} - a) = \theta$, то твердження достатньо довести лише для $a = \theta = 0 \cdot e_1 + \ldots + 0 \cdot e_n$.

В частині достатності це твердження легко випливає з нерівності трикутника: $\|x^{(k)}\| = \|\alpha_1^{(k)} e_1 + \ldots + \alpha_n^{(k)} e_n\| \leqslant |\alpha_1^{(k)}| \|e_1\| + {}$ $+ \ldots + |\alpha_n^{(k)}| \|e_n\| \to 0$ $(k \to \infty)$, коли $\alpha_i^{(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$ $\forall i \in \overline{1,n}$.

Для доведення необхідності треба показати, що коли $x^{(k)} \to \theta$ $(k \to \infty)$, то $\beta^{(k)} \to 0$ $(k \to \infty)$, де

$$\beta^{(k)} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i^{(k)}| \ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Припустимо супротивне: $\beta^{(k)} \not\to 0$ $(k \to \infty)$. Тоді можна вказати $\varepsilon > 0$ і послідовність $k_\nu \uparrow \infty$: $\beta^{(k)} > \varepsilon$ $\forall k = k_\nu$. Крім того, послідовність (k_ν) можна вибрати так, щоб для деякого $p \in \overline{1,n}$ мала місце рівність: $\beta^{(k)} = |\alpha_p^{(k)}|$ $\forall k = k_\nu$.

Розглянемо послідовність $(y^{(k)}) = (\frac{1}{\beta^{(k)}} x^{(k)})$, де $k = k_\nu$.

Маємо: $\|y^{(k)}\| = \frac{1}{\beta^{(k)}} \|x^{(k)}\| \geqslant \frac{1}{\varepsilon} \|x^{(k)}\| \to 0$ при $k = k_\nu \to \infty$. Крім того, $y^{(k)} = \beta_1^{(k)} e_1 + \ldots + \beta_n^{(k)} e_n$, де $\beta_i^{(k)} = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\beta^{(k)}}$ $\forall i \in \overline{1,n}$, $k = k_\nu$. Тому $|\beta_i^{(k)}| \leqslant 1$ $\forall i \in \overline{1,n}$, $k = k_\nu$, причому $|\beta_p^{(k)}| = 1$ $\forall k = k_\nu$.

Виділимо тепер з обмежених числових послідовностей $(\beta_i^{(k)})$, $i \in \overline{1,n}$, збіжні підпослідовності: $\beta_i^{(k)} \to b_i$ $(k = k_{\nu_j} \to \infty)$ $\forall i \in \overline{1,n}$. Оскільки достатність вже доведено, то можна стверджувати, що $y^{(k)} \to b$ $(k = k_{\nu_j} \to \infty)$, де $b = b_1 e_1 + \ldots + b_n e_n$. При цьому $b \neq \theta$, бо $|b_p| = 1$. Отримано суперечність, яка завершує доведення досլіджуваного твердження. ■

Сформулюємо доведене твердження у вигляді теореми. Перед цим домовимось про позначення $x=(x_1,\ldots,x_n)$, якщо вектор $x\in L$ має в базисі M координати $x_1,\ldots,x_n$, тобто $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$.

Теорема 2 (критерій збіжності у скінченновимірному просторі). *Нехай L — скінченновимірний нормований простір з базисом $M=\{e_1,\ldots,e_n\}$, $x^{(k)}=(\alpha_1^{(k)},\ldots,\alpha_n^{(k)})$ $\forall k\in\mathbb{N}$ та $a=(a_1,\ldots,a_n)$. Тоді для того щоб $x^{(k)}\to a$ $(k\to\infty)$ у просторі L, необхідно і достатньо, щоб $\alpha_i^{(k)}\to a_i$ $(k\to\infty)$ $\forall i\in\overline{1,n}$.*

З теореми 2 випливає ряд цікавих наслідків.

Наслідок 1 (про еквівалентність норм). *У скінченновимірному нормованому просторі L будь-які дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ еквівалентні, у тому розумінні, що $\|x_n-a\|_1\to 0\Leftrightarrow\|x_n-a\|_2\to 0$.*

Наслідок 2 (про замкненість підпростору). *Будь-який скінченновимірний підпростір L_1 довільного нормованого простору L є замкненою множиною в L.*

Приклад 6. Підпростір L_1, що складається з многочленів, степінь яких не вищий за n, має базис $M=\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$. Тому він $(n+1)$-вимірний, а отже, за наслідком 2, L_1 є замкненою множиною у просторі $C[a;b]$. Звідси зокрема випливає, що коли $P^{(k)}(x)\in L_1$ $\forall k\in\mathbb{N}$ і $P^{(k)}(x)\rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, то $f(x)\in L_1$.

Назвемо *лінійним замиканням множини $M\subset L$ $(M\neq\varnothing)$* найменший замкнений лінійний підпростір простору L, що містить цю множину. Він існує і є перетином усіх підпросторів з вказаними властивостями. Лінійне замикання будемо позначати $L[M]$. Про $L[M]$ кажуть також, що це є *найменший замкнений підпростір, породжений множиною M*.

Між лінійним замиканням і лінійною оболонкою існує простий зв'язок: $L[M]=\overline{L(M)}$.

Систему векторів (або множину) $M\subset L$ називають *повною,* якщо $L[M]=L$, тобто якщо породжений M замкнений підпростір збігається з усім простором.

Приклад 7. 1) У скінченновимірному нормованому просторі L повною системою є, очевидно, будь-який базис $M_1=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$. Вилучивши з базису M_1 хоч один вектор, дістанемо неповну систему.

2) У просторі l^p повну систему M_2 утворюють вектори $e_1=(1,0,0,\ldots)$, $e_2=(0,1,0,\ldots)$, $\ldots$, оскільки кожен вектор $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\ldots)\in l^p$ мо-

жна подати у вигляді $x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, де $y_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$. Система M_2 перестане бути повною, якщо з неї вилучити який-небудь вектор e_m (впевніться у цьому!).

3) У просторі $C[a;b]$ повною є система $M_3 = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$. Це стверджується теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервних функцій многочленами (див. [18, гл. V, §5]).

Два нормованих простори L_1 і L_2 над одним і тим же полем $\mathcal{P}$ називаються *ізоморфними*, якщо між ними можна встановити *ізоморфізм*, тобто таке відображення $\varphi\colon L_1 \leftrightarrow L_2$, при якому

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \ \ \forall x, y \in L_1, \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{P}$$

і

$$\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1 \ \ \forall x \in L_1.$$

Приклад 8. Будь-який скінченновимірний простір L_n над полем $\mathcal{P}$ ізоморфний простору $\mathcal{P}^n$, де $\mathcal{P} = \mathbb{R}$ або $\mathcal{P} = \mathbb{C}$. Щоб задати ізоморфізм φ: $L_n \leftrightarrow \mathcal{P}^n$, досить зафіксувати в L_n який-небудь базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ і покласти $\varphi(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ $\forall x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k \in L_n$.

Ізоморфні простори мають однакові властивості, пов'язані з визначеними у них операціями і нормами.

1.7.3. Евклідові простори. У лінійному нормованому просторі кожен вектор має норму $\|x\|$, яку можна вважати довжиною цього вектора. Виявляється, що у деяких лінійних просторах можна ввести не тільки довжину вектора, а й кут між векторами. Для цього згадаємо поняття скалярного добутку векторів з простору $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos(\widehat{x,y}).$$

Згадуючи властивості цього скалярного добутку, природно ввести наступне означення.

Лінійний простір E називають *евклідовим простором*, якщо для будь-яких двох елементів x і y з E визначено їх *скалярний добуток* $(x, y) \in \mathcal{P}$, що задовольняє умови

1) $(x, x) \geqslant 0 \ \forall x \in E$;

2) $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

3) $(y, x) = \overline{(x, y)} \ \forall x$ і $y \in E$; ($\overline{(x, y)}$ — число, спряжене до (x, y));

4) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \ \forall x$ і $y \in E$ і $\forall \alpha \in \mathcal{P}$;

5) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \ \forall x, y$ і $z \in E$.

При цьому умови 1) – 5) називають ще *аксіомами скалярного добутку*. Відмітимо, що з аксіом 3) та 4) випливає рівність

$$(x,\alpha y)=\overline{\alpha}\,(x,y)\ \forall x,y\in E,\ \alpha\in\mathcal{P}.$$

Приклад 9. Евклідовими просторами є:
1) простір $\mathbb{R}^m$, якщо $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ і $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)\in\mathbb{R}^m$

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{m}x_k y_k;$$

2) простір $\mathbb{C}^m$, якщо $\forall x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ і $y=(y_1,y_2,\dots,y_m)\in\mathbb{C}^m$

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{m}x_k \bar{y}_k;$$

3) простір $CR_2[a;b]$, якщо $\forall x=x(t)$ і $y=y(t)$, неперервних на $[a;b]$,

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\cdot\bar{y}(t)dt;$$

4) простір l^2, якщо $\forall x=(x_n)$ і $y=(y_n)\in l^2$

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k \bar{y}_k,$$

причому (x,y) існує за нерівністю Гельдера (11) пункту 1.1.6.

Проілюструємо методи перевірки аксіом скалярного добутку на прикладі простору l^2.

□ Для довільних $x,y,z\in l^2$ та $\alpha\in\mathcal{P}$ маємо: 1) $(x,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\geqslant 0$;

2) $(x,x)=0\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=0\Leftrightarrow x_k=0\ \forall k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow x=(x_k)=\theta$;

3) $(y,x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k\overline{x_k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\overline{x_k\overline{y_k}}=\overline{\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}}=\overline{(x,y)}$;

4) $(\alpha x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha x_k\overline{y_k}=\alpha\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\overline{y_k}=\alpha(x,y)$;

5) $(x+y,z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k+y_k)\overline{z_k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\overline{z_k}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_k\overline{z_k}=(x,z)+(y,z)$. ■

В пункті 1.1.1 для простору $\mathbb{R}^m$ (або $\mathbb{C}^m$) доведено нерівність (7) Коші – Буняковського, яку можна записати у вигляді

$$|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}^m\ (\text{або }\mathbb{C}^m).$$

Перевіримо правильність цієї нерівності у довільному евклідовому просторі E.

□ Якщо $(x,y)=0$, то зрозуміло, що $|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$. Нехай $(x,y)\neq 0$ і $\alpha=\exp(-i\arg(x,y))$. Тоді легко бачити, що

$x \neq \theta$, бо $(\theta,y) = (\theta+\theta,y) = (\theta,y)+(\theta,y) = 2(\theta,y) \Leftrightarrow (\theta,y) = 0$. Також легко довести, що $y \neq \theta$, $\alpha \cdot \overline{\alpha} = 1$ і $(x,y) = |(x,y)| \exp(i \arg(x,y))$, тобто $\alpha \cdot (x,y) = |(x,y)|$. Розглянемо дійсну функцію

$$f(t) = (\alpha x+ty, \alpha x+ty) = (\alpha x, \alpha x+ty)+(ty, \alpha x+ty) =$$

$$= \overline{(\alpha x+ty, \alpha x)}+\overline{(\alpha x+ty, ty)} = \overline{(\alpha x, \alpha x)}+\overline{(ty, \alpha x)}+\overline{(\alpha x, ty)}+\overline{(ty, ty)} =$$

$$= \alpha \cdot \overline{\alpha}(x,x)+t\overline{(y, \alpha x)}+t(y, \alpha x)+t^2(y,y) = (x,x)+t\alpha(x,y)+$$

$$+t\overline{\alpha(x,y)}+t^2(y,y) = (x,x)+2t|(x,y)|+t^2(y,y) \geqslant 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $(y,y) > 0$, то $f(t)$ є квадратним тричленом відносно t. Тому $f(t) \geqslant 0 \ \forall\, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D = |(x,y)|^2 - (x,x)\cdot(y,y) \leqslant 0 \Leftrightarrow |(x,y)| \leqslant \leqslant \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$. ■

Отже, має місце

Теорема 3 (про нерівність Коші — Буняковського). *Якщо E — евклідів простір, то*

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \quad \forall x,y \in E.$$

З прикладів 3 та 9 випливає, що у просторах $\mathbb{R}^m$ та $\mathbb{C}^n$ правильна рівність $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. За аналогією, природно чекати, що має місце

Теорема 4 (про зв'язок евклідових просторів з нормованими). *Кожен евклідів простір E є нормованим з нормою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. При цьому має місце нерівність Коші — Буняковського*

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \ \ \forall x,y \in E. \tag{2}$$

□ Зрозуміло, що 1) $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geqslant 0 \, \forall x \in E$;
2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;
3) $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda(x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{(\lambda x, x)}} = \sqrt{\lambda \cdot \overline{\lambda}(x,x)} =$

$$= \sqrt{|\lambda|^2(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\| \ \forall x \in E \text{ і } \forall \lambda \in \mathcal{P};$$

4) $\|x+y\| = \sqrt{(x+y, x+y)} = \sqrt{(x, x+y)+(y, x+y)} =$

$$= \sqrt{\overline{(x+y, x)}+\overline{(x+y, y)}} = \sqrt{\overline{(x,x)+(y,x)}+\overline{(x,y)+(y,y)}} =$$

$$= \sqrt{(x,x)+(x,y)+\overline{(x,y)}+(y,y)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\|x\|^2+2|(x,y)|+\|y\|^2} \leqslant \|x\|+\|y\|.$$

Отже, всі аксіоми норми виконуються, а нерівність Коші — Буняковського набуває вигляду (2). ■

Наслідок 3 (про неперервність скалярного добутку). *Якщо в евклідовому просторі* E $x_n \to x$, *а* $y_n \to y$, *то* $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

□ Справді, застосовуючи нерівність (2), і враховуючи обмеженість збіжної послідовності (y_n), дістанемо:

$$|(x_n,y_n)-(x,y)| = |(x_n,y_n)-(x,y_n)+(x,y_n)-(x,y)| \leqslant$$

$$\leqslant |(x_n,y_n)-(x,y_n)|+|(x,y_n)-(x,y)| = |(x_n-x,y_n)|+|(x,y_n-y)| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n-x\|\cdot\|y_n\|+\|x\|\cdot\|y_n-y\| \to 0 \ \ (n\to\infty),$$

що й вимагалося. ■

Якщо $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то кажуть, що *скалярний добуток* (x,y) *породжує норму* $\|x\|$.

Враховуючи нерівність (2) Коші — Буняковського, у дійсному евклідовому просторі E природно назвати відношення $\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$ *косинусом кута між ненульовими векторами* x та $y \in E$:

$$\cos(\widehat{x,y}) := \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|} \quad \forall x \text{ і } y\in E\colon x\neq\theta,\ y\neq\theta.$$

Якщо $\cos(\widehat{x,y}) = 0$, тобто $(x,y)=0$, коли x і $y \neq \theta$, то вектори x і y природно назвати *ортогональними*. При цьому записують $x \perp y$. Природно вважати, що $x \perp \theta\ \forall x \in E$. Легко бачити, що для ортогональних векторів x і y має місце *узагальнена теорема Піфагора*:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2.$$

□ Розглянемо евклідів простір E і визначимо в ньому норму за теоремою 4. Тоді $\|x\|^2=(x,x)$, а тому $\forall x$ і $y\in E$ маємо

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = (x+y,x+y)+(x-y,x-y) =$$

$$= (x,x+y)+(y,x+y)+(x,x-y)+(-y,x-y) =$$

$$= \overline{(x+y,x)}+\overline{(x+y,y)}+\overline{(x-y,x)}-\overline{(x-y,y)} = (x,x)+\overline{(y,x)}+$$

$$+\overline{(x,y)}+(y,y)+(x,x)-\overline{(y,x)}-\overline{(x,y)}+\overline{(y,y)} = 2(\|x\|^2+\|y\|^2). \ ■$$

Отже, у довільному евклідовому просторі E правильна рівність

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2) \quad \forall x,y\in E. \tag{3}$$

Рівність (3) є узагальненням відомого твердження про те, що *сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів* *усіх його сторін.* Тому її називають *тотожністю паралелограма.*

Можна довести [12, с. 187 − 190], що умова (3) є також достатньою умовою для того, щоб нормований простір був евклідовим простором. При цьому для дійсного лінійного простору скалярний добуток можна визначити за формулою

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

Кажуть, що *нормований простір є евклідовим простором*, якщо в цьому просторі можна так визначити скалярний добуток, що $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. При цьому кажуть також, що *норму простору можна визначити за допомогою скалярного добутку*, або *норма простору породжується деяким скалярним добутком.*

Приклад 10. Розглянемо простір $C[0;\pi/2]$ з нормою $\|x\| = \max\limits_{[0;\pi/2]} |x(t)|$ і в ньому два елементи $x = x(t) = \cos t$ та $y = y(t) = \sin t$. Маємо: $\|x+y\| = = \max\limits_{[0;\pi/2]} |\sin t + \cos t| = \sqrt{2}$, $\|x-y\| = \max\limits_{[0;\pi/2]} \|\sin t - \cos t\| = 1$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Тому $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2+1 = 3 \neq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4$.

Отже, $C[0;\pi/2]$ не є евклідовим простором.

Оскільки кожен евклідів простір є нормованим, то для нього мають місце усі факти, що мають місце для нормованих просторів. Зокрема, можна говорити про ряди в евклідовому просторі.

1.7.4. Гільбертові простори. Відстань від точки до замкненої опуклої множини. Серед евклідових просторів найважливішими вважаються *гільбертові простори*, тобто повні евклідові простори. Ці простори часто позначають літерою H.

Приклад 11. Гільбертовими просторами є простори $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{C}^m$ і l^2, а простір $CR_2[a;b]$ не є гільбертовим простором, оскільки він є неповним евклідовим простором.

Із шкільного курсу математики відомо, що кожен вектор $\vec{x}$ простору $\mathbb{R}^2$ можна представити у вигляді $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j}$, де a і $b \in \mathbb{R}$, $\vec{i} = (1,0)$, а $\vec{j} = (0,1)$. Виявляється, що схожий факт має місце для будь-якого гільбертового простору, у якому є хоча б одна не більш ніж зчисленна повна ортонормована система векторів.

Систему векторів $\{x_\alpha \in E\colon \alpha \in \Lambda\}$ евклідового простору E називають *ортонормованою*, якщо

$$(x_\alpha, x_\beta) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{коли } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Приклад 12. 1) У прикладі 2 п. 1.7.1 наведено системи векторів, ортонормованих у просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ та l^2.

2) У просторі $CR_2[a;b]$ ортонормованою є так звана *тригонометрична система* $\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}}\cos\frac{2\pi n}{b-a}(x-a), \sqrt{\frac{2}{b-a}}\sin\frac{2\pi n}{b-a}(x-a)\colon n \in \mathbb{N}\right\}$.

В п. 1.3.3 було введено поняття відстані від точки до множини, що лежать у певному метричному просторі. Припустимо, що H_1 — замкнена опукла множина, що лежить у гільбертовому просторі H (зокрема, H_1 — замкнений підпростір простору H) і точка $x \in H$. Подивимось уважніше на відстань

$$\rho(x, H_1) = \inf_{y \in H_1} \rho(x, y) = \inf_{y \in H_1} \|x - y\|.$$

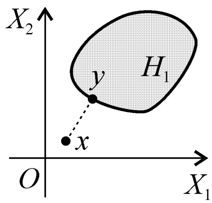

Рис. 8

З геометричних міркувань виникає гіпотеза, що у множині H_1 повинна існувати єдина точка y, найближча до точки x (рис. 8). Перевіримо цю гіпотезу.

☐ За критерієм нижньої грані, 1) $\rho(x,y) \geqslant \rho(x,H_1)$ $\forall y \in H_1$ і 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists y_n \in H_1$: $\rho^2(x,H_1) \leqslant \rho^2(x,y_n) < \rho^2(x,H_1) + 1/n \Rightarrow \rho(x,y_n) \to \rho(x,H_1)$ $(n \to \infty)$.

Застосовуючи тотожність паралелограма і враховуючи опуклість множини H_1, дістанемо: $(y_n + y_m)/2 \in H_1$ і

$$2(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2) =$$

$$= \|(x-y_n)+(x-y_m)\|^2 + \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 \Rightarrow$$

$$\|y_m - y_n\|^2 = 2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_m\|^2 - \|2x-(y_n+y_m)\|^2 <$$

$$< 2\rho^2(x,H_1) + 2/n + 2\rho^2(x,H_1) + 2/m - 4\,\|x-(y_n+y_m)/2\|^2 <$$

$$< 4\rho^2(x,H_1) + 2/n + 2/m - 4\rho^2(x,H_1) =$$

$$= 2/n + 2/m \to 0, \text{ коли } m > n \to \infty.$$

Звідси випливає фундаментальність послідовності (y_n) у просторі H. Тому $\exists y \in H$: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \Rightarrow \rho(x,y_n) \to \rho(x,y)$ $(n \to \infty) \Rightarrow \rho(x,y) = \rho(x,H_1)$. Оскільки H_1 — замкнена множина, то за критерієм замкненості $y \in H_1$, тобто y — точка з H_1, найближча до точки $x \in H$.

Якщо припустити, що й для точки $y^* \in H_1$ $\rho(x,y^*) = \rho(x,H_1)$, то за тотожністю паралелограма маємо

$$2(\|x-y\|^2+\|x-y^*\|^2) = \|(x-y)+(x-y^*)\|^2+\|(x-y)-(x-y^*)\|^2 \Rightarrow$$

$$\|y^*-y\|^2 = 2\|x-y\|^2+2\|x-y^*\|^2-\|2x-(y+y^*)\|^2 =$$

$$= 2\rho^2(x,H_1)+2\rho^2(x,H_1)-4\,\|x-(y+y^*)/2\| \leqslant$$

$$\leqslant 4\rho^2(x,H_1)-4\rho^2(x,H_1)=0.$$

Тому $y^* = y$, тобто у множині H_1 існує єдина точка y, найближча до фіксованої точки $x \in H$. ■

Отже, має місце

Теорема 5 (про відстань від точки до замкненої опуклої множини). *Нехай H — гільбертів простір, $H_1 \subset H$ і H_1 — замкнена опукла множина, зокрема, H_1 — замкнений підпростір простору H. Тоді $\forall x \in H$ у множині H_1 існує єдина точка y, найближча до x і така, що* $\rho(x,y) = \rho(x,H_1) := \min\limits_{z \in H_1} \rho(x,z)$.

1.7.5. Ортогональне доповнення підпростору. Пряма сума замкненого підпростору та його ортогонального доповнення.

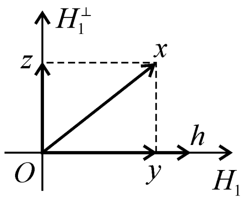

Рис. 9

□ Якщо замкнений підпростір H_1 збігається з простором H, то єдиним вектором з H, що є ортогональним до всіх векторів з H_1, є нульовий вектор, оскільки $(\theta,x)=0$, а $(x,x)\neq 0$, коли $x \neq \theta$.

Припустимо, що $H_1 \neq H$. Тоді за теоремою 5 $\forall x \in H$ $\exists! y \in H_1$: $\rho(x,y) = \rho(x,H_1)$. Позначимо $z = x-y$ і покажемо, що $z \perp H_1$, тобто $z \perp h$ $\forall h \in H_1$ (рис. 9). Для цього при кожному фіксованому $h \in H_1$ розглянемо функцію дійсної змінної

$$f(t) = \|z+th\|^2 = \|x-(y-th)\|^2 \;\forall t \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи, що $y-th \in H_1$, а y — найближча до x точка з H_1, дістаємо, що $\min\limits_{t\in\mathbb{R}} f(t) = f(0)$. Тому $f'(0)=0$, тобто

$$0 = f'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\|z+th\|^2-\|z\|^2}{t} =$$

$$=(z,h)+(h,z) = (z,h)+\overline{(z,h)} = 2\,\mathrm{Re}(z,h),$$

оскільки

$$\|z+th\|^2 = (z+th, z+th) = (z, z+th) + (th, z+th) =$$
$$= \overline{(z+th, z)} + \overline{(z+th, th)} = (z,z) + \overline{(th,z)} + \overline{(z,th)} + (th,th) =$$
$$= \|z\|^2 + t^2\|h\|^2 + t(h,z) + t(z,h).$$

Отже, $\mathrm{Re}(z,h) = 0 \ \forall h \in H_1 \Rightarrow \mathrm{Re}(z,ih) = 0 \ \forall h \in H_1$. Але $\mathrm{Re}(z,ih) = \mathrm{Re}\,\overline{(ih,z)} = \mathrm{Re}(-i)(z,h) = -\mathrm{Im}(z,h)$, тому $\mathrm{Im}(z,h) = 0$ і $\mathrm{Re}(z,h) = 0$, тобто $(z,h) = 0\ \forall h \in H_1$, або $z \perp h\ \forall h \in H_1$.

Таким чином, $\forall x \in H\ \exists y \in H_1$ і $z \perp H_1$: $x = y + z$, причому y – найближчий до x вектор з простору H_1.

Множину векторів z, ортогональних до підпростору H_1, називають *ортогональним доповненням підпростору* H_1 і позначають $H_1^\perp$. (Легко довести, що $H_1^\perp$ є замкненим підпростором простору H, і що $(H_1^\perp)^\perp = H_1$.)

Покажемо, що представлення кожного вектора $x \in H$ у вигляді $x = y + z$, де $y \in H_1$, $z \in H_1^\perp$, єдине. Справді, якщо взяти інше представлення $x = y_1 + z_1$, де $y_1 \in H_1$, $z_1 \in H_1^\perp$, то дістанемо: $y + z = y_1 + z_1$ $\Rightarrow y - y_1 = z_1 - z \Rightarrow \|y - y_1\|^2 = \|z_1 - z\|^2 = (y - y_1, z_1 - z) = (y, z_1) - (y_1, z_1) - (y, z) + (y_1, z) = 0 \Rightarrow y_1 = y$ і $z_1 = z$.

Звідси, зокрема, випливає, що в представленні $x = y + z$, де $y \in H_1$, $z \in H_1^\perp$, вектор z є найближчим до x елементом підпростору $H_1^\perp$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 6 (про представлення гільбертового простору у вигляді прямої суми). *Нехай H – гільбертів простір, H_1 – його замкнений підпростір, а $H_1^\perp$ – ортогональне доповнення підпростору H_1. Тоді кожен вектор $x \in H$ можна однозначно подати у вигляді суми $x = y + z$, де $y \in H_1$, $z \in H_1^\perp$, причому y та z – це найближчі до x вектори з просторів H_1 та $H_1^\perp$ відповідно.*

У теоремі 6 стверджується, що $H = H_1 + H_1^\perp$. При цьому $H_1 \cap H_1^\perp = \{\theta\}$, оскільки $x \in H_1 \cap H_1^\perp \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$. У такому випадку кажуть, що простір H є *прямою сумою підпросторів* H_1 і $H_1^\perp$, і записують $H = H_1 \oplus H_1^\perp$.

Приклад 13. Якщо $H = \mathbb{R}^2$, $H_1 = \{(x,0)\colon x \in \mathbb{R}\}$, то $H_1^\perp = \{(0,y)\colon y \in \mathbb{R}\}$ і $H_1 \oplus H_1^\perp = \mathbb{R}^2$.

1.7.6. Поняття многочлена Фур'є і ряду Фур'є у гільбертовому просторі.

$\square$ Зафіксуємо у просторі H не більш ніж зчисленну ортонормовану систему векторів $X = \{x_i \colon i \in \Lambda\}$, де $\Lambda = \overline{1,n}$ або $\Lambda = \mathbb{N}$. Позначимо $H_1 = L[X]$, тобто замкнений лінійний підпростір, породжений множиною X. У випадку, коли множина X скінченна, елементи простору H_1 мають вигляд $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in P$, $i \in \overline{1,n}$, і їх називають *многочленами за ортонормованою системою* X. При цьому

$$(x, x_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_k\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x_k) = \alpha_k \ \forall k \in \Lambda,$$

а

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{(x, x_i)} = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

Якщо множина X нескінченна, то елементи простору H_1 мають вигляд $x = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} \alpha_{n,k} x_k$, $\alpha_{n,k} \in \mathcal{P}$, $n, k_n \in \mathbb{N}$, $k \in \overline{1,k_n}$. Зокрема, до H_1 належать суми всіх збіжних у просторі H рядів $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$, які називаються *рядами за ортонормованою системою* X. При цьому, враховуючи неперервність скалярного добутку, дістанемо:

$$(x, x_k) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i, x_k\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, x_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x_k) = \alpha_k \ \forall k \in \Lambda,$$

а

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2.$$

Для довільного вектора $x \in H$ числа $c_k = (x, x_k)$, $k \in \Lambda$, називають *коефіцієнтами Фур'є* цього вектора за ортонормованою системою X. Якщо множина X скінченна, то суму $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k$, називають *многочленом Фур'є вектора x за ортонормованою системою*

X. Якщо множина X зчисленна, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, називають *рядом Фур'є вектора x за ортонормованою системою X.* ■

Таким чином, доведена

Теорема 7 (про єдиність представлення за ортонормованою системою). *Якщо вектор x у гільбертовому просторі H представлений у вигляді многочлена або суми ряду за ортонормованою системою $X = \{x_i\}$, то це представлення єдине і є, відповідно, многочленом або рядом Фур'є вектора x. При цьому $\|x\|^2 = \sum\limits_i |\alpha_i|^2$, де α_i — коефіцієнти Фур'є вектора x.*

1.7.7. Мінімальна властивість многочленів Фур'є і рядів Фур'є. Дослідимо тепер, наскільки добре многочлени Фур'є або ряди Фур'є наближають довільний вектор $x \in H$. Для цього розглянемо замкнений підпростір $H_1 = L[X]$, породжений не більш ніж зчисленною ортонормованою системою $X = \{x_i\}$.

□ За теоремою 5 для будь-якого вектора $x \in H$ у просторі H_1 існує єдиний елемент y, найближчий до x. Спробуємо знайти вигляд елемента y та обчислити його відстань до x.

Припустимо спочатку, що множина X скінченна: $X = \{x_i\colon i \in \overline{1,n}\}$. Згідно з теоремою 6 існує, причому теж єдиний, елемент $z \in H_1^{\perp}$: $x = y + z$. Оскільки $y \in H_1$, то $y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$, причому за теоремою 7 $c_i = (y, x_i)$ $\forall i \in \overline{1,n}$. Помічаючи, що $(z, x_i) = 0$ $\forall i \in \overline{1,n}$, дістанемо, що

$$c_i = (y, x_i) + (z, x_i) = (y + z, x_i) = (x, x_i) \ \ \forall i \in \overline{1,n},$$

тобто y є многочленом Фур'є вектора x за ортонормованою системою X.

Знайдемо тепер $\rho^2(x,y) = \|x - y\|^2$:

$$\|x - y\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,\ x - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\right) =$$

$$= (x,x) - \sum_{i=1}^{n}(x, c_i x_i) - \sum_{i=1}^{n}(c_i x_i, x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(c_i x_i, c_k x_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}(x, x_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i, x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_i \overline{c_k}(x_i, x_k) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2.$$

Отже, *для будь-якої скінченної ортонормованої системи* $X = \{x_i\}$ *найближчим до вектора* $x \in H$ *многочленом за цією системою є його многочлен Фур'є* $y = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$. При цьому

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2. \tag{4}$$

Як наслідок з рівності (4) випливає нерівність

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{5}$$

Припустимо тепер, що множина X зчисленна: $X = \{x_i \colon i \in \mathbb{N}\}$. За доведеним вище, для будь-якої скінченної підсистеми $X_n = \{x_i \colon i \in \overline{1,n}\}$ системи X маємо, що серед усіх многочленів за системою X_n найближчим до вектора $x \in H$ є його многочлен Фур'є $y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ за системою X_n. При цьому виконуються співвідношення (4) і (5). Оскільки нерівність (5) правильна при довільному $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ збіжний, причому

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{6}$$

Дослідимо на збіжність ряд Фур'є $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x_i$ елемента x.

Позначаючи $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i$ $\forall n \in \mathbb{N}$, дістанемо, в силу (4):

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} c_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |c_i|^2 \to 0,$$

коли $n > m \to \infty$. Отже, (S_n) — фундаментальна послідовність простору H. Оскільки цей простір повний, то (S_n) — збіжна в H послідовність: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x_i = S$. Крім того, оскільки $S_n \in H_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, а простір H_1 є замкненою множиною в H, то $S \in H_1$.

Перевіримо, чи не буде вектор S найближчим до x елементом простору H_1. Для цього візьмемо довільний елемент $F \in H_1$ і подамо його у вигляді границі $F = \lim\limits_{n\to\infty} F_n$, де $F_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} \alpha_{n,k} x_k$. Оскільки F_n є загальним многочленом, а S_{k_n} — многочленом Фур'є вектора x за ортонормованою системою X_{k_n}, то за доведеним у першій частині,

$$\|x - S_{k_n}\| \leqslant \|x - F_n\| \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Для того щоб в останній нерівності можна було перейти до границі, потрібно, щоб $k_n \to \infty$. Але при виборі послідовності F_n можна навіть забезпечити, щоб $k_n \uparrow \infty$ (додаючи до F_{n+1} при необхідності нулі). Отже, після переходу до границі, враховуючи довільність елемента $F \in H_1$, дістанемо нерівність

$$\|x - S\| \leqslant \|x - F\| \ \ \forall F \in H_1.$$

Цим підтверджено, що найближчим до x елементом y простору H_1 є $y = S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x_i$, тобто сума ряду Фур'є вектора x.

Відстань $\rho(x,y) = \|x - y\|$ можна знайти шляхом переходу в рівності (4) до границі:

$$\rho^2(x,y) = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2. \ \blacksquare \tag{7}$$

Таким чином, доведена

Теорема 8 (про мінімальну властивість многочленів Фур'є і ряду Фур'є). *Нехай H — гільбертів простір, $X = \{x_i\}$ — не більш ніж зчисленна ортонормована система в H, $H_1 = L[X]$ — замкнений підпростір, породжений множиною X, і вектор $x \in H$. Тоді найближчим до x елементом простору H_1 є $y = \sum\limits_i c_i x_i$, де $c_i = (x, x_i)\ \forall i$, тобто многочлен Фур'є або сума ряду Фур'є вектора x за ортонормованою системою X (в залежності від того, скінченною чи зчисленною є множина X).*

При цьому відстань від x до y можна обчислити за формулами (4) *та* (7). *Крім того, мають місце* ***нерівності Бесселя*** (5) та (6).

Зауваження. У теоремі 8 неявно стверджується також, що ряд Фур'є довільного вектора $x \in H$ за довільною ортонормованою системою X збігається у просторі H.

Згадуючи те, що говорилося вище про вигляд елементів підпростору $H_1 = L[X]$, а також помічаючи, що $x \in H_1 \Leftrightarrow x = y$, де y — це найближчий до x елемент простору H_1, легко отримати

Наслідок 4 (про будову підпростору $L[X]$). *В умовах теореми 8* $x \in H_1 \Leftrightarrow x = \sum\limits_i c_i x_i$, *тобто підпростір* $H_1 = L[X]$ *складається з тих і тільки тих елементів, які можна подати у вигляді їхнього многочлена Фур'є або суми їхнього ряду Фур'є за ортонормованою системою* X.

1.7.8. Розвинення вектора у ряд Фур'є. З теореми 8 і наслідку 4 легко випливає важлива

Теорема 9 (про представлення вектора у вигляді многочлена або суми ряду Фур'є). *Нехай* $X = \{x_i\}$ — *повна ортонормована система гільбертового простору* H. *Тоді будь-який вектор* $x \in H$ *можна подати як* $x = \sum\limits_i c_i x_i$, *де* $c_i = (x, x_i)\ \forall i$, *тобто у вигляді його многочлена Фур'є або суми його ряду Фур'є за ортонормованою системою* X.

При цьому має місце ***рівність Парсеваля:***

$$\|x\|^2 = \sum_i |c_i|^2. \tag{8}$$

Рівність (8) називається також *формулою замкненості* для вектора x. Якщо ця формула має місце для кожного вектора $x \in H$, то відповідну ортонормовану систему $X = \{x_i\}$ називають *замкненою*.

Якщо ж у просторі H не існує ненульового вектора x, ортогонального до всіх векторів системи $X = \{x_i\}$, то таку систему називають *тотальною*.

Виявляється, що має місце

Теорема 10 (про тотожність характеристик ортонормованої системи). *Для будь-якої не більш ніж зчисленної ортонормованої системи* $X = \{x_i\}$ *гільбертового простору* H *поняття повноти, замкненості і тотальності є тотожними.*

□ Доведення проведемо за схемою: "повнота" $\Rightarrow$ "замкненість" $\Rightarrow$ "тотальність" $\Rightarrow$ "повнота".

Якщо система X повна, то за теоремою 9 вона замкнена.

Нехай система X замкнена. Тоді $\forall x \in H$: $x \neq \theta \Rightarrow \sum\limits_i |c_i|^2 = \|x\|^2 \neq$ $\neq 0 \Rightarrow \exists i_0$: $(x, x_{i_0}) = c_{i_0} \neq 0 \Rightarrow x \not\perp X \Rightarrow X$ — тотальна.

Припустимо, нарешті, що система X тотальна. Візьмемо довільний вектор $x \in H$ і позначимо $y = \sum\limits_i c_i x_i$, де $c_i = (x, x_i)\ \forall i$, тобто y — многочлен Фур'є або суму ряду Фур'є вектора x за системою X. За теоремою 7 $c_i = (y, x_i)\ \forall i$. Тому $(x - y, x_i) = (x, x_i) - (y, x_i) = 0\ \forall i \Rightarrow x - y = \theta$, оскільки система X тотальна. Тому $x = y$ і за наслідком 4 $x \in L[X] \Rightarrow L[X] = H$, тобто система X повна. ■

Відмітимо, що у довільному гільбертовому просторі не обов'язково є не більш ніж зчисленна повна система.

Приклад 14. У просторах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l^2 та $CR_2[a;b]$ можна вказати не більш ніж зчисленні повні ортонормовані системи (див. приклад 2, 1), 3) п. 1.7.2 і приклад 12, 2) п. 1.7.4, відповідно). Повноту тригонометричної системи у просторі $CR_2[a;b]$ обгрунтовано у [12, гл. III, §4]. Там же наведено приклад гільбертового простору, у якому не існує зчисленної повної системи.

1.7.9. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожен нормований простір є лінійним.
2. Кожен лінійний простір є нормованим.
3. Кожен лінійний простір можна зробити нормованим.
4. Якщо L — нормований простір, то L — метричний простір з метрикою $\rho(x,y) = \|x - y\|$.
5. Якщо L — лінійний метричний простір з метрикою $\rho(x,y)$, то L і нормований простір з нормою $\|x\| = \rho(x,0)$.
6. Кожен евклідів простір із скалярним добутком (x,y) є нормованим простором з нормою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.
7. Кожна норма породжується деяким скалярним добутком.
8. Кожен скалярний добуток породжує деяку норму.
9. Якщо $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то $(x,y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$.
10. Тотожність паралелограма має місце у довільному нормованому просторі.
11. Кожен нормований простір є простором Банаха.
12. Кожен гільбертів простір є простором Банаха.
13. Поняття ряду та його суми можна ввести у будь-якому лінійному просторі.
14. Якщо в довільному нормованому просторі ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ є абсолютно збіжним, то він є також і збіжним.

15. Функції $\varphi(x) = 1$, $\psi(x) = \cos x$ і $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$ є точками простору $C[a;b]$, що лежать на одному відрізку цього простору.
16. Кожен підпростір нормованого простору є опуклою множиною.
17. Якщо E опукла множина, то її замикання $\overline{E}$ також є опуклою множиною.
18. Твердження, обернене до 17, є правильним.
19. Система $M = \{x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ є повною системою векторів у просторі $C[-a;a]$.
20. Якщо норма $\|x\|$ породжується скалярним добутком (x,y), то $|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.
21. $\left|\int\limits_a^b x(t) \cdot y(t)dt\right|^2 \leqslant \int\limits_a^b |x(t)|^2 dt \int\limits_a^b |y(t)|^2 dt$ для будь-яких функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$, неперервних на $[a;b]$.
22. Якщо $x = (1,1,0,0,\dots,0,\dots)$, $y = (1,-1,0,0,\dots,0,\dots)$, то x і $y \in l^p$ $\forall p \in \mathbb{N}$ і $\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2)$ $\forall p \in \mathbb{N}$.
23. Тригонометрична система $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t,\ \dots,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt,\ \dots\right\}$ є ортонормованою у просторі $CR_2[-\pi;\pi]$.
24. Будь-яка неперервна на відрізку $[-\pi;\pi]$ функція $x(t)$ є сумою ряду Фур'є за тригонометричною системою у просторі $CR_2[-\pi;\pi]$.
25. Кожна ортонормована система $\{x_i\}$ евклідового простору E є лінійно незалежною у цьому просторі.
26. Якщо з повної, не більш ніж зчисленної ортонормованої системи $\{x_i\}$ гільбертового простору H викинути будь-який вектор x_{i_0}, то вона стане неповною.

II. Довести дані твердження.

1. Нехай S — множина всіляких послідовностей комплексних чисел із звичайними операціями додавання і множення на число, а
$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad \forall x = (x_n) \text{ і } y = (y_n) \in S.$$
Тоді (S, ρ) є метричним простором і не є нормованим простором з нормою $\|x\| = \rho(x, 0)$.
2. Якщо нормований простір E є обмежено компактною множиною, то E — банахів простір.
3. Теорема 6 має місце для будь-якого евклідового простору H (не обов'язково гільбертового).

4. Якщо H — гільбертів простір і $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 < +\infty$, то для будь-якої ортонормованої системи $\{x_i\colon i\in\mathbb{N}\}$ (не обов'язково повної) існує вектор $x\in H$ такий, що $c_i = (x, x_i)$ і $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i x_i$.
5. Нехай $X = \{x_i\}$ — не більш ніж зчисленна ортонормована система векторів гільбертового простору H, вектори $f, g\in L[X]$, c_i, d_i, $i\in\overline{1,n}$ або $i\in\mathbb{N}$, — їхні коефіцієнти Фур'є за ортонормованою системою X. Тоді $(f,g) = \sum\limits_i c_i\overline{d_i}$.

1.7.10. Історична довідка. Багатовимірні евклідові простори $\mathbb{R}^n$ були введені у 1844 році німецьким математиком Г. Грассманом (1809 — 1877). Поняття метричного простору ввів у 1906 році французький математик М. Фреше (1878 — 1973). Вперше поняття нескінченновимірного простору з'явилося у роботах італійського математика С. Пінкерле (1853 — 1936). Нерівності Коші — Буняковського названо на честь французького математика О. Коші (1789 — 1857) та російського математика В. Буняковського (1804 — 1889), у роботах яких ці нерівності з'явилися вперше.

Першим строге означення границі послідовності сформулював у 1817 році чеський математик Б. Больцано. Позначення границі за допомогою символа lim (від латинського limes — границя) ввів у 1786 році швейцарський математик С. Люільє (1750 — 1840).

Поняття околу точки ввів у 1821 році О. Коші. Поняття граничної точки, відкритої та замкненої множини $E\subset\mathbb{R}^n$ ввів у 70-х роках XIX сторіччя німецький математик Г. Кантор, а для довільних метричних просторів у 1906 році М. Фреше. Поняття зв'язної множини ввів у 1851 році німецький математик Б. Ріман (1826 — 1866), а поняття компактності і повного метричного простору — у 1906 році М.Фреше.

Повноту простору $\mathbb{R}^1$ першим у 1817 році довів Б. Больцано. Теорема про поповнення метричного простору належить німецькому математику Ф. Хаусдорфу (1868 — 1942).

Абстрактні лінійні простори вперше з'явилися у роботах Д. Пеано в 1888 році. Поняття норми у 1897 році ввів С. Пінкерле, а позначення $\|x\|$ — у 1908 році німецький математик Е. Шмідт (1876 — 1956). Означення нормованих просторів ввів польський математик С. Банах (1892 — 1945), а аксіоми гільбертового простору першим сформулював у 1930 році американський математик Джон фон Нейман (1903 — 1957). Назва гільбертового простору введена на честь німецького математика Д. Гільберта (1862 — 1943).

2. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ У МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

У даному розділі вивчаються узагальнення понять границі і неперервності числової функції однієї змінної на випадок функцій, множини визначенння і значень яких лежать у довільних метричних просторах.

2.1. Поняття оператора і функціонала. Функції кількох змінних

У цьому підрозділі введено класи функцій, множини визначення і значень яких лежать у певних метричних просторах.

2.1.1. Поняття оператора і функціонала. Частинними випадками загального поняття функції є поняття оператора та функціонала.

Функцію $f\colon X \to Y$ (або $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$) називають *оператором* f, якщо множини X та Y лежать у певних метричних просторах: $X \subset (M_1, \rho_1)$ і $Y \subset (M_2, \rho_2)$.

Оператор, множина значень якого є числовою множиною, називають *функціоналом*. При цьому, якщо $Y \subset \mathbb{R}$ ($Y \subset \mathbb{C}$), то *функціонал* $f\colon X \to Y$ називають *дійсним* (*комплексним*).

Приклад 1. Якщо $X = C[a;b]$, а

$$f(x(t)) = \int_a^t x(\tau)\,d\tau = y(t),\ t \in [a;b], \tag{1}$$

то $f\colon C[a;b] \to C[a;b]$ – так званий інтегральний оператор, а якщо

$$f(x(t)) = \int_a^b x(\tau)\,d\tau,\ x = x(t) \in C[a;b], \tag{2}$$

то $f\colon C[a;b] \to \mathbb{R}$ – дійсний функціонал.

Будь-яка функція дійсної або комплексної змінної є прикладом функціонала. Іншими важливими прикладами функціоналів та операторів є:

1) *функція кількох змінних* (або n-змінних), тобто функціонал $f\colon X \to \mathbb{R}$, де $X \subset \mathbb{R}^n$. Цю функцію позначають також $w = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}$, або $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $w \in \mathbb{R}$. Зокрема, якщо $X \subset \mathbb{R}^2$, то $f\colon X \to \mathbb{R}$ – *функція двох змінних*, а якщо $X \subset \mathbb{R}^3$, то $f\colon X \to \mathbb{R}$ – *функція трьох змінних*. Ці функції позначають також $w = f(x,y)$, $(x,y) \in X \subset \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}$ та $w = f(x,y,z)$, $(x,y,z) \in X \subset \mathbb{R}^3$, $w \in \mathbb{R}$;

2) *векторнозначна функція*, або *вектор-функція, кількох змінних*, тобто оператор $f\colon X \to \mathbb{R}^n$, де $X \subset \mathbb{R}^m$, або оператор $f\colon X \to \mathbb{C}^n$, де $X \subset \mathbb{C}^m$. Цю функцію позначають також $w = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in X \subset \mathbb{R}^m$ (або $\mathbb{C}^m$), $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$). При цьому $w_k = f_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$ $\forall k \in \overline{1,n}$ і кожна функція $f_k\colon X \to \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) називається *k-тою компонентою функції f*;

3) *лінійний оператор*, тобто оператор f, область визначення і область значень якого лежать у певних лінійних просторах, причому $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ $\forall x$ і $y \in D(f)$ і $\forall \alpha$ і $\beta \in \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$);

4) *лінійний функціонал*, тобто такий лінійний оператор, множина значень якого є числовою множиною.

Приклад 2. Рівність $f(x,y) = x^2 + y^2$ задає функцію f двох змінних, причому $D(f) = \mathbb{R}^2$, а рівність $f(x,y,z) = \sqrt{-x^2 - y^2 + z}$ задає функцію f трьох змінних, область визначення якої є множина $D(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon z \geqslant x^2 + y^2\}$.

Наведений вище оператор (1) є прикладом лінійного оператора, а функціонал (2) є прикладом лінійного функціонала.

Кожна функція комплексної змінної є прикладом векторнозначної функції двох змінних, якщо ототожнювати $x + iy$ з (x,y). Дійсно,

$$f(z) = f(x+iy) = \operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z) =$$

$$= f_1(x,y) + i\, f_2(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)),$$

тобто ця функція f має дві компоненти $f_1 = \operatorname{Re} f$ та $f_2 = \operatorname{Im} f$.

Графіком функції f двох змінних є множина

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x,y) \in D(f),\ z = f(x,y)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

яку називають *поверхнею*, а *графік функції f трьох змінних*, тобто множину

$$\Gamma = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4\colon (x,y,z) \in D(f),\ w = f(x,y,z)\},$$

називають іноді *гіперповерхнею*.

Приклад 3. Графіком функції $f(x,y) = x^2 + y^2$ є параболоїд обертання, рівняння якого має вигляд $z = x^2 + y^2$ (рис. 10).

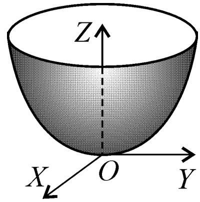

Рис. 10

2.1.2. Лінії та поверхні рівня. Досить часто уявлення про вигляд поверхні

$$\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x,y) \in D(f),\ z = f(x,y)\}$$

може скластися шляхом розгляду *ліній рівня* даної поверхні, тобто множин $\{(x,y) \in D(f)\colon f(x,y) = c = const\}$. Надаючи сталій c різних значень, дістаємо різні лінії рівня поверхні. Тому часто на лінії рівня вказують лише значення сталої c. Наприклад, при зображенні на картах низин чи гір малюють відповідні лінії рівня, на яких вказують відхилення від так званого рівня моря (який вважається нульовим рівнем). Так, на рис. 11 зображена низина, а на рис. 12 — гора.

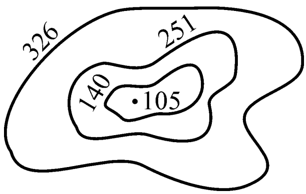

Рис. 11

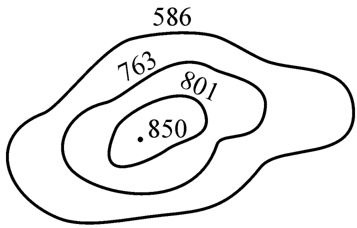

Рис. 12

Аналогічно з лінією рівня можна ввести поняття *поверхні рівня* даної гіперповерхні, тобто множини

$$\{(x,y,z) \in D(f)\colon f(x,y,z) = c = const\}.$$

Приклад 4. Якщо $f(x,y,z) = \sqrt{z - x^2 - y^2}$, то $\forall c \geqslant 0$

$$\{(x,y,z)\colon z \geqslant x^2 + y^2 \text{ і } f(x,y,z) = c\} = \{(x,y,z)\colon z = x^2 + y^2 + c^2\},$$

тобто поверхнями рівня є параболоїди обертання.

2.1.3. Поняття гіперплощини та ядра лінійного функціонала. Відомо, що будь-який елемент $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ можна записати у вигляді $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, де $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,0,\ldots,1)$. Тому для довільного лінійного функціонала $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ маємо

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) \cdot x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Зокрема, дійсний лінійний функціонал, що визначений у просторі $\mathbb{R}^3$, має вигляд

$$f(x,y,z) = ax + by + cz,$$

де a, b і $c \in \mathbb{R}$.

Кожна поверхня рівня цього функціонала має рівняння $ax+by+$ $+cz = d$, тобто є площиною, якщо $a^2+b^2+c^2 > 0$. Остання умова означає, що функціонал f відмінний від тотожного нуля.

У зв'язку з цим вводять наступне означення. Якщо лінійний функціонал f, що визначений на лінійному просторі L, відмінний від тотожного нуля, то $\forall a \in \mathbb{R}$ множину $\Gamma_a(f) = \{x \in L\colon f(x) = a\}$ називають *гіперплощиною*. При цьому рівність $f(x) = a$ називають *рівнянням* гіперплощини $\Gamma_a(f)$. Якщо $a = 0$, то гіперплощину $\Gamma_0(f)$ називають *ядром функціонала* f і позначають $\ker f$. Отже, $\ker f = \{x \in L\colon f(x) = 0\}$.

Зафіксуємо довільний вектор $x_0 \in \Gamma_a(f)$. Тоді

$$x \in \Gamma_a(f) \Leftrightarrow y = x - x_0 \in \ker f, \text{ а } y \in \ker f \Leftrightarrow x = y + x_0 \in \Gamma_a(f),$$

тобто гіперплощину $\Gamma_a(f)$ можна дістати з ядра функціонала f шляхом паралельного перенесення.

Виявляється, що *ядро лінійного функціонала f у певному розумінні визначає цей функціонал*. Щоб показати це, доведемо насамперед, що $\ker f = \{x \in L\colon f(x) = 0\}$ *є підпростором простору L* у тому розумінні, що

$$\alpha x + \beta y \in \ker f \ \forall x \text{ і } y \in \ker f \ \text{ і } \ \forall \alpha \text{ і } \beta \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C}).$$

Останнє випливає з лінійності функціонала f, оскільки

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = 0, \text{ якщо } f(x) = f(y) = 0.$$

$\square$ Зрозуміло, що $\ker f = L \Leftrightarrow f \equiv 0$. Нехай $f \not\equiv 0$. Візьмемо довільний вектор $x_0 \in L$ такий, що $f(x_0) \neq 0$, і розглянемо вектор $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \ \forall x \in L$. Маємо

$$f(y) = f(x) - f\left(\frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(x_0)} f(x_0) = 0,$$

тобто $y \in \ker f$. Отже,

$$\forall x \in L \text{ і } \forall x_0 \notin \ker f \ \exists y \in \ker f \text{ і } a \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C})\colon y = x - a x_0,$$

тобто $x = y + ax_0$. Якщо припустити, що існують також $y_1 \in \ker f$ і $b \in \mathbb{R}$: $x = y_1 + bx_0$, то дістанемо

$$y - y_1 = x_0(b-a) \Rightarrow f(y-y_1) = f(x_0(b-a)) \Rightarrow$$

$$f(y) - f(y_1) = (b-a)f(x_0) \Rightarrow (b-a)f(x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$a = b \Rightarrow y - y_1 = \theta \Rightarrow y = y_1.$$

Припустимо тепер, що лінійні функціонали f і φ такі, що $\ker f = \ker\varphi$ та $f \neq \theta$ і $\varphi \neq \theta$. Зафіксуємо вектор $x_0 \notin \ker f$. Тоді $x_0 \notin \ker\varphi$. За доведеним

$$\forall x \in L\ \exists! y \in \ker f \text{ і } a \in \mathbb{R} \text{ (або } \mathbb{C}\text{)}: x = y + ax_0 \Rightarrow$$

$$y \in \ker\varphi \text{ і } f(x) = a f(x_0) \text{ та } \varphi(x) = a\varphi(x_0) =$$

$$= \frac{\varphi(x_0)}{f(x_0)} \cdot a f(x_0) = \frac{\varphi(x_0)}{f(x_0)} \cdot f(x) = k f(x)\ \forall x \in L. \blacksquare$$

Таким чином, доведена

Теорема 1 (про представлення $x = y + ax_0$, де $y \in \ker f$, $x_0 \notin \ker f$, $x \in L$). *Нехай L — лінійний простір, $f\colon L \to \mathbb{R}$ (або $\mathbb{C}$) — лінійний функціонал, а $H = \ker f \neq L$, тобто $\exists x_0 \in L$: $f(x_0) \neq 0$.*

Тоді 1) $\forall x \in L\ \exists! y \in H$ *і* $\exists! a \in \mathbb{R}$ (*або* $\mathbb{C}$): $x = y + ax_0$; 2) *якщо* φ *також лінійний функціонал і* $\ker f = \ker\varphi$, *то* $\exists k \in \mathbb{R}$ (*або* $\mathbb{C}$): $f(x) = k\varphi(x)\ \forall x \in L$, *тобто* ***ядро лінійного функціонала f визначає f з точністю до сталого множника.***

2.1.4. Загальний вигляд лінійного оператора $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

□ Нехай цей оператор задається рівністю

$$(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

яка рівносильна системі рівностей

$$y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i \in \overline{1,m}.$$

Візьмемо вектори

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

і знайдемо їхні образи

$$f(e_j) = a_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{mj}), \quad j \in \overline{1,n}.$$

Тоді, враховуючи лінійність оператора f, для довільного вектора

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ знайдемо

$$f(x)=f\left(\sum_{j=1}^{n}x_je_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jf(e_j)=\sum_{j=1}^{n}x_ja_j=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(x_j\alpha_{1j},x_j\alpha_{2j},\ldots,x_j\alpha_{mj})=$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{1j},\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{2j},\ldots,\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{mj}\right),$$

що рівносильно системі

$$y_i=f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{ij},\ \ i\in\overline{1,m},$$

або, в розгорнутому вигляді,

$$\begin{cases} y_1=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1n}x_n,\\ y_2=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\ldots+\alpha_{2n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m=\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\ldots+\alpha_{mn}x_n.\end{cases}$$

Якщо позначити

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\ldots\\y_m\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\ldots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\ldots&\alpha_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\ldots&\alpha_{mn}\end{pmatrix},$$

то останню систему можна буде переписати у матричному вигляді

$$y=Ax.$$

Отже, *для кожного лінійного оператора* $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *існує* $m\times n$*-матриця* A *така, що* $f(x)=Ax$ *(якщо записувати вектори* x *та* $f(x)$ *у стовпчик).*

Навпаки, візьмемо довільну $m\times n$-матрицю A і розглянемо оператор $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, що задається рівністю $f(x)=Ax$, $x\in\mathbb{R}^n$. За властивостями матриць

$$f(kx+ly)=A\cdot(kx+ly)=Akx+Aly=$$

$$=kAx+lAy=kf(x)+lf(y)\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}^n,\ \ k,l\in\mathbb{R},$$

тобто оператор f лінійний.

Отже, якщо кожній $m\times n$-матриці A поставити у відповідність лінійний оператор $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такий, що $f(x) = Ax$, то дістанемо відображення φ простору усіх дійсних $m \times n$-матриць на простір усіх лінійних операторів $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

З'ясуємо, чи є таке відображення φ взаємно однозначним. Для цього припустимо, що матрицям A та B відповідає один і той самий оператор f, тобто $f(x) = Ax = Bx$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, або $(A - B)x = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Якщо в останню рівність підставити $x = e_j$, $j \in \overline{1,n}$, то ліва частина цієї рівності дасть j-тий стовпець матриці $A - B$, тоді як у правій частині – нульовий стовпець. Отже, всі стовпці матриці $A - B$ є нульовими і тому $A - B = 0$, або $A = B$. Це означає, що відображення φ взаємно однозначне. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про представлення лінійного оператора $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$). *Для кожного лінійного оператора $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ існує єдина дійсна $m \times n$-матриця A така, що $f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, якщо вектори x та $f(x)$ записувати у стовпчик.*

Навпаки, кожна дійсна $m \times n$-матриця A задає лінійний оператор $f(x) = Ax \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Матрицю A з теореми 2 називають *матрицею лінійного оператора f*.

2.1.5. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожне відображення є оператором.
2. Кожен функціонал є а) функцією, б) функцією кількох змінних.
3. Відображення $f(x) = \int\limits_0^1 x(t+u)\,dt$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, є оператором з $C[0;2]$ в $C[0;1]$.
4. Відображення з 3 є лінійним оператором.
5. Диференціальний оператор $D(f) = f'(x)$ є відображенням $C[a;b]$ в $C[a;b]$.
6. Якщо $F(x(t)) = \max\limits_{[a;b]} |x(t)|$ $\forall x = x(t) \in C[a;b]$, то F – дійсний функціонал.
7. Кожну функцію двох змінних можна вважати функцією комплексної змінної.
8. Кожна функція кількох змінних є оператором і функціоналом.
9. Графік кожного функціонала є поверхнею у просторі $\mathbb{R}^3$.

10. У кожній точці своєї лінії рівня функція двох змінних визначена і має одне і те ж значення.
11. Якщо $f(x(t)) = u \cdot x(0)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, то f є лінійним оператором з $C[0;1]$ в $C[0;1]$.
12. Теорема 2 залишиться правильною, якщо в ній замінити рівність $f(x) = Ax$ на рівність $f(x) = xA$ і записувати вектори x та $f(x)$ у рядочок.
13. Якщо $f(x) = x_{k_0}$ $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2$, то f є лінійним функціоналом.
14. Якщо f − лінійний функціонал і $f(x_0) = a$, то $\ker f = \{x \in L\colon f(x) = a\} - \{x_0\}$.

II. Для заданої функції кількох змінних знайти її область визначення $D(f)$ та вказати її внутрішність, межу, зовнішність, похідну множину та ізольовані точки. Перевірити, чи є $D(f)$ замкненою, відкритою, зв'язною множиною, областю чи замкненою областю:

1) $f(x,y) = \sqrt{x-y}$, 2) $f(x,y) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y}$,
3) $f(x,y) = \sqrt{x-\sqrt{y}}$, 4) $f(x,y) = \ln(x^2 - 5xy + 6y^2)$,
5) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$, 6) $f(x,y,z) = \frac{x-y}{y-z}$,
7) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$,
8) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$.

III. Для заданої функції f комплексної змінної виділити її компоненти $f_1 = \operatorname{Re} f$ і $f_2 = \operatorname{Im} f$:

1) $f(z) = z^2 - \overline{z} + 1$, 2) $f(z) = \arg z$,
3) $f(z) = |z|$, 4) $f(z) = \sqrt{z}$ (головне значення),
5) $f(z) = \exp z$, 6) $f(z) = \sin z$,
7) $f(z) = \operatorname{tg} z$, 8) $f(z) = \operatorname{ch} z$,
9) $f(z) = \operatorname{cth} z$, 10) $f(z) = \ln z$.

2.2. Границя і неперервність оператора і функціонала

У даному підрозділі введено узагальнення понять границі і неперервності числової функції на випадок довільних операторів та функціоналів і досліджено їх найпростіші властивості.

2.2.1. Границя оператора і функціонала. Подібно до того, як введено поняття границі функції дійсної та комплексної змінної, можна ввести поняття границі оператора та функціонала. Щоб не розрізняти ці випадки, вважатимемо надалі їх функціями

$$f\colon X \to Y, \text{ де } X \subset (M_1, \rho_1) \text{ і } Y \subset (M_2, \rho_2).$$

При цьому $x_0 \in M_1$ — гранична точка множини X.

Елемент $a \in M_2$ називають *границею функції f у точці x_0* і записують $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ або $f(x) \to a$ $(x \to x_0)$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$ $\forall (x_n)$: $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Дане означення називають *означенням границі функції у точці за Гейне* або *мовою послідовностей*.

Так само, як і для функцій дійсної і комплексної змінної, можна показати, що це означення еквівалентне *означенню границі функції у точці за Коші* або *мовою* "$\varepsilon - \delta$": $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\rho_2(f(x), a) < \varepsilon$, коли $x \in X$ і $0 < \rho_1(x, x_0) < \delta$. Пропонуємо читачеві довести цю еквівалентність самостійно.

Згадуючи поняття околу та проколеного околу, дістаємо *означення границі мовою околів:* $a = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall O(a)\ \exists O(x_0)$: $f(x) \in$ $\in O(a)$ $\forall x \in O^*(x_0) \cap X$.

Суть поняття границі функції f у точці x_0 полягає у тому, що $f(x) \overset{\text{я.з.}}{\approx} a$, коли $x_0 \neq x \overset{\text{д.}}{\approx} x_0$ і $x \in X$ (тобто $f(x)$ як завгодно близьке до a, коли $X \ni x \neq x_0$, але x досить близьке до x_0).

Нехай $D(f_1) = E \subset D(f)$, $f_1(x) = f(x)$ $\forall x \in E$ та існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = a$. Тоді елемент a називають *границею функції f у точці x_0 за множиною E* (або *відносно множини E*) і записують $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a$ або $f(x) \to a$ $(E \ni x \to x_0)$.

Застосувавши дані загальні означення до конкретних класів операторів чи функціоналів, дістаємо різні частинні випадки цих означень.

1°. *Границя функції кількох змінних*:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to a \ \big((x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)\big) \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\text{: } |f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a| < \varepsilon,\ \text{ коли } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$$
$$\text{і } 0 < (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2 < \delta^2.$$

Зокрема, $f(x,y) \to a$ $\big((x,y) \to (x_0,y_0)\big)$, або $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|f(x,y) - a| < \varepsilon$, коли $(x,y) \in X$ і $0 < (x - x_0)^2 +$ $+ (y - y_0)^2 < \delta^2$.

Це *означення границі функції двох змінних мовою* "$\varepsilon - \delta$".

Якщо у просторі $\mathbb{R}^2$ введено октаедричну метрику:

$$\rho((x,y),(x_0,y_0)) = \max\{|x-x_0|,|y-y_0|\},$$

то означення границі функції двох змінних набуває вигляду $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon\ |f(x,y) - a| < \varepsilon$, коли $(x_0,y_0) \neq (x,y) \in X$ і $|x-x_0| < \delta$ та $|y-y_0| < \delta$.

Пропонуємо читачеві самостійно довести, що *дані різні означення границі функції двох змінних насправді є еквівалентними* (при цьому кажуть, що дві різні *метрики є еквівалентними*).

2°. *Границя функції комплексної змінної*: $c = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\colon |f(z)-c| < \varepsilon\ \forall z \in E = D(f)$, коли $0 < |z-z_0| < \delta(\varepsilon)$.

☐ Ототожнюючи точки $z = x+iy$ та (x,y), маємо

$$z \to z_0 \Leftrightarrow |z-z_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0 \Leftrightarrow (x,y) \to (x_0,y_0),$$

а

$$|f(z)-c| = \sqrt{(u(x,y)-a)^2+(v(x,y)-b)^2},$$

де $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, $a = \operatorname{Re} c$ і $b = \operatorname{Im} c$.

Звідси, користуючись означенням границі функції мовою відстаней, дістаємо $f(z) \to c$, коли $z \to z_0 \Leftrightarrow$

$$|f(z)-c| \to 0,\ \text{ коли }\ 0 < |z-z_0| \to 0 \Leftrightarrow$$

$$|u(x,y)-a| \to 0\ \text{ і }\ |v(x,y)-b| \to 0,\ \text{ коли }\ (x,y) \to (x_0,y_0) \Leftrightarrow$$

$$u(x,y) \to a\ \text{ і }\ v(x,y) \to b,\ \text{ коли }\ (x,y) \to (x_0,y_0).\ \blacksquare$$

Отже, має місце

Теорема 1 (про зв'язок границі $f(z)$ з границями $\operatorname{Re} f(z)$ та $\operatorname{Im} f(z)$). *Нехай* $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)\ \forall z = x+iy \in E = D(f) \subset \mathbb{C}$, $z_0 = x_0+iy_0 \in E'$ *і* $c = a+ib \in \mathbb{C}$. *Тоді для того щоб* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c$, *необхідно й досить, щоб*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \ \text{ i } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b.$$

3°. *Границя векторнозначної функції кількох змінних*:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \big(f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n), f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ldots,$$

$$f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)\big) \to a = (a_1,a_2,\ldots,a_m),$$

$$\text{коли }\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \to (x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0) \Leftrightarrow$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\quad \sum_{k=1}^{m}|f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)-a_k|^2<\varepsilon^2,\quad \text{як тільки}$$

$(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in X$ і $0<|x_1-x_1^0|^2+|x_2-x_2^0|^2+\ldots+|x_n-x_n^0|^2<\delta^2(\varepsilon)$.

Як і для функції комплексної змінної, легко показати, що ця границя існує тоді й тільки тоді, коли $\forall k\in\overline{1,m}$ $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to a_k$ $\big((x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\big)$.

2.2.2. Основні властивості границь. Оскільки означення границі функції у довільному метричному просторі за формою таке ж саме, як і для функції дійсної або комплексної змінної, то природно чекати, що й властивості цієї границі зберігаються.

Властивість 1 (про єдиність границі). *Кожна функція f у граничній точці x_0 множини X може мати не більше однієї границі.*

Властивість 2 (про границю відносно підмножини). 1) *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, *$E\subset X$ і $x_0\in E'$, то* $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=a$; 2) *якщо* $\exists\delta>0$: $O_\delta^*(x_0)\cap E=O_\delta^*(x_0)\cap X$ *і* $\lim\limits_{E\ni x\to x_0} f(x)=a$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$; 3) *якщо* $\lim\limits_{E_1\ni x\to x_0} f(x)=a$ *і* $\lim\limits_{E_2\ni x\to x_0} f(x)=a$, *то* $\exists\lim\limits_{E_1\cup E_2\ni x\to x_0} f(x)=a$.

Властивість 3 (про обмеженість функції, що має границю). *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, *то* $\exists O(x_0)$ *такий, що функція f обмежена на множині $X\cap O(x_0)$, тобто множина $f(X\cap O(x_0))$ обмежена у метричному просторі (M_2,ρ_2).*

Властивість 4 (про границю композиції функцій). *Нехай* $\varphi\colon X\to Y$, $f\colon Y\to Z$, *де* $X\subset(M_1,\rho_1)$, $Y\subset(M_2,\rho_2)$, $Z\subset(M_3,\rho_3)$. *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$, $\varphi(x)\ne y_0$ $\forall x\in X$, $x\ne x_0$, *і* $\lim\limits_{y\to y_0} f(y)=a$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(\varphi(x))=a$.

Зауваження. Якщо у властивості 4 $\exists f(y_0)=a$, то умову $\varphi(x)\ne y_0$ $\forall x\in X$, $x\ne x_0$, можна опустити.

Властивість 5 (про неперервність відстані). *Якщо* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$ *і* $f(x)$ *та* $\varphi(x)\in(M_2,\rho_2)$ $\forall x\in X\subset(M_1,\rho_1)$, *то* $\lim\limits_{x\to x_0}\rho_2(f(x),\varphi(x))=\rho_2(a,b)$. *Зокрема, якщо простір (M_2,ρ_2) нормований, тобто $\rho_2(u,v)=\|u-v\|$, то* $\lim\limits_{x\to x_0}\|f(x)-\varphi(x)\|=\|a-b\|$, $\lim\limits_{x\to x_0}\|f(x)\|=\|a\|$ *і* $\lim\limits_{x\to x_0}\|\varphi(x)\|=\|b\|$.

Наступні властивості мають місце для операторів, які набувають значень з нормованих просторів, зокрема, для функціоналів.

Властивість 6 (про зв'язок границі з нульовою границею). *Для того щоб* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, *необхідно й досить, щоб* $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-a)=\theta$, *тобто щоб функція* $\varphi=f-a$ *була нескінченно малою, коли* $x\to x_0$.

Властивість 7 (про границю добутку нескінченно малої функції на обмежену). *Нехай функція* f *обмежена на* $O^*(x_0)\cap X$, *а функція* φ *нескінченно мала, коли* $x\to x_0$, *тобто* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\theta$, *причому принаймні одна з цих функцій є функціоналом, тобто існує добуток* $f(x)\cdot\varphi(x)$. *Тоді цей добуток є нескінченно малою функцією, коли* $x\to x_0$.

Властивість 8 (про границю суми, різниці, добутку і частки). *Нехай функції* f *та* φ *визначені на множині* $X\subset(M_1\rho_1)$, *причому* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ *і* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$. *Тоді*

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=a\pm b$, *якщо* f *та* φ *набувають значень з одного лінійного простору;*
2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=a\cdot b$, *якщо* φ — *функціонал, для якого існує добуток* $f(x)\cdot\varphi(x)$;
3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a}{b}$, *якщо* $b\neq 0$ *і* φ — *функціонал, для якого існує частка* $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Властивість 9 (про перехід до границі у нерівності). *Нехай* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$, *де* f *та* φ — *дійсні функціонали, визначені на множині* X, *причому* $f(x)\leqslant\varphi(x)\ \forall x\in X$. *Тоді* $a=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$.

Властивість 10 (про границю проміжної змінної). *Нехай* f, φ *та* ψ — *дійсні функціонали, визначені на множині* X, *причому* $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi(x)\ \forall x\in X$, *а* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=c$. *Тоді* $\exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.

Доведення усіх наведених властивостей таке саме, як і доведення аналогічних властивостей для функцій дійсної змінної. Проілюструємо це на прикладі властивості 5.

☐ Візьмемо довільну послідовність (x_n): $x_n \in X$, $x_n \neq x_0$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Тоді $f(x_n) \to a$ і $\varphi(x_n) \to b$ $(n \to \infty)$, а тому за властивістю границі послідовності про неперервність відстані $\rho_2(f(x_n), \varphi(x_n)) \to \rho(a, b)$ $(n \to \infty)$.

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_2(f(x_n), \varphi(x_n)) = \rho_2(a, b)$ $\forall (x_n)$: $x_n \neq x_0$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Тому $\lim\limits_{x\to x_0} \rho_2(f(x), \varphi(x)) = \rho_2(a, b)$ за означенням границі функції у точці за Гейне. ■

Відмітимо ще одну важливу границю функції двох змінних.

☐ Нехай $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, причому $\forall x \in O^*(x_0)$ існує $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$. Тоді для всіх точок $(x,y) \neq (x_0,y_0)$, досить близьких до (x_0,y_0), $f(x,y) \overset{\text{я.з.}}{\approx} a$, а тому і $\varphi(x) \overset{\text{я.з.}}{\approx} a$, коли $x \neq x_0$, але досить близьке до x_0. Це означає, що $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = a$. Остання границя називається *повторною границею*, в той час як $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ називається *подвійною границею*. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про рівність подвійної і повторної границь). *Якщо існують границі* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$ *і* $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ $\forall x \in O^*(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\ \forall y \in O^*(y_0)\right)$, *то існує повторна границя* $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = a$ $\left(\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = a\right)$.

Зауважимо, що існування та рівність повторних границь не гарантує існування подвійної границі (див. контрольне завдання 9).

Пропонуємо читачеві узагальнити теорему 2 на випадок векторнозначної функції кількох змінних.

Наведені властивості також показують, що для відшукання границь довільних операторів та функціоналів часто можна використовувати правила відшукання границь функцій дійсної змінної. Але при цьому треба діяти досить обережно.

Приклад 1. Нехай $f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{|x-2|+|y|}$, $(x_0,y_0) = (2,0)$, $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$. Тоді якщо $y \neq 0$, то

$$f(x,y) = \frac{\sin^2 \frac{xy}{2}}{\frac{(xy)^2}{4}} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y}{|x-2|+|y|} \cdot y \to 0, \text{ коли } (x,y) \to (2,0),$$

оскільки перший співмножник прямує до 1, другий до 2, третій – обмежений, а четвертий прямує до нуля. Отже, якщо $E = \{(x,y)\colon y \neq 0\}$, то $\lim\limits_{E\ni(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = 0$. А якщо $y = 0$, $(x,y) \in X$, то $f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{|x-2|+|y|} = 0$ і тому $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = 0$ за властивістю 2.3).

2.2.3. Неперервість оператора і функціонала. Так само, як і для функцій дійсної або комплексної змінної, можна ввести поняття неперервності для загальнішої функції: оператора або функціонала. Як і раніше, вважаємо, що $f\colon X \to Y$, $X \subset (M_1, \rho_1)$ і $Y \subset (M_2, \rho_2)$.

Фукцію f називають неперервною у точці $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ $\forall (x_n)\colon x_n \in X$ $\forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Дане означення називають означенням *неперервності функції у точці за Гейне* або *мовою послідовностей*.

Легко показати, що це означення еквівалентне *означенню неперервності функції у точці за Коші* або *мовою* “$\varepsilon - \delta$”: функцію f називають неперервною у точці x_0, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$: $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, коли $x \in X$ і $\rho_1(x,x_0) < \delta(\varepsilon)$.

Звідси легко випливає *означення неперервності мовою околів*: f — неперервна у точці x_0, якщо $\forall O(f(x_0))$ $\exists O(x_0)$: $f(x) \in O\big(f(x_0)\big)$ $\forall x \in O(x_0) \cap X$.

Суть поняття неперервності функції у точці полягає у тому, що $f(x) \overset{\text{я.з.}}{\approx} f(x_0)$, коли $x \overset{\text{д.}}{\approx} x_0$, тобто $f(x)$ як завгодно близьке до $f(x_0)$, коли $x \in X$ досить близьке до x_0.

Зрозуміло, що коли x_0 — ізольована точка X, то f неперервна у точці x_0, а коли точка x_0 множини X є граничною точкою цієї множини, то функція f неперервна у точці $x_0 \in X$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Це *означення неперервності функції у точці мовою границь*.

У випадку, коли функція f не є неперервною у точці $x_0 \in X = D(f)$, її називають *розривною* у даній точці.

Якщо $x_0 \in E \subset X$, $D(f_1) = E$, $f_1(x) = f(x)$ $\forall x \in E$ і функція f_1 неперервна у точці x_0, то функцію f називають *неперервною у точці x_0 відносно множини E* або *за множиною E*.

Пропонуємо читачеві самостійно переформулювати загальне означення неперервності функції f у точці x_0 для випадків, коли 1) f є функцією кількох змінних, зокрема, функцією двох змінних, 2) f є функцією комплексної змінної, 3) f — векторнозначна функція кількох змінних.

Так само легко, як і для випадку границі функції, можна довести, що має місце

Теорема 3 (про зв'язок неперервності функції f з неперервністю функцій $\operatorname{Re} f$ та $\operatorname{Im} f$). *Для того щоб функція f комплексної змінної $z = x + iy$ була неперервною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно й досить, щоб функції $\operatorname{Re} f$ та $\operatorname{Im} f$ як функції двох змінних x та y були неперервними у точці (x_0, y_0).*

Функцію $f\colon X \to Y$ називають *неперервною на множині $E \subset X$* (*відносно множини E*), якщо вона неперервна в кожній точці множини E (відносно множини E). Неперервну на своїй області визначення функцію називають просто *неперервною*.

Приклад 2. Функція $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+y-x^2)}{x^2-y}, & y \neq x^2, \\ a, & y = x^2, \end{cases}$ $a \in \mathbb{R}$, визначена на множині $X = \{(x,y)\colon y > x^2 - 1\}$. Позначимо $E_1 = \{(x,y)\colon y = x^2\}$, $E_2 = X \setminus E_1$. Тоді у довільній точці $(x_0, y_0) \in E_1$ матимемо:

$$\lim_{E_1 \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = a = f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{E_2 \ni (x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{t = y - x^2 \to 0} \frac{\ln(1+t)}{-t} = -1.$$

Звідси випливає, що задана функція є неперервною на множині E_1 тоді й тільки тоді, коли $a = -1$. Відносно множини E_1 ця функція неперервна на E_1 при будь-якому значенні параметра a.

2.2.4. Найпростіші властивості неперервних функцій. Властивості неперервних операторів і функціоналів за формою такі самі, як і для функцій дійсної або комплексної змінної.

Властивість 1 (про неперервність відносно підмножини). 1) *Якщо функція $f\colon X \to Y$ неперервна у точці $x_0 \in E \subset X$, то вона неперервна у цій точці відносно множини E*; 2) *якщо $\exists \delta > 0$: $O^*_\delta(x_0) \cap E = O^*_\delta(x_0) \cap X$ і функція f неперервна у точці x_0 відносно множини E, то вона неперервна у точці x_0*; 3) *якщо f неперервна у точці x_0 відносно E_1 і E_2, то вона неперервна у цій точці відносно множини $E = E_1 \cup E_2$.*

Наслідок 1 (про неперервність на відкритій множині). *Якщо функція $f\colon X \to Y$ неперервна на відкритій множині $G \subset X$ відносно множини G, то вона неперервна на цій множині.*

Властивість 2 (про зв'язок неперервності з обмеженістю). *Якщо функція* $f\colon X \to Y$ *неперервна у точці* x_0, *то* $\exists O(x_0)$ *такий, що* f *обмежена на* $X \cap O(x_0)$.

Властивість 3 (про неперервність композиції функцій). *Якщо функція* $\varphi\colon X \to Y$ *неперервна у точці* x_0, *а функція* $f\colon Y \to Z$ *неперервна у точці* $y_0 = \varphi(x_0)$, *то композиція* $f \circ \varphi$ *неперервна у точці* x_0.

Властивість 4 (про неперервність суми, різниці, добутку і частки). *Нехай функції* $f\colon X \to Y$ *та* $\varphi\colon X \to Y$ *неперервні у точці* x_0. *Тоді у точці* x_0 *неперервними є функції:*

1) $f \pm \varphi$, *якщо* f *та* φ *набувають значень з одного нормованого простору;*
2) $f \cdot \varphi$ *і* f/φ, *якщо* f *набуває значення з нормованого простору, а* φ *— функціонал, для якого існує добуток* $f \cdot \varphi$ *або частка* f/φ, *відповідно.*

Властивість 5 (про неперервність $\|f\|$). *Якщо функція* $f\colon X \to Y$ *неперервна у точці* x_0 *і набуває значень з нормованого простору, то функція* $\|f\|$ *неперервна у точці* x_0.

Проілюструємо методи доведення сформульованих властивостей на прикладі властивості 3.

□ Оскільки функція φ неперервна у точці x_0, то $\forall (x_n)\colon x_n \in X\ \forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ маємо: $y_n = \varphi(x_n) \to y_0 = \varphi(x_0)$ $(n \to \infty)$, причому $y_n \in Y\ \forall n$.

Враховуючи неперервність функції f у точці $y_0 = f(x_0)$, маємо: $f(y_n) \to f(y_0)$ $(n \to \infty)$, тобто $f(\varphi(x_n)) = f \circ \varphi(x_n) \to f \circ \varphi(x_0) = f(\varphi(x_0))$ $(n \to \infty)$ $\forall (x_n)\colon x_n \in X\ \forall n$ і $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Останнє означає, що композиція $f \circ \varphi$ неперервна у точці x_0. ■

Приклад 3. 1) Функцію багатьох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають *елементарною*, якщо вона може бути утворена з основних елементарних функцій однієї змінної x_1, x_2, …, x_n [13, с. 145] за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій і суперпозицій.

З відомого факту неперервності елементарних функцій однієї змінної [13, с. 214] за властивостями 3, 4 дістаємо, що к о ж н а е л е м е н т а р н а ф у н к ц і я б а г а т ь о х з м і н н и х н е п е р е р в н а (на своїй області визначення).

2) Функція $f(x,y)$ з прикладу 2 елементарна на множині E_2, тому вона неперервна на E_2 відносно E_2. Оскільки множина E_2 відкрита, то за наслідком 1 дана функція $f(x,y)$ взагалі неперервна на цій множині.

2.2.5. Неперервність лінійного оператора. Розглянемо довільний лінійний оператор $f\colon E \to F$, де E і F — певні нормовані простори. Припустимо, що цей оператор неперервний у якійсь одній точці x_0, і подивимось, чи не буде він неперервним у будь-якій іншій точці x_*.

□ Взявши довільну послідовність (x_n): $x_n \in E \ \forall n$, $x_n \to x_*$ $(n \to \infty)$, помітимо, що $x_n - x_* + x_0 \to x_0$ $(n \to \infty)$.

Тому, враховуючи лінійність оператора f та його неперервність у точці x_0, матимемо: $f(x_n) - f(x_*) = f(x_n - x_* + x_0 - x_0) = f(x_n - x_* + x_0) - f(x_0) \to \theta_F$ $(n \to \infty)$, де θ_F — нуль простору F.

Це означає, що оператор f неперервний у точці x_*. ■

Отже, доведена

Властивість 6 (про неперервність лінійного оператора у різних точках). *Лінійний оператор $f\colon E \to F$ є неперервним на всьому просторі E тоді й тільки тоді, коли він неперервний у якій-небудь одній точці $x_0 \in E$ (зокрема, в нулі θ_E простору E).*

За властивістю 2 з неперервності довільного оператора f у точці x_0 випливає його обмеженість у деякому околі цієї точки. З'ясуємо, чи буде правильним обернене твердження, якщо оператор f лінійний.

□ Припустимо, що лійний оператор $f\colon E \to F$ обмежений у деякому околі нуля θ_E простору E, тобто $\exists H > 0$, $\delta > 0$: $\|f(x)\| \leqslant H$ $\forall x \in E\colon \|x\| < \delta$.

Оскільки оператор f лінійний, то $\forall x \in E$, $x \neq \theta_E$, матимемо:

$$\|f(x)\| = \left\|\frac{2\|x\|}{\delta} f\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant \frac{2\|x\|}{\delta} \cdot H = H_1\|x\|,$$

бо $\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\| = \frac{\delta}{2\|x\|} \cdot \|x\| = \frac{\delta}{2} < \delta \ \forall x \in E\colon x \neq \theta_E$.

Якщо $x = \theta_E$, то $f(\theta_E) = f(\theta_E + \theta_E) = f(\theta_E) + f(\theta_E) = 2f(\theta_E) \Rightarrow f(\theta_E) = \theta_F \Rightarrow \|f(\theta_E)\| = 0 = H_1\|\theta_E\|$. Отже, $\exists H_1 > 0$:

$$\|f(x)\| \leqslant H_1\|x\| \ \forall x \in E. \tag{3}$$

З цієї нерівності випливає, що коли $E \ni x_n \to \theta_E$ $(n \to \infty)$, то $\|f(x_n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто $f(x_n) \to \theta_F$ $(n \to \infty)$. Отже, оператор f неперервний у точці $x_0 = \theta_E$, а тому за властивістю 6 він неперервний на всьому просторі E. ■

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що правильна

Теорема 4 (критерій непервності лінійного оператора). *Для того щоб лінійний оператор $f\colon E \to F$ був неперервним на всьому просторі E, необхідно й досить, щоб він був обмеженим у деякому околі нуля. При цьому має місце нерівність* (3).

Приклад 4. 1) Будь-який лінійний оператор, заданий на скінченновимірному просторі, є неперервним. Це випливає з теореми 2 п. 1.7.2.

2) Рівність $f(x,y) = x + ty$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [a;b]$, задає лінійний оператор $f\colon \mathbb{R}^2 \to C[a;b]$. Цей оператор є неперервним, оскільки він заданий на скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^2$.

3) Виділимо у просторі $C[a;b]$ підмножину $X = C^{(1)}[a;b]$ неперервно диференційовних на $[a;b]$ функцій і за допомогою рівності $D(x(t)) = x'(t)$ задамо так званий *диференціальний оператор* $D\colon X \to C[a;b]$. Зрозуміло, що цей оператор лінійний. Але він розривний у точці $x_0(t) \equiv 0$, оскільки послідовність $x_n(t) = \frac{\sin nt}{n}$ збігається до $x_0(t) \equiv 0$ у просторі X, тоді як послідовність $D(x_n(t)) = \cos nt$ розбігається. За властивістю 6 оператор D розривний всюди на X.

2.2.6. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо $\lim\limits_{E \ni x \to x_0} f(x) = a$, то $\exists O^*(x_0)\colon f(x) = a \ \forall x \in O^*(x_0) \cap E$.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Якщо f набуває значень з простору ізольованих точок, то твердження 1 є правильним.
4. Якщо $a = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0\colon |f(x,y) - a| < \varepsilon$, коли $0 < |x - x_0| < \delta$ і $0 < |y - y_0| < \delta$.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Функція $f(x,y) = \frac{x-y}{|x|+|y|}$ має границю у точці $(0,0)$.
7. Функція $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ не має границі у точці $(0,0)$.
8. Фукнція $f(z) = \arg z$ має границю у будь-якій точці комплексної площини.
9. Якщо $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, то $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$, але функція f не має границі у точці $(0,0)$.
10. Якщо функція f неперервна у точці x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
11. Твердження, обернене до 10, є правильним.
12. Оператор f, що визначений на множині X, є неперервним у кожній ізольованій точці множини X.

13. Функція f двох змінних неперервна у точці (x_0,y_0) тоді й тільки тоді, коли $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$: $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$, коли $|x-x_0|<\delta$ і $|y-y_0|<\delta$.
14. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна у кожній точці множини $P=\{(x,y)\colon 0<x<1 \text{ і } 0<y<1\}$, то $f(x,y_0)$ неперервна на $(0;1)$ $\forall y_0\in(0;1)$, а $f(x_0,y)$ неперервна на $(0;1)$ $\forall x_0\in(0;1)$.
15. Твердження, обернене до 14, є правильним.
16. Якщо $x_0\in E_1'\cap E_2'$, а $E=E_1\cup E_2$, то
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim_{E_k\ni x\to x_0} f(x)=a\ \forall k=1,2.$$
17. Якщо лінійний оператор f обмежений у деякому околі нуля $O_\delta(\theta)$, то він обмежений і на будь-якій кулі $K(a,r)$.
18. Якщо f − неперервний лінійний оператор, то $\exists H>0$: $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\leqslant H$ $\forall x\neq\theta$.

II. Довести дані твердження.

1. Для того, щоб функція f була неперервною у точці $x_0\in E_1\cap\cap E_2$ відносно множини $E=E_1\cup E_2$, необхідно й досить, щоб f була неперервною у цій точці відносно кожної з множин E_1 і E_2.
2. Якщо $x_0\in E\subset D(f)\subset(M_1,\rho_1)$, $E_\delta=O_\delta(x_0)\cap E$ і $f(x)\in\in(M_2,\rho_2)$ $\forall x\in D(f)$, то існує границя
$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x,y\in E_\delta}\rho_2(f(x),f(y))=:\omega(f,x_0,E)$$
− *коливання функції* (*оператора* або *функціонала*) f *у точці* x_0 *відносно множини* E.
3. Для того щоб оператор f був неперервним у точці x_0 відносно множини E, необхідно й досить, щоб $\omega(f,x_0,E)=0$.
4. Нехай функція f визначена на відкритій множині G метричного простору X і набуває значень з метричного простору Y. Для того, щоб ця функція була неперервною, необхідно й досить, щоб прообраз $f^{-1}(E)$ довільної відкритої множини E простору Y був відкритим у просторі X.

2.3. Властивості функцій, неперервних на компактних або зв'язних множинах

У даному підрозділі узагальнюються на випадок операторів та функціоналів відомі властивості функцій дійсної змінної, неперервних на проміжках (теореми Вейєрштрасса про обмеженість неперервної функції та про її максимум та мінімум, теорема Кантора про рівномірну неперервність, теорема Больцано — Коші про проміжні значення неперервної функції та теорема про неперервність оберненої функції).

2.3.1. Теорема про компактність образу. Певним аналогом числового відрізка у довільному метричному просторі є компактна множина, а довільного числового проміжку — зв'язна множина. Тому спробуємо дістати властивості функцій, неперервних на компактних або зв'язних множинах, аналогічні властивостям функцій, неперервних на проміжках.

□ Нехай f є неперервною функцією на компактній множині E і $f(E) = F$ — множина значень цієї функції. Перевіримо, чи є F також компактною множиною.

Візьмемо довільну послідовність (y_n): $y_n \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і визначимо $x_n \in E$ таким чином, щоб $f(x_n) = y_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки E — компактна множина, то існує збіжна підпослідовність (x_{n_k}): $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in E$. Враховуючи неперервність функції f, дістаємо, що $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in F (k \to \infty)$. Отже, $\forall (y_n)$: $y_n \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}$ існує (y_{n_k}): $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} \in F$. Тому F — компактна множина. ■

Цим самим доведена

Теорема 1 (про компактність образу). *Якщо функція f неперервна на компактній множині E і $F = f(E)$ — образ множини E, то F — компактна множина.*

Враховуючи, що компактна множина обов'язково обмежена, з теореми 1 дістаємо аналог першої теореми Вейєрштрасса:

Наслідок 1 (теорема Вейєрштрасса про обмеженість неперервної функції). *Якщо функція f неперервна на компактній множині E, то вона обмежена на E. Зокрема, якщо f — функція кількох змінних або комплексної змінної, що є неперервною на замкненій обмеженій множині E, то f обмежена на E.*

Враховуючи, що компактна множина обов'язково є замкненою і обмеженою, а замкнена обмежена множина з простору $\mathbb{R}^1$ обов'язково має найбільший та найменший елементи, дістаємо з теореми 1 аналог другої теореми Вейєрштрасса.

Наслідок 2 (теорема Вейєрштрасса про $\max f(x)$ і $\min f(x)$). *Якщо дійсний (комплексний) функціонал f неперервний на* *компактній множині E, то існують* $\max\limits_E f(x)$ *та* $\min\limits_E f(x)$ ($\max\limits_E |f(x)|$ *та* $\min\limits_E |f(x)|$). *Зокрема, якщо f — функція кількох змінних (функція комплексної змінної), що є неперервною на замкненій обмеженій множині E, то існують* $\max\limits_E f(x)$ *та* $\min\limits_E f(x)$ ($\max\limits_E |f(x)|$ *та* $\min\limits_E |f(x)|$).

2.3.2. Теорема Кантора. Як і для функції однієї змінної, назвемо довільну *функцію (оператор або функціонал) f рівномірно неперервною на множині E*, якщо $\rho_2(f(x_n'), f(x_n'')) \to 0$ $(n \to \infty)$ для будь-яких послідовностей (x_n') і (x_n'') елементів з множини E, для яких $\rho_1(x_n', x_n'') \to 0$ $(n \to \infty)$. Зрозуміло, що кожна функція (оператор або функціонал) рівномірно неперервна на множині E, є неперервною на цій множині, але не навпаки.

Приклад 1. Числова функція $f(x) = \frac{1}{x}$ є неперервною на множині $E = (0;1]$, проте не є рівномірно неперервною на E, оскільки $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \to 0$ $(n \to \infty)$, але $f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{2n}) = n - 2n = -n \not\to 0$ $(n \to \infty)$.

☐ Нехай функція (оператор або функціонал) f неперервна на компактній множині E. Припустимо, що f не є рівномірно неперервною функцією на E. Тоді $\exists (x_n')$ і (x_n''): x_n' і $x_n'' \in E$ $\forall n$ і $\rho_1(x_n', x_n'') \to$ $\to 0$ $(n \to \infty)$, але $\rho_2(f(x_n'), f(x_n'')) \not\to 0$ $(n \to \infty)$.

Виділимо з послідовності $\alpha_n = \rho_2(f(x_n'), f(x_n''))$, $n \in \mathbb{N}$, збіжну підпослідовність (α_{n_k}), для якої $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_{n_k} = \alpha > 0$. Враховуючи компактність множини E, виділимо з послідовності (x_{n_k}') збіжну підпослідовність $(x_{n_{k_\nu}}')$, для якої $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{n_{k_\nu}}' = x^* \in E$. Оскільки

$$\rho_1(x_{n_{k_\nu}}'', x^*) \leqslant \rho_1(x_{n_{k_\nu}}'', x_{n_{k_\nu}}') + \rho_1(x_{n_{k_\nu}}', x^*) \to 0 \ (\nu \to \infty),$$

то $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{n_{k_\nu}}'' = x^*$. Звідси, враховуючи неперервність f у точці x^* та неперервність відстані, дістаємо:

$$\alpha_{n_{k_\nu}} = \rho_2(f(x_{n_{k_\nu}}'), f(x_{n_{k_\nu}}'')) \to \rho_2(f(x^*), f(x^*)) = 0 \ (\nu \to \infty).$$

Але з іншого боку $\alpha_{n_{k_\nu}} \to \alpha > 0$ $(\nu \to \infty)$. Дістали суперечність, яка показує неправильність припущення про те, що f не є рівномірно неперервною функцією на множині E. ■

Отже, має місце

Теорема 2 (Кантора про рівномірну неперервність неперервної функції). *Якщо функція f неперервна на компактній множині*

E, то вона є рівномірно неперервною на цій множині. Зокрема, якщо f — функція кількох змінних або функція комплексної змінної, що неперервна на замкненій обмеженій множині E, то f рівномірно неперервна на E.

2.3.3. Теореми про неперервність оберненої функції. Традиційно це питання вивчається за умови, що пряма функція неперервна на компактній множині. Але якщо підсилити поняття неперервності, то можна дістати значно загальніший результат. У зв'язку з цим введемо нові поняття.

Послідовність (x_n) з метричного простору (M,ρ) назвемо *нескінченно великою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,a)=+\infty\ \forall a\in M$. При цьому казатимемо, що *послідовність* (x_n) *має нескінченну границю* і писатимемо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ або $x_n\to\infty$ $(n\to\infty)$.

Зауваження. В означенні нескінченно великої послідовності квантор "$\forall$" можна замінити квантором "$\exists$" (покажіть це і порівняйте з означеннями обмеженої послідовності, сформульованими в п. 1.3.3).

Приклад 2. Послідовність $x_n=(n;(-1)^n)$, $n\in\mathbb{N}$, є нескінченно великою у просторі $\mathbb{R}^2$, оскільки $\rho(x_n,\theta)=\sqrt{n^2+1}\to\infty$ $(n\to\infty)$. Якщо ж на множині $\mathbb{R}^2$ ввести метрику простору ізольованих точок, то $\rho(x_n,\theta)=1\not\to\infty$ $(n\to\infty)$, тобто ця послідовність (x_n) вже не буде нескінченно великою.

Множину E з метричного простору (M,ρ) назвемо *передкомпактною*, якщо для будь-якої послідовності (x_n) елементів множини E існує підпослідовність (x_{n_k}), що має скінченну або нескінченну границю $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$.

Приклад 3. У довільному метричному просторі кожна компактна множина є передкомпактною, але не навпаки. У просторі $\mathbb{R}^1$ з евклідовою метрикою передкомпактною множиною є взагалі будь-яка множина E. Але якщо на множині $\mathbb{R}$ задати тривіальну метрику, то дістанемо простір ізольованих точок, у якому передкомпактними будуть тільки скінченні множини.

Функцію f, визначену на множині E, назвемо *цілком неперервною на множині* E, якщо послідовність $(f(x_n))$ має границю $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ (скінченну чи нескінченну) для будь-якої послідовності

(x_n) елементів множини E, що має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (скінченну чи нескінченну).

Легко бачити, що цілком неперервна функція на множині E завжди неперервна на цій множині, але не навпаки. Разом з тим для функції f, заданої на компактній множині E, поняття неперервності й цілковитої неперервності є рівносильними.

Приклад 4. Розглянемо функції

$$f_1(x,y) = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{x^2+y^2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$
$$f_2(z) = \tfrac{1}{|z|-1},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z\colon |z| = 1\},$$
$$f_3(x,y) = \operatorname{arctg} \tfrac{1}{xy},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus OX \setminus OY,$$
$$f_4(z) = \tfrac{\operatorname{Re} z}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пропонуємо читачеві переконатися у тому, що функції f_1 та f_2 є цілком неперервними, тоді як функції f_3 та f_4 є лише неперервними (але не цілком) на своїх областях визначення.

Нехай функція $f\colon E \leftrightarrow F$ цілком неперервна на передкомпактній множині E, причому послідовності $(f(x_n^*))$ і $(f(x_n^{**}))$ мають різні границі, коли послідовності (x_n^*) і (x_n^{**}) елементів з E мають різні границі.

Розглянемо обернену функцію $f^{-1}\colon F \leftrightarrow E$. З'ясуємо, чи не буде вона цілком неперервною.

□ Візьмемо довільну послідовність (y_n) точок множини F, яка має скінченну чи нескінченну границю: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$. Позначимо

$$x_n = f^{-1}(y_n) \in E \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Припустимо, що ця послідовність не має границі. Оскільки множина E передкомпактна, то $\exists (x_{n_k})$: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x^*$ — скінченна чи нескінченна границя. Для послідовності (x_{m_k}), де $\{m_k\} \cup \{n_k\} = \mathbb{N}$, за припущенням точка x^* не є границею. Тому існує точка $x^{**} \ne x^*$ і послідовність (x_{p_k}) така, що $x_{p_k} \to x^{**}$ $(k \to \infty)$. Звідси випливає, що $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to y^*$ і $y_{p_k} = f(x_{p_k}) \to y^*$ $(k \to \infty)$. Але з іншого боку, послідовності $(f(x_{n_k}))$ і $(f(x_{p_k}))$ повинні мати різні границі, оскільки різні границі мають послідовності (x_{n_k}) і (x_{p_k}).

Дістали суперечність, яка означає, що було зроблено неправильне припущення. Тому

$$\exists \lim_{n\to\infty} f^{-1}(y_n)\ \forall (y_n)\colon y_n \in F\ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \text{ і } \ \exists \lim_{n\to\infty} y_n,$$

тобто функція f^{-1} є цілком неперервною на множині F. ■

Отже, доведена

Теорема 3 (про цілковиту неперервність оберненої функції). *Нехай функція* $f\colon E \leftrightarrow F$ *цілком неперервна на передкомпактній множині* E, *причому* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{**})$, *коли* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{**}$ $\forall (x_n^*)$ *і* (x_n^{**}): x_n^* *і* $x_n^{**} \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді функція* f^{-1}, *обернена до* f, *є цілком неперервною на множині* F.

Приклад 5. 1) Кожна числова функція f, що неперервна і строго монотонна на числовому проміжку $\langle a;b\rangle$, задовольняє умови теореми 3, а тому $\exists f^{-1}\colon f(E) \leftrightarrow E$, неперервна на проміжку $f(E) = \langle A;B\rangle$, де $A = \inf\limits_E f(x)$, $B = \sup\limits_E f(x)$.

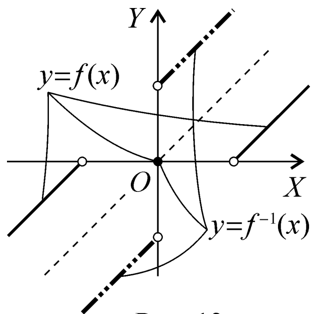

Рис. 13

2) Функція $f(x) = x - \operatorname{sign} x$, якщо її розглядати на множині $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$, задовольнятиме усі умови теореми 3, крім умови $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{**})$, коли $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^* \neq$ $\neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{**}$. Саме тому обернена до неї функція $f^{-1}(x) = x + \operatorname{sign} x$, $x \in (-\infty;+\infty)$, є розривною у точці $x_0 = 0$ (рис. 13).

Оскільки для функцій, заданих на компактних множинах, поняття неперервності і цілковитої неперервності рівносильні, то частинним випадком теореми 3 є

Теорема 4 (про неперервність оберненої функції). *Якщо функція* $f\colon E \leftrightarrow F$ *неперервна на компактній множині* E, *то обернена функція* $f^{-1}\colon F \leftrightarrow E$ *неперервна на* F.

2.3.4. Теореми про зв'язність образу. Дістанемо тепер узагальнення теореми Больцано — Коші про проміжні значення неперервної функції.

Розглянемо функцію f, що є неперервною на зв'язній множині E, і нехай $f(E) = F$ — образ множини E. Визначимо, чи є F зв'язною множиною.

□ Припустимо, що F — незв'язна множина, тобто $F = F_1 \cup F_2$, де F_1 і F_2 — відокремлені множини. Тоді $F_1 \cap \overline{F_2} = \varnothing$ і $F_2 \cap \overline{F_1} = \varnothing$, причому $F_1 \neq \varnothing$ і $F_2 \neq \varnothing$.

Позначимо $E_k = \{x \in E\colon\ f(x) \in F_k\}$, $k \in \overline{1,2}$. Зрозуміло, що $E_k \neq \varnothing$ $\forall k \in \overline{1,2}$ і $E = E_1 \cup E_2$ і $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Оскільки E — зв'язна множина, то множини E_1 і E_2 не є відокремленими, а тому принаймні одна з них (нехай це E_1) містить хоч би одну точку дотику іншої множини (тобто E_2).

Нехай $x_0 \in E_1 \cap \overline{E_2}$. Тоді $\exists (x_n)$: $x_n \in E_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Звідси, враховуючи неперервність функції f, маємо $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, причому $y_n = f(x_n) \in F_2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, а $y_0 = f(x_0) \in F_1$. Отже, $y_0 \in \overline{F_2}$, тобто $F_1 \cap \overline{F_2} \neq \varnothing$, що неможливо. Тому припущення про незв'язність множини F неправильне, тобто $F = f(E)$ — зв'язна множина. ■

Проведені міркування показують, що правильна

Теорема 5 (про зв'язність образу). *Якщо функція f є неперервною на зв'язній множині E, то образ цієї множини, тобто $F = f(E)$, також є зв'язною множиною.*

Частинним випадком теореми 5 є

Теорема 6 (Больцано — Коші про множину значень дійсного функціонала). *Якщо дійсний функціонал f є неперервним на зв'язній множині E (зокрема, на області E), то множина значень f на E, тобто $F = f(E)$ включає в себе інтервал $(m;M)$, де $m = \inf\limits_{x\in E} f(x)$, а $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. А якщо E — зв'язна компактна множина, то $f(E) = [m;M]$.*

Зауважимо, що функціонал f з теореми 6 може бути, зокрема, функцією кількох змінних.

Розглянемо деякі важливі застосування доведених тверджень.

2.3.5. Поняття неперервної кривої та дуги. За аналогією з просторами $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{C}$ назвемо *неперервною кривою* у нормованому просторі L множину

$$\Gamma = \{(t, x(t))\colon\ t \in \langle \alpha;\beta \rangle,\ x(t) \in L\},$$

за умови, що функція $x(t)$ є неперервною на проміжку $\langle \alpha;\beta \rangle$. При цьому *носієм кривої* Γ назвемо множину

$$\Gamma_{\text{н}} = \{x = x(t) \in L\colon\ t \in \langle \alpha;\beta \rangle\}.$$

За теоремою 5 *носій кривої* Γ, який часто ототожнюють з цією кривою, *є зв'язною множиною.* Якщо $\langle \alpha;\beta \rangle = [\alpha;\beta]$, то Γ називають *неперервною дугою*, а її носій позначають $\overset{\frown}{ab}$, де $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$.

За теоремою 1 і теоремою 5 *носій неперервної дуги є компактною і зв'язною множиною.*

Приклад 6. При фіксованих $a > 0$, $b > 0$ функція $f(t) = (a\cos t; b\sin t)$, $t \in [-\pi;\pi/2]$, задає в $\mathbb{R}^2$ неперервну криву, яка є дугою еліпса (рис. 14).

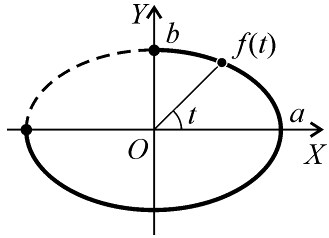

Рис. 14

Важливими частинними випадками неперервних дуг у нормованому просторі L є відрізок $[a;b] = \{x = (1-t)a + tb\colon t \in [0;1]\}$ $(a, b \in L)$ і так звана *ламана*, тобто множина

$$L_n := \overline{a_0a_1\ldots a_n} := \bigcup_{k=0}^{n-1}[a_k;a_{k+1}] \;\; (a_k \in L \;\; \forall k \in \overline{0,n}). \tag{1}$$

Відрізок $[a;b]$ є неперервною дугою у просторі L, бо функція $x(t) = (1-t)a + tb$ є лінійним оператором на $\mathbb{R}^1$, а отже, вона неперервна.

Цей самий відрізок можна задати за допомогою іншої функції: $y(t) = x\left(\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$, $t \in [\alpha;\beta]$, яка теж є лінійним неперервним оператором. Тому відрізки $[a_k;a_{k+1}]$, з яких складається ламана (1), можна задати неперервними лінійними операторами $y_k(t)$, $t \in [k;k+1]$, $k \in \overline{0,n-1}$.

Тоді неперервна функція $y\colon [0;n] \to L$, яка визначається рівністю $y(t) = y_k(t)$, коли $t \in [k;k+1]$, $k \in \overline{0,n-1}$, задаватиме всю ламану L_n, тобто $y([0;n]) = L_n$. Звідси випливає, що ламана L_n є неперервною дугою.

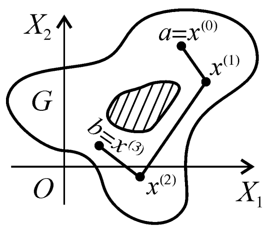

Рис. 15

Якщо для точок a, b множини E існує неперервна дуга $\overset{\frown}{ab} \subset E$, то кажуть що *точки a та b можна сполучити неперервною дугою, що цілком лежить в E* (рис. 15).

2.3.6. Відстань між множинами метричного простору. В пункті 1.3.3 було введено відстань від точки x до множини $E \neq \varnothing$ метричного простору (M,ρ) як число

$$\rho(x,E) = \inf_{y\in E}\rho(x,y).$$

Фіксуючи в останній рівності множину E, дістанемо функцію

$$f(x) = \rho(x,E), \;\; x \in M.$$

Дослідимо цю функцію на рівномірну неперервність.

□ За властивостями інфімуму та нерівністю трикутника маємо:

$$\rho(x_1,E) \leqslant \rho(x_1,y) \leqslant \rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,y) \ \forall x_1,x_2 \in M \ \text{ і } \ \forall y \in E.$$

Вважаючи $\varepsilon > 0$ фіксованим, виберемо $y \in E$ так, щоб $\rho(x_2,y) < \rho(x_2,E)+\varepsilon$. Тоді $\rho(x_1,E) \leqslant \rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,E)+\varepsilon \ \forall x_1$ і $x_2 \in M$. Звідси, спрямовуючи ε до нуля, дістаємо

$$\rho(x_1,E) \leqslant \rho(x_1,x_2)+\rho(x_2,E) \Rightarrow \rho(x_1,E)-\rho(x_2,E) \leqslant \rho(x_1,x_2).$$

Так само показуємо, що і $\rho(x_2,E)-\rho(x_1,E) \leqslant \rho(x_1,x_2)$, тобто $|\rho(x_1,E)-\rho(x_2,E)| \leqslant \rho(x_1,x_2) \ \forall x_1$ і $x_2 \in M$. Отже,

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant \rho(x_1,x_2) \ \forall x_1 \ \text{ і } \ x_2 \in M,$$

а тому функція f рівномірно неперервна на множині M метричного простору (M,ρ). ■

Таким чином, правильна

Теорема 7 (про рівномірну неперервність відстані від точки до множини). *Відстань $f(x)=\rho(x,E)$ від точки x до множини E, що лежать у метричному просторі (M,ρ), є рівномірно неперервним функціоналом на множині M.*

Якщо K і F — довільні непорожні множини з метричного простору (M,ρ), то *відстанню між цими множинами* називають число

$$\rho(K,F)=\inf_{x\in K}\rho(x,F)=\inf_{x\in K}\inf_{y\in F}\rho(x,y)$$

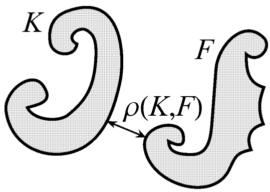

Рис. 16

(див. рис. 16). Можна довести, що $\rho(K,F)=\inf\limits_{\substack{x\in K\\ y\in F}}\rho(x,y)$. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 7. 1) Якщо $K=\langle a;b\rangle$, $F=\langle c;d\rangle$, де $-\infty \leqslant a<b\leqslant c<d\leqslant +\infty$, то у просторі $\mathbb{R}^1$ $\rho(K,F)=c-b$.

2) Якщо $K=\mathbb{N}$, $F=\{n+\frac{1}{2^n}\colon n\in\mathbb{N}\}$, то в $\mathbb{R}^1$ $\rho(K,F)\leqslant\rho(n,n+\frac{1}{2^n})=\frac{1}{2^n}\to 0 \ (n\to\infty)$, тобто $\rho(K,F)=0$.

3) У просторі ізольованих точок можливі лише два випадки:

$$\rho(K,F)=\begin{cases} 0, & \text{коли } K\cap F\neq\varnothing,\\ 1, & \text{коли } K\cap F=\varnothing.\end{cases}$$

Легко бачити, що $\rho(K,F)=0$ завжди, коли $K\cap F\neq\varnothing$. Проте якщо множини K та F не мають спільних точок, то це ще не означає, що $\rho(K,F)\neq 0$ (див. приклад 7.2)). Важливо з'ясувати, коли з умови $K \cap F = \varnothing$ випливає умова $\rho(K,F) \neq 0$.

□ Припустимо, що K − компактна множина. Тоді, враховуючи неперервність функції $f(x) = \rho(x,F)$ за наслідком 2 п. 1.3.1 дістанемо, що

$$\exists \min_{x \in K} \rho(x,F) = \rho(x^*,F), \text{ де } x^* \in K.$$

Вважаючи F замкненою множиною і $F \cap K = \varnothing$, матимемо за наслідком 1 п. 1.3.3, що

$$\rho(x^*,F) = \delta > 0 \text{ і } \rho(x,y) \geqslant \delta \ \forall x \in K \text{ і } \forall y \in F. \blacksquare$$

Отже, має місце

Теорема 8 (про відстань між компактною і замкненою множинами). *Якщо K − компактна множина, а F − замкнена множина з простору (M,ρ), причому $K \neq \varnothing$, $F \neq \varnothing$, а $K \cap F = \varnothing$, то $\exists \delta > 0$: $\rho(x,y) \geqslant \delta > 0 \ \forall x \in K$ і $\forall y \in F$, тобто $\rho(K,F) \geqslant \delta > 0$.*

Застосуємо теорему 8 до неперервної дуги Γ, носій $\Gamma_{\text{н}}$ якої лежить у області D. Оскільки $\Gamma_{\text{н}}$ − компактна множина, а межа ∂D області D є замкненою множиною, то за доведеним $\exists \delta > 0$: $\rho(\Gamma_{\text{н}}, \partial D) \geqslant \delta > 0$, тобто $\rho(x,y) \geqslant \delta > 0 \ \forall x \in \Gamma_{\text{н}}$ і $\forall y \in \partial D$.

2.3.7. Зв'язні множини у нормованому просторі. У нормованому просторі L можна означити зв'язну множину дещо в іншій спосіб. А саме, непорожню множину $E \subset L$, будь-які дві точки якої можна сполучити неперервною дугою, що цілком лежить в E, називають *лінійно зв'язною*.

У випадку, коли множина E відкрита, в останньому означенні замість неперервної дуги можна взяти ламану. Покажемо це.

□ Припустимо, що E − відкрита множина, $E \neq \varnothing$ і $E \neq L$ (бо інакше нема чого доводити). Тоді множина $F = CE$ непорожня й замкнена. Нехай дві точки a, $b \in E$ сполучено неперервною дугою $\Gamma \subset E$. Згідно з пунктом 2.3.5 Γ є компактною множиною, причому $\Gamma \cap F = \varnothing$. Тому, за теоремою 8, $\rho(\Gamma, F) = \varepsilon > 0$.

Далі, неперервна функція $x(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, яка задає дугу Γ, за теоремою Кантора п. 2.3.2 є рівномірно неперервною. Тому $\exists \delta > 0$: $\|x(t') - x(t'')\| < \varepsilon \ \forall t', t'' \in [\alpha;\beta]$: $|t' - t''| < \delta$.

Розіб'ємо відрізок $[\alpha;\beta]$ точками t_k так, щоб

$$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta \text{ і } \max_{0 \leqslant k \leqslant n} (t_{k+1} - t_k) < \delta.$$

Позначивши $x_k = x(t_k)$, $k \in \overline{0,n}$, матимемо: $\|x_{k+1} - x_k\| < \varepsilon \Rightarrow [x_k; x_{k+1}] \subset O_\varepsilon(x_k) \subset E\ \forall k \in \overline{0,n-1}$. Тоді й ламана $L_n = \overline{x_0 x_1 \dots x_n}$, яка з'єднує точки a та b, цілком лежить в E. ■

Подивимось, *чи лінійна зв'язність множини E гарантує її зв'язність.*

□ Припустимо, що існує непорожня множина E, яка є лінійно зв'язною, але не є зв'язною. Тоді $E = E_1 \cup E_2$, де $E_i \neq \varnothing$, $E_i \subset G_i$, G_i — відкриті множини $\forall i \in \overline{1,2}$, причому $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Зафіксуємо дві точки $a \in E_1$ та $b \in E_2$. Оскільки множина E лінійно зв'язна, то існує неперервна дуга $\Gamma = \overset{\frown}{ab} \subset E$. За п. 2.3.5 множина Γ є зв'язною. Але, з іншого боку, її можна подати у вигляді $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де $\Gamma_i = \Gamma \cap E_i$, $i \in \overline{1,2}$. При цьому $\Gamma_i \neq \varnothing$ і $\Gamma_i \subset G_i\ \forall i \in \overline{1,2}$, тобто множини Γ_i відокремлені. Це суперечить зв'язності Γ. ■

Отримана суперечність показує, що правильна

Теорема 9 (про зв'язок між зв'язністю та лінійною зв'язністю). *Всяка лінійно зв'язна множина E нормованого простору L є зв'язною множиною. Зокрема, зв'язними є всі опуклі множини, у тому числі й сам простір L.*

З теореми 9, а також леми 4 п. 1.5.4 та прикладу 5.2) п. 1.7.2 випливає

Наслідок 3 (про зв'язність елементарного прямокутника). *У просторі $\mathbb{R}^m$ множина $P = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_m; b_m\rangle$ (яку називають **елементарним прямокутником**) є зв'язною.*

Твердження, обернене до теореми 9, не справедливе, тому що зв'язна множина може не бути лінійно зв'язною навіть у просторі $\mathbb{R}^2$. Покажемо це.

□ Позначимо на площині $\mathbb{R}^2$ точки $a_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $b_n = \left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}, 1\right)$ і $a = (0,0)$. Побудуємо з відрізків $[a_n; b_n]$ та $[b_n; a_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$, множину

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n; b_n] \cup [b_n; a_{n+1}] \ \text{(рис. 17)}.$$

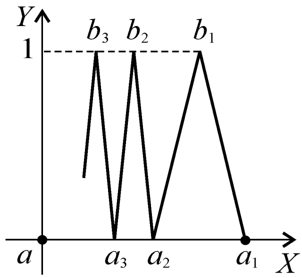

Рис. 17

З геометричних міркувань зрозуміло, що множина E лінійно зв'язна, а отже, і зв'язна. Оскільки точка $a = (0,0)$ є граничною точкою множини E, то за лемою 4 п. 1.5.4

зв'язною буде також множина $F = E \cup \{a\}$. Перевіримо, чи може ця множина бути лінійно зв'язною. Для цього зауважимо, що множина F має такі дві властивості: 1) $\forall x \in [0;1]\ \exists! y \in [0;1]\colon (x,y) \in F$; 2) $\forall x_0 \in (0;1]\ \exists x \in [0;x_0]\colon (x,1) \in F$.

Припустимо, що точки a та a_1 можна сполучити неперервною дугою $\Gamma = \overset{\frown}{aa_1} \subset F$, яка визначається параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0;1]$, де

$$0 = x(0) \leqslant x(t) \leqslant x(1) = 1,\ \ 0 = y(0) = y(1) \leqslant y(t) \leqslant 1\ \ \forall t \in [0;1].$$

Відмітимо на відрізку $[0;1]$ точку

$$t_0 = \sup\bigl\{t \in [0;1]\colon\ x(t) = 0\bigr\}.$$

За критерієм супремуму $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists t_n \in [0;1]\colon t_0 - \frac{1}{n} < t_n \leqslant t_0$, причому $x(t_n) = 0$. З того, що $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$, а функція $x(t)$ неперервна у точці t_0, дістанемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = x(t_0) = 0$. Таким чином,

$$x(t_0) = 0 < x(t)\ \ \forall t \in (t_0;1].$$

Оскільки точка $(x(t_0),y(t_0)) \in \Gamma \subset F$ і $x(t_0) = 0$, то за властивістю 1) $y(t_0) = 0$. Тоді, в силу неперервності функції $y(t)$ у точці t_0, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ знайдемо $\delta > 0$ таке, що $y(t) < \frac{1}{2}$, коли $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \delta$. Оскільки функція $x(t)$ неперервна на відрізку $[0;1] \supset [t_0;t_0+\delta]$, то за теоремою Больцано – Коші $x\bigl([t_0;t_0+\delta]\bigr) = [0;x_0]$, де $x_0 > 0$.

Розглянемо тепер яку-небудь точку $(x^*,1) \in F$, де $x^* \in [0;x_0]$, яка існує згідно з властивістю 2). З одного боку, $\exists t^* \in [t_0;t_0+\delta]\colon x(t^*) = x^*$ і тоді $y(t^*) < \frac{1}{2}$. З іншого боку, $(x(t^*),y(t^*)) \in \Gamma \subset F$ і тому за властивістю 1) $y(t^*) = 1$, тобто дістаємо суперечність.

Отже, припущення, що точки a та a_1 можна сполучити неперервною дугою $\overset{\frown}{aa_1} \subset F$, неправильне. Тому множина F хоч і зв'язна, проте не є лінійно зв'язною. ■

З'ясуємо тепер, *як пов'язані між собою поняття зв'язності та лінійної зв'язності множини у випадку, коли ця множина відкрита.*

□ Розглянемо у просторі L довільну відкриту множину $G \neq \varnothing$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G$ і позначимо X множину точок $x \in G$, кожну з яких можна сполучити з точкою x_0 ламаною, що цілком лежить у G.

Якщо $x^* \in X$, то $x^* \in G$, а тому x^* – внутрішня точка G, тобто $\exists O_\delta(x^*) \subset G$. Візьмемо довільну точку $x^{**} \in O_\delta(x^*)$ і розглянемо точки $x = x^{**} + (x^* - x^{**})t$, $t \in [0;1]$, що утворюють відрізок $[x^{**};x^*]$.

Оскільки
$$\|x - x^*\| = \|x^{**} + (x^* - x^{**})t - x^*\| = (1-t)\|x^{**} - x^*\| < \delta,$$
то $[x^{**}; x^*] \subset O_\delta(x^*)$. Крім того, точку x^* можна сполучити з точкою x_0 ламаною, що цілком лежить у G. Тому і кожну точку x^{**} околу $O_\delta(x^*)$ можна сполучити з точкою x_0 ламаною, що цілком лежить у G. Отже, $O_\delta(x^*) \subset X$, тобто X — відкрита множина.

Нехай $y^* \in G \setminus X$. Тоді $y^* \in G$ і $y^* \notin X$, а тому $\exists O_\delta(y^*) \subset G$. Якщо припустити, що $\exists x^* \in O_\delta(y^*) \cap X$, то як і вище, легко показати, що y^* можна сполучити з точкою x_0 ламаною, що цілком лежить у G, тобто $y^* \in X$. Але $y^* \notin X$. Тому $O_\delta(y^*) \subset G \setminus X$, тобто $G \setminus X$ — відкрита множина.

Таким чином, $\forall x_0$ і $x_1 \in G\ \exists X \subset G$: $G = X \cup (G \setminus X)$, причому множини X і $G \setminus X$ відкриті та кожну точку множини X можна сполучити з точкою x_0 ламаною, що цілком лежить в G. Оскільки відкрита множина $X \neq \varnothing$, то відкрита множина G є зв'язною тоді й тільки тоді, коли $G \setminus X = \varnothing$, тобто $x_1 \in X$. Тому відкрита множина G є зв'язною тоді й тільки тоді, коли будь-які дві її точки x_0 та x_1 можна сполучити ламаною, що цілком лежить у G. ■

Проведені міркування показують, що правильна

Теорема 10 (критерій зв'язності відкритої множини у нормованому просторі). *Для того щоб відкрита множина G з нормованого простору L була зв'язною, необхідно й досить, щоб вона була лінійно зв'язною у цьому просторі.*

Зауваження. Згідно з лемою 4 п. 1.5.4 теорема 10 правильна також для будь-якої множини E такої, що $G \subset E \subset \overline{G}$, а G — відкрита множина.

Якщо відкрита множина G нормованого простору L є зв'язною, то її називають *областю*. Об'єднання області G з її межею називають *замиканням області* або *замкненою областю* і позначають $\overline{G}$. Якщо область G є обмеженою множиною у просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$, то $\overline{G}$ називають *компактною областю*.

Приклад 8. 1) Кожна куля $G = K(x,r)$ у нормованому просторі L є областю, бо вона відкрита і опукла, а отже, зв'язна.

2) У просторі $\mathbb{R}^m$ або $\mathbb{C}^m$ замкнена куля $\overline{G} = \overline{K}(x,r)$ є замкненою областю і компактною областю.

3) Якщо $G = \mathbb{R}^m$ або $G = \mathbb{C}^m$, то G є областю і замкненою областю, але G не є компактною областю.

4) Множина G є областю у просторі $\mathbb{R}^1$ тоді й тільки тоді, коли $G = (a;b)$, а $\overline{G}$ — компактна область у $\mathbb{R}^1$ тоді й тільки тоді, коли $\overline{G} = [a;b]$.

2.3.8. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо оператор $f\colon E \to F$, де E, F — нормовані простори, неперервний у точці $x_0 \in E$, то f неперервний на E.
2. Якщо оператор $f\colon E \to F$ обмежений у деякому околі точки $x_0 \in E$, то цей оператор обмежений на кожній обмеженій множині $E_1 \subset E$.
3. Твердження 1, 2 правильні для довільного лінійного оператора.
4. Якщо лінійний оператор $f\colon E \to F$ неперервний у точці $x_0 \in E$, то він обмежений на E.
5. Кожен лінійний оператор $f\colon E \to F$ можна перетворити на оператор стиску, домноживши його на певне стале число.
6. Якщо функція f неперервна на множині E і $F = f(E)$ — компактна множина, то і E — компактна множина.
7. Якщо f неперервна на E і обмежена на E, то E — обмежена множина.
8. Якщо функція f неперервна на замкненій обмеженій множині E, то f обмежена на E.
9. Функція $f(x,y) = |x+y| - \sqrt{1-x^2-y^2}$ має в своїй області визначення найбільше та найменше значення. Якщо це так, знайти ці значення.
10. Функція $f(x,y) = (x+y)e^{xy}$ обмежена на множині
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \leqslant x+y \leqslant 1\}.$$
11. Якщо функція f неперервна на множині E, то вона і рівномірно неперервна на E.
12. Твердження, обернене до 11, є правильним.
13. Якщо f рівномірно неперервна на E, то E — компактна множина.
14. Якщо функція f комплексної змінної не є рівномірно неперервною на замкненій обмеженій множині E, то f не є і неперервною на E.
15. Якщо функція $f(x,y)$ двох змінних неперервна в замкненій області $\overline{D}$, то існують $\min\limits_{\overline{D}} f(x,y)$ і $\max\limits_{\overline{D}} f(x,y)$, а $f(\overline{D}) = [m;M]$.
16. Якщо $f\colon D \to \mathbb{C}$ — неперервна в області $D \subset \mathbb{C}$, то а) $f(D)$ — область в $\mathbb{C}$, б) $f(D)$ — зв'язна множина.
17. Якщо функція $f\colon E \leftrightarrow F$ неперервна на E, то $f^{-1}\colon F \leftrightarrow E$ — неперервна функція на F.

18. Неперервна крива у нормованому просторі може не бути зв'язною множиною.
19. В означенні лінійно зв'язної множини завжди можна замість неперервної кривої взяти ламану.
20. Лінійна зв'язність опуклої множини випливає з її зв'язності.

II. Довести дані твердження.

1. Нехай K — компактна, а F — обмежено компактна множини. Тоді $\exists x^* \in K$ і $y^* \in F$: $\rho(K,F) = \rho(x^*,y^*)$. Якщо при цьому $K \cap F = \varnothing$, то $\rho(K,F) > 0$.
2. У просторі $\mathbb{R}^2$ існують обмежено компактні множини K і F такі, що $K \cap F = \varnothing$, але $\rho(K,F) = 0$.
3. Якщо функція f неперервна на E, $E_1 \subset E$ і $\overline{E_1} = E$, тобто E_1 скрізь щільна на E, то $\overline{f(E_1)} = f(E)$, тобто $f(E_1)$ скрізь щільна на $f(E)$.
4. Якщо функції f і g неперервні на множині E, $E_1 \subset E$ і $\overline{E_1} = E$, причому $f(x) = g(x)\ \forall x \in E_1$, то $f(x) = g(x)\ \forall x \in E$. Таким чином, значення неперервної функції на множині E повністю визначаються її значеннями на підмножині, що є скрізь щільною на E.

2.4. Теорема Банаха про нерухому точку стискуючого відображення

У даному підрозділі введено поняття нерухомої точки відображення, що є аналогом поняття розв'язку рівняння, та доведено важливу теорему Банаха про існування та єдиність нерухомої точки відображення з класу так званих стисків.

2.4.1. Поняття нерухомої точки відображення. На практиці часто доводиться розв'язувати рівняння вигляду $f_1(x) = f_2(x)$, де f_1 та f_2 — задані функції, що визначені на множині F і набувають значень з цієї ж множини. Якщо F — множина з лінійного простору (наприклад, з $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$), то дане рівняння рівносильне рівнянню

$$f_1(x) - f_2(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) - f_2(x) + x = x \Leftrightarrow f(x) = x,$$

де $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + x$. У зв'язку з цим рівняння

$$f(x) = x \tag{1}$$

відіграє важливу роль у математиці, оскільки воно дозволяє з єдиної точки зору поглянути на багато інших рівнянь. Надалі вважаємо, що функція f з рівняння (1) є оператором, що відображає множину F у множину F з метричного простору (M,ρ). Тому розв'язками рівняння (1) є точки множини F, які відображаються оператором f самі в себе.

Точку x^* називають *нерухомою точкою* оператора (відображення, функції) f, якщо $f(x^*) = x^*$.

Приклад 1. Якщо $f(x) = x^2$, то нерухомими точками відображення f є точки $x_0 = 0$ і $x_1 = 1$.

Сказане вище показує, що у багатьох випадках задача розв'язання деякого рівняння зводиться до задачі відшукання нерухомої точки певного відображення.

2.4.2. Поняття методу послідовних наближень відшукання нерухомої точки. Одним з методів відшукання нерухомої точки відображення $f\colon F \to F$ є *метод послідовних наближень*, суть якого полягає у наступному. *Нульовим наближенням нерухомої точки* x^* відображення f називають довільну точку $x_0 \in F$. Якщо визначене *n-е наближення точки* x^*, тобто деяка точка $x_n \in F$, то $(n+1)$-им наближенням цієї точки вважають точку $x_{n+1} = f(x_n)$. За принципом математичної індукції визначено послідовність (x_n) n-х наближень точки x^* $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Якщо ця послідовність є збіжною до точки $x^* \in F$, а функція f неперервна у цій точці x^*, то з рівності $x_{n+1} = f(x_n)$ випливає рівність

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n), \text{ тобто } x^* = f(x^*).$$

У цьому випадку кажуть, що *нерухому точку x^* відображення f можна знайти методом послідовних наближень*.

2.4.3. Поняття стискуючого відображення. Виявляється, що метод послідовних наближень доцільно застосовувати до, так званих, стискуючих відображень (операторів). Відображення (оператор) $f\colon F \to F \subset (M, \rho)$ називають *стискуючим відображенням* (оператором) або *стиском*, якщо

$$\exists \alpha \in [0;1)\colon \rho(f(x), f(y)) \leqslant \alpha\rho(x,y) \ \forall x \text{ і } y \in F. \tag{2}$$

Приклад 2. Якщо $f(x) = x^2$, $x \in [-q;q] = F$ і $0 < q < 1/2$, то

$$\rho(f(x), f(y)) = |x^2 - y^2| = |x+y| \cdot |x-y| \leqslant$$
$$\leqslant (|x| + |y|)|x-y| \leqslant 2q|x-y| = \alpha\rho(x,y),$$

де $0 < \alpha = 2q < 1$. Тому дане відображення $f\colon F \to F$ є стиском.

З означення стискуючого відображення $f\colon F \to F$ випливає, що це відображення є рівномірно неперервним, а тому і неперервним на множині F.

2.4.4. Теорема Банаха про нерухому точку стискуючого відображення. Застосуємо метод послідовних наближень відшукання нерухомої точки відображення до стискуючого відображення $f\colon F \to F \subset (M,\rho)$.

□ Для цього візьмемо довільну точку $x_0 \in F$ і побудуємо точки $x_{n+1} = f(x_n) \in F$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Використовуючи (2), оцінимо відстань

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n-1})) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\rho(x_n,x_{n-1}) = \alpha\rho(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2\rho(x_{n-1},x_{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x_1,x_0) \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси дістаємо, що коли $m > n$, то

$$\rho(x_m,x_n) \leqslant \rho(x_m,x_{m-1}) + \rho(x_{m-1},x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_m,x_{m-1}) + \rho(x_{m-1},x_{m-2}) + \rho(x_{m-2},x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \ldots \leqslant \rho(x_m,x_{m-1}) + \rho(x_{m-1},x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1},x_n) \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha^n)\rho(x_1,x_0) \leqslant$$
$$\leqslant \rho(x_1,x_0)\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^k = \rho(x_1,x_0)\frac{\alpha^n}{1-\alpha} \to 0 \ (n\to\infty),$$

оскільки $0 \leqslant \alpha < 1$ і $\alpha^n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Тому $\rho(x_m,x_n) \to 0$, коли $m \geqslant n \to \infty$, тобто послідовність (x_n) є фундаментальною у метричному просторі (M,ρ). Вважаючи метричний простір (M,ρ) повним, а множину F замкненою, дістанемо, що послідовність (x_n) є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in F$. Оскільки стискуюче відображення $f\colon F \to F$ є неперервним, то

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n), \ \text{ тобто } \ x^* = f(x^*).$$

Отже, стискуюче відображення $f\colon F \to F$ має принаймні одну нерухому точку $x^* \in F$.

Припустимо, що $x^{**} \in F$ також є нерухомою точкою відображення f. Тоді

$$\rho(x^{**},x^*) = \rho(f(x^{**}), f(x^*)) \leqslant \alpha\rho(x^{**},x^*),$$

де $0 \leqslant \alpha < 1 \Rightarrow \rho(x^{**},x^*)(1-\alpha) \leqslant 0$, де $1-\alpha > 0 \Rightarrow \rho(x^{**},x^*) \leqslant 0 \Rightarrow \rho(x^{**},x^*) = 0$, тобто $x^{**} = x^*$.

Отже, стискуюче відображення $f\colon F \to F$ має єдину нерухому точку $x^* \in F$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 1 (Банаха про нерухому точку стискуючого відображення). *Нехай f — стискуюче відображення множини $F \subset \subset (M,\rho)$ самої в себе, (M,ρ) — повний метричний простір і F — замкнена множина. Тоді існує єдина нерухома точка $x^* \in F$ відображення f, яку можна знайти методом послідовних наближень.*

Всі умови у теоремі 1 є істотними. Це пояснюють наступні приклади 3 та 4.

Приклад 3. Оператор $f(x) = x^2$, $x \in [-q;q]$, де $0 < q < 1/2$, задовольняє усі умови теореми Банаха (див. приклад 2). Якщо замінити відрізок $F = [-q;q]$ на відрізок $F = [q/2;q]$, то порушиться умова $f\colon F \to F$. Якщо відрізок $F = [-q;q]$ замінити на півінтервал $F = (0;q]$, то порушиться умова замкненості множини F. Нарешті, якщо замість простору $\mathbb{R}^1$ розглянути простір $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ (з тією ж метрикою), то порушиться умова повноти простору.

В усіх трьох випадках порушується лише якась одна з умов теореми 1, і при цьому оператор f не має нерухомої точки.

Наступний приклад показує, що для правильності теореми 1 умову $\alpha < 1$ не можна замінити умовою $\alpha \leqslant 1$.

Приклад 4. Розглянемо функцію $f(x) = x + 1/x$, $x \geqslant 1$. Оскільки $f'(x) = 1 - 1/x^2 > 0\ \forall x > 1$, то $f \uparrow [1;+\infty)$. Тому $f\colon [1;+\infty) \leftrightarrow [2;+\infty)$, причому множина $F = [1;+\infty)$ замкнена. Крім того, за формулою Лагранжа

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) = (1 - 1/c^2)(y-x) < y - x,$$

коли $1 \leqslant x < y$. Отже, для $\alpha = 1$

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \alpha|y-x| \ \ \forall x,y \in F.$$

Даний оператор, очевидно, не має нерухомої точки.

2.4.5. Узагальнення теореми Банаха. Спробуємо дещо послабити у теоремі Банаха умову, що відображення f є стиском. А саме, припустимо, що відображення $f\colon F \to F$, де $F \subset (M,\rho)$, є *слабко стискуючим*, тобто задовольняє умову

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x,y) \ \ \forall x \neq y. \tag{3}$$

Як показує приклад 4 п. 2.4.4, для такого відображення теорема 1, взагалі кажучи, неправильна. Тому треба посилити іншу умову теореми 1 — вимогу замкненості множини F у повному просторі (M,ρ). Вимоги, щоб множина F була обмежено компактною, буде замало (див. той самий приклад 4).

Зупинимось на вимозі компактності множини F і подивимось, чи матиме відображення F нерухому точку.

□ Шукана нерухома точка x^* повинна задовольняти рівність $f(x^*) = x^*$, яка рівносильна рівності $\rho(x^*, f(x^*)) = 0$. Якщо ввести до розгляду дійсну функцію

$$S(x) = \rho(x, f(x)), \ \ x \in F,$$

то достатньо буде довести, що $\exists x^* \in F\colon S(x^*) = 0$. В силу невід'ємності цієї функції рівність $S(x^*) = 0$ буде означати, що

$$\min_{x\in F} S(x) = S(x^*) = 0.$$

Існування найменшого значення дійсної функції $S(x)$ на компактній множині F можна отримати з теореми Вейєрштрасса (наслідок 2 п. 2.3.1), як тільки стане відомо, що функція $S(x)$ неперервна.

Для перевірки неперервності функції $S(x)$ візьмемо до уваги нерівність (3) і розглянемо різницю

$$S(x) - S(y) = \rho(x, f(x)) - \rho(y, f(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x,y) + \rho(y, f(y)) + \rho(f(y), f(x)) - \rho(y, f(y)) \leqslant$$

$$\leqslant \rho(x,y) + \rho(x,y) = 2\rho(x,y) \ \ \forall x,y \in F.$$

В останніх оцінках можна переставити місцями змінні x та y. Тому правильна нерівність

$$|S(x) - S(y)| \leqslant 2\rho(x,y) \ \ \forall x,y \in F,$$

з якої випливає, що функція $S(x)$ рівномірно неперервна на множині F. Відтак, маємо існування $\min\limits_{x\in F} S(x) = S(x^*) = A \geqslant 0$.

Залишається довести, що $A = S(x^*) = 0$. Проте, якби це було не так, то для точки $y^* = f(x^*)$, враховуючи нерівність (3), можна було б записати:

$$0 < A \leqslant S(y^*) = \rho(y^*, f(y^*)) = \rho(f(x^*), f(y^*)) <$$

$$< \rho(x^*,y^*) = \rho(x^*, f(x^*)) = S(x^*) = A,$$

що приводить до суперечливої нерівності $A < A$.

Отже, $S(x^*) = 0$, тобто відображення f має нерухому точку x^*.

Для з'ясування єдиності нерухомої точки припустимо, що $\exists x^{**} \neq \neq x^*$: $f(x^{**}) = x^{**}$. Знову застосовуючи нерівність (3), знайдемо

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(f(x^*), f(x^{**})) < \rho(x^*, x^{**}),$$

що неможливо. Отже, нерухома точка єдина. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про нерухому точку слабко стискуючого відображення). *Якщо відображення f переводить компактну множину F метричного простору (M, ρ) у себе і є слабко стискуючим, то воно має єдину нерухому точку $x^* \in F$.*

Приклад 5. Для відображення $f(x) = \sin x$ правильна нерівність

$$|f(x) - f(y)| = |\sin x - \sin y| < |x - y| \quad \forall x \neq y,$$

причому f: $[-2\pi; 2\pi] \to [-1; 1]$. Отже, за теоремою 2 це відображення має єдину нерухому точку.

Підкреслимо, що теорема 1 не дозволяє дійти цього висновку.

Зауваження. Спосіб доведення теореми 2 не є конструктивним. Зокрема, без відповіді залишається питання, чи завжди можна знайти нерухому точку методом послідовних наближень.

Узагальнимо тепер теорему 1 в іншому напрямку. Для цього введемо поняття *n-го степеня відображення* $f\colon F \to F$ такою рівністю:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{n \text{ разів}}(x))) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ разів}}(x).$$

□ Припустимо, що в теоремі 1 стискуючим є не саме відображення f, а деякий його степінь $g = f^N$. Тоді, в силу теореми 1, відображення g має єдину нерухому точку $x^* \in F$, тобто $g(x^*) = f^N(x^*) = x^*$. Зрозуміло, що при цьому $g^k(x^*) = x^*$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що

$$f(x^*) = f(g^k(x^*)) = f(f^{Nk}(x^*)) = f^{Nk}(f(x^*)) = g^k(f(x^*)) \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Позначивши $f(x^*) = y^*$, помітимо, що послідовність $y_k = g^k(y^*)$ можна задати рекурентно формулами $y_0 = y^*$, $y_k = g(y_{k-1})$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Оскільки відображення g є стиском, а x^* — його нерухома точка, то за теоремою 1 $y_k \to x^*$ $(k \to \infty)$. А вище була одержана рівність $y_k = f(x^*)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Через це $f(x^*) = x^*$, тобто x^* є нерухомою точкою відображення f.

Припустимо, що x^{**} — ще одна нерухома точка оператора f. Тоді з рівності $f(x^{**}) = x^{**}$ випливає, що $f^2(x^{**}) = f(f(x^{**})) = f(x^{**}) = x^{**}$, а за індукцією і $f^N(x^{**}) = x^{**}$. Отже, x^{**} — нерухома точка відображення $g = f^N$. В силу єдиності нерухомої точки відображення g маємо $x^{**} = x^*$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 3 (узагальнення теореми Банаха). *Нехай відображення f переводить замкнену множину F повного метричного простору (M, ρ) саму в себе, а деякий степінь $g = f^N$ відображення f є стиском. Тоді відображення f разом з відображенням g має єдину нерухому точку $x^* \in F$.*

Приклад 6. Множина F многочленів $p_N(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_N t^N$ степеня, не вищого N, замкнена у повному просторі $C[a;b]$ (див. приклад 5 п. 1.7.2). Якщо розглянути на цій множині диференціальний оператор $D(x(t)) = x'(t)$, то його N-ний степінь $D^N(x(t)) = x^{(N)}(t)$ виявиться стиском. Тому за теоремою 3 існує тільки один многочлен $p(t) \in F$ такий, що $p'(t) = p(t)$. Це многочлен $p(t) \equiv 0$.

2.4.6. Застосування теореми Банаха до розв'язування системи рівнянь. Застосуємо доведену теорему Банаха до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} x_i = b_k,\ k \in \overline{1,m}. \tag{4}$$

Зрозуміло, що ця система рівнянь рівносильна системі

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ki} x_i + x_k - b_k = x_k,\ k \in \overline{1,m},$$

або

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki} x_i - b_k = x_k,\ k \in \overline{1,m}, \tag{5}$$

де $a_{ki} = \alpha_{ki}$, коли $k \neq i$, і $a_{kk} = \alpha_{kk} + 1$. Систему (5) можна записати у вигляді

$$f(x) = x,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

де

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_{1i} x_i - b_1, \sum_{i=1}^{m} a_{2i} x_i - b_2, \ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{mi} x_i - b_m \right) \in \mathbb{R}^m.$$

Отже, $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$ — повний метричний простір і $F = \mathbb{R}^m$ —

замкнена множина. Визначимо, коли f є стиском. Для цього оцінимо відстань

$$\rho(f(x), f(y)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i - b_k - \sum_{i=1}^{m} a_{ki}y_i + b_k\Big)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i)\Big)^2}.$$

Згадуючи нерівність Коші — Буняковського (див. п. 1.1.1, формула (7)), дістаємо:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ki}(x_i - y_i)\Big)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{ki}^2 \sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2,$$

а тому

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}^2 \sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i - y_i)^2} = \alpha \cdot \rho(x, y),$$

де $\alpha = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}^2}$. Отже, наклавши умову $\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}^2 < 1$, дістаємо, що $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ є стиском.

За теоремою Банаха система (5), а отже, і система (4), має єдиний розв'язок $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$, який можна знайти методом послідовних наближень, причому нульове наближення $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}) \in \mathbb{R}^m$ — довільна точка, а $(n+1)$-е наближення x^* визначається рівністю

$$x^{(n+1)} = (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_m^{(n+1)}),$$

де $x_k^{(n+1)} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ki}x_i^{(n)} - b_k \; \forall k \in \overline{1,m}$.

2.4.7. Застосування теореми Банаха до розв'язування інтегральних рівнянь. Застосуємо тепер теорему Банаха до так званого *інтегрального рівняння вигляду*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt, \tag{6}$$

де f — задана функція двох змінних, що є неперервною на замкненому прямокутнику

$$\overline{P} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_0 - a \leqslant u \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant v \leqslant y_0 + b\}.$$

□ Невідомою у рівнянні (6) є деяка функція $y = y(x)$ дійсної змінної, що є неперервною на відрізку $[x_0 - a; x_0 + a]$.

Запишемо рівняння (6) у вигляді

$$\varphi(y) = y,\ y = y(x) \in C[x_0 - a; x_0 + a] \ \text{ і } \ \max_{[x_0-a;x_0+a]} |y(x) - y_0| \leqslant b,$$

де

$$\varphi(y) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \in C[x_0 - a; x_0 + a].$$

Позначимо

$$F = \{y = y(x) \in C[x_0 - a; x_0 + a]\colon\ \rho(y, y_0) \leqslant b\}$$

і визначимо, коли $\varphi(y) \in F$, тобто

$$\rho(\varphi(y), y_0) = \max_{[x_0-a;x_0+a]} \left| y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt - y_0 \right| =$$

$$= \max_{[x_0-a;x_0+a]} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \right| \leqslant b.$$

Оскільки замкнений прямокутник $\overline{P}$ є компактною множиною у просторі $\mathbb{R}^2$, а функція f неперервна на $\overline{P}$, то за теоремою Вейєрштрасса існує $M = \max\limits_{\overline{P}} |f(u,v)|$. Тому

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \right| \leqslant M|x - x_0| \leqslant M \cdot a$$

і, отже, умова $Ma \leqslant b$ гарантує умову $\varphi(y) \in F\ \forall y \in F$, тобто

$$\varphi : F \to F \subset C[x_0 - a; x_0 + a].$$

Дослідимо замкненість множини F. Візьмемо довільну послідовність (y_n): $y_n \in F\ \forall n \in \mathbb{N}$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$. Тоді з нерівності $\rho(y_n, y_0) \leqslant b$ за властивістю неперервності відстані дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \rho(y_n, y_0) = \rho(\lim_{n\to\infty} y_n, y_0) = \rho(y^*, y_0) \leqslant b.$$

Отже, $y^* = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in F$ для будь-якої збіжної послідовності (y_n) елементів з F. Тому за критерієм замкненості множина F є замкненою у просторі $C[x_0 - a; x_0 + a]$.

Нарешті визначимо, коли відображення φ є стиском. Для цього оцінимо відстань

$$\rho(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) = \max_{[x_0 - a; x_0 + a]} \left| \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt \right) - \right.$$

$$\left. - \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt \right) \right| =$$

$$= \max_{[x_0 - a; x_0 + a]} \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))dt \right|. \tag{7}$$

Для подальшого оцінювання вважатимемо, що функція $f(u,v)$ задовольняє *умову Ліпшица* за змінною v, тобто

$$\exists L > 0\colon\ |f(u,v_1) - f(u,v_2)| \leqslant L\,|v_1 - v_2|\ \ \forall (u,v_1)\ \text{ і }\ (u,v_2) \in \overline{P}.$$

За цією умовою

$$\left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)))\, dt \right| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} L\, |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} L \cdot \max_{[x_0 - a; x_0 + a]} |y_1(t) - y_2(t)|\, dt \right| =$$

$$= L\,\rho(y_1, y_2) \cdot |x - x_0| \leqslant L \cdot a \cdot \rho(y_1, y_2).$$

Звідси та з рівності (7) дістаємо, що

$$\rho(\varphi(y_1), \varphi(y_2)) \leqslant L \cdot a \cdot \rho(y_1, y_2) = \alpha \cdot \rho(y_1, y_2)\ \forall y_1 \text{ і } y_2 \in F.$$

Отже, наклавши умову $\alpha = L \cdot a < 1$, дістанемо, що відображення φ є стиском. Тому існує єдина нерухома точка $y^* = y^*(x) \in F$ цього відображення, тобто єдиний розв'язок рівняння (6), який можна знайти методом послідовних наближень, вважаючи нульовим наближенням $y^* = y^*(x)$ функцію $y_0(x) \equiv y_0$, а $(n+1)$-им наближенням функцію

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0.\ \blacksquare$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 4 (Пікара про існування та єдиність розв'язку інтегрального рівняння). *Нехай функція $f(u,v)$ є неперервною на замкненому прямокутнику*

$$\overline{P} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\ x_0 - a \leqslant u \leqslant x_0 + a,\ y_0 - b \leqslant v \leqslant y_0 + b\}.$$

і задовольняє умову Ліпшица за змінною v, тобто

$$\exists L > 0\colon\ |f(u,v_1) - f(u,v_2)| \leqslant L\,|v_1 - v_2|\ \forall (u,v_1)\ \ i\ \ (u,v_2) \in \overline{P}.$$

Тоді якщо $a \cdot \max\limits_{\overline{P}} |f(u,v)| \leqslant b$ і $L \cdot a < 1$, то інтегральне рівняння (6) *має єдиний розв'язок, який можна знайти методом послідовних наближень.*

2.4.8. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожне відображення має нерухому точку.
2. Відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де $f(x) = \sin x$, має єдину нерухому точку.
3. Якщо відображення $f\colon F \to F$ має нерухому точку, то воно є стиском.
4. Якщо відображення $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не має нерухомих точок, то воно не є стиском.
5. Відображення f з твердження 2 є стиском.
6. Якщо відображення f є стискуючим, то $D(f) \supset E(f)$, тобто область визначення містить у собі множину значень f.
7. У теоремі Банаха умову повноти простору (M,ρ) і замкненості множини F можна замінити умовою обмеженої компактності множини
8. Відображення $f(x) = \ln(1+x)$ та $g(x) = \operatorname{arctg} x$ є: а) стискуючими; б) слабко стискуючими.
9. Те, що в означення слабко стискуючого відображення нерівність (3) строга, є суттєвим для правильності теореми 2.
10. Теореми 1 − 3 є рівносильними твердженнями.

II. Довести, що дані відображення f є стискуючими відображеннями $C[a;b]$ в $C[a;b]$:

1. $f(x(t)) = y_0 + \int\limits_a^t K(u,x(u))\,du$, де $K(u,v)$ − неперервна функція на $\overline{P} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2\colon\ a \leqslant u \leqslant b$ і $-\infty < v < +\infty\}$, причому $\exists L > 0$: $L(b-a) < 1$ і $|K(u,v_1) - K(u,v_2)| \leqslant L\,|v_1 - v_2|\ \forall (u,v_1)$ і $(u,v_2) \in \overline{P}$.

2. $f(x(t)) = \varphi(t) + \lambda \int\limits_a^t K(t,v)x(v)\,dv$, де $\lambda \in \mathbb{R}$, $K(u,v)$ – неперервна функція на $\overline{P} = \{(u,v)\colon a \leqslant u \leqslant b,\ a \leqslant v \leqslant b\}$, $\varphi(t) \in C[a;b]$ і $|\lambda| \cdot \max\limits_{\overline{P}} |K(u,v)| \cdot (b-a) < 1$.

III. Довести, що рівняння $\int\limits_0^x \varphi(t)\,dt = \varphi(x)$ не має у просторі $C[0;a]$, $a > 0$, ненульових розв'язків.

2.4.9. Історична довідка. Поняття оператора ввів у 1855 році Р. Кармайкл (1828 – 1861), а функціонала – в 1887 році італійський математик В. Вольтерра (1860 – 1940). Означення функції комплексної змінної сформулював у 1821 році О. Коші.

Поняття лінії рівня ввів у 1798 році французький математик Г. Монж (1746 – 1818).

Поняття границі функції "мовою $\varepsilon - \delta$" ввів у 1821 році О. Коші. Тоді він також ввів строге означення неперервної функції, яке раніше, у 1817 році сформулював Б. Больцано, якому по суті належить теорема про проміжні значення неперервної функції.

Теорему про компактність образу для числових функцій, неперервних на відрізку, першим у 1860 році довів німецький математик К. Вейєрштрасс (1815 – 1897).

Поняття рівномірної неперервності введено у 1870 році німецьким математиком Г. Гейне (1821 – 1881).

Метод послідовних наближень для розв'язання диференціальних рівнянь запропонував у 1890 році французький математик Ш. Пікар (1856 – 1941), а для довільних стискуючих відображень цей метод застосував у 1922 році польський математик С. Банах.

3. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У даному розділі вивчається узагальнення понять похідної та диференціала числової функції однієї змінної на випадок функцій кількох змінних.

3.1. Диференційовність і частинні похідні функцій кількох змінних

У цьому підрозділі поняття диференційовної функції та її похідної узагальнено на випадок функцій кількох змінних.

3.1.1. Диференційовність скалярної функції кількох змінних. Відомо, що функція однієї змінної $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, називається диференційовною у точці x_0, якщо існують окіл $O(x_0) \subset E$ цієї точки, число $A = A(x_0)$ і числова функція $\alpha = \alpha(x)$, $x \in O(x_0)$, такі, що приріст функції f у точці x_0: $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ можна записати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \ \forall x \in O(x_0)$$

і $\alpha(x) \to 0 = \alpha(x_0)$, коли $x \to x_0$. При цьому число $A(x_0)$ називають похідною функції f у точці x_0:

$$A(x_0) = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} := \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{x - x_0}.$$

За аналогією, природно назвати функцію $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, *тобто числову,* або *скалярну, функцію двох змінних x та y диференційовною у точці* $M_0 = (x_0, y_0)$, якщо існують: окіл $O(M_0) \subset E$ цієї точки, числа $A_x = A_x(M_0)$ та $A_y = A_y(M_0)$ і числові функції $\alpha_x = \alpha_x(M)$ та $\alpha_y = \alpha_y(M)$, $M \in O(M_0)$, такі, що *приріст* (або *повний приріст*) функції f у точці M_0:

$$\Delta f(M_0) := f(M) - f(M_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}\Delta f(M_0) = A_x(M_0)(x - x_0) + A_y(M_0)(y - y_0) + \\ + \alpha_x(M)(x - x_0) + \alpha_y(M)(y - y_0) \ \forall M \in O(M_0) \qquad (1)\end{gathered}$$

і $\alpha_x(M) \to 0$ та $\alpha_y(M) \to 0$, коли $M \to M_0$.

Введемо у розгляд матриці:

$$\left.\begin{array}{l} \text{вектор-рядок } f'(M_0) := (A_x(M_0), A_y(M_0)), \\ \text{вектор-стовпчик } \Delta M := \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \\ \text{і вектор-рядок } \alpha(M) := (\alpha_x(M), \alpha_y(M)). \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Згадуючи правило множення матриць, рівність (1) можна записати у вигляді

$$\Delta f(M_0) = f'(M_0)\Delta M + \alpha(M)\Delta M \ \ \forall M \in O(M_0), \qquad (3)$$

де $\alpha(M) \to 0$, коли $\Delta M \to 0$. При цьому вважаємо, що $\alpha(M) \to 0$ і $\Delta M \to 0$ покоординатно, тобто як вектори простору $\mathbb{R}^2$.

Поняття диференційовності природно узагальнюється на випадок функції $f\colon E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$, тобто числової функції n змінних x_1, $x_2, \ldots, x_n$. Таку функцію f називають *диференційовною у точці* $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, якщо у деякому околі $O(M_0)$ точки M_0 правильна рівність (3), де $f'(M_0) = (A_1(M_0), A_2(M_0), \ldots, A_n(M_0))$ і $\alpha(M) = (\alpha_1(M), \alpha_2(M), \ldots, \alpha_n(M)) \to 0$, коли

$$\Delta M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \ldots \\ \Delta x_n \end{pmatrix} \to 0, \ \text{ тобто } \ \Delta x_k \to 0 \ \forall k \in \overline{1,n}.$$

3.1.2. Повна і частинні похідні скалярної функції. Якщо функція двох змінних $f(x,y)$ диференційовна у точці M_0, то вектор-рядок $f'(M_0) =: \frac{df(M_0)}{dM}$, визначений рівностями (1) і (2), називають *похідною* або *повною похідною функції* f *у точці* M_0. При цьому координати вектора $f'(M_0)$ називають *частинними похідними функції* f *у точці* M_0 *по відповідних змінних* і позначають:

$$A_x(M_0) =: f'_x(M_0) =: \frac{\partial f(M_0)}{\partial x} - \textit{частинна похідна по змінній } x,$$
$$A_y(M_0) =: f'_y(M_0) =: \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} - \textit{частинна похідна по змінній } y.$$

Отже, $f'(M_0) = (f'_x(M_0), f'_y(M_0)) = \frac{df(M_0)}{dM}$.

□ Легко бачити, що коли у рівності (1) покласти $x \neq x_0$, а $y = y_0$, то дістанемо

$$f(x,y_0) - f(x_0,y_0) = f'_x(M_0)(x - x_0) + \alpha_x(M)(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = f'_x(M_0)+\alpha_x(M) \to f'_x(M_0),$$

коли $x \to x_0$. Отже,

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}.$$

Так само дістанемо, що

$$f'_y(M_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}.$$

Останні границі можуть існувати навіть тоді, коли функція f не є диференційовною у точці x_0. Тому частинні похідні функції f у точці M_0 по змінних x, y визначають за допомогою останніх границь, незалежно від диференційовності функції f у точці M_0.

Якщо f — функція n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то її *частинна похідна по змінній* x_k визначається за аналогією:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_k} := \lim_{x_k\to x_k^0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)}{x_k-x_k^0}.$$

Зауважимо, що для відшукання частинної похідної функції кількох змінних по якійсь змінній на всі інші змінні слід дивитися як на сталі. Це випливає з означення частинної похідної.

Припустимо, що функція f диференційовна у точці M_0. Тоді з рівності (1) або (3) випливає, що $f(M) \to f(M_0)$, коли $M \to M_0$, тобто функція f неперервна у точці M_0. ■

Таким чином, має місце

Теорема 1 (про необхідні умови диференційовності функції). *Якщо функція кількох змінних диференційовна у точці M_0, то вона неперервна у цій точці і має у ній скінченні частинні похідні по кожній змінній.*

Приклад 1. Нехай

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } y=x^2,\ (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{для інших точок } (x,y). \end{cases}$$

Тоді у точці $M_0=(0,0)$ функція f не є неперервною, бо

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = 1 \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y\neq x^2}} f(x,y) = 0.$$

За теоремою 1 ця функція не є диференційовною у точці M_0, а тому не має повної похідної у точці M_0. Разом з тим

$$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x},$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Таким чином, на відміну від функції однієї змінної, *функція n змінних ($n \geqslant 2$) може мати у точці M_0 скінченні частинні похідні по кожній змінній і не бути у цій точці не тільки диференційовною, а й навіть неперервною.*

З іншого боку, для багатьох функцій досить легко знайти їх частинні похідні. І тому бажано за їх виглядом дати відповідь на питання про диференційовність даної функції.

3.1.3. Достатні умови диференційовності. Для простоти записів розглянемо функцію двох змінних $f(x,y)$.

□ Припустимо, що функція f має у деякому околі $O(M_0)$ точки M_0 частинні похідні по змінних x та y, котрі є функціями, неперервними у точці M_0, тобто $f'_x(M) \to f'_x(M_0)$ та $f'_y(M) \to f'_y(M_0)$, коли $M \to M_0$. Тоді

$$\Delta f(M_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0) =$$
$$= (f(x,y) - f(x_0,y)) + (f(x_0,y) - f(x_0,y_0)). \tag{4}$$

Застосуємо до кожного доданка правої частини рівності (4) формулу Лагранжа скінченних приростів:

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y) &= f'_x\big(x_0+\theta_x(x-x_0),y\big)\,(x-x_0),\\ f(x_0,y) - f(x_0,y_0) &= f'_y\big(x_0,y_0+\theta_y(y-y_0)\big)\,(y-y_0),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

де $0<\theta_x,\theta_y<1$. Введемо позначення

$$\left.\begin{aligned} \alpha_x(M) &= f'_x(x_0+\theta_x(x-x_0),y) - f'_x(M_0),\\ \alpha_y(M) &= f'_y(x_0,y_0+\theta_y(y-y_0)) - f'_y(M_0).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тоді за умовою неперервності частинних похідних маємо:

$$\alpha_x(M) \to 0 \ \text{ і } \ \alpha_y(M) \to 0, \ \text{ коли } \ M \to M_0.$$

Крім того, з рівностей (4) – (6) дістаємо:

$$\Delta f(M_0) = f'_x(M_0)(x-x_0) + f'_y(M_0)(y-y_0) +$$
$$+\alpha_x(M)(x-x_0) + \alpha_y(M)(y-y_0),$$

а тому функція f диференційовна у точці M_0.

Міркування для загального випадку функції кількох змінних аналогічні. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (про достатні умови диференційовності функції). *Нехай функція f кількох змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ має частинні похідні $f'_{x_1}(M), f'_{x_2}(M), \dots, f'_{x_n}(M)$, що є неперервними у точці M_0. Тоді f диференційовна у точці M_0, а її повна похідна*

$$f'(M_0) = \big(f'_{x_1}(M_0), f'_{x_2}(M_0), \dots, f'_{x_n}(M_0)\big).$$

Приклад 2. Нехай $f(x,y,z) = x^2y + e^{x-y_2} - \sin(y+z^2)$. Знайдемо частинні похідні $f'_x(x,y,z) = 2xy + e^{x-y^2}$, $f'_y(x,y,z) = x^2 - 2ye^{x-y^2} - \cos(y+z^2)$, $f'_z(x,y,z) = -2z\cos(y+z^2)$. Зрозуміло, що кожна з цих частинних похідних неперервна у довільній точці $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, а тому дана функція є диференційовною у кожній точці $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, а повна похідна

$$f'(x,y,z) = \big(2xy + e^{x-y^2}, x^2 - 2ye^{x-y^2} - \cos(y+z^2), -2z\cos(y+z^2)\big).$$

3.1.4. Похідна скалярної функції за напрямком. Поглянемо тепер на частинні похідні функції f двох змінних дещо з іншого боку. Якщо $x \neq x_0$, а $y = y_0$, то $t = (x - x_0) \neq 0$ і

$$\Delta M = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x - x_0) = \vec{i}\,t \Leftrightarrow$$

$$M = M_0 + \vec{i}\,t.$$

Тому рівність (1) набуває вигляду

$$f(M_0 + \vec{i}\,t) - f(M_0) = f'_x(M_0)t + \alpha_x\big(M_0 + \vec{i}\,t\big)\,t \Leftrightarrow$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + \vec{i}\,t) - f(M_0)}{t} = f'_x(M_0).$$

Отже, $f'_x(M_0)$ *характеризує швидкість зміни функції f вздовж вектора $\vec{i}$*, або *за напрямком осі OX*. Аналогічно $f'_y(M_0)$ *характеризує швидкість зміни функції f вздовж вектора* $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, або за напрямком осі OY. У цьому полягає фізичний зміст частинних похідних.

Розглянемо тепер довільний одиничний вектор (або *напрямок*) $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$: $e_x^2 + e_y^2 = 1$. Тоді *похідною функції f у точці M_0 за* *напрямком* $\vec{e}$ природно назвати границю

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(M_0+t\vec{e})-f(M_0)}{t}=:f'_e(M_0)=:\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}.$$

Ця похідна характеризує швидкість зміни функції f за напрямком $\vec{e}$. Дане означення зберігається і для функції n змінних.

Приклад 3. Нехай $f(x,y)$ — функція з прикладу 1. Тоді для будь-якого напрямку $\vec{e}=e_x\vec{i}+e_y\vec{j}$ у точці $M_0=(0,0)$ приріст $f(M_0+t\vec{e})-f(M_0)=0$, якщо t досить мале. Тому $\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}=0$ для будь-якого напрямку $\vec{e}$.

Разом з тим функція f не є диференційовною у точці $M_0=(0,0)$, оскільки вона розривна у цій точці.

Вирішимо питання про існування та обчислення похідної за напрямком.

☐ Припустимо, що функція f диференційовна у точці M_0, а $\vec{e}=e_x\vec{i}+e_y\vec{j}$ — довільний фіксований напрямок. Тоді, поклавши у рівності (3) $\Delta M=t\vec{e}$, де $t\neq 0$, дістанемо

$$f(M_0+t\vec{e})-f(M_0)=f'(M_0)t\vec{e}+\alpha(M_0+t\vec{e})t\vec{e}\Leftrightarrow$$

$$\exists\lim_{t\to 0}\frac{f(M_0+t\vec{e})-f(M_0)}{t}=f'(M_0)\cdot\vec{e}=\frac{\partial f(M_0)}{\partial e},$$

де $f'(M_0)=(f'_x(M_0),\ f'_y(M_0)),\ \ f'(M_0)\cdot\vec{e}=f'_x(M_0)\,e_x+f'_y(M_0)\,e_y.$

На останню суму можна дивитись як на скалярний добуток векторів $f'(M_0)$ і $\vec{e}$ у гільбертовому просторі $\mathbb{R}^2$. Тому

$$f'_e(M_0)=f'(M_0)\cdot\vec{e}=\|f'(M_0)\|\cdot\|\vec{e}\|\cos\alpha,$$

де α — кут між векторами $f'(M_0)$ і $\vec{e}$. Зрозуміло, що цей скалярний добуток (тобто $f'_e(M_0)$) є найбільшим тоді й тільки тоді, коли $\alpha=0$, тобто вектори $f'(M_0)$ і $\vec{e}$ співнапрямлені: $\vec{e}\upuparrows f'(M_0)$. При цьому, враховуючи, що $\|\vec{e}\|=1$, маємо

$$\max_e f'_e(M_0)=\|f'(M_0)\|=\sqrt{f'^2_x(M_0)+f'^2_y(M_0)}.$$

У зв'язку з цим вектор $f'(M_0)$ має спеціальне позначення:

$$f'(M_0)=\operatorname{grad} f(M_0)$$

і назву: *градієнт функції f у точці* M_0. Градієнт задає напрямок $\vec{e}_1$, вздовж якого функція f змінюється найшвидше.

Аналогічні міркування мають місце для функції n змінних. ■

Таким чином, правильна

Теорема 3 (про похідну за напрямком). *Якщо функція f диференційовна у точці M_0, то вона має у цій точці похідну $f'_e(M_0)$ за будь-яким напрямком $\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. При цьому*

$$f'_e(M_0) = f'(M_0) \cdot \vec{e} = f'_{x_1}(M_0)\, e_1 + f'_{x_2}(M_0)\, e_2 + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\, e_n$$

і якщо $\vec{e}^* \uparrow\uparrow \operatorname{grad} f(M_0)$, то

$$f'_{e^*}(M_0) = \max_e f'_e(M_0) = \sqrt{{f'_{x_1}}^2(M_0) + {f'_{x_2}}^2(M_0) + \ldots + {f'_{x_n}}^2(M_0)}\,.$$

Приклад 4. Функція $f(x,y) = x^2 - y^2$ диференційовна скрізь в $\mathbb{R}^2$, оскільки її частинні похідні $f'_x = 2x$, $f'_y = -2y$ неперервні в $\mathbb{R}^2$. Тому похідна за напрямком $\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}$ існує для будь-яких точки $M_0 = (x_0, y_0)$ і напрямку $\vec{e}$. Зокрема, якщо $M_0 = (1,1)$, а $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j}$, то

$$\frac{\partial f(1,1)}{\partial e} = f'_x(1,1)e_x + f'_y(1,1)e_y = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Якщо вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$ і не обов'язково одиничний, то скалярний добуток

$$f'(M_0)\vec{a} = f'_{x_1}(M_0)\, a_1 + f'_{x_2}(M_0)\, a_2 + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\, a_n =: \frac{\partial f(M_0)}{\partial a}$$

називають ще *похідною функції f у точці M_0 за вектором $\vec{a}$.*

Якщо f — функція двох змінних x і y, то легко дати геометричну ілюстрацію похідної за напрямком, а тому і частинних похідних. Дійсно, якщо $\vec{e} = e_x \cdot \vec{i} + e_y \cdot \vec{j}$, а $M_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$, то

$$f'_e(M_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((x_0 + t\,e_x)\vec{i} + (y_0 + t\,e_y)\vec{j}\,\big) - f(x_0\vec{i} + y_0\vec{j}\,)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0),$$

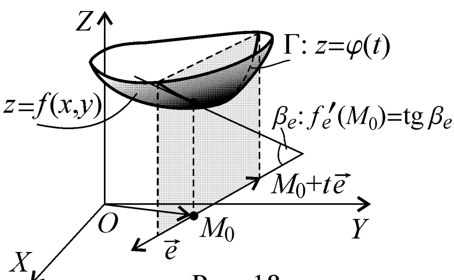

Рис. 18

де $\varphi(t) = f((x_0 + t\,e_x)\vec{i} + (y_0 + t\,e_y\vec{j}), t \in O(0)$, є рівнянням кривої Γ, яку можна одержати шляхом перетину поверхні $z = f(x,y)$ площиною, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\vec{e}$ і осі OZ (див. рис. 18).

Згадуючи геометричний зміст похідної функції однієї змінної дістаємо, що $f'_e(M_0)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до кривої Γ у точці $(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0))$, тобто $f'_e(M_0) = \operatorname{tg}\beta_e$, де β_e — кут, що утворює ця дотична з напрямком $\vec{e}$.

Зокрема, $f'_x(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\beta_x$ ($f'_y(x_0,y_0) = \operatorname{tg}\beta_y$), де β_x (β_y) — кут між віссю OX (OY) і дотичною у точці $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ до кривої Γ, що утворюється шляхом перетину поверхні $z = f(x,y)$ площиною $y = y_0$ $(x = x_0)$. У цьому полягає геометричний зміст похідної за напрямком і, зокрема, частинних похідних функції f у точці $M_0 = (x_0,y_0)$.

3.1.5. Диференційовність вектор-функції. Розглянемо тепер функцію $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, або *вектор-функцію*, компонентами якої є скалярні функції $f_k\colon E \to \mathbb{R}$, $k \in \overline{1,m}$. Якщо $M = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in E$, то $f(M) = \big(f_1(M), f_2(M),\ldots, f_m(M)\big) \in \mathbb{R}^m$.

З такими функціями тісно пов'язаний нормований простір дійсних матриць $A = (a_{i,j})$ розмірності $m \times n$ з нормою

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2},$$

який позначають $\mathbb{MR}^n_m$. Його можна ототожнювати з простором $\mathbb{R}^{mn}$, оскільки ці простори ізоморфні. При цьому координатами вектора-матриці A є її елементи. Нулем у просторі $\mathbb{MR}^n_m$ є матриця Θ з нульовими елементами. Для спрощення позначень, як і в попередніх пунктах, часто позначатимемо нульові елементи різних просторів одним і тим же символом 0. Відмітимо також, що простір $\mathbb{MR}^n_m$ повний, навіть обмежено компактний, а збіжність у цьому просторі рівносильна покоординатній збіжності.

Припустимо, що вектор-функція $f\colon E \to \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^n$, визначена в деякому околі точки $M_0 \in E$. Узагальнюючи усі попередні означення диференційовних функцій, назвемо *вектор-функцію f диференційовною у точці M_0*, якщо її приріст у цій точці,

$$f(M_0 + \Delta M) - f(M_0) = \Delta f(M_0) = (\Delta f_1(M_0), \Delta f_2(M_0), \ldots, \Delta f_m(M_0)),$$

можна записати у вигляді

$$\Delta f(M_0) = A(M_0)\Delta M + \alpha(M_0, \Delta M)\Delta M \ \ \forall \Delta M \in O(0), \tag{7}$$

де A та α — матриці розмірності $m \times n$ такі, що A не залежить від ΔM, а $\alpha \to 0$, коли $\Delta M \to 0$. При цьому матриця A називається *похідною функції f у точці M_0* і позначається $f'(M_0)$ або $\frac{df(M_0)}{dM}$.

Зауваження. Там, де цього вимагає правило множення матриць, вектори слід записувати у стовпчик. Так у рівності (7) вектори ΔM та $\Delta f(M_0)$ вважаються векторами-стовпцями.

Отже, як і для числових функцій однієї змінної, можна сказати, що вектор-функція f диференційовна у точці M_0, якщо вона має в цій точці похідну.

Встановимо зв'язок між диференційовністю вектор-функції $f = (f_1, \ldots, f_m)$ та її компонент.

□ Нехай у точці M_0 диференційовна сама функція f. Позначимо вектори-рядки матриць A та α з рівності (7) через A_i та α_i, $i \in \overline{1,m}$, відповідно. Тоді рівність (7) стане еквівалентною системі рівностей

$$\Delta f_i(M_0) = A_i(M_0)\Delta M + \alpha_i(M_0, \Delta M)\Delta M \;\; \forall \Delta M \in O(0), \;\; i \in \overline{1,m}. \quad (8)$$

При цьому кожен вектор-рядок A_i не залежить від ΔM, а кожен вектор-рядок $\alpha_i \to 0$, коли $\Delta M \to 0$.

Звідси випливає, що компоненти f_1, f_2, ..., f_m функції f є диференційовними у точці M_0 і рядками похідної $f'(M_0)$ є похідні $(f_i)'(M_0)$.

Так само, враховуючи, що збіжність у будь-якому просторі $\mathbb{R}^p$ рівносильна покоординатній збіжності, дістанемо, що з рівності (8) випливає рівність (7). Це означає, що з диференційовності усіх компонент вектор-функції випливає диференційовність її самої. ■

Отже, має місце

Теорема 4 (про диференційовність вектор-функції та її компонент). *Для того щоб вектор-функція $f = (f_1, \ldots, f_m)$ була диференційовною у точці M_0, необхідно і достатньо, щоб усі її компоненти, або координатні функції, f_i були диференційовними у точці M_0. При цьому*

$$f_i'(M_0) = \left(\frac{\partial f_i(M_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i(M_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f_i(M_0)}{\partial x_n} \right) \;\; \forall i \in \overline{1,m},$$

а

$$f'(M_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(M_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Матрицю з правої частини рівності (9) називають також *ма-*

трицею Якобі функції f у точці M_0. Якщо $m = n$, то визначник, що відповідає матриці Якобі, називають *визначником Якобі* або *якобіаном функції f* у точці M_0 і позначають $J_f(M_0)$ або $\frac{Df(M_0)}{DM} =: \frac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}$ або $\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}$. Наприклад, якщо $m = n = 3$, то

$$J_f(M_0) = \frac{D(f_1,f_2,f_3)}{D(x,y,z)} = \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)} :=$$

$$:= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial f_1(M_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3(M_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_3(M_0)}{\partial y} & \frac{\partial f_3(M_0)}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4 дозволяє діставати властивості диференційовних вектор-функцій з відповідних властивостей скалярних функцій. Зокрема, *диференційовна вектор-функція неперервна.*

Приклад 5. Нехай $f(M) = f(x,y) = \big(\sin(x+y^2), \cos(x-y^2)\big)$. Тоді

$$f_1(x,y) = \sin(x+y^2),\ \ f_2 = \cos(x-y^2),$$

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = \cos(x+y^2),\ \ \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = 2y\cos(x+y^2),$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = -\sin(x-y^2),\ \ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = 2y\sin(x-y^2).$$

Усі знайдені частинні похідні неперервні в $\mathbb{R}^2$. Тому f_1 і f_2, а отже і f, диференційовні в $\mathbb{R}^2$, причому

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y^2) & 2y\cos(x+y^2) \\ -\sin(x-y^2) & 2y\sin(x-y^2) \end{pmatrix}.$$

3.1.6. Похідна вектор-функції за напрямком. Похідна вектор-функції $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ у точці $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ за напрямком $\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$: $\|\vec{e}\| = 1$, означається так само, як це зроблено для скалярної функції в п. 3.1.4:

$$f'_e(M_0) =: \frac{\partial f(M_0)}{\partial e} =: \lim_{t\to 0} \frac{f(M_0 + t\vec{e}) - f(M_0)}{t}.$$

Відмінність полягає лише у тому, що $f(M)$ і $f'_e(M_0)$ є векторами простору $\mathbb{R}^m$.

Оскільки збіжність у просторі $\mathbb{R}^m$ рівносильна покоординатній збіжності, то похідна $\frac{\partial f(M_0)}{\partial e}$ існує тоді і тільки тоді, коли існують похідні $\frac{\partial f_i(M_0)}{\partial e}$ $\forall i \in \overline{1,m}$. При цьому

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial e} = \left(\frac{\partial f_1(M_0)}{\partial e}, \frac{\partial f_2(M_0)}{\partial e}, \ldots, \frac{\partial f_m(M_0)}{\partial e}\right).$$

Приклад 6. Знайдемо похідну функції $f = (xy^2, x^3 - \ln y)$ за напрямком $\vec{e} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ у точці $(0,1)$. Позначимо $\varphi = xy^2$, $\psi = x^3 - \ln y$. Частинні похідні $\varphi'_x = y^2$, $\varphi'_y = 2xy$, $\psi'_x = 3x^2$, $\psi'_y = -\frac{1}{y}$ неперервні в околі точки $(0,1)$. Тому функції φ та ψ диференційовні у вказаній точці і мають у цій точці похідні за будь-яким напрямком $\vec{e} = (e_x, e_y)$ (теореми 2, 3). Знайдемо $\varphi'_e(0,1) = \varphi'_x(0,1)e_x + \varphi'_y(0,1)e_y = 1 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Аналогічно $\psi'_e(0,1) = 0 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Отже, $f'_e(0,1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3.1.7. Частинні похідні вектор-функції по вектор-змінній. Маючи точку $z = (z_1, z_2, \ldots z_n)$, ми можемо утворити з неї декілька векторів меншої розмірності, викидаючи деякі координати (порахуйте кількість усіх можливих таких векторів). Зокрема, цю точку z можна розглядати як пару $z = (x,y)$, де $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_l)$, а $(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots y_l) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$.

Нехай тепер задано функцію $w = f(z) = f(x,y)$, $w \in \mathbb{R}^m$, в околі точки $z^0 = (x^0, y^0)$. Покладемо $x = x^0$ і розглянемо функцію $\varphi(y) = f(x^0, y)$. Ця функція визначена у деякому l-вимірному околі точки $y^0 = (y_1^0, \ldots, y_l^0)$. Якщо існує (повна) похідна $\varphi'(y^0)$, то її називають *частинною похідною по змінній y функції f у точці z^0* і позначають $f'_y(z^0)$ або $\frac{\partial f(z^0)}{\partial y}$. Отже, $f'_y(z^0) := \varphi'(y^0)$.

Аналогічно означається *частинна похідна по x функції f у точці z^0* за допомогою рівності

$$f'_x(z^0) := \frac{\partial f(z^0)}{\partial x} := \psi'(x^0),$$

де $\psi(x) = f(x, y^0)$.

Відмітимо, що за означенням частинної похідної по скалярній змінній правильні співвідношення

$$\frac{\partial f_i(z^0)}{\partial y_j} = \frac{\partial \varphi_i(y^0)}{\partial y_j} \ \forall i \in \overline{1,m},\ j \in \overline{1,l}.$$

Беручи до уваги це та рівність (9), знайдемо вигляд частинної похідної $f'_y(z^0)$:

$$\frac{\partial f(z^0)}{\partial y} = \frac{d\varphi(y^0)}{dy} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1(y^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1(y^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1(y^0)}{\partial y_l} \\ \frac{\partial\varphi_2(y^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2(y^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2(y^0)}{\partial y_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\varphi_m(y^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_m(y^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(y^0)}{\partial y_l} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_1(z^0)}{\partial y_l} \\ \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_2(z^0)}{\partial y_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(z^0)}{\partial y_1} & \frac{\partial f_m(z^0)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial f_m(z^0)}{\partial y_l} \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Пропонуємо читачеві самостійно знайти вигляд частинної похідної $f'_x(z^0)$.

Виникає питання про зв'язок між повною та частинними похідними функції f. Виявляється, що він такий самий, як і для функцій двох скалярних змінних.

□ Щоб виявити цей зв'язок, припустимо, що функція $f(z)$ має похідну $f'(z^0) = C$, яка є матрицею розмірності $m \times n$. Тоді в деякому околі нуля справедливе представлення

$$\Delta f(z^0) = C\Delta z + \gamma(\Delta z)\Delta z, \qquad (11)$$

де $\gamma \to 0$, коли $\Delta z \to 0$.

Нехай $C = (c_{i,j})$, $\gamma = (\gamma_{i,j})$, $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,n}$. Розіб'ємо матрицю C на дві матриці $A = (a_{i,j})$ та $B = (b_{i,j})$, віднісши до матриці A перші k стовпчиків матриці C, а до матриці B — решту $l = n - k$ стовпчиків матриці C. Таким чином,

$$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m,1} & \dots & c_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & b_{1,1} & \dots & b_{1,l} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,k} & b_{2,1} & \dots & b_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,k} & b_{m,1} & \dots & b_{m,l} \end{pmatrix},$$

або коротше, $C = (A, B)$.

Аналогічно вчинимо з матрицею γ, розбивши її на матриці $\alpha = (\alpha_{i,j})$ і $\beta = (\beta_{i,j})$.

Якщо позначити через Δx і Δy прирости точок x^0 та y^0, відповідно, то $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ буде приростом точки z^0. Підставляючи таке

Δz з фіксованим $\Delta y = 0$ у рівність (11), дістанемо:

$$\Delta f(z^0) = f(z^0 + \Delta z) - f(z^0) = f(x^0 + \Delta x, y^0) - f(x^0, y^0) =$$

$$= \psi(x^0 + \Delta x) - \psi(x^0) = \Delta\psi(x^0),$$

$$C\Delta z = A\Delta x, \quad \gamma\Delta z = \alpha\Delta x,$$

а отже, в деякому околі нуля

$$\Delta\psi(x^0) = A\Delta x + \alpha\Delta x,$$

причому $\alpha \to 0$, коли $\Delta x \to 0$.

Це означає, що функція $\psi(x) = f(x, y^0)$ диференційовна у точці z^0 і $\psi'(x^0) = f'_x(z^0) = A$.

Якщо ж покласти у рівності (11) $\Delta z = (0, \Delta y)$, то дістанемо:

$$\Delta f(z^0) = \Delta\varphi(y^0), \quad C\Delta z = B\Delta y, \quad \gamma\Delta z = \beta\Delta y,$$

а отже, в деякому околі нуля

$$\Delta\varphi(y^0) = A\Delta y + \beta\Delta y,$$

причому $\beta \to 0$, коли $\Delta y \to 0$. Звідси випливає диференційовність функції $\varphi(y) = f(x^0, y)$ і рівність $\varphi'(y^0) = f'_y(z^0) = B$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 5 (про зв'язок між повною та частинними похідними вектор-функції по вектор-змінних). *Якщо вектор-функція* $f(z) = f(x, y)$, *де* $z = (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots x_k, y_1, \ldots, y_l) = (x, y)$, *диференційовна у точці* $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$, *то вона має в цій точці і частинні похідні по вектор-змінних* x *та* y. *При цьому*

$$\frac{df(z^0)}{dz} = \left(\frac{\partial f(z^0)}{\partial x}, \frac{\partial f(z^0)}{\partial y}\right).$$

Продовжуючи відповідати на поставлене вище питання, зауважимо, що твердження, обернене до теореми 5, не має місця (див. пункт 3.1.2). Разом з тим в пункті 3.1.3 доведено теорему 2 про те, що неперервність у точці M_0 частинних похідних скалярної функції f по всіх її скалярних змінних є достатньою умовою для диференційовності даної функції у заданій точці.

Переконаємося, що це твердження зберігає силу для вектор-функції $f(z) = f(x, y)$ з векторними змінними x та y.

□ Припустимо, що в деякому околі точки $z^0 = (x^0, y^0)$ функція $f(z) = f(x, y)$ має частинні похідні $A(z) = f'_x(z)$ і $B(z) = f'_y(z)$, котрі є неперервними у точці z^0. Нагадаємо, що функції $A(z)$ та $B(z)$ набувають значень з просторів $\mathbb{MR}_m^k$ та $\mathbb{MR}_m^l$, відповідно (див. п. 3.1.5).

Оскільки в просторі матриць будь-якої розмірності збіжність рівносильна покоординатній збіжності, то в такому просторі і неперервність рівносильна покоординатній неперервності. Тому, поглянувши на рівність (10), зрозуміємо, що з неперервності частинних похідних f'_x та f'_y випливає неперервність похідної кожної компоненти функції $f = (f_1, \dots , f_m)$ по кожній елементарній змінній $x_1, \dots , x_k, y_1, \dots , y_l$.

Відтак, за теоремою 2 маємо диференційовність кожної скалярної функції $f_i(z)$ у точці z^0. Далі за теоремою 4 приходимо до диференційовності вектор-функції f. ■

Отже, правильна

Теорема 6 (про зв'язок між повною та частинними похідними вектор-функції по вектор-змінних). *Якщо вектор-функція* $f(z) = f(x,y)$, *де* $z = (z_1, \dots ,z_n) = (x_1, \dots x_k, y_1, \dots ,y_l) = (x,y)$, *має в деякому околі точки* $z^0 = (z_1^0, \dots ,z_n^0)$ *частинні похідні* $f'_x(z)$ *та* $f'_y(z)$, *котрі є неперервними функціями у точці* $z^0 = (z_1^0, \dots ,z_n^0)$, *то вона в цій точці диференційовна.*

Проведені міркування показують, що питання про диференційовність вектор-функції кількох змінних у багатьох випадках зводиться до відшукання частинних похідних скалярних функцій кількох змінних. При цьому кількість змінних суттєво не впливає на методи досліджень та висновки. Тому надалі, як правило, вважатимемо, що f є скалярною функцією двох або трьох змінних, тобто $w = f(M)$, $M = (x,y) \in E$, $w \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$ або $M = (x,y,z) \in E \subset \mathbb{R}^3$.

Приклад 7. Для функції $f = (xy^2z^3, x^2y - \ln z)$, визначеної на множині $E = \{(x,y,z)\colon z > 0\}$, маємо: $f_1 = xy^2z^3$, $f_2 = x^2y - \ln z$. Оскільки частинні похідні $(f_i)'_x$, $(f_i)'_y$, $(f_i)'_z$, $i \in \overline{1,2}$, неперервні на E, то функція f диференційовна на множині E. За теоремою 5 на множині E існують $f'_{(x,y)}$ і $f'_{(y,z)}$, причому за рівністю (10)

$$f'_{(x,y)} = \begin{pmatrix} (f_1)'_x & (f_1)'_y \\ (f_2)'_x & (f_2)'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2z^3 & 2xyz^3 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix},$$

$$f'_{(y,z)} = \begin{pmatrix} (f_1)'_y & (f_1)'_z \\ (f_2)'_y & (f_2)'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \\ x^2 & -1/z \end{pmatrix}.$$

3.1.8. Деякі поняття з теорії поля. Розглянемо насамперед так званий *диференціальний оператор набла*

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Визначимо спочатку цей оператор на множині скалярних функцій f, диференційовних у точці $M=(x,y,z)$, за допомогою рівності

$$\vec{\nabla}(f) = \vec{\nabla} f(M) := \frac{\partial f(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f(M)}{\partial z}\vec{k}.$$

Формально це множення вектора $\vec{\nabla}$ на скаляр $f(M)$. Отже,

$$\vec{\nabla} f(M) = \operatorname{grad} f(M) = f'(M) = \frac{d f(M)}{dM} \text{ — повна похідна,}$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial e} = f'(M)\cdot\vec{e} = \vec{\nabla} f(M)\cdot\vec{e} \text{ — похідна за напрямком.}$$

Визначимо тепер оператор набла на множині вектор-функцій

$$\vec{f}(M) = \big(f_1(M), f_2(M), f_3(M)\big),$$

диференційовних у точці $M=(x,y,z)$, за допомогою рівності

$$\vec{\nabla}(f) := \vec{\nabla}\cdot\vec{f}(M) = \frac{\partial f_1(M)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(M)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(M)}{\partial z}.$$

Формально це скалярний добуток векторів $\vec{\nabla}$ і $\vec{f}(M)$. Цей скалярний добуток називають *дивергенцією (розбіжністю)* вектор-функції f у точці M і позначають $\operatorname{div}\vec{f}(M)$. Отже,

$$\operatorname{div}\vec{f}(M) = \vec{\nabla}\cdot f(M) = \frac{\partial f_1(M)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(M)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(M)}{\partial z}.$$

Для двох векторів $\vec{\nabla}$ і $\vec{f}(M)$ крім їх скалярного добутку можна також знайти їх векторний добуток $[\,\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(M)\,]$, який називають *ротором вектор-функції $\vec{f}$ у точці M* і позначають $\operatorname{rot}\vec{f}(M)$. Отже,

$$\operatorname{rot}\vec{f}(M) := [\,\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(M)\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1(M) & f_2(M) & f_3(M) \end{vmatrix} :=$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial f_3(M)}{\partial y} - \frac{\partial f_2(M)}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial f_1(M)}{\partial z} - \frac{\partial f_3(M)}{\partial x}\right) +$$

$$+ \vec{k}\left(\frac{\partial f_2(M)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(M)}{\partial y}\right).$$

Безпосередньою перевіркою можна впевнитися, що мають місце наступні формули:

$$\operatorname{grad}(\vec{f}\cdot\vec{\varphi}) = [\,\vec{f}\cdot\operatorname{rot}\vec{\varphi}\,] + [\,\vec{\varphi}\cdot\operatorname{rot}\vec{f}\,] + \frac{\partial\vec{f}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial f},$$

якщо $\vec{f} = \vec{f}(M) \neq 0$ і $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(M) \neq 0$;

$$\operatorname{div}(\varphi\cdot\vec{f}) = \varphi\operatorname{div}\vec{f} + \vec{f}\operatorname{grad}\varphi,$$

якщо $\varphi = \varphi(M)$ – скалярна функція, а $\vec{f} = \vec{f}(M)$ – вектор-функція,

$$\operatorname{div}[\,\vec{f}\cdot\vec{\varphi}\,] = \vec{\varphi}\operatorname{rot}\vec{f} - \vec{f}\operatorname{rot}\vec{\varphi}.$$

Пропонуємо читачеві довести всі ці рівності.

Приклад 8. Перевіримо правильність останньої рівності для функцій $\vec{f} = (x,y,z)$ та $\vec{\varphi} = (z,y,x)$. Знайдемо

$$\vec{g} = [\,\vec{f},\vec{\varphi}\,] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ z & y & x \end{vmatrix} = (xy-yz, z^2-x^2, xy-yz).$$

Тоді $\operatorname{div}\vec{g} = g'_x + g'_y + g'_z = y + 0 - y = 0$. Далі, $\operatorname{rot}\vec{f} = (0-0, 0-0, 0-0) = \vec{0}$, $\operatorname{rot}\vec{\varphi} = (0-0, 1-1, 0-0) = \vec{0}$.

Отже, для вказаних функцій потрібна рівність виконується.

3.1.9. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо функція f диференційовна у точці M_0, то вона визначена у деякому околі цієї точки.
2. Функція f диференційовна у точці M_0, якщо вона неперервна у цій точці.
3. Якщо $f(x,y) - f(x_0,y_0) = A(x_0,y_0)(x-x_0) + B(x_0,y_0)(y-y_0) + \alpha(x,y)(x-x_0) + \beta(x,y)(y-y_0)\ \forall (x,y) \in O(x_0,y_0)$, то функція f диференційовна у точці $M_0 = (x_0,y_0)$.
4. Якщо функція f диференційовна у точці $M_0 = (x_0,y_0)$, то існують числа $A(x_0,y_0)$ і $B(x_0,y_0)$ такі, що
$$\frac{\Delta f(x_0,y_0) - A(x_0,y_0)(x-x_0) - B(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \to 0,$$
коли $(x,y) \to (x_0,y_0)$.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Якщо функція f диференційовна у точці $M_0 = (x_0,y_0)$, то вона має у цій точці неперервні частинні похідні $f'_x(x_0,y_0)$ і $f'_y(x_0,y_0)$.
7. Твердження, обернене до 6, є правильним.

8. Якщо $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$, коли $(x,y) \neq (0,0)$, і $f(0,0) = 0$, то функція f має частинні похідні, розривні у точці $(0,0)$, але диференційовна у цій точці.
9. Якщо функція f має у точці M_0 похідну за будь-яким напрямком $\vec{e}$, то f є неперервною функцією у точці M_0.
10. Якщо функція f має у точці $M_0 = (x_0, y_0)$ частинні похідні $f'_x(M_0)$ і $f'_y(M_0)$, то вона має у цій точці похідну за будь-яким напрямком $\vec{e}$.
11. Якщо $f(x,y) = \sqrt{|x \cdot y|}$, то функція f має у точці $(0,0)$ похідну за будь-яким напрямком $\vec{e}$.
12. Градієнт функції f у точці M_0 є повною похідною цієї функції у цій точці.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо функція f диференційовна у точці M_0, то вона має у цій точці єдину повну похідну.
2. Якщо f і φ — числові функції двох змінних, що визначені в околі точки $M_0 = (x_0, y_0)$, то
$$\Delta(f \pm \varphi)(M_0) = \Delta f(M_0) \pm \Delta\varphi(M_0),$$
$$\Delta(f \cdot \varphi)(M_0) = f(M_0) \cdot \Delta\varphi(M_0) + \varphi(M_0) \cdot \Delta f(M_0) + \Delta f(M_0)\Delta\varphi(M_0),$$
$$\Delta\left(\frac{f}{\varphi}\right)(M_0) = \frac{\varphi(M_0)\Delta f(M_0) - f(M_0)\Delta\varphi(M_0)}{\varphi(M_0)\varphi(M_0+\Delta M)}.$$
3. Якщо f і φ — числові функції, диференційовні у точці $M_0 = (x_0, y_0)$, то функції $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$ і f/φ диференційовні у точці M_0, причому
$$(f \pm \varphi)'(M_0) = f'(M_0) \pm \varphi'(M_0),$$
$$(f \cdot \varphi)'(M_0) = f'(M_0) \cdot \varphi(M_0) + \varphi'(M_0) \cdot f(M_0),$$
$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)'(M_0) = \frac{f'(M_0) \cdot \varphi(M_0) - \varphi'(M_0) \cdot f(M_0)}{\varphi^2(M_0)} \quad (\varphi(M_0) \neq 0).$$

3.2. Диференціювання у нормованому просторі. Диференціали Фреше і Гато

У даному підрозділі означення диференційовної вектор-функції узагальнюється на випадок функцій, області визначення і множини значень яких лежать у певних нормованих просторах. Вводяться поняття диференціалів Фреше і Гато для таких функцій, зокрема для функцій кількох змінних.

3.2.1. Узагальнення означення диференційовної вектор-функції. Повний диференціал. Щоб перенести поняття диференційовної вектор-функції $f\colon E \to Y$, де $E \subset X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, на випадок, коли X та Y є довільними нормованими просторами, проаналізуємо спочатку введене в п. 3.1.5 означення диференційовності. А саме, за п. 3.1.5 функція f диференційовна у точці M_0, якщо її приріст $\Delta f(M_0) = f(M_0 + \Delta M) - f(M_0)$ у точці M_0 можна подати у вигляді

$$\Delta f(M_0) = A\Delta M + \alpha(\Delta M)\Delta M \ \forall \Delta M \in O(0), \tag{1}$$

де A та α — деякі $m \times n$-матриці, причому A не залежить від ΔM, а $\alpha(\Delta M) \to 0$, коли $\Delta M \to 0$.

Оскільки у довільному нормованому просторі Y немає операції множення векторів, а тим більше матриці на вектор, подивимося на добутки $A\Delta M$ та $\alpha\Delta M$ з іншого боку.

По-перше, вираз $A\Delta M$ (матриця A) однозначно задає лінійний оператор $A^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, що має вигляд $A^*(\Delta M) = A\Delta M$ (див. теорему 2 п. 2.1.4). Отже, у рівності (1) можна замінити добуток $A\Delta M$ на значення лінійного оператора $A^*(\Delta M)$. Більше того, нічого не зміниться, якщо вимагати, щоб оператор A^* був неперервним (див. приклад 4.1) п. 2.2.5).

Цей оператор має спеціальну назву — *диференціал*, або *повний диференціал функції f у точці M_0* і позначення $df(M_0) = A^*$ або, детальніше,

$$d_{\Delta M} f(M_0) = A^*(\Delta M) = A\Delta M = f'(M_0)\Delta M. \tag{2}$$

Часто кажуть, що *диференціал функції $df(M_0)$ є лінійною частиною її приросту $\Delta f(M_0)$.*

По-друге, подивимось на добуток $\gamma(\Delta M) := \alpha(\Delta M)\Delta M$ як на похибку наближення приросту $\Delta f(M_0)$ оператором A^*. Для цього доведемо спочатку одне твердження.

Лема 1 (про норму добутку матриць). *Якщо $A \in \mathbb{MR}_m^n$, $B \in \mathbb{MR}_n^k$, то $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.*

☐ Для доведення цієї леми позначимо $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $C = AB = (c_{i,j})$. Введемо також позначення a_i для векторів-рядків матриці A та b^j для вектор-стовпчиків матриці B.

За означенням добутку матриць кожен елемент $c_{i,j}$ матриці C є скалярним добутком векторів a_i та b^j. Беручи до уваги означення норми матриці, дане на початку п. 3.1.5, та нерівність Коші – Буняковського (теорема 3 п. 1.7.3), дістанемо:

$$\|AB\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}(a_i, b^j)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\|a_i\|^2\|b^j\|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|a_i\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{k}\|b^j\|^2} = \|A\| \cdot \|B\|. \blacksquare$$

За лемою 1 дістаємо $\|\gamma(\Delta M)\| = \|\alpha(\Delta M)\Delta M\| \leqslant \|\alpha(\Delta M)\| \cdot \|\Delta M\|$, звідки $\|\gamma(\Delta M)\|/\|\Delta M\| = \|\alpha(\Delta M)\| \to 0$, або $\gamma(\Delta M) = o(\Delta M)$, коли $\Delta M \to 0$. Це вказує на досить високий ступінь наближеня приросту функції Δf її диференціалом df. У цьому розумінні диференціал називають *головною частиною приросту функції*.

З'ясуємо, *чи кожну функцію* $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, яка задовольняє умову* $\gamma(\Delta M) = o(\Delta M)$*, коли* $\Delta M \to 0$*, можна представити як*

$$\gamma(\Delta M) = \alpha(\Delta M)\Delta M,$$

де $\alpha(\Delta M)$ *–* $m \times n$*-матриця, така, що* $\alpha(\Delta M) \to 0$ *при* $\Delta M \to 0$*.*

$\square$ Позначивши $\beta(\Delta M) = \gamma(\Delta)/\|\Delta M\|$, дістанемо, що

$$\beta(\Delta M) \to 0 \text{ при } \Delta M \to 0,\ \gamma(\Delta M) = \beta(\Delta M)\|\Delta M\|.$$

Згадуючи, що $\|\Delta M\| = \sqrt{\Delta M_1^2 + \ldots + \Delta M_n^2}$, можемо розписати

$$\gamma(\Delta M) = \beta(\Delta M) \cdot (\Delta M_1^2 + \ldots + \Delta M_n^2)/\|\Delta M\| =$$

$$= \beta(\Delta M)\frac{\Delta M_1}{\|\Delta M\|}\Delta M_1 + \ldots + \beta(\Delta M)\frac{\Delta M_n}{\|\Delta M\|}\Delta M_n =$$

$$= \alpha_1(\Delta M)\Delta M_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta M)\Delta M_n,$$

де $\alpha_j(\Delta M) = \beta(\Delta M)\frac{\Delta M_j}{\|\Delta M\|}$ $\forall j \in \overline{1,n}$. При цьому

$$\|\alpha_j(\Delta M)\| \leqslant \|\beta(\Delta M)\| \cdot \frac{|\Delta M_j|}{\|\Delta M\|} \leqslant \|\beta(\Delta M)\| \to 0 \ (\Delta M \to 0) \ \forall j \in \overline{1,n}.$$

Позначаючи $\alpha_j = (\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{mj})$, $j \in \overline{1,n}$, утворимо з координат векторів α_j стовпці матриці $\alpha = (\alpha_{ij})$, $i \in \overline{1,m}$, $j \in \overline{1,n}$. Після цього й дістанемо потрібне представлення $\gamma(\Delta M) = \alpha(\Delta M)\Delta M$, причому $\alpha(\Delta M) \to 0$ $(\Delta M \to 0)$. $\blacksquare$

Таким чином, проаналізувавши означення диференційовної вектор-функції, можемо сформулювати його узагальнення. Вектор-функція $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ називається *диференційовною у точці* M_0, якщо існує неперервний лінійний оператор $A^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такий, що

$$\Delta f(M_0) = A^*(\Delta M) + \gamma(\Delta M), \tag{3}$$

причому $\gamma(\Delta M) = o(\Delta M)$, тобто $\|\gamma(\Delta M)\|/\|\Delta M\| \to 0$, коли $\Delta M \to 0$.

Звідси видно, що суть диференційовності функції полягає у близькості приросту цієї функції до деякої лінійної функції з точністю до $o(\Delta M)$. Саме цим зумовлені важливі "хороші" властивості диференційовних функцій.

Зрозуміло, що для вказаних вектор-функцій останнє означення диференційовності рівносильне введеному раніше. Проте воно застосовне і для функцій f, область визначення і множина значень яких лежать у довільних нормованих просторах. У цьому і полягає узагальнення.

З проведених вище міркувань зрозуміло, що коли A — матриця з рівності (1), а A^* — оператор з рівності (3), то

$$A^*(\Delta M) = A\Delta M = f'(M_0)\Delta M.$$

Тому оператор A^* у рівності (3) єдиний і він є повним диференціалом функції f у точці M_0.

Іноді оператор A^* ототожнюють з $f'(M_0)$ і називають похідною (повною) функції f у точці M_0, а значення цього оператора $A^*(\Delta M)$ при фіксованому ΔM називають диференціалом (повним) функції f у точці M_0.

У випадку, коли f є числовою функцією, наприклад, $f = f(x,y)$, її повний диференціал у точці $M_0 = (x_0,y_0)$ частіше записують у розгорнутому, координатному вигляді:

$$\begin{aligned} df(x_0,y_0) &= \big(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\big)(\Delta x, \Delta y) = \\ &= f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y. \end{aligned} \tag{4}$$

Зауваження. У позначенні диференціала часто опускають не тільки аргумент ΔM, а й точку M_0 (якщо вона зрозуміла з контексту або є довільною точкою M), а замість f пишуть вираз, який задає функцію f.

Приклад 1. Запис $d(x^2+y^3)$ позначає диференціал $df(M) = df(x,y)$ функції $f(x,y) = x^2+y^3$ у точці $M = (x,y)$. За достатньою умовою диференційовності цей диференціал існує в кожній точці $M \in \mathbb{R}^2$. За формулою (4) знаходимо $d(x^2+y^3) = 2x\Delta x + 3y^2\Delta y$.

На практиці диференціали скалярних функцій іноді використовують для наближених обчислень. Підставою для цього є рівність (3), яку можна переписати як

$$\Delta f(M_0) = d f(M_0) + o(\Delta M), \text{ коли } \Delta M \to 0.$$

Звідси випливає формула $\Delta f(M_0) \approx d f(M_0)$, коли $\Delta M \approx 0$, або

$$f(M_0 + \Delta M) \approx f(M_0) + d_{\Delta M} f(M_0), \text{ коли } \Delta M \approx 0. \qquad (5)$$

Приклад 2. Обчислимо наближено $\ln(0,98^2 + 0,01^3)$, користуючись формулою (5). Для цього введемо у розгляд функцію $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$ і точку $M = (0,98; 0,01)$, яка близька до точки $M_0 = (1,0)$. При цьому $\Delta M = M - M_0 = (-0,02; 0,01)$, а $\ln(0,98^2 + 0,01^3) = f(M_0 + \Delta M)$.

Знаходимо частинні похідні $f'_x = \frac{2x}{x^2+y^3}$, $f'_y = \frac{3y^2}{x^2+y^3}$, які визначені й неперервні на множині $D(f) = \{(x,y)\colon x^2 + y^3 > 0\}$. Тому у кожній точці $(x,y) \in D(f)$ функція f диференційовна і її диференціал можна обчислити за формулою (4):

$$d f(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y^3}\,\Delta x + \frac{3y^2}{x^2 + y^3}\,\Delta y.$$

При заданому $\Delta M = (\Delta x, \Delta y)$ і в заданій точці $M_0 = (x_0, y_0)$ маємо: $f(M_0) = \ln(1^2 + 0^3) = 0$, а

$$d_{\Delta M} f(M_0) \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 0^3} \cdot (-0,02) + \frac{3 \cdot 0^2}{1^2 + 0^3} \cdot 0,01 = -0,04.$$

Отже, за формулою (5) $\ln(0,98^2 + 0,01^3) \approx -0,04$ (що збігається із значенням, обчисленим на калькуляторі).

3.2.2. Геометричний зміст повного диференціала. Визначимо геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $z \in \mathbb{R}$, графіком якої є деяка поверхня P у просторі $\mathbb{R}^3$. Припустимо, що ця функція f є диференційовною у точці $M_0 = (x_0,y_0) \in D$. Тоді $f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx d f(M_0)$, а $dz = d f(M_0) = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0)$ і у зв'язку з цим розглянемо площину

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0). \qquad (6)$$

Нехай крива Γ визначається рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in O(t_0), \\ z = z(t), \end{cases}$

причому $\exists x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$, $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ і $z(t) = f(x(t),y(t))$ $\forall t \in O(t_0)$. Це означає, що крива Γ лежить на поверхні P і проходить через точку $(x(t_0),y(t_0),z(t_0)) = A_0$.

Припускаючи, що $x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0) > 0$ дістанемо, що крива Γ має у точці A_0 дотичний вектор $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$, а пряма

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{7}$$

є дотичною до кривої Γ у точці A_0. Таку дотичну до деякої кривої $\Gamma \subset P$ у точці $A_0 \in P$ природно назвати *дотичною прямою до поверхні* P *у точці* A_0 (рис. 19).

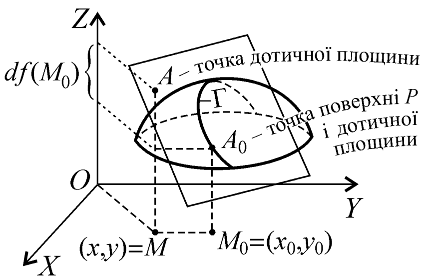

Рис. 19

Позначаючи кожне відношення у (7) як τ, дістанемо параметричні рівняння цієї дотичної:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)\tau, \\ y = y_0 + y'(t_0)\tau, \\ z = z_0 + z'(t_0)\tau, \\ \qquad \tau \in (-\infty;+\infty). \end{cases}$$

Підставляючи це у (6) і враховуючи, що $f(x_0,y_0) = z_0$, маємо

$$z'(t_0)\tau = f'_x(M_0)\cdot x'(t_0)\cdot\tau + f'_y(M_0)\cdot y'(t_0)\cdot\tau. \tag{8}$$

З іншого боку, $z(t) = f(x(t),y(t))$ і за теоремою 1

$$z'(t_0) = f'_x(M_0)\cdot x'(t_0) + f'_y(M_0)\cdot y'(t_0),$$

а тому рівність (8) є тотожністю.

Отже, знайдена дотична пряма до поверхні P у точці A_0 лежить у площині (6). Враховуючи довільність цієї дотичної, природно назвати площину (6) *дотичною площиною до поверхні* $z = f(x,y)$ у точці $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Вона містить усі дотичні прямі до поверхні P у точці A_0.

Оскільки ліва частина рівняння (6) є повним диференціалом функції f у точці M_0, то звідси випливає геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних: $df(M_0)$ *є приростом аплікати дотичної площини до поверхні* $z = f(x,y)$ *у точці* $A_0 = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ (див. рис. 19).

Зауважимо, що рівність (6) можна записати у вигляді

$$f'_x(M_0)(x-x_0) + f'_y(M_0)(y-y_0) + (-1)\cdot(z-z_0) = 0,$$

а ліва частина останньої рівності є скалярним добутком векторів $(f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1)$ і $(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, другий з яких лежить у дотичній площині (6). Тому дані вектори ортогональні (їх скалярний добуток рівний нулеві), тобто вектор $(f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1)$ є ортогональним до площини (6). Звідси випливає, що пряма

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

перпендикулярна до дотичної площини (6), і цю пряму називають *нормаллю до поверхні* $z = f(x,y)$ у точці $A_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що має місце

Теорема 1 (про дотичну площину і нормаль до поверхні). *Якщо функція f двох змінних диференційовна у точці (x_0,y_0), то поверхня, яка є графіком цієї функції, має у точці $A_0 = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ дотичну площину, рівняння якої*

$$z - f(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

і нормаль, рівняння якої

$$\frac{x-x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}.$$

Приклад 3. Знайдемо дотичну площину і нормаль до графіка функції $f(x,y) = \ln(x^2+y^3)$ у точці $(1,0,0)$. У прикладі 2 показано, що ця функція f диференційовна у точці $M_0 = (1,0)$, і знайдено її частинні похідні у даній точці. Тоді за теоремою 1 можна записати рівняння шуканої дотичної площини: $z - 0 = 2(x-1) + 0\cdot y \Leftrightarrow z = 2x-2$ і нормалі: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$.

3.2.3. Диференційовність оператора. Диференціал Фреше. Друге означення диференційовності, яке базується на рівності (3), переноситься без змін на довільні оператори $f\colon E \to Y$, де $E \subset X$, а X та Y — нормовані простори. Оператор f називають *диференційовним у точці* x_0, якщо існує неперервний лінійний оператор $\Lambda\colon X \to Y$ такий, що приріст $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ оператора f у точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = \Lambda(\Delta x) + \gamma(\Delta x) \ \ \forall \Delta x \in O(0), \tag{9}$$

причому $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$, коли $\Delta x \to 0$.

Оператор Λ називають *диференціалом Фреше оператора f у точці* x_0 і позначають $\Lambda = df(x_0)$, або $\Lambda(\Delta x) = d_{\Delta x} f(x_0)$.

Зрозуміло, що диференціал Фреше вектор-функції є її повним диференціалом.

Іноді оператор Λ називають *похідною Фреше функції* f *у точці* x_0 і позначають $\Lambda = f'(x_0)$, а значення цього оператора $\Lambda(\Delta x)$ при фіксованому Δx називають *диференціалом Фреше функції* f *у точці* x_0 і позначають $\Lambda(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x = d_{\Delta x} f(x_0) = df(x_0)$.

Зауваження. Як і для числових функцій та вектор-функцій, в означенні диференційовного оператора передбачається, що цей оператор визначений у деякому околі точки x_0.

Оператор f називають *диференційовним на множині* E, якщо він диференційовний у кожній точці множини E.

Приклад 4. Задамо оператор $f\colon C[a;b] \to C[a;b]$ рівністю

$$f\big(x(t)\big) = x^2(t),\ t \in [a;b],\ \forall x \in C[a;b].$$

Знайдемо його приріст у довільній точці $x_0 = x_0(t)$:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \big(x_0(t)+\Delta x(t)\big)^2 - x_0^2(t) =$$

$$= 2x_0(t)\Delta x(t) + \Delta x^2(t)\ \ \forall \Delta x \in C[a;b].$$

Очевидно, оператор $\Lambda\big(\Delta x(t)\big) = 2x_0(t)\Delta x(t)$ лінійний. В силу нерівності

$$\|\Lambda(\Delta x)\| = \max_{t\in[a;b]} |2x_0(t)\Delta x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[a;b]} |2x_0(t)| \cdot \max_{t\in[a;b]} |\Delta x(t)| = \|2x_0\| \cdot \|\Delta x\| \to 0\ (\Delta x \to 0),$$

дістаємо неперервність оператора Λ в нулі, а отже, і на всьому просторі $C[a;b]$. Разом з цим функція $\gamma(\Delta x) = \Delta x^2$ така, що

$$\|\gamma(\Delta x)\|/\|\Delta x\| = \max_{t\in[a;b]} |\Delta x^2(t)|/\max_{t\in[a;b]} |\Delta x(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in[a;b]} |\Delta x(t)| = \|\Delta x\|,\ \text{ коли }\ \Delta x \neq 0.$$

Інакше кажучи, $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$, коли $\Delta x \to 0$.

Отже, заданий оператор f диференційовний у кожній точці $x_0 \in C[a;b]$ і має в ній диференціал Фреше $df(x_0) = 2x_0\Delta x$.

З'ясуємо питання єдиності диференціала Фреше.

☐ Припустимо, що оператор f має у точці x_0 два диференціали Фреше: $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$. Тоді мають місце рівності

$$\Delta f(x_0) = \Lambda_i(\Delta x) + \gamma_i(\Delta x),\ \Delta x \in O(0),\ i \in \overline{1,2},$$

де $\gamma_i(\Delta x) = o(\Delta x)$, коли $\Delta x \to 0$, $i \in \overline{1,2}$. Звідси випливає, що

$$\Lambda(\Delta x) := \Lambda_1(\Delta x) - \Lambda_2(\Delta x) = \gamma_2(\Delta x) - \gamma_1(\Delta x) = o(\Delta x)\ \ (\Delta x \to 0).$$

Оскільки взято $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$, то $\Lambda \neq 0$, і тому $\exists x_*\colon \Lambda(x_*) \neq 0$. З умови

$\Lambda(\Delta x) = o(\Delta x)$, коли $\Delta x \to 0$, і того, що $tx_* \to 0$, коли $\mathbb{R} \ni t \to 0$, випливає, що $\|\Lambda(tx_*)\|/\|tx_*\| \to 0$ при $t \to 0$. Проте це суперечить тому, що $\|\Lambda(tx_*)\|/\|tx_*\| = \|\Lambda(x_*)\|/\|x_*\| \neq 0 \; \forall t \neq 0$ (в силу лінійності оператора Λ і третьої аксіоми норми).

Отже, припущення, що диференційовний у точці x_0 оператор f має в цій точці два різних диференціали Фреше, неправильне. ■

Таким чином, правильна

Теорема 2 (про єдиність диференціала Фреше). *Диференційовний у точці x_0 оператор f має у цій точці єдиний диференціал Фреше $df(x_0)$.*

Наслідок 1 (про диференціал Фреше лінійного оператора). *Неперервний лінійний оператор $f\colon X \to Y$ диференційовний у кожній точці $x_0 \in X$, причому $df(x_0) = f \; \forall x_0 \in X$.*

□ Справді, для неперервного лінійного оператора f рівність (9) набуває вигляду $\Delta f(x_0) = f(\Delta x) + 0 \;\; \forall \Delta x \in X$. ■

Якщо при доведенні теореми 2 неперервність оператора $df(x_0) = \Lambda$ не мала значення, то в наступному твердженні вона грає вирішальну роль.

Теорема 3 (про необхідну умову диференційовності оператора). *Якщо оператор f диференційовний у точці x_0, то він і неперервний у цій точці.*

Доведення цієї теореми залишаємо читачеві.

3.2.4. Похідна оператора за вектором. Слабка диференційовність і диференціал Гато. Ще один підхід до визначення поняття диференційовного оператора базується на понятті похідної за вектором.

Похідна оператора f у точці x_0 за вектором Δx визначається так само, як і для вектор-функції, — як границя

$$f'_{\Delta x}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,\Delta x) - f(x_0)}{t}.$$

Якщо ця похідна існує для будь-якого вектора $\Delta x \in X$ і є неперервним лінійним оператором $\Lambda^*(\Delta x)$, то оператор f називають *слабко диференційовним у точці* x_0, а оператор Λ^* називають *диференціалом Гато оператора* f і позначають $d^* f(x_0)$. Отже,

$$d^*_{\Delta x} f(x_0) = f'_{\Delta x}(x_0) = \Lambda^*(\Delta x), \;\; \Delta x \in X.$$

Приклад 5. Для оператора f з прикладу 4 у довільній точці $x_0 \in X = C[a;b]$ маємо:

$$f'_{\Delta x}(x_0) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{f(x_0+\alpha\Delta x) - f(x_0)}{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{(x_0+\alpha\Delta x)^2 - x_0^2}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} (2x_0\Delta x + \alpha\Delta x^2) = 2x_0\Delta x \ \forall \Delta x \in X,$$

оскільки $\|\alpha\Delta x^2\| = |\alpha| \cdot \|\Delta x^2\| \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Отже, оператор f у кожній точці $x_0 \in X$ слабко диференційовний і має в цій точці диференціал Гато $d^*_{\Delta x} f(x_0) = 2x_0\Delta x$.

Оператор f, розглянутий у прикладах 4, 5, виявився одночасно і диференційовним, і слабко диференційовним у довільній фіксованій точці x_0, а його диференціали Фреше і Гато у точці x_0 збіглися. Подивимося, чи випадково це.

$\square$ Припустимо, що даний оператор f є диференційовним у точці x_0 і для нього правильна рівність (9). Тоді для довільного $\Delta x \in X$

$$f(x_0 + t\,\Delta x) - f(x_0) = \Lambda(t\,\Delta x) + \gamma(t\,\Delta x),$$

коли t досить мале. Звідси, враховуючи лінійність оператора Λ і умову $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$, дістанемо, що

$$\exists f'_{\Delta x}(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\,\Delta x) - f(x_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\Lambda(t\,\Delta x) + \gamma(t\,\Delta x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \big(\Lambda(\Delta x) + \gamma(t\,\Delta x)/t\big) = \Lambda(\Delta x).$$

Оскільки оператор Λ лінійний і неперервний, то оператор f є слабко диференційовним у точці x_0, причому $d f(x_0) = \Lambda = d^* f(x_0)$. $\blacksquare$

Отже, має місце

Теорема 4 (про зв'язок між двома видами диференційовності). *Якщо оператор f диференційовний у точці x_0, то він і слабко диференційовний у цій точці, причому його диференціали Фреше і Гато у даній точці рівні між собою.*

Приклад 6. Нехай $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } y = x^2,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{для інших точок } (x,y). \end{cases}$ Тоді

$$f'_{\Delta M}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,\Delta x, t\,\Delta y) - f(0,0)}{t} = 0 \ \forall \Delta M \in \mathbb{R}^2.$$

Звідси випливає, що функція f слабко диференційовна у точці $(0,0)$, а її диференціал Гато $d^* f(0,0) = 0$, тобто є тотожним нулем.

Незважаючи на те, що функція f з прикладу 6 слабко диференційовна у точці $(0,0)$, вона не є неперервною у цій точці, а диференційовною і поготів. Таким чином, із слабкої диференційовності не випливає диференційовність.

3.2.5. Найпростіші властивості диференціала Фреше. Для того щоб отримати ці властивості, наведемо спочатку одне допоміжне твердження.

Лема 2 (про обмеженість відношення $\|\Delta f\|/\|\Delta x\|$). *Якщо оператор f диференційовний у точці x_0, то відношення $\|\Delta f(x_0)\|/\|\Delta x\|$ обмежене у деякому проколеному околі нуля.*

☐ Оскільки оператор f диференційовний у точці x_0, то для нього правильна рівність (9), з якої випливає, що

$$\frac{\|\Delta f(x_0)\|}{\|\Delta x\|} = \frac{\|\Lambda(\Delta x)+\gamma(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \leqslant \frac{\|\Lambda(\Delta x)\|+\|\gamma(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} =$$

$$= \left\|\Lambda\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right\| + \frac{\|\gamma(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|} \ \forall \Delta x \in O^*_\delta(0). \tag{10}$$

Оскільки оператор Λ неперервний і лінійний, то він обмежений у деякому околі нуля (теорема 4 п. 2.2.5), а відтак, і в будь-якому околі нуля. Зокрема, він обмежений на замкненій одиничній кулі $\overline{K_1} = \{x\colon \|x\| \leqslant 1\}$. Звідси випливає обмеженість величини $\left\|\Lambda\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\right\|$ на $X \setminus \{0\}$. Обмеженість відношення $\frac{\|\gamma(\Delta x)\|}{\|\Delta x\|}$ у деякому проколеному околі нуля $O^*_{\delta_1}(0)$, $\delta_1 \leqslant \delta$, безпосередньо випливає з умови $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, твердження леми 2 випливає з нерівності (10). ■

Припустимо, що оператори $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні у точці x_0, і з'ясуємо *питання про диференційовність операторів* 1) $kf(x)+$ $+lg(x)$, $k,l \in \mathbb{R}$; 2) $f(x)g(x)$, $g(x)$ *— функціонал;* 3) $f(x)/g(x)$, $g(x)$ *— функціонал,* $g(x_0) \neq 0$.

☐ Користуючись означенням диференційовності, запишемо:

$$\Delta f(x_0) = A(\Delta x)+\alpha(\Delta x),\ \ \Delta g(x_0) = B(\Delta x)+\beta(\Delta x)\ \ \forall \Delta x \in O(0), \tag{11}$$

де $A(\Delta x)$, $B(\Delta x)$ — неперервні лінійні оператори, а $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ і $\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. Тоді

$$1)\ \ \Delta(kf+lg)(x_0) = k\Delta f(x_0) + l\Delta g(x_0) =$$

$$= kA(\Delta x)+lB(\Delta x)+k\alpha(\Delta x)+l\beta(\Delta x) =$$

$$= C(\Delta x)+\gamma(\Delta x)\ \ \forall \Delta x \in O(0),$$

де $C(\Delta x) = kA(\Delta x) + lB(\Delta x)$ — неперервний лінійний оператор, а $\gamma(\Delta x) = k\alpha(\Delta x) + l\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, оператор $kf(x) + lg(x)$ диференційовний у точці x_0 і

$$d(kf + lg)(x_0) = kdf(x_0) + ldg(x_0). \tag{12}$$

2) Неважко показати, що

$$\Delta(fg) = g(x_0)\Delta f(x_0) + f(x_0)\Delta g(x_0) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0).$$

Звідси, використовуючи рівності (11), дістанемо:

$$\Delta(fg)(x_0) = g(x_0)\big(A(\Delta x) + \alpha(\Delta x)\big) +$$

$$+ f(x_0)\big(B(\Delta x) + \beta(\Delta x)\big) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0) =$$

$$= g(x_0)A(\Delta x) + f(x_0)B(\Delta x) +$$

$$+ g(x_0)\alpha(\Delta x) + f(x_0)\beta(\Delta x) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0) =$$

$$= C(\Delta x) + \gamma(\Delta x) \ \ \forall \Delta x \in O(0),$$

де $C(\Delta x) = g(x_0)A(\Delta x) + f(x_0)B(\Delta x)$ — неперервний лінійний оператор, а $\gamma(\Delta x) = f(x_0)\alpha(\Delta x) + g(x_0)\beta(\Delta x) + \Delta f(x_0)\Delta g(x_0)$.

При цьому

$$\frac{\gamma(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = f(x_0)\frac{\alpha(\Delta x)}{\|\Delta x\|} + g(x_0)\frac{\beta(\Delta x)}{\|\Delta x\|} + \Delta f(x_0)\frac{\Delta g(x_0)}{\|\Delta x\|} \to 0 \ (\Delta x \to 0),$$

оскільки $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$, $\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ за теоремою 3, а відношення $\Delta g(x_0)/\|\Delta x\|$ обмежене за лемою 2.

Отже, добуток $f(x)g(x)$ диференційовний у точці x_0 і

$$d(fg)(x_0) = g(x_0)df(x_0) + f(x_0)dg(x_0). \tag{13}$$

3.1) Дослідимо на диференційовність функціонал $\frac{1}{g(x)}$, $g(x_0) \neq 0$. Оскільки функціонал $g(x)$ диференційовний у точці x_0 (а отже, і неперервний у цій точці), а $g(x_0) \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ у деякому околі $O_{\delta_1}(x_0)$. Тоді функціонал $\frac{1}{g(x)}$ визначений у вказаному околі. Користуючись рівністю (11), дістанемо

$$\Delta\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = \frac{1}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{g(x_0)} =$$

$$= -\frac{\Delta g(x_0)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} = -\frac{B(\Delta x) + \beta(\Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)g(x_0)} =$$

$$= -\frac{B(\Delta x)}{g^2(\Delta x)} + B(\Delta x)\left(\frac{1}{g^2(x_0)} - \frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\right) - \frac{\beta(\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)} =$$
$$= C(\Delta x) + \gamma(\Delta x) \ \ \forall \Delta x \in O_{\delta_1}(0),$$

де $C(\Delta x) = -\frac{B(\Delta x)}{g^2(x_0)}$ — неперервний лінійний оператор, а

$$\gamma(\Delta x) = B(\Delta x)\left(\frac{1}{g^2(x_0)} - \frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\right) - \frac{\beta(\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}.$$

При цьому

$$\frac{\gamma(\Delta x)}{\|\Delta x\|} = B\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)\left(\frac{1}{g^2(x_0)} - \frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\right) -$$
$$- \frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\frac{\beta(\Delta x)}{\|\Delta x\|}.$$

В останній рівності множник $B\left(\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|}\right)$ обмежений (див. питання 19 п. 2.2.6), а $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Тому, враховуючи властивості 7, 8 границь п. 2.2.2 та умову $\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$, легко бачити, що $\gamma(\Delta x) = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Отже, функціонал $\frac{1}{g(x)}$ диференційовний у точці x_0 і

$$d\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) = -\frac{1}{g^2(x_0)}dg(x_0). \tag{14}$$

3.2) За доведеним у випадках 2) та 3.1) оператор $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ диференційовний у точці x_0 і

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = d\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(x_0) = \frac{1}{g(x_0)}df(x_0) + f(x_0)d\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) =$$
$$= \frac{1}{g(x_0)}df(x_0) - \frac{f(x_0)}{g^2(x_0)}dg(x_0),$$

або

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{g(x_0)df(x_0) - f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}. \ \blacksquare \tag{15}$$

Підведемо тепер підсумок у вигляді теореми.

Теорема 5 (про найпростіші властивості диференціала Фреше). *Якщо оператори $f(x)$ і $g(x)$ диференційовні у точці x_0, то в цій точці диференційовні також оператори $kf(x)+lg(x)$, (де $k,l\in\mathbb{R}$), $f(x)g(x)$ (де $g(x)$ — функціонал) і $f(x)/g(x)$ (де $g(x)$ —*

функціонал, $g(x_0) \neq 0$).

При цьому правильні рівності (12) − (15).

3.2.6. Диференційовність складеного оператора. Нехай задано оператори $f\colon E \to Z$, $E \subset Y$ та $\varphi\colon D \to E$, $D \subset X$, де X, Y, Z − нормовані простори. Тоді можна утворити складений оператор $\psi = f \circ \varphi$, який діє за правилом $\psi(t) = f(\varphi(t))$ $\forall t \in D$. Встановимо зв'язок між диференційовністю операторів f і φ та оператора ψ. Як і раніше, для простоти записів будемо позначати нульові елементи різних нормованих просторів одним і тим же символом 0, а їхні норми − як $\|\cdot\|$.

□ Припустимо, що оператор φ диференційовний у точці t_0, а оператор f диференційовний у відповідній точці $x_0 = \varphi(t_0)$. Тоді існують неперервні лінійні оператори $A\colon X \to Y$ та $B\colon Y \to Z$, для яких правильні рівності

$$\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)=A(\Delta t)+\alpha(\Delta t) \ \ \forall \Delta t \in O_\delta(0),$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=B(\Delta x)+\beta(\Delta x) \ \ \forall \Delta x \in O_\varepsilon(0),$$

де $\alpha(\Delta t)=o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, $\beta(\Delta x)=o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

Завдяки неперервності оператора φ у точці t_0 (що випливає з його диференційовності) можна вважати, що $\Delta\varphi(t_0) \in O_\varepsilon(0)$ $\forall \Delta t \in O_\delta(0)$. Тоді приріст $\Delta\psi(t_0)$ запишеться так:

$$\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)= f(\varphi(t_0+\Delta t))-f(\varphi(t_0))=$$

$$= f(x_0+\Delta\varphi(t_0))-f(x_0)=B(\Delta\varphi(t_0))+\beta(\Delta\varphi(t_0))=$$

$$=B(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))+\beta(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))=$$

$$=B(A(\Delta t))+B(\alpha(\Delta t))+\beta(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t)),$$

або

$$\Delta\psi(t_0)=C(\Delta t)+\gamma(\Delta t) \ \ \forall \Delta t \in O_\delta(0), \tag{16}$$

де $C(\Delta t)=B(A(\Delta t))$ − очевидно, неперервний лінійний оператор, а

$$\gamma(\Delta t)=B(\alpha(\Delta t))+\beta(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t)).$$

Для того щоб показати диференційовність оператора ψ у точці t_0, залишилось перевірити, чи виконується умова

$$\gamma(\Delta t)=o(\Delta t), \ \text{коли} \ \Delta t \to 0.$$

Оператор $\beta(\Delta x)$ як такий, що задовольняє умову $\beta(\Delta x)=o(\Delta x)$

при $\Delta x \to 0$, запишемо у вигляді

$$\beta(\Delta x) = \beta_1(\Delta x)\|\Delta x\|,$$

де $\beta_1(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і будемо вважати, що $\beta_1(0) = 0$.

Оцінимо $\|\gamma(\Delta t)\|$, використовуючи властивості 3), 4) норм:

$$\|\gamma(\Delta t)\| = \Big\|B(\alpha(\Delta t)) + \beta_1(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))\|A(\Delta t)+\alpha(\Delta t)\|\Big\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big\|B(\alpha(\Delta t))\Big\| + \Big\|\beta_1(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))\Big\|\Big(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t)\|\Big).$$

Звідси в силу лінійності операторів A, B випливає оцінка

$$\frac{\|\gamma(\Delta t)\|}{\|\Delta t\|} \leqslant \left\|B\left(\frac{\alpha(\Delta t)}{\|\Delta t\|}\right)\right\| + \Big\|\beta_1(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))\Big\| \times$$
$$\times \left(\left\|A\left(\frac{\Delta t}{\|\Delta t\|}\right)\right\| + \frac{\|\alpha(\Delta t)\|}{\|\Delta t\|}\right) \quad \forall \Delta t \in O^*_\delta(0). \tag{17}$$

Проаналізуємо усі компоненти правої частини нерівності (17). Оскільки B — лінійний і неперервний оператор, то

$$B(\Delta x) \to B(0) = 0, \text{ коли } \Delta x \to 0.$$

Тоді за властивістю 4 п. 2.2.5 та зауваженням до неї $\left\|B\left(\frac{\alpha(\Delta t)}{\|\Delta t\|}\right)\right\| \to 0$ при $\Delta t \to 0$ в силу умови $\alpha(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Так само, з неперервності A випливає, що $A(\Delta t) \to A(0) = 0$, коли $\Delta t \to 0$. Також $\alpha(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, що є наслідком умови $\alpha(\Delta t) = o(\Delta t)$. Тому, позаяк $\beta_1(\Delta x) \to \beta_1(0) = 0$ при $\Delta x \to 0$, то за властивістю 4 п. 2.2.2 та зауваженням до неї

$$\Big\|\beta_1(A(\Delta t)+\alpha(\Delta t))\Big\| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Далі. Норма $\left\|A\left(\frac{\Delta t}{\|\Delta t\|}\right)\right\|$ обмежена в силу лінійності оператора A (див. питання 19 п. 2.2.6), а $\|\alpha(\Delta t)\|/\|\Delta t\| \to 0$, коли $\Delta t \to 0$. Тож, за властивостям границь права частина нерівності (17) прямує до нуля, коли $\Delta t \to 0$.

Цим самим доведено, що $\gamma(\Delta t) = o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$, а оператор ψ, згідно з рівністю (16), дифернційовний у точці t_0, причому

$$d\psi(t_0) = C = B \circ A = df(x_0) \circ d\varphi(t_0). \ \blacksquare$$

Таким чином, правильна

Теорема 6 (про диференційовність складеного оператора). *Нехай оператор* $\varphi(t)$ *диференційовний у точці* t_0, *а оператор* $f(x)$ *диференційовний у точці* $x_0 = \varphi(t_0)$, *причому* $E(\varphi) \subset D(f)$.

Тоді складений оператор $f(\varphi(t))$ *диференційовний у точці* t_0, *причому*

$$d(f\circ\varphi)(t_0)=df(x_0)\circ d\varphi(t_0), \tag{18}$$

або

$$df(\varphi)(t_0)=d_{d\varphi(t_0)}f(x_0). \tag{18*}$$

3.2.7. Диференційовність композиції вектор-функцій. Нехай в умовах пункту 3.2.6 $X=\mathbb{R}^p$, $Y=\mathbb{R}^n$, $Z=\mathbb{R}^m$, тобто φ та f є вектор-функціями p та n змінних відповідно:

$$\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t_1,t_2,\dots,t_p)\\ \varphi_2(t_1,t_2,\dots,t_p)\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_n(t_1,t_2,\dots,t_p)\end{pmatrix},\quad f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ f_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \dots\dots\dots\dots\\ f_m(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{pmatrix}.$$

Тоді складена функція $f(\varphi(t))$ є вектор-функцією p змінних:

$$f(\varphi(t))=\begin{pmatrix}f_1(\varphi(t))\\ f_2(\varphi(t))\\ \dots\dots\\ f_m(\varphi(t))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(\varphi_1(t_1,\dots,t_p),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_p))\\ f_2(\varphi_1(t_1,\dots,t_p),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_p))\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_m(\varphi_1(t_1,\dots,t_p),\dots,\varphi_n(t_1,\dots,t_p))\end{pmatrix}.$$

За теоремою 6, якщо функція $\varphi(t)$ диференційовна у точці $t_0=$ $=(t_1^0,\dots,t_p^0)$, а функція $f(x)$ диференційовна у точці $\varphi(t_0)=x_0=$ $=(x_1^0,\dots,x_n^0)$, то складена функція $f(\varphi(t))$ диференційовна у точці t_0 і правильна рівність (18). Оскільки всі три функції диференційовні у відповідних точках, то крім диференціалів вони мають також повні похідні у цих точках. Згідно з рівністю (2)

$$d_{\Delta t}\varphi(t_0)=\varphi'(t_0)\Delta t,\ \ d_{\Delta x}f(x_0)=f'(x_0)\Delta x,$$

$$d_{\Delta t}(f(\varphi))(t_0)=(f(\varphi))'(t_0)\Delta t.$$

Співставляючи ці рівності з рівністю (18), дістанемо формулу

$$(f(\varphi))'(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0). \tag{19}$$

Детальніше, згідно з рівністю (9) п. 3.1.5, рівність (19) можна переписати як

$$(f(\varphi))'(t_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial \varphi_1(t_0)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(t_0)}{\partial t_p}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial \varphi_n(t_0)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(t_0)}{\partial t_p}\end{pmatrix}. \tag{20}$$

Якщо $p = n = m$, то для обчислення якобіана складеної функції $f \circ \varphi$ у точці t_0 дістаємо формулу

$$\frac{D(f \circ \varphi)}{Dt} = \frac{Df}{Dx} \cdot \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)},$$

або

$$J_{f\circ\varphi}(t_0) = J_f(x_0) \cdot J_\varphi(t_0). \qquad (21)$$

Зокрема, якщо функції f і φ взаємно обернені, то $f \circ \varphi = I$ — тотожна функція, тобто $I(t_1, \dots, t_n) = (t_1, \dots, t_n)$ і для неї

$$J_I(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \ \forall t_0 \in \mathbb{R}^3.$$

Тоді з рівності (21) дістаємо, що

$$J_f(x_0) J_{f^{-1}}(t_0) = J_{f\circ f^{-1}}(t_0) = J_I(t_0) = 1 \Rightarrow J_{f^{-1}}(t_0) = \frac{1}{J_f(x_0)},$$

або

$$\frac{Df^{-1}(t_1^0, \dots, t_n^0)}{D(t_1, \dots, t_n)} = \frac{1}{\frac{Df(x_1^0, \dots, x_n^0)}{D(x_1, \dots, x_n)}}.$$

Останнє співвідношення є узагальненням відомої формули похідної оберненої функції однієї змінної.

3.2.8. Диференційовність композиції скалярної функції кількох змінних і вектор-функції однієї змінної. Нехай в умовах пункту 3.2.7 $p = m = 1$, тобто

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots \varphi_n(t)), \ \ f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тоді складена функція $f(\varphi(t))$ є скалярною функцією однієї змінної:

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

Згідно з п. 3.2.7, якщо функція $\varphi(t)$ диференційовна у точці t_0 (а це має місце тоді й тільки тоді, коли всі функції $\varphi_k(t)$, $k \in \overline{1,n}$, диференційовні у точці t_0), а функція $f(x)$ диференційовна у точці $\varphi(t_0) = x_0 = (x_1^0, x_2^0 \dots, x_n^0)$, то функція $f(\varphi(t))$ диференційовна у точці t_0. При цьому з рівності (20) випливає, що

$$(f(\varphi))'(t_0) = \frac{df(\varphi)(t_0)}{dt} =$$

$$= \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{d\varphi_1(t_0)}{dt} + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \cdot \frac{d\varphi_n(t_0)}{dt}. \tag{22}$$

Зокрема, якщо функція $z(x,y)$ диференційовна у точці (x_0,y_0), а функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні у точці t_0, причому $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, то складена функція $z(t) = z(x(t),y(t))$ диференційовна у точці t_0 і

$$\frac{dz(t_0)}{dt} = \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot \frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot \frac{dy(t_0)}{dt}, \tag{23}$$

або, коротше,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \tag{24}$$

Приклад 7. Знайдемо похідну $z'(t)$ від суперпозиції функцій

$$z = \sin(x^2 y) \ \text{ і } \ x = \cos t,\ y = t^3.$$

Маємо: $z'_x = 2xy\cos(x^2y)$, $z'_y = x^2\cos(x^2y)$, $x' = -\sin t$, $y' = 3t^2$.

Тому за формулою (23)

$$z'(t) = 2xy\cos(x^2y)(-\sin t) + x^2\cos(x^2y)3t^2,$$

де $x = \cos t$, $y = t^3$.

3.2.9. Диференційовність композиції скалярної функції кількох змінних і вектор-функції кількох змінних. Нехай в умовах пункту 3.2.7 $m = 1$, тобто $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, а вектор-функція $\varphi(t)$ така, як і була. Тоді складена функція

$$f(\varphi(t)) = f(\varphi_1(t_1,\ldots,t_p),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_p)).$$

Припустимо, що функція $f(x)$ диференційовна в точці $\varphi(t_0) = x_0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$, а функція $\varphi(t)$ визначена в деякому околі точки $t_0 = (t_1^0,\ldots,t_p^0)$ і має в цій точці частинну похідну $\varphi'_{t_k}(t_0)$ при фіксованому $k \in \overline{1,p}$. Останнє припущення рівносильне одночасному існуванню частинних похідних $(\varphi_1)'_{t_k}(t_0)$, ..., $(\varphi_n)'_{t_k}(t_0)$.

Виникає питання про існування та обчислення частинної похідної $(f(\varphi))'_{t_k}(t_0)$.

□ Щоб відповісти на це питання, згадаємо, що за означенням частинної похідної

$$(f(\varphi))'_{t_k}(t_0) = g'(t_k^0),$$

де $g(t_k) = f(\varphi(t_1^0,\ldots,t_{k-1}^0,t_k,t_{k+1}^0,\ldots,t_p^0)) = f(\psi(t_k))$.

Так само, $\varphi'_{t_k}(t_0) = \psi'(t_k^0)$ — ця похідна існує за припущенням. Оскільки $\psi(t_k)$ — n-вимірна вектор-функція однієї змінної, диференційовна у точці t_k^0, то при дослідженні функції $f(\psi(t_k))$ ми опиняємося в умовах пункту 3.2.8. Тому можемо стверджувати, що існує $(f(\psi))'(t_k^0) = g'(t_k^0)$, причому

$$g'(t_k^0) = (f(\psi))'(t_k^0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{d\psi_1(t_k^0)}{dt_k} + \\ + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{d\psi_2(t_k^0)}{dt_k} + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \cdot \frac{d\psi_n(t_k^0)}{dt_k}.$$

Враховуючи, що $\frac{d\psi_i(t_k^0)}{dt_k} = \frac{\partial\varphi_i(x_0)}{\partial t_k}$ $\forall i \in \overline{1,n}$, остаточно прийдемо до існування $(f(\varphi))'_{t_k}(t_0)$ і рівності

$$\frac{\partial f(\varphi)(t_0)}{\partial t_k} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial\varphi_1(t_0)}{\partial t_k} + \\ + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial\varphi_2(t_0)}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial\varphi_n(t_0)}{\partial t_k}. \ \blacksquare \tag{24}$$

Зокрема, якщо функція $z(x,y)$ диференційовна у точці (x_0,y_0) а функції $x(u,v)$ та $y(u,v)$ визначені в околі точки (u_0,v_0) і мають частинні похідні $x'_u(u_0,v_0)$, $y'_u(u_0,v_0)$, то й складена функція $z(u,v) = z\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ має частинну похідну $z'_u(u_0,v_0)$, причому

$$\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial u} = \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u} + \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}. \tag{25}$$

Аналогічно, якщо існують частинні похідні $x'_v(u_0,v_0)$, $y'_v(u_0,v_0)$, то існує частинна похідна $z'_v(u_0,v_0)$, причому

$$\frac{\partial z(u_0,v_0)}{\partial v} = \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial v} + \frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial v}. \tag{26}$$

Коротко формули (25), (26) записують так:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \tag{28}$$

Приклад 8. Знайдемо частинні похідні $z'_u(u,v)$, $z'_v(u,v)$ від суперпозиції функцій $z = \sin(x^2y)$ і $x = \cos(u-v)$, $y = u/v$.

Скористаємося формулами (27), (28). Частинні похідні z'_x, z'_y знайдено у прикладі 7. Обчислюємо $x'_u = -\sin(u-v)$, $x'_v = \sin(u-v)$, $y'_u = 1/v$,

$y'_v = -u/v^2$. Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2xy\cos(x^2y)(-\sin(u-v)) + x^2\cos(x^2y)\frac{1}{v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2xy\cos(x^2y)\sin(u-v) + x^2\cos(x^2y)\left(-\frac{u}{v^2}\right),$$

де $x = \cos(u-v)$, $y = u/v$.

3.2.10. Інваріантність форми повного диференціала. На практиці часто потрібно обчислити повний диференціал вектор-функції $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ не в якій-небудь одній точці x_0, а у довільній точці x, в якій функція f диференційовна. Такий диференціал уже має позначення $df(x)$, у якому символ f позначає задану функцію, а x — точку, в якій обчислюється диференціал. Проте, у випадку, коли функція f задається виразом $f(x)$, під знаком диференціала пишуть одразу цей вираз, вважаючи, що він містить інформацію і про функцію, і про точку (див. приклад 1). Згідно з формулами (2) і (4)

$$df(x) = f'(x)\Delta x \tag{29}$$

для вектор-функції f, а якщо f — скалярна функція, то

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_1 +$$
$$+ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_2 + \ldots + f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Delta x_n. \tag{30}$$

При зробленій домовленості з рівностей (29), (30) дістанемо:

$$dx = \Delta x,\ \ dx_1 = \Delta x_1,\ dx_2 = \Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n = \Delta x_n.$$

Тоді рівності (29), (30) можна переписати так:

$$df(x) = f'(x)\,dx \tag{31}$$

для вектор-функції f,

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'_{x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 +$$
$$+ f'_{x_2}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + f'_{x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n. \tag{32}$$

для скалярної функції f.

Зокрема, для функції двох змінних $f(x,y)$

$$df(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy. \tag{33}$$

Враховуючи рівність (9) п. 3.1.6 та рівність (29), для вектор-функції $f = (f_1, \ldots, f_n)$ дістанемо ще одне представлення диференціала:

$$d\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \dots \\ f_n'(x) \end{pmatrix} \Delta x =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1'(x)\,\Delta x \\ \dots \\ f_n'(x)\,\Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\,f_1(x) \\ \dots \\ d\,f_n(x) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Виявляється, що формули (31) — (33) мають одну перевагу над формулами (29), (30) і (4).

□ Припустимо, що вектор-функція $f(x)$ диференційовна на множині E, а вектор-функція $\varphi(t)$ диференційовна на множині D, причому $\varphi(D) \subset E$. Тоді за теоремою 6 на множині E буде диференційовною складена функція $f(\varphi(t))$. Застосуємо до неї рівності (31), (19) і знову (31):

$$d\,f(\varphi(t)) = (\,f(\varphi))'(t)\,dt =$$

$$= f'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = f'(\varphi(t))\,d\varphi(t).$$

Цебто рівність (31) залишилась правильною після заміни в ній x на $\varphi(t)$. Зокрема, якщо в останній рівності $f = f(x,y)$ — числова функція, а $\varphi = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$, то

$$d\,f\big(x(u,v),y(u,v)\big) = f'\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,d\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= \Big(f_x'\big(x(u,v),y(u,v)\big),\, f_y'\big(x(u,v),y(u,v)\big)\Big)\begin{pmatrix} dx(u,v) \\ dy(u,v) \end{pmatrix} =$$

$$= f_x'\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,dx(u,v) + f_y'\big(x(u,v),y(u,v)\big)\,dy(u,v).$$

Бачимо, що рівність (33) залишається правильною після заміни x та y на $x(u,v)$ та $y(u,v)$, відповідно.

Такий самий ефект має місце і для рівності (32). ■

Отже, має місце

Теорема 7 (про інваріантність форми повного диференціала). 1. *Нехай вектор-функція $f(x)$ диференційовна на множині E, а вектор-функція $\varphi(t)$ диференційовна на множині D, причому $\varphi(D) \subset E$. Тоді рівність* (31) *залишиться правильною після заміни x на $\varphi(t)$.*

2. *Якщо скалярна функція* $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *диференційовна на множині* E, *а скалярні функції* $\varphi_1(t_1,t_2,\ldots,t_p)$, $\varphi_2(t_1,t_2,\ldots,t_p)$, $\ldots$, $\varphi_n(t_1,t_2,\ldots,t_p)$ *диференційовні на множині* D, *причому* $\bigl(\varphi_1(D),\varphi_2(D),\ldots,\varphi_n(D)\bigr) \subset E$, *то рівність* (32) *залишиться правильною після заміни кожної змінної* x_i, $i \in \overline{1,n}$, *на функцію* $\varphi_i(t_1,t_2,\ldots,t_p)$.

Інваріантна властивість диференціала, як і його найпростіші властивості, часто застосовуються на практиці.

Приклад 9. Обчислимо диференціал $d\arcsin y\sqrt{\frac{x}{z}}$. Маємо:

$$d\arcsin y\sqrt{\frac{x}{z}} \overset{(31)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-y^2\frac{x}{z}}}\,dy\sqrt{\frac{x}{z}}, \quad dy\sqrt{\frac{x}{z}} \overset{(13)}{=} \sqrt{\frac{x}{z}}\,dy + y\,d\sqrt{\frac{x}{z}},$$

$$d\sqrt{\frac{x}{z}} \overset{(31)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}}\,d\frac{z}{x} \overset{(15)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{x}}\,\frac{z\,dx - x\,dz}{z^2},$$

де над знаками рівності вказані номери використовуваних формул. Отже,

$$d\arcsin y\sqrt{\frac{x}{z}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2\frac{x}{z}}}\left(\sqrt{\frac{x}{z}}\,dy + \frac{y\,dx}{2\sqrt{xz}} - \frac{y\sqrt{x}}{2z\sqrt{z}}\,dz\right).$$

3.2.11. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо функція $f(x,y)$ має частинні похідні у точці (x_0,y_0), то вона має у цій точці повний диференціал.
2. Твердження, обернене до твердження 1, є правильним.
3. Функція $f(x,y)$ має у точці (x_0,y_0) повний диференціал, якщо f'_x і f'_y неперервні у цій точці.
4. Якщо для деякої точки (x_0,y_0) $\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y,z) - f(x_0,y_0) = = df(x_0,y_0)\ \forall (x,y)$, то $f(x,y) = ax + by + c\ \forall (x,y)$.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Пряма є дотичною до даної поверхні у точці A_0, якщо вона є дотичною до будь-якої кривої, що лежить на поверхні і проходить через точку A_0.
7. Дотична площина до даної поверхні має з цією поверхнею лише одну спільну точку.
8. Нормаль до поверхні у точці A_0 існує тоді й тільки тоді, коли поверхня має у цій точці дотичну площину.
9. Для вектор-функції f похідна $f'(M_0)$ — це матриця лінійного оператора $df(M_0)$.

10. Якщо оператор f диференційовний на множині E, то множина E відкрита.
11. Якщо складений оператор $f(\varphi(t))$, $t \in O(t_0)$, є диференційовним у точці t_0, то внутрішній і зовнішній оператори диференційовні відповідно у точках t_0 і $x_0 = \varphi(t_0)$.
12. Функція Діріхле $D(x)$ та композиція $D \circ D$ є недиференційовними функціями у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.
13. Для заданого оператора f і заданої точки x_0 диференціал Гато $d^* f(x_0)$ може бути не єдиним.
14. Якщо оператор f слабко диференційовний у точці x_0, то він є неперервним у цій точці.
15. Множники у формулі (19) можна поміняти місцями.
16. Теореми 5, 6 не можна застосувати для функцій однієї змінної.
17. Якщо вектор-функція f має обернену функцію f^{-1} в околі точки M_0 і диференційовна у цій точці, то обернена функція є диференційовною у точці $f(M_0)$.
18. Диференціал, записаний у формі (29), має інваріантну властивість.
19. Приріст довільного оператора $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ має інваріантну властивість.
20. Без формули (23) неможливо обчислити похідну функції $z(t) = z(x(t), y(t))$.
21. Формулу (24) можна отримати з (20) за умови диференційовності функції $\varphi(t)$ у точці t_0.
22. Найпростіші властивості диференціала скалярної функції випливають з інваріантної властивості повного диференціала.

II. Довести дані твердження.

1. Функція $f(M) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{коли } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{коли } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ має скінченні частинні похідні у точці $M_0 = (0,0)$, функція $M = M(t) = (x(t), y(t)) = (t,t)$ диференційовна у точці $t_0 = 0$, але $f(M(t))'|_{t=0} \neq f'_x(M_0) \cdot x'(t_0) + f'_y(M_0) \cdot y'(t_0)$.
2. Функція $f(M) = f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{5}{3}} y}{x^2+y^2}, & \text{коли } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{коли } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ має скінченні частинні похідні у точці $M_0 = (0,0)$, функція $M = M(t) =$

$= (x(t), y(t))$, де $x(t) = t$, $y(t) = \begin{cases} t^{\frac{4}{3}} \sin\frac{1}{t}, & \text{коли } t \neq 0, \\ 0, & \text{коли } t = 0, \end{cases}$ диференційовна у точці $t_0 = 0$, але функція $u = f(M(t))$ недиференційовна у точці $t_0 = 0$.

3.3. Похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора для функції кількох змінних

У даному підрозділі поняття похідних і диференціалів вищих порядків та формула Тейлора для функцій однієї змінної узагальнюються на випадок скалярних функцій кількох змінних.

3.3.1. Частинні похідні вищих порядків. Нехай скалярна функція $f(x,y,z)$ має в кожній точці околу $O(M_0)$ точки M_0 частинні похідні f'_x, f'_y, f'_z. Ці частинні похідні як функції змінних x, y, z можуть мати частинні похідні по вказаних змінних у точці M_0, які називають *частинними похідними другого порядку функції* f *у точці* M_0 і позначають:

$$f''_{xx}(M_0) := f''_{x^2}(M_0) := (f'_x)'_x(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial x}$$

(читається: "еф два штрихи по ікс-ікс" або "по ікс квадрат" або "де два еф по де ікс квадрат у точці M_0");

$$f''_{xy}(M_0) := (f'_x)'_y(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}; \quad f''_{xz}(M_0) := (f'_x)'_z(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial z}$$

(читається: "еф два штрихи по ікс-ігрек" або "де два еф по де ікс де ігрек у точці M_0" і аналогічно для $f''_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$);

$$f''_{yx}(M_0) := (f'_y)'_x(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial x}; \quad f''_{yz}(M_0) := (f'_y)'_z(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial z};$$

$$f''_{yy}(M_0) := f''_{y^2}(M_0) := (f'_y)'_y(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0))}{\partial y^2} =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y \partial y};$$

$$f''_{zx}(M_0) := (f'_z)'_x(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial x}; \quad f''_{zy}(M_0) := (f'_z)'_y(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial y};$$

$$f''_{zz}(M_0) := f''_{z^2}(M_0) := (f'_z)'_z(M_0) =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z^2} =: \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial z \partial z}.$$

Якщо всі частинні похідні f'_x, f'_y та f'_z визначені в деякому околі точки M_0 і є диференційовними функціями у точці M_0, то функцію

$f(x,y,z)$ називають *двічі диференційовною у точці* M_0. За теоремою 1 п. 3.1.2 така функція має у точці M_0 всі частинні похідні другого порядку. З іншого боку, за теоремою 2 п. 3.1.3 існування всіх частинних похідних другого порядку у деякому околі точки M_0 та неперервність їх у точці M_0 гарантує двічі диференційовність функції $f(x,y,z)$ у точці M_0.

Так само, якщо частинні похідні другого порядку існують в околі $O(M_0)$ точки M_0, а в самій точці M_0 мають, у свою чергу, частинні похідні по x, по y чи по z, то останні називаються *частинними похідними третього порядку функції f у точці* M_0 і позначаються

$$f'''_{xxx}(M) = f'''_{x^3}(M) := (f''_{x^2})'_x(M) = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial x \partial x};$$

$$f'''_{xyx}(M) := (f''_{xy})'_x(M) = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial y \partial x}; \quad f'''_{xzx}(M) := (f''_{xz})'_x(M) = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial z \partial x};$$

$$f'''_{xxy}(M) = f'''_{x^2 y}(M) := (f''_{x^2})'_y(M) = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(M)}{\partial x \partial x \partial y}; \ \ldots .$$

Методом математичної індукції визначаються *частинні похідні функції f* довільного *порядку $n \in \mathbb{N}$*. Їх називають ще *n-ими частинними похідними функції f у точці* M_0. Зокрема,

$$f^{(n)}_{x^n}(M_0) := \left(f^{(n-1)}_{x^{n-1}}\right)'_x(M_0) =: \frac{\partial^n f(M_0)}{\partial x^n};$$

$$f^{(n)}_{x^k y^{n-k}}(M_0) := \left(f^{(n-1)}_{x^k y^{n-k-1}}\right)'_y(M_0) =: \frac{\partial^n f(M_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}.$$

Частинні похідні $f^{(n)}_{x^n}$, $f^{(n)}_{y^n}$, $f^{(n)}_{z^n}$ називають *чистими частинними похідними n-го порядку функції f*, а всі інші частинні похідні n-го порядку функції f називають *мішаними*.

Наприклад, f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2} — чисті частинні похідні другого порядку функції f, а f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{xz}, f''_{zx}, f''_{yz}, f''_{zy} — мішані частинні похідні другого порядку функції f трьох змінних.

Функцію кількох змінних f називають *n разів диференційовною у точці* M_0 ($n = 2, 3, \ldots$), якщо всі її частинні похідні $(n-1)$-го порядку визначені у деякому околі точки M_0 і є диференційовними функціями у цій точці.

Функцію f називають *n разів диференційовною в області* D, якщо вона n разів диференційовна в кожній точці області D.

Приклад 1. Якщо $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^2$, то $f'_x(x,y,z) = 2x - 2y$, $f'_y(x,y,z) = -2x$, $f'_z(x,y,z) = 2z$.

Тому $f''_{x^2}(x,y,z) = 2$, $f''_{y^2}(x,y,z) = 0$, $f''_{z^2}(x,y,z) = 2$, $f''_{xy}(x,y,z) = -2$, $f''_{xz}(x,y,z) = 0$, $f''_{yx}(x,y,z) = -2$, $f''_{yz}(x,y,z) = 0$, $f''_{zx}(x,y,z) = 0$, $f''_{zy}(x,y,z) = 0$.

Отже, дана функція має неперервні частинні похідні другого порядку в області $\mathbb{R}^3$ і тому вона є тричі диференційовною в цій області.

Для заданої функції $f''_{xy} = f''_{yx}$, $f''_{xz} = f''_{zx}$ і $f''_{yz} = f''_{zy}$.

Виникає *питання про рівність мішаних похідних* n*-го порядку довільної функції* f*, коли ці мішані похідні існують.*

Розглянемо функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{коли } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{коли } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Для точок $(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right),$$

$$f'_y(x,y) = -x\left(\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} + \frac{4x^2y^2}{(y^2+x^2)^2}\right),$$

а $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ (впевніться у цьому).

Тому

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(0,\Delta y) - f'_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1,$$

а

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(\Delta x,0) - f'_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = 1 \neq f''_{xy}(0,0).$$

Отже, відповідь на поставлене вище питання, взагалі кажучи, негативна: *існування мішаних похідних* $f''_{xy}(M)$ *і* $f''_{yx}(M)$ *не гарантує їх рівності.*

□ Накладемо на одну з мішаних похідних, наприклад, на f''_{xy}, умову неперервності у точці (x_0,y_0) і вважатимемо, що в околі точки (x_0,y_0) існують f'_x та f'_y. Тоді

$$f''_{yx}(x_0,y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(x_0+\Delta x, y_0) - f'_y(x_0,y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)}{\Delta y} -\right.$$

$$\left. - \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\big(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) -$$

$$- f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0,y_0)\big) =: \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x\Delta y},$$

де $\varphi(x) := f(x, y_0+\Delta y) - f(x, y_0)$.

За теоремою Лагранжа про скінченні прирости дістаємо

$$\varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0) = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x =$$

$$= (f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0))\Delta x =$$

$$= f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y,$$

де $0<\theta_1,\theta_2<1$.

Отже,

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = \frac{f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)}{\Delta y}$$

і

$$f''_{yx}(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y),$$

якщо ця границя існує. За умовою f''_{xy} неперервна у точці (x_0,y_0). Тому існують границі

$$\lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y) - f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)}{\Delta y} = f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)$$

та

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{xy}(x_0,y_0).$$

За відомим твердженням про існування повторної границі (п. 2.2.2, теорема 2)

$$\exists \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f''_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y) = f''_{xy}(x_0,y_0)$$

і тому $\exists f''_{yx}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 1 (про існування та рівність мішаних похідних). *Нехай в околі точки (x_0,y_0) існують частинні похідні f'_x, f'_y і f''_{xy}, при-*

чому f''_{xy} *неперервна у точці* (x_0,y_0). *Тоді у точці* (x_0,y_0) *існує* $f''_{yx}(x_0,y_0)$ *і*

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{1}$$

Зокрема, якщо f''_{xy} *та* f''_{yx} *неперервні у точці* (x_0,y_0), *то має місце рівність* (1).

Для функції m змінних $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ частинні похідні n-го порядку можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^n f(M)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_n}} =: f^{(n)}_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}}(M), \tag{2}$$

де $i_k \in \overline{1,m}$ $\forall k \in \overline{1,n}$, причому кількість таких частинних похідних дорівнює m^n.

За допомогою теореми 1 можна показати, що коли мішані похідні (2) неперервні у точці M, то індекси $i_1,i_2,\ldots,i_n$ можна переставляти місцями яким завгодно чином і значення мішаної похідної від цього не зміниться. Наприклад,

$$f'''_{xyz} = f'''_{zxy} = f'''_{yzx} = f'''_{zyx} = f'''_{xzy} = f'''_{yxz}$$

за умови неперервності всіх цих мішаних похідних.

3.3.2. Диференціали вищих порядків. Якщо скалярна функція $f(M) = f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ диференційовна у точці M_0, то вона має у цій точці повний диференціал, або *перший диференціал*

$$d_h f(M_0) = \sum_{k_1=1}^{m} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_{k_1}}\,\Delta x_{k_1} =: d^1_h f(M_0).$$

Далі застосуємо метод математичної індукції. Припустимо, що у випадку, коли функція f є n разів диференційовною у деякій точці $M_0 \in \mathbb{R}^m$, для неї вже визначено n-й диференціал, або диференціал n-го порядку у точці M_0, який має вигляд

$$d^n_h f(M_0) = \sum_{k_1=1}^{m} \Delta x_{k_1} \sum_{k_2=1}^{m} \Delta x_{k_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(M_0)}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\ldots\partial x_{k_n}}\,\Delta x_{k_n}. \tag{3}$$

Визначимо тепер диференціал $(n+1)$-го порядку функції f у точці M_0 у випадку, коли ця функція $n+1$ раз диференційовна у точці M_0. Згідно з означенням, функція f є n разів диференційовною у деякому околі $O(M_0)$ точки M_0. Тому, за припущенням індукції, функція f у кожній точці $M \in O(M_0)$ має диференціал

$$d_h^n f(M) = \sum_{k_1=1}^{m} \Delta x_{k_1} \sum_{k_2=1}^{m} \Delta x_{k_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(M)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_n}} \Delta x_{k_n}. \tag{4}$$

Оскільки функції $\frac{\partial^n f(M)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_n}}$ диференційовні у точці M_0, то з рівності (4) випливає, що при кожному фіксованому $h \in \mathbb{R}^m$ диференціал $d_h^n f$ є скалярною функцією від M, визначеною в $O(M_0)$ і диференційовною в точці M_0. Тому він має у точці M_0 свій повний диференціал при цьому самому h:

$$d_h(d_h^n f)(M_0) =: d_h^{n+1} f(M_0), \tag{5}$$

який ми й назвемо $(n+1)$-*шим диференціалом* або *диференціалом* $(n+1)$-*го порядку функції* f *у точці* M_0 (при заданому значенні h).

З рівностей (4) та (5) випливає, що формула (3) зберігається при переході від $n \in \mathbb{N}$ до $n+1$:

$$d_h^{n+1} f(M_0) = \sum_{k_1=1}^{m} \Delta x_{k_1} \sum_{k_2=1}^{m} \Delta x_{k_2} \ldots \sum_{k_n=1}^{m} \sum_{k_{n+1}=1}^{m} \frac{\partial^{n+1} f(M_0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_{n+1}}} \Delta x_{k_{n+1}}.$$

Отже, за принципом математичної індукції, при кожному $n \in \mathbb{N}$ поняття *диференціала* n-*го порядку у точці* M_0 визначено для довільної функції f, що є n разів диференційовною у цій точці. При цьому є правильною формула (3).

Якщо точка M_0 фіксована, то диференціал $d_h^n f(M_0)$ є функцією від $h \in \mathbb{R}^m$. Зауважимо, що у рівності (3) часто замість $h = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m)$ беруть $h = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_m)$, а в позначенні $d_h^n f(M_0)$ індекс h і точку M_0 часто опускають.

Приклад 2. Знайдемо $d^3 z$, якщо $z = x \ln y$. Маємо:

$$dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy = \ln y\, dx + \frac{x}{y}\, dy.$$

Далі двічі скористаємося рівністю (5):

$$d^2 z = d(dz) = (dz)'_x\, dx + (dz)'_y\, dy =$$

$$= \frac{1}{y}\, dy dx + \left(\frac{1}{y}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy\right) dy = \frac{2}{y}\, dx dy - \frac{x}{y^2}\, dy^2;$$

$$d^3 z = d(d^2 z) = (d^2 z)'_x\, dx + (d^2 z)'_y\, dy =$$

$$= -\frac{1}{y^2}\, dy^2 dx + \left(-\frac{2}{y^2}\, dx dy + \frac{2x}{y^3}\, dy^2\right) dy = -\frac{3}{y^2}\, dx dy^2 + \frac{2x}{y^3}\, dy^3.$$

Вважаючи f функцією двох змінних, легко дістати, що коли вона має неперервні n-ні частинні похідні, то

$$d_h f(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy =: \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big) f(M),$$

$$d_h^2 f(M) = \Big(\frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy\Big)'_x dx +$$

$$+ \Big(\frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy\Big)'_y dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} dy^2 =:$$

$$=: \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2\Big) f(M) =:$$

$$=: \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big)^2 f(M). \tag{6}$$

І взагалі,

$$d_h^n f(M) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big)^n f(M) \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Виявляється, що подібна формула має місце для будь-якої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ кількох змінних, що має неперервні частинні похідні:

$$d_h^n f(M) = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\Big)^n f(M). \tag{8}$$

Вираз $\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\Big)^n$ задає так званий *диференціальний оператор n-го порядку*, який визначено на множині n раз диференційовних функцій $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Для знаходження значення цього оператора від даної функції f слід формально знайти n-ий степінь суми $\Big(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\Big)$, після чого в чисельнику кожного доданка біля символа ∂^n записати $f(M)$ і одержати $\partial^n f(M)$. Наприклад,

$$d_h^3 f(x,y) = \Big(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\Big)^3 f(x,y) =$$

$$= \Big(\frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3\Big) f(M) =$$

$$=\frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^3}\,dx^3+3\frac{\partial^3 f(M)}{\partial x^2\partial y}dx^2\,dy+3\frac{\partial^3 f(M)}{\partial x\partial y^2}\,dx\,dy^2+\frac{\partial^3 f(M)}{\partial y^3}\,dy^3.$$

Приклад 3. Знайдемо d^3z для функції $z=x\ln y$ з прикладу 2, скориставшись формулою (7). Маємо: $z'_x=\ln y$, $z'_y=\frac{x}{y}$; $z''_{x_2}=0$, $z''_{xy}=\frac{1}{y}$, $z''_{y^2}=0$; $z'''_{x^3}=z'''_{x^2y}=0$, z'''_{y^3}. Частинні похідні третього порядку визначені і неперервні на області визначення $D(z)$ функції z. Тому функція z тричі диференційовна і

$$d^3z=0\,dx^3+3\cdot 0\,dx^2dy-\frac{3}{y^2}\,dxdy^2+\frac{2x}{y^3}\,dy^3.$$

Нехай числова функція $f(x,y)$ двічі диференційовна у кожній точці $M=(x,y)$ області D, а $M=(x,y)=(x(t),y(t))\in D\ \forall t\in D(M)\subset\subset\mathbb{R}^1$, а M є двічі диференційовною (покоординатно) функцією у кожній точці $t\in D(M)$.

Користуючись рівністю (33) п. 3.2.10 та інваріантною властивістю диференціала першого порядку, знайдемо при $h=\Delta t$:

$$d_h f(M)=f'_x dx+f'_y dy=\left(f'_x(M)x'(t)+f'_y(M)y'(t)\right)\Delta t.$$

Далі, вважаючи $f''_{xy}(M)=f''_{yx}(M)$ і використовуючи найпростіші властивості диференціала, дістаємо

$$d_h^2 f(M)=\big(x'(t)\cdot d_h f'_x(M)+f'_x(M)\cdot dx'(t)+$$
$$+y'(t)\cdot d_h f'_y(M)+f'_y(M)dy'(t)\big)\Delta t=$$
$$=\Big(x'(t)\big(f''_{xx}(M)\cdot x'(t)+f''_{xy}(M)y'(t)\big)\,\Delta t+$$
$$+f'_x(M)\cdot x''(t)\Delta t+y'(t)\big(f''_{yx}(M)x'(t)+$$
$$+f''_{yy}(M)y'(t)\big)\,\Delta t+f'_y(M)y''(t)\Delta t\Big)\Delta t=$$
$$=f''_{x^2}(M)(dx)^2+2f''_{xy}(M)dx\,dy+$$
$$+f''_{y^2}(M)(dy)^2+f'_x(M)d^2x+f'_y(M)d^2y.$$

Порівнюючи цю рівність з рівністю (6), бачимо, що другий диференціал, взагалі кажучи, не має властивості інваріантності форми. Те саме можна сказати і про $d^n f(M)$ $\forall n>2$.

3.3.3. Формула Тейлора. Для дійсної функції φ однієї змінної, що має $n+1$ похідну в інтервалі $(a;b)$, і точки $x_0\in(a;b)$ правильна формула Тейлора:

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\frac{\varphi'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{\varphi''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ \forall x\in(a;b), \qquad (9)$$

де $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$.

Цю формулу можна переписати у вигляді

$$\Delta\varphi(x_0)=\frac{d\varphi(x_0)}{1!}+\frac{d^2\varphi(x_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^n\varphi(x_0)}{n!}+\frac{d^{n+1}\varphi(c)}{(n+1)!}.$$

Природно виникає питання про правильність аналогічної формули для функції f кількох змінних. Для простоти міркувань розглянемо функцію $f(x,y)$ двох змінних.

□ Припустимо, що функція $f(x,y)$ є $n+1$ раз диференційовною в області D. Зафіксуємо точки $M_0=(x_0,y_0)$ і $M_1=(x_1,y_1)$, для яких відрізок $[M_0;M_1]=\{M\in\mathbb{R}^2\colon M=M_0+t(M_1-M_0),\ t\in[0;1]\}\subset D$.

Розглянемо вектор-функцію $M(t)=M_0+t(M_1-M_0)$, $t\in\mathbb{R}$, з компонентами $x(t)=x_0+t(x_1-x_0)$ та $y(t)=y_0+t(y_1-y_0)$. Оскільки $M([0;1])=[M_0;M_1]\subset D$, то на відрізку $[0;1]$ визначена композиція $\varphi(t)=f(M(t))$, причому $\varphi(0)=f(M_0)$, $\varphi(1)=f(M_1)$.

Щоб мати можливість хоча б формально записати для функції $\varphi(t)$ рівність (9), потрібно щоб ця функція була визначена на деякому інтервалі $(a;b)\supset[0;1]$. Спробуємо вказати такий інтервал.

Враховуючи, що множина D відкрита, а функція $M(t)$ неперервна на $\mathbb{R}$, знайдемо спочатку $\varepsilon>0$: $O_\varepsilon(M_0)\subset D$ і $O_\varepsilon(M_1)\subset D$, а потім $\delta>0$: $M(t)\in O_\varepsilon(M_0)\ \forall t\in O_\delta(0)$ та $M(t)\in O_\varepsilon(M_1)\ \forall t\in O_\delta(1)$. При цьому $M(t)\in D\ \forall t\in(-\delta;1+\delta)$, і тому функція $\varphi(t)=f(M(t))$ визначена на інтервалі $(-\delta;1+\delta)$. Дослідимо її на диференційовність.

Згідно з формулою (24) п. 3.2.8

$$\varphi'(t)=f'_x(M(t))x'(t)+f'_y(M(t))y'(t)=$$

$$=f'_x(M(t))(x_1-x_0)+f'_y(M(t))(y_1-y_0)\ \forall t\in(-\delta;1+\delta),$$

або

$$\varphi'(t)=d_hf(M(t))\ \forall t\in(-\delta;1+\delta), \qquad (10)$$

де $h=(x_1-x_0,y_1-y_0)=M_1-M_0$.

Далі скористаємося методом математичної індукції. Припустимо, що при деякому $k \in \overline{1,n-1}$ функція $\varphi(t)$ має k-ту похідну на інтервалі $(-\delta;1+\delta)$, причому ця похідна

$$\varphi^{(k)}(t) = d_h^k f(M(t)) \ \forall t \in (-\delta;1+\delta), \tag{11}$$

де $h = M_1 - M_0$.

Введемо допоміжну функцію $f_1(M) = d_h^k f(M)$, $M \in D$, яка є диференційовною в D, в силу n разів диференційовності функції f. Якщо позначити $\psi(t) = f_1(M(t))$, то для цієї функції буде правильною рівність (10):

$$\psi'(t) = d_h f_1(M(t)) \ \forall t \in (-\delta;1+\delta).$$

Але $\psi'(t) = \varphi^{(k)}(t)$, згідно з рівністю (11), а

$$d_h f_1(M(t)) = d_h(d_h^k f)(M(t)) = d_h^{k+1} f(M(t)).$$

Отже, для будь-якого $t \in (-\delta;1+\delta)$ існує похідна $\varphi^{(k)}(t)$, яка дорівнює $d_h^{k+1} f(M(t))$.

Згідно з принципом математичної індукції, функція $\varphi(t)$ є n разів диференційовною на інтервалі $(-\delta;1+\delta)$ і для будь-якого $k \in \overline{1,n}$ правильна рівність (11). Таким чином, для функції $\varphi(t)$ правильна формула Тейлора (9) при $x_0 = 0$, $x = 1$, тобто

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

де $c \in (0;1)$. Враховуючи формулу (11), звідси дістаємо:

$$f(M_1) = f(M_0) + \frac{d_h f(M_0)}{1!} + \frac{d_h^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d_h^n f(M_0)}{n!} + \frac{d_h^{n+1} f(M_*)}{(n+1)!},$$

де $M_* \in (M_0;M_1)$, а $h = M_1 - M_0$.

Такі ж самі міркування, як для функції двох змінних, справедливі і для функції n змінних. ■

Отже, має місце

Теорема 2 (про формулу Тейлора). *Нехай функція f є $n+1$ раз диференційовною в області D і M_0 — фіксована точка D. Тоді для будь-якої точки M, для якої $[M_0;M] \subset D$, правильна **формула Тейлора:***

$$f(M) = f(M_0) + \frac{d_h f(M_0)}{1!} + \frac{d_h^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d_h^n f(M_0)}{n!} + \frac{d_h^{n+1} f(M_*)}{(n+1)!}, \tag{12}$$

де $h = M - M_0$, *а* $M_* \in (M_0;M)$.

Приклад 4. Запишемо Формулу Тейлора для функції $z = x\ln y$ у точці $M_0 = (1,1)$ при $n = 2$. Згідно з прикладами 2, 3, дана функція тричі диференційовна у своїй області визначення D: $y > 0$, тобто у верхній півплощині. Тому для неї правильна формула (12) при $n = 2$ в будь-якій точці $M \in D$. Користуючись прикладом 2, знайдемо $dz(1,1) = dy$, $d^2z(1,1) = 2dxdy - dy^2$, $d^3z(x_*,y_*) = -\frac{3}{y_*^2}dxdy^2 + \frac{2x_*}{y_*^3}dy^3$. Покладаючи у формулі (12) $n = 2$, $h = (dx,dy) = (x-1,y-1)$, дістанемо:

$$x\ln y = (y-1) + \frac{1}{2!}\left(2(x-1)(y-1) - (y-1)^2\right) +$$
$$+\frac{1}{3!}\left(-\frac{3}{y_*^2}(x-1)(y-1)^2 + \frac{2x_*}{y_*^3}(y-1)^3\right),$$

де $x_* = 1+\theta(x-1)$, $y_* = 1+\theta(y-1)$, $0 < \theta < 1$.

Якщо в умовах теореми 2 $n = 0$, то дістаємо *формулу Лагранжа для функції кількох змінних*: $f(M) = f(M_0) + d_h(M_*)$, або

$$f(M) - f(M_0) = f'(M_*)(M - M_0). \tag{13}$$

Зокрема, для функції двох змінних

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f'_x(x_*,y_*)(x-x_0) + f'_y(x_*,y_*)(y-y_0).$$

Оскільки будь-які дві точки області D можна сполучити ламаною, що цілком міститься у D, то за допомогою формули Лагранжа легко довести наступний

Наслідок 1 (критерій сталості функції). *Для того щоб функція* $f(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ *була сталою в області* D, *необхідно й досить, щоб* $f'_{x_1} = f'_{x_2} = \ldots = f'_{x_m} \equiv 0$ *у цій області.*

3.3.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо функція f диференційовна в області D, то вона має в цій області частинні похідні другого порядку.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Функція $f(x,y) = \begin{cases} x^2y\sin\frac{1}{x}, & \text{коли } x \neq 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0, \end{cases}$ є диференційовною в області $D = \mathbb{R}^2$ і має в D частинні похідні другого порядку.
4. Якщо існують частинні похідні $f'''_{xyx}(M_0)$ і $f'''_{xxy}(M_0)$, то вони рівні між собою.
5. $f''_{xy}(x_0,y_0) \approx \frac{f'_x(x_0+\Delta x,y_0) - f'_x(x_0,y_0)}{\Delta x}$, коли $0 \neq \Delta x \approx 0$.

6. Якщо функція f двічі диференційовна в області D, то вона має в цій області: а) частинні похідні другого порядку і б) неперервні частинні похідні першого порядку.
7. Твердження, обернене до 6 а), є правильним.
8. Якщо функція f має в області D неперервні частинні похідні другого порядку, то вона двічі диференційовна в D.
9. Функція f є n разів диференційовною у точці M_0 тоді й тільки тоді, коли існують усі її частинні похідні n-го порядку у цій точці.
10. Кількість усіх частинних похідних n-го порядку функції m змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ у точці M_0 (якщо вони існують) становить m^n.
11. Якщо функція f є n разів диференційовною у точці M_0, то $\forall k \in \in \overline{1, n-1}$ вона є k разів диференційовною у деякому околі точки M_0.
12. $\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$, $k \in \overline{0, n}$, — це всі можливі частинні похідні n-го порядку функції $f(x,y)$.
13. Якщо в деякій області D функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні з твердження 12, то вона може не бути n разів диференційовною у цій області.
14. Існування усіх частинних похідних n-го порядку функції f у деякому околі точки M_0 та їх неперервність у самій точці M_0 гарантує n разів диференційовність функції f у точці M_0.
15. Диференціали вищих порядків володіють властивістю інваріантності форми.
16. Формула для обчислення $d^n f(x,y)$ за формою аналогічна формулі бінома Ньютона.
17. Функція $f(x,y)$ двічі диференційовна у точці M_0 тоді і тільки тоді, коли її повний диференціал $d_h f(x,y)$ при кожному фіксованому $h = (dx, dy) \in \mathbb{R}^2$ є диференційовною функцією у точці M_0.
18. Якщо точка $M_* \in (M_0; M)$ — з рівності (12), то $\exists \theta \in (0; 1)$: $x_* = x_0 + +\theta(x - x_0)$, $y_* = y_0 + \theta(y - y_0)$.
19. Якщо $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ і D — відкрита множина, то $f(x,y) = const$ в D.
20. Якщо f диференційовна в області D, то $\forall M \in D\ \exists M_* \in D$: $\Delta f(M) = = d f(M_*)$.

II. Довести дане твердження.

1. Якщо в околі точки M_0 функція f має частинні похідні будь-якого порядку і всі вони за модулем не перевищують деякого числа $H > 0$, то в цьому околі $f(M) = f(M_0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{d_h(M_0)}{k!}$, де $h = M - M_0$.

3.3.5. Історична довідка. Термін "похідна" і позначення типу f'_x ввів у 1797 році французький математик Ж. Лагранж (1736 − 1813). Частинні похідні з'явилися вперше у працях І. Ньютона (1643 − 1727), Г. Лейбніца та І. Бернуллі (1667 − 1748). Позначення типу $\frac{\partial f}{\partial x}$ ввів у 1786 році французький математик А. Лежандр (1752 − 1833). Поняття диференційовної функції по суті належить О. Коші. Термін "градієнт" і позначення grad ввів у 1873 році англійський фізик і математик Д. Максвелл (1831 − 1879). Він же по суті ввів і поняття дивергенції та ротора, а позначення div і rot ввів у 1878 році англійський математик У. Кліффорд (1845 − 1879). Оператор набла ввів у 1853 році ірландський математик У. Гамільтон (1805 − 1865), тому його також називають гамільтоновим оператором або гамільтоніаном. Властивості якобіана першим у 1833 році вивчив німецький математик К. Якобі (1804 − 1851).

Вже творці диференціального числення П. Ферма (1601 − 1665), І. Ньютон та Г. Лейбніц виділяли основну ідею при введенні поняття диференційовної функції: заміна приросту даної функції іншою функцією, яка є лінійною відносно приростів незалежних змінних. Однак лише у XIX столітті О. Коші й К. Вейєрштрасс позбавили диференціальне та інтегральне числення формальних суперечностей. Це дозволило поширити диференціальне та інтегральне числення не лише на числові функції кількох змінних, але й на векторнозначні функції і взагалі, на довільні функціонали та оператори. Поняття диференціала від функціонала першими ввели французькі математики Р. Гато (? − 1914) і М. Фреше.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ

У даному розділі розглянуто застосування диференціального числення функцій кількох змінних до функцій комплексної змінної, до неявних та обернених функцій і до екстремумів функцій кількох змінних.

4.1. Критерій диференційовності функції комплексної змінної. Поняття аналітичної функції

У цьому підрозділі вивчається зв'язок між диференційовністю функції комплексної змінної і диференційовністю її дійсної та уявної частин. Вводиться важливе поняття аналітичної функції.

4.1.1. Умови Коші – Рімана. *Функція* f комплексної змінної (аналогічно до функції дійсної змінної) називається *диференційовною у точці* z_0, якщо існують окіл $O(z_0)$, число $c = c(z_0)$ і функція $\alpha = \alpha(z)$, $z \in O(z_0)$, такі, що $\alpha(z) \to 0$, коли $z \to z_0$, і

$$\Delta f(z_0) = c(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0) \ \forall z \in O(z_0). \qquad (1)$$

При цьому число $c(z_0)$ називають *похідною функції* f у точці z_0 і позначають $f'(z_0)$ або $\frac{df(z_0)}{dz}$.

Оскільки для $z = x + iy \in D$ $\operatorname{Re} f(z) =: u(x,y)$, а $\operatorname{Im} f(z) =: v(x,y)$, то природно виникає питання про те, *які умови, накладені на дійсні функції* u *і* v, *гарантують диференційовність функції* f.

☐ За означенням функція f є диференційовною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ тоді й тільки тоді, коли існують число $c = c(z_0) = a(x_0,y_0) + ib(x_0,y_0) = a + ib$, окіл $O(z_0) = O(x_0,y_0)$ і функція $\alpha(z) = \alpha_1(x,y) + i\alpha_2(x,y) = \alpha_1 + i\alpha_2$, $(x,y) \in O(x_0,y_0)$, такі, що має місце рівність (1) і $\alpha(z) \to 0$, коли $z \to z_0$.

Оскільки $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$, $\Delta f(z_0) = \Delta u(x_0,y_0) +$

$+i\Delta v(x_0,y_0)$, то рівність (1) рівносильна системі

$$\begin{cases} \Delta u(x_0,y_0) = a(x-x_0) - b(y-y_0) + \alpha_1(x-x_0) - \alpha_2(y-y_0), \\ \Delta v(x_0,y_0) = b(x-x_0) + a(y-y_0) + \alpha_2(x-x_0) + \alpha_1(y-y_0), \end{cases}$$

а $\alpha(z) \to 0$ $(z \to z_0) \Leftrightarrow \alpha_1(x,y) \to 0$ і $\alpha_2(x,y) \to 0$ $((x,y) \to (x_0,y_0))$.

Отже, диференційовність функції f у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ рівносильна диференційовності функцій $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ у точці (x_0,y_0) разом з умовами

$$u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) = a \ \text{ і } \ v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0) = b.$$

Останні умови називають *умовами Коші – Рімана* або *Даламбера – Ейлера.*

З проведених міркувань також випливають рівності

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i v'_x(x_0,y_0) = u'_x(x_0,y_0) - i u'_y(x_0,y_0) = \ldots$$

(інші вирази для $f'(z_0)$ випливають із записаних рівностей та умов Коші – Рімана). ■

Таким чином, доведена

Теорема 1 (критерій диференційовності функції комплексної змінної). *Для того щоб функція f комплексної змінної $z = x+iy$ була диференційовною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно й досить, щоб дійсні функції $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ змінних x та y були диференційовними у точці (x_0,y_0) та виконувалися умови Коші – Рімана $u'_x(x_0,y_0) = v'_y(x_0,y_0) = a$ і $v'_x(x_0,y_0) = -u'_y(x_0,y_0) = b$. При цьому*

$$f'(z_0) = u'_x(x_0,y_0) + i v'_x(x_0,y_0) = u'_x(x_0,y_0) - i u'_y(x_0,y_0) = \ldots .$$

Приклад 1. 1) Якщо $f(z) = \exp z := e^x(\cos y + i \sin y)$, то $\operatorname{Re} f(z) = u(x,y) = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} f(z) = e^x \sin y = v(x,y)$. Оскільки $u'_x = e^x \cos y = v'_y$, $u'_y = -e^x \sin y = -v'_x$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ і знайдені частинні похідні неперервні в області $D = \mathbb{R}^2$, то функції u і v в цій області диференційовні і задовольняють умови Коші – Рімана. Отже, за теоремою 1 функція $f(z) = \exp z$, $z \in \mathbb{C}$, диференційовна в $\mathbb{C}$ і $f'(z) = u'_x(x,y) + i v'_x(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = \exp z$, тобто $(\exp z)' = \exp z$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

2) Для функції $f(z) = x - iy$ маємо $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$, $u'_x(x,y) = 1 \neq v'_y(x,y) = -1$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тому за теоремою 1 дана функція не є диференційовною в жодній точці $z \in \mathbb{C}$.

Виявляється, що *для функцій комплексної змінної існування похідної $f'(z)$ в області D гарантує, що ця похідна є неперервною фун-*

кцією в області D. Це буде показано далі, у підрозділі 6.3.

У зв'язку з цим *функцію* f *комплексної змінної* називають *аналітичною в області* D *за Коші*, якщо вона має в цій області неперервну похідну.

Враховуючи проведені вище міркування, дістаємо, що $f_1(z) = \exp z$ є аналітичною функцією в області $D = \mathbb{C}$, а функція $f_2(z) = \bar{z}$ не є аналітичною ні в якій області D.

Застосовуючи до функції $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy \in D$ критерій диференційовності і згадуючи критерій неперервності функції комплексної змінної, дістаємо наступне твердження.

Теорема 2 (критерій аналітичності). *Для того щоб функція* f *була аналітичною в області* D *за Коші, необхідно й досить, щоб функції* $u = \operatorname{Re} f$ *і* $v = \operatorname{Im} f$ *мали в області* D *неперервні частинні похідні, які задовольняють умови Коші − Рімана.*

Згідно з цією теоремою означення аналітичної функції можна сформулювати в іншій формі: *функцію* f називають *аналітичною в області* D *за Ріманом*, якщо функції $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ мають в області D неперервні частинні похідні, що задовольняють умови Коші − Рімана.

З теореми 2 та з критерію сталості функції двох змінних випливає

Наслідок 1 (критерій сталості функції комплексної змінної). *Для того щоб функція* f *була сталою в області* D, *необхідно й досить, щоб* $f'(z) = 0\ \forall z \in D$.

4.1.2. Аналітичність суми степеневого ряду.

□ Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n\ \forall z \in K = \{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < R\}$, а $R > 0$ − радіус збіжності даного степеневого ряду. Зафіксуємо довільну точку $z_1 \in K$ і покажемо, що f диференційовна у цій точці. Для цього знайдемо

$$f(z) - f(z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n((z - z_0)^n - (z_1 - z_0)^n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_1) \cdot \gamma_n(z),$$

де $\gamma_n(z) = (z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^{n-2}(z_1 - z_0) + \ldots + (z_1 - z_0)^{n-1}$.

Оскільки

$$\frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_n(z)$$

і

$$\gamma_n(z) \to \gamma_n(z_1) = n(z_1 - z_0)^{n-1}, \text{ коли } z \to z_1,$$

то для доведення існування границі $\lim\limits_{z\to z_1} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}$ достатньо довести рівномірну збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\gamma_n(z)$ в деякому околі точки z_1.

Для цього зауважимо, що степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ має кругом збіжності круг K, оскільки $R_1 = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = R$. Тому в замкненому крузі $\overline{K}_1 = \{z\colon |z-z_0| \leqslant R_1 < R\}$, що містить точку z_1 разом із деяким її околом, цей ряд є абсолютно збіжним, а тому збігається додатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|\cdot R_1^n$, який є мажорантним для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\gamma_n(z)$, оскільки $|a_n\gamma_n(z)| \leqslant n|a_n|R_1^n$ $\forall z\in\overline{K}_1$ і $\forall n\in\mathbb{N}$. За ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\gamma_n(z)$ збігається рівномірно на K_1 і тому

$$\lim_{z\to z_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\gamma_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lim_{z\to z_1}\gamma_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1}.$$

Отже, існує скінченна границя

$$\lim_{z\to z_1}\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1} \;\; \forall z_1\in K. \;\blacksquare$$

Таким чином, доведена

Теорема 3 (про першу похідну суми степеневого ряду). *Нехай* $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ $\forall z\in K = \{z\colon |z-z_0| < R\}$, *а* $R > 0$ *– радіус збіжності даного степеневого ряду. Тоді функція* f *диференційовна в крузі* K, $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ $\forall z\in K$ *і останній степеневий ряд має той самий круг збіжності, що й вихідний степеневий ряд.*

Якщо до похідної $f'(z)$ суми степеневого ряду застосувати теорему 3, то дістанемо існування $f''(z) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$ $\forall z\in K$ і останній степеневий ряд має той самий круг збіжності, що й ряд

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Методом математичної індукції дістаємо наступну теорему.

Теорема 4 (про похідну будь-якого порядку суми степеневого ряду). *Сума $f(z)$ степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ з додатним радіусом збіжності R має в крузі збіжності K цього ряду похідну $f^{(k)}(z)$ будь-якого порядку $k \in \mathbb{N}$, причому*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)a_n(z-z_0)^{n-k}$$

і останній степеневий ряд має той самий круг збіжності, що й даний степеневий ряд.

Наслідок 2 (про аналітичність суми степеневого ряду та її похідних). *Сума степеневого ряду з додатним радіусом збіжності та будь-яка її похідна є аналітичними функціями в крузі збіжності цього ряду.*

З теореми 4, зокрема, випливає, що $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$, тобто $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$, де $0! := 1$ і $f^{(0)}(z) := f(z)$.

Ряд вигляду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ називають *рядом Тейлора функції* f. Тому має місце

Теорема 5 (про єдиність розвинення функції в степеневий ряд). *Якщо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ збігається до функції f у крузі $K = \{z\colon |z-z_0| < R\}$, тобто є розвиненням функції f у степеневий ряд за степенями $z-z_0$, то це розвинення єдине і є рядом Тейлора функції f.*

Приклад 2. Розкладемо функцію $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$ у степеневий ряд за степенями z, використовуючи формулу суми геометричної прогресії. Маємо:

$$f(z) = \frac{z}{z^2-1} = \frac{z}{2}\cdot\frac{(z+1)-(z-1)}{(z-1)(z+1)} = \frac{z}{2}\left(\frac{-1}{1-z} - \frac{1}{1+z}\right) =$$

$$= \frac{z}{2}\left(-\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right) = \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^{n+1}-1\right)z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-1}{2}\,z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{2}\,z^n,\ \ |z|<1.$$

За теоремою 2 звідси випливає, що $f^{(n)}(0) = n!\frac{(-1)^n-1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

4.1.3. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо функція f диференційовна у точці z_0, то вона неперервна у цій точці.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Функція $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$, є диференційовною у деякій точці $z_0 \in \mathbb{C}$.
4. Функція $f(z) = \bar{z}^2$, $z \in \mathbb{C}$, недиференційовна у будь-якій точці $z_0 \in \mathbb{C}$.
5. Якщо $\operatorname{Re} f = u$ та $\operatorname{Im} f = v$ — диференційовні функції в області D, то і функція f диференційовна в D.
6. Твердження, обернене до 5, є правильним.
7. Якщо частинні похідні функції $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ задовольняють умови Коші — Рімана у точці (x_0, y_0), то функція f диференційовна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$.
8. Функція $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, не є диференційовною у точці $z_0 = 0$, але функції $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ задовольняють умови Коші — Рімана у точці $(x_0, y_0) = (0, 0)$.
9. Похідна функції комплексної змінної не може бути розривною функцією в якійсь точці $z_0 \in \mathbb{C}$.
10. Похідна функції дійсної змінної може бути розривною в якійсь точці $x_0 \in \mathbb{R}$.
11. $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$.
12. Означення аналітичності за Коші і за Ріманом є еквівалентними твердженнями.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо f і φ диференційовні функції у точці z_0, то функції $f \pm \varphi$, $f \cdot \varphi$ і $\frac{f}{\varphi}$ $(\varphi(z_0) \neq 0)$ є диференційовними у цій точці і $(f \pm \varphi)'(z_0) = f'(z_0) \pm \varphi'(z_0)$, $(f \cdot \varphi)'(z_0) = f'(z_0)\varphi(z_0) + f(z_0)\varphi'(z_0)$ і $\left(\frac{f}{\varphi}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)\varphi(z_0) - f(z_0)\varphi'(z_0)}{\varphi^2(z_0)}$.
2. Якщо функція f диференційовна у точці z_0, а $z = z(t)$ диференційовна у точці t_0 і $z(t_0) = z_0$, то функція $f \circ z$ диференційовна у точці t_0 і $(f \circ z)'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0)$.

4.2. Неявні та обернені функції

У цьому підрозділі вивчаються функції $y = f(x)$, що є розв'язками рівняння $F(x, y) = 0$ відносно змінної y.

4.2.1. Поняття неявної функції. Якщо функція f задана аналітично формулою $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$, і набуває значення з лінійного простору, то поклавши $F(x,y) = y - f(x)$, $(x,y) \in X \times Y =: E$, $F(x,y) \in Y$, дістанемо, що ця функція визначається рівністю

$$F(x,y) = 0,\ (x,y) \in E. \tag{1}$$

У зв'язку з цим кажуть, що *функція f неявно задана за допомогою рівняння* (1), а саму *функцію $f\colon X \to Y$* називають *неявною функцією*, що визначається рівнянням (1), якщо $(x, f(x)) \in E$ $\forall x \in X$ і $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in X$.

Отже, кожна функція f, що задається рівнянням $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ (вона інколи називається *явною функцією*), є одночасно і неявною функцією. Проте далеко не кожну функцію, що визначається рівнянням (1), можна задати явно рівнянням вигляду $y = f(x)$.

Зауважимо також, що не кожне рівняння (1) задає принаймні одну неявну функцію з певного класу, а якщо задає таку функцію, то вона не обов'язково єдина. Наприклад, рівняння $x^2 - y^2 + 1 = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, задає функції f_1 і f_2, що визначаються рівностями $y = f_1(x) := \sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0;+\infty)$, та $y = f_2(x) := -\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\infty;0]$. В той же час рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, не задає жодної функції дійсної змінної.

У зв'язку з цим виникає питання про те, *які умови слід накласти на функцію F, щоб рівняння* (1) *визначало неявну функцію f з певного класу і щоб ця функція була єдиною.*

Щоб відповісти на поставлене питання, вважатимемо, що

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$(x,y) := (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) \in E \subset \mathbb{R}^{n+m},$$

E — область і $F\colon E \to \mathbb{R}^m$, тобто $F(x,y) = w = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m$.

Якщо $n = m = 1$, то $E \subset \mathbb{R}^2$ і $F(x,y) \in \mathbb{R}^1$, а рівняння (1), можливо, задає неявну функцію $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, однієї змінної. Якщо $n > 1$ (зокрема, $n = 2$), а $m = 1$, то $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (зокрема, $E \subset \mathbb{R}^3$), а рівняння (1), можливо, задає неявну функцію n змінних (зокрема, двох змінних). Якщо $n = m = 2$, то $E \subset \mathbb{R}^4$, а рівняння (1), можливо, задає неявну вектор-функцію $f = (f_1, f_2)\colon X \to Y$ двох змінних x_1 та x_2: $f(x_1,x_2) = (f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2)) = (y_1,y_2) \in Y$ $\forall (x_1,x_2) \in X$.

4.2.2. Допоміжні твердження. Для доведення основної теореми даного підрозділу нам будуть потрібні дві леми.

Лема 1 (про замкнені множини одного функціонального простору). *Нехай* $\overline{O}_\alpha(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ *і* $\overline{O}_\beta(y^0) \subset \mathbb{R}^m$ *— фіксовані замкнені околи точок* $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *та* $y^0 \in \mathbb{R}^m$*. Позначимо* U_α *простір обмежених функцій* $f\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \to \mathbb{R}^m$ *і задамо на ньому норму рівністю*

$$\|f\|_U = \sup_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f(x)\| \ \forall f \in U_\alpha. \tag{2}$$

Тоді простір U_α *стане повним нормованим простором. При цьому множини*

$$U_{\alpha,\beta} = \{f\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \to \overline{O}_\beta(y_0)\},$$

$$U^0_{\alpha,\beta} = \{f \in U_{\alpha,\beta}\colon\ f - \textit{неперервна у точці}\ \ x^0\},$$

$$CU_{\alpha,\beta} = \{f \in U_{\alpha,\beta}\colon\ f - \textit{неперервна на}\ \ \overline{O}_\alpha(x^0)\}$$

будуть замкненими у просторі U_α.

□ Очевидно, що $CU_{\alpha,\beta} \subset U^0_{\alpha,\beta} \subset U_{\alpha,\beta} \subset U_\alpha$ і всі ці множини непорожні, бо містять функцію $f(x) \equiv y_0$. Переконаємося, що рівність (2) задає норму на просторі U_α. Існування $\|f\|_U$ для кожної функції $f \in U_\alpha$ випливає з обмеженості функції f.

Перевіримо для функціонала $\|f\|_U$ аксіоми норми:

1) $\|f\|_U \geqslant 0 \ \forall f \in U_\alpha$;

2) $\|f\|_U = 0 \Leftrightarrow \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\| = 0 \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x_0) \Leftrightarrow$
$f(x) = 0 \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x_0) \Leftrightarrow f = 0$;

3) $\|\lambda f\|_U = \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|\lambda f(x)\| = \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} |\lambda| \cdot \|f(x)\| = |\lambda| \times$
$\times \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f(x)\| = |\lambda| \cdot \|f\|_U \ \forall f \in U_\alpha \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$;

4) $\|f+g\|_U = \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f(x)+g(x)\| \leqslant \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \big(\|f(x)\| + \|g(x)\|\big) =$
$= \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f(x)\| + \sup\limits_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|g(x)\| = \|f\|_U + \|g\|_U \ \forall f, g \in U_\alpha$.

Отже, простір U_α є нормованим. Доведемо його повноту.

Візьмемо довільну фундаментальну послідовність (f_n) точок цього простору, тобто таку, що $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$:

$$\|f_n - f_m\|_U = \sup_{x \in \overline{O}_\alpha(x^0)} \|f_n(x) - f_m(x)\| < \varepsilon \ \forall m, n > n_0.$$

Звідси випливатиме, що

$$\|f_n(x)-f_m(x)\|<\varepsilon \ \forall m,n>n_0 \ \forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0). \tag{3}$$

Ця нерівність означає, зокрема, що при кожному фіксованому $x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$ послідовність $(f_n(x))$ є фундаментальною у просторі $\mathbb{R}^m$. Оскільки цей простір повний, то послідовність $(f_n(x))$ є збіжною до деякого вектора $f(x)\in\mathbb{R}^m$. Границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ є функцією $f\colon\overline{O}_\alpha(x^0)\to\mathbb{R}^m$. Покажемо, що $f_n\to f$ за нормою (2).

Зафіксуємо у нерівності (3) довільну точку $x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$ та довільний номер $n>n_0$ і перейдемо до границі при $m\to\infty$. Отримаємо нерівність

$$\|f_n(x)-f(x)\|\leqslant\varepsilon \ \forall n>n_0 \ \forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0), \tag{4}$$

з якої випливає, що f — обмежена функція і

$$\|f_n-f\|_U=\sup_{x\in\overline{O}_\alpha(x^0)}\|f_n(x)-f(x)\|\leqslant\varepsilon \ \forall n>n_0,$$

а це і означає збіжність $f_n\to f$ у просторі U_α. Цим доведено повноту простору U_α.

Візьмемо тепер у просторі U_α яку-небудь граничну точку f множини $U_{\alpha,\beta}$. Вкажемо для неї послідовність (f_n): $f_n\in U_{\alpha,\beta}$ $\forall n$ і $f_n\to f$ за нормою (2) (див. теорему 1 п. 1.3.3). З нерівності

$$\|f_n(x)-f(x)\|\leqslant\|f_n-f\|_U \ \ \forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$$

бачимо, що $\|f_n(x)-f(x)\|\to 0$ $(n\to\infty)$ $\forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$, і тому

$$\|f_n(x)-y^0\|\to\|f(x)-y^0\| \ \ (n\to\infty) \ \forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0).$$

Оскільки $f_n\in U_{\alpha,\beta}$, а отже, $\|f_n(x)-y^0\|\leqslant\beta$ $\forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, то після переходу до границі дістанемо нерівність $\|f(x)-y^0\|\leqslant\beta$ $\forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0)$, яка означає, що $f\in U_{\alpha,\beta}$. Цим доведено замкненість множини $U_{\alpha,\beta}$ у просторі U_α.

Для доведення замкненості множин $U^0_{\alpha,\beta}$ та $CU_{\alpha,\beta}$ достатньо показати, що коли функції $f_n(x)$, розглянуті вище, неперервні у точці $x^*\in\overline{O}_\alpha(x^0)$, то і гранична функція $f(x)$ теж неперевна у точці x^*. Покажемо це.

Візьмемо довільну послідовність (x_k): $\overline{O}_\alpha(x^0)\ni x_k\to x^*$ $(k\to\infty)$ і зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$. В силу нерівності (4) $\exists N$:

$$\|f_N(x)-f(x)\|<\varepsilon/3 \ \ \forall x\in\overline{O}_\alpha(x^0).$$

Оскільки функція f_N неперервна у точці x^*, то $f_N(x_k)\to f_N(x^*)$

$(k \to \infty)$ і тому $\exists k_0$: $\| f_N(x_k) - f_N(x^*)\| < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall k > k_0$. Враховуючи це, дістанемо:

$$\| f(x_k) - f(x^*)\| \leqslant \| f(x_k) - f_N(x_k)\| + \| f_N(x_k) - f_N(x_*)\| +$$
$$+\| f_N(x_*) - f(x^*)\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\ \ \forall k > k_0.$$

Це означає, що $f(x_k) \to f(x^*)$ $(k \to \infty)$, тобто функція $f(x)$ неперервна у точці x^*. ■

Лема 2 (про аналог формули Лагранжа). *Нехай* $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $S = O_\delta(x^0, y^0)$ *– деякий* $(n+m)$*-вимірний окіл точки* (x^0, y^0), *а функція* $F\colon S \to \mathbb{R}^m$ *має в околі* S *частинну похідну* $F'_y(x,y)$, *неперервну у точці* (x^0, y^0). *Тоді існує функція* $\Phi(x,y,z)$ *така, що*

$$F(x,y) - F(x,z) = \Phi(x,y,z)(y-z)\ \ \forall (x,y), (x,z) \in S, \qquad (5)$$

причому $\Phi(x,y,z) \to F'_y(x^0,y^0) =: \Phi(x^0,y^0,y^0)$, *коли* $x \to x^0$, $y \to y^0$, $z \to y^0$.

□ Згідно з п. 3.1.7, якщо $F = (F_1, \ldots, F_m)$, то

$$F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} (F_1)'_y(x,y) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (F_m)'_y(x,y) \end{pmatrix}.$$

Тому за умовою леми 2 в околі S точки (x^0, y^0) існують частинні похідні $(F_i)'_y(x,y)$, $i \in \overline{1,m}$, що є неперервними в самій точці (x^0,y^0).

Для довільного $x^* \in O_\delta(x^0)$ позначимо

$$S_{x^*} = \{y \in \mathbb{R}^m\colon (x^*, y) \in S\}.$$

Розглянувши нерівність

$$(x_1^* - x_1^0)^2 + \ldots + (x_n^* - x_n^0)^2 + (y_1 - y_1^0)^2 + \ldots + (y_m - y_m^0)^2 < \delta^2,$$

побачимо, що $S_{x^*} = O_r(y^0)$, де $R = \rho(x^*, x^0)$, $r = \sqrt{\delta^2 - R^2}$.

Тому при фіксованому $x \in O_\delta(x^0)$ до функцій $\varphi_i(y) = F_i(x,y)$, $y \in S_x$, $i \in \overline{1,m}$, можна застосувати формулу Лагранжа (13) п. 3.3.3:

$$F_i(x,y) - F_i(x,z) = (F_i)'_y(x, c_i)(y-z),\ \ y,z \in S_x,\ i \in \overline{1,m},$$

де $c_i = c_i(y,z) \in (y;z)$, тобто $c_i = (1-t_i)y + t_i z$ при деякому $t_i \in (0;1)$.

Якщо позначити $\Phi_i(x,y,z) = (F_i)'_y(x, c_i(y,z))$, $i \in \overline{1,m}$, та $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$, то рівність (5) буде виконуватися.

Треба лише встановити, що

$$\Phi(x,y,z) \to F'_y(x^0,y^0)\ \ (x \to x^0, y \to y^0, z \to y^0).$$

Це рівносильно покоординатній збіжності $\Phi_i(x,y,z) \to (F_i)'_y(x^0,y^0)$, $i \in \overline{1,m}$. Останнє виконується, оскільки $\Phi_i(x,y,z) = (F_i)'_y(x,c_i(y,z))$, функції $(F_i)'_y(x,y)$ неперервні у точці (x^0,y^0), а

$$c_i(y,z) = (1-t_i)y + t_i z \to y^0 \text{ при } y,z \to y^0. \blacksquare$$

4.2.3. Існування, єдиність та неперервність неявної функції. Повернемося до питання про існування та єдиність неявної функції, що може бути задана рівнянням (1). До сказаного про функцію $F(x,y)$ в п. 4.2.1 додамо ще деякі припущення. А саме, припустимо, що $F(x^0,y^0) = 0$ для деякої точки $(x^0,y^0) \in E$, а функція $F(x,y^0)$ неперервна у точці x^0. Нехай також у деякому околі $S \subset E$ точки (x^0,y^0) існує похідна $F'_y(x,y)$ (вона є матрицею розмірності $m \times m$), котра є неперервною у точці (x^0,y^0) і має в цій точці обернену матрицю $[F'_y(x^0,y^0)]^{-1}$, що можливо тоді й тільки тоді, коли визначник $\det F'_y(x^0,y^0) \neq 0$.

Для скорочення записів позначимо $T = F'_y(x^0,y^0)$. Помітимо, що рівняння (1) рівносильне рівнянню

$$y = y - T^{-1}F(x,y), \ \ (x,y) \in E, \tag{6}$$

невідомим у якому є функція $y = f(x)$, $(x, f(x)) \in E$.

Вважаючи, що $\overline{O}_\alpha(x^0) \times \overline{O}_\beta(y^0) \subset S \subset E$, будемо розглядати рівняння (1) та (6) на замкненій множині $U_{\alpha,\beta}$ повного простору U_α з леми 1. При цьому на розв'язок $y = f(x) \in U_{\alpha,\beta}$ рівняння (6) можна дивитись як на нерухому точку оператора A, що визначається рівністю

$$A(y) = y - T^{-1}F(x,y), \ \ y = f(x) \in U_{\alpha,\beta}. \tag{7}$$

За теоремою Банаха ця нерухома точка існує та єдина, коли оператор A відображає $U_{\alpha,\beta}$ у себе і є стиском. Спробуємо підібрати параметри α та β таким чином, щоб це виконувалося.

Подивимось, коли значення оператора A не виходитимуть за межі множини $U_{\alpha,\beta}$. Візьмемо довільну функцію $f \in U_{\alpha,\beta}$ і розпишемо різницю $A(f)(x) - y^0$, користуючись лемою 2:

$$A(f)(x) - y^0 = f(x) - T^{-1}F(x,f(x)) - y^0 =$$

$$= f(x) - y^0 - T^{-1}\big(F(x,f(x)) - F(x,y^0)\big) - T^{-1}F(x,y^0) =$$

$$= f(x) - y^0 - T^{-1}\Phi(x,f(x),y^0)(f(x)-y^0) - T^{-1}F(x,y^0) =$$

$$= T^{-1}\big(T - \Phi(x, f(x), y^0)\big)(f(x) - y^0) - T^{-1}F(x, y^0) \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0).$$

Звідси, враховуючи лему 1 п. 3.2.1, дістанемо нерівність

$$\|A(f)(x) - y^0\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|T - \Phi(x, f(x), y^0)\| \cdot \|f(x) - y^0\| +$$
$$+ \|T^{-1}\| \cdot \|F(x, y^0)\| \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0). \tag{8}$$

Нам потрібно визначити, коли з нерівності $\|f(x) - y^0\| \leqslant \beta$ випливає нерівність $\|A(f)(x) - y^0\| \leqslant \beta \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$.

За лемою 2, $\Phi(x, y, z) \to T = F'_y(x^0, y^0)$, коли $x \to x^0$, $y, z \to y^0$. Тому для довільного $q \in (0; 1)$ можна вказати такі $\alpha, \beta > 0$, що

$$\|T^{-1}\| \cdot \|T - \Phi(x, y, z)\| \leqslant q, \ \text{ коли } \ x \in \overline{O}_\alpha(x^0), \ y, z \in \overline{O}_\beta(y^0). \tag{9}$$

Після цього, враховуючи неперервність функції $F(x, y^0)$ у точці x^0 і рівність $F(x^0, y^0) = 0$, можна вказати таке $\alpha > 0$, що

$$\|T^{-1}\| \cdot \|F(x, y^0)\| \leqslant \beta(1 - q) \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0). \tag{10}$$

Отже, з нерівностей $(8) - (10)$ видно, що числа $\alpha, \beta > 0$ можна підібрати так, щоб

$$\|A(f)(x) - y^0\| \leqslant q\beta + \beta(1 - q) = \beta \ \forall f \in U_{\alpha,\beta} \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0).$$

Це означає, що $A\colon U_{\alpha,\beta} \to U_{\alpha,\beta}$ після належного вибору α та β.

Щоб з'ясувати, чи є оператор A стиском, візьмемо довільні дві функції $f_1, f_2 \in U_{\alpha,\beta}$ і, застосовуючи лему 2, розпишемо

$$A(f_1)(x) - A(f_2)(x) = f_1(x) - T^{-1}F(x, f_1(x)) - f_2(x) + T^{-1}F(x, f_2(x)) =$$
$$= f_1(x) - f_2(x) - T^{-1}\big(F(x, f_1(x)) - F(x, f_2(x))\big) =$$
$$= f_1(x) - f_2(x) - T^{-1}\Phi(x, f_1(x), f_2(x))(f_1(x) - f_2(x)) =$$
$$= T^{-1}\big(T - \Phi(x, f_1(x), f_2(x))\big)(f_1(x) - f_2(x)) \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0).$$

Звідси, враховуючи умову (9), дістанемо:

$$\|A(f_1)(x) - A(f_2)(x)\| \leqslant \|T^{-1}\| \cdot \|T - \Phi(x, f_1(x), f_2(x))\| \times$$
$$\times \|f_1(x) - f_2(x)\| \leqslant q\|f_1(x) - f_2(x)\| \ \forall f_1, f_2 \in U_{\alpha,\beta} \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0).$$

Тому буде виконуватися нерівність

$$\|A(f_1) - A(f_2)\|_U \leqslant q\|f_1 - f_2\|_U \ \forall f_1, f_2 \in U_{\alpha,\beta},$$

яка і означає, що оператор A є стиском.

Отже, виконано всі умови теореми Банаха, за якою оператор A, що визначається рівністю (6), має єдину нерухому точку. Тому існує єдина функція $f \in U_{\alpha,\beta}$ така, що $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$.

Оскільки $f \in U_{\alpha,\beta} \Leftrightarrow f\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \to \overline{O}_\beta(y^0)$, то можна сказати, що *рівняння* (1) *визначає єдину неявну функцію f у достатньо малому околі точки (x^0,y^0).*

Важливо знати також, коли знайдена вище неявна функція f буде неперервною. Виникає гіпотеза, що це матиме місце тоді, коли початкова функція F неперервна. Чи так це насправді?

Додамо до всіх попередніх умов, накладених на функцію $F(x,y)$, умову неперервності цієї функції у точці (x^0,y^0).

Проглянемо знову попереднє доведення спочатку. Виділимо у множині $U_{\alpha,\beta}$ підмножину $U^0_{\alpha,\beta}$, що складається тільки з неперервних у точці x^0 функцій. За лемою 1 множина $U^0_{\alpha,\beta}$ замкнена у повному просторі U_α. Оскільки функція $F(x,y)$ неперервна у точці (x^0,y^0), то оператор A, що визначається рівністю (6), переводить неперервну у точці x^0 функцію f у неперервну в точці x^0 функцію $A(f)$. Звідси випливає, що оператор A задовольняє всі умови теореми Банаха на множині $U^0_{\alpha,\beta} \subset U_{\alpha,\beta}$. Тому він має нерухому точку $g \in U^0_{\alpha,\beta}$. Оскільки ж у ширшій множині $U_{\alpha,\beta}$ він має єдину нерухому точку f, то $g = f$ і f є неперервною функцією у точці (x^0,y^0).

Нарешті, якщо замість неперервності функції $F(x,y)$ в одній точці (x^0,y^0) вимагати її неперервність в усій області $E \ni (x^0,y^0)$, то легко прийти до висновку, що неявна функція $y = f(x)$, $x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$, $y \in \overline{O}_\beta(y^0)$, що визначається рівнянням (1), є неперервною на всій своїй області визначення, тобто на замкненій кулі $\overline{O}_\alpha(x^0)$.

Справді, щоб це довести, досить розглянути ще одну підмножину $CU_{\alpha,\beta} \subset U^0_{\alpha,\beta} \subset U_{\alpha,\beta}$, яка складається з функцій $f(x)$, неперервних на $\overline{O}_\alpha(x^0)$. Ця множина теж замкнена у повному просторі U_α (за лемою 1) і відображається стискуючим оператором A сама у себе. Тому і в цій множині існує нерухома точка оператора A, звідки випливає, що цією нерухомою точкою є знайдена вище функція $f \in U_{\alpha,\beta}$, і що ця функція неперервна на $\overline{O}_\alpha(x^0)$. ■

Цим самим доведена

Теорема 1 (про існування, єдиність та неперервність неявної функції). *Припустимо, що виконуються умови:* 1) *функція $F(x,y) = F(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$ визначена в області $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ і набуває значень у просторі $\mathbb{R}^m$;* 2) $F(x^0,y^0) = 0$; 3) *функція*

$F(x,y^0)$ неперервна у точці x^0; 4) у деякому околі $S \subset E$ точки (x^0,y^0) існує частинна похідна $F'_y(x,y)$; 5) ця похідна $F'_y(x,y)$ неперервна у точці (x^0,y^0); 6) якобіан $\det F'_y(x^0,y^0) \neq 0$.

Тоді існують околи $\overline{O}_\alpha(x^0)$ та $\overline{O}_\beta(y^0)$ точок x^0 та y^0 і єдина функція $f\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \to \overline{O}_\beta(y^0)$ такі, що $F(x,f(x)) = 0$ $\forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$, тобто рівняння (1) *визначає єдину неявну функцію f, у достатньо малому околі точки (x^0,y^0).*

Якщо, крім того, виконується умова 7) *функція $F(x,y)$ неперервна у точці (x^0,y^0) (в області E), то і неявна функція $f(x)$, що визначається рівнянням* (1), *неперервна у точці (x^0,y^0) (у своїй області визначення).*

Зауваження. Найскладнішою у цій теоремі є умова 4), оскільки існування частинної похідної вектор-функції по вектор-змінній $F'_y(x,y)$ за означенням дуже важко встановити, хоча формально побудувати цю похідну у вигляді матриці Якобі досить просто (див. рівність (10) п. 3.1.7). Тільки у випадку, коли $m = 1$, тобто y є числовою змінною (і, відповідно, F є числовою функцією), питання про існування частинної похідної F'_y зводиться до питання існування звичайної похідної функції однієї змінної.

У загальному випадку, згідно з пп. 3.1.5, 3.1.7, існування частинної похідної $F'_y(x,y)$ в околі S точки (x^0,y^0) можна отримати із сильнішої умови 4*) *в околі S існують усі частинні похідні $\frac{\partial F_i(x,y)}{\partial y_j}$, $i,j \in \overline{1,m}$, причому вони є неперервними в S по змінній $y = (y_1,\ldots,y_m)$ при кожному фіксованому $x = (x_1,\ldots,x_n)$.*

Теорема 1 є однією з основних теорем математичного аналізу. Незважаючи на те, що вона є чистою теоремою існування (тобто не дає конкретного способу обчислення значень неявної функції), вона має багато важливих застосувань (наприклад, до питання про існування оберненої функції, про відкритість відображення, про відповідність меж тощо).

4.2.4. Диференційовність неявної функції. У цьому пункті нам знадобляться деякі властивості збіжних матриць у просторі $\mathbb{MR}^n_m$, які ми сформулюємо у вигляді леми.

Лема 3. Мають місце такі властивості матриць:

1° (про границю добутку). *Якщо $A_p \to A$ у просторі $\mathbb{MR}^n_m$, $B_p \to B$ у просторі $\mathbb{MR}^k_n$ при $p \to p_0$, то $A_pB_p \to AB$ у просто-*

рі $\mathbb{MR}^k_m$, *коли* $p \to p_0$;

2° (про неперервність визначника). *Якщо* $A_p \to A$ *у просторі* $\mathbb{MR}^n_n$ *при* $p \to p_0$, *то* $\det A_p \to \det A$ *у просторі* $\mathbb{R}^1$, *коли* $p \to p_0$;

3° (про границю обернених матриць). *Якщо* $A_p \to A$ *у просторі* $\mathbb{MR}^n_n$ *при* $p \to p_0$ *та існує обернена матриця* A^{-1}, *то* $A_p^{-1} \to A^{-1}$, *коли* $p \to p_0$.

□ Властивість 1° доводиться так само, як для числових функцій. Для доведення властивості 2° досить згадати, що визначник є лінійною комбінацією $n!$ добутків по n елементів матриці (причому n — фіксоване число) і врахувати, що збіжність матриць рівносильна збіжності її елементів.

Властивість 3° випливає з 2°. Справді, матриці обернені до $A = (a_{i,j})$ та $A_p = (a_{i,j}^{(p)})$, відповідно, мають вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{1,1}\ldots A_{n,1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1,n}\ldots A_{n,n}\end{pmatrix}, \quad A_p^{-1} = \frac{1}{\det A_p}\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(p)}\ldots A_{n,1}^{(p)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{1,n}^{(p)}\ldots A_{n,n}^{(p)}\end{pmatrix}, \tag{11}$$

де $A_{i,j}$ $\left(A_{i,j}^{(p)}\right)$ — алгебраїчні доповнення елементів $a_{i,j}$ $\left(a_{i,j}^{(p)}\right)$.

Якщо $A_p \to A$ $(p \to p_0)$ і $\det A \neq 0$, то за властивістю 2°

$$\det A_p \to \det A \ \ (p \to p_0),$$

причому $\det A_p \neq 0$ $\forall p \in O_\delta(p_0)$. Аналогічно $A_{i,j}^{(p)} \to A_{i,j}$ $(p \to p_0)$ $\forall i, j \in \overline{1,n}$. Звідси та з рівностей (11) дістаємо, що функція A_p^{-1} визначена в околі $O_\delta(p_0)$ і що $A_p^{-1} \to A^{-1}$ при $p \to p_0$. ■

Основним же завданням даного пункту є дослідження питання диференційовності неявної функції $y = f(x)$, що задається рівнянням (1).

□ Припустимо, що виконано умови 1) — 7) теореми 1 і крім того, існує похідна $F'_x(x^0,y^0)$. Тоді існує неперервна неявна функція $y = f(x)$, $x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$, така, що $F(x, f(x)) \equiv 0$ в $\overline{O}_\alpha(x^0)$ і $f(x^0) = y^0$.

Візьмемо Δx таким, щоб $x^0 + \Delta x \in O_\alpha(x^0)$. Застосовуючи формулу (5) та означення похідної до функції $G(x) = F(x,y^0)$, дістанемо:

$$0 = F(x^0 + \Delta x, f(x^0 + \Delta x)) - F(x^0, f(x^0)) =$$

$$= \big(F(x^0 + \Delta x, f(x^0 + \Delta x)) - F(x^0 + \Delta x, f(x^0)\big) +$$

$$+ \big(F(x^0 + \Delta x, f(x^0)) - F(x^0, f(x^0))\big) =$$

$$= \Phi(x^0+\Delta x, f(x^0+\Delta x), y^0)\big(f(x^0+\Delta x) - f(x^0)\big)+$$
$$+F'_x(x^0,y^0)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x,$$

де $\Phi(x,y,y^0) \to F'_y(x^0,y^0)$ при $x \to x^0$, $y \to y^0$, а $\gamma(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Після позначення $\Psi(\Delta x) = \Phi(x^0+\Delta x, f(x^0+\Delta x), y^0)$ останнє співвідношення набуде вигляду

$$\Psi(\Delta x)\Delta f(x^0) + F'_x(x^0,y^0)\Delta x + \gamma(\Delta x)\Delta x = 0 \ \forall \Delta x \in O_\alpha(0). \qquad (12)$$

З того, що функція $f(x)$ неперервна у точці x^0, а функція $\Phi(x,y,z)$ неперервна у точці (x^0,y^0,y^0), випливає, що $\Psi(\Delta x) \to F'_y(x^0,y^0)$ $(\Delta x \to 0)$. Оскільки при цьому $\det F'_y(x^0,y^0) \neq 0$, то за властивістю 3° леми 3 у достатньо малому околі нуля $O_{\alpha_1}(0) \subset O_\alpha(0)$ існують матриці $\Psi^{-1}(\Delta x)$, обернені до $\Psi(\Delta x)$, причому

$$\Psi^{-1}(\Delta x) \to [F'_y(x^0,y^0)]^{-1} \ (\Delta x \to 0). \qquad (13)$$

Виразимо тепер приріст $\Delta f(x^0) = f(x^0+\Delta x) - f(x^0)$ з рівності (12), помноживши її на $\Psi^{-1}(\Delta x)$:

$$\Delta f(x^0) = -\Psi^{-1}(\Delta x)F'_x(x^0,y^0)\Delta x - \Psi^{-1}(\Delta x)\gamma(\Delta x)\Delta x =$$
$$= -[F'_y(x^0,y^0)]^{-1}F'_x(x^0,y^0)\Delta x +$$
$$+\big([F'_y(x^0,y^0)]^{-1} - \Psi^{-1}(\Delta x)\big)F'_x(x^0,y^0)\Delta x - \Psi^{-1}(\Delta x)\gamma(\Delta x)\Delta x.$$

Звідси випливає, що в околі нуля $O_{\alpha_1}(0)$

$$\Delta f(x^0) = -[F'_y(x^0,y^0)]^{-1}F'_x(x^0,y^0)\Delta x + \gamma_1(\Delta x)\Delta x,$$

де в силу умови (13)

$$\gamma_1(\Delta x) = \big([F'_y(x^0,y^0)]^{-1} - \Psi^{-1}(\Delta x)\big)F'_x(x^0,y^0) - \Psi^{-1}(\Delta x)\gamma(\Delta x) \to 0,$$

коли $\Delta x \to 0$.

Тому за означенням функція f диференційовна у точці x^0 і правильна рівність $f'(x^0) = -[F'_y(x^0,y^0)]^{-1}F'_x(x^0,y^0)$. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (про диференційовність неявної функції). *Якщо виконано умови* 1) – 7) *теореми* 1 *та існує частинна похідна* $F'_x(x^0,y^0)$, *то неявна функція* f, *що визначається рівнянням* (1), *є диференційовною у точці* x^0 *і*

$$f'(x^0) = -[F'_y(x^0,y^0)]^{-1}F'_x(x^0,y^0). \qquad (14)$$

Зауваження 1. Якщо в теоремі 2 вимагати існування $F'_x(x,y)$ та неперервність $F'_y(x,y)$ і $F(x,y)$ не тільки в одній точці (x^0,y^0), а в усьому околі $S \ni (x^0, y^0)$, то неявна функція $f(x)$ з теореми 2 буде диференційовною в околі $O_\alpha(x^0)$. Це випливає з того, що в доведенні теореми 2 замість точки (x^0, y^0) при зроблених нових припущеннях можна взяти довільну іншу точку $(x^*, y^*) \in O_\alpha(x^0) \times O_\beta(y^0)$.

Зауваження 2. При застосуванні теореми 2 слід уважно стежити за природою об'єктів, які в ній фігурують при різних значеннях n та m. Наприклад, якщо $n = 1$, а $m = 2$, то в рівності (14) $f'(x^0)$ та $F'_x(x^0, y^0)$ — вектор-стовпчики з двома координатами, а $[F'_y(x^0, y^0)]^{-1}$ — 2×2-вимірна матриця. Звичайно, порядок множення у рівності (14) змінювати не можна.

Приклади. 1. Якщо $y(x)$ — неявна функція, що задається рівнянням $x^3 + 2xy - y^2 = 0$, то $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{3x^2+2y}{2x-2y}$.

2. Якщо неявну функцію $z(x,y)$ задано рівнянням $x^y + z^y = 0$, то $z'(x,y) = -\frac{1}{F'_z} F'_{(x,y)} = -\frac{1}{F'_z}(F'_x, F'_y) = -\frac{1}{yz^{y-1}}\left(yx^{y-1}, x^y \ln x + z^y \ln z\right)$.

3. Якщо неявну функцію $\binom{u}{v}(x,y)$ задано рівнянням $\binom{x-y^2+u-v}{xy-u+2v} = 0$, то

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}'(x,y) = -[F'_{(u,v)}]^{-1} F'_{(x,y)} = -\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y & x \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ y & x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2+y & -4y+x \\ 1+y & -2y+x \end{pmatrix}.$$

У даному прикладі функцію $\binom{u}{v}(x,y)$ можна виразити явно. А саме:

$$\begin{cases} x - y^2 + u - v = 0, \\ xy - u + 2v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2y^2 - xy - 2x, \\ v = y^2 - xy - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y^2 - xy - 2x \\ y^2 - xy - x \end{pmatrix}.$$

Якщо тепер обчислити $\binom{u}{v}'(x,y)$ за формулою (9) п. 3.1.6, то знову вийде отриманий вище результат.

4.2.5. Існування та диференційовність оберненої функції. Розглянемо тепер питання про обернену функцію кількох змінних.

□ Припустимо, що D — область у просторі $\mathbb{R}^n$ і $f\colon D \to \mathbb{R}^n$. Перепишемо рівність $x = f(y)$, $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^n$, у вигляді

$$F(x,y) := f(y) - x = 0, \ \ (x,y) \in D_1 \subset \mathbb{R}^{2n}. \tag{15}$$

Візьмемо довільне фіксоване значення функції f, тобто $f(y^0) = x^0$. Якщо рівняння (15) визначає єдину неявну функцію $y = g(x)$ у достатньо малому околі $\overline{O}_\alpha(x^0) \times \overline{O}_\beta(y^0)$ точки (x^0, y^0), то ця функція визначена в околі $\overline{O}_\alpha(x^0)$ і є оберненою до функції $x = f(y)$, розглядуваної в околі $\overline{O}_\beta(y^0)$.

Згадуючи теореми 1 і 2, вимагатимемо від функції $f(y)$ оборотність матриці $F_y'(x,y) = f'(y)$ та неперервність $f'(y)$ в області $D \subset \mathbb{R}^n$. Тоді в області $D_1 = D \times \mathbb{R}^n$ функція $F(x,y) = f(y) - x$ задовольнятиме всі умови теорем 1 та 2.

За теоремою 1 існують достатньо малі околи $\overline{O}_\alpha(x^0)$ та $\overline{O}_\beta(y^0)$ точок x^0 та y^0 і єдина функція $g\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \to \overline{O}_\beta(y^0)$. Як зазначалося, ця функція g є оберненою до функції f, розглядуваної в околі $\overline{O}_\beta(y^0)$. За теоремою 2 та зауваженням 1 функція g диференційовна у кожній точці $x^* \in O_\alpha(x^0)$ і

$$g'(x^*) = -[F_y'(x^*,y^*)]^{-1} F_x'(x^*,y^*) = -[f'(y^*)]^{-1}[-I] = [f'(y^*)]^{-1},$$

де $y^* = f(x^*)$, а I — одинична $n \times n$-матриця.

Зауважимо також, що кожна точка $x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$ є значенням функції f, оскільки $f(g(x)) - x = 0$ $\forall x \in \overline{O}_\alpha(x^0)$. Тому множина $E(f)$ значень функції f є відкритою. За теоремою про зв'язність образу $E(f)$ також зв'язна, а тому $E(f)$ є областю. ■

Проведені міркування показують, що правильне наступне твердження.

Теорема 3 (про існування та диференційовність оберненої функції). *Нехай функція* $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ *має неперервну похідну в області* $D \subset \mathbb{R}^n$ *і* $\det f'(y) \neq 0$ $\forall y \in D$. *Тоді* 1) *множина* $E(f) = f(D)$ *значень цієї функції є областю в* $\mathbb{R}^n$; 2) $\forall x_0 \in D$ *існують околи* $\overline{O}_\alpha(x^0)$ *і* $\overline{O}_\beta(y^0)$ *такі, що* $f\colon \overline{O}_\beta(y^0) \leftrightarrow \overline{O}_\alpha(x^0)$, *а отже, існує обернена до* f *функція* $g\colon \overline{O}_\alpha(x^0) \leftrightarrow \overline{O}_\beta(y^0)$; 3) *функція* $g(x)$ *диференційовна в околі* $O_\alpha(x^0)$, *причому*

$$g'(x) = [f'(y)]^{-1} \quad \forall x = f(y) \in O_\alpha(x^0).$$

Відображення f, що задовольняє умови теореми 3, є взаємно однозначним у деякому околі кожної точки своєї області визначення. Проте це ще не означає, що воно взаємно однозначне на всій області визначення. Можна сказати лише, що воно локально взаємно однозначне.

З іншого боку, теорема 3 дає достатні умови для того, щоб відображення було відкритим. Пояснимо, що це означає. Як відомо (див. завдання 4 п. 2.2.6), відображення f відкритої множини G метричного простору X у метричний простір Y є неперервним тоді і тільки тоді, коли прообраз $f^{-1}(E)$ довільної відкритої множини

E простору Y відкритий в X. Проте далеко не при кожному неперервному відображенні $f\colon G \to Y$ образ $f(M)$ відкритої у просторі X множини $M \subset G$ є відкритою множиною у просторі Y. Якщо ж це виконується, то таке відображення називається *відкритим*. При доведенні теореми 3 фактично було встановлено, що *відображення $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ є відкритим, коли воно задане на відкритій множині $G \subset \mathbb{R}^n$, має на D неперервну похідну f' і відмінний від нуля якобіан* $\det f'$.

Застосуємо тепер теорему 3 до ситуації, коли $f\colon \overline{D} \leftrightarrow E$, причому функція f неперервна на замкненій області $\overline{D}$, а всередині області D має неперервну похідну f' та якобіан $\det f' \neq 0$. Виникає питання, чи завжди при такому відображенні f внутрішнім точкам відповідають внутрішні, а межовим — межові.

□ Позначимо $D_1 = f^{-1}(E^\circ)$, тобто прообраз внутрішності множини E. Множина D_1 є відкритою як неперервний прообраз відкритої множини. А множина $G = f(D)$ відкрита в силу теореми 3. Тому $G \subset E^\circ \subset E \Rightarrow D = f^{-1}(G) \subset f^{-1}(E^\circ) = D_1 \subset \overline{D}$. Оскільки множини D і D_1 відкриті, то звідси дістаємо $D_1 = D \Rightarrow f(D_1) = f(D)$, або $f(D) = E^\circ$.

Отже, справді, внутрішні точки відображаються у внутрішні. Оскільки всі точки будь-якої множини поділяються на внутрішні та межові, а відображення f взаємно однозначне, то образами межових точок можуть бути лише межові точки. Точніше, $f(\partial D) \subset$ $\subset \partial E$. Якщо виявиться, що множина E замкнена, то $\partial E \subset E$ і тому $f(\partial D) = \partial E$. ■

Таким чином, з теореми 3 випливає досить важливий

Наслідок 1 (про відповідність меж). *Нехай $\overline{D}, E \subset \mathbb{R}^n$, а функція $f\colon \overline{D} \leftrightarrow E$ неперервна на замкненій області $\overline{D}$ і має неперервну похідну $f'(x)$, визначник якої* $\det f'(x) \neq 0$ *всередині області D. Тоді $f(D) = E^\circ$, а $f(\partial D) \subset \partial E$, тобто внутрішнім точкам відповідають внутрішні, а межовим — межові. Зокрема, якщо множина E замкнена, то $f(\partial D) = \partial E$.*

Пов'язуючи комплексну функцію $f = u + iv\colon D \to \mathbb{C}$ з векторфункцією $f = (u, v)\colon D \to \mathbb{R}^2$, можна отримати ще один

Наслідок 2 (теорема про оборотність аналітичної функції). *Нехай функція f аналітична в області $D \subset \mathbb{C}$ і $f'(z) \neq 0\ \forall z \in D$.*

Тоді 1) $E = f(D)$ *є областю в* $\mathbb{C}$; 2) $\forall z_0 \in D$ *існує область* $D_1 \subset D$: $z_0 \in D_1$, $f(D_1) = E_1$ *і* $f\colon D_1 \leftrightarrow E_1$; 3) *існує обернена функція* $f^{-1}\colon E_1 \leftrightarrow D$ *і* 4) f^{-1} *є аналітичною функцією в області* E_1, *причому* $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ $\forall w = f(z) \in E_1$.

4.2.6. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна функція є неявною функцією.
2. Кожна аналітично задана функція є неявною функцією.
3. Кожний аналітично заданий функціонал є неявною функцією.
4. Кожна неявна функція є функцією.
5. Рівняння $x^2 - y^2 + 1 = 0$ задає безліч неявних функцій.
6. Рівняння $x^2 - y^2 + 1 = 0$ задає безліч неперервних неявних функцій.
7. Якщо $\delta > 0$ достатньо мале, а $(x_0, y_0) \neq (0; 0)$, то рівняння $x^2 - y^2 + 1 = 0$, $(x, y) \in O_\delta(x_0, y_0)$, задає єдину неявну функцію, яка диференційовна і має обернену функцію.
8. Теорема про існування та єдиність неперервної неявної функції є наслідком теореми Банаха про нерухому точку стиску.
9. Якщо виконано умови теореми 2 і F'_x та F'_y неперервні в області D, то неявна функція f має неперервну похідну в достатньо малому околі точки x_0.
10. Теорема про існування та диференційовність оберненої функції є наслідком теореми про диференційовність неявної функції.
11. Якщо виконано умови теореми 3, то $f\colon D \leftrightarrow f(D)$.
12. Якщо $f(x, y) = (u, v)$, де $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$, то 1) f задовольняє умови теореми 3 і 2) $f\colon \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

II. Довести дані твердження.

1. Функція $f(x) = x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, диференційовна на $\mathbb{R}$, але не має оберненої функції у будь-якому околі точки $x_0 = 0$.
2. За умов наслідку 1 обернена до f функція g має в області E° неперервну похідну $g'(y)$ і $\det g'(y) \neq 0$.
3. Якщо в умовах наслідку 1 множина D обмежена, то множина E замкнена, а обернена до f функція g неперервна на E.
4. Наслідок 2 з теореми 3 є правильним твердженням.

4.3. Екстремуми функцій кількох змінних

У цьому підрозділі розглянуто застосування диференціального числення до відшукання екстремумів функцій кількох змінних.

4.3.1. Локальні екстремуми. Необхідна умова. Нехай функція $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена і неперервна в області $D \subset \mathbb{R}^n$ і набуває дійсних значень. Кажуть, що ця *функція має у точці* $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in D$ *найбільше* (*найменше*) *значення* і записують $f_{\max} = f(M_0)$ ($f_{\min} = f(M_0)$), якщо $\exists O(M_0)$: $f(M) \leqslant f(M_0)$ ($f(M) \geqslant f(M_0)$) $\forall M = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in O(M_0)$. При цьому *точку* M_0 називають *точкою максимуму (мінімуму)* або *точкою екстремуму* функції f і кажуть також, що *функція f має екстремум у точці* M_0.

Зауважимо, що поняття екстремуму функції у точці M_0 характеризує поведінку функції у достатньо малому околі точки M_0. Тому цей екстремум (максимум або мінімум) називають ще *локальним екстремумом* (максимумом або мінімумом). На відміну від цього $\max\limits_{M \in D} f(M)$ та $\min\limits_{M \in D} f(M)$ називають *глобальним екстремумом*, максимумом або мінімумом відповідно.

□ Припустимо, що $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка екстремуму функції f (наприклад, точка максимуму) та існує $f'_{x_k}(M_0)$. Тоді неважко зрозуміти, що точка x_k^0 є точкою екстремуму функції однієї змінної $\varphi(x_k) = f(x_1^0, \ldots, x_{k-1}^0, x_k, x_{k+1}^0, \ldots, x_n^0)$. З іншого боку, за означенням частинної похідної $f'_{x_k}(M_0) = \varphi'(x_k^0)$. За необхідною умовою екстремуму функції однієї змінної $\varphi'(x_k^0) = 0$. Звідси дістаємо, що $f'_{x_k}(M_0) = 0$. ■

Таким чином, має місце

Теорема 1 (про необхідну умову екстремуму). *Якщо M_0 — точка екстремуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, причому при якомусь $k \in \overline{1,n}$ існує частинна похідна $f'_{x_k}(M_0)$, то $f'_{x_k}(M_0) = 0$.*

Згадуючи необхідні умови диференційовності (теорема 1 п. 3.1.2) і формули обчислення диференціала (п. 3.2.1), з теореми 1 дістанемо

Наслідок 1 (про необхідну умову екстремуму). *Якщо функція $f(M)$ диференційовна у своїй точці екстремуму M_0, то її диференціал $d f(M_0) = 0$.*

4.3.2. Достатні умови екстремуму. У зв'язку з теоремою 1 точку M_0, для якої $f'_{x_1}(M_0) = f'_{x_2}(M_0) = \ldots = f'_{x_n}(M_0) = 0$, називають *стаціонарною точкою* функції f. Якщо M_0 — стаціонарна точка функції f або ця функція неперервна, проте недиференційовна у точці M_0 по якій-небудь змінній, то M_0 називають *критичною точкою функції* f. Отже, за теоремою 1, точки екстремуму функції f слід шукати серед її критичних точок. Проте *не кожна критична і навіть не кожна стаціонарна точка функції f є точкою екстремуму цієї функції.*

Приклад 1. Нехай $f(x,y) = xy\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Тоді $f'_x(x,y) = y$ і $f'_y(x,y) = x\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, а отже, точка $M_0 = (0,0)$ є стаціонарною точкою функції f. Разом з тим $f(0,0) = 0$, а $f(x,y) < 0$, коли $xy < 0$, і $f(x,y) > 0$, коли $xy > 0$, і тому ця точка M_0 не є точкою екстремуму функції f.

Дослідимо, коли стаціонарна точка функції f напевно є її точкою екстремуму.

□ Припустимо, що M_0 — стаціонарна точка функції f, яка має в деякому околі $O_R(M_0)$ точки M_0 неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді за формулою Тейлора (12) п. 3.3.3

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d_h^2 f(\overline{M})\ \ \forall M \in O_R(M_0), \tag{1}$$

де $h = M - M_0 = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, $\overline{M} = M_0 + \theta h$ і $0 < \theta < 1$.

Оскільки за формулою (8) п. 3.3.2

$$d_h^2 f(N) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\, h_k\Big)^2 f(N) \tag{2}$$

$\forall N \in O_R(M_0)$ і $\forall h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, то зокрема функція $d_h^2 f(M_0)$ неперервна по змінній h на всьому просторі $\mathbb{R}^n$.

Припустимо, що $d_h^2 f(M_0) > 0$, коли $\|h\| = 1$. Тоді, враховуючи компактність одиничної сфери у просторі $\mathbb{R}^n$, за другою теоремою Вейєрштрасса дістанемо, що $\min\limits_{\|h\|=1} d_h^2 f(M_0) = c > 0$.

Звідси та з рівності (2) для довільного $h \neq 0$ випливає, що $d^2_{\frac{h}{\|h\|}} f(M_0) = \frac{1}{\|h\|^2} d_h^2 f(M_0) \geqslant c$, а відтак

$$d_h^2 f(M_0) \geqslant c\|h\|^2 > 0\ \ \forall h \neq 0. \tag{3}$$

Розпишемо $d_h^2 f(\overline{M})$ з рівності (1) так:

$$d_h^2 f(\overline{M}) = d_h^2 f(M_0) + \big(d_h^2 f(\overline{M}) - d_h^2 f(M_0)\big). \tag{4}$$

З рівності (2) та неперервності частинних похідних у точці M_0 випливає, що для $h = M - M_0 = (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \neq 0$

$$\frac{1}{\|h\|^2}\big(d_h^2 f(\overline{M}) - d_h^2 f(M_0)\big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\Delta x_k}{\|h\|}\Big)^2 \big(f(\overline{M}) - f(M_0)\big) \to 0,$$

коли $h \to 0$, або, що те саме, $M \to M_0$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists O_r^*(M_0) \subset O_R(M_0)$: $|d_h^2 f(\overline{M}) - d_h^2 f(M_0)| < \varepsilon \|h\|^2$, коли $M \in O_r^*(M_0)$.

Вважаючи $\varepsilon < c$, із співвідношень (3) та (4) дістанемо:

$$d_h^2 f(\overline{M}) > c\|h\|^2 - \varepsilon\|h\|^2 = (c-\varepsilon)\|h\|^2 > 0 \ \forall M \in O_r^*(M_0).$$

Тому

$$f(M) - f(M_0) = \frac{1}{2} d_h^2 f(\overline{M}) > 0 \ \forall M \in O_r^*(M_0),$$

тобто M_0 — точка мінімуму функції f.

Аналогічно показуємо, що коли $d_h^2 f(M_0) < 0$ $\forall h$: $\|h\| = 1$, то $d_h^2 f(M_0) < 0$ $\forall h \neq 0$ і M_0 — точка максимуму функції f.

Припустимо, що існують $h_1 \neq 0$ і $h_2 \neq 0$, для яких $d_{h_1}^2 f(M_0) \times \times d_{h_2}^2 f(M_0) < 0$, наприклад, $d_{h_1}^2 f(M_0) < 0$ і $d_{h_2}^2 f(M_0) > 0$. Тоді $\forall \alpha > 0$ і $h_1 \neq 0$ маємо

$$d_{\alpha h_1}^2 f(M_0) = \alpha^2 d_{h_1}^2 f(M_0) < 0, \ \ d_{\alpha h_1}^2 f(\overline{M}) = \alpha^2 d_{h_1}^2 f(\overline{M})$$

і

$$d_{\alpha h_1}^2 f(\overline{M}) = d_{\alpha h_1}^2 f(M_0) + (d_{\alpha h_1}^2 f(\overline{M}) - d_{\alpha h_1}^2 f(M_0)) =$$

$$= \alpha^2 \Big(d_{h_1}^2 f(M_0) + \big(d_{h_1}^2 f(\overline{M}) - d_{h_1}^2 f(M_0) \big) \Big),$$

де $\overline{M} = M_0 + \theta\alpha h_1$. При цьому

$$d_{h_1}^2 f(\overline{M}) - d_{h_1}^2 f(M_0) = o(1) \ \ (M \to M_0)$$

в силу неперервності других частинних похідних.

Оскільки h_1 фіксоване, а $M \to M_0$, коли $\alpha \to 0$, то

$$d_{\alpha h_1}^2 f(\overline{M}) = \alpha^2 (d_{h_1}^2 f(M_0) + o(1)), \ \text{ коли } \ 0 < \alpha \to 0.$$

Тому $f(M_1) - f(M_0) = \frac{1}{2} d_{\alpha h_1}^2 f(\overline{M}) < 0$ для всіх досить малих $\alpha > 0$ і $M_1 = M_0 + \alpha h_1$, тобто у будь-якому околі точки M_0 є точки M_1, для яких $f(M_1) < f(M_0)$. Аналогічно показуємо існування точок M_2, як завгодно близьких до M_0 і таких, що $f(M_2) > f(M_0)$. Це означає, що M_0 не є точкою екстремуму функції f. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (про достатні умови існування та неіснування екстремуму). *Нехай функція f має в околі своєї стаціонарної точки M_0 неперервні другі частинні похідні. Тоді* 1) *якщо* $d_h^2 f(M_0) > 0$ $\forall h \neq 0$, *то* M_0 — *точка мінімуму функції* f; 2) *якщо* $d_h^2 f(M_0) < < 0$ $\forall h \neq 0$, *то* M_0 — *точка максимуму функції* f; 3) *якщо*

$d^2_{h_1} f(M_0) d^2_{h_2} f(M_0) < 0$ *для деяких* h_1 *і* h_2, *то* M_0 *не є точкою екстремуму функції* f.

Приклад 2. Розглянемо функцію $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. Маємо $f'_x(x,y) = 3y - 3x^2$, $f'_y(x,y) = 3x - 3y^2$. Тому стаціонарні точки знаходимо, розв'язуючи систему

$$\begin{cases} y - x^2 = 0, \\ x - y^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x - x^4 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, функція має дві стаціонарні точки: $M_0 = (0;0)$ і $M_1 = (1;1)$. Оскільки $f''_{xx} f(x,y) = -6x$, $f''_{xy}(x,y) = 3$ і $f''_{yy}(x,y) = -6y$, то $d^2_h f(M_0) = 6(x - x_0)(y - y_0) = 6xy$, де $h = (x,y)$. Вибираючи $h_1 = (1;1)$ і $h_2 = (1;-1)$, дістаємо $d^2_{h_1} f(M_0) \cdot d^2_{h_2} f(M_0) = 6 \cdot (-6) < 0$. Тому за теоремою 2 точка M_0 не є точкою екстремуму функції f.

Далі маємо $d^2_h f(M_1) = -6(x-1)^2 + 6(x-1)(y-1) - 6(y-1)^2 = -6\big(((x-1) - \frac{y-1}{2})^2 - \frac{(y-1)^2}{4} + (y-1)^2\big) = -6\big((x-1-\frac{y-1}{2})^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2\big) < 0$, коли $h = (x-1, y-1) \neq (0;0)$. За теоремою 2 точка $(1;1)$ є точкою максимуму функції f.

Для функції двох змінних з теореми 2 випливають інші достатні умови екстремуму.

☐ Оскільки $d^2_h f(M_0) = f''_{x^2}(M_0)\Delta x^2 + 2 f''_{xy}(M_0)\Delta x \Delta y + f''_{y^2}(M_0)\Delta y^2$, то у випадку $d^2_h f(M_0) > 0\ \forall h \neq 0$ або $d^2_h f(M_0) < 0\ \forall h \neq 0$ не може бути, щоб $A := f''_{x^2}(M_0) = 0$ і $C := f''_{y^2}(M_0) = 0$ (впевніться у цьому). Припустимо, що $A \neq 0$. Тоді якщо $B := f''_{xy}(M_0)$, то

$$A \cdot d^2_h f(M_0) = (A^2\Delta x^2 + 2AB\Delta x\Delta y + B^2\Delta y^2 + (AC - B^2)\Delta y^2) =$$
$$= \big((A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC - B^2)\Delta y^2\big) > 0\ \forall h \neq 0, \qquad (1)$$

коли $AC - B^2 > 0$, причому знак $d^2_h f(M_0)$ збігається із знаком $A = f''_{xx}(M_0)$.

Те саме дістаємо у випадку $C \neq 0$. Тому точка M_0 є точкою екстремуму функції f, коли $AC - B^2 > 0$, а саме M_0 — точка мінімуму (максимуму) функції f, коли $A > 0$ (коли $A < 0$).

Припустимо, що $AC - B^2 < 0$. Тоді для $A = 0$ маємо $B \neq 0$ і $d^2_h f(M_0) = \Delta y(2B\Delta x + C\Delta y) > 0$, коли $h = (\Delta x, \Delta y)$ таке, що $\Delta y > 0$, а $2B\Delta x > -C\Delta y$. Крім того, $d^2_h f(M_0) < 0$, коли $h = (\Delta x, \Delta y)$ таке, що $\Delta y < 0$, а $2B\Delta x > -C\Delta y$. Якщо $A \neq 0$, то з рівності (1) дістаємо, що $A \cdot d^2_h f(M_0) < 0$, коли $h = (\Delta x, \Delta y)$ таке, що $\Delta y \neq 0$ і $A\Delta x + B\Delta y = 0$. Вибравши $\Delta y = 0$, з рівності (1) дістанемо, що $A \cdot d^2_h f(M_0) > 0$.

Отже, якщо $AC - B^2 < 0$, то $\exists h_1$ і h_2: $d^2_{h_1} f(M_0) \cdot d^2_{h_2} f(M_0) < 0$ і тому за теоремою 2 точка M_0 не є точкою екстремуму функції f. ■

Таким чином, правильна

Теорема 3 (про достатні умови екстремуму функції двох змінних). *Нехай функція $f(x,y)$ має в околі своєї стаціонарної точки $M_0 = (x_0,y_0)$ неперервні другі похідні і нехай $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$ і $C = f''_{yy}(M_0)$. Тоді 1) якщо $AC - B^2 > 0$, то M_0 — точка екстремуму функції f, а саме $f(M_0) = f_{\min}$, коли $A > 0$ і $f(M_0) = f_{\max}$, коли $A < 0$; 2) якщо $AC - B^2 < 0$, то M_0 не є точкою екстремуму функції f.*

Зауважимо, що теорему 3 можна застосувати лише до функцій двох змінних, а теорему 2 — до функцій будь-якої кількості змінних.

Приклад 3. Для функції $f(x,y)$ з прикладу 1 маємо: $A(M_0) = C(M_0) = 0$, $B(M_0) = 3$, тобто $AC - B^2 = -3 < 0$ і точка $M_0 = (0,0)$ не є точкою екстремуму функції f; $A(M_1) = C(M_1) = -6$, $B(M_1) = 3$, тобто $AC - B^2 = 27 > 0$ і точка $M_1 = (1,1)$ є точкою максимуму функції f.

Зауважимо, що у випадку, коли у теоремі 3 число $\Delta = 0$, екстремум у точці M_0 може як існувати, так і не існувати.

Приклад 4. Для функцій $f(x,y) = x^4 + y^4$ та $g(x,y) = x$ в околі їхньої стаціонарної точки $M_0 = (0,0)$ виконуються всі умови теореми 3, але $\Delta = 0$. При цьому функція f має у точці M_0 мінімум, а функція g не має екстремуму ні в точці M_0, ні в жодній іншій точці. Графік функції f схожий на параболоїд обертання (див. рис. 10 п. 2.1.1). Графіком функції g є площина, яка проходить чарез початок координат і перерізає площину OXZ по бісектрисі $z = x$.

4.3.3. Глобальний естремум. Припустимо, що функція f неперервна на компактній області $\overline{D}$. Тоді за другою теоремою Вейєрштрасса існують

$$H = \max_{M \in \overline{D}} f(M) = f(M^*) \ \text{ і } \ h = \min_{M \in \overline{D}} f(M) = f(M_*).$$

На жаль, друга теорема Вейєрштрасса не дає алгоритму знаходження чисел h і H — глобальних ектремумів функції f. Разом з тим легко бачити, що коли $M_* \in D$ ($M^* \in D$), то вона є точкою екстремуму функції f, а тому є критичною точкою цієї функції. Отже, глобальні екстремуми функції f слід шукати серед її значень у критичних точках та на межі області D.

Приклад 5. Нехай $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$, а $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2 - x\}$. Як показано у прикладі 1, критичними точками функції f є точки $M_0 = (0;0)$ і $M_1 = (1;1)$, причому $f(M_0) = 0$, $f(M_1) = 1$.

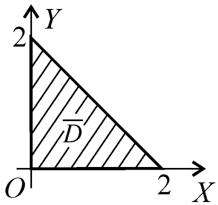

Рис. 20

Межа $\overline{D}$ складається з відрізків OA: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 0$, OB: $0 \leqslant y \leqslant 2$, $x = 0$ і BA: $0 \leqslant x \leqslant 2$, $y = 2 - x$ (див. рис. 20).

Якщо $M = (x,0) \in OA$, то $f(M) = -x^3$ спадає на відрізку $[0;2]$, а тому зафіксуємо значення $f(0;0) = 0$ і $f(2;0) = -8$. Якщо $M = (0,y) \in OB$, то $f(M) = -y^3$ і аналогічно фіксуємо значення $f(0;2) = -8$. Нарешті, якщо $M = (x,y) \in BA$, то $f(M) = 3x(2-x) - x^3 - (2-x)^3 = 6x - 3x^2 - x^3 - 8 + 12x - 6x^2 + x^3 = 18x - 9x^2 - 8 =: \varphi(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 18 - 18x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Тому фіксуємо значення $\varphi(0) = f(0;2) = -8$, $\varphi(1) = f(1;1) = 1$ і $\varphi(2) = f(2;0) = -8$.

Серед усіх зафіксованих значень функції f вибираємо найбільше і найменше: $H = f(1;1) = 1 = \max\limits_{(x,y)\in\overline{D}} f(x,y)$ і $h = f(0;2) = f(2;0) = -8 = \min\limits_{(x,y)\in\overline{D}} f(x,y)$. Це і будуть глобальні екстремуми функції f.

4.3.4. Умовні екстремуми. Як тільки що показано, задача відшукання глобального екстремуму функції $f(M)$ звелася до задачі відшукання екстремуму функції $f(M)$, коли на точки M накладено якісь додаткові умови (наприклад, щоб вони лежали на межі області D). Досить часто ці додаткові умови визначаються у вигляді

$$\varphi_k(M) = 0,\ k \in \overline{1,r}.$$

Припустимо, що накладено одну додаткову умову вигляду $\varphi(M) = 0$, яка задає у просторі $\mathbb{R}^n$ деяку замкнену обмежену множину S, що лежить в області D. Тоді $\max\limits_{M\in S} f(M) = f(M^*)$ і $\min\limits_{M\in S} f(M) = f(M_*)$ називаються відповідно *умовними максимумом* та *мінімумом* або *умовними екстремумами функції* f. Точки M^* і M_* називають при цьому *точками умовного екстремуму* (відповідно максимуму та мінімуму).

□ Нехай $M_0 = (x_0,y_0,z_0)$ — точка умовного екстремуму функції f і нехай функції f і φ мають неперервні частинні похідні першого порядку в D, причому $\varphi'(M_0) \neq \theta$. Тоді якась частинна похідна функції φ у точці M_0 відмінна від нуля. Вважатимемо, що це φ'_z, тобто $\varphi'_z(M_0) \neq 0$. Тоді за теоремою про існування та диференційовність неявної функції рівняння $\varphi(x,y,z) = 0$ задає неявну функцію $z=z(x,y)$, $(x,y)\in O(x_0,y_0)$, причому $z'_x(x_0,y_0)=-\frac{\varphi'_x(M_0)}{\varphi'_z(M_0)}$ і $z'_y(x_0,y_0)=-\frac{\varphi'_y(M_0)}{\varphi'_z(M_0)}$.

Зрозуміло, що для функції $f_1(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ точка (x_0,y_0) є точкою екстремуму, а тому $(f_1)'_x(x_0,y_0)=(f_1)'_y(x_0,y_0)=0$. Згадуючи теорему про диференційовність складеної функції, дістаємо

$$0=(f_1)'_x(x_0,y_0)=f'_x(M_0)+f'_z(M_0)\cdot z'_x(x_0,y_0)= \\ =f'_x(M_0)-\frac{f'_z(M_0)}{\varphi'_z(M_0)}\cdot\varphi'_x(M_0),$$

$$0=(f_1)'_y(x_0,y_0)=f'_y(M_0)+f'_z(M_0)\cdot z'_y(x_0,y_0)= \\ =f'_y(M_0)-\frac{f'_z(M_0)}{\varphi'_z(M_0)}\cdot\varphi'_y(M_0).$$

Позначимо $\lambda_0=\frac{f'_z(M_0)}{\varphi'_z(M_0)}$ і $F(x,y,z,\lambda):=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)$. Тоді

$$\begin{cases} f'_x(M_0)-\lambda_0\varphi'_x(M_0)=F'_x(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)=0, \\ f'_y(M_0)-\lambda_0\varphi'_y(M_0)=F'_y(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)=0, \\ f'_z(M_0)-\lambda_0\varphi'_z(M_0)=F'_z(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)=0, \\ -\varphi(x_0,y_0,z_0)=F'_\lambda(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)=0. \end{cases}$$

Останні рівності означають, що (x_0,y_0,z_0,λ_0) — стаціонарна точка функції $F(x,y,z,\lambda):=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z)$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 4 (про точки умовного екстремуму). *Нехай функції f і φ мають неперервні частинні похідні в області D, причому $\varphi'(M)\neq 0$ $\forall M\in D$. Тоді точки умовного екстремуму функції f (з умовою $\varphi(M)=0$) знаходяться серед стаціонарних точок функції*

$$F(x,y,z,\lambda):=f(x,y,z)-\lambda\varphi(x,y,z),\ \ (x,y,z,\lambda)\in D\times\mathbb{R}^1.$$

В загальному випадку, коли задаються умови $\varphi_k(M)=0$, $k\in\overline{1,r}$, причому в кожній точці $M=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D$ ранг матриці Якобі системи функцій $\varphi_k(M)$ дорівнює $r\leqslant n$, точки умовного екстремуму знаходяться серед стаціонарних точок функції

$$F(x_1,\ldots,x_n,\lambda_1,\ldots,\lambda_r)=f(x_1,\ldots,x_n)-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k\varphi_k(x_1,\ldots,x_n).$$

Знайти ці стаціонарні точки можна за допомогою теореми 1. Якщо вони мають вигляд $(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)},\lambda_1^{(i)},\dots,\lambda_r^{(i)})$, $i=1,2,\dots$, то знайшовши $f(x_1^{(i)},\dots,x_n^{(i)})$, $i=1,2,\dots$, і вибравши серед цих значень найбільше та найменше, знайдемо цим самим умовні екстремуми функції f. Описаний метод називають *методом множників Лагранжа*.

Приклад 6. Знайдемо умовні екстремуми функції $f(x,y)=x^2+y^2-12x+16y$ за умови $x^2+y^2=1$. Скористаємося методом множників Лагранжа. Для цього складемо функцію $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\varphi(x,y)$, де $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$ і знайдемо стаціонарні точки цієї функції. Маємо: $F(x,y,\lambda)=x^2+y^2-12x+16y-\lambda(x^2+y^2-1)$, $F'_x=2x-12-2\lambda x$, $F'_y=2y+16-2\lambda y$, $F'_\lambda=-(x^2+y^2-1)$. Розв'яжемо систему

$$\begin{cases} F'_x=0,\\ F'_y=0,\\ F'_\lambda=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-\lambda)-6=0,\\ y(1-\lambda)+8=0,\\ x^2+y^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\lambda=\frac{6}{x},\\ y=-\frac{4}{3}x,\\ x^2+\frac{16}{9}x^2=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{3}{5},\\ y=\mp\frac{4}{5},\\ \lambda=1\mp 10. \end{cases}$$

Оскільки $f\left(\frac{3}{5};-\frac{4}{5}\right)=-19$, $f\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)=21$, то умовний максимум функції f дорівнює 21, а умовний мінімум дорівнює -19.

4.3.5. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна числова функція має хоча б одну точку екстремуму.
2. Завжди $f_{\max}\geqslant f_{\min}$.
3. Завжди $f_{\max}=\max\limits_{M\in D} f(M)$.
4. Функція $f(x,y)=|y|$ має екстремуми.
5. Функція $f(x,y)=|y|$ має стаціонарні точки.
6. Якщо функція f неперервна в області D і має в D лише одну точку максимуму (нехай це точка M_0), то $f_{\max}=\max\limits_{M\in D} f(M)=f(M_0)$.
7. Кожна функція має стаціонарні точки.
8. Якщо M_0 — точка екстремуму функції f, то M_0 — стаціонарна точка цієї функції.
9. Твердження, обернене до 8, є правильним.
10. Якщо $d_h^2 f(M_0)\neq 0\ \forall h\neq 0$, то M_0 — точка екстремуму функції f.
11. Твердження, обернене до 10, є правильним.
12. Якщо $f''_{xx}(M_0)\cdot f''_{yy}(M_0)-{f''_{xy}}^2(M_0)<0$, то M_0 не є точкою екстремуму функції f.
13. Твердження, обернене до 12, є правильним.
14. Умовний екстремум функції може бути, а може й не бути глобальним екстремумом цієї функції.

II. Довести дані твердження.

1. Нехай функція $f(x,y)$ має в околі точки M_0 неперервні частинні похідні третього порядку, причому $d_h f(M_0) = d_h^2 f(M_0) = 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^2$. Тоді 1) якщо $d_h^3 f(M_0) > 0 \ \forall h \neq 0$, то M_0 – точка мінімуму функції f; 2) якщо $d_h^3 f(M_0) < 0 \ \forall h \neq 0$, то M_0 – точка максимуму функції f; 3) якщо ж $d_{h_1}^3 f(M_0) d_{h_2}^3 f(M_0) < 0$ для деяких h_1 і h_2, то M_0 не є точкою екстремуму функції f.
2. Якщо функція $z = f(x,y)$ задана неявно рівнянням $F(x,y,z) = 0$, то стаціонарні точки цієї функції можна знайти як розв'язки системи

$$\begin{cases} F_x'(x,y,z) = 0, \\ F_y'(x,y,z) = 0, \\ F_z'(x,y,z) \neq 0, \\ F(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

4.3.6. Історична довідка. Поняття аналітичної функції комплексної змінної введено німецькими математиками Б. Ріманом і К. Вейєрштрассом та французьким математиком О. Коші. Теорія неявних функцій створена математиками XIX століття, а узагальнення на довільні оператори і функціонали вперше зроблено у 1927 році Гільдебрандтом і Грейвсом.

Задачі на знаходження екстремумів розв'язувалися за допомогою диференціального числення вже засновниками диференціального та інтегрального числення. Свій метод множників французький математик Ж. Лагранж описав у 1797 році. На довільні функціонали цей метод у 1934 році переніс російський математик Л. Люстерник (1899 – 1981).

5. КРАТНІ І КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ РІМАНА

У даному розділі поняття визначеного інтеграла функції однієї змінної узагальнюється на випадок функцій кількох змінних.

5.1. Кратні інтеграли по елементарному прямокутнику

У цьому підрозділі введено поняття елементарного прямокутника (як аналога числового відрізка) та R-інтеграла по елементарному прямокутнику (як аналога визначеного інтеграла). Досліджено умови існування цього інтеграла та його властивості.

5.1.1. Поняття R-інтеграла та R-інтегровної функції. Нехай у просторі $\mathbb{R}^p$ задано точки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ і $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ такі, що $a \leqslant b$, тобто $a_i \leqslant b_i \ \forall i \in \overline{1, p}$. Тоді множину $P := P_{a,b} := \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \colon a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \ \forall i \in \overline{1, p}\}$ назвемо *елементарним прямокутником*, а число $\operatorname{mes} P := \prod\limits_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$ назвемо *мірою цього елементарного прямокутника.*

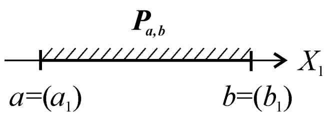

Рис. 21

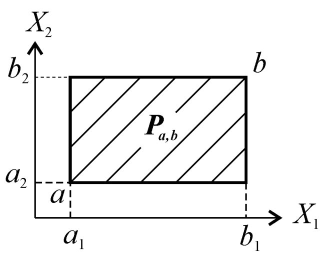

Рис. 22

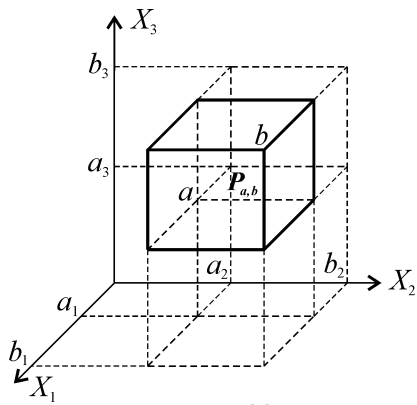

Рис. 23

Зрозуміло, що коли $p = 1$, то $P_{a,b} = [a_1; b_1]$ — звичайний відрізок (рис. 21), а $\operatorname{mes} P_{a,b} = b_1 - a_1$ — його довжина; коли $p = 2$, то $P_{a,b}$ — прямокутник, сторони якого паралельні координатним осям (рис. 22), а $\operatorname{mes} P_{a,b}$ — площа цього прямокутника; коли $p = 3$, то $P_{a,b}$ — прямокутний паралелепіпед, грані якого паралельні координатним площинам (рис. 23), а $\operatorname{mes} P_{a,b}$ — його об'єм.

Назвемо *гранню* елементарного прямокутника P його перетин з гіперплощиною $x_i = a_i$ або з гіперплощиною $x_i = b_i$. У випадку $p = 1$ грані є кінцями відрізка, у випадку $p = 2$ грані є сторонами прямокутника, а у випадку $p = 3$ — гранями паралелепіпеда. Зауважимо, що межа елементарного прямокутника P складається саме з його граней.

Міра елементарного прямокутника має дуже важливу, фундаментальну властивість *адитивності*, тобто $\operatorname{mes} P = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k$, якщо елементарні прямокутники P і P_k, $k \in \overline{1,n}$, такі, що $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, а $P_i^\circ \cap P_j^\circ = \varnothing \ \forall i \neq j$. Ця властивість очевидна (у просторах $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$) з геометричної точки зору, але довести її аналітично досить складно.

Перейдемо тепер до означення кратного інтеграла Рімана.

Розглянемо сукупність (T) елементарних прямокутників P_k, $k \in \overline{1,n}$, для яких $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k = P$, причому прямокутники P_k і P_i не мають спільних внутрішніх точок $\forall k \neq i$. Назвемо таку сукупність *розбиттям* елементарного прямокутника P (на елементарні прямокутники P_k). Число $d_k = \sup\{\rho(A, B) \colon A \text{ і } B \in P_k\}$ називають *діаметром* P_k, а число $\lambda(T) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} d_k$ — *дрібністю* розбиття (T).

Якщо на елементарному прямокутнику P задано числову функцію f, то виберемо довільну точку $M_k^* \in P_k$ і складемо суму

$$S(T, f, \{M_k^*\}) := S(T, f) := S(T) := \sum_{k=1}^{n} f(M_k^*) \operatorname{mes} P_k,$$

яку назвемо *інтегральною сумою*.

Зрозуміло, що, взагалі кажучи, інтегральна сума залежить від розбиття (T), від функції f та від способу вибору *проміжних точок* $M_k^* \in P_k$.

Число I називають *границею інтегральної суми* $S(T)$ при

$\lambda(T) \to 0$ і записують $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T)$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon)\colon\ |S(T) - I| < \varepsilon,\ \text{ коли }\ \lambda(T) < \delta(\varepsilon).$$

При цьому також записують $S(T) \to I$ $(\lambda(T) \to 0)$.

Суть поняття границі інтегральної суми полягає у тому, що $S(T) \overset{\text{я.з.}}{\approx} I$, коли $\lambda(T) \overset{\text{д.}}{\approx} 0$.

Оскільки поняття границі інтегральної суми за формою нагадує означення границі функції, то природно чекати, що властивості границь інтегральних сум нагадують властивості границь функцій. Це дійсно так. Зокрема, правильні властивості про єдиність границі, про границю суми та різниці (і взагалі лінійної комбінації) тощо. Пропонуємо читачеві впевнитися у цьому.

Інтегралом Рімана (p-кратним) або R-інтегралом функції f по елементарному прямокутнику P називають число $I = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T)$, якщо ця границя існує. При цьому функцію f називають *інтегровною за Ріманом* або *R-інтегровною* на P і записують $f \in RP$, а сам R-інтеграл позначають

$$\int\limits_P f(x)\,dx =: \int\limits_P f\,dx =: \int\!\!\int\limits_P \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_p\,.$$

Для функції двох (трьох) змінних R-інтеграл позначають $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$ $\Big(\iiint\limits_P f(x,y,z)\,dxdydz\Big)$ і називають *подвійним (потрійним) інтегралом* функції f по прямокутнику P.

Для функцій однієї змінної відома необхідна умова R-інтегровності функції f на $[a;b]$ — обмеженість f на $[a;b]$. *Чи правильна ця умова для функцій кількох змінних?*

Легко бачити, що коли $\operatorname{mes} P = 0$, то будь-яка функція f, що визначена на P (навіть необмежена), є R-інтегровною на P.

□ Нехай $\operatorname{mes} P > 0$, а розбиття (T) прямокутника P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, вибрано таким, що $\operatorname{mes} P_k > 0\ \forall k \in \overline{1,n}$. Припустимо, що f необмежена на P. Тоді вона необмежена принаймні на одному P_k, $k \in \overline{1,n}$, наприклад, на P_n (в іншому разі можна змінити нумерацію прямокутників). Зафіксуємо точки $M_k^* \in P_k\ \forall k \in \overline{1,n-1}$ і виберемо точку M_n^* таку, що

$$|f(M_n^*)\,\mathrm{mes}\,P_n| > \frac{1}{\lambda(T)} + \left|\sum_{k=1}^{n-1} f(M_k^*)\,\mathrm{mes}\,P_k\right|.$$

Це можна зробити, оскільки f необмежена на P_n і $\mathrm{mes}\,P_n > 0$. Тоді

$$|S(T)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f(M_k^*)\,\mathrm{mes}\,P_k\right| \geqslant |f(M_n^*)\,\mathrm{mes}\,P_n| -$$

$$-\left|\sum_{k=1}^{n-1} f(M_k^*)\,\mathrm{mes}\,P_k\right| > \frac{1}{\lambda(T)} \to +\infty\ (\lambda(T) \to 0).$$

Це означає, що функція $f \notin RP$. ■

Отже, доведена

Теорема 1 (про необхідну умову R-інтегровності). *Якщо $f \in \in RP$ і $\mathrm{mes}\,P > 0$, то f обмежена на P. Або: якщо f необмежена на P і $\mathrm{mes}\,P > 0$, то $f \notin RP$.*

Відомий приклад функції Діріхле показує, що не кожна обмежена функція є R-інтегровною. Визначимо, які додаткові умови слід накласти на функцію f, щоб гарантувати її R-інтегровність.

5.1.2. Суми Дарбу та їх властивості. Розглянемо функцію $f\colon P \to \mathbb{R}$, обмежену на елементарному прямокутнику P. Візьмемо довільне розбиття (T) P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, і позначимо

$$h_k = \inf_{M \in P_k} f(M),\ H_k = \sup_{M \in P_k} f(M).$$

Утворимо суми

$$S_*(T) := S_*(T, f) := \sum_{k=1}^{n} h_k\,\mathrm{mes}\,P_k$$

і

$$S^*(T) := S^*(T, f) := \sum_{k=1}^{n} H_k\,\mathrm{mes}\,P_k,$$

які називають відповідно *нижньою* та *верхньою сумами Дарбу*. Зрозуміло, що для будь-якої інтегральної суми $S(T)$ функції f

$$S_*(T) \leqslant S(T) \leqslant S^*(T), \tag{1}$$

а за рахунок вибору проміжних точок M_k^* суму $S(T)$ можна зробити як завгодно близькою або до $S_*(T)$, або до $S^*(T)$, наприклад,

$$0 \leqslant S(T) - S_*(T) \leqslant \lambda(T) \quad \text{або} \quad 0 \leqslant S^*(T) - S(T) \leqslant \lambda(T). \tag{2}$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) \Rightarrow \lim_{\lambda(T)\to 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0. \quad (3)$$

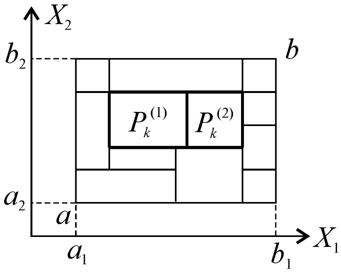

Рис. 24

Виявляється, що остання умова є також достатньою для R-інтегровності функції f по елементарному прямокутнику P. Щоб довести цей факт, розглянемо деякі властивості сум Дарбу.

Насамперед дослідимо поведінку сум Дарбу, коли розбиття (T) робити все дрібнішим і дрібнішим.

□ Нехай розбиття (T_1) одержується з розбиття (T) шляхом заміни одного прямокутника P_k на елементарні прямокутники $P_k^{(1)}$ і $P_k^{(2)}$ так, що $P_k = P_k^{(1)} \cup P_k^{(2)}$, але $P_k^{(1)}$ і $P_k^{(2)}$ не мають спільних внутрішніх точок (рис. 24). Тоді за адитивною властивістю міри $\operatorname{mes} P_k = \operatorname{mes} P_k^{(1)} + \operatorname{mes} P_k^{(2)}$, $h_k = \inf\limits_{M\in P_k} f(M) \leqslant \inf\limits_{M\in P_k^{(1)}} f(M) = h_k^{(1)}$ і $h_k \leqslant \inf\limits_{M\in P_k^{(2)}} f(M) = h_k^{(2)}$, а тому

$$S_*(T) = \sum_{i=1}^{n} h_i \operatorname{mes} P_i = \sum_{i\neq k} h_i \operatorname{mes} P_i + h_k(\operatorname{mes} P_k^{(1)} + \operatorname{mes} P_k^{(2)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i\neq k} h_i \operatorname{mes} P_i + h_k^{(1)} \operatorname{mes} P_k^{(1)} + h_k^{(2)} \operatorname{mes} P_k^{(2)} =$$

$$= S_*(T_1) \leqslant S_*(T) + 2H\lambda^p(T),$$

де $H = \sup\limits_{M\in P} |f(M)|$. Отже,

$$S_*(T) \leqslant S_*(T_1) \leqslant S_*(T) + 2H\lambda^p(T).$$

Аналогічно дістаємо, що

$$S^*(T) \geqslant S^*(T_1) \geqslant S^*(T) - 2H\lambda^p(T).$$

Припустимо, що розбиття (T_q) одержується з розбиття (T) шляхом заміни кожного прямокутника P_k на елементарні прямокутники $P_k^{(\nu)}$, $\nu \in \overline{1, \nu_k}$, так, що $P_k = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\nu_k} P_k^{(\nu)}$, причому $P_k^{(\nu)}$ і $P_k^{(\mu)}$ не мають спільних внутрішніх точок, коли $\nu \neq \mu$, а $\sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k = n + q$. Назвемо таке розбиття (T_q) *q-им роздрібненням розбиття* (T).

Використовуючи адитивну властивість міри прямокутника та ідею доведення частинного випадку ($q=1$), розглянутого вище, неважко прийти до нерівностей: $S_*(T) \leqslant S_*(T_q) \leqslant S_*(T) + 2Hq\lambda^p(T)$ і, аналогічно, $S^*(T) \geqslant S^*(T_q) \geqslant S^*(T) - 2Hq\lambda^p(T)$ для будь-якого q-того роздрібнення (T_q) розбиття (T). ■

Таким чином, правильна

Лема 1 (про вплив роздрібнення розбиття на суми Дарбу). *Якщо розбиття (T_q) є q-тим роздрібненням розбиття (T), то*

$$S_*(T) \leqslant S_*(T_q) \leqslant S_*(T) + 2Hq\lambda^p(T)$$

і

$$S^*(T) \geqslant S^*(T_q) \geqslant S^*(T) - 2Hq\lambda^p(T),$$

де $H = \sup\limits_{M\in P} |f(M)|$.

Лема 1 стверджує, що від роздрібнення розбиття (T) нижня сума Дарбу не зменшується, а верхня сума Дарбу не збільшується.

Порівняємо тепер довільну нижню суму Даррбу з довільною верхньою сумою Дарбу даної функції.

□ Нехай (T') і (T'') — довільні розбиття прямокутника P відповідно на прямокутники P'_k, $k \in \overline{1,n}$, і P''_i, $i \in \overline{1,m}$. Позначимо $P_{k,i} = P'_k \cap P''_i$, $k \in \overline{1,n}$, $i \in \overline{1,m}$, і назвемо розбиття $(T) = \{P_{ki}\colon k \in \overline{1,n}, i \in \overline{1,m}\}$ *перерізом розбиттів* (T') *і* (T''). Зрозуміло, що елементарні прямокутники P_{ki} (віднесемо до них і порожню множину, вважаючи при цьому $\operatorname{mes} P_{ki} = 0$, а проміжну точку M_{ki} — довільною) утворюють розбиття (T) прямокутника P, яке є роздрібненням розбиття (T') і розбиття (T''). Тому за лемою 1

$$S_*(T') \leqslant S_*(T) \leqslant S^*(T) \leqslant S^*(T'').$$

Отже, *будь-яка нижня сума Дарбу функції f не перевищує будь-якої верхньої суми Дарбу цієї функції.* Звідси випливає, що

$$\exists \sup_{(T)} S_*(T) = I_* =: I_*(f) \ \text{ та } \ \inf_{(T)} S^*(T) = I^* =: I^*(f),$$

причому

$$S_*(T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S^*(T) \quad \forall (T). \tag{4}$$

Числа $I_* = I_*(f)$ та $I^* = I^*(f)$ називають відповідно *нижнім* та *верхнім інтегралами Дарбу* функції f. ■

Отже, має місце

Лема 2 (про існування інтегралів Дарбу). *Якщо функція f обмежена на елементарному прямокутнику P, а розбиття (T') і (T'') цього прямокутника довільні, то $S_*(T') \leqslant S^*(T'')$ і, зокрема, існують верхній та нижній інтеграли Дарбу функції f, для яких мають місце нерівності* (4).

5.1.3. Критерії R-інтегровності. Вище показано, що коли функція $f\colon P \to \mathbb{R}$ є R-інтегровною на елементарному прямокутнику P і $\operatorname{mes} P > 0$, то f обмежена на P і $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S^*(T) - S_*(T)) = 0$ (див. (3)).

Природно виникає питання, *чи не є умова обмеженості f на P разом з останньою рівністю достатньою умовою для R-інтегровності функції f*. Відповідь на це питання дає наступна теорема.

Теорема 2 (про критерії R-інтегровності). *Нехай функція $f\colon P \to \mathbb{R}$ обмежена на елементарному прямокутнику P. Тоді наступні твердження* 1) – 6) *еквівалентні між собою:*

1) *функція f є R-інтегровною на P;*
2) $\lim\limits_{m\to\infty} S(T_m) = I$ *для деякої послідовності (T_m) розбиттів P на $P_k^{(m)}$, $k \in \overline{1, n_m}$, для якої $\lambda(T_m) \to 0$ $(m \to \infty)$;*
3) *існує послідовність (T_m) розбиттів P на $P_k^{(m)}$, $k \in \overline{1, n_m}$, для якої $\lambda(T_m) \to 0$ і $S^*(T_m) - S_*(T_m) \to 0$ $(m \to \infty)$;*
4) *нижній інтеграл Дарбу I_* функції f дорівнює її верхньому інтегралу Дарбу I^*;*
5) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S^*(T) - S_*(T)) = 0$;
6) $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f) \operatorname{mes} P_k = 0$, *де (T) – розбиття P на P_k, а $\omega_k(f) = \sup\limits_{M\in P_k} f(M) - \inf\limits_{M\in P_k} f(M)$ – коливання функції f на P_k.*

□ Доведення теореми 2 проведемо за схемою 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇔ 4) ⇒ 5) ⇔ 6) ⇒ 1). При цьому вважаємо $\operatorname{mes} P > 0$, бо в іншому разі немає чого доводити.

Зрозуміло, що 1) ⇒ 2), а з нерівностей (2) випливає, що 2) ⇒ 3).

Нехай має місце твердження 3). Тоді з нерівності (4) випливає, що $0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*(T_m) - S_*(T_m) \to 0$ $(m \to \infty)$, тобто $I^* = I_*$, а тому 3) $\Rightarrow$ 4).

Припустимо, що $I^* = I_* = I$, тобто правильне твердження 4). За властивостями супремуму та інфімуму $\forall m \in \mathbb{N}$ $\exists (T'_m)$ і (T''_m):

$$I \geqslant S_*(T'_m) \geqslant I - \frac{1}{m} \text{ і } I \leqslant S^*(T''_m) \leqslant I + \frac{1}{m}.$$

Тому $S^*(T''_m) - S_*(T'_m) \to 0$ $(m \to \infty)$. Утворимо розбиття (T_m) як переріз розбиттів (T'_m) і (T''_m). Тоді за лемою 1

$$0 \leqslant S^*(T_m) - S_*(T_m) \leqslant S^*(T''_m) - S_*(T'_m) \to 0 \ (m \to \infty),$$

тобто $\lim\limits_{m\to\infty} (S^*(T_m) - S_*(T_m)) = 0$. При цьому можна вважати, що $\lambda(T_m) \to 0$ $(m \to \infty)$, оскільки в іншому разі можна перейти до перерізу (T_m) і (T^*_m), де $\lambda(T^*_m) \to 0$ $(m \to \infty)$. Отже, доведено, що 4) $\Rightarrow$ 3), але твердження 5) сильніше за 3).

Для доведення 5) вважатимемо, що усі елементарні прямокутники $P_k^{(m)}$, $k \in \overline{1, n_m}$, що утворюють розбиття (T_m), мають додатну міру, оскільки в іншому разі такі прямокутники можна включити у межі інших прямокутників. Отже,

$$\operatorname{mes} P_k^{(m)} > 0 \ \forall k \in \overline{1, n_m} \text{ і } \forall m \in \mathbb{N}.$$

Нехай $P_k^{(m)}$ визначається точками

$$a_k^{(m)} = (a_{k1}^{(m)}, a_{k2}^{(m)}, \ldots, a_{kp}^{(m)}) \text{ і } b_k^{(m)} = (b_{k1}^{(m)}, b_{k2}^{(m)}, \ldots, b_{kp}^{(m)}),$$

тобто $P_k^{(m)} = P_{a_k^{(m)}, b_k^{(m)}}$ (див. означення елементарного прямокутника). Припустимо, що $\varepsilon > 0$ довільне фіксоване, а $m = m(\varepsilon)$ таке, що

$$0 \leqslant S^*(T_m) - S_*(T_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Візьмемо розбиття (T) елементарного прямокутника P на P_k, $k \in \overline{1, n}$, довільним, але таким, щоб

$$\lambda(T) < \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (b_{ki}^{(m)} - a_{ki}^{(m)}) \ \forall k \in \overline{1, n_m}.$$

Для кожного $c \in [a_i; b_i]$ позначимо $\nu_i(c)$ кількість елементарних прямокутників P_k, які мають спільні точки з гіперплощиною $x_i = c$. Тоді кожна гіперплощина $x_i = a_{ki}^{(m)}$ або $x_i = b_{ki}^{(m)}$, $i \in \overline{1, p}$, $k \in \overline{1, n_m}$, зможе розбити на два нових прямокутники не більше, ніж $\nu_i(a_{ki}^{(m)})$

або $\nu_i(b_{ki}^{(m)})$ прямокутників розбиття (T). Тому переріз (T_q) розбиттів (T) і (T_m) є q-тим роздрібненням розбиття (T), де

$$q \leqslant \sum_{k=1}^{n_m} \sum_{i=1}^{p} \big(\nu_i(a_{ki}^{(m)}) + \nu_i(b_{ki}^{(m)})\big) \leqslant 2p \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \max_{c \in [a_i; b_i]} \nu_i(c) n_m .$$

Звідси, враховуючи лему 1, дістанемо:

$$0 \leqslant S^*(T_q) - S_*(T_q) \leqslant S^*(T_m) - S_*(T_m) < \frac{\varepsilon}{2}$$

і

$$0 \leqslant S^*(T) - S_*(T) \leqslant S^*(T_q) - S_*(T_q) + 4Hq\lambda^p(T) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 4H \cdot 2p \big(\max_{1 \leqslant i \leqslant p} \max_{c \in [a_i; b_i]} \nu_i(c)\big) n_m \lambda^p(T),$$

де $H = \sup\limits_{M \in P} |f(M)|$.

Якщо число $\delta(\varepsilon) \in \Big(0; \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n_m} \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} \big(b_{ki}^{(m)} - a_{ki}^{(m)}\big)\Big)$ взяти настільки малим, щоб з умови $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ випливала умова

$$4H \cdot 2p \big(\max_{1 \leqslant p} \max_{c \in [a_i; b_i]} \nu_i(c)\big) n_m \lambda^p(T) < \frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$0 \leqslant S^*(T) - S_*(T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\forall (T),$$

коли $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$. Це означає, що $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0$, тобто 4) $\Rightarrow$ 5).

Оскільки $S^*(T) - S_*(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f) \operatorname{mes} P_k$, то 5) $\Leftrightarrow$ 6).

Доведемо, нарешті, що 6) $\Rightarrow$ 1), тобто 5) $\Rightarrow$ 1). Справді, якщо має місце твердження 5), то з нерівності (4) дістаємо:

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S^*(T) - S_*(T) \to 0 \; (\lambda(T) \to 0),$$

тобто

$$I_* = I^* = I, \; 0 \leqslant S^*(T) - I \leqslant S^*(T) - S_*(T) \to 0 \; (\lambda(T) \to 0).$$

Тому $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S^*(T) = I$ і

$$0 \leqslant I - S_*(T) \leqslant S^*(T) - S_*(T) \to 0 \; (\lambda(T) \to 0),$$

отже, $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S_*(T) = I$.

Звідси та з нерівності (1) випливає, що $\lim\limits_{\lambda(T) \to 0} S(T) = I$, тобто функція f є R-інтегровною на елементарному прямокутнику P. ■

Зрозуміло, що коли $f\colon P \to \mathbb{C}$, то $f \in RP \Leftrightarrow \operatorname{Re} f \in RP$ та $\operatorname{Im} f \in RP$. *Отже, у питанні про R-інтегровність числової функції f можна вважати, що f набуває дійсних значень.*

5.1.4. Достатні умови R-інтегровності.

□ Нехай функція $f\colon P \to \mathbb{R}$ неперервна на елементарному прямокутнику P. Тоді для будь-якого розбиття (T) P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, маємо:

$$\omega_k(f) = \sup_{M \in P_k} f(M) - \inf_{M \in P_k} f(M) = f(M_k^*) - f(M_k^{**}),$$

де M_k^* і $M_k^{**} \in P_k$, причому $\rho(M_k^*, M_k^{**}) \leqslant \lambda(T)$ $\forall k \in \overline{1,n}$. Позначимо

$$f(M_T^*) - f(M_T^{**}) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(f(M_k^*) - f(M_k^{**})\big)$$

і спрямуємо $\lambda(T)$ до нуля. Тоді $\rho(M_T^*, M_T^{**}) \to 0$ і $f(M_T^*) - f(M_T^{**}) \to 0$ $(\lambda(T) \to 0)$, оскільки за теоремою Кантора функція f рівномірно неперервна на P. Звідси дістаємо, що

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \operatorname{mes} P_k \leqslant \big(f(M_T^*) - f(M_T^{**})\big) \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k =$$

$$= \big(f(M_T^*) - f(M_T^{**})\big) \operatorname{mes} P \to 0 \ (\lambda(T) \to 0).$$

Отже, правильне твердження 6) теореми 2, а тому f є R-інтегровною функцією на P. ■

Таким чином, доведена

Теорема 3 (про R-інтегровність неперервної функції). *Якщо функція f неперервна на елементарному прямокутнику P, то вона R-інтегровна на P.*

Виявляється, що R-інтегровні функції у певному розумінні дуже близькі до неперервних функцій. Це випливає з наступного твердження.

Теорема 4 (критерій Лебега R-інтегровності). *Нехай функція f обмежена на елементарному прямокутнику P і E — множина точок розриву f, $E \subset P$. Тоді для R-інтегровності f на P необхідно й досить, щоб f була* ***майже неперервною*** *на P у тому розумінні, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує не більш, ніж зчисленна кількість елементарних прямокутників Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, для яких $E \subset \bigcup_k Q_k$ і $\sum_k \operatorname{mes} Q_k < \varepsilon$.*

Теорема 4 буде доведена в пункті 7.4.6.

За допомогою теорем 2 або 4 можна довести наступне твердження.

Теорема 5 (про достатні умови R-інтегровності). *Обмежена на елементарному прямокутнику P функція f є R-інтегровною на $P \subset \mathbb{R}^p$, якщо виконується принаймні одна з умов* 1) $-$ 4):

1) *функція f має скінченну кількість точок розриву;*
2) *функція f має зчисленну кількість точок розриву;*
3) *усі точки розриву функції f лежать на деякій гіперплощині $H_c^{(i)} = \{(x_1, \dots, x_p) \colon x_i = c\}$;*
4) *функція f є неспадною (незростаючою) по кожній змінній.*

□ Розглянемо пункт 1). Позначимо $M_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_p^{(k)})$, $k \in \overline{1,N}$, усі точки розриву функції f. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Візьмемо тепер $\delta > 0$ таким, щоб $\delta^p < \varepsilon/N$. Прямокутники

$$P_k = \{(x_1, \dots, x_p) \colon |x_i - x_i^{(k)}| \leqslant \delta/2 \ \forall i \in \overline{1,p}\}, \ k \in \overline{1,N},$$

покривають множину $E = \{M_k \colon k \in \overline{1,N}\}$ і мають сумарну міру

$$\sum_{k=1}^{N} \operatorname{mes} P_k = \sum_{k=1}^{N} \delta^p = N\delta^p < \varepsilon.$$

Тому за теоремою 4 $f \in RP$.

Аналогічно доводяться пункти 2), 3).

Для доведення пункту 4) теореми 5 скористаємося пунктом 3) теореми 2. Розглянемо випадок $p = 2$. У загальному випадку всі міркування такі самі, тільки громіздкіші.

Нехай $P = [a;b] \times [c;d]$. Розбиваючи відрізки $[a;b]$ і $[c;d]$ на n рівних частин:

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} = b \ \text{ та } \ c = y_0^{(n)} < y_1^{(n)} < \ldots < y_n^{(n)} = d,$$

дістанемо послідовність розбиттів (T_n) прямокутника P на прямокутники $P_{i,j}^{(n)} = [x_i^{(n)}; x_{i+1}^{(n)}] \times [y_j^{(n)}; y_{j+1}^{(n)}]$, $i, j \in \overline{0, n-1}$. При цьому дрібність $\lambda(T_n) = \sqrt{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \left(\frac{d-c}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Припустимо, що функція f неспадна по кожній змінній. Тоді

$$\min_{P_{i,j}^{(n)}} f(x,y) = f(x_i^{(n)}, y_j^{(n)}), \ \max_{P_{i,j}^{(n)}} f(x,y) = f(x_{i+1}^{(n)}, y_{j+1}^{(n)}) \ \forall i, j \in \overline{0, n-1}.$$

Позначимо $f^{(n)}_{i,j} = f(x^{(n)}_i, y^{(n)}_j)$ $\forall i,j \in \overline{0,n}$. При цьому різниця сум Дарбу запишеться у вигляді:

$$S^*(T_n) - S_*(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{i+1,j+1} - f^{(n)}_{i,j}\right)\operatorname{mes} P^{(n)}_{i,j} =$$

$$= \left(\frac{(b-a)(d-c)}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{i+1,j+1} - f^{(n)}_{i,j}\right).$$

Щоб спростити отриманий вираз, скористаємося тотожністю $\sum\limits_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i) = x_n - x_0$, а далі використаємо оцінку

$$f(x,y) - f(u,v) \leqslant H = \max_P f(x,y) \;\; \forall (x,y),(u,v) \in P\colon u \leqslant x,\; v \leqslant y.$$

Матимемо:

$$S^*(T_n) - S_*(T_n) = \left(\tfrac{(b-a)(d-c)}{n}\right)^2 \left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{i+1,j+1} - f^{(n)}_{i,j+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{i,j+1} - f^{(n)}_{i,j}\right)\right) = \left(\tfrac{(b-a)(d-c)}{n}\right)^2 \left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{n,j+1} - f^{(n)}_{0,j+1}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{n-1}\left(f^{(n)}_{i,n} - f^{(n)}_{i,0}\right)\right) \leqslant \left(\tfrac{(b-a)(d-c)}{n}\right)^2 \cdot 2nH =$$

$$= 2H(b-a)^2(d-c)^2 \cdot \frac{1}{n} \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Звідси за пунктом 3) теореми 2 випливає, що $f \in RP$. ■

5.1.5. Основні властивості R-інтеграла.

Властивість 1 (про лінійність R-інтеграла). *Нехай функції f_i, $i \in \overline{1,q}$, є R-інтегровними на елементарному прямокутнику P, а $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,q}$. Тоді функція $f = \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_i f_i \in RP$ і*

$$\int_P f\,dx = \int_P \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i f_i\right) dx = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_P f_i\,dx.$$

□ Дійсно,

$$S(T,f) = \sum_{k=1}^{n} f(M^*_k)\operatorname{mes} P_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{q} \alpha_i f_i(M^*_k)\operatorname{mes} P_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} f_i(M_k^*) \operatorname{mes} P_k \to \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \int_P f_i\, dx \ (\lambda(T) \to 0). \ \blacksquare$$

Властивість 2 (про монотонність R-інтеграла). *Якщо функції f і g R-інтегровні на P і $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in P$, то*

$$\int_P f\, dx \leqslant \int_P g\, dx.$$

А якщо $h \leqslant f(x) \leqslant H$ $\forall x \in P$, де h і H — сталі, то

$$h \operatorname{mes} P \leqslant \int_P f\, dx \leqslant H \operatorname{mes} P.$$

□ Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k^*) \operatorname{mes} P_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(M_k^*) \operatorname{mes} P_k,$$

і залишилося перейти у цій нерівності до границі, коли $\lambda(T) \to 0$.

Аналогічно доводиться друга нерівність. ■

Наслідок 1 (про R-інтеграли від сталих функцій). *Якщо $f(x) = = c = const$ $\forall x \in P$ то $\int\limits_P f\, dx = \int\limits_P c\, dx = c \cdot \operatorname{mes} P$.*

Зокрема, $\int\limits_P 0\, dx = 0$ і $\int\limits_P 1\, dx = \operatorname{mes} P$.

Наслідок 2 (перша теорема про середнє). *Якщо функція f неперервна на P то $\exists x^* \in P$: $f(x^*) = \dfrac{1}{\operatorname{mes} P} \int\limits_P f\, dx$ — **середнє значення функції f на P.***

Наслідок 3 (про невід'ємність R-інтеграла). *Якщо $f \in RP$ і $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in P$, то $\int\limits_P f\, dx \geqslant 0$.*

Наслідки 1 — 3 легко випливають з властивості 2 або безпосередньо з означення R-інтеграла.

Властивість 3 (про R-інтегровність модуля функції). *Якщо $f \in \in RP$, то $|f| \in RP$ і має місце нерівність $\left| \int\limits_P f\, dx \right| \leqslant \int\limits_P |f|\, dx$.*

□ Насамперед доведемо, що

$$\sup_{M \in E} f(M) - \inf_{M \in E} f(M) = \sup_{\substack{M' \in E \\ M'' \in E}} |f(M') - f(M'')|. \tag{5}$$

Візьмемо довільні точки M' і $M'' \in E$ і припустимо, що $f(M') \geqslant \geqslant f(M'')$. Тоді $|f(M') - f(M'')| = f(M') - f(M'') \leqslant \sup\limits_{M\in E} f(M) - \inf\limits_{M\in E} f(M)$, а тому

$$\sup_{\substack{M'\in E\\ M''\in E}} |f(M') - f(M'')| \leqslant \sup_{M\in E} f(M) - \inf_{M\in E} f(M). \tag{6}$$

З іншого боку, $\forall \varepsilon > 0\ \exists M'_*$ і $M''_* \in E$:

$$\sup_{M\in E} f(M) \leqslant f(M'_*) + \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ і }\ \inf_{M\in E} f(M) \geqslant f(M''_*) - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\sup_{M\in E} f(M) - \inf_{M\in E} f(M) \leqslant f(M'_*) - f(M''_*) + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{M'\in E\\ M''\in E}} |f(M') - f(M'')| + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\sup_{M\in E} f(M) - \inf_{M\in E} f(M) \leqslant \sup_{\substack{M'\in E\\ M''\in E}} |f(M') - f(M'')|. \tag{7}$$

Тепер (5) випливає з (6) та (7).

Враховуючи (5), дістаємо:

$$\omega_k(|f|) = \sup_{\substack{M'\in P_k\\ M''\in P_k}} \Big||f(M')| - |f(M'')|\Big| \leqslant \sup_{\substack{M'\in P_k\\ M''\in P_k}} |f(M') - f(M'')| = \omega_k(f),$$

а тому

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(|f|) \operatorname{mes} P_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \operatorname{mes} P_k \to 0 \ (\lambda(T) \to 0).$$

Звідси за критерієм R-інтегровності дістаємо, що $|f| \in RP$, коли $f \in RP$.

Нерівність $\left|\int\limits_P f\,dx\right| \leqslant \int\limits_P |f|\,dx$ випливає з нерівності $-|f| \leqslant f \leqslant \leqslant |f|$ та з властивостей 1 і 2. ■

Властивість 4 (про R-інтегровність добутку). *Якщо f і $g \in RP$, то $fg \in RP$ і має місце нерівність Коші − Буняковського:*

$$\left(\int_P fg\,dx\right)^2 \leqslant \int_P f^2 dx \cdot \int_P g^2 dx.$$

□ Вважаємо, що $\operatorname{mes} P > 0$. Тоді існує $H > 0$ таке, що $|f(M)| \leqslant H$

і $|g(M)| \leqslant H\ \forall M \in P$, а тому

$$\bigl|f(M')g(M') - f(M'')g(M'')\bigr| = \bigl|f(M')(g(M') - g(M'')) +$$

$$+ g(M'')(f(M') - f(M''))\bigr| \leqslant H\bigl(|g(M') - g(M'')| +$$

$$+ |f(M') - f(M'')|\bigr) \leqslant H\bigl(\omega_k(g) + \omega_k(f)\bigr)\ \forall M' \text{ і } M'' \in P_k.$$

Звідси випливає, що $\omega_k(fg) \leqslant H\bigl(\omega_k(f) + \omega_k(g)\bigr)$ для будь-якого розбиття (T) прямокутника P на P_k. Тому

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(fg)\operatorname{mes} P_k \leqslant H\left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\operatorname{mes} P_k + \sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\operatorname{mes} P_k\right) \to 0,$$

коли $\lambda(T) \to 0$. Отже, за критерієм R-інтегровності функція $fg \in$ $\in RP$, зокрема, $f^2 \in RP$ і $g^2 \in RP$.

Нерівність Коші — Буняковського для інтегралів випливає з відповідної нерівності для інтегральних сум:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(M_k^*)g(M_k^*)\operatorname{mes} P_k\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}\left(f(M_k^*)\sqrt{\operatorname{mes} P_k}\right)\left(g(M_k^*)\sqrt{\operatorname{mes} P_k}\right)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} f^2(M_k^*)\operatorname{mes} P_k \sum_{k=1}^{n} g^2(M_k^*)\operatorname{mes} P_k,$$

якщо в цій нерівності перейти до границі, коли $\lambda(T) \to 0$. ■

Властивість 5 (про адитивність R-інтеграла). *Нехай елементарний прямокутник P є об'єднанням елементарних прямокутників P_i, $i \in \overline{1,q}$, що не мають спільних внутрішніх точок, а функція f обмежена на P. Для того щоб $f \in RP$, необхідно і досить, щоб $f \in RP_i\ \forall i \in \overline{1,q}$. При цьому* $\displaystyle\int_P f\,dx = \sum_{i=1}^{q}\int_{P_i} f\,dx.$

□ Нехай зафіксовано послідовності розбиттів $(T_n^{(i)}) = \bigl\{P_{n,k}^{(i)}\colon k \in \overline{1,m_n}\bigr\}$ прямокутників P_i, $i \in \overline{1,q}$, такі, що $\lambda(T_n^{(i)}) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Утворимо розбиття $(T_n) = \bigcup\limits_{i=1}^{q}(T_n^{(i)})$ прямокутника P і позначимо $P_{n,k} = P_{n,j}^{(i)}$, коли $k = (i-1)m_n + j$, $i \in \overline{1,q}$, $j \in \overline{1,m_n}$. Зрозуміло, що

$\lambda(T_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ і

$$\max_{1\leqslant i\leqslant q} \sum_{k=(i-1)m_n+1}^{im_n} \omega_{n,k}(f)\operatorname{mes} P_{n,k} \leqslant \sum_{k=1}^{m_n q} \omega_{n,k}(f)\operatorname{mes} P_{n,k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=(i-1)m_n+1}^{im_n} \omega_{n,k}(f)\operatorname{mes} P_{n,k}.$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{m_n q} \omega_{n,k}(f)\operatorname{mes} P_{n,k} \to 0 \ (n \to \infty) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=(i-1)m_n+1}^{im_n} \omega_{n,k}(f)\operatorname{mes} P_{n,k} \to 0 \ (n \to \infty \ \forall i \in \overline{1,q}).$$

Звідси за критерієм R-інтегровності (пункт 3) теореми 2) випливає, що $f \in RP$ тоді й тільки тоді, коли $f \in RP^{(i)}$ $\forall i \in \overline{1,q}$.

Крім того, з рівності $S(T_n) = \sum\limits_{i=1}^{q} S(T_n^{(i)})$ випливає, що

$$\int\limits_P f\,dx = \lim_{n\to\infty} S(T_n) = \sum_{i=1}^{q} \lim_{n\to\infty} S(T_n^{(i)}) = \sum_{i=1}^{q} \int\limits_{P_i} f\,dx. \ \blacksquare$$

Властивість 6 (узагальнена теорема про середнє). *Нехай функції f і g R-інтегровні на P, $h \leqslant f(x) \leqslant H$ і $g(x) \geqslant 0$ $\forall x \in P$ (g — **вагова функція**, або **вага**). Тоді $\exists \mu \in [h;H]$: $\int\limits_P fg\,dx = \mu \int\limits_P g\,dx$. Зокрема, якщо f — неперервна функція на P, то $\mu = f(x^*)$ для деякої точки $x^* \in P$, тобто $\int\limits_P fg\,dx = f(x^*) \int\limits_P g\,dx$ ($f(x^*)$ **— середнє значення функції f на P з вагою g**).*

☐ За властивістю 4 $fg \in RP$, причому $hg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant$ $\leqslant Hg(x)$ $\forall x \in P$. Звідси за властивостями 2 і 1 дістаємо

$$h\int\limits_P g\,dx \leqslant \int\limits_P fg\,dx \leqslant H\int\limits_P g\,dx.$$

Тому, якщо $\int\limits_P g\,dx = 0$, то $\int\limits_P fg\,dx = 0$ і μ може бути довільним числом, а якщо $\int\limits_P g\,dx > 0$, то

$$h \leqslant \int\limits_P fg\,dx \Bigg/ \int\limits_P g\,dx \leqslant H \Rightarrow \mu := \int\limits_P fg\,dx \Bigg/ \int\limits_P g\,dx \in [h;H].$$

Зокрема, якщо f неперервна на P, то за другою теоремою Вейєрштрасса $\exists x^* \in P$: $\mu = f(x^*)$. ■

Властивість 7 (про інтегровність проміжної функції). *Якщо* $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in P$, $g \in RP$ *і* $\int\limits_P g\,dx = 0$, *то* $f \in RP$ *і* $\int\limits_P f\,dx = 0$.

□ Оскільки $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in P$, то

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(M_k^*) \operatorname{mes} P_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} g(M_k^*) \operatorname{mes} P_k \to 0 \ \ (\lambda(T) \to 0) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k^*) \operatorname{mes} P_k \to 0 \ \ (\lambda(T) \to 0),$$

тобто $f \in RP$ і $\int\limits_P f\,dx = 0$. ■

Властивість 8 (про незалежність інтеграла від значень функції на межі прямокутника). *Якщо функція f обмежена на елементарному прямокутнику P додатної міри і $f(x) = 0\ \forall x \in P^\circ = P \setminus \partial P$, то $f \in RP$ і* $\int\limits_P f\,dx = 0$.

□ Нехай $P = \prod\limits_{i=1}^{p} [a_i; b_i]$. Скористаємося критерієм інтегровності. При кожному $n \in \mathbb{N}$ поділимо всі відрізки $[a_i; b_i]$, $i \in \overline{1,p}$, на n рівних частин: $a_i = x_0^{(i,n)} < x_1^{(i,n)} < \ldots < x_n^{(i,n)} = b_i$. Позначимо

$$P_{k_1,\ldots,k_p}^{(n)} = \prod_{i=1}^{p} [x_{k_i}^{(i,n)}; x_{k_i+1}^{(i,n)}], \ (k_1, \ldots, k_p) \in \prod_{i=1}^{p} \overline{0, n-1}.$$

Сукупність усіх цих прямокутників утворює розбиття (T_n) прямокутника P.

Віднесемо до множини (A_n) ті елементарні прямокутники $P_k^{(n)} = P_{k_1,\ldots,k_p}^{(n)}$, які мають спільні точки з межею ∂P прямокутника P, а всі інші — до множини (B_n). Неважко зрозуміти, що прямокутники множини (A_n) задаються умовою $\exists i \in \overline{1,p}$: $k_i = 0$ або $k_i = n-1$, а прямокутники з (B_n) — умовою $k_i \in \overline{1, n-2}\ \forall i \in \overline{1,p}$.

Кількість прямокутників у всьому розбитті (T_n) складає n^p, а у множині (B_n) їх буде $(n-2)^p$. Тоді у множині (A_n) залишається $n^p-(n-2)^p$ прямокутників.

Усі прямокутники $P_k^{(n)}$ розбиття (T_n) мають однакові відповідні виміри, а саме $(b_i-a_i)/n$, тому $\operatorname{mes} P_k^{(n)} = n^{-p}\operatorname{mes} P$, а діаметр кожного прямокутника $d_k^{(n)} = \sup\limits_{x,y\in P_k^{(n)}} \rho(x,y) = \sup\limits_{x,y\in P_k^{(n)}} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p}(x_i-y_i)^2} \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{x,y\in P_k^{(n)}} \sqrt{p\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}|x_i-y_i|} \leqslant \sqrt{p\max\limits_{1\leqslant i\leqslant p}(b_i-a_i)/n}$. Тому дрібність розбиття $\lambda(T_n) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant p} d_k^{(n)} \to 0$ $(n\to\infty)$.

Вибравши на кожному прямокутнику $P_k^{(n)}$ довільним чином проміжну точку $M_k^{(n)}$, побудуємо послідовність інтегральних сум $S(T_n)$ функції f. Позначивши $H=\sup|f(x)|$, дістанемо:

$$|S(T_n)| = \left|\sum_{P_k^{(n)}\in(T_n)} f(M_k^{(n)})\operatorname{mes} P_k^{(n)}\right| = \left|\sum_{P_k^{(n)}\in(B_n)} f(M_k^{(n)})\operatorname{mes} P_k^{(n)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{P_k^{(n)}\in(B_n)} \left|f(M_k^{(n)})\right|\operatorname{mes} P_k^{(n)} \leqslant H\cdot n^{-p}\operatorname{mes} P\cdot\bigl(n^p-(n-2)^p\bigr) =$$

$$= H\bigl(1-(1-2/n)^p\bigr)\operatorname{mes} P \to 0 \ (n\to\infty).$$

Звідси за твердженням 2) теореми 2 пункту 5.1.3 $f\in RP$ і $\int\limits_P f\,dx = 0$. ■

5.1.6. Обчислення кратних інтегралів за допомогою повторних. Основною теоремою у теорії кратних інтегралів є наступна.

Теорема 6 (Фубіні, про зв'язок кратних інтегралів з однократними). *Нехай* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_p)\leqslant b=(b_1,b_2,\ldots,b_p)$, $\overline{a}=(a_2,\ldots,a_p)\leqslant\overline{b}=(b_2,\ldots,b_p)$, *функція* $f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\in RP_{a,b}$, *а для кожного фіксованого* $x_1\in[a_1;b_1]$ $f(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\varphi(x_2,\ldots,x_p)=$ $=\varphi(\overline{x})\in RP_{\overline{a},\overline{b}}$. *Тоді функція* $f_1(x_1)=\int\limits_{P_{\overline{a},\overline{b}}} f(x_1,\overline{x})\,d\overline{x}$, $x_1\in[a_1;b_1]$, *є* R*-інтегровною на відрізку* $[a_1;b_1]$, *причому*

$$I := \int\limits_{P_{a,b}} f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1}\Biggl(\int\limits_{P_{\overline{a},\overline{b}}} f(x_1,\overline{x})\,d\overline{x}\Biggr)dx_1.$$

Праву частину останньої рівності називають *повторним інтегралом*.

□ Нехай $\varepsilon > 0$ − довільне фіксоване. Оскільки $f \in RP_{a,b}$, то $\exists\delta(\varepsilon) > 0$: $\lambda(T) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |S(T) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ для будь-якого розбиття (T) прямокутника $P_{a,b}$ на прямокутники P_k, $k \in \overline{1,n}$, і для будь-якого способу вибору проміжних точок $M_k^* \in P_k$.

Утворимо розбиття (T) за допомогою розбиттів $(T^{(k)})$ відрізків $[a_k; b_k]$ точками $x_k^{(i)}$, $i \in \overline{0,n_k}$: $a_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(n_k)} = b_k$, $k \in \overline{1,p}$, (рис. 25). Елементарні прямокутники розбиття (T) мають вигляд

$$P_{i_1,i_2,\ldots,i_p} := \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \colon x_k^{(i_k)} \leqslant x_k \leqslant x_k^{(i_k+1)},\ k \in \overline{1,p}\right\},$$

$i_k \in \overline{0, n_k - 1}$ $\forall k \in \overline{1,p}$.

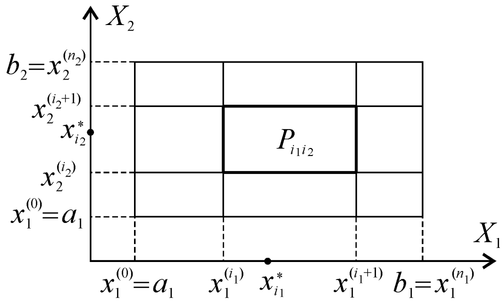

Рис. 25

Розбиття $(T^{(k)})$, $k \in \overline{2,p}$, задають також розбиття $(\overline{T})$ елементарного прямокутника $P_{\overline{a},\overline{b}}$, яке утворюють елементарні прямокутники

$$\overline{P}_{i_2,\ldots,i_p} := \left\{\overline{x} = (x_2, \ldots, x_p) \colon x_k^{(i_k)} \leqslant x_k \leqslant x_k^{(i_k+1)},\ k \in \overline{2,p}\right\},$$

$i_k \in \overline{0, n_k - 1}$ $\forall k \in \overline{2,p}$.

Вважатимемо, що $\lambda(T^{(k)}) < \delta(\varepsilon)$ $\forall k \in \overline{1,p}$, а $\delta(\varepsilon) > 0$ настільки мале, що $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$. Тоді

$$|S(T) - I| = \left| \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \cdots \sum_{i_p=0}^{n_p-1} f(x_{i_1}^*, x_{i_2}^*, \ldots, x_{i_p}^*) \operatorname{mes} P_{i_1,i_2,\ldots,i_p} - I \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

де $x_{i_k}^* \in [x_k^{(i_k)}; x_k^{(i_k+1)}]$ $\forall k \in \overline{1,p}$ $\forall i_k \in \overline{0, n_k - 1}$.

Зауважимо, що $\operatorname{mes} P_{i_1,i_2,\ldots,i_p} = \left(x_1^{(i_1+1)} - x_1^{(i_1)}\right) \operatorname{mes} \overline{P}_{i_2,\ldots,i_p}$.

Тому

$$|S(T)-I| =$$

$$=\left|\sum_{i_1=0}^{n_1-1}\left(\sum_{i_2=0}^{n_2-1}\cdots\sum_{i_p=0}^{n_p-1} f(x^*_{i_1},x^*_{i_2},\ldots,x^*_{i_p})\,\mathrm{mes}\,\overline{P}_{i_2,\ldots,i_p}\right)\left(x_1^{(i_1+1)}-x_1^{(i_1)}\right)-I\right| =$$

$$=\left|\sum_{i_1=0}^{n_1-1} S(\overline{T},\varphi)\left(x_1^{(i_1+1)}-x_1^{(i_1)}\right)-I\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Якщо в останній нерівності спрямуємо $\lambda(T^{(k)})$ до нуля $\forall k\in\overline{2,p}$, то

$$\overline{S}(T,\varphi)\to\int\limits_{P_{\overline{a},\overline{b}}} f\left(x^*_{i_1},\overline{x}\right)d\overline{x} = f_1\left(x^*_{i_1}\right),$$

в силу того, що $\varphi\in RP_{\overline{a},\overline{b}}$. Тому

$$\left|\sum_{i_1=0}^{n_1-1} f_1\left(x^*_{i_1}\right)\left(x_1^{(i_1+1)}-x_1^{(i_1)}\right)-I\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для будь-якого розбиття $(T^{(1)})$ відрізка $[a_1;b_1]$, для якого $\lambda(T^{(1)}) <$ $< \delta_1(\varepsilon)$. Це означає, що функція f_1 є R-інтегровною на відрізку $[a_1;b_1]$ і $\int\limits_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\,dx_1 = I$, тобто

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{P_{\overline{a},\overline{b}}} f(x_1,\overline{x})\,d\overline{x}\right)dx_1 = \int\limits_{P_{a,b}} f\,dx. \blacksquare$$

Наслідок 4 (про обчислення p-кратного інтеграла за допомогою однократних). *Якщо функція* $f(x) = f(x_1,x_2,\ldots,x_p)$ *є неперервною на елементарному прямокутнику* $P_{a,b}$, *де* $a=(a_1,a_2,\ldots,a_p)\leqslant b=(b_1,b_2,\ldots,b_p)$, *то*

$$\int\limits_{P_{a,b}} f\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\ldots\left(\int\limits_{a_p}^{b_p} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_p\right)\ldots dx_2\right)dx_1 =:$$

$$=:\int\limits_{a_1}^{b_1}dx_1\int\limits_{a_2}^{b_2}dx_2\ldots\int\limits_{a_p}^{b_p} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_p\,,$$

причому знаки $\int\limits_{a_k}^{b_k}$ *разом із* dx_k *можна міняти місцями з іншими* *знаками* $\int\limits_{a_i}^{b_i}$ *разом із* dx_i *яким завгодно чином. Зокрема, якщо* $p=2$, *то*

$$\iint\limits_{P_{a,b}} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy = \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx,$$

а якщо $p=3$, *то*

$$\iiint\limits_{P_{a,b}} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_{a_3}^{b_3} dz \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y,z)\,dy = \ldots\,.$$

Зауважимо, що обчислення однократних інтегралів проводиться справа наліво.

Наприклад, обчислюючи $I = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$, спочатку знаходимо $\int\limits_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz =: f_1(x,y)$, потім $\int\limits_{a_2}^{b_2} f_1(x,y)\,dy =: f_2(x)$ і, нарешті, $\int\limits_{a_1}^{b_1} f_2(x)\,dx = I$.

Приклад 1. Обчислити $I = \iiint\limits_{P} \left(x^2 + e^{x+y} + \frac{1}{\cos^2(y+z)}\right) dxdydz$, де $P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 \leqslant x,y,z \leqslant 0{,}5\right\}$.

Оскільки підінтегральна функція $f(x,y,z) = x^2 + e^{x+y} + \frac{1}{\cos^2(y+z)}$ неперервна на P, то $I = \int\limits_0^{0,5} dx \int\limits_0^{0,5} dy \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 + e^{x+y} + \frac{1}{\cos^2(y+z)}\right) dz = \int\limits_0^{0,5} dx \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 z + e^{x+y} z + \operatorname{tg}(y+z)\right)\Big|_{z=0}^{0,5} dy = \int\limits_0^{0,5} dx \int\limits_0^{0,5} \Big(x^2 \cdot \frac{1}{2} + e^{x+y} \cdot \frac{1}{2} + \operatorname{tg}(y+\frac{1}{2}) - \operatorname{tg} y\Big) dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 y + e^{x+y} - 2\ln\left|\frac{\cos(y+\frac{1}{2})}{\cos y}\right|\right)\Bigg|_{y=0}^{0,5} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{0,5} \left(x^2 \cdot \frac{1}{2} + e^{x+\frac{1}{2}} - e^x - 2\ln\left|\frac{\cos 1}{\cos\frac{1}{2}}\right| + 2\ln\cos\frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\Big(\frac{x^3}{6} + e^{x+0,5} - e^x + 2x\ln\left|\frac{\cos^2\frac{1}{2}}{\cos 1}\right|\Big)\Bigg|_{x=0}^{0,5} = \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{48} + e - 2\sqrt{e} + \ln\left|\frac{\cos^2\frac{1}{2}}{\cos 1}\right|\right).$

5.1.7. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожен прямокутник, що лежить у площині OXY, є елементарним прямокутником в $\mathbb{R}^2$.
2. Якщо P — елементарний прямокутник у просторі $\mathbb{R}^3$, то P — прямокутний паралелепіпед в $\mathbb{R}^3$.
3. Твердження, обернене до 2, є правильним.
4. P — елементарний прямокутник в $\mathbb{R}^1 \Leftrightarrow P$ — деякий відрізок в $\mathbb{R}^1$.
5. Кожен елементарний прямокутник має додатну міру.
6. Якщо P і P_k, $k \in \overline{1,n}$, — елементарні прямокутники і $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\left\{P_k \colon k \in \overline{1,n}\right\}$ — розбиття P.
7. Різні розбиття прямокутника P мають різні дрібності.
8. Для кожного елементарного прямокутника P можна утворити безліч розбиттів.
9. Для кожної функції $f \colon P \to \mathbb{R}$ можна утворити безліч різних інтегральних сум.
10. Інтегральна сума завжди залежить від розбиття (T) і від способу вибору проміжних точок.
11. Границя інтегральної суми залежить від розбиття (T) і від способу вибору проміжних точок.
12. Кожна функція $f \colon P \to \mathbb{R}$ є R-інтегровною на P.
13. Існують елементарні прямокутники P, для яких кожна функція $f \colon P \to \mathbb{R}$ є R-інтегровною на P.
14. Якщо будь-яка функція $f \colon P \to \mathbb{R}$ є R-інтегровною на P, то $\operatorname{mes} P = 0$.
15. Якщо $f \in RP$, то f — обмежена на P.
16. Якщо f необмежена на P, то $f \notin RP$.
17. Кожна функція $f \colon P \to \mathbb{R}$ має безліч сум Дарбу.
18. Якщо $S_*(T, f) = S^*(T, f)$ для деякого розбиття (T), то f — стала функція.
19. Кожна сума Дарбу функції f є її інтегральною сумою.
20. Твердження 19 є правильним для неперервної функції f.
21. Якщо $(T) = \left\{P_k \colon k \in \overline{1,n}\right\}$ і $P_k = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\nu_k} P_k^{(\nu)}$ $\forall k \in \overline{1,n}$, то $(T') = \left\{P_k^{(\nu)} \colon \nu \in \overline{1,\nu_k},\, k \in \overline{1,n}\right\}$ є деяким q-тим роздрібненням розбиття (T).

22. Якщо $S_*(T) \leqslant S_*(T_1)$ і $S^*(T) \geqslant S^*(T_1)$, то (T_1) − деяке роздрібнення розбиття (T).
23. Твердження, обернене до 22, є правильним.
24. Для кожних розбиттів (T') і (T'') існує їх переріз.
25. Кожна функція $f\colon P \to \mathbb{R}$ має верхній та нижній інтеграли Дарбу.
26. Якщо $I_*(f) \geqslant I^*(f)$, то $I_*(f) = I^*(f)$.
27. Якщо для деякого способу вибору проміжних точок M_k^*, $k \in \overline{1,n}$, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T, f, \{M_k^*\}) = I$, то $f \in RP$.
28. Якщо (T) є розбиттям P на рівні P_k і $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T) = I$, то $f \in RP$.
29. $\omega_k(f) = \sup\limits_{M',M''\in P_k} \left| f(M') - f(M'')\right|$.
30. Якщо (T) є розбиттям P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, і $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \omega_k(f) = 0$ або $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k(f) \leqslant H < +\infty$, то $f \in RP$.
31. Якщо $f \in RP$, то f є неперервною на P.
32. Функція Діріхле $D(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{коли } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ є майже неперервною на будь-якому відрізку $[a;b]$.
33. Якщо усі точки розриву функції $f\colon P \to \mathbb{R}$ є ізольованими точками, то $f \in RP$.
34. Якщо функція $f\colon P \to \mathbb{R}$ неперервна по кожній змінній, то вона R-інтегровна на P.
35. Якщо $f + \varphi \in RP$, то f і $\varphi \in RP$.
36. Якщо $f \pm \varphi \in RP$, то f і $\varphi \in RP$.
37. Якщо $|f| \in RP$, то і $f \in RP$.
38. Якщо $f(x) < g(x)$ на P, то $\int\limits_P f\,dx < \int\limits_P g\,dx$.
39. Якщо $\int\limits_P f\,dx = \operatorname{mes} P$, то $f(x) = 1\ \forall x \in P$.
40. Якщо $\int\limits_P f\,dx = c \cdot \operatorname{mes} P$ і $f(x) \geqslant c\ \forall x \in P$, то $f(x) \equiv c$ на P.
41. Якщо $\int\limits_P |f|\,dx = 0$ і f неперервна на P, то $f \equiv 0$ на P.
42. Якщо $fg \in RP$, то f і $g \in RP$.
43. Якщо $P = \bigcup\limits_{k=1}^{q} P_k$ і елементарні прямокутники P_k не мають попарно спільних внутрішніх точок, то $f \in RP \Leftrightarrow f \in RP_k\ \forall k \in \overline{1,q}$.

44. Кожна функція $f \in RP$ має на P середнє значення для будь-якої вагової функції g.
45. Якщо функція $f(x,y)$ R-інтегровна на $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_1 \leqslant x \leqslant b_1,\ a_2 \leqslant x \leqslant b_2\}$, то $\varphi(x) = f(x,y_0) \in R([a_1;b_1])$ $\forall y_0 \in [a_2;b_2]$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $f \in RP_{a,b}$, то $f \in RP_{a,c}$ $\forall c \in P_{a,b}$ і функція $\Phi(c) = \int\limits_{P_{a,c}} f\,dx$ є неперервною на $P_{a,b}$.
2. Якщо функція f обмежена на елементарному прямокутнику P, то $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S_*(T) = I_*$ і $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S^*(T) = I^*$ (теорема Дарбу).
3. Нехай $f(x,y) = \frac{1}{q_x} + \frac{1}{q_y}$ при $x = \frac{p_x}{q_x}$, $y = \frac{p_y}{q_y}$, де $p_x, q_x, p_y, q_y \in \mathbb{N}$ і дроби нескоротні, та $f(x,y) = 0$ в інших точках. Тоді $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = 0$, де $P = [0;1]\times[0;1]$, але $\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx$ не існує $\forall y = \frac{p_y}{q_y} \in [0;1]$.
4. Нехай $f(x,y) = 1$, коли $x = \frac{p_x}{q_x}$, $y = \frac{p_y}{q_y}$ і $q_x = q_y$, де $p_x, q_x, p_y, q_y \in \mathbb{N}$, і дроби нескоротні, та $f(x,y) = 0$ в усіх інших точках. Тоді $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = 0$, але $\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy$ не існує, коли $P = [0;1]\times[0;1]$.

5.2. Міра Жордана у просторі $\mathbb{R}^p$

У даному підрозділі вивчається поняття міри Жордана, яке є узагальненням понять довжини, площі, об'єму.

5.2.1. Системи множин. Множину, елементами якої у свою чергу є множини, називають *системою множин*. У теорії міри та інтеграла найчастіше зустрічаються такі системи множин як півкільце, кільце, алгебра, σ-кільце та σ-алгебра.

Система множин K називається *півкільцем*, якщо $\forall A, B \in K$ 1) $A \cap B \in K$ і 2) $\exists n \in \mathbb{N}$ та $B_i \in K$, $i \in \overline{1,n}$: $A \setminus B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ і $B_i \cap B_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$. З умови 2) зокрема випливає, що обов'язково $\varnothing \in K$.

Множина $E \in K$ називається *одиницею* півкільця K, якщо $A \cap E = A$ $\forall A \in K$, тобто $A \subset E$ $\forall A \in K$.

Система множин H називається *кільцем*, якщо $\forall A, B \in H$ 1) $A \cap B \in H$, 2) $A \cup B \in H$ і 3) $A \setminus B \in H$. Кільце з одиницею називається *алгеброю*. Кожне кільце є півкільцем, але не навпаки.

Кільце можин S називається σ-*кільцем*, якщо $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S \ \forall (A_i)$: $A_i \in S$, $i \in \mathbb{N}$. σ-кільце з одиницею називається σ-*алгеброю*.

Приклад 1. 1°. Нехай $X = \mathbb{R}$ або $X = [\alpha;\beta]$, а K — множина усіляких (у тому числі нескінченних) проміжків $\langle a;b\rangle \subset X$, де $\langle a;b\rangle$ — це або інтервал $(a;b)$, або півінтервал $(a;b]$, або піввідрізок $[a;b)$, або відрізок $[a;b]$. При цьому $(a;a) = (a;a] = [a;a) = \varnothing$, а $[a;a] = \{a\}$. Тоді K — півкільце з одиницею X, яке не є кільцем.

2°. Якщо у прикладі 1° $X = \mathbb{R}$, а проміжки $\langle a;b\rangle$ скінченні, то дістанемо півкільце K без одиниці.

3°. Якщо $X = [0;1] \cap \mathbb{Q}$, а K складається з перерізів $\langle a;b\rangle \cap X$ для будь-яких проміжків $\langle a;b\rangle$, то K — півкільце з одиницею.

4°. Нехай $X = [\alpha;\beta)$. Система K піввідрізків $[a;b) \subset X$ утворює півкільце з одиницею X, але не кільце.

5°. Якщо $X \neq \varnothing$ і $K = \{X, \varnothing\}$, то K — σ-алгебра.

6°. Нехай X — довільна множина, а K — множина усіляких підмножин множини X. Тоді K — σ-алгебра.

7°. Нехай X — довільна множина, а K — множина усіх скінченних підмножин множини X. Тоді система множин K є кільцем. Вона буде σ-кільцем і матиме одиницю X у тому і тільки тому випадку, коли X є скінченною множиною.

Систему множин $B_i \in K$ (скінченну або зчисленну), що попарно не перетинаються, називатимемо *розкладом множини A* (*скінченним* або *зчисленним*), якщо $A = \bigcup\limits_i B_i$.

Приклад 2. Якщо K — півкільце з прикладу 1.2°, то система $\{[n;n+1)$: $n \in \mathbb{Z}\}$ є зчисленним розкладом множини $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n;n+1)$.

Зауважимо, що в означенні розкладу множини A не вимагається, щоб $A \in K$.

□ Нехай K — півкільце, $A \in K$, $A_i \in K$ і $A_i \subset A \ \forall i \in \overline{1,m}$.

Якщо $m = 1$, то за означенням півкільця $\exists B_j$, $j \in \overline{1,n}$: $A \setminus A_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_j$ і множини B_i попарно не перетинаються, а тому утворюють скінченний розклад доповнення A_1 до A.

Припустимо, що коли множина A має m підмножин $A_i \in K$, то різниця $A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ має скінченний розклад $\{B_j \in K\colon j \in \overline{1,n}\}$.

Розглянемо множину $A \in K$, яка має $m+1$ підмножин $A_i \in K$ і різницю

$$A\setminus\bigcup_{i=1}^{m+1}A_i=\left(A\setminus\bigcup_{i=1}^{m}A_i\right)\cap(A\setminus A_{m+1}).$$

За припущенням існує скінченний розклад множини $A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$: $\{B_j\in K\colon j\in\overline{1,n}\}$. За означенням півкільця існує також і скінченний розклад $\{C_k\colon k\in\overline{1,p}\}$ різниці $A\setminus A_{m+1}$. Тому правильна рівність

$$A\setminus\bigcup_{i=1}^{m+1}A_i=\left(\bigcup_{j=1}^{n}B_j\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{p}C_k\right)=\bigcup_{j=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{p}(B_j\cap C_k).$$

Множини $B_j\cap C_k$ належать до K і попарно не перетинаються, тому вони утворюють скінченний розклад множини $A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m+1}A_i$. ■

Отже, за принципом математичної індукції правильна

Лема 1 (про розклад доповнення об'єднання). *Нехай K — півкільце, $A\in K$, $A_i\in K$ і $A_i\subset A$ $\forall i\in\overline{1,m}$. Тоді існує скінченний розклад різниці $A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$: $\{B_j\colon j\in\overline{1,n}\}$, тобто $A\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=\bigcup\limits_{j=1}^{n}B_j$, причому $B_j\in K$ $\forall j\in\overline{1,n}$ і $B_i\cap B_j=\varnothing$ $\forall i\neq j$.*

Приклад 3. Нехай K — півкільце з прикладу 1.1°, $G\neq\varnothing$ — відкрита лінійна множина, а $F=\mathbb{R}\setminus G\neq\varnothing$ — замкнена лінійна множина. Тоді $G=\bigcup\limits_{i}(\alpha_i;\beta_i)$, тобто складові інтервали $(\alpha_i;\beta_i)$ множини G утворюють скінченний або зчисленний розклад множини G. Якщо цей розклад скінченний, то множина $F=\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i;\beta_i)$ також має скінченний розклад.

Припустимо, що $A=\bigcup\limits_{i}A_i$, де $A_i\in K$ і їх кількість скінченна або зчисленна. Виникає питання *про можливість представлення A у вигляді об'єднання деяких множин з K, що попарно не перетинаються.*

□ Якщо $A=\bigcup\limits_{i=1}^{1}A_i$ і $A_1\in K$, то $A=\bigcup\limits_{i=1}^{1}\bigcup\limits_{k=1}^{1}E_{ik}$, де $E_{11}=A_1$.

Припустимо, що коли $A=\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$, де $A_i\in K$ $\forall i\in\overline{1,m}$, то існують множини $E_{ik}\in K$, $k\in\overline{1,k_i}$, такі, що $\bigcup\limits_{k=1}^{k_i}E_{ik}\subset A_i$ $\forall i\in\overline{1,m}$,

$A = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik}$ і множини E_{ik} попарно не перетинаються.

Нехай $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m+1} A_i$, де $A_i \in K$ $\forall i \in \overline{1, m+1}$. Тоді, враховуючи припущення, маємо:

$$\begin{aligned} A = \bigcup_{i=1}^{m+1} A_i = \Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) \cup A_{m+1} = \Big(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{k_i} E_{ik}\Big) \cup A_{m+1} = \\ = \Big(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{k_i} E_{ik}\Big) \cup \Big(A_{m+1} \setminus \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{k_i} (E_{ik} \cap A_{m+1})\Big) = \\ = \Big(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{k=1}^{k_i} E_{ik}\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=1}^{k_{m+1}} E_{m+1,k}\Big) = \bigcup_{i=1}^{m+1}\bigcup_{k=1}^{k_i} E_{ik}, \end{aligned}$$

де $\{E_{m+1,k} \in K\colon\ k \in \overline{1, k_{m+1}}\}$ — скінченний розклад множини $A_{m+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} (E_{ik} \cap A_{m+1})$, який знайдеться за лемою 1.

Звідси за принципом математичної індукції дістаємо, що для об'єднання будь-якої скінченної кількості множин $A_i \in K$, $i \in \overline{1, n}$, існують множини $E_{ik} \in K$, $k \in \overline{1, k_i}$, $i \in \overline{1, n}$, що попарно не перетинаються, причому $\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik} \subset A_i$ $\forall i \in \overline{1, n}$, а $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n}\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik}$.

Об'єднання зчисленної кількості множин $A_i \in K$, $i \in \mathbb{N}$, можна подати у вигляді: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup \bigcup\limits_{i=2}^{\infty}\Big(A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} (A_j \cap A_i)\Big)$. За доведеним $B_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} (A_j \cap A_i) = \bigcup\limits_{k=1}^{k_i^*} E_{ik}^*$, де $\{E_{ik}^* \in K\colon k \in \overline{1, k_i^*}\}$ — скінченний розклад множини B_i. За лемою 1 існує скінченний розклад множини $A_i \setminus B_i = A_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{k_i^*} E_{ik}^*$: $\{E_{ik} \in K\colon k \in \overline{1, k_i}\}$. Тому $A_i \setminus B_i = \bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik} \subset A_i$, $A = A_1 \cup \Big(\bigcup\limits_{i=2}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik}\Big)$ і об'єднувані множини попарно не перетинаються. ■

Проведені міркування показують, що правильна

Лема 2 (про розклад об'єднання). *Нехай множина A є об'єднанням скінченної (зчисленної) кількості множин A_i, $i \in I$, з півкільця K. Тоді існує скінченний (скінченний або зчисленний) розклад множини A: $\{E_{ik} \in K\colon\ k \in \overline{1, k_i},\ i \in I\}$, причому*

$\bigcup\limits_{k=1}^{k_i} E_{ik} \subset A_i \; \forall i \in I.$

Приклад 4. Нехай K — півкільце з прикладу 1.4°, де $X = [0;5)$. Тоді множина $A = (0;5) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n};5) = [1;5) \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1};\frac{1}{n})$, де $[1;5) \subset [1;5)$, $[\frac{1}{2};1) \subset [\frac{1}{2};5)$, $[\frac{1}{3};\frac{1}{2}) \subset [\frac{1}{3};5)$ і т. д.

Півкільця 1°−4° з прикладу 1 складаються з множин простору $\mathbb{R}^1$. Щоб побудувати аналогічні півкільця у просторі $\mathbb{R}^p$, скористаємося принципом "узагальнення заради спрощення". Згадаємо, що *декартовим добутком непорожніх множин* $X_1, \ldots, X_p$ називається множина $\{(x_1, \ldots, x_p)\colon x_i \in X_i \; \forall i \in \overline{1,p}\} =: X_1 \times \ldots \times X_p =: \prod\limits_{i=1}^{p} X_p$.

У випадку, коли $\exists k \in \overline{1,p}\colon X_k = \varnothing$, вважають, що $\prod\limits_{i=1}^{p} X_i = \varnothing$.

Неважко перевірити такі властивості декартових добутків.

I) Якщо $X_i \neq \varnothing$ та $Y_i \neq \varnothing \; \forall i \in \overline{1,p}$, то $\prod\limits_{i=1}^{p} X_i \subset \prod\limits_{i=1}^{p} Y_i \Leftrightarrow X_i \subset Y_i$ $\forall i \in \overline{1,p}$;

II) якщо $\prod\limits_{i=1}^{p} X_i = \prod\limits_{i=1}^{p} Y_i \neq \varnothing$, то $X_i = Y_i \; \forall i \in \overline{1,p}$;

III) $\prod\limits_{i=1}^{p} X_i \cap \prod\limits_{i=1}^{p} Y_i = \prod\limits_{i=1}^{p} X_i \cap Y_i$;

IV) $\prod\limits_{i=1}^{p} \bigcup\limits_{k \in \Lambda_i} X_k^{(i)} = \bigcup\limits_{(\nu_1,\ldots,\nu_p)\in\omega} \prod\limits_{i=1}^{p} X_{\nu_i}^{(i)}$, де $\omega = \prod\limits_{i=1}^{p} \Lambda_i$, а $\Lambda_i \neq \varnothing \; \forall i \in \overline{1,p}$.

Нехай K_i є системою підмножин множини $X_i \; \forall i \in \overline{1,p}$. *Декартовим добутком систем множин* $K_1, \ldots, K_p$ називається система множин $\{\prod\limits_{i=1}^{p} E_i\colon E_i \in K_i \; \forall i \in \overline{1,p}\} =: K_1 \times \ldots \times K_p =: \prod\limits_{i=1}^{p} K_i$.

Приклад 5. Якщо $K_1 = \ldots = K_p$ — системи відрізків $[a;b]$, то $\prod\limits_{k=1}^{p} K_i$ — система елементарних прямокутників $\prod\limits_{i=1}^{p} [a_i;b_i]$.

Виникає питання, *чи не буде декартовий добуток півкілець сам півкільцем.*

□ Припустимо, що в означенні декартового добутку систем множин K_i, $i \in \overline{1,p}$, ці системи являють собою півкільця. Візьмемо довільні A, $B \in K := \prod\limits_{i=1}^{p} K_i$. Тоді $A = \prod\limits_{i=1}^{p} A_i$, $B = \prod\limits_{i=1}^{p} B_i$, де $A_i, B_i \in K_i$

$\forall i \in \overline{1,p}$, і за властивістю III) $A \cap B = \prod\limits_{i=1}^{p} A_i \cap B_i$. Але K_i – півкільця, тому $A_i \cap B_i \in K_i$ $\forall i \in \overline{1,p} \Rightarrow A \cap B \in K$. Це показує, що виконується вимога 1) з означення півкільця.

Розглянемо тепер різницю $A \setminus B$. Оскільки $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, а за доведеним вище $A \cap B \in K$, то можна вважати, що $B \subset A$. Якщо $B = \varnothing$, то $A \setminus B = A \in K$, і доведення закінчено. Якщо ж $B \neq \varnothing$, то за властивістю I) $B_i \subset A_i$ $\forall i \in \overline{1,p}$. Враховуючи, що A_i є півкільцями, при кожному $i \in \overline{1,p}$ дістанемо скінченні розклади $A_i \setminus B_i = \bigcup\limits_{k=1}^{k_i} C_k^{(i)}$, $C_k^{(i)} \in K_i$, $k \in \overline{1,k_i}$. Відтак, $A_i = B_i \cup \bigcup\limits_{k=1}^{k_i} C_k^{(i)} =: \bigcup\limits_{k=0}^{k_i} C_k^{(i)}$, де $C_0^{(i)} := B_i$.

Поклавши $\omega = \prod\limits_{i=1}^{p} \overline{0,k_i}$, за властивістю IV) дістанемо представлення $A = \prod\limits_{i=1}^{p} A_i = \bigcup\limits_{(\nu_1,\ldots,\nu_p)\in\omega} \prod\limits_{i=1}^{p} C_{\nu_i}^{(i)}$, причому об'єднувані множини попарно не перетинаються. Оскільки одна з об'єднуваних множин є множиною $B = \prod\limits_{i=1}^{p} C_0^{(i)}$, то всі інші утворюють скінченний розклад різниці $A \setminus B$. Це означає, що вимога 2) з означення півкільця виконується і K є півкільцем. ■

Отже, має місце

Лема 3 (про декартовий добуток півкілець). *Якщо K_i, $i \in \overline{1,p}$, – півкільця множин, то і їхній декартовий добуток $K = \prod\limits_{i=1}^{p} K_i$ теж є півкільцем.*

Приклад 6. За лемою 3 дістаємо ще два **приклади півкілець:**

1°. Нехай $X = \mathbb{R}^p$, K – система елементарних прямокутників вигляду $P = \prod\limits_{i=1}^{p} \langle a_i; b_i \rangle$, де $\langle a_i; b_i \rangle$ – усілякі скінченні числові проміжки. Тоді K є півкільцем без одиниці.

2°. Якщо у попередньому прикладі допускати і нескінченні проміжки, то дістанемо півкільце K з одиницею X.

Зауваження. Декартовий добуток кілець може не бути кільцем, але він є півкільцем.

Приклад 7. Нехай K – кільце усіляких скінченних підмножин множини $\mathbb{R}$. Тоді $K^2 = K \times K$ не є кільцем, оскільки одноточкові множини $A = \{(1;2)\}$ та $B = \{(2;1)\}$ належать до K^2, а $A \cup B \notin K^2$.

5.2.2. Поняття міри Жордана та її існування. У пункті 5.1.1 введено поняття міри елементарного прямокутника $P_{a,b}$, де $a = (a_1, a_2, \ldots, a_p) \leqslant b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$, а саме $\operatorname{mes} P_{a,b} := \prod\limits_{k=1}^{p} (b_k - a_k)$.

Це поняття узагальнює поняття довжини відрізка, площі прямокутника та об'єму прямокутного паралелепіпеда. Поширимо його на ширший клас множин з простору $\mathbb{R}^p$. Процес цього поширення тісно пов'язаний з процесом вимірювання довжин, площ та об'ємів з певною точністю з недостачею або з надлишком.

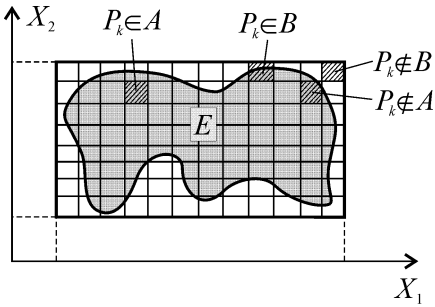

Рис. 26

Отже, нехай E — обмежена непорожня множина у просторі $\mathbb{R}^p$. Тоді існує елементарний прямокутник $P \supset E$. Візьмемо довільне розбиття (T) P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, і розглянемо множини $A = \{P_k\colon P_k \subset E\}$ та $B = \{P_k\colon P_k \cap E \neq \varnothing\}$ (див. рис. 26). Позначимо

$$|E|_* = \sum_{P_k \in A} \operatorname{mes} P_k \quad \text{і} \quad |E|^* = \sum_{P_k \in B} \operatorname{mes} P_k.$$

Якщо $A = \varnothing$, то вважають, що $|E|_* := 0$. У певному розумінні $|E|_*$ — це "наближення міри E з недостачею", а $|E|^*$ — "наближення міри E з надлишком".

Число $\operatorname{mes}_* E := \sup\limits_{(T)} |E|_*$ називають *внутрішньою мірою множини* E, а число $\operatorname{mes}^* E := \inf\limits_{(T)} |E|^*$ — *зовнішньою мірою* E. Якщо $\operatorname{mes}_* E = \operatorname{mes}^* E$, то множина E називається *вимірною за Жорданом* (або просто *вимірною*) а число $\operatorname{mes} E := \operatorname{mes}_* E = \operatorname{mes}^* E$ називається *мірою Жордана множини* E (або просто мірою E).

Зокрема, при $p = 2$ $(p = 3)$ міру ще називають *площею* (*об'ємом*), а вимірну множину — *квадровною* (*кубовною*).

Якщо $\operatorname{mes}_* E < \operatorname{mes}^* E$, то множину E називають *невимірною за Жорданом* і кажуть, що вона не має міри Жордана.

Виявляється, що висновок про вимірність множини E можна зробити за допомогою так званої *характеристичної функції* *множини* E:

$$f_E(x)=\begin{cases}1, & \text{коли } x\in E,\\ 0, & \text{коли } x\notin E.\end{cases}$$

□ Легко бачити, що

$$|E|_* = \sum_{P_k\in A}\operatorname{mes} P_k = \sum_{P_k\subset E} 1\cdot \operatorname{mes} P_k + \sum_{P_k\not\subset E} 0\cdot \operatorname{mes} P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in P_k} f_E(x)\operatorname{mes} P_k = S_*(T, f_E)$$

– нижня сума Дарбу функції f_E, а

$$|E|^* = \sum_{P_k\in B}\operatorname{mes} P_k = \sum_{P_k\cap E\neq\varnothing} 1\cdot \operatorname{mes} P_k + \sum_{P_k\cap E=\varnothing} 0\cdot \operatorname{mes} P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in P_k} f_E(x)\operatorname{mes} P_k = S^*(T, f_E)$$

– верхня сума Дарбу функції f_E.

Тому зовнішня та внутрішня міра обмеженої множини E завжди існують, причому $\operatorname{mes}_* E = I_*(f_E)$ – нижній інтеграл Дарбу функції f_E, а $\operatorname{mes}^* E = I^*(f_E)$ – верхній інтеграл Дарбу функції f_E. ■

Згадуючи критерій R-інтегровності функції, дістаємо наступне твердження.

Теорема 1 (про зв'язок вимірності множини E з R-інтегровністю її характеристичної функції). *Нехай E – обмежена множина, $E\subset P$ і P – елементарний прямокутник. Тоді для вимірності за Жорданом множини E необхідно й досить, щоб її характеристична функція $f_E\in RP$. При цьому*

$$\operatorname{mes} E = \int_P f_E(x)\,dx.$$

За допомогою теореми 1 легко довести, що вимірність множини E та її міра не залежать від елементарного прямокутника $P\supset E$.

□ Припустимо, що $E\subset P_1$ і $E\subset P_2$, а множина E вимірна відносно прямокутника P_1 і має відносно нього міру $\operatorname{mes} E = m$. За теоремою 1 це означає, що функція $f_E\in R(P_1)$ і $\int\limits_{P_1} f_E\,dx = m$.

Позначимо $P=P_1\cap P_2$. Якщо P_1 і P_2 – елементарні прямокутники, то і P – елементарний прямокутник, причому $E\subset P$. Оскільки сукупність усіх, не тільки замкнених, елементарних прямокутників утворює півкільце множин (див. приклад 6.1° пункту 5.2.1), то за означенням півкільця можна вказати скінченну кількість елементарних прямокутників A_i таких, що попарно не перетинаються і $P_1 \setminus P = \bigcup\limits_i A_i$. Аналогічно, знайдуться прямокутники B_j такі, що попарно не перетинаються і $P_2 \setminus P = \bigcup\limits_j B_j$. Замкнемо прямокутники A_i та B_j. Після цього дістанемо:

$$P_1 = P \cup \bigcup_i \overline{A_i}, \;\; P_2 = P \cup \bigcup_j \overline{B_j},$$

причому в обох об'єднаннях прямокутники не мають спільних внутрішніх точок.

Функція f_E обмежена, $f_E \in RP_1$, тому за властивістю 5 пункту 5.1.5 $f_E \in RP$, $f_E \in R\overline{A_i}$ $\forall i$, а

$$\int\limits_{P_1} f_E\,dx = \int\limits_P f_E\,dx + \sum_i \int\limits_{\overline{A_i}} f_E\,dx.$$

Оскільки $f_E(x) = 0$, коли $x \in A_i$, то за властивістю 8 пункту 5.1.5 $\int\limits_{\overline{A_i}} f_E\,dx = 0\;\forall i$, а тому $\int\limits_P f_E\,dx = m$.

З іншого боку, оскільки f_E обмежена і $f_E(x) = 0$, коли $x \in B_j$, то за властивістю 8 $f_E \in R\overline{B_j}$ і $\int\limits_{\overline{B_j}} f_E\,dx = 0\;\forall j$. Потім, за властивістю 5, $f \in RP_2$ і

$$\int\limits_{P_2} f_E\,dx = \int\limits_P f_E\,dx + \sum_j \int\limits_{\overline{B_j}} f_E\,dx = \int\limits_P f_E\,dx = m.$$

Тому за теоремою 1 множина E вимірна відносно прямокутника P_2 і має відносно нього ту саму міру m. ■

Зауваження. З теореми 1 випливає також, що нова міра Жордана елементарного прямокутника P дорівнює старій мірі $\operatorname{mes} P$.

5.2.3. Основні властивості міри Жордана. Оскільки міра Жордана визначається через інтеграл Рімана за допомогою рівності $\operatorname{mes} E = \int\limits_P f_E(x)\,dx$, то основні властивості міри Жордана можна дістати з основних властивостей R-інтеграла.

Насамперед зауважимо, що $f_E(x) \geqslant 0\;\forall x \in P \supset E$, а тому за властивістю невід'ємності R-інтеграла дістаємо

Властивість 1 (про невід'ємність міри Жордана). *Якщо множина E вимірна за Жорданом, то* $\mathrm{mes}\,E \geqslant 0$.

Оскільки з умови $E_1 \subset E_2$ випливає, що $f_{E_1}(x) \leqslant f_{E_2}(x)$ $\forall x \in P$, то за властивістю монотонності R-інтеграла дістаємо

Властивість 2 (про монотонність міри Жордана). *Якщо множини E_1 і E_2 вимірні за Жорданом і $E_1 \subset E_2$, то* $\mathrm{mes}\,E_1 \leqslant \mathrm{mes}\,E_2$.

☐ Оскільки будь-який елементарний прямокутник $P \supset E$ вимірний за Жорданом і

$$f_P(x) = f_E(x) + f_{C_P E}(x) \ \ \forall x \in P,$$

де $C_P E = P \setminus E$, то за властивістю лінійності R-інтеграла $f_E \in \in RP \Leftrightarrow f_{C_P E} \in RP$, причому $\mathrm{mes}\,P = \int\limits_P f_P(x)\,dx = \int\limits_P f_E(x)\,dx + + \int\limits_P f_{C_P E}(x)\,dx = \mathrm{mes}\,E + \mathrm{mes}\,C_P E$. ■

Отже, доведена

Властивість 3 (про вимірність множини та її доповнення). *Нехай $E \subset P$ і $C_P E = P \setminus E$. Тоді множини E і $C_P E$ одночасно вимірні або ні, причому у випадку вимірності* $\mathrm{mes}\,E + \mathrm{mes}\,C_P E = \mathrm{mes}\,P$.

Наслідок 1 (про вимірність множин раціональних та ірраціональних чисел). *Якщо $a < b$, $E_1 = [a;b] \cap \mathbb{Q}$ і $E_2 = [a;b] \setminus \mathbb{Q}$, то множини E_1 та E_2 невимірні за Жорданом у просторі $\mathbb{R}^1$.*

Пропонуємо читачеві самостійно довести цей наслідок.

☐ Візьмемо яку-небудь множину A нульової міри Жордана. Помістимо її в елементарний прямокутник P. Дістанемо $f_A \in RP$ і $\int\limits_P f_A\,dx = \mathrm{mes}\,A = 0$. Якщо тепер взяти довільну множину $E \subset A$, то буде виконуватися нерівність $0 \leqslant f_E(x) \leqslant f_A(x)$ $\forall x \in P$. За властивістю 7 пункту 5.1.5 (про інтегровність проміжної функції) $f_E \in RP$ і $\int\limits_P f_E\,dx = 0$. Це означає, що множина E вимірна і $\mathrm{mes}\,E = 0$. ■

Отже, має місце

Властивість 4 (про повноту міри). *Якщо* $\mathrm{mes}\,A = 0$, *а $E \subset A$, то* $\mathrm{mes}\,E = 0$.

Розглянемо питання про вимірність об'єднання, перерізу та різниці вимірних множин.

☐ Нехай $E_i \subset P$ $(i = 1, 2)$ і множини E_i вимірні за Жорданом. Тоді функції $f_{E_i}(x)$ R-інтегровні на P і за властивістю R-інтеграла добуток цих функцій $f_{E_1} f_{E_2}$ також є R-інтегровною функцією на P.

Разом з тим $f_{E_1}(x)f_{E_2}(x) = f_{E_1\cap E_2}(x)$ $\forall x \in P$ (впевніться у цьому). Тому $f_{E_1\cap E_2} \in RP$, тобто $E_1 \cap E_2$ − вимірна за Жорданом множина.

Якщо $E_1 \subset E_2$, то легко бачити, що $f_{E_2}(x) - f_{E_1}(x) = f_{E_2\setminus E_1}(x)$ $\forall x \in P$, а тому за властивістю лінійності R-інтеграла $f_{E_2\setminus E_1} \in RP$, тобто множина $E_2 \setminus E_1$ є вимірною за Жорданом, причому $\operatorname{mes} E_2 \setminus E_1 = \operatorname{mes} E_2 - \operatorname{mes} E_1$.

Якщо $E_1 \not\subset E_2$, то $E_2 \setminus E_1 = E_2 \setminus (E_1 \cap E_2)$, причому $E_3 = E_1 \cap E_2 \subset \subset E_2$ і E_3 − вимірна за Жорданом множина. За доведеним множина $E_2 \setminus E_1 = E_2 \setminus E_3$ є вимірною за Жорданом, коли такими є множини E_1 і E_2.

Розглянемо тепер $E_1 \cup E_2$. Якщо $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то, очевидно, $f_{E_1\cup E_2}(x) = f_{E_1}(x) + f_{E_2}(x)$ $\forall x \in P$, а тому за властивістю лінійності R-інтеграла $f_{E_1\cup E_2} \in RP$, тобто $E_1 \cup E_2$ є вимірною за Жорданом множиною, причому $\operatorname{mes} E_1 \cup E_2 = \operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2$.

В загальному випадку $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) = E_1 \cup E_3$, $E_3 \cap E_1 = \varnothing$ і E_3 − вимірна за Жорданом множина як різниця вимірних множин. Отже, $E_1 \cup E_2$ − завжди вимірна множина, коли множини E_1 і E_2 вимірні, причому $\operatorname{mes} E_1 \cup E_2 = \operatorname{mes} E_2 + \operatorname{mes} E_3 \leqslant \leqslant \operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2$. ■

Таким чином, правильна

Властивість 5 (про вимірність перерізу, різниці та об'єднання вимірних множин). *Якщо E_1 і E_2 − вимірні множини, то $E_1 \cap E_2$, $E_2 \setminus E_1$ і $E_1 \cup E_2$ − також вимірні множини, причому*

$$\operatorname{mes} E_2 \setminus E_1 = \operatorname{mes} E_2 - \operatorname{mes} E_1, \text{ коли } E_1 \subset E_2,$$

$$\operatorname{mes} E_1 \cup E_2 \leqslant \operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2$$

і

$$\operatorname{mes} E_1 \cup E_2 = \operatorname{mes} E_1 + \operatorname{mes} E_2, \text{ коли } E_1 \cap E_2 = \varnothing.$$

Наслідок 2 (про вимірність елементарного прямокутника). *Довільний обмежений елементарний прямокутник $P = \prod\limits_{i=1}^{p} \langle a_i; b_i \rangle$ вимірний за Жорданом і* $\operatorname{mes} P = \operatorname{mes} \overline{P} = \prod\limits_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$.

□ Справді, як зауважено в кінці попереднього пункту, будь-який замкнений елементарний прямокутник вимірний. Грані замкненого прямокутника $\overline{P}$ є замкненими прямокутниками нульової міри.

Прямокутник P можна отримати відкиданням від $\overline{P}$ кількох граней. Залишається застосувати властивість про вимірність різниці. ■

Із властивості 5 методом математичної індукції легко дістати

Властивість 6 (про адитивність міри Жордана). *Якщо множини* E_k, $k \in \overline{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *вимірні за Жорданом, то і множина* $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ *вимірна за Жорданом, причому* $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes} E_k$ *і*

$$\operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} E_k, \text{ коли } E_i \cap E_j = \varnothing \ \forall i \neq j.$$

Пропонуємо читачеві довести властивість 6 і показати, що її не можна перенести на випадок зчисленної кількості множин E_k. Для цього можна скористатися прикладом множини $E = \mathbb{Q} \cap [0;1] = \{x_1, x_2, \ldots\}$.

Враховуючи це та властивість 5, можна стверджувати, що система всіх вимірних за Жорданом множин є кільцем, але не є σ-кільцем.

5.2.4. Умови вимірності множин за Жорданом. Доведемо спочатку два допоміжних твердження.

Лема 4 (про множину міри нуль). *Нехай* $A \subset \mathbb{R}^p$ *— задана множина. Якщо для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує вимірна за Жорданом множина* B *така, що* $A \subset B$ *і* $\operatorname{mes} B < \varepsilon$, *то множина* A *вимірна за Жорданом і* $\operatorname{mes} A = 0$.

□ Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване число. За умовою леми існує вимірна множина B така, що $A \subset B$ і $\operatorname{mes} B < \varepsilon$. Візьмемо довільний елементарний прямокутник $P \supset B$.

В силу включення множин їхні характеристичні функції задовольняють нерівність $f_A(x) \leqslant f_B(x)$ $\forall x \in P$. Тоді при будь-якому розбитті (T) прямокутника P суми Дарбу теж задовольняють нерівність $0 \leqslant S_*(T, f_A) \leqslant S^*(T, f_A) \leqslant S^*(T, f_B)$. Тому й інтеграли Дарбу задовольняють нерівність $0 \leqslant I_*(f_A) \leqslant I^*(f_A) \leqslant I^*(f_B)$.

Оскільки множина B вимірна, $B \subset P$, то $f_B \in RP$ і $\int\limits_P f_B\,dx = \operatorname{mes} B < \varepsilon$. За критерієм інтегровності $I^*(f_B) = \int\limits_P f_B\,dx$.

У результаті приходимо до нерівності $0 \leqslant I_*(f_A) \leqslant I^*(f_A) < \varepsilon$, правильної для довільного $\varepsilon > 0$. Спрямовуючи в ній ε до нуля, дістаємо $I_*(f_A) = I^*(f_B) = 0 \Rightarrow f_A \in RP$, причому $\int\limits_P f_A\,dx = 0$. Це означає, що множина A вимірна і $\operatorname{mes} A = 0$. ■

Лема 5 (про межові точки множини). *Для довільних множин E та Q з одного метричного простору правильні наступні співвідношення:*

I) *якщо $Q \subset E$, то $Q \cap \partial E \subset \partial Q$;*

II) *якщо множина Q зв'язна, $Q \cap E \neq \varnothing$ і $Q \cap CE \neq \varnothing$, то $Q \cap \partial E \neq \varnothing$.*

□ Справді, якщо $x_0 \in Q \cap \partial E$, то $x_0 \in Q$ і $x_0 \in \partial E$. Тому в будь-якому околі цієї точки є точки, що належать до Q, а також точки, що не належать до E, а тому й до Q. Це означає, що $x_0 \in \partial Q$. Цим обгрунтовано співвідношення I).

Для доведення співвідношення II) позначимо $Q_1 = Q \cap E$ і $Q_2 = Q \cap CE$. Тоді $Q = Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$, $Q_1 \neq \varnothing$ і $Q_2 \neq \varnothing$.

Оскільки Q — зв'язна множина, то за теоремою 7 п. 1.5.4

$$Q_1 \cap \overline{Q_2} \neq \varnothing \text{ або } \overline{Q_1} \cap Q_2 \neq \varnothing.$$

Припустимо, що $Q_1 \cap \overline{Q_2} \neq \varnothing$. Тоді $\exists x_0 \in Q_1 = Q \cap E$ і в будь-якому околі точки x_0 є точки множини $Q_2 = Q \cap CE$. Тому $x_0 \in Q$ і в будь-якому околі точки x_0 є як точки з E, так і точки з CE. Це означає, що $x_0 \in \partial E$ і $x_0 \in Q$, тобто $Q \cap \partial E \neq \varnothing$.

Аналогічними міркуваннями у випадку $\overline{Q_1} \cap Q_2 \neq \varnothing$ теж показуємо, що $Q \cap \partial E \neq \varnothing$. ■

З'ясуємо питання *про міру множини, яку можна покрити скінченною кількістю елементарних прямокутників, сума мір яких як завгодно мала.*

□ Нехай задано множину E. Припустимо, що $\operatorname{mes} E = 0$ і $E \subset P$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. За означенням міри

$$0 = \operatorname{mes} E = \operatorname{mes}^* E = \inf_{(T)} |E|^*.$$

За властивістю інфімуму існує розбиття (T) прямокутника P на прямокутники P_k, $k \in \overline{1,n}$, для якого $|E|^* < \varepsilon$, тобто $\sum\limits_{P_k \in B} \operatorname{mes} P_k < \varepsilon$, де $B = \{P_k \in (T)\colon P_k \cap E \neq \varnothing\}$, тобто $E \subset \bigcup\limits_{P_k \in B} P_k$ — прямокутники з множини B покривають множину E.

Припустимо тепер, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує скінченна кількість елементарних прямокутників P_k, $k \in \overline{1,n}$, таких, що

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} P_k, \text{ a } \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k < \varepsilon.$$

Тоді, враховуючи, що $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k < \varepsilon$, за лемою 4 дістанемо, що $\operatorname{mes} E = 0$. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (критерій множини нульової міри Жордана). *Множина $E \subset \mathbb{R}^p$ має нульову міру Жордана тоді й тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0$ існують елементарні прямокутники $P_k \subset \mathbb{R}^p$, $k \in \overline{1,n}$, такі, що $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$ і $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k < \varepsilon$, тобто коли E можна покрити скінченною кількістю елементарних прямокутників, сума мір яких як завгодно мала.*

Зауваження. З доведення зрозуміло, що в теоремі 2 можна вимагати, щоб елементарні прямокутники P_k попарно не мали спільних внутрішніх точок.

Дослідимо питання *про зв'язок вимірності множини E з вимірністю її межі ∂E.*

□ Припустимо, що множина E вимірна. Включимо її в елементарний прямокутник P. Тоді характеристична функція $f_E \in RP$, і тому за одним з критеріїв інтегровності $S^*(T, f_E) - S_*(T, f_E) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$.

Задамо $\varepsilon > 0$. Виберемо досить дрібне розбиття (T) P на P_k, $k \in \overline{1,n}$, так, щоб $S^*(T, f_E) - S_*(T, f_E) < \varepsilon$.

Позначимо $A = \{P_k\colon P_k \subset E\}$, $B = \{P_k\colon P_k \cap E \neq \varnothing\}$, $A' = \{P_k \in A\colon P_k \cap \partial E \neq \varnothing\}$ і $A'' = A \setminus A'$.

Якщо $P_k \in A'$, то за доведеним у лемі 5 співвідношенням I) $\partial E \cap P_k \subset \partial P_k$. При цьому ∂P_k складається з граней прямокутника P_k. Тому віднесемо грані всіх прямокутників $P_k \in A$ до нової множини B'. Після цього утворимо ще одну множину $C = B \setminus A \cup B'$.

Покажемо, що $\partial E \subset \bigcup\limits_{P_k \in C} P_k$. Дійсно, якщо $x_0 \in \partial E$, то $\exists P_k \in B$: $x_0 \in P_k$. Якщо $P_k \in A$, то $\exists P_l \in B' \subset C$: $x_0 \in P_l$, а тому $x_0 \in \bigcup\limits_{P_k \in C} P_k$. Якщо $P_k \notin A$, то $P_k \in B \setminus A \subset C$, а тому знову $x_0 \in \bigcup\limits_{P_k \in C} P_k$.

Враховуючи, що міри елементарних прямокутників з множини B' дорівнюють нулеві, матимемо:

$$\sum_{P_k \in C} \operatorname{mes} P_k \leqslant \sum_{P_k \in B \setminus A} \operatorname{mes} P_k + \sum_{P_k \in B'} \operatorname{mes} P_k =$$

$$= \sum_{P_k \in B \setminus A} \operatorname{mes} P_k = S^*(T, f_E) - S_*(T, f_E) < \varepsilon.$$

Звідси за теоремою 2 випливає, $\operatorname{mes} \partial E = 0$.

Отже, *якщо множина E вимірна за Жорданом, то її межа має міру Жордана нуль.*

Перевіримо, чи буде правильним обернене твердження. Зрозуміло, що при цьому треба додатково вимагати обмеженість множини E.

Припустимо, що множина E обмежена, а її межа вимірна і $\operatorname{mes} \partial E = 0$. Візьмемо елементарний прямокутник $P \supset E$. Для довільного розбиття (T) прямокутника P на P_k визначимо множини A та B, як і раніше, а $C = \{P_k \in (T) \colon P_k \cap \partial E \neq \varnothing\}$.

Зауважимо, що згідно з наслідком 3 п. 2.3.7 довільний елементарний прямокутник $Q \subset \mathbb{R}^p$ є зв'язною множиною. Тому твердження II) леми 5 можна застосувати до всіх елементарних прямокутників $P_k \in B \setminus A$. За цим твердженням негайно дістанемо, що $B \setminus A \subset C$.

Оскільки $\operatorname{mes} \partial E = \int\limits_P f_{\partial E}\, dx = 0$, то $S^*(T, f_{\partial E}) \to 0$ при $\lambda(T) \to 0$. Тоді

$$0 \leqslant S^*(T, f_E) - S_*(T, f_E) = \sum_{P_k \in B \setminus A} \operatorname{mes} P_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{P_k \in C} \operatorname{mes} P_k = S^*(T, f_{\partial E}) \to 0 \ \ (\lambda(T) \to 0).$$

За критерієм інтегровності $f_E \in RP$, і за теоремою 1 множина E вимірна. ■

Отже, доведена наступна теорема.

Теорема 3 (про зв'язок вимірності множини з вимірністю її межі). *Для того щоб обмежена множина E була вимірною за Жорданом у просторі $\mathbb{R}^p$, необхідно й досить, щоб її межа ∂E була вимірною за Жорданом, причому* $\operatorname{mes} \partial E = 0$.

На практиці найчастіше мають справу з множинами $E \subset \mathbb{R}^2$, межі яких складаються з однієї або кількох неперервних кривих, рівняння яких можна записати у вигляді $y = f(x)$, $x \in [a;b]$, або $x = \varphi(y)$, $y \in [c;d]$. Вирішимо питання про вимірність таких множин.

□ Якщо $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, то вона інтегровна на $[a;b]$. Візьмемо розбиття (T) відрізка $[a;b]$ на відрізки $[x_k;x_{k+1}]$, $k \in \overline{0,n-1}$, таке, що $\lambda(T) \to 0$. Позначимо

$$m_k = \min_{[x_k;x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^*),\ M_k = \max_{[x_k;x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^{**}),\ k \in \overline{0,n-1},$$

і розглянемо елементарні прямокутники

$$P_k = \big\{(x,y)\colon m_k \leqslant y \leqslant M_k \ \forall x \in [x_k;x_{k+1}]\big\},\ k \in \overline{0,n-1}.$$

Ці прямокутники покривають графік функції $f\colon \Gamma(f) \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} P_k$ і

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{mes} P_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) =$$
$$= S^*(T,f) - S_*(T,f) \to 0 \ (\lambda(T) \to 0).$$

Отже, за теоремою 2 $\Gamma(f)$ є множиною нульової міри Жордана: $\operatorname{mes}\Gamma(f) = 0$.

Аналогічно можна довести, що $\operatorname{mes}\Gamma = 0$, коли Γ – спрямлювана дуга. Тому, якщо межа множини E складається із скінченної кількості спрямлюваних дуг або кривих, які є графіками функцій, неперервних на деяких відрізках, то за теоремою 3 множина E вимірна за Жорданом, тобто квадровна. Зокрема, будь-яка *узагальнена криволінійна трапеція:* $E = \big\{(x,y)\colon f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x) \ \forall x \in [a;b]\big\}$, де f_1 і f_2 – неперервні на $[a;b]$, є вимірною за Жорданом, тобто квадровною, множиною. При цьому, якщо елементарний прямокутник $P \supset E$, то за теоремою Фубіні

$$\operatorname{mes} E = \iint\limits_P f_E(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f_E(x,y)\,dy =$$
$$= \int_a^b dx \left(\int_c^{f_1(x)} + \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} + \int_{f_2(x)}^{d} \right) f_E(x,y)\,dy =$$
$$= \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\,dy = \int_a^b \Big(f_2(x) - f_1(x)\Big)dx. \ ■$$

Таким чином, доведена

Теорема 4 (про достатні умови квадровності множини). *Якщо $E \subset \mathbb{R}^2$ і межа E — спрямлювана дуга або складається із скінченної кількості графіків функцій, неперервних на деяких відрізках, то E — квадровна множина. Зокрема, кожна узагальнена криволінійна трапеція є квадровною множиною, а її міру можна обчислити за формулою*

$$\operatorname{mes} E = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx.$$

Аналогічним чином можна дістати достатні умови кубовності деяких множин. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

5.2.5. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Множина скінченних об'єднань піввідрізків $[a;b)$, що попарно не перетинаються, утворює кільце.
2. Декартовий добуток кілець множин є кільцем.
3. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}^p$ має внутрішню і зовнішню міри Жордана.
4. Кожна обмежена множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є квадровною.
5. Кожна обмежена множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є кубовною множиною.
6. Кожна обмежена множина $E \subset \mathbb{R}^3$ є кубовною множиною.
7. Внутрішня міра Жордана множини E дорівнює нижньому інтегралу Дарбу функції f_E.
8. Досконала та відкрита множини Кантора є вимірними за Жорданом множинами у просторі $\mathbb{R}^1$.
9. Якщо $E \subset P \subset P^*$, то з існування інтеграла $\int\limits_P f_E\,dx$ випливає існування $\int\limits_{P^*} f_E\,dx$ та рівність $\int\limits_P f_E\,dx = \int\limits_{P^*} f_E\,dx$.
10. Якщо E — вимірна множина, то і ∂E — вимірна множина.
11. Твердження, обернене до 10, є правильним.
12. Існує множина E, для якої $\operatorname{mes} \partial E > 0$.
13. Якщо множина E квадровна, то її межа складається із скінченної кількості графіків функцій, неперервних на деяких відрізках.
14. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\operatorname{mes} E_1 < \operatorname{mes} E_2$.
15. Якщо $E_1 \cup E_2$ — вимірна за Жорданом множина, то такими є і множини E_1 та E_2.

II. Довести дані твердження.

1. У будь-якому просторі $\mathbb{R}^p$ існує відкрита обмежена множина E, що не є вимірною за Жорданом.
2. У будь-якому просторі $\mathbb{R}^p$ існує замкнена обмежена множина E, що не є вимірною за Жорданом.

5.3. Кратні інтеграли по вимірній множині

У цьому підрозділі поняття кратного інтеграла по елементарному прямокутнику поширюється на випадок довільної вимірної за Жорданом множини.

5.3.1. Поняття кратного інтеграла. Нехай числова функція f визначена на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^p$. Якщо ця функція не визначена у деяких інших точках $x \in \mathbb{R}^p$, то будемо вважати, що у цих точках $f(x) := 0$. Тому надалі вважаємо, що $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Таку функцію f називають *інтегровною за Ріманом* або *R-інтегровною на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^p$* і записують $f \in RE$, якщо $\operatorname{mes} E = 0$ або функція $f \cdot f_E \in RP$, де P — елементарний прямокутник, що містить E, а f_E — характеристична функція множини E. При цьому число $\int\limits_E f\,dx := \int\limits_P f \cdot f_E\,dx$, коли $\operatorname{mes} E > 0$, або $\int\limits_E f\,dx := 0$, коли $\operatorname{mes} E = 0$, називають *інтегралом Рімана (p-кратним)* або *R-інтегралом функції f по множині E*.

Зокрема, якщо $p = 1$, то $\int\limits_E f\,dx$ — однократний інтеграл, якщо $p = 2$, то $\int\limits_E f\,dx =: \iint\limits_E f(x_1, x_2)\,dx_1dx_2$ — двократний або *подвійний інтеграл*, а якщо $p = 3$, то $\int\limits_E f\,dx =: \iiint\limits_E f(x_1, x_2, x_3)\,dx_1dx_2dx_3$ — трикратний або *потрійний інтеграл* функції f по множині E.

Так само, як у п. 5.2.2 показано незалежність міри Жордана від прямокутника $P \supset E$, тільки замінивши функцію f_E на функцію $f_1 = f \cdot f_E$, можна показати, що коли функція f обмежена на множині E, то її R-інтеграл по множині E не залежить від елементарного прямокутника $P \supset E$, присутнього в означенні R-інтеграла.

З іншого боку, якщо $\operatorname{mes} E > 0$, а функція $f \in RE$ відносно якого-небудь елементарного прямокутника $P \supset E$, то $\operatorname{mes} P > 0$ і за необхідною умовою інтегровності по прямокутнику функція $f_1 = f \cdot f_E$

має бути обмеженою на P, що рівносильно обмеженості функції f на E. Тому означення R-інтеграла коректне.

5.3.2. Існування та обчислення кратного інтеграла. Зрозуміло, що *всі властивості R-інтеграла по вимірній множині випливають з відповідних властивостей R-інтеграла по елементарному прямокутнику.* Наприклад, має місце

Теорема 1 (про R-інтегровність неперервної функції). *Якщо функція f обмежена і неперервна на вимірній множині E, то $f \in RE$.*

$\square$ Візьмемо який-небудь елементарний прямокутник $P \supset E$. Згідно з умовою теореми функція $f_1 = f \cdot f_E$ неперервна на множинах E і $E_1 = P \setminus E$ окремо за кожною з цих множин. Зокрема, f_1 буде неперервною за множинами E і E_1, відповідно, в усіх внутрішніх точках цих множин, тобто на множинах $E^\circ = E \setminus \partial E$ і $E_1^\circ = E_1 \setminus \partial E_1$. За твердженням 2) властивості 1 п. 2.2.4 функція f_1 буде неперервною на множинах E° та E_1° і за прямокутником P.

Таким чином, функція f_1 може бути розривною лише у точках множини $\partial E \cup \partial P$, котра має нульову міру Жордана. Враховуючи обмеженість функції f_1 і теорему 2 пункту 5.2.4, за критерієм Лебега (теорема 4 п. 5.1.4) дістаємо, що $f_1 \in RP$, тобто $f \in RE$. $\blacksquare$

Теорема 2 (про обчислення подвійного інтеграла). *Нехай функція f неперервна на множині $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\ \forall x \in [a;b]\}$, де φ_1 і φ_2 — неперервні функції на $[a;b]$. Тоді*

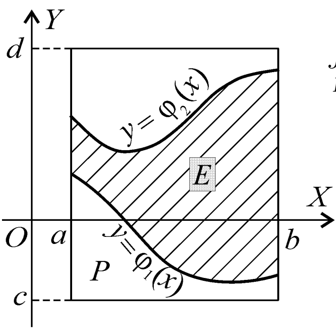

Рис. 27

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx =: $$

$$=: \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

$\square$ За достатньою умовою вимірності за Жорданом множина E вимірна, є замкненою областю і $E \subset P$, де $P = [a;b] \times [c;d]$, $c \leqslant \min\limits_{[a;b]} \varphi_1(x)$, $d \geqslant \max\limits_{[a;b]} \varphi_2(x)$ (див. рис. 27). За теоремою 1 функція f є R-інтегровною на E, причому

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_P (f\cdot f_E)(x,y)\,dxdy.$$

Для кожного фіксованого $x\in[a;b]$ функція $f_1(y)=(f\cdot f_E)(x,y)$ неперервна на відрізку $[c;d]$, за винятком, можливо, двох точок: $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$. Тому $f_1\in R([c;d])$ і

$$\int\limits_c^d f_1\,dy = \left(\int\limits_c^{\varphi_1(x)} + \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} + \int\limits_{\varphi_2(x)}^{d}\right) f_1(y)\,dy = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

оскільки

$$f_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{коли } c\leqslant y<\varphi_1(x) \text{ або } \varphi_2(x)<y\leqslant d, \\ f(x,y), & \text{коли } \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x). \end{cases}$$

Згадуючи теорему про обчислення кратного інтеграла за допомогою однократних, дістанемо:

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d (f\cdot f_E)(x,y)\,dy = \int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy. \blacksquare$$

Аналогічно можна довести наступні два твердження.

Теорема 2* (про обчислення подвійного інтеграла). *Нехай функція f неперервна на множині*

$$E = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\ \forall y\in[c;d]\big\},$$

де ψ_1 і ψ_2 — неперервні функції на $[c;d]$ (див. рис. 28). Тоді

$$\iint\limits_E f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d\left(\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy =: \int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

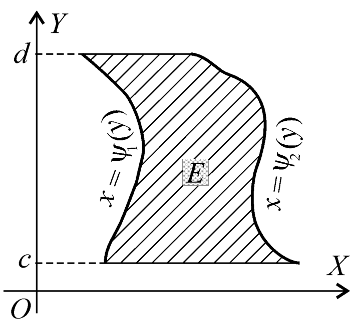

Рис. 28

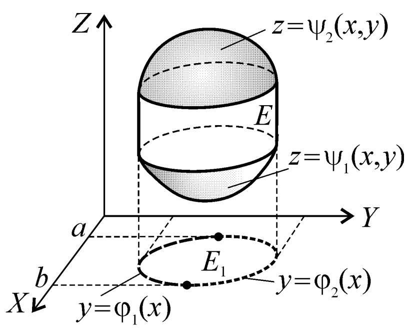

Рис. 29

Теорема 3 (про обчислення потрійного інтеграла). *Нехай функція f неперервна на множині*

$$E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \psi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\psi_2(x,y)\ \forall(x,y)\in E_1\right\},$$

де ψ_1 і ψ_2 неперервні на множині E_1, що задовольняє умови теореми 2 або 2 (див. рис. 29). Тоді*

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz=\iint\limits_{E_1}\left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy.$$

Зокрема, якщо $E_1=\left\{(x,y)\colon \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\ \forall x\in[a;b]\right\}$, де φ_1 і φ_2 — неперервні функції на $[a;b]$ (див. рис. 27), то

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx=:$$

$$=:\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,.$$

Приклад 1. Обчислити $\iint\limits_E(x+y)\,dxdy$, якщо множина $E\subset\mathbb{R}^2$ обмежена кривими $y=x^2$, $y=-x+2$ (див. рис. 30).

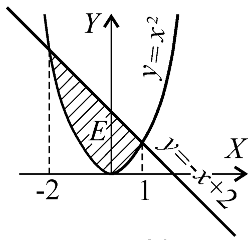

Рис. 30

Оскільки $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ x^2\leqslant y\leqslant 2-x\ \forall x\in[-2;1]\right\}$, то за теоремою 2 $\iint\limits_E(x+y)\,dxdy=$

$$=\int\limits_{-2}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{2-x}(x+y)\,dy=\int\limits_{-2}^{1}\left(xy+\tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=x^2}^{2-x}dx=$$

$$=\int\limits_{-2}^{1}\left(x(2-x)+\tfrac{(2-x)^2}{2}-x^3-\tfrac{x^4}{2}\right)dx=\int\limits_{-2}^{1}\left(2x-x^2-x^3-\tfrac{x^4}{2}+\tfrac{(x-2)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\left(x^2-\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{4}-\tfrac{x^5}{10}+\tfrac{(x-2)^3}{6}\right)\Big|_{-2}^{1}=4\tfrac{19}{20}.$$

5.3.3. Основні властивості кратного інтеграла.

Властивість 1 (про лінійність R-інтеграла). *Нехай функції f_i, $i\in\overline{1,q}$, є R-інтегровними на вимірній множині E, а $\alpha_i\in\mathbb{R}$ $\forall i\in\overline{1,q}$. Тоді функція $f=\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i f_i\in RE$ і*

$$\int\limits_E f\,dx=\int\limits_E\left(\sum_{i=1}^{q}\alpha_i f_i\right)dx=\sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int\limits_E f_i\,dx.$$

Властивість 2 (про монотонність R-інтеграла). *Якщо* f *і* $g \in RE$ *і* $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in E$, *то* $\int\limits_E f\,dx \leqslant \int\limits_E g\,dx$. *А якщо* $h \leqslant f(x) \leqslant H$ $\forall x \in E$, *то* $h \operatorname{mes} E \leqslant \int\limits_E f\,dx \leqslant H \operatorname{mes} E$.

Наслідок 1 (про R-інтеграли від сталих функцій). *Якщо* $f(x) \equiv c$ *на вимірній множині* E, *то* $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_E c\,dx = c \cdot \operatorname{mes} E$. *Зокрема,*

$$\int\limits_E 0\,dx = 0 \ \text{ і } \ \int\limits_E 1\,dx = \operatorname{mes} E.$$

Наслідок 2 (теорема про середнє). *Якщо функція* f *неперервна на замкненій вимірній області* E, *то* $\exists x^* \in E$:

$$\int\limits_E f\,dx = f(x^*) \operatorname{mes} E$$

($f(x^*)$ – ***середнє значення функції*** f ***на*** E**).**

Наслідок 3 (про невід'ємність R-інтеграла). *Якщо* $f \in RE$ *і* $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \in E$, *то* $\int\limits_E f\,dx \geqslant 0$.

Властивість 3 (про R-інтегровність $|f|$). *Якщо* $f \in RE$, *то* $|f| \in RE$ *і* $\left|\int\limits_E f\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f|\,dx$.

Властивість 4 (про R-інтегровність добутку). *Якщо* f *і* $g \in RE$, *то* $fg \in RE$ *і має місце нерівність Коші – Буняковського:*

$$\left(\int\limits_E fg\,dx\right)^2 \leqslant \int\limits_E f^2 dx \cdot \int\limits_E g^2 dx.$$

Властивість 5 (про адитивність R-інтеграла). *Нехай множини* E_i, $i \in \overline{1,q}$, *вимірні і попарно не перетинаються,* $E = \bigcup\limits_{i=1}^{q} E_i$, *а* f *обмежена на* E. *Для того, щоб* $f \in RE$, *необхідно й досить, щоб* $f \in R(E_i)$ $\forall i \in \overline{1,q}$. *При цьому* $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_{\bigcup\limits_{i=1}^{q} E_i} f\,dx = \sum\limits_{i=1}^{q} \int\limits_{E_i} f\,dx$.

Властивість 6 (узагальнена теорема про середнє). *Нехай функція* f *обмежена і неперервна на вимірній області* E, $g \in RE$ *і*

$g(x) \geqslant 0\ \forall x \in E$. *Тоді* $\exists x^* \in E$: $\int\limits_E fg\,dx = f(x^*)\int\limits_E g\,dx$ (*і число* $f(x^*)$ *називають* ***середнім значенням функції*** f ***на множині*** E ***з вагою*** g).

Узагальненням властивості 1 є

Властивість 7 (про почленне інтегрування функціонального ряду). *Нехай функціональний ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ *рівномірно збіжний на вимірній множині* E *до функції* f. *Тоді якщо* $f_i \in RE\ \forall i \in \mathbb{N}$, *то* $f \in RE$ *і* $\int\limits_E f\,dx = \int\limits_E \left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)\right)dx = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\int\limits_E f_i(x)\,dx.$

Проілюструємо методи доведення сформульованих тверджень на прикладах властивостей 1, 3, 5 і 7.

☐ Оскільки $f\cdot f_E = \left(\sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i f_i\right)f_E = \sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i(f_i\cdot f_E)$ і $f_i\cdot f_E \in RP$, де $P \supset E$, то за властивістю 1 пункту 5.1.5 $f\cdot f_E \in RP$, тобто $f \in RE$ і

$$\int\limits_E f\,dx = \int\limits_P f\cdot f_E\,dx = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int\limits_P f\cdot f_E\,dx = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\int\limits_E f\,dx.$$

Властивість 1 доведено. ■

☐ Оскільки $f_E(x) \geqslant 0$, то $|f|\cdot f_E = |f\cdot f_E| \in RP$ за властивістю 3 пункту 5.1.5. Отже, $|f| \in RE$ і

$$\left|\int\limits_E f\,dx\right| = \left|\int\limits_P f\cdot f_E\,dx\right| \leqslant \int\limits_P |f\cdot f_E|\,dx = \int\limits_P |f|\cdot f_E\,dx = \int\limits_E |f|\,dx.$$

Цим доведено властивість 3. ■

☐ Зауважимо, що коли $E = \bigcup\limits_{i=1}^{q} E_i$, $E_i \cap E_j = \varnothing\ \forall i \neq j$, то $f_E(x) = \sum\limits_{i=1}^{q} f_{E_i}(x)$, а тому $f\cdot f_E = f\sum\limits_{i=1}^{q} f_{E_i} = \sum\limits_{i=1}^{q} f\cdot f_{E_i}$ і за властивістю лінійності маємо: $f\cdot f_E \in RP$, тобто $f \in RE$, і

$$\int\limits_E f\,dx = \int\limits_P f\cdot f_E\,dx = \int\limits_P\left(\sum_{i=1}^{q} f\cdot f_{E_i}\right)dx = \sum_{i=1}^{q}\int\limits_P f\cdot f_{E_i}\,dx = \sum_{i=1}^{q}\int\limits_{E_i} f\,dx,$$

коли $f \in R(E_i)\ \forall i \in \overline{1,q}$. Оскільки $f\cdot f_{E_i} = (f\cdot f_E)\cdot f_{E_i} \in RP$, то $f \in R(E_i)\ \forall i \in \overline{1,q}$, коли $f \in RE$.

Властивість 5 доведена. ■

Властивість 7 є простим наслідком наступного твердження.

Теорема 4 (про граничний перехід під знаком R-інтеграла). *Нехай функції $F_n \in RE$ і $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ $(n \to \infty, x \in E)$, тобто F_n рівномірно збігається до F на вимірній множині E. Тоді $F \in RE$ і* $\int\limits_E F\,dx := \int\limits_E \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E F_n(x)\,dx.$

$\square$ Для простоти міркувань вважаємо, що $E = P$ — елементарний прямокутник, $\operatorname{mes} P > 0$ і візьмемо розбиття (T) P на P_k, $k \in \overline{1,m}$. Оскільки $F_n(x) \rightrightarrows F(x)$ на P, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) = n_0$:

$$\left|F_{n_0}(x) - F(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4 \operatorname{mes} P} \ \ \forall x \in P \Leftrightarrow$$

$$F(x) - \frac{\varepsilon}{4 \operatorname{mes} P} < F_{n_0}(x) < F(x) + \frac{\varepsilon}{4 \operatorname{mes} P} \ \ \forall x \in P,$$

зокрема, $\forall x \in P_k$. Тому $\omega_k(F) \leqslant \omega_k(F_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} P} \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(F) \operatorname{mes} P_k \leqslant \sum_{k=1}^{m} \omega_k(F_{n_0}) \operatorname{mes} P_k + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вважатимемо тепер, що $\delta(\varepsilon) > 0$ настільки мале, що

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(F_{n_0}) \operatorname{mes} P_k < \frac{\varepsilon}{2}, \ \text{ коли } \ \lambda(T) < \delta(\varepsilon).$$

Таке $\delta(\varepsilon) > 0$ існує, оскільки $F_{n_0} \in RP$. Отже, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$\sum_{k=1}^{m} \omega_k(F) \operatorname{mes} P_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \text{ коли } \ \lambda(T) < \delta(\varepsilon),$$

тобто $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} \sum\limits_{k=1}^{m} \omega_k(F) \operatorname{mes} P_k = 0 \Rightarrow F \in RP$. Тепер маємо:

$$\left|\int\limits_P F\,dx - \int\limits_P F_n\,dx\right| = \left|\int\limits_P \big(F(x) - F_n(x)\big)dx\right| \leqslant \int\limits_P \left|F(x) - F_n(x)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_P \left|F(x) - F_n(x)\right| \cdot \operatorname{mes} P \to 0 \ (n \to \infty),$$

тобто $\int\limits_P F\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P F_n\,dx$. $\blacksquare$

5.3.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Перевірити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна функція, що визначена на множині E, для якої $\operatorname{mes} E = 0$, є R-інтегровною на E.
2. Якщо $f \in RE$ і $\operatorname{mes} E > 0$, то f обмежена на E.
3. Якщо f неперервна на вимірній множині E, то $f \in RE$.

4. Кожен подвійний інтеграл можна обчислити за допомогою однократних інтегралів.
5. Кожна властивість R-інтеграла по вимірній множині E випливає з відповідної властивості R-інтеграла по елементарному прямокутнику.
6. Якщо $f \in RE$, то $f^2 \in RE$ і $\left(\int\limits_E f\,dx\right)^2 \leqslant \operatorname{mes} E \cdot \int\limits_E f^2\,dx$.
7. Якщо f і φ — неперервні функції на квадровній області D, $f(x,y) \geqslant \varphi(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$ і $f(x_0,y_0) > \varphi(x_0,y_0)$ для деякої точки $(x_0,y_0) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy > \iint\limits_D \varphi(x,y)\,dxdy$.

II. Довести дані твердження.

1. Для того, щоб функція f, що є обмеженою на вимірній множині E, була R-інтегровною на E, необхідно й досить, щоб f була майже неперервною на E (див. теорему 4 пункту 5.1.4).
2. Якщо функція $f > 0$ інтегровна на вимірній множині E і $\operatorname{mes} E > 0$, то $\int\limits_E f\,dx > 0$.

5.4. Криволінійні інтеграли. Їх існування та обчислення

У даному підрозділі поняття визначеного інтеграла по відрізку узагальнюється на випадок, коли замість відрізка беруть довільну спрямлювану дугу.

5.4.1. Спрямлювані дуги і функції обмеженої варіації. Нагадаємо (див. п. 2.3.5), що *неперервною кривою* (або *кривою*) у даному нормованому просторі $(E, \|\cdot\|)$ можна назвати множину

$$\Gamma = \left\{(t,z(t))\colon z(t) \in E \ \forall t \in \langle\alpha;\beta\rangle\right\}, \tag{1}$$

де $z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\beta\rangle$, — неперервна на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$ функція, що набуває значень з простору E. При цьому множину

$$\Gamma_E = \left\{z = z(t) \in E\colon t \in \langle\alpha;\beta\rangle\right\} \tag{2}$$

називають *слідом кривої* Γ у просторі E, а рівняння

$$z = z(t),\ t \in \langle\alpha;\beta\rangle, \tag{3}$$

називають *рівнянням* (або *параметричним рівнянням*) *кривої* Γ. Якщо $z(t) \in \mathbb{R}^p$, то $z(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t))$ і кожна функція $x_k = x_k(t)$ є неперервною на $\langle\alpha;\beta\rangle$. У випадку $z(t) \in \mathbb{C}$ маємо

$z(t) = x(t) + iy(t)$ і кожна з функцій $x = x(t)$ та $y = y(t)$ неперервна на $\langle\alpha;\beta\rangle$. Сліди таких кривих лежать відповідно у просторах $\mathbb{R}^p$ та $\mathbb{C}$ (рис. 31).

Дугою неперервної кривої Γ вигляду (1) називають її частину

$$\Gamma_1 = \big\{(t, z(t)) \colon t \in [a;b]\big\},$$

що відповідає певному відрізку $[a;b] \subset \langle\alpha;\beta\rangle$. Зокрема, якщо $\langle\alpha;\beta\rangle = [\alpha;\beta]$, то крива Γ також є дугою. При цьому, якщо $z(\beta) = z(\alpha)$, то Γ називають *замкненою дугою* (або *контуром*).

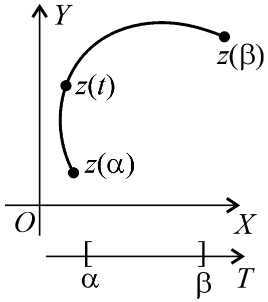

Рис. 31

Криву Γ (зокрема, дугу) називають *простою* (або *кривою Жордана*), якщо $z(t_1) \neq z(t_2)$ $\forall t_1 \neq t_2 \colon \langle\alpha;\beta\rangle \supset \{t_1, t_2\} \neq \{\alpha, \beta\}$, тобто слід кривої не має точок самоперетину.

Оскільки крива цілком визначається своїм рівнянням, то часто кривою називають функцію, що задає рівняння кривої, і записують $\Gamma \colon z = z(t)$, $t \in \langle\alpha;\beta\rangle$. Проста ж крива цілком визначається своїм слідом, тому часто кривою називають її слід.

Наведемо таблицю деяких кривих у просторах $\mathbb{C}$ та $\mathbb{R}^2$, кожна з яких є кривою Жордана.

Назва кривої	**Рівняння кривої у просторі $\mathbb{R}^2$**	**Рівняння кривої у просторі $\mathbb{C}$**
Пряма	$\begin{cases} x = t \in \mathbb{R}, \\ y = at + b \end{cases}$ або $\begin{cases} y = t \in \mathbb{R}, \\ x = at + b \end{cases}$	$z = t + i(at + b)$ або $z = (at + b) + it$, $t \in \mathbb{R}$
Відрізок прямої	$\begin{cases} x = t \in [\alpha;\beta], \\ y = at + b \end{cases}$ або $\begin{cases} y = t \in [\alpha;\beta], \\ x = at + b \end{cases}$	$z = t + i(at + b)$ або $z = (at + b) + it$, $t \in [\alpha;\beta]$
Коло	$\begin{cases} x = R\cos t + x_0, \\ y = R\sin t + y_0, \end{cases}$ $t \in [0;2\pi]$	$z = z_0 + R(\cos t + i\sin t) =$ $= z_0 + R\exp it$, $t \in [0;2\pi]$

Парабола	$\begin{cases} x = t, \\ y = at^2 + bt + c, \end{cases}$ $a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$	$z = t + i(at^2 + bt + c)$, $a \neq 0, t \in \mathbb{R}$
Еліпс	$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$ $t \in [0; 2\pi]$	$z = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$
Гіпербола	$\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\,t,\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$	$z = a\,\mathrm{ch}\,t + ib\,\mathrm{sh}\,t,\ t \in \mathbb{R}$

Пропонуємо читачеві намалювати ці криві, тобто зобразити їх сліди у відповідних просторах.

З фізичної точки зору на неперервну криву Γ можна дивитися, як на *закон руху матеріальної точки,* що описується рівнянням (3). При цьому точка залишає у просторі слід (2) і не виключено, що у різні проміжки часу матеріальна точка займає одне і те ж саме положення на сліді. Більше того, вона може описувати свій слід, повторюючи його багато разів (див. рис. 32).

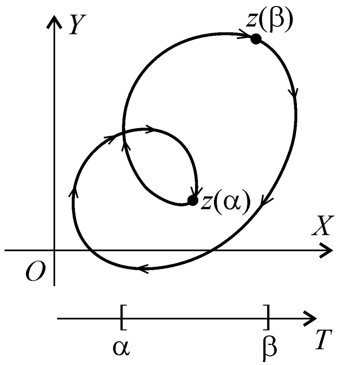

Рис. 32

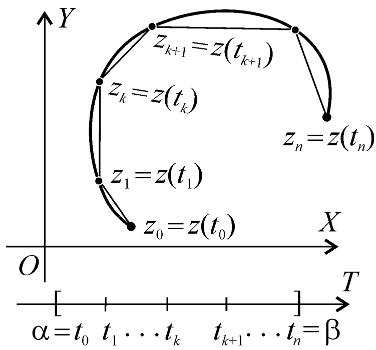

Рис. 33

Розглянемо неперервну дугу $\Gamma = \{(t, z(t))\colon\ t \in [\alpha; \beta]\}$. Нехай $(T) = \{t_k\colon 0 \leqslant k \leqslant n\}$ – розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, тобто $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta$. Тоді точки $z_k = z(t_k)$, $k \in \overline{0, n}$, є точками сліду кривої Γ. Вони визначають так звану *ламану* $L_n = \overline{z_0 z_1 \ldots z_n}$, *вписану в дугу* Γ (рис. 33), *довжиною* якої природно назвати число

$$L(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\|.$$

Довжиною дуги Γ називають число

$$l = l(\Gamma) := \sup_{(T)} L(T) = \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\| \leqslant +\infty.$$

Якщо ця довжина $l < +\infty$, то дугу Γ називають *спрямлюваною,* а функцію $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, називають *функцією обмеженої варіації* на відрізку $[\alpha;\beta]$. Для цієї функції число l називають її *варіацією* або *повною зміною* на відрізку $[\alpha;\beta]$ і позначають

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(z) := l := \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} \|z_{k+1} - z_k\|.$$

Зрозуміло, що коли простір $E = \mathbb{R}^p$ або $E = \mathbb{C}$, то $z(t) = (x_1(t), \ldots, x_p(t))$ або $z(t) = x(t) + iy(t)$ і, відповідно,

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(x_i) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(z) \leqslant \sum_{j=1}^{p} \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(x_j) \quad \forall i \in \overline{1,p}$$

або

$$\mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(x) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(z) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(x) + \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(y) \quad \text{і} \quad \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(y) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(z) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(x) + \mathop{\mathrm{V}}_{\alpha}^{\beta}(y).$$

Отже, *функція* $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, *є функцією обмеженої варіації на відрізку* $[\alpha;\beta]$ *тоді й тільки тоді, коли такою є кожна компонента цієї функції.*

Наведемо важливу лему, доведення якої аналогічне доведенню леми 1 пункту 5.1.2 (тільки простіше).

Лема 1 (про співвідношення між $L(T)$ і $L(T_\nu)$). *Нехай розбиття* (T_ν) *відрізка* $[\alpha;\beta]$ *одержується з розбиття* (T) *цього відрізка шляхом доповнення* ν *нових точок. Тоді*

$$L(T) \leqslant L(T_\nu) \leqslant L(T) + 2\nu H(T),$$

де $H(T) = \sup\limits_{|t'-t''| \leqslant \lambda(T)} \|z(t') - z(t'')\|$, *а* $\lambda(T) = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} (t_{k+1} - t_k)$ *– дрібність розбиття* (T).

На рис. 34 розбиття (T) доповнюється однією новою точкою t^*, внаслідок чого ланка $\overline{z_k, z_{k+1}}$ замінюється

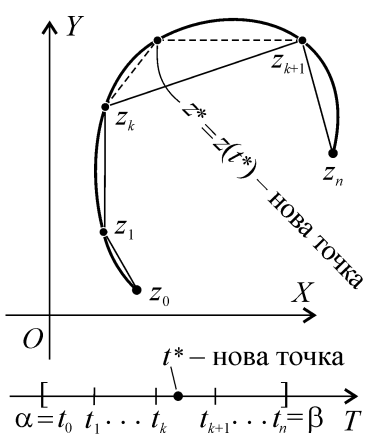

Рис. 34

ланками $\overline{z_k, z^*}$ та $\overline{z^*, z_{k+1}}$.

За допомогою леми 1 легко довести наступне твердження.

Теорема 1 (про рівносильність означень довжини). *Для того щоб число* l: $0 \leqslant l \leqslant +\infty$ *було довжиною неперервної дуги* $\Gamma = \{(t, z(t)) \colon t \in [\alpha; \beta]\}$, *необхідно й досить, щоб виконувалася принаймні одна з умов* 1) *або* 2):

1) $l = \lim\limits_{\lambda(T) \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\|$;

2) $l = \lim\limits_{m \to \infty} \sum\limits_{k=0}^{n_m - 1} \|z(t_{k+1}^{(m)}) - z(t_k^{(m)})\|$ *для деякої послідовності* $(T^{(m)})$ *розбиттів відрізка* $[\alpha; \beta]$, *що задовольняє умову* $\lambda(T^{(m)}) \to 0$ $(m \to \infty)$.

□ Зрозуміло, що з 1) ⇒ 2). Покажемо, що виконання умови 2) гарантує, що l — довжина дуги Γ.

Нехай $l < +\infty$, а $l^* = \sup\limits_{(T)} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\|$ — довжина дуги Γ. Тоді $\forall i \in \mathbb{N}$ існує розбиття (T_i) відрізка $[\alpha; \beta]$, для якого

$$l^* - \frac{1}{i} < L(T_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}^{(i)}) - z(t_k^{(i)})\| \leqslant l^*.$$

Вважаючи $i \in \mathbb{N}$ фіксованим (досить великим), утворимо розбиття (T') шляхом додавання до точок розбиття $(T^{(m)})$ точок розбиття (T_i). За лемою 1 дістаємо

$$L(T^{(m)}) \leqslant L(T') \leqslant L(T^{(m)}) + 2\nu_i H(T^{(m)}),$$

де $H(T^{(m)}) = \sup\limits_{|t' - t''| \leqslant \lambda(T^{(m)})} \|z(t') - z(t'')\| \to 0$ $(m \to \infty)$, а ν_i — кількість точок розбиття (T_i). Тому $L(T') \to l$ $(m \to \infty)$. З іншого боку,

$$l^* - \frac{1}{i} < L(T_i) \leqslant L(T') \leqslant l^* \Rightarrow l^* - \frac{1}{i} \leqslant l \leqslant l^* \Rightarrow l = l^*,$$

оскільки $i \in \mathbb{N}$ може бути як завгодно великим.

Отже, якщо виконана умова 2) і $l < +\infty$, то l — довжина дуги Γ.

Якщо $l = +\infty$, то зрозуміло, що

$$\sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\| \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}^{(m)}) - z(t_k^{(m)})\| \to \infty \ (m \to \infty),$$

тобто і в цьому випадку l є довжиною Γ.

Покажемо, нарешті, що коли l є довжиною Γ, тобто

$$l = \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} \|z(t_{k+1}) - z(t_k)\|,$$

то має місце твердження 1).

Як показано вище, для числа l можна вказати послідовність $(T^{(m)})$ розбиттів відрізка $[\alpha;\beta]$, для яких $\lambda(T^{(m)}) \to 0$ $(m \to \infty)$, $l = \lim\limits_{m\to\infty} L(T^{(m)})$ і навіть $l - \frac{1}{m} < L(T^{(m)}) \leqslant l$ $\forall m$.

Вважаючи $m \in \mathbb{N}$ фіксованим (досить великим), а розбиття (T) відрізка $[\alpha;\beta]$ довільним, аби тільки його дрібність $\lambda(T) \to 0$, утворимо розбиття (T') шляхом додавання до точок розбиття (T) точок розбиття $(T^{(m)})$. За лемою 1

$$L(T) \leqslant L(T') \leqslant L(T) + 2\nu_m H(T),$$

де ν_m — кількість точок розбиття (T_m), $H(T) = \sup\limits_{|t'-t''|<\lambda(T)} \|z(t') - -z(t'')\| \to 0$ $(\lambda(T) \to 0)$, а

$$l - \frac{1}{m} < L(T^{(m)}) \leqslant L(T') \leqslant l \Rightarrow L(T') \to l \ (m \to \infty).$$

Тому

$$|L(T) - l| = |L(T) - L(T') + L(T') - l| \leqslant$$

$$\leqslant |L(T') - l| + |L(T) - L(T')| \leqslant \frac{1}{m} + 2\nu_m H(T) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

якщо $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$ і $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$, причому $\delta(\varepsilon) > 0$ настільки мале, що $2\nu_m H(T) < \frac{\varepsilon}{2}$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|L(T) - l| < \varepsilon$, коли $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$, тобто $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} L(T) = 0$.

Міркування для $l = +\infty$ аналогічні. ■

Теорема 1 дає можливість при обчисленні довжини дуги вибирати розбиття (T) відрізка $[\alpha;\beta]$ найзручнішим чином, наприклад, на рівні частини.

Приклад 1. Обчислимо довжину дуги кола з центром у точці z_0 і радіусом $R > 0$. Рівняння цієї дуги $z = z_0 + R\exp it$, $t \in [\alpha;\beta]$. Візьмемо розбиття $(T) = \{t_k\colon k \in \overline{0,n}\}$, де $t_k = \alpha + \frac{k(\beta-\alpha)}{n}$, $k \in \overline{0,n}$, тобто $t_{k+1} - t_k = \frac{\beta-\alpha}{n}$ $\forall k \in \overline{0,n-1}$. Маємо:

$$L(T) = \sum_{k=0}^{n-1} R\,|\exp(it_{k+1}) - \exp(it_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} R\,|\exp i(t_{k+1} - t_k) - 1| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} R\,|\exp i\big(\frac{\beta-\alpha}{n}\big)-1| = \sum_{k=0}^{n-1} R\cdot\frac{\beta-\alpha}{n}\left|\frac{\exp\frac{i(\beta-\alpha)}{n}-1}{\frac{i(\beta-\alpha)}{n}}\right| =$$

$$= R(\beta-\alpha)\cdot\left|\frac{\exp\frac{i(\beta-\alpha)}{n}-1}{\frac{i(\beta-\alpha)}{n}}\right| \to R(\beta-\alpha)\ \ (n\to\infty),$$

оскільки $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\exp\alpha-1}{\alpha}=1$.

Отже, довжина дуги кола $l=R(\beta-\alpha)$, зокрема якщо $[\alpha;\beta]=[0;2\pi]$, то дістанемо довжину кола $l=2\pi R$.

Якщо дуга Γ має рівняння $z=z(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, то точку $z(\alpha)=:A$ називають *початковою точкою*, а точку $z(\beta)=:B$ − *кінцевою точкою дуги* Γ. При цьому замість позначення Γ вживають позначення $\overset{\frown}{AB}$.

Зафіксуємо точку $t^*\in(\alpha;\beta)$ і позначимо $z(t^*)=:C$. Тоді казатимемо, що *дуга* $\overset{\frown}{AB}$ *є об'єднанням дуг* $\overset{\frown}{AC}$ *і* $\overset{\frown}{CB}$ і писатимемо $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}\cup\overset{\frown}{CB}$.

Візьмемо послідовність (T_m) розбиттів відрізка $[\alpha;\beta]$ таку, щоб $\lambda(T_m)\to 0$ $(m\to\infty)$, розбиття (T_{m+1}) було роздрібненням розбиття (T_m) $\forall m$ і щоб точка t^* була точкою кожного розбиття (T_m). Тоді $(T_m)=(T_m^*)\cup(T_m^{**})$, де (T_m^*) і (T_m^{**}) − розбиття відрізків $[\alpha;t^*]$ і $[t^*;\beta]$. При цьому $l(T_m)\uparrow$, $l(T_m^*)\uparrow$ і $l(T_m^{**})\uparrow$ $(m\to\infty)$, а також $l(T_m)=l(T_m^*)+l(T_m^{**})$. Тому *дуга* $\overset{\frown}{AB}$ *спрямлювана тоді й тільки тоді, коли спрямлювані дуги* $\overset{\frown}{AC}$ *і* $\overset{\frown}{CB}$. У цьому полягає **адитивна властивість довжини дуги.**

Можна довести, що коли функція $z=z(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$, має похідну $z'(t)$, що є R-інтегровною на відрізку $[\alpha;\beta]$, то дуга $\Gamma=\big\{(t,z(t))\colon t\in[\alpha;\beta]\big\}$ є спрямлюваною, а її довжину можна обчислити за формулою $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\|z'(t)\|dt$. Зокрема, остання формула застосовна до *гладких дуг,* тобто таких, для яких $z'(t)\neq 0$ і неперервна на $[\alpha;\beta]$ та *кусково-гладких,* тобто таких, що складаються із скінченної кількості гладких дуг, а саме: існує розбиття (T) відрізка $[\alpha;\beta]$ точками t_k, $k\in\overline{0,n}$, таке, що кожна дуга $\Gamma_k\colon z=z(t)$, $t\in[t_k;t_{k+1}]$, $k\in\overline{0,n-1}$, є гладкою.

5.4.2. Криволінійний інтеграл першого роду. Нехай функція f визначена на неперервній дузі $\Gamma = \big\{\big(t, z(t)\big)\colon z(t) \in E\ \forall t \in [\alpha;\beta]\big\}$ у тому розумінні, що $f = f\big(t, z(t)\big)$, $t \in [\alpha;\beta]$ (значення функції залежить не тільки від точки $z(t)$, що належить сліду дуги Γ, а й від параметра (часу) t; наприклад, f може бути швидкістю матеріальної точки). Якщо існує R-інтеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(t, z(t)\big)\,dt =: \int\limits_{\Gamma} f\,dt$, то його називають *криволінійним інтегралом першого роду функції f по дузі* Γ і позначають $\int\limits_{\Gamma} f\,dt$.

Наприклад, для функції p змінних $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, що визначена на дузі Γ у просторі $\mathbb{R}^p$, рівняння якої $x_k = x_k(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, $k \in \overline{1,p}$, маємо:

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dt := \int\limits_{\Gamma} f(x_1, x_2, \ldots, x_p)\,dt := \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_p(t)\big)\,dt.$$

Неперервність функції f на дузі Γ гарантує існування криволінійного інтеграла першого роду, так що з теоретичної точки зору такі інтеграли не ставлять нових проблем у порівнянні з R-інтегралами.

На практиці такі інтеграли зустрічаються найчастіше у випадку, коли Γ — спрямлювана дуга довжиною L, а рівняння Γ має вигляд $z = z(t)$, $t \in [0;L]$, причому t дорівнює довжині дуги від початкової точки до біжучої, тобто $t = l\big(\overset{\frown}{z(0), z(t)}\big)$. До таких інтегралів приводять деякі практичні задачі, наприклад, задача про обчислення маси m, розподіленої вздовж дуги Γ з густиною ρ: $m = \int\limits_{\Gamma} \rho\,dt$.

5.4.3. Криволінійний інтеграл другого роду. Нехай функція f визначена на неперервній дузі $\Gamma = \big\{\big(t, z(t)\big)\colon t \in [\alpha;\beta] \text{ і } z(t) \in E\big\}$, тобто $f = f\big(t, z(t)\big)$, $t \in [\alpha;\beta]$, і набуває значень з простору E_1, причому $\forall z \in E$ і $\forall w \in E_1$ якимось чином визначено добуток $w \cdot z$, що набуває значень з нормованого простору E_2.

Візьмемо розбиття $(T) = \big\{t_k\colon k \in \overline{0,n}\big\}$ відрізка $[\alpha;\beta]$, тобто

$$t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Позначимо $z_k = z(t_k)$, $k \in \overline{0,n}$, $z_k^* = z(t_k^*)$, де $t_k^* \in [t_k;t_{k+1}]$ — *проміжні точки* $\forall k \in \overline{0,n-1}$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $k \in \overline{0,n-1}$, і $\lambda(T) = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \Delta t_k$ — *дрібність розбиття* (T). Зрозуміло, що точки z_k і z_k^* є точками сліду Γ_1 дуги Γ у просторі E.

Складемо суму

$$S(T,f,\{t_k^*\}) := S(T,f) := S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k^*, z_k^*)\,\Delta z_k, \tag{4}$$

яку природно назвати *інтегральною сумою* функції f. Ця сума залежить від розбиття (T) і способу вибору проміжних точок t_k^*.

Якщо існує границя

$$J = \lim_{\lambda(T)\to 0} S(T) =: \int_\Gamma f\,dz, \tag{5}$$

тобто $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0$: $\|S(T) - J\| < \varepsilon$, коли $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* (або просто *інтегралом*) *функції f вздовж дуги* Γ.

5.4.4. R-інтеграл векторнозначної функції однієї змінної. Розглянемо випадок, коли $E = \mathbb{R}^1$, $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^p$, $\Gamma = \big\{(t,t)\colon t \in [\alpha;\beta]\big\}$, $\Gamma_1 = [\alpha;\beta]$ — слід Γ. Тоді, якщо $f = f(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, $t \in [\alpha;\beta]$, то інтегральна сума (4) набуває вигляду

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} (f_1(t_k^*), \ldots, f_p(t_k^*))\,\Delta t_k =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n-1} f_1(t_k^*)\,\Delta t_k, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} f_p(t_k^*)\,\Delta t_k\right).$$

Тому границя (5) існує тоді й тільки тоді, коли існує

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_i(t_k^*)\,\Delta t_k =: \int_\alpha^\beta f_i(t)\,dt\ \forall i \in \overline{1,p},$$

причому

$$\int_\Gamma f\,dz =: \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \left(\int_\alpha^\beta f_1(t)\,dt, \ldots, \int_\alpha^\beta f_p(t)\,dt\right).$$

Це так званий *R-інтеграл від векторнозначної функції дійсної змінної по відрізку* $[\alpha;\beta]$. Він існує тоді й тільки тоді, коли $\forall i \in \overline{1,p}$ існує R-інтеграл по відрізку $[\alpha;\beta]$ від i-тої компоненти цієї функції. Зокрема, якщо f неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, то існує $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$.

5.4.5. Повний криволінійний інтеграл та інтеграл по компоненті. Нехай $E = E_1 = \mathbb{R}^p$, $\Gamma = \big\{(t,(x_1(t),\ldots,x_p(t)))\colon t \in [\alpha;\beta]$ і $x_i(t) \in \mathbb{R}\ \forall i \in \overline{1,p}\big\}$, $E_2 = \mathbb{R}$,

$$f = f(x_1,\ldots,x_p) = (f_1(x_1,\ldots,x_p),\ldots,f_p(x_1,\ldots,x_p)) \in \mathbb{R}^p,$$

а коли $w = (w_1,\ldots,w_p) \in \mathbb{R}^p$ і $z = (z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{R}^p$, то

$$w \cdot z = (w_1,\ldots,w_p)\cdot(z_1,\ldots,z_p) =: w_1z_1 + \ldots + w_pz_p \in \mathbb{R}.$$

Тоді інтегральна сума (4) набуває вигляду

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f_1(x^*_{1,k},\ldots,x^*_{p,k}),\ldots,f_p(x^*_{1,k},\ldots,x^*_{p,k})\Big)\cdot(\Delta x_{1,k},\ldots,\Delta x_{p,k}) =:$$

$$=: \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f_1(x^*_{1,k},\ldots,x^*_{p,k})\,\Delta x_{1,k} + \ldots + f_p(x^*_{1,k},\ldots,x^*_{p,k})\,\Delta x_{p,k}\Big),$$

а інтеграл (5) — вигляду

$$\int\limits_\Gamma f\,dz = \int\limits_\Gamma f_1\,dx_1 + \ldots + f_p\,dx_p. \tag{6}$$

Це так званий *повний криволінійний інтеграл* (або просто *інтеграл*) *функції* $f = (f_1,\ldots,f_p)$ (або *функцій* $f_1,\ldots,f_p$) *вздовж дуги* Γ. На нього можна дивитися, як на суму $\sum\limits_{i=1}^{p}\int\limits_\Gamma f_i\,dx_i$, де $\int\limits_\Gamma f_i\,dx_i$ — це так званий *криволінійний інтеграл по* i*-тій компоненті функції* f *вздовж дуги* Γ. Зокрема, у випадку $p = 2$ для функції $f = (P(x,y),Q(x,y))$ *повний криволінійний* інтеграл функцій P і Q має вигляд

$$\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx + \int\limits_\Gamma Q(x,y)\,dy,$$

де $\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx$ — *інтеграл по абсцисі функції* P *вздовж дуги* Γ, а $\int\limits_\Gamma Q(x,y)\,dy$ — *інтеграл по ординаті функції* Q *вздовж дуги* Γ.

5.4.6. R**-інтеграл комплекснозначної функції дійсної змінної.** Розглянемо випадок, коли $E = \mathbb{R}^1$, $E_1 = E_2 = \mathbb{C}$, $\Gamma = \big\{(t,t)\colon t \in [\alpha;\beta]\big\}$, $\Gamma_1 = [\alpha;\beta]$ — слід Γ. Тоді, якщо $f = f(t) = f_1(t) + i f_2(t) \in \mathbb{C}$, $t \in [\alpha;\beta]$, то інтегральна сума (4) набуває вигляду

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f_1(t^*_k) + i f_2(t^*_k)\Big)\Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} f_1(t^*_k)\,\Delta t_k + i\sum_{k=0}^{n-1} f_2(t^*_k)\,\Delta t_k.$$

Тому границя (5) існує тоді й тільки тоді, коли існує границя $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f_i(t_k^*)\,\Delta t_k$, $i\in\overline{1,2}$, причому

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz =: \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_1(t)\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} f_2(t)\,dt,$$

де $f_1(t) = \operatorname{Re} f(t)$, а $f_2(t) = \operatorname{Im} f(t)$.

Це так званий R-*інтеграл по відрізку* $[\alpha;\beta]$ *комплекснозначної функції* $f = f(t)$ *дійсної змінної* t. Він існує тоді й тільки тоді, коли існують R-інтеграли $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} f(t)\,dt$ і $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Im} f(t)\,dt$. Зокрема, якщо f неперервна на $[\alpha;\beta]$, то існує $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt$.

5.4.7. Криволінійний інтеграл функції комплексної змінної. Нехай $E = E_1 = E_2 = \mathbb{C}$, $\Gamma = \big\{(t, z(t))\colon\ t\in[\alpha;\beta]$ і $z(t)\in\mathbb{C}$ $\forall t\in[\alpha;\beta]\big\}$, $\Gamma_1 = \big\{z(t)\colon t\in[\alpha;\beta]\big\}$ — слід Γ у комплексній площині, $f = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z(t) = x(t) + iy(t)$ $\forall t\in[\alpha;\beta]$, $z_k^* = x_k^* + iy_k^*$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\,\Delta y_k$ $\forall k\in\overline{0,n-1}$. Тоді інтегральна сума (4) набирає вигляду

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k^* = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(u(x_k^*,y_k^*) + iv(x_k^*,y_k^*)\Big)\cdot(\Delta x_k + i\,\Delta y_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} u(x_k^*,y_k^*)\,\Delta x_k - v(x_k^*,y_k^*)\,\Delta y_k + i\sum_{k=0}^{n-1} v(x_k^*,y_k^*)\,\Delta x_k + u(x_k^*,y_k^*)\,\Delta y_k.$$

Тому границя (5), тобто інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$, існує тоді й тільки тоді, коли існують повні криволінійні інтеграли $\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy$ та $\int\limits_{\Gamma} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$, причому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_{\Gamma} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy. \qquad (7)$$

Таким чином, в усіх розглянутих випадках питання про існування та обчислення криволінійного інтеграла другого роду зводиться до питання про існування та обчислення або R-інтеграла по відрізку, або криволінійного інтеграла по компоненті, наприклад, інтеграла по абсцисі функції $u = u(x,y)$ вздовж дуги Γ: $\int\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dx$. Зауважимо також, що коли Γ — замкнена дуга, то замість символа $\int\limits_{\Gamma}$ часто використовують символ $\oint\limits_{\Gamma}$.

5.4.8. Існування та обчислення криволінійних інтегралів.

□ Припустимо, що функція $f = f(x,y)$ визначена на дузі Γ, рівняння якої

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta], \end{cases} \tag{8}$$

і така, що $f_1(t) = f(x(t),y(t))$ є R-інтегровною функцією на $[\alpha;\beta]$.

Накладемо на дугу Γ додаткові умови. Нехай існує похідна $x' = x'(t)$, що є R-інтегровною на відрізку $[\alpha;\beta]$. Тоді, згадавши формулу Лагранжа, зробимо перетворення інтегральної суми

$$S(T) := \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*,y_k^*)\,\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(x(t_k^*),y(t_k^*))\big(x(t_{k+1}) - x(t_k)\big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(x(t_k^*),y(t_k^*))x'(t_k^{**})\,\Delta t_k,$$

де $t_k^{**} \in [t_k;t_{k+1}]$ $\forall k \in \overline{0,n-1}$. Зауважимо, що

$$S_1(T) := \sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(x(t_k^*),y(t_k^*))x'(t_k^*)\,\Delta t_k\Big) \to$$

$$\to \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))x'(t)\,dt \ \ (\lambda(T) \to 0),$$

оскільки підінтегральна функція R-інтегровна на відрізку $[\alpha;\beta]$. Крім того,

$$|S(T) - S_1(T)| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} f(x(t_k^*),y(t_k^*))(x'(t_k^{**}) - x'(t_k^*))\,\Delta t_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant H\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(x')\,\Delta t_k,$$

де $H = \sup\limits_{[\alpha;\beta]} |f(x(t),y(t))|$. Враховуючи R-інтегровність функції $x'(t)$

на відрізку $[\alpha;\beta]$, за критерієм R-інтегровності $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\omega_k(x')\,\Delta t_k \to 0$ $(\lambda(T)\to 0)$, а тому $|S(T)-S_1(T)|\to 0$ $(\lambda(T)\to 0)$. Отже, $S(T) = S_1(T)+(S(T)-S_1(T)) \to \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))x'(t)\,dt$ $(\lambda(T)\to 0)$. ■

Таким чином, доведені наступні твердження.

Теорема 2 (про існування та обчислення інтеграла по абсцисі). *Нехай функція* $f(x,y)$ *визначена на дузі* Γ, *рівняння якої має вигляд* (8), *причому функції* $x' = x'(t)$ *та* $f_1 = f(x(t),y(t))$ R-*інтегровні на відрізку* $[\alpha;\beta]$. *Тоді функція* f *інтегровна по абсцисі вздовж дуги* Γ *і правильна рівність*

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))x'(t)\,dt.$$

Теорема 3 (про існування та обчислення інтеграла по ординаті). *Нехай функція* $f(x,y)$ *визначена на дузі* Γ, *рівняння якої має вигляд* (8), *причому функції* $y' = y'(t)$ *та* $f_1 = f(x(t),y(t))$ R-*інтегровні на відрізку* $[\alpha;\beta]$. *Тоді функція* f *інтегровна по ординаті вздовж дуги* Γ *і правильна рівність*

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))y'(t)\,dt.$$

Теорема 4 (про існування та обчислення повного криволінійного інтеграла). *Нехай функції* $P(x,y)$ *та* $Q(x,y)$ *неперервні на дузі* Γ, *рівняння якої має вигляд* (8), *причому функції* $x' = x'(t)$ *і* $y' = y'(t)$ R-*інтегровні на відрізку* $[\alpha;\beta]$ *(зокрема,* Γ *може бути кусково-гладкою дугою). Тоді існує повний криволінійний інтеграл функцій* P *і* Q *вздовж дуги* Γ *і має місце рівність*

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int\limits_\alpha^\beta \Big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt.$$

□ Застосуємо теорему 4 до обчислення інтеграла від функції f комплекснозначної змінної $z = x+iy$ вздовж дуги Γ, рівняння якої

$$z = z(t) = x(t)+iy(t),\ t\in[\alpha;\beta]. \tag{9}$$

Вважаємо, що існує R-інтегровна на $[\alpha;\beta]$ похідна $z' = z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ $\forall t\in[\alpha;\beta]$. Це гарантує неперервність дуги Γ. Якщо функція

$f = u + iv$ неперервна на Γ, то за відомою теоремою функції u та v неперервні на Γ, а за теоремою 4 існує права частина рівності (7). Тому існує

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \Big(u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt +$$

$$+\, i\int_\alpha^\beta \Big(v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\Big)\,dt =:$$

$$=: \int_\alpha^\beta \Big(x'(t)\Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big) +$$

$$+\, iy'(t)\Big(u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\Big)\Big)\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta f(z(t))(x'(t)+iy'(t))\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt. \ \blacksquare$$

Отже, доведена

Теорема 5 (про існування та обчислення інтеграла від функції комплексної змінної). *Нехай функція $f = f(z)$ неперервна на дузі Γ, рівняння якої має вигляд* (9)*, причому функція $z' = z'(t)$ R-інтегровна на відрізку $[\alpha;\beta]$ (зокрема, Γ може бути кусково-гладкою дугою). Тоді функція f R-інтегровна вздовж дуги Γ і має місце рівність $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\,dt$.*

Зауваження. Теореми 4 і 5 у частині R-інтегровності функції f вздовж Γ залишаються правильними, якщо умови, накладені на дугу Γ, замінити умовою спрямлюваності цієї дуги.

Приклад 2. Обчислити: 1) $\int_\Gamma \frac{x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ і 2) $\int_\Gamma \frac{dz}{z^n}$, $n \in \mathbb{Z}$, де Γ – коло $x^2+y^2=1$.

1) Запишемо рівняння кола у параметричній дійсній формі:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t,\ t \in [0;2\pi]. \end{cases}$$

Тоді $y' = \cos t$ і за теоремою 2 $\int_\Gamma \frac{x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t\,dt}{\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}} = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \pi.$

2) Записавши рівняння кола у параметричній комплексній формі: $z = \exp it$, $t \in [0;2\pi]$, за теоремою 4 дістанемо, що, оскільки $z' = i\exp it$, а $1/(\exp it)^{n-1} = \exp(1-n)it$, то $\int\limits_\Gamma \frac{dz}{z^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{i\exp it\,dt}{(\exp it)^n} = i\int\limits_0^{2\pi} \exp(1-n)it\,dt =$ $= i\int\limits_0^{2\pi} \cos(1-n)t\,dt - \int\limits_0^{2\pi} \sin(1-n)t\,dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{коли } n = 1, \\ 0, & \text{коли } n \neq 1. \end{cases}$

5.4.9. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна неперервна крива є певною функцією, що визначена на проміжку $\langle\alpha;\beta\rangle$ і набуває значень у деякому нормованому просторі E.
2. Кожна функція $f\colon \langle\alpha;\beta\rangle \to E$, де E — нормований простір, є неперервною кривою.
3. Кожна крива цілком визначається своїм слідом.
4. Якщо Γ — дуга, то Γ — неперервна крива.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Кожна неперервна крива є кривою Жордана.
7. Кожна матеріальна точка рухається по сліду деякої неперервної кривої.
8. Будь-яка дуга має довжину.
9. Будь-яка неперервна крива є спрямлюваною дугою.
10. Якщо функція f не спадає на $[a;b]$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) = f(b) - f(a)$.
11. Якщо $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ і $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) < +\infty$, то функції $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$ і $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$ є неспадними на $[a;b]$.
12. Якщо $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) < +\infty \Leftrightarrow \exists\varphi$ і ψ неспадні на $[a;b]$ і такі, що $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)\ \forall x \in [a;b]$.
13. Будь-яка дуга кожної параболи є спрямлюваною дугою.
14. Якщо криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_\alpha^\beta f\,dt$ існує, то функція f неперервна на $[\alpha;\beta]$.
15. Кожен визначений інтеграл є криволінійним інтегралом другого роду.
16. Якщо $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^p$, то f є R-інтегровною на $[a;b]$.

17. Кожен повний криволінійний інтеграл функції $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}^p$ є сумою p інтегралів функції f по кожній з компонент.
18. Якщо $f\colon [a;b] \to \mathbb{C}$, то f є R-інтегровною на $[a;b]$ тоді й тільки тоді, коли такими є функції $\operatorname{Re} f$ та $\operatorname{Im} f$.
19. Якщо функція f є неперервною на кусково-гладкій дузі Γ, то f є R-інтегровною на Γ.
20. Якщо існує інтеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))x'(t)\,dt$, то існує також і інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dx$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b(f) < +\infty$, то $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b(f) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}\limits_c^b(f)$ $\forall c \in [a;b]$.
2. Якщо $f'(x)$ обмежена на $[a;b]$, то $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b(f) < +\infty$.
3. $\mathop{\mathbf{V}}\limits_0^1(f) = +\infty$, якщо $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ $\forall x \neq 0$ і $f(0) = 0$.
4. Якщо функція f аналітична в області D, то для будь-якої кусково-гладкої дуги $\Gamma \subset D$ існує інтеграл $\int\limits_{\Gamma} f\,dz$.
5. Якщо функція $P = P(x,y)$ неперервна на дузі Γ, рівняння якої має вигляд (8), причому $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{\alpha}^{\beta}(x) < +\infty$, то інтеграл $\int\limits_{\Gamma} P\,dx$ існує.
6. Якщо функції $P = P(x,y)$ і $Q = Q(x,y)$ неперервні на спрямлюваній дузі Γ, то інтеграл $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$ існує.
7. Якщо функція $P = P(x,y)$ неперервна на дузі Γ: $y = f(x)$, $x \in [\alpha;\beta]$, і функція f неперервна на $[\alpha;\beta]$, то інтеграл $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx$ існує.

5.5. Основні властивості криволінійних інтегралів

Оскільки будь-який криволінійний інтеграл, як і звичайний R-інтеграл, є границею відповідної інтегральної суми, то природно чекати, що його властивості за формою нагадують властивості звичайного R-інтеграла по відрізку. Розглянемо ці властивості лише для повних криволінійних інтегралів: $\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ та для інтегралів від функцій комплексної змінної: $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$.

5.5.1. Найпростіші властивості криволінійних інтегралів. Обчислимо інтеграл від сталої функції.

□ Нехай рівняння дуги Γ має вигляд $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, і $f(z) = c = const$ $\forall z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k = c\sum_{k=0}^{n-1}(z_{k+1} - z_k) = c(z(\beta) - z(\alpha))$$

і тому

$$\int\limits_\Gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma c\,dz = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k = c(z(\beta) - z(\alpha)).$$

Аналогічно можна показати, що коли рівняння дуги Γ має вигляд

$$(x,y) = (x(t),y(t)),\ t \in [\alpha;\beta],$$

і $P(x,y) = c_1 = const$, $Q(x,y) = c_2 = const$ $\forall (x,y) = (x(t),y(t))$, $t \in [\alpha;\beta]$, то

$$\int\limits_\Gamma c_1\,dx + c_2\,dy = c_1(x(\beta) - x(\alpha)) + c_2((y(\beta) - y(\alpha)). \blacksquare$$

Таким чином, доведена

Властивість 1 (про інтеграл від сталої функції). *якщо* $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, − *рівняння дуги* Γ, *то* $\int\limits_\Gamma c\,dz = c(z(\beta) - z(\alpha))$, *а якщо рівняння дуги* Γ − $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t),\ t \in [\alpha;\beta], \end{cases}$ *то* $\int\limits_\Gamma c_1\,dx + c_2\,dy = c_1(x(\beta) - x(\alpha)) + c_2(y(\beta) - y(\alpha))$.

Зокрема, $\int\limits_\Gamma 0\,dz = 0$ *і* $\int\limits_\Gamma 1\,dz = z(\beta) - z(\alpha)$.

Дослідимо лінійність криволінійних інтегралів.

□ Припустимо, що функції f_1 і f_2 інтегровні вздовж дуги Γ, α_1 і α_2 − фіксовані числа і $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Зрозуміло, що тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k = \alpha_1\sum_{k=0}^{n-1} f_1(z_k^*)\,\Delta z_k + \alpha_2\sum_{k=0}^{n-1} f_2(z_k^*)\,\Delta z_k \to$$

$$\to \alpha_1\int\limits_\Gamma f_1\,dz + \alpha_2\int\limits_\Gamma f_2\,dz\ (\lambda(T)\to 0).$$

Тому функція f є інтегровною вздовж дуги Γ і

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz := \int\limits_{\Gamma} (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,dz = \alpha_1 \int\limits_{\Gamma} f_1\,dz + \alpha_2 \int\limits_{\Gamma} f_2\,dz. \qquad (1)$$

Методом математичної індукції рівність (1) легко узагальнюється на довільну скінченну кількість доданків.

Отже, правильна

Властивість 2 (про лінійність криволінійних інтегралів). *Якщо функції* f_k, $k \in \overline{1,n}$, *інтегровні вздовж дуги* Γ, *то функція* $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ *для будь-яких чисел* α_k, $k \in \overline{1,n}$, *також інтегровна вздовж* Γ, *причому* $\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \int\limits_{\Gamma} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f_k\right) dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_{\Gamma} f_k\,dz.$

Ця властивість має місце і для інтегралів $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$, *зокрема, для інтегралів по абсцисі і по ординаті.*

Оцінимо модуль криволінійного інтеграла.

□ Нехай функція f неперервна на дузі Γ: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, і функція $z' = z'(t)$ R-інтегровна на $[\alpha;\beta]$. Тоді, враховуючи теорему 4 попереднього пункту і властивість про R-інтегровність модуля функції, дістанемо $\left|\int\limits_{\Gamma} f\,dz\right| = \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt\right| \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)|\,dt = Hl$, де $H = \sup\limits_{[\alpha;\beta]} |f(z(t))|$, а l — довжина дуги Γ. ■

Цим самим доведена

Властивість 3 (про оцінку модуля криволінійного інтеграла). *Нехай функція* f *неперервна на дузі* Γ: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, *і функція* $z' = z'(t)$ *є* R*-інтегровною на відрізку* $[\alpha;\beta]$. *Тоді*

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f\,dz\right| \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)|\,dt \leqslant Hl,$$

де $H = \sup\limits_{[\alpha;\beta]} |f(z(t))|$, *а* l *— довжина дуги* Γ.

За аналогічних умов мають місце нерівності

$$\left|\int\limits_{\Gamma} P(x,y)\,dx\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma} |P(x(t),y(t))| \cdot |x'(t)|\,dt \leqslant H_1 l,$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma} Q(x,y)\,dy\right| \leqslant \int\limits_{\Gamma} |Q(x(t),y(t))|\cdot|y'(t)|\,dt \leqslant H_2 l,$$

де $H_1 = \sup\limits_{[\alpha;\beta]}|P(x(t),y(t))|$, $H_2 = \sup\limits_{[\alpha;\beta]}|Q(x(t),y(t))|$, *а* l *— довжина дуги* Γ.

☐ Припустимо, що дуга Γ є відрізком, паралельним осі OY, тобто рівняння Γ має вигляд $\begin{cases} x = x_0, \\ y = t, \end{cases}$ $t \in [\alpha;\beta]$. Обчислимо інтеграл за абсцисою вздовж цього відрізка.

Для будь-якої функції $f = f(x,y)$, що визначена на Γ, маємо: $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dx = \lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x_k^*,y_k^*)(x(t_{k+1}) - x(t_k)) = 0$, оскільки $x(t_{k+1}) - x(t_k) = x_0 - x_0 = 0\ \forall k \in \overline{0,n-1}$.

Аналогічно показуємо, що коли Γ є відрізком, паралельним осі OX, то $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dy = 0$ для будь-якої функції f, визначеної на Γ. ■

Таким чином, правильна

Властивість 4 (про криволінійні інтеграли вздовж відрізків, паралельних координатним осям). *Якщо дуга* Γ *є відрізком, паралельним осі* Oy *(осі* Ox*), то* $\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dx = 0$ $\left(\int\limits_{\Gamma} f(x,y)\,dy = 0\right)$ *для будь-якої функції* f*, визначеної на* Γ.

Дослідимо адитивність криволінійного інтеграла.

☐ Нехай $t^* \in (\alpha;\beta)$, $z(t^*) =: C$, а дуга $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} \cup \overset{\frown}{CB}$, де $\overset{\frown}{AC}$: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;t^*]$, і $\overset{\frown}{CB}$: $z = z(t)$, $t \in [t^*;\beta]$. За теоремою 4 попереднього пункту маємо:

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz =: \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{t^*} f(z(t))z'(t)\,dt + \int\limits_{t^*}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f(z)\,dz + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f(z)\,dz,$$

якщо функція f неперервна на Γ, а функція $z' = z'(t)$ інтегровна на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Аналогічну рівність можна дістати для повного криволінійного інтеграла $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$. ■

Отже, доведена

Властивість 5 (про адитивність криволінійних інтегралів). *Нехай функції f, P і Q неперервні на дузі $\overset{\frown}{AB} = \Gamma$: $z = z(t)$ $(x = x(t)$, $y = y(t))$, $t \in [\alpha;\beta]$, причому функція $z' = z'(t)$ R-інтегровна (функції $x' = x'(t)$ і $y' = y'(t)$ R-інтегровні) на $[\alpha;\beta]$. Тоді для будь-якої точки $C \in \overset{\frown}{AB}$ правильні рівності*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f\,dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} f\,dz + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} f\,dz$$

і

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} P\,dx + Q\,dy.$$

Якщо дуга $\Gamma = \overset{\frown}{AB} =: \Gamma_+$ має рівняння $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, то рівняння $z_1 = z_1(t) = z(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, природно вважати рівнянням дуги $\overset{\frown}{BA} =: -\overset{\frown}{AB} =: \Gamma_-$, оскільки при збільшенні параметра від α до β точка $z_1(t)$ пробігає слід дуги $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ у напрямі від точки B до точки A. *Дуги* Γ і Γ_- називають *взаємно протилежними.*

Вирішимо питання про інтеграли вздовж взаємно протилежних дуг. Оскільки за теоремою про заміну змінної у визначеному інтегралі $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} f(z(\alpha+\beta-t))z'(\alpha+\beta-t)\,dt = = -\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z_1(t))z_1'(t)\,dt = -\int\limits_{\Gamma_-} f(z)\,dz$, то має місце

Властивість 6 (про інтеграли вздовж взаємно протилежних дуг). *Нехай виконані умови властивості* 5. *Тоді*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f\,dz = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f\,dz, \text{ або } \int\limits_{\Gamma} f\,dz = -\int\limits_{\Gamma_-} f\,dz,$$

та

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\overset{\frown}{BA}} P\,dx + Q\,dy, \text{ або } \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = -\int\limits_{\Gamma_-} P\,dx + Q\,dy.$$

5.5.2. Інтегрування суми функціонального ряду. Розглянемо тепер узагальнення властивості 2 на випадок суми функціонального ряду.

□ Нехай $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, причому даний функціональний ряд рівномірно збіжний на дузі Γ до $f(z)$. Тоді якщо f_k — неперервні функції на Γ $\forall k \in \mathbb{N}$, то і f неперервна на Γ, а тому існують інтеграли $\int\limits_{\Gamma} f\,dz$ і $\int\limits_{\Gamma} f_k\,dz$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Крім того, за властивостями 2 і 3

$$\left|\int\limits_{\Gamma} f\,dz - \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\Gamma} f_k\,dz\right| = \left|\int\limits_{\Gamma}\Big(f - \sum_{k=1}^{n} f_k\Big)dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z\in\Gamma}\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| \cdot l \to 0 \ \ (n\to\infty),$$

де l — довжина дуги Γ. А це означає, що $\int\limits_{\Gamma} f\,dz =: \int\limits_{\Gamma}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\Big)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k\,dz$. ■

Таким чином, правильна

Властивість 7 (про почленне інтегрування функціонального ряду). *Нехай функції f_k неперервні на дузі Γ: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, для якої функція $z' = z'(t)$ R-інтегровна на $[\alpha;\beta]$. Тоді якщо функціональний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ рівномірно збігається на дузі Γ до функції f, то* $\int\limits_{\Gamma} f\,dz =: \int\limits_{\Gamma}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\Big)dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k\,dz.$

Ця властивість має місце і для інтегралів $\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy$.

5.5.3. Зв'язок між інтегралами вздовж дуги і вздовж ламаної.

□ Нехай функція f неперервна в області D, а дуга Γ: $z = z(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, спрямлювана (наприклад, $z'(t)$ R-інтегровна на відрізку $[\alpha;\beta]$). Якщо слід Γ, тобто $\Gamma_1 \subset D$, то, враховуючи компактність Γ_1 і замкненість межі ∂D області D дістаємо, що відстань від Γ_1 до ∂D: $\rho(\Gamma_1, \partial D) > \rho_1 > 0$, якщо $D \neq \mathbb{C}$. У випадку $D = \mathbb{C}$ вважаємо $\rho_1 > 0$ довільним. Позначимо $D_1 = \big\{z \in D\colon \rho(z,\Gamma_1) \leqslant \rho_1\big\}$. D_1 — компактна множина, оскільки вона замкнена і обмежена.

Візьмемо розбиття (T_m) відрізка $[\alpha;\beta]$ точками $t_k^{(m)}$, $k \in \overline{0, n_m - 1}$, настільки дрібним, щоб $\lambda(T_m) < \frac{1}{m}$ і $\left|z - z_k^{(m)}\right| = \left|z(t) - z(t_k^{(m)})\right| < \min\left\{\rho_1, \frac{1}{m}\right\}$ $\forall t \in [t_k^{(m)}; t_{k+1}^{(m)}]$.

Ламану з вершинами у точках $z_0, z_1, \ldots, z_m$, вписану в дугу Γ, позначимо L_m, а її ланки $- L_k^{(m)} = \overline{z_k^{(m)}, z_{k+1}^{(m)}}$, $k \in \overline{0, n_m - 1}$. Тоді $L_m \subset D$ і якщо $z_k^* = z(t_k^*)$, де $t_k^* \in [t_k^{(m)}; t_{k+1}^{(m)}]$, то

$$\int\limits_\Gamma f\,dz = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{n_m-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k^{(m)}, \text{ а } \int\limits_{L_m} f\,dz = \sum_{k=0}^{n_m-1} \int\limits_{L_k^{(m)}} f(z)\,dz.$$

Тому $\left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \int\limits_{L_m} f\,dz\right| =$

$$= \left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \sum_{k=0}^{n_m-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k^{(m)} + \sum_{k=0}^{n_m-1} \int\limits_{L_k^{(m)}} \big(f(z_k^*) - f(z)\big)\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \sum_{k=0}^{n_m-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k^{(m)}\right| + \sum_{k=0}^{n_m-1} \left(\max_{L_k^{(m)}} \left|f(z_k^*) - f(z)\right|\right) \cdot |\Delta z_k^{(m)}| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \sum_{k=0}^{n_m-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k^{(m)}\right| + \Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n_m-1} |f(z_k^*) - f(z_k^{**})|\Big)\, l(\overset{\frown}{AB}).$$

Оскільки $z_k^{**} \in \overline{z_k^{(m)}, z_{k+1}^{(m)}}$, а $z_k^* \in \overset{\frown}{z_k^{(m)} z_{k+1}^{(m)}}$, то $|z_k^* - z_k^{**}| < \frac{2}{m}$ і z_k^*, $z_k^{**} \in D_1$. Отже, $z_k^* - z_k^{**} \to 0$ при $m \to \infty$, а оскільки f рівномірно неперервна на D_1, то $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n_m-1} |f(z_k^*) - f(z_k^{**})| \to 0$ $(m \to \infty)$. Таким чином,

$$\left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \int\limits_{L_m} f\,dz\right| \leqslant \left|\int\limits_\Gamma f\,dz - \sum_{k=0}^{n_m-1} f(z_k^*)\,\Delta z_k\right| +$$

$$+ \Big(\max_{0\leqslant k\leqslant n_m-1} |f(z_k^*) - f(z_k^{**})|\Big) \cdot l(\overset{\frown}{AB}) \to 0 \ (m \to \infty),$$

тобто $\int\limits_\Gamma f\,dz = \lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{L_m} f\,dz$.

Аналогічно можна показати, що

$$\int\limits_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{L_m} P\,dx + Q\,dy. \ \blacksquare$$

Отже, має місце

Властивість 8 (про зв'язок інтеграла вздовж дуги з інтегралом вздовж ламаної). *Нехай функція f (функції P і Q) неперервна (неперервні) в області D, що містить спрямлювану дугу Γ. Тоді знайдеться послідовність ламаних $L_m \subset D$, вписаних у дугу Γ, і таких, що*

$$\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{L_m} f\,dz \quad \left(\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{L_m} P\,dx + Q\,dy \right).$$

5.5.4. Поняття еквівалентних дуг та твердження про еквівалентність дуг. У цьому пункті вирішується питання про те, коли дуги можна вважати рівними (однаковими).

Зрозуміло, що розумним чином визначені рівні дуги повинні мати однакові сліди, і ця умова є найістотнішою для рівності дуг. Але рівність слідів не завжди достатня для того, щоб вважати дуги рівними.

Наприклад, дуги Γ_1: $z = z_1(t) = t + i \cdot 0$, $t \in [0;1]$, Γ_2: $z = z_2(\theta) = \sin^2\theta$, $\theta \in [0; \frac{3\pi}{2}]$ і Γ_3: $z = z_3(\tau) = 2\tau + i \cdot 0$, $\tau \in [0; \frac{1}{2}]$ мають однакові сліди — відрізок $[0;1]$ дійсної осі. Проте з фізичної точки зору дуги Γ_1 і Γ_2 слід вважати різними, оскільки ці дуги характеризують шляхи, якими рухається матеріальна точка, і в першому випадку матеріальна точка проходить шлях від точки 0 до точки 1 один раз, а у другому випадку матеріальна точка проходить шлях від точки 0 до точки 1 (коли $\theta \in (0; \frac{\pi}{2})$), потім від точки 1 до точки 0 (коли $\theta \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$) і, нарешті, знову від точки 0 до точки 1 (коли $\theta \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$).

Для вирішення питання про рівність дуг Γ_1 і Γ_3 природно спочатку звести до спільного проміжку проміжки зміни параметрів (часу) τ і t. Це можна зробити за допомогою взаємно однозначного відображення φ: $[0; \frac{1}{2}] \leftrightarrow [0;1]$, наприклад, $t = \varphi(\tau) = 2\tau$, $\tau \in [0; \frac{1}{2}]$. А далі, якщо дістанемо, що $z_1(t) = z_1(\varphi(\tau)) = z_3(\tau)$ $\forall \tau \in [0; \frac{1}{2}]$ (для вказаних дуг це так і є), то природно вважати дуги Γ_1 і Γ_3 рівними.

У зв'язку з проведеними міркуваннями доцільно ввести наступне означення.

Назвемо дуги Γ_1: $z = z_1(t)$, $t \in [\alpha_1; \beta_1]$, і Γ_2: $z = z_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha_2; \beta_2]$, *еквівалентними* (або *рівними*), якщо існує неперервна зростаюча функція $t = \varphi(\tau)$, яка взаємно однозначно відображає відрізок $[\alpha_2; \beta_2]$ на відрізок $[\alpha_1; \beta_1]$ і така, що $z_1(\varphi(\tau)) = z_2(\tau)$ $\forall \tau \in [\alpha_2; \beta_2]$.

Теорема 1 (про еквівалентність простих незамкнених дуг). *Нехай дуги* $\Gamma_1\colon z = z_1(t), t \in [\alpha_1;\beta_1]$, *і* $\Gamma_2\colon z = z_2(\tau), \tau \in [\alpha_2;\beta_2]$, *прості, незамкнені, мають співпадаючі початкові точки (тобто* $z_1(\alpha_1) = z_2(\alpha_2)$*) і спільний слід. Тоді ці дуги еквівалентні.*

□ Покладемо $\varphi(\tau) = z_1^{-1}(z_2(\tau))$, $\tau \in [\alpha_2;\beta_2]$. Легко бачити, що функція φ є неперервним взаємно однозначним відображенням $[\alpha_2;\beta_2]$ на $[\alpha_1;\beta_1]$, а тому вона строго монотонна. Оскільки

$$\varphi(\alpha_2) = z_1^{-1}(z_2(\alpha_2)) = z_1^{-1}(\alpha_1)) = \alpha_1,$$

то функція φ зростаюча. Крім цього,

$$z_1(\varphi(\tau)) \equiv z_1 \circ z_1^{-1}(z_2(\tau)) \equiv z_2(\tau) \text{ на } [\alpha_2;\beta_2].$$

Отже, криві Γ_1 і Γ_2 еквівалентні. ■

Незамкнені дуги, що задовольняють умови теореми 1, назвемо *однаково орієнтованими.*

Зрозуміло, що у випадку замкнених дуг теорема 1 неправильна, оскільки співпадання початкових точок не гарантує однакової орієнтації дуг. Уточнимо поняття однакової орієнтації замкнених дуг.

Нехай Γ_1: $z = z_1(t)$, $t \in [\alpha_1;\beta_1]$, і Γ_2: $z = z_2(\tau)$, $\tau \in [\alpha_2;\beta_2]$, — прості контури із спільним слідом і співпадаючими початковими точками (тобто $z_1(\alpha_1) = z_2(\alpha_2)$). Тоді функція $\varphi(\tau) = z_1^{-1}(z_2(\tau))$, $\tau \in (\alpha_2;\beta_2)$, неперервна, взаємно однозначно відображає інтервал $(\alpha_2;\beta_2)$ на інтервал $(\alpha_1;\beta_1)$ і тому вона строго монотонна. Якщо функція φ зростаюча, то назвемо контури Γ_1 і Γ_2 *однаково орієнтованими,* а якщо спадна — то *протилежно орієнтованими.*

Теорема 2 (про еквівалентність простих контурів). *Якщо контури* Γ_1 *і* Γ_2 *прості, мають спільну початкову точку, спільний слід і однаково орієнтовані, то вони еквівалентні.*

□ Оскільки функція $\varphi(\tau)$, $\tau \in (\alpha_2;\beta_2)$, неперервна, зростаюча і обмежена, то довизначивши її у точках α_2 та β_2 рівностями $\varphi(\alpha_2) = \lim\limits_{\tau\to\alpha_2+} \varphi(\tau)$, $\varphi(\beta_2) = \lim\limits_{\tau\to\beta_2-} \varphi(\tau)$, дістанемо існування функції φ, неперервної та зростаючої на $[\alpha_2;\beta_2]$, яка "здійснюватиме еквівалентність" контурів Γ_1 і Γ_2. ■

Нехай контури Γ_1 і Γ_2 з попереднього означення мають початкові точки A_1 і A_2, причому $A_1 = z_2(\tau^*)$, $\tau^* \in (\alpha_2;\beta_2)$. Розглянемо контур

$$\Gamma_2^*\colon z = z_2(\alpha_2 - \tau^* + \tau) = z_2^*(\tau),\ \tau \in [\tau^*;\tau^* + (\beta_2 - \alpha_2)],$$

який має з контуром Γ_1 спільну початкову точку. Контури Γ_1 і Γ_2 назвемо *однаково* (*протилежно*) *орієнтованими,* якщо однаково (протилежно) орієнтовані контури Γ_1 і Γ_2^*.

Неважко довести, що має місце

Теорема 3 (про еквівалентність однаково орієнтованих дуг). *Якщо дуги Γ_1 і Γ_2 мають спільний слід, прості і однаково орієнтовані, то вони еквівалентні.*

Усі твердження цього пункту залишаються правильними і для дуг, сліди яких лежать у просторі $\mathbb{R}^2$, тобто рівняння дуг мають вигляд $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$.

5.5.5. Зв'язок між інтегралами вздовж еквівалентних дуг. Вирішимо тепер питання про криволінійні інтеграли вздовж еквівалентних (рівних) дуг.

Теорема 4 (про рівність інтегралів вздовж еквівалентних дуг). *Нехай дуги*

$$\Gamma_1\colon \begin{cases} x = x_1(t), \\ y = y_1(t), \end{cases} t \in [\alpha_1; \beta_1], \ i \ \Gamma_2\colon \begin{cases} x = x_2(\tau), \\ y = y_2(\tau), \end{cases} \tau \in [\alpha_2; \beta_2],$$

еквівалентні і спрямлювані, а функція $f(x,y)$ неперервна на спільному сліді цих дуг. Тоді $\int\limits_{\Gamma_1} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\Gamma_2} f(x,y)\,dx.$

Ця теорема доводиться аналогічно до теореми про заміну змінної у визначеному інтегралі від функції однієї змінної.

Зрозуміло, що твердження, аналогічне теоремі 4, має місце і для криволінійних інтегралів за ординатою.

Таким чином, враховуючи теорему 4 і теореми 1 − 3 пункту 5.5.4, дістаємо

Властивість 9 (про рівність криволінійних інтегралів вздовж еквівалентних дуг). *Якщо дуги Γ_1 і Γ_2 прості, спрямлювані, мають спільний слід і однаково орієнтовані, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні (функція $f(z)$ неперервна) на сліді цих дуг, то*

$$\int\limits_{\Gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\Gamma_2} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

$$\left(\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right).$$

5.5.6. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити правильність наступних тверджень.

1. Якщо $\int\limits_{\Gamma} f\,dz = 0$, то $f(z) = 0\ \forall z \in \Gamma$.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Якщо існує $\int\limits_{\Gamma}(f_1 + f_2)\,dz$, то існують $\int\limits_{\Gamma} f_1\,dz$ і $\int\limits_{\Gamma} f_2\,dz$.
4. Функції f_1 і f_2 є інтегровними вздовж Γ тоді й тільки тоді, коли функції $\varphi = f_1 + f_2$ і $\psi = f_1 - f_2$ є інтегровними вздовж Γ.
5. Якщо $|f|$ є інтегровною вздовж Γ функцією, то і f є інтегровною вздовж Γ функцією.
6. Якщо $\Gamma = \overset{\frown}{ACB}$, де $\overset{\frown}{AC} \parallel OX$, а $\overset{\frown}{CB} \parallel OY$, то
$$\int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AC}} P\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{CB}} Q\,dy.$$
7. Якщо $\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \int\limits_{\Gamma_-} f\,dz$, то $\int\limits_{\Gamma} f\,dz = 0$.
8. Якщо $\int\limits_{\Gamma}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)\Big)\,dz = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Gamma} f_k(z)\,dz$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ рівномірно збіжний на Γ.
9. Якщо дві дуги мають спільні сліди, то вони еквівалентні.
10. Якщо дуги еквівалентні, то вони мають спільні сліди.
11. Якщо дві дуги прості і мають спільний слід, то вони еквівалентні.
12. Інтеграли від однієї і тієї самої функції вздовж двох еквівалентних дуг набувають однакових значень.
13. Якщо дуги Γ_1 і Γ_2 мають однакові сліди та існують інтеграли $\int\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz$ і $\int\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz$, то ці інтеграли рівні.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, $R > 0$ і $K = \{z\colon\ |z - z_0| < R\}$ — круг збіжності даного степеневого ряду, то $\int\limits_{\Gamma} f\,dz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\Gamma}(z - z_0)^n dz$ для будь-якої дуги $\Gamma \subset K$.
2. Якщо Γ: $z = (t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, — кусково-гладка дуга, то
$$\int\limits_{\Gamma}(z - z_0)^n dz = \frac{(z(\beta) - z_0)^{n+1} - (z(\alpha) - z_0)^{n+1}}{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

5.6. Формула Гріна і незалежність криволінійного інтеграла від форми дуги

У цьому підрозділі буде знайдено зв'язок між повним криволінійним інтегралом та подвійним інтегралом і з'ясовано, коли інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}$.

5.6.1. Формула Гріна. Назвемо *область D простою,* якщо її замикання можна записати у вигляді

$$\overline{D} = \{(x,y)\colon a \leqslant x \leqslant b \ \text{ і } \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) \ \ \forall x \in [a;b]\}$$

та

$$\overline{D} = \{(x,y)\colon c \leqslant y \leqslant d \ \text{ і } \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \ \ \forall y \in [c;d]\},$$

де φ_i, ψ_i, $i \in \overline{1,2}$, − неперервні функції на відповідних відрізках.

Межу простої області D можна розглядати як об'єднання простих дуг: $\partial D = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BE} \cup \overset{\frown}{EC} \cup \overset{\frown}{CA}$, а також $\partial D = \overset{\frown}{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_1E_1} \cup \cup \overset{\frown}{E_1C_1} \cup \overset{\frown}{C_1A_1}$, де $\overset{\frown}{AB}\colon y = \varphi_1(x)$, $x \in [a;b]$, $\overset{\frown}{CE}\colon y = \varphi_2(x)$, $x \in [a;b]$, $\overset{\frown}{BE}$ і $\overset{\frown}{CA}$ − відрізки, паралельні осі Ox, $\overset{\frown}{B_1A_1}\colon x = \psi_1(y)$, $y \in [c;d]$, $\overset{\frown}{E_1C_1}\colon x = \psi_2(y)$, $y \in [c;d]$, $\overset{\frown}{B_1E_1}$ і $\overset{\frown}{C_1A_1}$ − відрізки, паралельні осі Oy, причому деякі з вказаних відрізків можуть вироджуватися у точки (див. рис. 35). Отже, за теоремою 3 пункту 5.5.4 криву ∂D можна представити у вигляді двох еквівалентних дуг. Тому за властивістю 9 пункту 5.5.5 при інтегруванні вздовж ∂D можна вибирати будь-яке із вказаних представлень цих еквівалентних дуг.

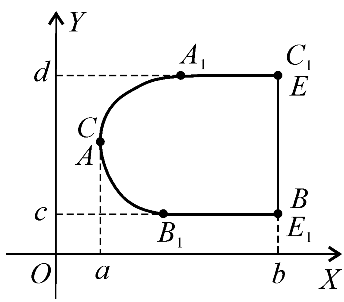

Рис. 35

Прикладами простих областей є круг, еліпс, трикутник, прямокутник, будь-який опуклий многокутник та багато інших.

□ Припустимо, що функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні на замиканні $\overline{D}$ простої області D. Оскільки

$\partial D = \overset{\frown}{AB} \cup \overset{\frown}{BE} \cup \overset{\frown}{EC} \cup \overset{\frown}{CA}$, то

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx = \Bigg(\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} + \int\limits_{\overset{\frown}{BE}} + \int\limits_{\overset{\frown}{EC}} + \int\limits_{\overset{\frown}{CA}} \Bigg) P\,dx.$$

За теоремою про обчислення криволінійних інтегралів

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx = \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\,dx, \quad \int\limits_{\overset{\frown}{BE}} P\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{CA}} P\,dx = 0$$

і

$$\int\limits_{\overset{\frown}{EC}} P\,dx = -\int\limits_{\overset{\frown}{CE}} P\,dx = \int\limits_a^b -P(x, \varphi_2(x))\,dx.$$

Тому

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx = -\int\limits_a^b \big(P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))\big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} P'_y(x,y)\,dy = -\iint\limits_D P'_y(x,y)\,dxdy$$

за теоремою про обчислення подвійного інтеграла. Але, як показано вище, межу області D можна розглядати інакше: $\partial D = \overset{\frown}{A_1B_1} \cup \overset{\frown}{B_1E_1} \cup \overset{\frown}{E_1C_1} \cup \overset{\frown}{C_1A_1}$. Тоді аналогічно до попереднього дістаємо

$$\oint\limits_{\partial D} Q\,dy = \iint\limits_D Q'_x(x,y)\,dxdy.$$

Отже, за властивістю 9 пункту 5.5.5,

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D Q'_x\,dxdy - \iint\limits_D P'_y\,dxdy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy. \blacksquare$$

Таким чином, доведена

Теорема 1 (про формулу Гріна для простої області). *Нехай функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні на замиканні $\overline{D}$ простої області. Тоді має місце наступна формула Гріна:*

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D (Q'_x - P'_y)\,dxdy.$$

Зауважимо, що у формулі Гріна на межі ∂D області D вибрано так званий *додатний напрям* — це такий напрям, при русі вздовж якого область D увесь час залишається зліва. Напрям, протилежний до додатного, називають *від'ємним*. При цьому, якщо $\Gamma = \partial D := \Gamma_+$ — межа D із вказаним додатним напрямом, то $(-\Gamma) := := (-\partial D) := \Gamma_-$ — межа D з від'ємним напрямом. Дане означення додатного напряму застосовне до області D, межа ∂D якої складається із скінченної кількості простих контурів Γ_k, $k \in \overline{1,n}$. Наприклад, на рис. 36 зображено область D, межа якої складається з трьох контурів Γ_1, Γ_2 і Γ_3, на кожному з яких вказано додатний напрям. Для таких областей за означенням вважають, що

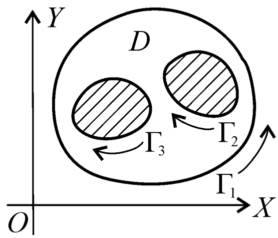

Рис. 36

$$\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Gamma_k} P\,dx + Q\,dy.$$

Враховуючи це, неважко показати, що формула Гріна залишається правильною за умов теореми 1, якщо замикання області D є об'єднанням скінченної кількості замикань простих областей D_k, $k \in \overline{1,n}$, попарно без спільних внутрішніх точок. Зокрема, формула Гріна правильна для будь-якої області D, межею ∂D якої є проста ламана $\Gamma = \overline{A_1 A_2 \ldots A_m}$. Таку область D завжди можна розбити на скінченну кількість трикутних областей (див. рис. 37) D_k, $k \in \overline{1,n}$, кожна з яких є простою областю. Якщо виявиться, що $P'_y = Q'_x$ на $\overline{D}$, то $\iint\limits_D (P'_y - Q'_x)\,dxdy = 0$, а тому за формулою Гріна $\oint\limits_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = 0$.

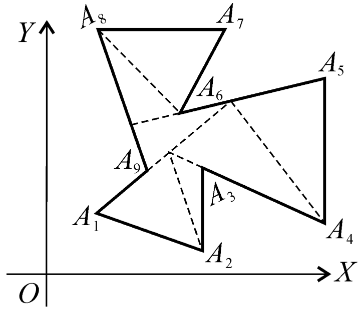

Рис. 37

Отже, має місце

Наслідок (про рівність нулеві інтеграла вздовж простої замкненої ламаної). *Нехай функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні на замиканні області D, межею ∂D якої є проста ламана $\Gamma = \overline{A_1 A_2 \ldots A_m}$. Тоді $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$, якщо $P'_y = Q'_x$ на $\overline{D}$.*

5.6.2. Незалежність криволінійного інтеграла від форми дуги. Обчислимо $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx + x\,dy$ вздовж дуги $\Gamma_1 = \overset{\frown}{AB}$: $y = x^2$, $x \in [0;1]$, що сполучає точки $A = (0,0)$ і $B = (1,1)$. Маємо (за теоремою 4 пункту 5.4.8) $\int\limits_{\Gamma_1} y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^1 (x^2 + 2x^2)\,dx = 1$.

Аналогічно для дуги $\Gamma_2 = \overset{\frown}{AB}$: $y = x^3$, $x \in [0;1]$, що сполучає ті самі точки $A = (0,0)$ і $B = (1,1)$, маємо $\int\limits_{\Gamma_2} y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^1 (x^3 + 3x^3)\,dx = 1$.

Отже, $\int\limits_{\Gamma_1} y\,dx + x\,dy = \int\limits_{\Gamma_2} y\,dx + x\,dy$. Разом з тим $\int\limits_{\Gamma_1} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^1 (x^2 - 2x^2)\,dx = -\frac{1}{3} \neq \int\limits_{\Gamma_2} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^1 (x^3 - 3x^3)\,dx = -\frac{1}{2}$.

У зв'язку з розглянутими прикладами виникає питання про те, *коли інтеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ *не залежить від форми дуги* $\overset{\frown}{AB}$, *що сполучає фіксовані точки* A *і* B. У випадку, коли інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}$, вважають, що

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy =: \int\limits_A^B P\,dx + Q\,dy.$$

Надалі вважаємо, що функції P і Q неперервні в області D, а дуга $\overset{\frown}{AB} \subset D$ кусково-гладка.

☐ Припустимо, що інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}$, що сполучає дві довільні фіксовані точки A, B області D і цілком лежить в області D. Оскільки будь-який контур $\Gamma \subset D$ завжди можна розглядати як об'єднання дуг $\overset{\frown}{ACB}$ і $\overset{\frown}{BMA}$, де A, B, C і M — фіксовані точки Γ (рис. 38), то

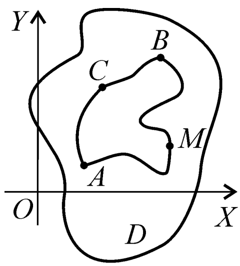

Рис. 38

$$\oint\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy+\int\limits_{\overset{\frown}{BMA}} P\,dx+Q\,dy=$$

$$=\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy-\int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} P\,dx+Q\,dy=0. \qquad (1^*)$$

Навпаки, якщо $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma\subset D$, то для будь-яких кусково-гладких дуг $\overset{\frown}{ACB}$ і $\overset{\frown}{AMB}$, що лежать в D, маємо: $\Gamma=\overset{\frown}{ACB}\cup\overset{\frown}{BMA}\subset D$. Тому з рівності (1^*) випливає рівність

$$\int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} P\,dx+Q\,dy=\int\limits_{\overset{\frown}{AMB}} P\,dx+Q\,dy,$$

яка і означає, що інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}\subset D$. ■

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 2 (перший критерій незалежності криволінійного інтеграла від форми дуги). *Для того щоб інтеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ *не залежав від форми кусково-гладкої дуги* $\overset{\frown}{AB}$, *що сполучає довільні фіксовані точки* A *і* B *області* D, *необхідно й досить, щоб інтеграл* $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx+Q\,dy=0$ *для будь-якого кусково-гладкого контура* $\Gamma\subset D$.

□ Нехай інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx+Q\,dy$ не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}\subset D$ для будь-яких точок A і B з області D. Зафіксуємо точку $A=(u_0,v_0)\in D$, а точку $B=(u,v)$ вважаємо біжучою в області D. Тоді рівність

$$F(u,v)=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=:\int\limits_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy \quad (1)$$

задає функцію $F\colon D\to\mathbb{R}$. Відомо, що для визначеного інтеграла

$F(u) = \int\limits_{u_0}^{u} P(x)\,dx$ має місце рівність $dF(u) = P(u)\,du$, якщо P — неперервна функція. Тому природно виникає питання, *чи не випливатиме з рівності* (1) *диференційовність функції* F *та рівність* $dF(u,v) = P(u,v)\,du + Q(u,v)\,dv$ *за умови, що* P *і* Q *— неперервні функції в області* D. Зрозуміло, що це буде так, коли $P(u,v) = F'_u(u,v)$, а $Q(u,v) = F'_v(u,v)$ $\forall (u,v) \in D$.

Зафіксуємо довільну точку (u_1,v_1) та приріст $\Delta u \neq 0$ такий, щоб відрізок, який сполучає точки (u_1,v_1) і $(u_1+\Delta u, v_1)$, лежав в області D. Тоді з формули (1), враховуючи адитивність криволінійного інтеграла, дістанемо

$$F(u_1+\Delta u, v_1) - F(u_1,v_1) = \Bigg(\int\limits_{(u_0,v_0)}^{(u_1+\Delta u, v_1)} - \int\limits_{(u_0,v_0)}^{(u_1,v_1)} \Bigg) P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{(u_0,v_0)}^{(u_1,v_1)} + \int\limits_{(u_1,v_1)}^{(u_1+\Delta u,v_1)} - \int\limits_{(u_0,v_0)}^{(u_1,v_1)} \Bigg) P\,dx + Q\,dy =$$

$$= \int\limits_{(u_1,v_1)}^{(u_1+\Delta u,v_1)} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{(u_1,v_1)}^{(u_1+\Delta u,v_1)} P\,dx.$$

Остання рівність правильна, оскільки можна вважати, що інтеграл береться вздовж відрізка, паралельного осі Ox. Оскільки рівняння цього відрізка $x = t$, $y = v_1$, $t \in [u_1; u_1+\Delta u]$ (або $t \in [u_1+\Delta u; u_1]$), то за теоремою про середнє $F(u_1+\Delta u, v_1) - F(u_1,v_1) = \int\limits_{u_1}^{u_1+\Delta u} P(t,v_1)\,dt = P(u_1+\theta\Delta u, v_1)\,\Delta u$, де $0 < \theta < 1$. Звідси випливає, що

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{F(u_1+\Delta u, v_1) - F(u_1,v_1)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} P(u_1+\theta\Delta u, v_1) = P(u_1,v_1),$$

тобто $F'_u(u_1,v_1) = P(u_1,v_1)$. Аналогічно доводимо, що $F'_v(u_1,v_1) = Q(u_1,v_1)$. Тому, враховуючи неперервність функцій P і Q, дістаємо диференційовність в області D функції F, що визначається рівністю (1). При цьому

$$dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \;\; \forall (x,y) \in D. \qquad (2)$$

Якщо дуга $\overset{\frown}{AB}$: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, кусково-гладка, то, враховуючи рівність (2) і теорему про обчислення криволінійного інтеграла, дістанемо

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} dF(x(t),y(t)) = F(x(t),y(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= F(x(\beta),y(\beta)) - F(x(\alpha),y(\alpha)) = F(B) - F(A).$$

Це, зокрема, означає, що інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$. ■

Отже, доведена

Теорема 3 (другий критерій незалежності криволінійного інтеграла від форми дуги). *Для того щоб інтеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ *не залежав від форми кусково-гладкої дуги* $\overset{\frown}{AB} \subset D$, *необхідно й досить, щоб вираз* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *був повним диференціалом деякої функції* F, *диференційовної в області* D. *При цьому*

$$\int\limits_{A}^{B} P\,dx + Q\,dy = F(B) - F(A).$$

□ Припустимо, що вираз $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ є повним диференціалом функції F, диференційовної в області D. Тоді $F'_x = P$ і $F'_y = Q$ в області D, а якщо існують похідні P'_y і Q'_x, неперервні в області D, то $P'_y = F''_{xy} = F''_{yx} = Q'_x$ в області D за відомою теоремою про рівність мішаних похідних.

Виникає питання про те, *чи не є умова* $P'_y = Q'_x$ $\forall (x,y) \in D$ *достатньою для того, щоб вираз* $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ *був повним диференціалом деякої функції* F *в області* D.

Розглянемо функції $P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$ і $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Оскільки $P'_y = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $Q'_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, то $P'_y = Q'_x$ в області D. Якщо припустити, що вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції F в області D, то

за теоремами 3 і 2 $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$. Проте якщо Γ − коло, рівняння якого $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$, то $x^2 + y^2 = R^2$, $x' = -R\sin t$, $y' = R\cos t$, і тоді $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{-R\cos t \cdot (-R\cos t)}{R^2} + \frac{R\sin t \cdot R\sin t}{R^2} \right) dt = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$.
Тому вираз $\frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ не є повним диференціалом ніякої функції F в області $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ■

Таким чином, правильна

Теорема 4 (про необхідну умову повного диференціала). *Нехай функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні в області D. Тоді, якщо вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції F в області D, то $P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$, але не навпаки.*

Візьмемо довільний простий контур Γ у просторі $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{C}$. Цей контур розділяє простір на дві області (див. рис. 39), межами яких є Γ. Одна область (D_1) обмежена. Назвемо її *внутрішністю контура* Γ. Інша ж область (D_2) необмежена. Це так звана *зовнішність контура* Γ.

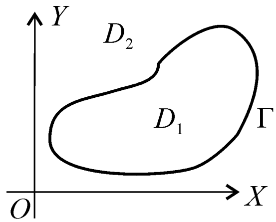

Рис. 39

Довільну *область* D у просторі $\mathbb{R}^2$ або $\mathbb{C}$ називають *однозв'язною,* якщо внутрішність D^* будь-якого простого контура $\Gamma \subset D$ цілком лежить у D. *Область,* що не є однозв'язною, називають *многозв'язною*.

Так, простори $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{C}$ є прикладами однозв'язних областей, а множини $D_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ та $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ є прикладами многозв'язних областей.

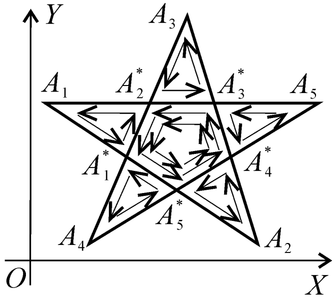

Рис. 40

□ Припустимо, що функції P, Q, P'_y і Q'_x неперервні в однозв'язній області D і $P'_y = Q'_x$ на D. Візьмемо довільний кусково-гладкий контур $\Gamma \subset D$ і покажемо, що $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$. Згідно з властивістю 8 криволінійних інтегралів (див. пункт 5.5.3) існує послідовність L_m замкнених ламаних, вписаних у Γ_i, таких, що $L_m \subset D$

і $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \lim\limits_{m\to\infty} \oint\limits_{L_m} P\,dx + Q\,dy.$

Ламана $L_m = \overline{A_1A_2\ldots A_{n_m}}$ може самоперетинатися або ні, але у будь-якому випадку її можна представити у вигляді об'єднання скінченної кількості простих многокутних контурів, додаючи при необхідності пари допоміжних ланок $\overset{\frown}{A_i^*A_{i+1}^*}$ та $\overset{\frown}{A_{i+1}^*A_i^*}$, сума інтегралів вздовж яких дорівнює нулеві. Наприклад, на рис. 40 зображено ламану $\overline{A_1A_2A_3A_4A_5A_1} = \overline{A_1A_1^*A_2^*A_1} \cup \overline{A_1^*A_4A_5^*A_1^*} \cup \overline{A_5^*A_2A_4^*A_5^*} \cup \cup \overline{A_4^*A_5A_3^*A_4^*} \cup \overline{A_3^*A_3A_2^*A_3^*} \cup \overline{A_1^*A_5^*A_4^*A_3^*A_2^*A_1^*} \cup \overline{A_1^*A_5^*A_4^*A_3^*A_2^*A_1^*}$.

Звідси за адитивною властивістю криволінійного інтеграла та за наслідком з формули Гріна про рівність нулеві інтеграла вздовж простого контура дістаємо, що $\oint\limits_{L_m} P\,dx + Q\,dy = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$, а тому і $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \lim\limits_{m\to\infty} \oint\limits_{L_m} P\,dx + Q\,dy = 0$. Згадуючи теореми 2 і 3, дістаємо, що інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$ і що вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції F в області D. ■

Отже, враховуючи теореми $2 - 4$, приходимо до висновку, що правильна

Теорема 5 (про рівносильність тверджень, пов'язаних з незалежністю інтеграла від форми дуги). *Нехай функції P, Q, P_y' та Q_x' неперервні в однозв'язній області D. Тоді наступні твердження* $1) - 4)$ *рівносильні:*

1) *інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$;*
2) *інтеграл $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$;*
3) *вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції F в області D;*
4) $P_y'(x,y) = Q_x'(x,y)\ \forall (x,y) \in D.$

Приклад 1. Якщо повернутися до функцій $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ і $Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ і розглянути їх в однозв'язній області $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant 0\}$, то легко бачити, що в цій області вираз $P\,dx+Q\,dy$ є повним диференціалом функції F, що визначається рівністю

$$F(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{якщо } x>0,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x=0,\ y>0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}+\pi, & \text{якщо } x<0,\ y>0,\\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x=0,\ y<0,\\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\pi, & \text{якщо } x<0,\ y<0.\end{cases}$$

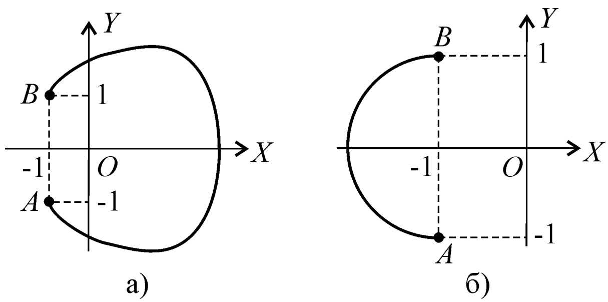

Рис. 41

За теоремою 3 $\int\limits_{(-1,-1)}^{(-1,1)}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=F(-1,1)-F(-1,-1)=\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}+\pi-$ $-(\operatorname{arctg}\frac{-1}{-1}-\pi)=\frac{3\pi}{2}$ за умови, що кусково-гладка дуга $\overset{\frown}{AB}$, що сполучає точки $A=(-1,-1)$ і $B=(-1,1)$, цілком лежить у вказаній однозв'язній області D. Наприклад, дуга $\overset{\frown}{AB}$ може мати вигляд, зображений на рис. 41 а). Для дуги $\overset{\frown}{AB}$, зображеної на рис. 41 б), інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\frac{-y\,dx+x\,dy}{x^2+y^2}=-\frac{\pi}{2}\neq\frac{3\pi}{2}$ (пропонуємо читачеві впевнитися у цьому).

5.6.3. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо область $D\subset\mathbb{R}^2$ є простою, то кожна пряма, паралельна до осі OX, за винятком, можливо, двох прямих, перетинає межу D не більше, ніж у двох точках.
2. Твердження, обернене до 1, є правильним.
3. Формула Гріна правильна лише для простих областей.
4. Якщо Γ — проста замкнена ламана, що лежить в області D, то $\oint\limits_{\Gamma}P\,dx+Q\,dy=0$.

5. Твердження 4 є правильним, коли внутрішність Γ лежить у D.
6. Інтеграл $\int\limits_{\frown{AB}} P\,dx + Q\,dy$ завжди не залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}$.
7. Якщо $P = P(x)$ і $Q = Q(y)$ − неперервні функції на $\mathbb{R}$, то $\oint\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$.
8. Якщо $P'_y = Q'_x$ в області D, то вираз $P\,dx + Q\,dy$ є повним диференціалом деякої функції F в області D.
9. Якщо область D утворюється з $\mathbb{R}^2$ шляхом викидання більше, ніж однієї, точок то D − многозв'язна область.
10. Вираз $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ є повним диференціалом деякої функції в області $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$.

II. Довести дані твердження.

1. Твердження 1) − 3) теореми 5 є рівносильними для будь-якої області D (не обов'зково однозв'язної).
2. Вираз $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ є повним диференціалом деякої функції F у будь-якій однозв'язній області D, що не містить точки $(0,0)$, причому вираз функції F залежить від області D.

5.7. Заміна змінних у кратних інтегралах

У цьому підрозділі формула заміни змінної для визначеного інтеграла узагальнюється на випадок кратних інтегралів.

5.7.1. Геометричний зміст якобіана відображення плоскої області. Нехай область $D \subset \mathbb{R}^2$ обмежена простим кусково-гладким контуром Γ. Тоді за теоремою 4 пункту 5.2.4 область D квадровна і $\operatorname{mes} D = \iint\limits_D du\,dv$.

Припустимо, що задано взаємно однозначне відображення $F\colon \overline{D} \leftrightarrow \overline{G}$, що визначається рівностями $F(u,v) = (x,y)$, де

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in \overline{D}, \end{cases} \tag{1}$$

причому в $\overline{D}$ неперервні частинні похідні x'_u, x'_v, y'_u, y'_v, y''_{uv} і y''_{vu}, а також якобіан відображення (1)

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u(u,v) & x'_v(u,v) \\ y'_u(u,v) & y'_v(u,v) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall (u,v) \in \overline{D}.$$

За наслідком 1 з теореми 3 пункту 4.2.5 образом області D є область G, а образом межі ∂D є межа ∂G області G. Якщо рівняння ∂D: $u = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$, то рівняння ∂G: $x = x(\varphi(t),\psi(t)) = \varphi_1(t)$, $y = y(\varphi(t),\psi(t)) = \psi_1(t)$, $t \in [\alpha;\beta]$.

Тому $\varphi'_1(t) = x'_u(u,v)\varphi'(t) + x'_v(u,v)\psi'(t)$, $\psi'_1(t) = y'_u(u,v)\varphi'(t) + y'_v(u,v)\psi'(t)$ і

$$\begin{cases} \varphi'_1(t) = 0, \\ \psi'_1(t) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_u(u,v)\varphi'(t) + x'_v(u,v)\psi'(t) = 0, \\ y'_u(u,v)\varphi'(t) + y'_v(u,v)\psi'(t) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi'(t) = 0, \\ \psi'(t) = 0, \end{cases}$$

оскільки визначник передостанньої системи відмінний від нуля. З цього та з кусково-гладкості контура ∂D випливає, що і ∂G є кусково-гладким контуром. Тому G — квадровна множина, міра якої $\operatorname{mes} G = \iint\limits_G dxdy$.

Згадуючи формули обчислення криволінійних інтегралів та формулу Гріна, дістанемо:

$$\operatorname{mes} G = \iint\limits_G dxdy = \oint\limits_{\partial G} x\,dy = \left| \int\limits_\alpha^\beta \varphi_1(t)\psi'_1(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_\alpha^\beta x(\varphi(t),\psi(t))\big(y'_u(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + y'_v(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\big)\,dt \right| =$$

$$= \left| \oint\limits_{\partial D} x(u,v)y'_u(u,v)\,du + x(u,v)y'_v(u,v)\,dv \right| = \left| \iint\limits_D \Big(x'_u(u,v)y'_v(u,v) + \right.$$

$$\left. + x(u,v)y''_{vu}(u,v) - x'_v(u,v)y'_u(u,v) - x(u,v)y''_{uv}(u,v) \Big) dudv \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_D \Big(x'_u(u,v)y'_v(u,v) - x'_v(u,v)y'_u(u,v) \Big)\, dudv \right| = \iint\limits_D |J(u,v)|\, dudv,$$

оскільки $J(u,v)$ зберігає знак в області D. Звідси за теоремою про середнє $\operatorname{mes} G = \iint\limits_D |J(u,v)|\, dudv = |J(u^*,v^*)| \operatorname{mes} D$, де $(u^*,v^*) \in D$.

Таким чином, *з геометричної точки зору модуль якобіана* $|J(u^*,v^*)|$ *є коефіцієнтом зміни міри при відображенні* (1) *області* D *в область* G.

5.7.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Розглянемо подвійний інтеграл $I = \iint\limits_G f(x,y)\,dxdy$, де функція f неперервна на замиканні $\overline{G}$ квадровної області G з кусково-гладкою межею ∂G. Нехай відображення $F(u,v) = (x,y)$, що визначається рівністю (1), взаємно однозначно відображає $\overline{D}$ на $\overline{G}$ і задовольняє усі умови пункту 5.7.1. Розіб'ємо замкнену область $\overline{D}$ прямими, паралельними координатним осям, на замкнені області $\overline{D_k}$, $k \in \overline{1,n}$, такі, що $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d(D_k) \to 0$ $(n \to \infty)$, де $d(D_k)$ − діаметр області D_k. Якщо $F(D_k) = G_k$, то, як показано вище, $\overline{G} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{G}_k$, $G_i \cap G_j = \varnothing\ \forall i \neq j$ і

$$\operatorname{mes} G_k = \iint\limits_{D_k} |J(u,v)|\,dudv \ \ \forall k \in \overline{1,n}. \tag{2}$$

Тому за адитивною властивістю подвійного інтеграла і за теоремою про середнє

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{G_k} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*,y_k^*) \operatorname{mes} G_k = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} f(x_k^*,y_k^*)|J(u,v)|\,dudv =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} \big(f(x_k^*,y_k^*) - f(x(u,v),y(u,v))\big)|J(u,v)|\,dudv =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv + \alpha_n, \tag{3}$$

де $(x_k^*,y_k^*) \in G_k\ \forall k \in \overline{1,n}$, а $\alpha_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} \big(f(x_k^*,y_k^*) - f(x(u,v),y(u,v))\big) \times$ $\times |J(u,v)|\,dudv$.

Покажемо, що $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$. Для цього зауважимо, що

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n}\max_{(u,v)\in D_k}\left|f(x_k^*,y_k^*)-f(x(u,v),y(u,v))\right|=$$

$$=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|f(x_k^*,y_k^*)-f(x_k^{**},y_k^{**})\right|,$$

$$(x_k^*,y_k^*)=(x(u_k^*,v_k^*),y(u_k^*,v_k^*)),\ (x_k^{**},y_k^{**})=(x(u_k^{**},v_k^{**}),y(u_k^{**},v_k^{**})),$$

а (u_k^*,v_k^*) і $(u_k^{**},v_k^{**})\in D_k$. Оскільки функція $f(x(u,v),y(u,v))$ неперервна на $\overline{D}$, то вона і рівномірно неперервна на $\overline{D}$. Тому, враховуючи, що $\rho\big((u_k^*,v_k^*),(u_k^{**},v_k^{**})\big)\leqslant d(D_k)\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}d(D_k)\to 0\ (n\to\infty)$, дістанемо, що $\beta_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\max\limits_{(u,v)\in D_k}\left|f(x_k^*,y_k^*)-f(x(u,v),y(u,v))\right|\to 0$ $(n\to\infty)$. Таким чином,

$$|\alpha_n|\leqslant\beta_n\sum_{k=1}^{n}\iint\limits_{D_k}|J(u,v)|\,dudv=$$

$$=\beta_n\iint\limits_{D}|J(u,v)|\,dudv=\beta_n\,\mathrm{mes}\,G\to 0\ \ (n\to\infty).$$

Отже, з рівності (3) випливає рівність

$$\iint\limits_{G}f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D}f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv.\qquad(4)$$

Це і є ***формула заміни змінних у подвійному інтегралі,*** яка залишається правильною і тоді, коли умови, при яких вона доведена, порушуються на множині нульової міри Жордана.

5.7.3. Перехід до полярних та узагальнених полярних координат у подвійному інтегралі. Відомо, що кожна точка M площини OXY крім декартових координат (x,y) цілком визначається так званими *полярними координатами* (ρ,θ) (див. рис. 42), де $\rho=\rho\big(M,(0,0)\big)\in[0;+\infty)$ — відстань точки M від точки $(0,0)$, а $\theta\in[0,2\pi)$ — кут, що утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з віссю OX.

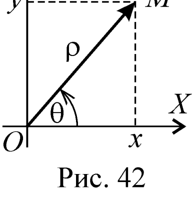

Рис. 42

Формули переходу до полярних координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\ \ \rho\in[0;+\infty),\ \theta\in[0;2\pi), \end{cases}\qquad(5)$$

задають відображення множини

$$E=\left\{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2\colon 0\leqslant\rho<+\infty,\ 0\leqslant\theta<2\pi\right\}$$

на простір $\mathbb{R}^2$ (див. рис. 43). При цьому умова взаємної однозначно-сті порушується лише на піввідрізку $[0;2\pi)$ осі $O\theta$, що є множиною нульової міри Жордана. Знайдемо якобіан перетворення (5):

$$J(\rho,\theta)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta \\ y'_\rho & y'_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\rho>0$$

на E, якщо нехтувати вказаним вище піввідрізком $[0;2\pi)$ осі $O\theta$.

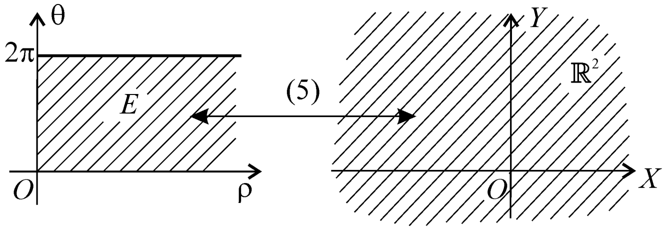

Рис. 43

Таким чином, формула (4) набуває вигляду

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho d\theta. \tag{6}$$

Це і є *формула переходу до полярних координат у подвійному інтегралі.*

Аналогічним чином можна дістати *формулу переходу у подвійному інтегралі до узагальнених полярних координат*

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta, \\ y=b\rho\sin\theta,\ \rho\in[0;+\infty),\ \theta\in[0;2\pi), \end{cases} \tag{5*}$$

де $a>0$ і $b>0$ — задані числа:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_D f(a\rho\cos\theta,b\rho\sin\theta)ab\rho\,d\rho d\theta. \tag{6*}$$

Формулою (6*), зокрема (6), доцільно користуватися тоді, коли або підінтегральна функція містить вираз вигляду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, або область G інтегрування якимось чином пов'язана з еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Приклад 1. Знайти $\iint\limits_G x^2\,dxdy$, якщо G — область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, тобто $\overline{G}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

Рівняння цього еліпса в узагальнених полярних координатах має вигляд $(\rho\cos\theta)^2+(\rho\sin\theta)^2=1\Leftrightarrow\rho=1,\ \theta\in[0;2\pi)$. Тому область G є образом області D, для якої $\overline{D} = \{(\rho,\theta)\colon 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ \text{а}\ \theta \in [0;2\pi)\}$. Отже, за формулою (6*) $\iint\limits_G x^2\,dxdy = \iint\limits_D a^2\rho^2\cos^2\theta \cdot ab\rho\,d\rho d\theta = a^3b\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 \rho^3\cos^2\theta\,d\rho = \frac{a^3b}{4}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{a^3b}{8}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\pi a^3 b}{4}$.

5.7.4. Заміна змінних у p-кратному та потрійному інтегралах. Формула, аналогічна до формули (4), має місце і для довільного p-кратного інтеграла:

$$\iint\limits_G\ldots\int f(x,y,\ldots,z)\,dxdy\ldots dz =$$

$$= \iint\limits_D\ldots\int f(x(u,v,\ldots,w),\ldots,z(u,v,\ldots,w))|J(u,v,\ldots,w)|\,dudv\ldots dw$$

за наступних умов: 1) f неперервна на замиканні $\overline{G} \subset \mathbb{R}^p$ вимірної області G; 2) відображення $F:\ \overline{D} \leftrightarrow \overline{G}$, де $\overline{D} \subset \mathbb{R}^p$, визначається рівностями $F(u,v,\ldots,w) = (x,y,\ldots,z)$, де

$$\begin{cases} x = x(u,v,\ldots,w), \\ y = y(u,v,\ldots,w),\ldots, \\ z = z(u,v,\ldots,w) \quad \forall (u,v,\ldots,w) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^p; \end{cases} \tag{7}$$

3) функції (7) мають в $\overline{D}$ неперервні частинні похідні другого порядку; 4) якобіан перетворення (7):

$$J(u,v,\ldots,w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & \ldots & x'_w \\ y'_u & y'_v & \ldots & y'_w \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z'_u & z'_v & \ldots & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall (u,v,\ldots,w) \in \overline{D}.$$

Зокрема, якщо $p = 3$, то дістаємо *формулу заміни змінних у потрійному інтегралі:*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_D f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|\,dudvdw. \tag{8}$$

5.7.5. Перехід до циліндричних та узагальнених циліндричних координат. Точка $M = (x,y,z)$ простору $\mathbb{R}^3$ цілком визначається своєю проекцією (x,y) на площину OXY та аплікатою z. Але, як сказано у пункті 5.7.3, проекція (x,y) цілком визначається полярними координатами ρ і θ, для яких $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$. Таким чином, $(x,y,z)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$ і ρ, θ, z називають *циліндричними координатами точки* $M\in\mathbb{R}^3$ (див. рис. 44). Оскільки формули (7) переходу до циліндричних координат мають вигляд

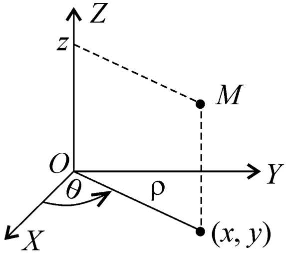

Рис. 44

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\\ z=z,\ \rho\in[0\ +\infty),\ \theta\in[0;2\pi),\ z\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

то якобіан перетворення

$$J(\rho,\theta,z)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_z\\ y'_\rho & y'_\theta & y'_z\\ z'_\rho & z'_\theta & z'_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\rho,$$

а формула (8) набуває вигляду

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\,d\rho d\theta dz.$$

Аналогічно можна дістати *формулу переходу до узагальнених циліндричних координат*

$$\begin{cases} x=a\rho\cos\theta,\\ y=b\rho\sin\theta,\\ z=z,\ \rho\in[0;+\infty),\ \theta\in[0;2\pi),\ z\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

де $a>0$ і $b>0$ — задані числа:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_D f(a\rho\cos\theta,b\rho\sin\theta,z)ab\rho\,d\rho d\theta dz.$$

Переходити до циліндричних координат доцільно тоді, коли або підінтегральна функція містить вираз $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, або область інтегрування G якимось чином пов'язана з циліндричною поверхнею $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Приклад 2. Обчислити $\iiint\limits_G x^2z\,dxdydz$, якщо G — область, обмежена еліптичним циліндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ та площинами $z=0$ та $z=1$.

Оскільки $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\right\}$, то за теоремою

про обчислення потрійного інтеграла $\iiint\limits_G x^2z\,dxdydz = \iint\limits_{G_1}\Big(\int\limits_0^1 x^2z\,dz\Big)\,dxdy =$
$= \iint\limits_{G_1}\Big(x^2\frac{z^2}{2}\Big|_0^1\Big)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{G_1} x^2\,dxdy$, де $G_1 = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\Big\}$.
Останній інтеграл обчислено у прикладі 1. Тому

$$\iiint\limits_G x^2z\,dxdydz = \frac{1}{8}\pi a^3 b.$$

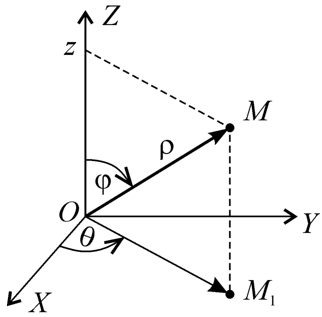

Рис. 45

5.7.6. Перехід до сферичних та узагальнених сферичних координат.

Точка $M = (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ цілком визначається так званими *сферичними координатами* ρ, θ, φ, де $\rho\in[0;+\infty)$ — відстань точки M від початку координат, $\theta\in[0;2\pi)$ — кут, що утворює з віссю OX радіус-вектор $\overrightarrow{OM_1}$ проекції точки M на площину OXY, а $\varphi\in[0;\pi]$ — кут, що утворює з віссю OZ радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M (див. рис. 45). Зв'язок між сферичними та декартовими координатами встановлюється формулами

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta,\ \rho\in[0;+\infty),\ \theta\in[0;2\pi),\ \varphi\in[0;\pi], \end{cases}$$

які задають відображення множини $E = \big\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3\colon\ 0\leqslant\rho < +\infty,\ 0\leqslant\theta<2\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi\big\}$ на простір $\mathbb{R}^3$.

Якобіан цього перетворення

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta\begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\varphi\begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2(\sin\varphi\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin\varphi\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\cos^2\theta + \sin^3\varphi\sin^2\theta) =$$

$$= -\rho^2(\sin\varphi\cos^2\varphi + \sin^3\varphi) = -\rho^2\sin\varphi.$$

Оскільки $\varphi\in[0;\pi]$, то $|J(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2\sin\varphi$ і формула (8) набуває вигляду *формули переходу у потрійному інтегралі до сферичних координат:*

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_D f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho d\theta d\varphi.$$

Аналогічним чином можна дістати *формулу переходу до узагальнених сферичних координат:*

$$\begin{cases} x = a\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, \\ y = b\rho\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta, \\ z = c\rho\cos^\alpha\varphi,\ \rho\in[0;+\infty),\ \theta\in[0;\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0;\frac{\pi}{2}], \end{cases}$$

де $a>0$, $b>0$, $c>0$, $\alpha\geqslant 1$ і $\beta\geqslant 1$ — задані числа; при цьому

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_D f(a\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, b\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta, c\rho\cos^\alpha\varphi)\times$$
$$\times\alpha\beta abc\rho^2\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\beta-1}\theta\sin^{2\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi\, d\rho d\theta d\varphi$$

і область G повинна лежати у першому октанті простору $\mathbb{R}^3$.

Приклад 3. Знайти об'єм тіла

$$G = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \leqslant 1\right\}.$$

Враховуючи симетричність G відносно координатних площин та наслідок 1 пункту 5.3.3, дістанемо $V(G) = \operatorname{mes} G = \iiint\limits_G dxdydz = 8\iiint\limits_{G_1} dxdydz$, де G_1 — частина G, що лежить у першому октанті.

Перейдемо до узагальнених сферичних координат:

$$\begin{cases} x = a\rho\sin^3\varphi\cos^3\theta, \\ y = b\rho\sin^3\varphi\sin^3\theta, \\ z = c\rho\cos^3\varphi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

оскільки $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = \rho^{\frac{2}{3}}\left(\sin^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\varphi\right) = \rho^{\frac{2}{3}} \leqslant 1$, $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0 \Leftrightarrow 0\leqslant\rho\leqslant 1$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$. Маємо: $V = 8\iiint\limits_{G_1} dxdydz = 8\cdot 9\cdot abc\int\limits_0^1\rho^2\,d\rho\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{72abc}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)^2\cos^2\varphi\,d\cos\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{3abc\cdot\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}\right) = \frac{4}{35}\pi abc.$

5.7.7. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо якобіан перетворення (1) відмінний від нуля у просторі $\mathbb{R}^2$, то це перетворення відображає область в область.
2. За умов твердження 1 відображення (1) є взаємно-однозначним.
3. Якщо $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$, то в $\mathbb{R}^2$ існують неперервні частинні похідні другого порядку функцій x та y і $J(u,v) \neq 0 \; \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
4. Відображення з твердження 3 взаємно однозначно відображає будь-яку область $D \subset \mathbb{R}^2$ в деяку область $G \subset \mathbb{R}^2$.
5. Коефіцієнт зміни міри при відображенні $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ залежить лише від u.
6. Формула заміни змінних у подвійному інтегралі правильна лише для неперервних функцій $f(x,y)$, $x(u,v)$ та $y(u,v)$.
7. Формули переходу до полярних координат задають взаємно-однозначне відображення.
8. Узагальнені циліндричні координати можна ввести за допомогою рівностей $x = x$, $y = a\rho\cos\theta$, $z = b\rho\sin\theta$.
9. Узагальнені сферичні координати можна ввести за допомогою рівностей $x = a\rho\cos^\alpha\varphi$, $y = b\rho\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta$, $z = c\rho\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta$.

II. Довести дані твердження.

1. Якобіан $J(\rho,\theta,z)$ перетворення $x = a\rho\cos^\beta\theta$, $y = b\rho\sin^\beta\theta$, $z = cz$, де a, b, c, β — задані числа, дорівнює $abc\beta\rho\sin^{\beta-1}\theta\cos^{\beta-1}\theta$.
2. Якобіан $J(\rho,\theta,\varphi)$ переходу до узагальнених сферичних координат дорівнює $\alpha\beta abc\rho^2\cos^{\beta-1}\theta\sin^{\beta-1}\theta\sin^{2\alpha-1}\varphi\cos^{\alpha-1}\varphi$.

5.7.8. Історична довідка. Ще Архімед (287 − 212 до н.е.) розв'язував геометричні задачі методами, що нагадують методи інтегрального числення, але справжніми творцями інтегрального числення є англійський математик І. Ньютон (1646 − 1727) та німецький математик Г. Лейбніц (1646 − 1716). Подвійні та потрійні інтеграли з'явилися у 1770 році вперше у працях Л. Ейлера (1707 − 1783), який також знайшов правило їх обчислення шляхом зведення до повторного інтеграла. Л. Ейлер і Ж. Лагранж (1736 − 1813) першими запропонували деякі правила заміни змінних у подвійних та потрійних інтегралах. Загальне правило заміни змінних у подвійних та потрійних інтегралах дав у 1836 році російський математик М. Остроградський (1801 −1862), а для n-кратних інтегралів − у 1841 році німецький метематик К. Якобі (1804 − 1851). Загальна теорія вимірювання об'ємів у n-вимірному просторі була створена у 1882 − 1887 роках французьким математиком К. Жорданом (1838 − 1922).

Криволінійні інтеграли першим у 1743 році ввів французький математик А. Клеро (1713 – 1765).

Точне означення інтеграла як границі інтегральної суми першим дав у 1821 році французький математик О. Коші (1789 – 1857). Перше коректне доведення існування інтеграла для неперервної функції було запропоноване у 1875 році французьким математиком Ж. Дарбу (1842 – 1917). Критерії інтегровності функції (не обов'язково неперервної) у різних формах запропоновано німецькими математиками Б. Ріманом (1826 – 1866) і П. Дюбуа-Реймоном (1831 – 1889).

Нерівність Коші – Буняковського для неперервних функцій встановлено у 1859 році російським математиком В. Я. Буняковським (1804 – 1889). Вона аналогічна алгебраїчній нерівності, яку довів у 1821 році О. Коші. Часто нерівність Коші – Буняковського називають нерівністю Шварца, за іменем німецького математика Г. Шварца (1843 – 1921), який довів цю нерівність у 1884 році.

6. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ТА КРИВОЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ РІМАНА

У даному розділі вивчаються застосування кратних та криволінійних інтегралів до геометричних та фізичних задач, а також до важливих питань теорії аналітичних функцій.

6.1. Геометричні застосування кратних та криволінійних інтегралів

У цьому підрозділі розглянуто застосування кратних та криволінійних інтегралів до обчислення площ та об'ємів.

6.1.1. Обчислення площі фігури. За наслідком 1 п. 5.3.3 площу (міру) квадровної фігури $G \subset \mathbb{R}^2$ можна обчислити за формулою

$$S(G) := \operatorname{mes} G = \iint\limits_G dxdy. \tag{1}$$

Зокрема, ця формула є правильною, коли межа ∂G фігури G є простим кусково-гладким контуром. У цьому випадку за формулою Гріна, вважаючи, що на контурі ∂G вибрано додатний напрям, маємо:

$$\iint\limits_G dxdy = \oint\limits_{\partial G} x\,dy = \oint\limits_{\partial G} (-y)\,dx = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx.$$

Отже,

$$S(G) = \operatorname{mes} G = \left|\oint\limits_{\partial G} x\,dy\right| = \left|\oint\limits_{\partial G} (-y)\,dx\right| = \left|\frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx\right|, \tag{2}$$

де напрям контура ∂G може бути довільним.

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0; 2\pi]$.

За формулою 1, згадуючи формулу переходу до узагальнених полярних координат, дістаємо $S = \iint\limits_G dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^1 ab\rho\,d\rho = \pi ab$.

Якщо скористаємося формулою (2), то дістанемо

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial G} x\,dy - y\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\big(a\cos t(b\cos t) - b\sin t(-a\sin t)\big)\,dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

6.1.2. Обчислення об'єму тіла. За наслідком 1 пункту 5.3.3 об'єм (міру) кубовного тіла G можна обчислити за формулою

$$V(G) = \operatorname{mes} G = \iiint\limits_G dxdydz.$$

Зокрема, якщо G є *узагальненим циліндричним тілом,* тобто

$$G = \{(x,y,z)\colon (x,y) \in D,\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\},$$

де D — квадровна фігура, а ψ_1 і ψ_2 — неперервні функції на D, то за теоремою 3 пункту 5.3.3 про обчислення потрійного інтеграла

$$V(G) = \operatorname{mes} G = \iint\limits_D \big(\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\big)\,dxdy.$$

За цією самою теоремою у випадку, коли $D = \{(x,y) :\ \varphi_1(x) \leqslant$ $\leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\ \forall x \in [a;b]\}$, де φ_1 і φ_2 неперервні на $[a;b]$, дістаємо:

$$\iint\limits_D \big(\psi_2(x,y) - \psi_1(x,y)\big)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_2(x,y)}^{\psi_1(x,y)} dz =$$

$$= \int\limits_a^b dx \iint\limits_{D_1} dydz = \int\limits_a^b \operatorname{mes} D_1\,dx = \int\limits_a^b S(x)\,dx,$$

де $S(x) = \operatorname{mes} D_1$, а $D_1 = \{(y,z)\colon \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant$ $\leqslant \psi_2(x,y)\} = D_1(x)$ — переріз тіла G площиною $X = x$, $x \in [a;b]$, паралельною площині OYZ. Таким чином,

$$V(G) = \operatorname{mes} G = \int\limits_a^b S(x)\,dx,$$

де $[a;b]$ — проекція G на вісь Ox, а $S(x)$ — площа перерізу тіла G площиною $X = x$, $x \in [a;b]$.

З останньої формули випливає так званий **принцип Кавальєрі:** *якщо два кубовних тіла мають однакові площі перерізів пло-*

щинами, паралельними до фіксованої площини, то ці два тіла мають і однаковий об'єм.

Приклад 2. Знайти об'єм трьохосного еліпсоїда, тобто тіла

$$G = \left\{ (x,y,z)\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Переріз G площиною $X = x$, $x \in (-a;a)$, дає еліпс, тобто фігуру

$$D_1(x) = \left\{ (y,z)\colon \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\} = \left\{ (y,z)\colon \frac{y^2}{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^2(a^2-x^2)}{a^2}} \leqslant 1 \right\}.$$

Як показано у прикладі 1 п. 6.1.1,

$$S(x) = \operatorname{mes} D_1(x) = \pi \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{c}{a} \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2).$$

Тому

$$V(G) = \int_{-a}^{a} S(x)\, dx = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

6.1.3. Обчислення площі кривої поверхні. Довгий час вважалося, що за аналогією з довжиною дуги площу кривої поверхні можна означати як границю площ вписаних у цю поверхню многогранників. Але у 1810 році німецький математик Г. Шварц показав помилковість такої думки. Він розглянув звичайну циліндричну поверхню і вписав у неї многогранник (див. рис. 46) наступним чином.

Нехай радіус циліндра R, а висота h. Поділимо цей циліндр на m маленьких циліндрів висотою $\frac{h}{m}$. Нехай кола Γ_k і Γ_{k+1}, $k \in \overline{0, m-1}$, є основами маленьких циліндрів. Поділимо їх відповідно точками $A_i^{(k)}$ та $A_i^{(k+1)}$, $i \in \overline{0, n-1}$, на n рівних дуг так, щоб *точки ділення* $A_i^{(k+1)}$ *верхньої основи знаходилися над серединами дуг* $\overset{\frown}{A_i^{(k)} A_{i+1}^{(k)}}$ *нижньої основи.* Сполучимо кінці хорд $A_i^{(k)} A_{i+1}^{(k)}$ з точками $A_i^{(k+1)}$, $k \in \overline{0, n-1}$, $A_n^{(k)} := A_0^{(k)}$ $\forall k \in \overline{0, m-1}$. Дістанемо многогранник, що складається з $2mn$ рівних трикутників, сума площ яких $S_{mn} = 2mn \cdot \operatorname{mes} \triangle A_0^{(1)} A_0^{(0)} A_1^{(0)}$.

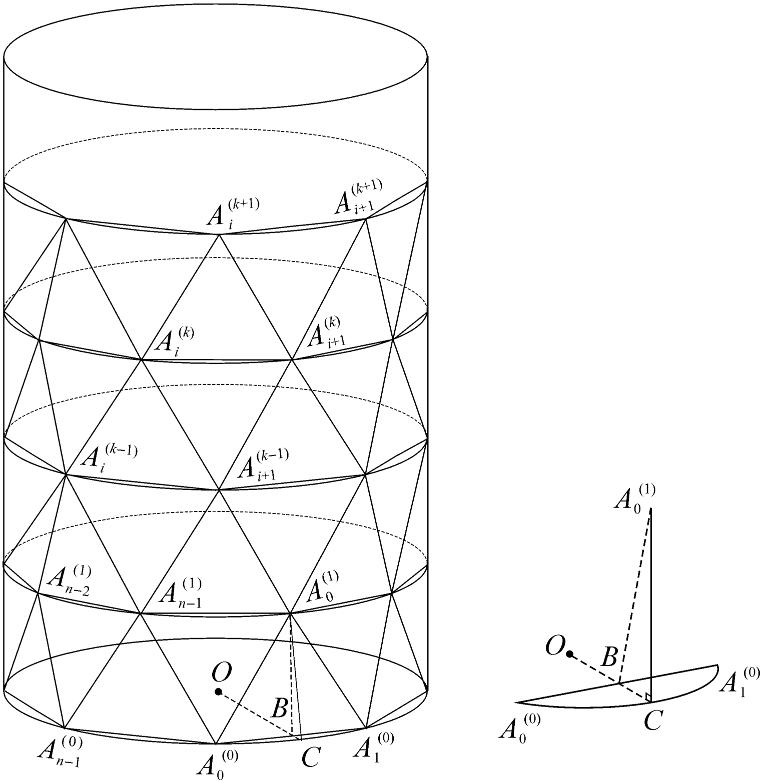

Рис. 46

Оскільки

$$\operatorname{mes}\triangle A_0^{(1)}A_0^{(0)}A_1^{(0)} = \frac{1}{2}A_0^{(1)}A_1^{(0)}\cdot A_0^{(1)}B = \frac{1}{2}2R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{BC^2 + A_0^{(0)}C^2} =$$

$$= R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(R - R\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{h}{m}\right)^2} =$$

$$= \frac{R}{m}\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + h^2},$$

то

$$S_{mn} = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 + h^2}.$$

Припустимо, що $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} \dfrac{m}{n^2} = q$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi = \pi,$$

а

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} \frac{2\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi^2}{4n^2}}\cdot\frac{m}{n^2}\cdot\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2 q}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = 2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+h^2}.$$

Бачимо, що ця границя істотно залежить від q і тільки для $q=0$ дає звичайний результат: $S = 2\pi Rh$. Зауважимо також, що коли $q=\infty$, то і $\lim\limits_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{mn} = \infty$, а взявши $m=n^2$, коли n парне, і $m=n$, коли n непарне, дістанемо, що границя S_{mn} не існує.

Наведений приклад вписаного многогранника (він носить назву "чобіт Шварца") показує, що *означати площу кривої поверхні як границю площ вписаних у неї многогранників не можна.* Справа у тому, що окремі частинки вписаного многогранника погано прилягають до кривої поверхні, а тому їхні площі не можна вважати добрими наближеннями площ відповідних частинок кривої поверхні.

Інакше виходить, коли частинки кривої поверхні замінювати частинками дотичних до цієї поверхні площин.

Припустимо, що поверхня має рівняння $z = f(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, де D — квадровна область, а функція f має в $\overline{D}$ неперервні частинні похідні f'_x та f'_y.

Помістимо $\overline{D}$ в елементарний прямокутник P, який розіб'ємо на елементарні прямокутники P_k, $k\in\overline{1,n}$, попарно без спільних внутрішніх точок і такі, що $\lambda(T) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} d(P_k) \to 0$ $(n\to\infty)$. У кожному прямокутнику P_k, для якого $P_k\cap\overline{D}\neq\varnothing$, візьмемо точку $(x_k,y_k)\in D$ і проведемо дотичну площину до даної поверхні у точці $(x_k,y_k,f(x_k,y_k))$:

$$z - f(x_k,y_k) = f'_x(x_k,y_k)(x-x_k) + f'_y(x_k,y_k)(y-y_k). \qquad (3)$$

Ту частину проведеної дотичної площини, яка проектується на прямокутник P_k, позначимо P_k^*. Тоді $\operatorname{mes} P_k^* = \operatorname{mes} P_k / |\cos\gamma_k|$, де γ_k — кут між площиною (3) і площиною $z = 0$.

Оскільки

$$|\cos\gamma_k| = 1 \Big/ \sqrt{1 + f_x'^2(x_k, y_k) + f_y'^2(x_k, y_k)}\,,$$

то

$$\operatorname{mes} P_k^* = \sqrt{1 + f_x'^2(x_k, y_k) + f_y'^2(x_k, y_k)}\, \operatorname{mes} P_k.$$

Вважаючи $\operatorname{mes} P_k^* = 0$, коли $P_k \cap \overline{D} = \varnothing$, означимо площу даної поверхні формулою

$$S = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k^* = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \varphi(x_k, y_k) \operatorname{mes} P_k,$$

де $\varphi(x_k, y_k) = \sqrt{1 + f_x'^2(x_k, y_k) + f_y'^2(x_k, y_k)}$, коли $P_k \cap \overline{D} \neq \varnothing$, і $\varphi(x_k, y_k) = 0$, коли $P_k \cap \overline{D} = \varnothing$.

Звідси за теоремою про R-інтегровність неперервної функції дістаємо ***формулу для обчислення площі кривої поверхні:***

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}\, dxdy. \tag{4}$$

Якщо поверхня задана неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і виконано умови теореми про існування та диференційовність неявної функції, то

$$f_x'(x, y) = -\frac{F_x'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)}, \;\; f_y'(x, y) = -\frac{F_y'(x, y, z)}{F_z'(x, y, z)},$$

а тому

$$S = \iint\limits_{D} \frac{\sqrt{F_x'^2(x, y, z) + F_y'^2(x, y, z) + F_z'^2(x, y, z)}}{|F_z'(x, y, z)|}\, dxdy. \tag{5}$$

Якщо поверхня задана параметрично системою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \;\; (u, v) \in D_1 \end{cases}$$

і виконано всі умови теореми про диференціювання оберненої функції, що визначається системою

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

то застосовуючи формулу заміни змінних у подвійному інтегралі, дістанемо, що

$$S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv, \tag{6}$$

де $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$.

Якщо ввести так звані *гауссові коефіцієнти*

$E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2$, $F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v$, $G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2$,

то легко впевнитися, що $A^2+B^2+C^2 = EG-F^2$. Тому

$$S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{7}$$

Приклад 3. Знайти площу частини так званої гвинтової поверхні, рівняння якої

$$\begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = cv, \ \ u \geqslant 0, \ \ c > 0, \end{cases}$$

за умови, що ця частина лежить між площинами $z = 0$ та $z = 2\pi c$ і проектується на площину Oxy в круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Оскільки $u \geqslant 0$ і $c > 0$, то $x^2+y^2 = u^2 \leqslant a^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant u \leqslant a$ і $z = cv \in [0; 2\pi c]$ $\Leftrightarrow v \in [0; 2\pi]$. Тому

$$S = \iint\limits_{D_1} \sqrt{EG-F^2}\,dudv = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^a \sqrt{EG-F^2}\,du,$$

де

$$E = {x'_u}^2 + {y'_u}^2 + {z'_u}^2 = \cos^2 v + \sin^2 v + 0 = 1,$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = -u\cos v\sin v + u\cos v\sin v + 0 = 0,$$

$$G = {x'_v}^2 + {y'_v}^2 + {z'_v}^2 = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + c^2 = u^2 + c^2.$$

Отже,

$$S = \int\limits_0^{2\pi} dv \int\limits_0^a \sqrt{u^2+c^2}\,du = 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right).$$

6.1.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна фігура $G \subset \mathbb{R}^2$ є квадровною.
2. Для кожної квадровної фігури G її площу можна обчислити за формулою $S = \iint\limits_D dxdy$.

3. Для кожної квадровної фігури G її площу можна обчислити за формулою $S = \oint\limits_{\partial D} x\,dy$.
4. Кожна множина $G \subset \mathbb{R}^3$ є кубовною.
5. Якщо $G \subset \mathbb{R}^3$ — обмежена плоска множина, то G — кубовна множина і $V(G) = 0$.
6. Якщо $G = \big\{(x,y,z)\colon (y,z) \in D,\ \psi_1(y,z) \leqslant x \leqslant \psi_2(y,z)\big\}$, то
$$V(G) = \iint\limits_D \big(\psi_2(y,z) - \psi_1(y,z)\big)\,dydz.$$
7. Площу кривої поверхні можна означити як границю площ вписаних у цю поверхню многогранників.
8. Якщо поверхня має рівняння $x = f(y,z)$, $(y,z) \in D$, причому f має в D неперервні частинні похідні, то існує площа S даної поверхні і $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_y'^2(y,z) + f_z'^2(y,z)}\,dydz$.

II. Сформулювати принцип Кавальєрі для квадровних областей.

III. Довести дані твердження.

1. Якщо межа ∂G області $G \subset \mathbb{C}$ є простим кусково-гладким контуром, то $\operatorname{mes} G = \left|\oint\limits_{\partial G} \bar{z}\,dz\right|$, якщо ототожнювати простори $\mathbb{C}$ і $\mathbb{R}^2$.
2. Площа поверхні $(x^2+y^2+z^2)^2 = \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2$ співпадає з площею поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$, коли $a = \frac{\beta\gamma}{\alpha}$, $b = \frac{\alpha\gamma}{\beta}$, $c = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

6.2. Фізичні застосування кратних і криволінійних інтегралів

У цьому підрозділі розглянуто задачі про обчислення центра маси, статичних моментів і координат центра маси, моментів інерції, потенціалу поля тяжіння та роботи силового поля.

6.2.1. Обчислення маси. Нехай масу m розподілено по квадровній області D так, що густина розподілу $\mu = \mu(x,y)$, де μ — неперервна функція на $\overline{D}$. Розіб'ємо D на квадровні області D_k, $k \in \overline{1,n}$, достатньо малих діаметрів $d(D_k)$, причому області D_k попарно не перетинаються. Враховуючи неперервність густини, можна вважати, що $\mu(x,y) \approx \mu(x_k,y_k)$ $\forall (x,y) \in D_k$, де (x_k,y_k) — фіксована точка

D_k. Тоді масу m_k, розподілену по області D_k, можна вважати наближено рівною $\mu(x_k, y_k)\,\mathrm{mes}\,D_k$, а

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} m_k = \sum_{k=1}^{n} \mu(x_k, y_k)\,\mathrm{mes}\,D_k \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} \mu(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D} \mu(x,y)\,dxdy.$$

Тому природно покласти, що

$$m := \iint\limits_{D} \mu(x,y)\,dxdy. \tag{1}$$

Аналогічно, якщо масу m розподілено по кубовному тілу G так, що густина розподілу $\mu = \mu(x,y,z)$ є неперервною функцією на $\overline{G}$, то природно вважати, що

$$m := \iiint\limits_{G} \mu(x,y,z)\,dxdydz. \tag{2}$$

У випадку, коли масу m розподілено з неперервною густиною $\mu = \mu(x,y)$ вздовж спрямлюваної дуги Γ, то

$$m := \int\limits_{\Gamma} \mu(x,y)\,dl, \tag{3}$$

де у правій частині стоїть криволінійний інтеграл першого роду.

Приклад 1. Знайдемо масу m, розподілену по кулі $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$, де $a > 0$, так, що густина $\mu(x,y,z)$ пропорційна відстані точки (x,y,z) від початку координат, тобто $\mu(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

За формулою (2) $m = \iiint\limits_{G} k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$. Перейдемо до сферичних координат (ρ,θ,φ), де $\rho^2 \leqslant 2a\rho\cos\varphi \Leftrightarrow 0 \leqslant \rho \leqslant 2a\cos\varphi$, $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$, а $\theta \in [0; 2\pi]$, оскільки куля лежить над площиною OXY і дотикається до неї.

Отже, $m = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} k\sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^3\,d\rho = -8\pi k a^4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{8}{5}\pi k a^4$.

6.2.2. Обчислення статичних моментів та координат центра маси. Якщо маса $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ і кожна маса m_k знаходиться у точці (x_k, y_k), $k \in \overline{1,n}$, площини OXY, то *статичним моментом цієї маси відносно осі OX (осі OY)* називають число

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k \quad \left(M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k\right).$$

А якщо маса m_k знаходиться у точці (x_k,y_k,z_k), $k\in\overline{1,n}$, простору $OXYZ$, то *статичними моментами цієї маси відносно площин* OXY, OXZ *та* OYZ називають відповідно числа

$$M_{xy}=\sum_{k=1}^{n}m_kz_k,\ \ M_{xz}=\sum_{k=1}^{n}m_ky_k,\ \ M_{yz}=\sum_{k=1}^{n}m_kx_k.$$

Нехай масу m розподілено по квадровній області D з густиною $\mu=\mu(x,y)$, де μ — неперервна функція на $\overline{D}$. Розіб'ємо D на квадровні області D_k, $k\in\overline{1,n}$, що попарно не перетинаються і мають достатньо малі діаметри. Тоді $m\approx\sum\limits_{k=1}^{n}m_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(x_k,y_k)\,\mathrm{mes}\,D_k$, де $(x_k,y_k)\in D_k$. Вважаючи, що маса m_k знаходиться у точці (x_k,y_k), приходимо до висновку, що статичні моменти маси m відносно осей координат

$$M_x\approx\sum_{k=1}^{n}y_k\mu(x_k,y_k)\,\mathrm{mes}\,D_k\ \text{ і }\ M_y\approx\sum_{k=1}^{n}x_k\mu(x_k,y_k)\,\mathrm{mes}\,D_k.$$

Звідси дістаємо, що природно вважати

$$M_x:=\iint\limits_D y\mu(x,y)\,dxdy\ \text{ і }\ M_y:=\iint\limits_D x\mu(x,y)\,dxdy. \tag{4}$$

Аналогічно дістаємо формули для обчислення статичних моментів відносно координатних площин маси m, розподіленої по кубовному тілу G з густиною $\mu=\mu(x,y,z)$, коли μ — неперервна функція на $\overline{G}$:

$$M_{xy}:=\iiint\limits_G z\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ \ M_{xz}:=\iiint\limits_G y\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$M_{yz}:=\iiint\limits_G x\mu(x,y,z)\,dxdydz. \tag{5}$$

Відомо, що *центром маси* m, розподіленої по фігурі $D\subset\mathbb{R}^2$, називають таку точку $(\overline{x},\overline{y})$, для якої $m\cdot\overline{y}=M_x$ і $m\cdot\overline{x}=M_y$, де M_x і M_y — статичні моменти, що обчислюються за формулами (4). Звідси дістаємо формули для обчислення координат центра маси:

$$\overline{x}=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\mu(x,y)\,dxdy,\ \ \overline{y}=\frac{1}{m}\iint\limits_D y\mu(x,y)\,dxdy. \tag{6}$$

Аналогічно за допомогою формул (5) дістаємо формули для обчислення координат центра маси, розподіленої по кубовному тілу G:

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\iiint\limits_G x\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ \ \bar{y}=\frac{1}{m}\iiint\limits_G y\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$
$$\bar{z}=\iiint\limits_G z\mu(x,y,z)\,dxdydz. \tag{7}$$

Приклад 2. Знайдемо центр маси m кулі з прикладу 1 п. 6.2.1.

Оскільки центр кулі лежить на осі OZ, то з міркувань симетрії центр маси лежить також на осі OZ, тобто $\bar{x}=\bar{y}=0$. Для знаходження $\bar{z}$ обчислимо за формулою (5) статичний момент M_{xy}, переходячи, як і в прикладі 1, до сферичних координат:

$$M_{xy}=\iiint\limits_G kz\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\rho^4\,d\rho=\frac{64\pi ka^5}{5}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^6\varphi)\,d\varphi=\frac{64}{35}\pi ka^5.$$

Оскільки маса даної кулі нам відома з прикладу 1, то можемо знайти аплікату її центра маси: $\bar{z}=\frac{8}{7}a$. Отже, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{8}{7}a)$ − потрібний центр маси.

6.2.3. Обчислення моментів інерції. *Моментами інерції* матеріальної плоскої фігури $D\subset\mathbb{R}^2$ *відносно осей* OX та OY називаються відповідно числа

$$I_x:=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\,dxdy,\ I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)\,dxdy,$$

а число

$$I_0:=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,dxdy=I_x+I_y$$

називають *моментом інерції* цієї фігури *відносно початку координат*.

Моментами інерції матеріального тіла $G\subset\mathbb{R}^3$ *відносно координатних площин* OXY, OXZ та OYZ називають відповідно числа

$$I_{xy}:=\iiint\limits_G z^2\mu(x,y,z)\,dxdydz,\ \ I_{xz}:=\iiint\limits_G y^2\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_{yz}:=\iiint\limits_G x^2\mu(x,y,z)\,dxdydz.$$

Число
$$I_l := \iiint\limits_G \rho^2(x,y,z)\mu(x,y,z)\,dxdydz,$$
де $\rho(x,y,z)$ — відстань точки (x,y,z) від прямої l, називається *моментом інерції тіла G відносно прямої l.* Зокрема, для координатних осей дістаємо відповідно
$$I_x := I_{xy} + I_{xz},\ I_y := I_{xy} + I_{yz},\ I_z := I_{xz} + I_{yz}.$$

Число
$$I_0 := \iiint\limits_G \mu(x,y,z)(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$
називається *моментом інерції тіла G відносно початку координат.*

Обгрунтування введених формул таке саме, як і для статичних моментів.

Приклад 3. Знайдемо момент інерції кулі G з прикладу 1 відносно площини OXY. Як і в прикладах 1, 2, перейдемо у відповідному потрійному інтегралі до сферичних координат. Отже,
$$I_{xy} = \iint\limits_G z^2\mu(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2\cos^2\varphi\, k\,\rho\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho =$$
$$= 2\pi k \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^5\, d\rho = 2\pi k \int\limits_0^{\pi/2} \tfrac{1}{6}\cdot 64a^6\cos^8\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$
$$= \tfrac{64}{3}a^6\pi k\cdot\left(-\tfrac{1}{9}\cos^9\varphi\Big|_0^{\pi/2}\right) = \tfrac{64}{27}a^6\pi k.$$

6.2.4. Обчислення потенціалу поля тяжіння. Нехай у просторі $OXYZ$ розташовано дві матеріальні точки: одна, масою $m_1 = 1$, знаходиться у точці $M^* = (x^*,y^*,z^*)$, а друга, масою m — у точці $M = (x,y,z)$. Тоді матеріальна точка M притягує матеріальну точку M^* із силою $\overrightarrow{F} = (F_x,F_y,F_z)$, для якої $\overrightarrow{F} \upuparrows \overrightarrow{M^*M}$, $|\overrightarrow{F}| = \eta\dfrac{m_1 m}{r^2} = \dfrac{m}{r^2}$, $r = \sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2}$, $F_x = m\dfrac{x-x^*}{r^3}$, $F_y = m\dfrac{y-y^*}{r^3}$, $F_z = m\dfrac{z-z^*}{r^3}$, якщо вважати сталу тяжіння $\eta = 1$.

Легко бачити, що $F_x = W'_{x^*}$, $F_y = W'_{y^*}$, $F_z = W'_{z^*}$, де $W = W(x^*,y^*,z^*) = \dfrac{m}{r}$, а $r = \sqrt{(x-x^*)^2+(y-y^*)^2+(z-z^*)^2}$. Тому функцію $W = W(x^*,y^*,z^*)$ називають *ньютонівським потенціалом* поля матеріальної точки M на матеріальну точку M^*.

Якщо масу m розподілено в n точках $M_k = (x_k, y_k, z_k)$, $k \in \overline{1,n}$, то природно вважати, що

$$\overrightarrow{F} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k},\ |\overrightarrow{F_k}| = \frac{m_k}{r_k^2},\ r_k = \left((x_k - x^*)^2 + (y_k - y^*)^2 + (z_k - z^*)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{x_k - x^*}{r_k^3},\ F_y = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{y_k - y^*}{r_k^3},\ F_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{z_k - z^*}{r_k^3},$$

$$W = W(x^*, y^*, z^*) = \sum_{k=1}^{n} m_k / r_k.$$

Нарешті, якщо масу m розподілено по кубовному тілу $\overline{G}$ з густиною $\mu(x,y,z)$, неперервною на $\overline{G}$, то розіб'ємо G на кубовні області G_k без спільних точок так, щоб $\overline{G} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{G}_k$, а $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} d(G_k) \to \to 0$ $(n \to \infty)$. Вважаючи, що $(x_k, y_k, z_k) \in G_k$ і $\mu(x,y,z) \approx \mu(x_k, y_k, z_k)$ $\forall (x,y,z) \in G_k$, знайдемо масу $m_k = m(G_k) \approx \mu(x_k, y_k, z_k) \operatorname{mes} G_k$ і помістимо її у точку (x_k, y_k, z_k). Тоді природно вважати, що

$$F_x \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(x_k, y_k, z_k) \frac{x_k - x^*}{r_k^3} \operatorname{mes} G_k,\ F_y \approx \sum_{k=1}^{n} \mu(x_k, y_k, z_k) \frac{z_k - z^*}{r_k^3} \operatorname{mes} G_k$$

і

$$W = W(x^*, y^*, z^*) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(x_k, y_k, z_k) \operatorname{mes} G_k}{r_k^3}.$$

Тому *силу* $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$ *притягання матеріальним тілом* G *матеріальної точки* $M^* = (x^*, y^*, z^*)$ означають рівностями

$$F_x = \iiint\limits_G \mu(x,y,z) \frac{x - x^*}{r^3}\, dxdydz,\ F_y = \iiint\limits_G \mu(x,y,z) \frac{y - y^*}{r^3}\, dxdydz,$$

$$F_z = \iiint\limits_G \mu(x,y,z) \frac{z - z^*}{r^3}\, dxdydz,$$

де $r = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z - z^*)^2}$, а *ньютонівський потенціал поля тіла* G *на матеріальну точку* M^* визначається рівністю

$$W(x^*, y^*, z^*) = \iiint\limits_G \mu(x,y,z) \frac{dxdydz}{\sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2 + (z - z^*)^2}}.$$

Приклад 4. Знайдемо ньютонівський потенціал однорідної ($\mu = 1$) кулі радіуса R на точку M^*, що лежить поза кулею.

Виберемо осі координат так, щоб початок координат співпадав з центром кулі, а напрям осі Oz — з напрямом вектора $\overrightarrow{OM^*}$. Тоді $M^* = (0,0,z^*)$, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$ і

$$W = \iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z^*)^2}} = \int\limits_{-R}^{R} dz \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z^*)^2}},$$

де $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2+y^2 \leqslant R^2 - z^2\}$.

Перейдемо до полярних координат: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$.

Тоді $x^2+y^2 = \rho^2 \leqslant R^2 - z^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{R^2-z^2}$, $\theta \in [0;2\pi]$, і тому

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z^*)^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2+(z-z^*)^2}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\rho^2+(z-z^*)^2}\,\Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} = 2\pi\Big(\sqrt{R^2-z^2+(z-z^*)^2} - |z-z^*|\Big) =$$

$$= 2\pi\Big(\sqrt{R^2-2zz^*+z^{*2}} - |z-z^*|\Big).$$

Оскільки $z^* > z \ \forall (x,y,z) \in G$, то

$$W = 2\pi \int\limits_{-R}^{R} \Big(\sqrt{R^2+z^{*2}-2zz^*} - z^* + z\Big)\, dz =$$

$$= 2\pi\Big(-\frac{1}{3z^*}(R^2+z^{*2}-2zz^*)^{\frac{3}{2}} + \frac{(z-z^*)^2}{2}\Big)\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= 2\pi\Big(\frac{1}{3z^*}\big((R+z)^3 - |R-z^*|^3\big) + \frac{(R-z^*)^2-(R+z^*)^2}{2}\Big) =$$

$$= 2\pi\Big(\frac{2R^3+6Rz^{*2}}{3z^*} - 2Rz^*\Big) = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{1}{z^*}.$$

Бачимо, що потенціал кулі на точку, яка лежить поза кулею, такий самий, як потенціал центра кулі, коли у ньому знаходиться маса усієї кулі.

6.2.5. Обчислення роботи силового поля. Назвемо *(плоским) силовим полем* довільну множину $D \subset \mathbb{R}^2$, у кожній точці (x,y) якої визначено вектор-функцію $\overrightarrow{F}(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$, яку називають *силою*. Якщо ця сила стала і під її дією матеріальна точка масою $m = 1$ переміщується прямолінійно з точки $M_1 = (x_1,y_1)$ у точку $M_2 = (x_2,y_2)$, то при цьому здійснюється робота

$$A := |\overrightarrow{F}|\cos\alpha \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}| = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = F_x(x_2-x_1) + F_y(y_2-y_1),$$

де α — кут між векторами $\overrightarrow{F}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}$, а $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$ — скалярний добуток цих векторів.

Припустимо, що сила $\overrightarrow{F}(x,y)$ не обов'язково стала, але неперервна в області D і під дією цієї сили матеріальна точка переміщується з точки M^* у точку M^{**} вздовж дуги $\Gamma : x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, яка є кусково-гладкою. Виникає питання: *що розуміти під роботою, яка здійснюється при цьому переміщенні?*

Для відповіді на поставлене питання розіб'ємо відрізок $[\alpha;\beta]$ точками $t_0 = \alpha < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, позначимо $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$, $M_k = (x_k, y_k)$ $\forall k \in \overline{0,n}$. Будемо вважати, що: 1) точка переміщується не вздовж даної дуги, а вздовж вписаної в неї ламаної $\overline{M_0 M_1 \ldots M_n}$, 2) на кожній ланці $\overline{M_k M_{k+1}}$ сила $\overrightarrow{F} \approx \overrightarrow{F}(x_k, y_k)$ і 3) шукана робота

$$A \approx \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{F}(x_k, y_k) \cdot \overrightarrow{M_k M_{k+1}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \big(F_x(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + F_y(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k)\big).$$

Звідси, згадуючи означення повного криволінійного інтеграла, природно покласти, що *робота силового поля* або *робота сили* $\overrightarrow{F}(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$ *по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги* Γ визначається рівністю:

$$A := \int\limits_{\Gamma} F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy. \tag{8}$$

Якщо ця робота не залежить від форми дуги Γ, то *силове поле* називають *потенціальним*. Для цього, як відомо (див. теореми 3 – 5 пункту 5.6.2), необхідно й досить, щоб вираз $F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy$ був повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$ в області D. Цю функцію називають *силовою* або *потенціальною,* і для такої функції робота

$$A = \int\limits_{\overset{\frown}{M^* M^{**}}} F_x\,dx + F_y\,dy = U(M^{**}) - U(M^*),$$

тобто A є приростом силової функції.

Приклад 5. Знайдемо роботу сили $\vec{F} = (a - x, -x^2)$ по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги Γ параболи $y = x^2$ від точки $M_1(0,0)$ до точки $M_2(1/2, 1/4)$.

За формулою (8) $A = \int\limits_{\Gamma}(a - x)\,dx - x^2\,dy = \int\limits_0^{1/2}(a - x - x^2 \cdot 2x)\,dx =$

$= \left(ax - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{16a-5}{32}$.

6.2.6. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Маса цілком визначається густиною.
2. Якщо тіло G однорідне, тобто густина μ стала, то маса цього тіла $m = \mu \cdot V$, де V − об'єм тіла G.
3. Якщо маса тіла G дорівнює об'єму цього тіла, то G − однорідне тіло.
4. Координати центра маси однорідного тіла не залежать від матеріалу, з якого виготовлене це тіло.
5. Моменти інерції матеріального тіла відносно координатних площин цілком визначають моменти інерції цього тіла відносно будь-якої прямої l.
6. Якщо $W(x^*, y^*, z^*)$ − ньютонівський потенціал тіла G на точку $M^* = (x^*, y^*, z^*)$, а $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$, то $F_x = W'_{x^*}$, $F_y = W'_{y^*}$, $F_z = W'_{z^*}$.
7. Якщо силове поле задається однозв'язною областю D і силою $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y)$, де $(F_x)'_y(x,y) = (F_y)'_x(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$, то дане поле є потенціальним.

II. Довести дані твердження.

1. $I_l = I_{l_0} + md^2$, де I_l − момент інерції тіла відносно прямої l, I_{l_0} − момент інерції тіла відносно прямої l_0, що проходить через центр маси тіла, d − відстань між прямими l і l_0 і m − маса тіла.
2. Якщо $\overrightarrow{F}(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y)) \uparrow\downarrow \overrightarrow{OM}$, де $M = (x,y)$, і $|\overrightarrow{F}| = \frac{m_0}{x^2+y^2}$, де $m_0 > 0$, то відповідне поле потенціальне. Знайти відповідну силову функцію $U(x,y)$.

6.3. Інтегральна теорема та інтегральна формула Коші

У даному підрозділі доведено найважливіші теореми теорії аналітичних функцій, з яких, зокрема, випливає, що коли функція комплексної змінної диференційовна в області, то вона й нескінченно диференційовна у цій області. Цією властивістю функції комплексної змінної суттєво відрізняються від функцій дійсної змінної.

6.3.1. Інтегральна теорема Коші.

□ Припустимо, що функція f комплексної змінної є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}$, тобто має у цій області неперервну похідну f'. Тоді, якщо $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, а $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$, то згідно з відомою теоремою функції u та v мають в цій області неперервні частинні похідні, що задовольняють умови Коші – Рімана:

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \text{ і } u'_y(x,y) = -v'_x(x,y) \ \forall (x,y) \in D.$$

Розглянемо довільний кусково-гладкий контур $\Gamma \subset D$. За формулою (7) пункту 5.4.7 $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = \oint\limits_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\oint\limits_\Gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy$. Звідси, вважаючи D однозв'язною областю, за теоремою 5 пункту 5.6.2 дістаємо, що $\oint\limits_\Gamma u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy = \oint\limits_\Gamma v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy = 0$, а тому і $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$. ■

Отже, доведена

Теорема 1 (інтегральна теорема Коші). *Нехай функція f аналітична в однозв'язній області D. Тоді $\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$.*

У наведеному доведенні теореми 1 суттєво використана умова неперервності частинних похідних функцій u та v, тобто неперервність похідної $f'(z)$.

Виникає питання, *чи не можна цю умову в теоремі 1 опустити.*

□ Припустимо, що функція f є диференційовною в однозв'язній області D, і не будемо вимагати, щоб $f'(z)$ була неперервною функцією в області D.

Згідно з властивістю 8 пункту 5.5.3 існує послідовність ламаних $L_m \subset D$, вписаних у кусково-гладкий контур $\Gamma \subset D$ і таких, що

$$\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz = \lim_{m\to\infty} \oint\limits_{L_m} f(z)\,dz.$$

Як показано при доведенні наслідку з формули Гріна пункту 5.6.1 та теореми 5 пункту 5.6.2, інтеграл вздовж ламаної L_m дорівнює сумі інтегралів вздовж трикутних контурів. Тому вважаємо, що $\Gamma \subset D$ – трикутний контур і $\left|\oint\limits_\Gamma f(z)\,dz\right| = c$.

Якщо $\Gamma = \overline{A_0B_0C_0A_0}$, то за допомогою середин сторін трикутника утворимо чотири нових контури (див. рис. 47): $\overline{A_0N_0M_0A_0}$, $\overline{N_0B_0P_0N_0}$, $\overline{P_0C_0M_0P_0}$ і $\overline{M_0N_0P_0M_0}$. За адитивною властивістю криволінійного інтеграла та за властивістю про інтеграли вздовж взаємно протилежних дуг маємо:

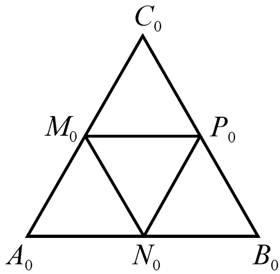

Рис. 47

$$\oint\limits_{\Gamma} f\,dz = \oint\limits_{\overline{A_0N_0M_0A_0}} f\,dz + \oint\limits_{\overline{N_0B_0P_0N_0}} f\,dz + \oint\limits_{\overline{P_0C_0M_0P_0}} f\,dz + \oint\limits_{\overline{M_0N_0P_0M_0}} f\,dz.$$

Тому принаймні один з інтегралів правої частини останньої рівності за модулем не менший $\frac{c}{4}$. Позначимо цей інтеграл $\oint\limits_{\Gamma_1} f\,dz$, а $\Gamma_1 = \overline{A_1B_1C_1A_1}$, причому довжина Γ_1: $l(\Gamma_1) = \frac{1}{2}l(\Gamma)$.

Припустимо, що визначено трикутний контур $\Gamma_n = \overline{A_nB_nC_nA_n}$, для якого $\left|\oint\limits_{\Gamma_n} f\,dz\right| \geqslant \frac{c}{4^n}$, а довжина Γ_n: $l(\Gamma_n) = \frac{1}{2^n}l(\Gamma)$. За допомогою середин сторін цього трикутника утворимо контури $\overline{A_nN_nM_nA_n}$, $\overline{N_nB_nP_nN_n}$, $\overline{P_nC_nM_nP_n}$ і $\overline{M_nN_nP_nM_n}$. Як і вище, показуємо, що принаймні для одного з цих контурів інтеграл вздовж нього за модулем більший або рівний $\frac{c}{4^n} \cdot \frac{1}{4} = \frac{c}{4^{n+1}}$. Позначимо цей контур Γ_{n+1}, і за принципом математичної індукції можемо стверджувати існування трикутних контурів Γ_n, $n \in \mathbb{N}$, які стягуються у точку $z_0 \in D$ і такі, що $\left|\oint\limits_{\Gamma_n} f\,dz\right| \geqslant \frac{c}{4^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, а $l(\Gamma_n) = \frac{1}{2^n}l(\Gamma)$.

Оскільки f диференційовна у точці z_0, то

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

де $\alpha(z) \to 0$, коли $z \to z_0$.

Тому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$: $|z - z_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha(z)| < \varepsilon$. Оскільки контури Γ_n стягуються у точку z_0, то $\exists n_0(\varepsilon)$: $n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \Gamma_n \subset O_\delta(z_0) \Rightarrow$ $|z - z_0| < \delta$ і $|z - z_0| < l(\Gamma_n)$ $\forall z \in \Gamma_n \Rightarrow$

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_n} \alpha(z)(z - z_0)\,dz\right| \leqslant \varepsilon l(\Gamma_n) l(\Gamma_n) < \varepsilon \frac{l(\Gamma)}{2^n}\frac{l(\Gamma)}{2^n}.$$

Оскільки $\oint\limits_{\Gamma_n} f(z_0)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz = 0$ за доведеною вище теоремою 1, то

$$\frac{c}{4^n} \leqslant \left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint\limits_{\Gamma_n} f(z_0)\,dz + \right.$$

$$\left. + \oint\limits_{\Gamma_n} f'(z_0)(z-z_0)\,dz + \oint\limits_{\Gamma_n} \alpha(z)(z-z_0)\,dz\right| \leqslant \varepsilon\frac{l^2(\Gamma)}{4^n}.$$

Отже, $c \leqslant \varepsilon l^2(\Gamma)$ і, спрямовуючи ε до 0, дістаємо, що $c = 0$, тобто $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ для довільного трикутного контура $\Gamma \subset D$. Звідси, враховуючи сказане вище, дістаємо, що $\oint\limits_{\Gamma} f\,dz = 0$ для довільного кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$. ■

Таким чином, має місце узагальнення теореми Коші.

Теорема 2 (інтегральна теорема Коші). *Якщо функція f диференційовна в однозв'язній області D, то $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$.*

Згадуючи теорему 2 пункту 5.6.2, приходимо до висновку, що інтегральну теорему Коші можна сформулювати в іншій, але еквівалентній формі.

Теорема 2* (інтегральна теорема Коші). *Якщо функція f диференційовна в однозв'язній області D, то $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$.*

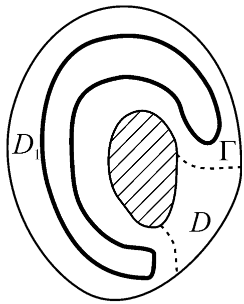

Рис. 48

□ Зауважимо, що коли кусково-гладкий контур Жордана Γ лежить в області D (не обов'язково однозв'язній) разом із своєю внутрішньою частиною D^* (див. рис. 48), то існує однозв'язна область $D_1 \subset D$, для якої $\Gamma \subset D_1$, а тому $\oint\limits_{\Gamma} f\,dz = 0$, якщо f — диференційовна функція в області D.

Припустимо, що в області D лежать два кусково-гладкі контури Жордана Γ_1 і Γ_2 такі, що один з них, припустимо, Γ_2, лежить у внутрішній частині іншого, а криволінійне кільце, утворене цими контурами, цілком лежить в області D (див. рис. 49).

За допомогою точок A_1, A_2, B_1, B_2, M_1, M_2, E_1, E_2 утворимо два нових контури $L_1 = A_1M_1B_1B_2M_2A_2A_1$ і $L_2 = A_1A_2E_2B_2B_1E_1A_1$, які лежать в області D разом із своїми внутрішніми частинами. Тому за доведеним

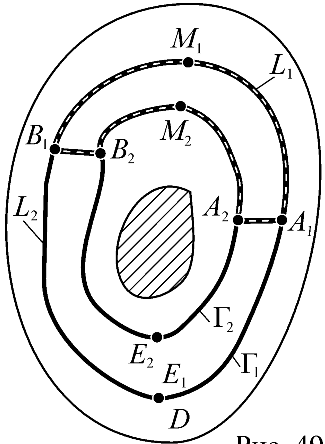

Рис. 49

$$0 = \oint\limits_{L_1} f\,dz + \oint\limits_{L_2} f\,dz =$$

$$= \Bigg(\int\limits_{A_1M_1B_1} + \int\limits_{B_1B_2} + \int\limits_{B_2M_2A_2} + \int\limits_{A_2A_1} +$$

$$+ \int\limits_{A_1A_2} + \int\limits_{A_2E_2B_2} + \int\limits_{B_2B_1} + \int\limits_{B_1E_1A_1} \Bigg) f\,dz =$$

$$= \oint\limits_{\Gamma_1} f\,dz + \oint\limits_{-\Gamma_2} f\,dz = \oint\limits_{\Gamma_1} f\,dz - \oint\limits_{\Gamma_2} dz \Rightarrow \oint\limits_{\Gamma_1} f\,dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f\,dz. \blacksquare$$

Отже, правильна

Теорема 3 (про рівність інтегралів за різними контурами). *Нехай функція f диференційовна в області D, а Γ_1 і Γ_2 — кусково-гладкі контури такі, що Γ_2 лежить у внутрішній частині Γ_1 і криволінійне кільце, утворене цими контурами, цілком лежить в D. Тоді* $\oint\limits_{\Gamma_1} f\,dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f\,dz.$

6.3.2. Інтегральна формула Коші. Розглянемо $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$, де $\Gamma \subset D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ — кусково-гладкий контур Жордана. Візьмемо коло $\Gamma_r = \{z\colon |z-z_0| = r\}$ достатньо малого радіуса $r > 0$. Тоді Γ_r лежатиме у внутрішній частині контура Γ і за теоремою 3 $\oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = \oint\limits_{\Gamma_r} \frac{dz}{z-z_0}$.

Оскільки рівняння Γ_r має вигляд $z = z_0 + r\exp it$, $t \in [0; 2\pi]$, то

$$\oint\limits_{\Gamma_r} \frac{dz}{z-z_0} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ir\exp it}{r\exp it}\,dt = 2\pi i = \oint\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}. \tag{1}$$

Доведена рівність показує, що, по-перше, *умова однозв'язно-*

сті в інтегральній теоремі Коші є суттєвою, і, по-друге, що

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=f(z_0), \tag{2}$$

якщо $f(z)=1\ \forall z\in D$, а D — область диференційовності функції f, у якій лежить кусково-гладкий контур Жордана Γ разом із своєю внутрішньою частиною.

Легко довести, що формула (2) правильна для $f(z)=z$, $f(z)=$ $=z^2$, $f(z)=\exp z$ та багатьох інших функцій. Виникає питання: *чи не є рівність* (2) *правильною для довільних диференційовних в області D функцій?*

□ Нехай f — диференційовна функція в області D і Γ — кусково-гладкий контур Жордана, що лежить в D разом із своєю внутрішньою частиною D^*. Візьмемо довільну точку $z_0\in D^*$ і покажемо, що правильна формула (2). Для цього розглянемо коло $\Gamma_r=\{z\colon |z-z_0|=r\}\subset D^*$. Тоді за теоремою 3 і формулою (1)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-f(z_0)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_r}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_r}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\leqslant\frac{1}{2\pi r}\cdot\max_{z\in\Gamma_r}|f(z)-f(z_0)|\cdot 2\pi r=$$

$$=|f(z_r)-f(z_0)|\to 0,\ \text{ коли }\ r\to 0,$$

де $z_r\in\Gamma_r$, а тому $z_r\to z_0$, коли $r\to 0$. Тут враховано неперервність функції f в області D, яка випливає з диференційовності цієї функції. Оскільки ліва частина останньої нерівності не залежить від r, то $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-f(z_0)\right|=0$, тобто $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$. ■

Цим самим доведена

Теорема 4 (про інтегральну формулу Коші). *Нехай функція f диференційовна в області D, а Γ — кусково-гладкий контур Жордана, що цілком лежить в D разом із своєю внутрішньою частиною D^*. Тоді правильна наступна* ***інтегральна формула Коші:*** $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\ \ \forall z_0\in D^*$.

Інтегральна формула Коші показує, що *значення диференці-*

йовної функції f в області D^* цілком визначаються її значеннями лише на межі цієї області.

Інтегральна формула Коші має численні застосування. Обчислення інтегралів за її допомогою належить до найпростіших застосувань.

Приклад 1. Знайти $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\exp z\,dz}{z^2-z}$, якщо Γ: $|z-1|=2$. Тут $D^*=\{z\colon |z-1|<2\}$ і точки 0 та 1 належать D^*.

Оскільки $\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$, то $\oint\limits_{\Gamma} \frac{\exp z\,dz}{z^2-z}=\oint\limits_{\Gamma} \frac{\exp z}{z-1}\,dz-\oint\limits_{\Gamma} \frac{\exp z\,dz}{z-0}=2\pi i\exp 1-$ $-2\pi i\exp 0=2\pi i(e-1)$.

6.3.3. Розвинення диференційовної функції у степеневий ряд. Різні означення аналітичної функції.

□ Розглянемо функцію f, диференційовну в області D. Зафіксуємо точку $z_0\in D$ і знайдемо $\inf\rho(z_0,\partial D)=R$. Тоді $0<R\leqslant+\infty$ і $K=\{|z-z_0|<R\}\subset D$. Візьмемо $z_1\in K$ і розглянемо круг $K_1=\{z\colon |z-z_0|=R_1<R\}$, що містить z_1. Нехай $\Gamma_1=\partial K_1$. Тоді за інтегральною формулою Коші

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{z-z_1}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\frac{1}{z-z_0+z_0-z_1}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z_1-z_0}{z-z_0}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^k dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}\right)(z_1-z_0)^k,$$

а почленне інтегрування можливе, оскільки $\max\limits_{z\in\Gamma_1}|f(z)|<\infty$,

$$\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\left(\frac{z_1-z_0}{z-z_0}\right)^k\right|\leqslant\max_{z\in\Gamma_1}|f(z)|\left(\frac{|z_1-z_0|}{R_1}\right)^k\cdot\frac{1}{R_1},$$

$q=\frac{|z_1-z_0|}{R_1}<1$ і тому функціональний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f(z)(z_1-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}$ за ознакою Вейєрштрасса рівномірно збіжний на Γ_1.

Вважаючи коло $\Gamma'=\{z\colon |z-z_0|=R'<R\}$ фіксованим, дістанемо

за теоремою 3, що

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_1}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}=:a_k\ \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

Тому

$$f(z_1)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z_1-z_0)^k\ \forall z_1\in K,$$

а це означає, що степеневий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ є розвиненням функції f за степенями $(z-z_0)$ у крузі K. ■

Отже, має місце

Теорема 5 (про розвинення диференційовної функції у степеневий ряд). *Нехай функція f диференційовна в області D, $z_0\in D$, $R=\inf\rho(z_0,\partial D)$ і $K=\{z\colon |z-z_0|<R\}$. Тоді в крузі K функція f розвивається у степеневий ряд за степенями $(z-z_0)$:*

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k\ \ \forall z\in K,$$

причому

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma'}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}},\tag{3}$$

де $\Gamma'=\{z\colon |z-z_0|=R'<R\}$ — деяке фіксоване коло.

З теореми 5 та з твердження про аналітичність суми степеневого ряду та її похідних дістаємо наступне твердження.

Теорема 6 (про існування похідної будь-якого порядку від диференційовної функції). *Якщо функція f диференційовна в області D, то вона має в D похідну будь-якого порядку, причому*

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{k+1}}\ \ \forall z_0\in D,\tag{4}$$

де Γ — довільний кусково-гладкий контур Жордана, що лежить в D разом із своєю внутрішньою частиною D^*, до якої належить z_0.

Формула (4) випливає з формули (3), теореми 3 та з рівності $a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$. З теореми 6, зокрема, випливає, що коли функція f диференційовна в області D, то її похідна неперервна в D, тобто f аналітична в D.

Таким чином, аналітичну в області D функцію можна означити як функцію, що є диференційовною в цій області, або як функцію, що має в області D неперервну похідну. І ці означення є еквівалентними.

З теореми про аналітичність суми степеневого ряду та з теореми 5 випливає, що означення аналітичної функції можна сформулювати і так: функція f називається *аналітичною в області D (за Вейєрштрассом)*, якщо $\forall z_0 \in D\ \exists O(z_0)$, у якому функція f розвивається у степеневий ряд за степенями $(z-z_0)$.

Зауважимо, що формулу (4) можна використовувати для обчислення інтегралів.

Приклад 2. Обчислимо інтеграл функції $g(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ по колу $|z| = 1$.

За формулою (4) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z\, dz}{z^3} = \left(\frac{2!}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos z\, dz}{(z-0)^{2+1}}\right) \cdot \pi i = \pi i \cos''(0) =$
$= \pi i(-\cos 0) = -\pi i.$

6.3.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо f аналітична в області D, то $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура Жордана $\Gamma \subset D$.
2. Твердження 1 правильне, коли Γ — замкнена ламана.
3. Твердження 1 правильне, коли внутрішня частина Γ лежить в D.
4. Якщо функція f дійсної змінної диференційовна на інтервалі $(a;b)$, то її похідна f' неперервна на $(a;b)$.
5. Якщо функція f комплексної змінної диференційовна в області D, то її похідна неперервна в D.
6. Функція $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$, коли $x \neq 0$, і $f(0) = 0$ є диференційовною на $\mathbb{R}$.
7. Функція $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$, коли $z \neq 0$, і $f(0) = 0$ є диференційовною на $\mathbb{C}$.
8. Якщо Γ_2 лежить у внутрішній частині Γ_1, то $\oint\limits_{\Gamma_1} f\, dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f\, dz$.
9. Якщо функція f аналітична на $\mathbb{C}$ і $f(z) = const$ на деякому кусково-гладкому контурі Жордана Γ, то $f(z) = const$ на $\mathbb{C}$.
10. Якщо функція f аналітична в області D, то $\forall z_0 \in D$ функція f розвивається в області D у степеневий ряд за степенями $(z-z_0)$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \ \forall z\in K=\{z\colon |z-z_0|<R\}$ і $|f(z)|\leqslant M$ на K, то $|a_k|\leqslant \frac{M}{R^k}\ \forall k\in\mathbb{N}_0$.
2. Якщо функція f аналітична і обмежена на $\mathbb{C}$, то $f(z)=const$ на $\mathbb{C}$.
3. Якщо функція f аналітична в області D і $f(z)=0$ на $E\subset D$, причому $E'\cap D\neq\varnothing$, то $f(z)=0$ на D.

6.4. Гармонічні функції та їх зв'язок з аналітичними

У даному підрозділі введено важливе поняття гармонічної функції та досліджено його зв'язок з поняттям аналітичної функції.

6.4.1. Поняття гармонічної функції.

□ Розглянемо функцію f, аналітичну в області D. Тоді за критерієм диференційовності функції $u=\operatorname{Re} f$ і $v=\operatorname{Im} f$ диференційовні в області D і задовольняють умови Коші − Рімана:

$$u'_x(x,y)=v'_y(x,y)\ \text{ і }\ u'_y(x,y)=-v'_x(x,y)\ \forall (x,y)\in D.$$

При цьому $f'(z)=u'_x(x,y)+iv'_x(x,y)=u'_x(x,y)-iu'_y(x,y)=v'_y(x,y)+{}$ $+iv'_x(x,y)\ \forall(x,y)\in D$. За теоремою 6 пункту 6.3.3 функція f' диференційовна в області D і має в D неперервну похідну, а тому функції $\operatorname{Re} f'=u'_x=v'_y$ та $\operatorname{Im} f'=-u'_y=v'_x$ мають в області D неперервні частинні похідні, що задовольняють умови Коші − Рімана:

$$\begin{cases} (u'_x)'_x=(-u'_y)'_y\,,\\ (u'_x)'_y=-(-u'_y)'_x\,,\\ (v'_y)'_x=(v'_x)'_y\,,\\ (v'_y)'_y=-(v'_x)'_x\,,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u''_{x^2}(x,y)+u''_{y^2}(x,y)=0,\\ v''_{x^2}(x,y)+v''_{y^2}(x,y)=0,\ (x,y)\in D.\ \blacksquare\end{cases}$$

У зв'язку з цим вводять наступні означення. *Функцію* $\varphi(x,y)$ називають *гармонічною в області* D, якщо вона має в D неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє *рівняння Лапласа:*

$$\varphi''_{x^2}(x,y)+\varphi''_{y^2}(x,y)=0\ \forall(x,y)\in D.$$

Функції φ *і* ψ називають *спряжено-гармонічними в області* D, якщо вони гармонічні в D і задовольняють умови Коші − Рімана:

$$\varphi'_x(x,y)=\psi'_y(x,y)\ \text{ і }\ \varphi'_y(x,y)=-\psi'_x(x,y)\ \forall(x,y)\in D.$$

□ Зрозуміло, що коли φ і ψ спряжено-гармонічні функції в області D і $f(z)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y)\ \forall(x,y)\in D$, то за критерієм диференційовності функція f диференційовна, а тому і аналітична в області D. ■

Проведені міркування показують, що правильна

Теорема 1 (про зв'язок аналітичної функції з гармонічними). *Для того, щоб функція f була аналітичною в області D, необхідно й досить, щоб дійсна та уявна частини цієї функції були спряжено-гармонічними в області D.*

Теорема 1 допомагає легко наводити приклади гармонічних функцій. Для цього достатньо взяти довільну аналітичну функцію f і виділити $u = \operatorname{Re} f$ та $v = \operatorname{Im} f$.

Приклад 1. Функція $f(z) = z^2$ є аналітичною в області $D = \mathbb{C}$. Оскільки $f(z) = f(x+iy) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$, то $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$ і $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = 2xy$ — спряжено-гармонічні функції в області $D = \mathbb{R}^2$.

6.4.2. Відновлення аналітичної функції за її дійсною частиною. У зв'язку з теоремою 1 виникає питання: *чи кожна функція $u = u(x,y)$, гармонічна в області $D \subset \mathbb{R}^2$, є дійсною або уявною частиною деякої аналітичної функції в області $D \subset \mathbb{C}$?*

□ Щоб гармонічна в області $D \subset \mathbb{R}^2$ функція $u = u(x,y)$ була дійсною частиною деякої функції f, аналітичної в області $D \subset \mathbb{C}$, потрібно, щоб функція $v = \operatorname{Im} f$ була гармонічною в D і задовольняла умови Коші — Рімана: $u'_y = v'_x$ і $u'_y = -v'_x$ в D. Тому

$$dv(x,y) = v'_x(x,y)\,dx + v'_y(x,y)\,dy = -u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy.$$

За відомим твердженням вираз $-u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції v в області D тоді й тільки тоді, коли інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} -u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$. При цьому функція v обов'язково має вигляд:

$$v(x,y) = C_1 + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u'_\theta(t,\theta)\,dt + u'_t(t,\theta)\,d\theta, \qquad (1)$$

де $C_1 = const \in \mathbb{R}$, (x_0,y_0) — фіксована точка, а (x,y) — біжуча точка з області D. Оскільки для гармонічної в області D функції u

$$(-u'_y)'_y(x,y) = -u''_{y^2}(x,y) = u''_{x^2}(x,y) = (u'_x)'_x(x,y) \ \forall (x,y) \in D,$$

то для однозв'язної області D за теоремою 5 пункту 5.6.2 вказані вище умови виконуються. Тому функція v, що визначається рівністю (1), задовольняє рівності Коші — Рімана: $v'_x(x,y) = -u'_y(x,y)$ і $v'_y(x,y) = u'_x(x,y)$ $\forall(x,y) \in D$. Крім того, $v''_{x^2}(x,y) + v''_{y^2}(x,y) = -u''_{yx}(x,y) + u''_{xy}(x,y) = 0$ $\forall(x,y) \in D$, оскільки u''_{xy} і u''_{yx} неперервні, а тому і рівні в області D. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про відновлення аналітичної функції за її дійсною частиною). *Будь-яка функція $\varphi = \varphi(x,y)$, гармонічна в однозв'язній області D, є дійсною частиною деякої функції f, аналітичної в області D. При цьому функція f обов'язково має вигляд $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, де $v(x,y)$ визначається рівністю* (1).

Пропонуємо читачеві самостійно сформулювати і довести теорему про відновлення аналітичної функції за її уявною частиною.

Приклад 2. Розглянемо функцію $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Оскільки $u'_x(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $u'_y(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $u''_{x^2}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $u''_{xy}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $u''_{y^2}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, то $u''_{x^2}(x,y) + u''_{y^2}(x,y) = 0$ $\forall(x,y) \in D$. Тому функція u є гармонічною в області D.

Як показано в пункті 5.6.2 (див. доведення теореми 4), вираз $\frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = -u'_y\,dx + u'_x\,dy$ не є повним диференціалом ніякої функції F в області D. Тому у м о в а о д н о з в' я з н о с т і о б л а с т і D є с у т т є в о ю д л я п р а в и л ь н о с т і т е о р е м и 2.

Візьмемо однозв'язну область $D_1 = D \setminus \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$. Тоді, як показано у пункті 5.6.2, $dF(x,y) = -\frac{y\,dx}{x^2+y^2} + \frac{x\,dy}{x^2+y^2}$ $\forall(x,y) \in D_1$, якщо

$$F(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & \text{коли } x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{коли } x = 0,\ y > 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi, & \text{коли } x < 0,\ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{коли } x = 0,\ y < 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \pi, & \text{коли } x < 0,\ y < 0, \end{cases}$$

тобто $F(x,y) = \arg z$. Тому за теоремою 2 $f(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i(\arg z + C_1) = \ln|z| + i\arg z + iC_1 = \ln z + iC_1$ $\forall z \in D_1 = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i\cdot 0\colon x \leqslant 0\}$.

6.4.3. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна функція $\varphi(x,y)$, що має в області D неперервні частинні похідні другого порядку, задовольняє в цій області рівняння Лапласа.

2. Якщо функції φ і ψ спряжено-гармонічні в області D, то функції $(-\psi)$ і φ також спряжено-гармонічні в області D.
3. Існує аналітична в $\mathbb{C}$ функція $f(z)$, для якої $\operatorname{Re} f(z) = -2xy$, а $\operatorname{Im} f(z) = x^2 + y^2$.
4. Кожна гармонічна в області D функція є дійсною частиною деякої функції f, аналітичної в області D.
5. Якщо функція f аналітична в області D, то функція $f_1 = if$ теж така.
6. Функції $\operatorname{Re}(if)$ та $\operatorname{Im}(if)$ спряжено-гармонічні в області D і задовольняють рівності $\operatorname{Re}(if) = -\operatorname{Im}(if)$, $\operatorname{Im}(if) = \operatorname{Re} f$.
7. Гармонійна в однозв'язній області D функція v є уявною частиною аналітичної функції f тоді й тільки тоді, коли
$$\operatorname{Re} f = u(x,y) = C_2 + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v'_\theta(t,\theta)\,dt + v'_t(t,\theta)\,d\theta,$$
де $C_2 = const$, (x_0, y_0) фіксована, а (x,y) біжуча точка області D.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо функція u гармонічна в області D, $(x_0, y_0) \in D$ і $\Gamma \subset D$ — коло з центром у точці (x_0, y_0) і радіуса R, то $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{\Gamma} u(x,y)\,dl$, де у правій частині стоїть криволінійний інтеграл першого роду.
2. Якщо функція $u \neq const$ гармонічна в області D, то вона не має в D ні найбільшого, ні найменшого значень.
3. Якщо функція u гармонічна в області D, то вона має в цій області неперервні частинні похідні будь-якого порядку.

6.5. Первісна аналітичної функції

У даному підрозділі вивчається важливе поняття первісної функції комплексної змінної. Зокрема доведено, що на відміну від функцій дійсної змінної, для яких неперервність на проміжку гарантує існування первісної, для функцій комплексної змінної таку гарантію не дає навіть умова аналітичності.

6.5.1. Поняття первісної та необхідні умови її існування. Функція комплексної змінної F називається *первісною* функції f в області D, якщо F диференційовна в D і $F'(z) = f(z)\ \forall z \in D$.

Приклад 1. Функція $F(z) = \sin z$ є первісною функції $f(z) = \cos z$, а функція $\Phi(z) = \exp z$ є первісною для самої себе в області $D = \mathbb{C}$.

За теоремою 6 пункту 6.3.3 дістаємо, що коли функція f має в області D первісну, то f аналітична в області D, тобто правильна

Теорема 1 (про першу необхідну умову існування первісної). *Якщо функція f має в області D первісну, то f аналітична в області D.*

Приклад 2. З теореми 1 випливає, що функція $f(z) = \overline{z}$ не має первісної ні в якій області D, оскільки вона не є аналітичною в жодній області D (хоч і є неперервною у ній). Це ще одна суттєва відмінність функцій комплексної змінної від функцій дійсної змінної.

Природно виникає питання про те, *чи кожна функція, аналітична в області D, має первісну в цій області.*

□ Припустимо, що функція F є первісною функції f в області D. Візьмемо довільну кусково-гладку дугу $\overset{\frown}{AB}$: $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, і обчислимо $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt$.

Оскільки $\big(F(z(t))\big)' = F'(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$, то, вважаючи $\overset{\frown}{AB}$ гладкою дугою, дістаємо:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz = F(z(t))\Big|_{\alpha}^{\beta} = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)) = F(B) - F(A). \tag{1}$$

Це так звана ***формула Ньютона – Лейбніца для функцій комплексної змінної.*** Її часто записують у вигляді

$$\int\limits_{z_A}^{z_B} f(z)\,dz = F(z)\Big|_{z_A}^{z_B} = F(z_B) - F(z_A). \tag{1*}$$

Використовуючи адитивну властивість інтеграла, дістаємо таку саму рівність і для кусково-гладкої дуги. Отже, якщо функція має первісну в області D, то $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про другу необхідну умову існування первісної і формулу Ньютона – Лейбніца). *Якщо функція f має в області D первісну, то інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ не залежить від форми* *кусково-гладкої дуги* $\overset{\frown}{AB} \subset D$. *При цьому, якщо* F — *первісна функції* f *в області* D, *то має місце формула Ньютона — Лейбніца* (1).

Приклад 3. Оскільки $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \frac{dz}{z}$ залежить від форми дуги $\overset{\frown}{AB}$ (впевніться у цьому), то функція $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не має первісної в області D, хоч і є аналітичною у цій області.

Приклад 4. Оскільки $F(z) = \exp z$ є первісною для цієї самої функції в області $D = \mathbb{C}$, то $\int\limits_1^i \exp z\, dz = \exp z\Big|_1^i = \exp i - \exp 1 = \cos 1 + i \sin 1 - e$.

6.5.2. Критерії існування первісної.

☐ Розглянемо функцію f, неперервну в області D, для якої інтеграл $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Оскільки

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u\, dx - v\, dy + i \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} v\, dx + u\, dy,$$

де $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, то інтеграли $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} u\, dx - v\, dy$ та $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} v\, dx + u\, dy$ не залежать від форми $\overset{\frown}{AB} \subset D$. Тому за теоремою 3 пункту 5.6.2 існують диференційовні в області D функції F_1 та F_2, для яких $dF_1 = u\, dx - v\, dy$ і $dF_2 = v\, dx + u\, dy$, звідки випливає, що $(F_1)'_x(x,y) = u(x,y) = (F_2)'_y(x,y)$, $(F_1)'_y(x,y) = -v(x,y) = -(F_2)'_x(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$. За критерієм диференційовності функція $F(z) = F_1(x,y) + iF_2(x,y)$ диференційовна в області D і $F'(z) = (F_1)'_x(x,y) + i(F_2)'_x(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = f(z)$ $\forall z \in D$, тобто F є первісною функції f в області D. При цьому значення функції F можна обчислити за формулою $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\, dt$, де z_0 — фіксована, а z — біжуча точка області D. ■

Отже, має місце

Теорема 3 (критерій існування первісної). *Для того, щоб функція* f, *неперервна в області* D, *мала первісну в цій області, необхідно й досить, щоб інтеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\, dz$ *не залежав від* *форми кусково-гладкої дуги* $\overset{\frown}{AB} \subset D$. *При цьому первісною функції* f *є функція* F, *для якої* $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$, *де* z_0 *— фіксована, а* z *— біжуча точка області* D.

З теореми 3 та з інтегральної теореми Коші випливає

Теорема 4 (про еквівалентність тверджень, пов'язаних з поняттям первісної). *Якщо область* D *однозв'язна, то наступні твердження* 1) − 4) *еквівалентні:*

1) f *має первісну в області* D;
2) f *аналітична в* D;
3) *функція* f *неперервна в* D, *і інтеграл* $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ *не залежить від форми кусково-гладкої дуги* $\overset{\frown}{AB} \subset D$;
4) *функція* f *неперервна в* D, *і інтеграл* $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ *для будь-якого кусково-гладкого контура* $\Gamma \subset D$.

З теореми 4 також випливає, що функцію f, аналітичну в однозв'язній області D, можна означити як **1)** функцію, що має первісну в області D, або **2)** неперервну в області D функцію, для якої $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)\,dz$ не залежить від форми кусково-гладкої дуги $\overset{\frown}{AB} \subset D$, або **3)** неперервну в області D функцію таку, що $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$.

Приклад 5. Функція $f(z) = \frac{1}{z}$ має первісну у будь-якій однозв'язній області D_1, що не містить нуля. Зокрема, в області $D_1 = \{z = x + i0\colon x \leqslant 0\}$ такою первісною є функція $F(z) = \ln z$. Тому $\int\limits_{1}^{i} \frac{dz}{z} = \ln i - \ln 1 = \ln|i| + i\arg i = i\frac{\pi}{2}$ за умови, що кусково-гладка дуга, що сполучає точки 1 та i, цілком лежить в D_1.

Пропонуємо читачеві обчислити інтеграл $\int\limits_{1}^{i} \frac{dz}{z}$, коли дуга лежить в області $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{z = x + i \cdot 0\colon x \geqslant 0\}$.

6.5.3. Теорема про множину первісних даної функції.

□ Нехай функція f має в області D первісну, якою є деяка функція F_1. За теоремою 1 функція $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$, z_0, $z \in D$, також є первісною функції f в області D. Тому, якщо $\gamma(z) = F_1(z) - F(z)$, то $\gamma'(z) = f(z) - f(z) = 0$ $\forall z \in D$. Звідси за критерієм сталості функції комплексної змінної $\gamma(z) = c = const$ в області D. Тому $F_1(z) = = c + \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt$ $\forall z \in D$, $c \in \mathbb{C}$. ■

Таким чином, доведена

Теорема 5 (про множину первісних даної функції). *Якщо функція f має первісну в області D, то вона має в цій області безліч первісних, кожна з яких має вигляд*

$$F_1(z) = c + \int\limits_{z_0}^{z} f(t)\,dt,$$

де c — довільна стала, z_0 — фіксована, а z — біжуча точка області D.

6.5.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна функція f, неперервна в області D, має в цій області первісну.
2. Кожна функція f дійсної змінної, що є неперервною на інтервалі $(a;b)$, має на цьому інтервалі первісну.
3. Якщо функція аналітична в області D, то вона має в D первісну.
4. Твердження, обернене до 3, є правильним.
5. Твердження 3 правильне, якщо область $D = \{z\colon \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
6. Якщо функція f неперервна в області D і $\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$ для будь-якого кусково-гладкого контура $\Gamma \subset D$, то f має в області D первісну.
7. Функція $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ має первісну в комплексній площині.
8. Функція $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ має первісну на інтервалі $(-\infty;+\infty)$.
9. Деяка функція f має в деякій області D а) єдину первісну, б) скінченну кількість первісних.
10. Формула Ньютона — Лейбніца правильна для будь-якої функції f, аналітичної в області D.

II. Довести дані твердження.

1. Функція $f(z) = \frac{1}{z}$ має первісну у будь-якій області $D = \{z \in \mathbb{C}\colon z \neq 0$ і $\arg z \neq \alpha\}$, де $\alpha \in (-\pi; \pi]$ — фіксоване число. Знайти цю первісну.
2. Якщо функція f має первісну в області D, то вона має в D похідну будь-якого порядку.

6.5.5. Історична довідка. Першу загальну теорію вимірювання об'ємів у довільному просторі $\mathbb{R}^n$ створив у 1882 — 1887 роках французький математик К. Жордан. Площу кривої поверхні вмів обчислювати вже Л. Ейлер у 1770 році, однак точного означення цієї площі не існувало, оскільки усі математики вважали, що її можна означити як границю суми площ вписаних многокутників. Лише німецький математик Г. Шварц своїм яскравим прикладом у 1870 році змусив задуматися над точним означенням площі кривої поверхні. Таке означення першим сформулював К. Жордан.

Ідея та перша побудова потенціальної функції належить французьким математикам Ж. Лагранжу і П. Лапласу (1749 — 1827). Загальна теорія потенціальних функцій створена у 1828 році англійським математиком Д. Гріном (1793 — 1841) та у 1840 році — німецьким математиком К. Гауссом (1777 — 1855). Термін "потенціальна функція" першим запропонував Д. Грін, а термін "потенціал" — К. Гаусс.

Свою інтегральну теорему О. Коші знайшов у 1825 році, а повне доведення цієї теореми одержав у 1884 році французький математик Е. Гурса (1858 — 1936). Інтегральна формула знайдена О. Коші у 1831 році. Теорема, обернена до інтегральної теореми Коші, доведена у 1886 році італійським математиком Д. Морерою (1856 — 1909).

Термін "гармонічна функція" ввів у 1782 році французький математик П. Лаплас.

"Принцип Кавальєрі" був відомий ще давньогрецьким математикам, але італійський математик Б. Кавальєрі (1598 — 1647) першим у 1635 році обгрунтував цей принцип.

7. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІНТЕГРАЛА ТА МІРИ ЛЕБЕГА

У цьому розділі будуть викладені основні факти про інтеграл та міру Лебега, які є істотними узагальненнями відповідно інтеграла Рімана та міри Жордана.

Для того, щоб простіше було використовувати властивості півкілець (див. пункт 5.2.1), надалі будемо називати *елементарним прямокутником* у просторі $\mathbb{R}^p$ множину $P = \prod_{i=1}^{p} \langle a_i; b_i \rangle$.

При першому читанні можна вважати, що простір $\mathbb{R}^p$ є простором $\mathbb{R}^1$.

7.1. Множини L-міри нуль

Виділення класу множин нульової міри було одним з найважливіших кроків, зроблених Е. Борелем і використаних А. Лебегом, при побудові своєї теорії міри та інтеграла.

7.1.1. Поняття множини L-міри нуль. Множину $E \subset \mathbb{R}^p$ назвемо *множиною L-міри нуль*, і писатимемо $\mathrm{m}E = 0$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленна сукупність елементарних прямокутників $P_k \subset \mathbb{R}^p$ така, що $\bigcup_k P_k \supset E$ і $\sum_k \mathrm{m} P_k < \varepsilon$, де

$$\mathrm{m} P_k = \mathrm{mes} P_k = \prod_{i=1}^{p} (b_i^{(k)} - a_i^{(k)})$$

– міра елементарного прямокутника $P_k = \prod_{i=1}^{p} \langle a_i^{(k)}; b_i^{(k)} \rangle$.

Отже, множину L-міри нуль можна покрити не більш ніж зчисленною кількістю елементарних прямокутників з як завгодно малою сумарною мірою.

Лема 1 (про вибір прямокутників в означенні множини L-міри нуль). *В означенні множини L-міри нуль можна вимагати, щоб усі прямокутники P_k:*

1) *були* ***напіввідкритими,*** *тобто мали вигляд*

$$P_k = \prod_{i=1}^{p} [a_i^{(k)}; b_i^{(k)});$$

2) *попарно не перетиналися один з одним;*
3) *мали додатну міру.*

□ Нехай для довільного $\varepsilon > 0$ вказано скінченну або зчисленну систему загальних елементарних прямокутників $P_k = \prod\limits_{i=1}^{p} \langle a_i^{(k)}; b_i^{(k)} \rangle$ таких, що $E \subset \bigcup\limits_k P_k$ і $\sum\limits_k \mathrm{m} P_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Замінимо кожен прямокутник P_k напіввідкритим прямокутником $Q_k^{(\delta)} = \prod\limits_{i=1}^{p} [a_i^{(k)}; b_i^{(k)} + \delta)$, де число $\delta > 0$ буде уточнено нижче.

Очевидно, що $P_k \subset Q_k^{(\delta)}$ $\forall \delta > 0$, $\forall k$ і що $\lim\limits_{\delta \to 0_+} \mathrm{m} Q_k^{(\delta)} = \mathrm{m} P_k$ $\forall k$. Тому $\forall k$ виберемо $\delta = \delta_k > 0$ так, щоб $\mathrm{m} Q_k^{(\delta_k)} < \mathrm{m} P_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. Для спрощення записів позначимо $Q_k = Q_k^{(\delta_k)}$ $\forall k$. Після цього матимемо: $E \subset \bigcup\limits_k Q_k$ і $\sum\limits_k \mathrm{m} Q_k < \sum\limits_k \mathrm{m} P_k + \sum\limits_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Цим обгрунтовано твердження 1).

Для обгрунтування твердження 2) згадаємо, що система K напіввідкритих елементарних прямокутників утворює півкільце множин (див. приклад 6.1° пункту 5.2.1).

Враховуючи це та доведене вище твердження 1), для довільного $\varepsilon > 0$ знайдемо скінченне або зчисленне об'єднання $\bigcup\limits_k Q_k \supset E$ напіввідкритих прямокутників Q_k, сумарної міри $\sum\limits_k \mathrm{m} Q_k < \varepsilon$. За лемою 2 пункту 5.2.1 існує відповідно скінченна або зчисленна система прямокутників $Q_{k,i} \in K$, $i \in \overline{1, i_k}$, які попарно не перетинаються, $\bigcup\limits_{i=1}^{i_k} Q_{k,i} \subset Q_k$ $\forall k$ і $\bigcup\limits_k \bigcup\limits_{i=1}^{i_k} Q_{k,i} = \bigcup\limits_k Q_k$.

Звідси за властивостями монотонності та адитивності міри Жордана $\mathrm{mes}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{i_k} Q_{k,i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{i_k} \mathrm{m} Q_{k,i} \leqslant \mathrm{m} Q_k$ $\forall k$, а тому $\sum\limits_k \sum\limits_{i=1}^{i_k} \mathrm{m} Q_{k,i} \leqslant$ $\leqslant \sum\limits_k \mathrm{m} Q_k < \varepsilon$. Цим обгрунтовано твердження 2).

Твердження 3) є простим наслідком з твердження 1), оскільки непорожній напіввідкритий елементарний прямокутник P обов'язково має додатну міру. ■

Приклад 1. Множинами L-міри нуль є:

1°. У просторі $\mathbb{R}^p$ довільна скінченна або зчисленна множина $\{x_1, x_2, \dots\}$.

2°. У просторі $\mathbb{R}^p$ будь-яка множина нульової міри Жордана.

3°. У просторі $\mathbb{R}^2$ усілякі лінійні множини.

4°. У просторі $\mathbb{R}^3$ усілякі плоскі множини.

На перший погляд, легко навести також приклади множин, які не є множинами L-міри нуль. Природно першим серед таких прикладів розглянути довільний елементарний прямокутник P з додатною мірою $\mathrm{m}P > 0$. Але поверховими міркуваннями з цим прикладом не впоратися. Тому розглянемо його детальніше.

□ Насамперед, потрібно встановити, чи випливає нерівність $\mathrm{m}P \leqslant \sum\limits_k \mathrm{m}P_k$ з умови $P \subset \bigcup\limits_k P_k$, де P і P_k — елементарні прямокутники, причому кількість P_k скінченна або зчисленна.

Якщо кількість прямокутників P_k скінченна, то ця властивість є простим наслідком з властивостей монотонності та адитивності міри Жордана. Справді, якщо позначити $Q_1 = P_1$, $Q_k = P_k \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} P_i$ при $k = 2, 3, \dots, n$, то множини $Q_k \subset P_k$, $k \in \overline{1,n}$, будуть вимірними за Жорданом, попарно не перетинатимуться і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$. Тоді

$$\mathrm{m}P = \operatorname{mes} P \leqslant \operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{n} Q_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} Q_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{m}P_k.$$

Припустимо, що кількість прямокутників P_k зчисленна. Якщо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k$ розбігається, то нерівність $\mathrm{m}P < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k$ виконується автоматично. Тому вважатимемо, що вказаний ряд збігається.

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Схожими міркуваннями, як у лемі 1, можна побудувати в і д к р и т і прямокутники $Q_k \supset P_k$ і такі, що $\mathrm{m}Q_k < \mathrm{m}P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}$ $\forall k$. Після цього $\overline{P} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Q_k$. Замкнений обмежений прямокутник $\overline{P}$ є компактною множиною у просторі $\mathbb{R}^p$. Тому з його відкритого покриття прямокутниками Q_k, $k \in \mathbb{N}$, можна виділити скінченне підпокриття, тобто $\exists n$: $\overline{P} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$.

За доведеним вище $\mathrm{m}P = \mathrm{m}\overline{P} \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}\,Q_k$. Згідно з вибором прямокутників Q_k,

$$\mathrm{m}P < \sum_{k=1}^{n}\left(\mathrm{m}P_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{m}P_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2^k} <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{m}P_k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{m}P_k + \varepsilon.$$

Враховуючи довільність $\varepsilon > 0$, дістанемо $\mathrm{m}P \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k$.

Спробуємо тепер узагальнити властивість, яку ми тільки що довели.

Припустимо, що $\bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k \subset \bigcup\limits_{i} Q_i$, де P_k та Q_i — елементарні прямокутники, причому P_k попарно не перетинаються між собою, а кількість Q_i скінченна або зчисленна.

Позначимо $P_{k,i} = P_k \cap Q_i$ $\forall k,\ i$. Очевидно, що $P_{k,i}$ — елементарні прямокутники, $P_k \subset \bigcup\limits_{i} P_{k,i}$ $\forall k \in \overline{1,n}$, а $Q_i = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_{k,i}$ $\forall i$, причому при фіксованому i прямокутники $P_{k,i}$, $k \in \overline{1,n}$, попарно не перетинаються. За доведеним вище випадком $\mathrm{m}P_k \leqslant \sum\limits_{i} \mathrm{m}P_{k,i}$ $\forall k \in \overline{1,n}$. Звідси, враховуючи адитивну властивість міри Жордана, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{m}P_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{i}\mathrm{m}P_{k,i} = \sum_{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{m}P_{k,i} = \sum_{i}\mathrm{m}\,Q_i.$$

Нарешті, якщо і прямокутників P_k зчисленна кількість (але всі вони попарно не перетинаються), то за доведеним вище випадком, для кожної частинної суми ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k$ буде виконуватися нерівність $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}P_k \leqslant \sum\limits_{i} \mathrm{m}\,Q_i$, а тому і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k \leqslant \sum\limits_{i} \mathrm{m}\,Q_i$. ■

Отже, доведена

Лема 2 (властивість зчисленної напівадитивності міри Жордана на півкільці прямокутників). *Якщо* $\bigcup\limits_{k} P_k \subset \bigcup\limits_{i} Q_i$, *де* P_k *та* Q_i *— елементарні прямокутники, кількість яких скінченна або зчисленна, причому* P_k *попарно не перетинаються між собою, то* $\sum\limits_{k} \mathrm{m}P_k \leqslant \sum\limits_{i} \mathrm{m}\,Q_i$.

Тепер питання про L-міру нуль елементарного прямокутника P легко розв'язується за допомогою леми 2. А саме, має місце

Наслідок 1. *Елементарний прямокутник P є множиною L-міри нуль тоді і тільки тоді, коли його звичайна міра дорівнює нулю.*

На закінчення цього пункту наведемо корисний критерій множини L-міри нуль.

Теорема 1 (критерій множини L-міри нуль). *Для того щоб множина $E \subset \mathbb{R}^p$ була множиною L-міри нуль, необхідно й досить, щоб її можна було покрити зчисленною кількістю елементарних прямокутників P_k з додатними мірами і скінченною сумою мір, причому так, щоб кожна точка множини E належала до зчисленної кількості елементарних прямокутників P_k.*

$\square$ Необхідність. Нехай $\mathrm{m}E = 0$. Користуючись лемою 1, для кожного числа $\varepsilon_n = \frac{1}{2^n}$ побудуємо не більш ніж зчисленну систему елементарних прямокутників $\{P_k^{(n)}\}$ таких, що $E \subset \bigcup\limits_k P_k^{(n)}$, $\mathrm{m}P_k^{(n)} > 0$ $\forall k$ і $\sum\limits_k \mathrm{m}P_k^{(n)} < \varepsilon_n$. Очевидно, $\forall x \in E$ і $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k$: $x \in \in P_k^{(n)}$, тобто x належить до нескінченної кількості прямокутників $P_k^{(n)}$ (якщо рахувати прямокутники як елементи подвійної послідовності, або матриці).

Занумеруємо тепер елементи матриці $(P_k^{(n)})$ у просту послідовність (P_i). При цьому дістанемо: $\mathrm{m}P_i > 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}P_i = = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sum\limits_k \mathrm{m}P_k^{(n)} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ і кожна точка x множини E належить до нескінченної кількості прямокутників P_i як членів послідовності (P_i). Проте, з умов $\mathrm{m}P_i > 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$ та $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}P_i < +\infty$ випливає, що кожен прямокутник P_i в послідовності (P_i) зустрічається скінченну кількість разів. Тому насправді x належить до нескінченної кількості різних прямокутників P_i.

Викидаючи з послідовності (P_i) прямокутники, які повторюються, дістанемо множину $\{Q_i\}$ прямокутників, занумерованих по одному разу. Ця множина $\{Q_i\}$ задовольняє всі умови теореми 1 в частині необхідності.

Достатність. Припустимо, що $\{P_i\}$ — така система прямокутників, що $\mathrm{m}P_i > 0\ \forall i \in \mathbb{N}$, ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}P_i$ збіжний і кожна тока $x \in E$ належить до нескінченної кількості прямокутників $\{P_i\}$.

Доведемо, що $\mathrm{m}E = 0$. Задамо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{m}P_i$ збігається, то $\exists n \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{m}P_i < \varepsilon$. Розглянемо систему прямокутників $\{P_i\colon i > n\}$. Кожна точка $x \in E$ належить до нескінченної кількості прямокутників цієї системи. Отже, $E \subset \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} P_i$, а тому $\mathrm{m}E = 0$. ■

7.1.2. Об'єднання множин L-міри нуль.

□ Нехай множина E є об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості множин E_k L-міри нуль. *Чи не є множина E також множиною L-міри нуль?*

Для відповіді на поставлене запитання зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і знайдемо $\forall k$ не більш ніж зчисленну сукупність елементарних прямокутників $P_i^{(k)}$ таку, щоб $\bigcup\limits_i P_i^{(k)} \supset E_k$ і $\sum\limits_i \mathrm{m}(P_i^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тоді множина $\{P_i^{(k)}\colon i = 1, 2, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots\}$ не більш ніж зчисленна, $\bigcup\limits_k \bigcup\limits_i P_i^{(k)} \supset \bigcup\limits_k E_k$ і $\sum\limits_k \sum\limits_i \mathrm{m}(P_i^{(k)}) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$. Тому E — множина L-міри нуль. ■

Таким чином, доведена

Теорема 2 (про об'єднання множин L-міри нуль). *Об'єднання не більш ніж зчисленної кількості множин L-міри нуль також є множиною L-міри нуль.*

Наслідок 2 (про L-міру не більш ніж зчисленної множини). *Довільна не більш ніж зчисленна множина $E \subset \mathbb{R}^p$ є множиною L-міри нуль.*

Наслідок 3 (про L-міру множини раціональних точок). *Множина $\mathbb{Q}$ раціональних точок є множиною L-міри нуль.*

Оскільки досконала можина Кантора $P_0 \subset [0;1]$ є континуальною множиною L-міри нуль, то твердження, обернене до наслідку 1, не є правильним.

Казатимемо, що *деяке твердження має місце майже скрізь* *на множині* $E \subset \mathbb{R}^p$, якщо множина усіх точок $x \in E$, для яких це твердження не має місця, є множиною L-міри нуль. Так, наприклад, казатимемо, що

1) $f(x) \geqslant g(x)$ майже скрізь на $[a;b]$, якщо $\mathrm{m}\{x \in [a;b]\colon f(x) < < g(x)\} = 0$;
2) послідовність $\big(f_n(x)\big)$ збігається до функції $f(x)$ майже скрізь на E, якщо $\mathrm{m}\{x \in E\colon f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$;
3) функція f є майже скрізь неперервною на множині E, якщо множина точок розриву f, що належать до E, є множиною L-міри нуль.

Приклад 2. Легко бачити, що 1) функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{коли} \quad x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

майже скрізь на $\mathbb{R}$ дорівнює 0; 2) послідовність (x^n) є збіжною майже скрізь на $[-1;1]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ майже скрізь на $[-1;1]$. Разом з цим не можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ майже скрізь на $\mathbb{R}$, оскільки множина $\{x \in \mathbb{R}\colon \lim\limits_{n\to\infty} x^n \neq 0\}$ не є можиною L-міри нуль (впевніться у цьому).

7.1.3. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні дані твердження.

1. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}^p$ є множиною L-міри нуль.
2. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}^{p-1}$ є множиною L-міри нуль у просторі $\mathbb{R}^p$.
3. Множина дійсних алгебраїчних чисел є множиною L-міри нуль.
4. Якщо $\mathrm{m}E = 0$, то E не має внутрішніх точок.
5. Твердження, обернене до твердження 4, є правильним.
6. Множина дійсних трансцендентних чисел є множиною L-міри нуль.
7. Якщо $\mathrm{m}E = 0$, то E − не більш ніж зчисленна множина.
8. Якщо $\mathrm{m}E = 0$, а $\overline{E}$ − замикання множини E, то $\mathrm{m}\overline{E} = 0$.
9. Якщо $\mathrm{m}\overline{E} = 0$, то і $\mathrm{m}E = 0$.
10. $(\sin^n x, \cos^n y) \to (0,0)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на $\mathbb{R}^2$.

II. Довести дані твердження.

1. Простір $\mathbb{R}^1$ є множиною L-міри нуль у просторі $\mathbb{R}^2$, якщо ототожнювати точки x та $(x,0)$.
2. Якщо функція f монотонна на $[a;b]$, то множина точок розриву f є множиною L-міри нуль.
3. Якщо замкнена обмежена множина $E \subset \mathbb{R}^p$ є множиною L-міри нуль, то вона вимірна за Жорданом і $\operatorname{mes} E = 0$.

7.2. Простір східчастих функцій та його поповнення

Поняття інтеграла Рімана хоч і дуже важливе, проте незастосовне до багатьох простих функцій. Тому постає завдання розширити клас RP функцій, інтегровних на прямокутнику P за Ріманом, і ввести на отриманому ширшому класі функцій поняття інтеграла так, щоб воно зберігало основні властивості R-інтеграла, а на класі RP збігалося з поняттям R-інтеграла. Один з можливих підходів до розв'язання цього питання базується на теорії поповнень метричних, зокрема нормованих, просторів.

7.2.1. Простір східчастих функцій та його нормування. Числову функцію f, що визначена на елементарному прямокутнику $P = \langle a_1; b_1\rangle \times \langle a_2; b_2\rangle \times \ldots \times \langle a_p; b_p\rangle \subset \mathbb{R}^p$, назвемо *східчастою*, якщо існує скінченна кількість елементарних прямокутників P_k, $k \in \overline{1,n}$, що попарно не перетинаються, $f(x) = c_k$ $\forall x \in P_k$ і $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$. При цьому P_k, $k \in \overline{1,n}$, називатимемо *прямокутниками сталості функції* f.

Поняття східчастої функції можна узагальнити, вважаючи, що на деяких прямокутниках сталості нульової міри ця функція може бути невизначеною або набувати нескінченних значень.

Зауважимо, що на різних прямокутниках сталості східчаста функція може набувати однакових значень.

Прикладами східчастих функцій є 1) стала функція: $f(x) = c$, $x \in \langle a; b\rangle$; 2) функція знаку числа x: $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \langle a; b\rangle$, графік якої зображено на рис. 50, коли $\langle a; b\rangle = [-1; 1]$. Прямокутниками (проміжками) сталості функції, графік якої зображено на рис. 50, можуть бути проміжки $[-1; 0)$, $[0; 0]$ і $(0; 1]$.

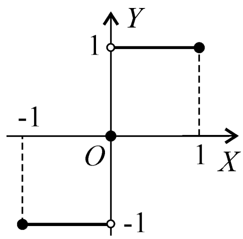

Рис. 50

Для двох східчастих функцій f та g, що визначені на елементарному прямокутнику P, можна так підібрати їх прямокутники сталості, щоб вони були спільними для цих функцій.

Множина SP всіх східчастих функцій, заданих на прямокутнику P, є лінійним простором по відношенню до операцій додавання функцій та множення їх на дійсні скаляри, оскільки $\alpha f + \beta g \in SP$ $\forall f, g \in SP$ і $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

За властивістю про R-інтегровність сталої функції та властивістю адитивності R-інтеграла кожна східчаста на прямокутнику P функція f є R-інтегровною на P. Тому існує інтеграл Рімана

$$\|f\| = \int\limits_P |f(x)|\,dx, \tag{1}$$

який природно назвати *нормою функції* $f \in SP$, оскільки правильні наступні властивості:

1) $\|f\| \geqslant 0 \; \forall f \in SP$;
2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\| \; \forall f \in SP$ та $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
3) $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\| \; \forall f, g \in SP$;
4) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ майже скрізь на P.

$\square$ Перші три властивості очевидні. Перевіримо четверту властивість. Нехай $f(x) = c_k$ на прямокутниках сталості P_k, $k \in \overline{1,n}$. Тоді $\|f\| = \int\limits_P |f|\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|\,\mathrm{m}P_k = 0 \Leftrightarrow (c_k = 0$ або $\mathrm{m}P_k = 0) \; \forall k \in \overline{1,n}$ $\Leftrightarrow f(x) = 0$ майже скрізь на P. $\blacksquare$

Для того, щоб функція $\|f\|$, визначена рівністю (1), стала нормою на просторі SP, ***домовимося вважати рівними у цьому просторі такі східчасті функції, які рівні одна одній майже скрізь на прямокутнику P.***

Частіше вважають, що нормованим простором є не сам простір SP, а деякий інший простір (SP), кожен елемент якого пов'язаний з певною східчастою функцією. Побудуємо один з таких просторів (SP).

Множина S_0P східчастих функцій, які майже скрізь на прямокутнику P набувають нульового значення, утворює підпростір у лінійному просторі SP. Розіб'ємо простір SP на класи еквівалентності, віднісши дві функції f і g до одного класу K тоді і тільки тоді, коли $f - g \in S_0P$. Кожен такий клас K однозначно визначається будь-яким своїм представником, тобто елементом, f. Тому якщо $f \in K$, то клас K позначатимемо $\overline{f}$, зокрема $S_0P = \overline{0}$. При цьому $\overline{f} = \overline{g} \Leftrightarrow f - g \in S_0P \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ майже скрізь на P.

Множину всіх побудованих класів позначимо (SP). Задамо на ній операції додавання елементів та множення елементів на числа, поклавши

$$\overline{f} + \overline{g} = \overline{f+g} \;\; \forall f, g \in SP \;\text{ і }\; \alpha\overline{f} = \overline{\alpha f} \;\; \forall f \in SP,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Після цього множина (SP) стане **лінійним простором**, який називають *фактор-простором простору SP за підпростором S_0P* і позначають $(SP) = SP/S_0P$. (Пропонуємо читачеві переконатися, що визначені вище операції додаваня і множення на скаляри є коректними, тобто не залежать від вибору представників, і що вони задовольняють всі аксіоми векторного простору.)

Якщо ми тепер у лінійному просторі (SP) визначимо норму, поклавши

$$\|\overline{f}\| = \|f\| = \int\limits_P |f|\,dx,$$

то перетворимо його на **нормований простір.**

Побудову простору (SP) можна порівняти з побудовою простору $\mathbb{Q}$ раціональних чисел як класів рівних між собою дробів $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, а $n \in \mathbb{N}$.

Вибір у просторі SP саме інтегральної норми (1) пов'язаний із завданням розширити поняття інтеграла. Адже для невід'ємної функції $f \in SP$ $\int\limits_P f\,dx = \|f\|$. Для довільної функції $f\colon P \to \mathbb{R}$ розглянемо дві невід'ємні функції $f^+ = \frac{|f|+f}{2}$ і $f^- = \frac{|f|-f}{2}$. При цьому $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ і тому $f \in SP \Leftrightarrow f^+,\ f^- \in SP$, а

$$\int\limits_P f\,dx = \|f^+\| - \|f^-\| \quad \text{і} \quad \|f\| = \|f^+\| + \|f^-\|.$$

7.2.2. Функціональні представники фундаментальних послідовностей простору SP. Поповнення метричного простору X можна здійснити за допомогою, наприклад, ідеальних елементів, які є фундаментальними послідовностями, розбіжними у просторі X.

З'ясуємо, чи має простір SP ідеальні елементи (тобто чи він неповний). Для цього спробуємо знайти зв'язок між збіжністю або фундаментальністю послідовності (f_n) у просторі SP та її поточковою збіжністю на прямокутнику P.

□ Припустимо спочатку, що $f_n \to 0$ у просторі SP, тобто $\int\limits_P |f_n|\,dx \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists k_n$: $\int\limits_P |f_{k_n}|\,dx < \frac{1}{4^n}$. Номери k_n можна вибрати так, щоб $k_n \uparrow +\infty$.

Позначимо $X_n = \{x \in P\colon |f_{k_n}(x)| > \frac{1}{2^n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Оскільки функція f_{k_n} східчаста на прямокутнику P, то кожна множина X_n складається із скінченної кількості прямокутників $P_{n,i}$, $i \in \overline{1, i_n}$, що є прямокутниками сталості функції f_{k_n}. Тоді

$$\frac{1}{4^n} > \int\limits_P |f_{k_n}|\,dx = \int\limits_{X_n} |f_{k_n}|\,dx + \int\limits_{P\setminus X_n} |f_{k_n}|\,dx \geqslant \int\limits_{X_n} |f_{k_n}|\,dx \geqslant \frac{1}{2^n}\operatorname{mes} X_n \Rightarrow$$

$$\operatorname{mes} X_n = \sum_{i=1}^{i_n} \mathrm{m} P_{n,i} < \frac{1}{2^n}.$$

Утворимо множини $Y_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} X_n$ $\forall m \in \mathbb{N}$ та $Y = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m$.

Зрозуміло, що $Y \subset Y_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$, а кожна множина Y_m є об'єднанням прямокутників $P_{k,i}$, де $k \in \{m, m+1, \dots\}$, $i \in \overline{1, i_k}$. Сума мір цих прямокутників

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{i=1}^{i_k} \mathrm{m} P_{k,i} < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Звідси випливає, що множина Y є множиною L-міри нуль.

Якщо $x \notin Y$, то $\exists m_0$: $x \notin Y_{m_0} \Rightarrow x \notin X_n$ $\forall n \geqslant m_0$, а це означає, що $|f_{k_n}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geqslant m_0 \Rightarrow f_{k_n}(x) \to 0$ $(n \to \infty)$. Таким чином, числова підпослідовність $f_{k_n}(x)$, можливо, не є збіжною до нуля тільки на множині Y, що має L-міру нуль.

Отже, із збіжності до нуля послідовності (f_n) у просторі SP випливає збіжність до нуля майже скрізь деякої її підпослідовності.

Якщо ж $f_n \to f$ у просторі SP, то $f_n - f \to 0$ у просторі SP і, за доведеним, $\exists k_n \uparrow \infty$: $f_{k_n}(x) - f(x) \to 0$ майже скрізь на P, або $f_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. ■

Таким чином, доведена

Лема 1 (про зв'язок між збіжністю у просторі SP та збіжністю майже скрізь). *Якщо послідовність (f_n) збігається до функції f у просторі SP, то деяка її підпослідовність $f_{k_n}(x)$ збігається до $f(x)$ майже скрізь на прямокутнику P.*

□ Повертаючись до доведення леми 1, зауважимо, що $\forall x \in P \setminus \setminus Y_m$ має місце нерівність $|f_{k_n}(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geqslant m$. Звідси випливає, що $f_{k_n}(x) \rightrightarrows 0$ на $P \setminus Y_m$.

При цьому, як було показано, множина Y_m є об'єднанням зчисленної кількості елементарних прямокутників, сума мір яких не перевищує $\frac{1}{2^{m-1}}$. ■

Таким чином, має місце

Лема 2 (про зв'язок між збіжністю у просторі SP та рівномірною збіжністю). *Якщо послідовність (f_n) збігається до функції f у просторі SP, то деяка її підпослідовність $f_{k_n}(x)$ (та сама, що і в лемі 1) збігається до $f(x)$ рівномірно на множинах $P \setminus Y_m$,*

$m \in \mathbb{N}$, *причому кожна множина* Y_m *є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сума мір яких не перевищує* $\frac{1}{2^{m-1}}$.

Знайдемо тепер зв'язок між фундаментальністю послідовності (f_n) у просторі SP та її поточковою збіжністю на P.

□ Розглянемо довільну послідовність (f_n), що є фундаментальною у просторі SP, тобто $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\colon \int\limits_P |f_n - f_m|\,dx < \varepsilon$, як тільки $n > m > n_0$. Тоді $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists k_n\colon \int\limits_P |f_m - f_{k_n}|\,dx < \frac{1}{4^n}\ \forall m > k_n$. Номери k_n можна так вибрати, щоб $k_n \uparrow +\infty$. Тому $\int\limits_P |f_{k_{n+1}} - f_{k_n}|\,dx < \frac{1}{4^n}\ \forall n$.

Позначимо $\varphi_n = f_{k_{n+1}} - f_{k_n}$, $X_n = \{x \in P\colon |\varphi_n(x)| > \frac{1}{2^n}\}\ \forall n \in \mathbb{N}$, а також $Y_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} X_n\ \forall m \in \mathbb{N}$ і $Y = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} Y_m$. Як показано при доведенні двох попередніх лем, 1) $\forall x \notin Y\ \exists m_0\colon |\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\ \forall n > m_0$; 2) $\forall m \in \mathbb{N}\ |\varphi_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\ \forall n \geqslant m$ і $\forall x \in P \setminus Y_m$. При цьому кожна множина Y_m є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сума мір яких не перевищує $\frac{1}{2^{m-1}}$.

З умови 1) за ознакою порівняння випливає, що при кожному $x \notin Y$ є збіжним функціональний ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{n=2}^{\infty} (f_{k_n}(x) - f_{k_{n-1}}(x)) =: f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_{k_n}(x) = f(x).$$

За ознакою Вейєрштрасса з умови 2) випливає, що останній ряд, або (що те саме) послідовність $(f_{k_n}(x))$ збігається рівномірно до функції $f(x)$ на множинах $P \setminus Y_m$, $m \in \mathbb{N}$. ■

Отже, встановлено зразу дві наступні леми.

Лема 3 (про зв'язок між фундаментальністю у просторі SP та збіжністю майже скрізь). *Якщо послідовність* (f_n) *фундаментальна у просторі* SP, *то існує підпослідовність* $f_{k_n}(x)$ *цієї послідовності, яка збігається до деякої функції* $f(x)$ *майже скрізь на прямокутнику* P.

Лема 4 (про зв'язок між фундаментальністю у просторі SP та рівномірною збіжністю). *Якщо послідовність* (f_n) *фундаментальна у просторі* SP, *то існує підпослідовність* $f_{k_n}(x)$ *цієї послідовності (та сама, що і в лемі* 3*), яка збігається до деякої функції* $f(x)$ *рівномірно на кожній множині* $P \setminus Y_m$, *причому кожна множина* Y_m *є об'єднанням зчисленної кількості прямо-*

кутників, сумарна міра яких не перевищує $\frac{1}{2^{m-1}}$.

У зв'язку з доведеними лемами $1 - 4$, назвемо деяку функцію $f(x)$, що визначена на прямокутнику P, *функціональним представником послідовності* (f_n), фундаментальної у просторі SP, якщо існує підпослідовність $(f_{k_n}(x))$, яка збігається до функції $f(x)$ майже скрізь на прямокутнику P.

З леми 3 випливає

Лема 5 (про існування функціонального представника фундаментальної у просторі SP послідовності). *Кожна послідовність* (f_n), *фундаментальна у просторі* SP, *має функціонального представника* $f(x)$.

Неважко помітити, що між множиною фундаментальних послідовностей простору SP та множиною їхніх функціональних представників немає взаємно однозначної відповідності. Щоб встановити таку відповідність, розіб'ємо обидві множини на класи еквівалентності.

Назвемо дві *фундаментальні послідовності* (f_n) і (g_n) простору SP *еквівалентними* і позначимо це $(f_n) \sim (g_n)$, якщо

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - g_n \| = \lim_{n\to\infty} \int\limits_P |f_n - g_n|\, dx = 0.$$

Відмітимо зокрема, що будь-яка підпослідовність (f_{k_n}) послідовності (f_n), фундаментальної у просторі SP, еквівалентна всій послідовності (f_n).

З іншого боку, назвемо дві *функції* f і g, визначені на прямокутнику P, *еквівалентними* і позначимо це $f \sim g$, якщо $f(x) = g(x)$ майже скрізь на P.

Виникає припущення, що коли f і g — функціональні представники послідовностей (f_n) і (g_n) відповідно, то $f \sim g \Leftrightarrow (f_n) \sim (g_n)$. Якщо $\operatorname{mes} P = 0$, то це припущення, очевидно, є правильним твердженням. З'ясуємо, чи так це, коли $\operatorname{mes} P > 0$.

□ Нехай f і g — функціональні представники послідовностей (f_n) і (g_n) відповідно. Тоді існують підпослідовності (f_{k_n}) і (g_{l_n}) такі, що $f_{k_n}(x) \to f(x)$ і $g_{l_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P.

Позначимо $\varphi_n = f_{k_n} - g_{l_n}$. Легко показати, що підпослідовність фундаментальної послідовності у просторі SP є фундаментальною (і еквівалентною самій послідовності), а також лінійна комбінація фундаментальних послідовностей є фундаментальною послідовністю у просторі SP. Тому (φ_n) — фундаментальна послідовність. Припустимо спочатку, що $(f_n)\sim(g_n)$. Тоді $\|\varphi_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$ і $\varphi_n(x)\to f(x)-g(x)$ майже скрізь на P. За лемою 3 існує підпослідовність $\varphi_{i_n}(x)\to 0$ майже скрізь на P. Звідси випливає, що $f(x)-g(x)=0$ майже скрізь на P, тобто $f\sim g$.

Отже, $(f_n)\sim(g_n)\Rightarrow f\sim g$.

Розглянемо обернене твердження. Нехай $f\sim g$. Тоді (φ_n) — фундаментальна у просторі SP послідовність і $\varphi_n(x)\to 0$ майже скрізь на прямокутнику P. Треба довести, що

$$(f_n)\sim(g_n)\Leftrightarrow(\varphi_n)\sim(0)\Leftrightarrow\|\varphi_n\|\to 0\ (n\to\infty).$$

Оскільки $\|\varphi_n\|\leqslant\|\varphi_n-\varphi_{i_n}\|+\|\varphi_{i_n}\|$, а $\|\varphi_n-\varphi_{i_n}\|\to 0$ $(n\to\infty)$, то досить довести існування підпослідовності (φ_{i_n}), для якої $\|\varphi_{i_n}\|\to 0$.

При доведенні леми 1 показано, що існують підпослідовність (φ_{i_n}) та функція $\varphi\colon P\to\mathbb{R}$, для яких: 1) існує послідовність множин Y_m таких, що $|\varphi_{i_n}(x)-\varphi(x)|<\frac{1}{2^n}$ $\forall n\geqslant m$ і $\forall x\in P\setminus Y_m$, причому кожна множина Y_m є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників $P_{k,j}$, $k\in\{m,m+1,\ldots,j\in\overline{1,j_k}\}$, а також 2) $\varphi_{i_n}(x)\to\varphi(x)$ майже скрізь на прямокутнику P.

Оскільки за умовою $\varphi_n(x)\to 0$ майже скрізь на P, то вважаємо (пропонуємо читачеві обгрунтувати це), що $\varphi(x)\equiv 0$ на P. Тому $|\varphi_{i_n}(x)|<\frac{1}{2^n}$ $\forall n\geqslant m$ і $\forall x\in P\setminus Y_m$.

Зафіксуємо довільне $\varepsilon>0$ і, виходячи з фундаментальності послідовності (φ_n), виберемо номер $N=N(\varepsilon)$ таким, щоб

$$\|\varphi_{i_n}-\varphi_N\|<\frac{\varepsilon}{3}\ \ \forall n\geqslant N.$$

Число $m\in\mathbb{N}$ візьмемо таким, щоб

$$\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{m}P}\ \ \forall n\geqslant m\ \text{ та }\ \frac{H}{2^{m-1}}<\frac{\varepsilon}{3},$$

де $H:=\max\limits_P|\varphi_N(x)|$.

Нехай $n\geqslant m$ і $n\geqslant N$. Позначимо

$$A_n=\left\{x\in P\colon|\varphi_{i_n}(x)|\geqslant\frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{m}P}\right\},\ \ B_n=P\setminus A_n,$$

а через $Q_{n,\nu}$ позначимо прямокутники сталості функції φ_{i_n}. Оскільки φ_{i_n} — східчаста функція, то A_n складається із скінченної кількості прямокутників сталості $Q_{n,\nu}$ цієї функції, тобто $A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{k_n} Q_{n,\nu_k}$, де $Q_{n,\nu_k} \cap Q_{n,\nu_j} = \varnothing \; \forall k \neq j$. Враховуючи це, $\operatorname{mes} A_n = \sum\limits_{k=1}^{k_n} \operatorname{m} Q_{n,\nu_k}$.

З іншого боку, $A_n \subset Y_m \subset \bigcup\limits_{k=m}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{j_k} P_{k,j}$, а тому за лемою 2 п. 7.1.1

$$\operatorname{mes} A_n \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_k} \operatorname{m} P_{k,j} < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Звідси з урахуванням нерівності $|\varphi_{i_n}(x)| < \frac{\varepsilon}{3\operatorname{m} P} \; \forall x \in B_n$ дістаємо, що

$$\|\varphi_{i_n}\| = \int\limits_P |\varphi_{i_n}| \, dx = \int\limits_{A_n} |\varphi_{i_n}| \, dx + \int\limits_{B_n} |\varphi_{i_n}| \, dx < \int\limits_{A_n} |\varphi_{i_n}| \, dx + \frac{\varepsilon}{3\operatorname{m} P} \operatorname{m} B_n \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A_n} \big(|(\varphi_{i_n} - \varphi_N) + \varphi_N|\big) \, dx + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \int\limits_{A_n} |\varphi_{i_n} - \varphi_N| \, dx + \int\limits_{A_n} |\varphi_N| \, dx + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi_{i_n} - \varphi_N\| + H \operatorname{mes} A_n + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

якщо $n \geqslant m$ і $n \geqslant N$. Це означає, що $\|\varphi_{i_n}\| \to 0$ $(n \to \infty)$. ■

Отже, правильна

Лема 6 (про характер відповідності між фундаментальними послідовностями простору SP та їхніми функціональними представниками). *Нехай функції f і g є функціональними представниками відповідно послідовностей (f_n) і (g_n), фундаментальних у просторі SP. Тоді $f \sim g \Leftrightarrow (f_n) \sim (g_n)$.*

7.2.3. Неповнота простору SP та його поповнення. Застосовуючи лему 1 попереднього пункту, неважко перевірити повноту простору SP і переконатися в існуванні ідеальних елементів цього простору.

Приклад 1. Для простоти розглянемо випадок $P = [0;1) \subset \mathbb{R}^p = \mathbb{R}^1$. Візьмемо послідовність

$$f_n(x) = \frac{k}{n}, \text{ коли } x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right), \; k \in \overline{0, n-1}.$$

Бачимо, що $\forall x \in [0;1)$ і $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists! k_n = k_n(x)$: $f_n(x) = \frac{k_n}{n} \leqslant x < \frac{k_n+1}{n}$. Звідси випливає, що $\frac{k_n}{n} \to x$ $(n \to \infty)$, тобто $f_n(x) \to x$ скрізь на піввідрізку $[0;1)$.

Оскільки $f_n(x) \leqslant x \; \forall x \in [0;1)$, то

$$(R)\int\limits_P |f_n(x)-x|\,dx = (R)\int\limits_P (x-f_n(x))\,dx = (R)\int\limits_0^1 x\,dx - (R)\int\limits_P f_n\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2} - \frac{(n-1)n}{2n^2} \to 0 \;\; (n\to\infty).$$

Звідси дістанемо

$$\|f_n - f_m\| = (R)\int\limits_P |f_n - f_m|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (R)\int\limits_P |f_n(x)-x|\,dx + (R)\int\limits_P |f_m(x)-x|\,dx \to 0 \;\; (m,n\to\infty).$$

Це означає, що послідовність (f_n) фундаментальна у просторі $S[0;1)$.

Якби послідовність (f_n) збігалася у просторі SP до деякої східчастої функції f, то за лемою 1 пункту 7.2.2 деяка підпослідовність (f_{k_n}) послідовності (f_n) збігалася б майже скрізь на прямокутнику P до функції f. Тоді мала б виконуватися рівність $f(x) = x$ майже скрізь на P, а це неможливо.

Отже, послідовність (f_n) хоч і фундаментальна, проте розбіжна у просторі SP. Цим показано, що простір $SP = S[0;1)$ неповний.

У загальному випадку, дещо змінюючи наведений вище приклад послідовності, дістанемо, що ***простір*** SP ***неповний при будь-якому*** $P \subset \mathbb{R}^p \colon \mathrm{m}P > 0$.

Поповнення простору SP можна здійснити з а д о п о м о г о ю і д е а л ь н и х е л е м е н т і в, тобто фундаментальних, але розбіжних у просторі SP послідовностей (f_n). При цьому дістанемо метричний простір $SP^* = SP \cup \{f = (f_n)\}$, в якому відстань $\rho^*(f,g)$ визначається рівностями 1) $\rho^*(f,g) = \|f-g\|$, 2) $\rho^*(f,g) = \lim\limits_{n\to\infty}\|f - g_n\|$ і 3) $\rho^*(f,g) = \lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - g_n\|$, відповідно, у випадках, коли 1) f і g — звичайні елементи, 2) f — звичайний, а $g = (g_n)$ — ідеальний елемент і 3) $f = (f_n)$ і $g = (g_n)$ — ідеальні елементи простору SP.

У просторі SP^* ототожнюються, з одного боку, рівні майже скрізь східчасті функції, а з іншого боку — еквівалентні послідовності.

Інше поповнення простору SP можна здійснити з а д о п о м о г о ю ф у н к ц і й, що є функціональними представниками фундаментальних у просторі SP послідовностей.

На такому поповненні буде побудовано так звану теорію інтеграла Лебега, яка є узагальненням теорії інтеграла Рімана.

7.2.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна функція, що визначена на $[a;b]$ і має скінченну кількість значень на $[a;b]$, є східчастою функцією.
2. Кожна східчаста функція має скінченну кількість значень.
3. Добуток двох східчастих функцій є східчастою функцією.
4. Модуль східчастої функції є східчастою функцією.
5. Функція Діріхле є східчастою на відрізку $[0;1]$.
6. Якщо $|f|$ є східчастою функцією, то і f — східчаста функція.
7. Якщо $f,g \in SP$ і $\int\limits_P |f-g|\,dx = 0$, то $f(x) = g(x)\ \forall x \in P$.
8. Якщо $f \in SP$, $\int\limits_P f\,dx = \mathrm{m}P$ і $f(x) \geqslant 1\ \forall x \in P$, то $f(x) = 1$ майже скрізь на P.
9. Функція $f(x) = x$, $x \in [0;1)$, є функціональним представником деякої послідовності (f_n), фундаментальної у просторі $S[0;1)$.
10. Якщо $f_n \in SP\ \forall n \in \mathbb{N}$ і $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на прямокутнику P, то функція f є функціональним представником послідовності (f_n).

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $f \in S[a;b]$, то функція $F(x) = \int\limits_{[a;x]} f\,dt$ неперервна на відрізку $[a;b]$.
2. Позначимо через SP^{**} множину всіх послідовностей, фундаментальних у просторі SP, задамо на цій множині операції додавання: $(f_n)+(g_n) = (f_n+g_n)$ і множення на скаляри: $\alpha(f_n) = (\alpha f_n)$, а також введемо норму: $\|f\|^{**} = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$, де $f = (f_n)$.

   Тоді 1) множина SP^{**} є лінійним простором; 2) якщо ототожнювати еквівалентні послідовності, то лінійний простір SP^{**} з нормою $\|\cdot\|^{**}$ є нормованим простором; 3) нормований простір SP^{**} ізометричний простору SP^{*}.

7.3. Поняття L-інтеграла та його властивості

У даному підрозділі за допомогою східчастих функцій введено поняття L-інтеграла, що є узагальненням поняття інтеграла Рімана, і доведено основні властивості L-інтеграла.

7.3.1. Поняття L-інтегровної функції та її L-інтеграла. Дійсну функцію f, що визначена на прямокутнику P, називають *L-інтегровною*, або *інтегровною за Лебегом, на прямокутнику P*, якщо існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі SP та збіжна до $f(x)$ майже скрізь на P. При цьому записують $f \in LP$.

☐ Нехай $f \in LP$. Тоді існує фундаментальна у просторі LP послідовність (f_n): $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. Розглянемо числову послідовність

$$\alpha_n = \int\limits_P f_n\,dx,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Оскільки послідовність (f_n) фундаментальна у просторі SP, то

$$|\alpha_m - \alpha_n| \leqslant \int\limits_P |f_m - f_n|\,dx \to 0 \ \ (m,n \to \infty),$$

тому (α_n) є фундаментальною числовою послідовністю. Тоді, як відомо, послідовність (α_n) є збіжною, тобто існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n(x)\,dx.$$

Останню границю називають *L-інтегралом*, або *інтегралом Лебега, функції f по прямокутнику P* і позначають $\int\limits_P f\,dx$ або $(L)\int\limits_P f\,dx$. Отже,

$$(L)\int\limits_P f\,dx := \int\limits_P f\,dx := \int\limits_P f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n(x)\,dx,$$

де (f_n) — послідовність, фундаментальна у просторі SP та збіжна до $f(x)$ майже скрізь на P.

Покажемо, що L-інтеграл не залежить від вибору послідовності (f_n). Сравді, якщо взяти іншу послідовність (g_n), фундаментальну у просторі SP та збіжну до $f(x)$ майже скрізь на P, то функція f буде функціональним представником обох послідовностей (f_n) і (g_n). Тоді за лемою 6 пункту 7.2.2 $(f_n) \sim (g_n)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P |f_n - g_n|\,dx = 0$. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_P g_n\,dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx,$$

а це і є незалежність L-інтеграла від послідовності (f_n). ■

Отже, має місце

Теорема 1 (про існування та єдиність L-інтеграла). *Кожна L-інтегровна на прямокутнику P функція має єдиний L-інтеграл по цьому прямокутнику.*

Зауваження. В означеннях L-інтегровної функції та L-інтеграла замість умови $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P можна вимагати, щоб функція f була функціональним представником послідовності (f_n).

Приклад 1. Наведемо приклади L-інтегровних функцій.

1°. Нехай f є східчастою функцією. Очевидно, послідовність (f_n): $f_n = f\ \forall n \in \mathbb{N}$ фундаментальна у просторі SP та збіжна до $f(x)$ скрізь (а отже, і майже скрізь) на P. Тому f є L-інтегровною на P, причому її L-інтеграл співпадає з R-інтегралом:

$$(L)\int_P f\,dx = \lim_{n\to\infty}(R)\int_P f_n\,dx = (R)\int_P f\,dx.$$

2°. Нехай $f(x_1,\dots,x_p) = 1$, коли $x_i \in \mathbb{Q}\ \forall i \in \overline{1,p}$, і $f(x) = 0$ в інших випадках. Це функція Діріхле у просторі $\mathbb{R}^p$. Візьмемо довільний елементарний прямокутник $P \subset \mathbb{R}^p$. Послідовність (f_n): $f_n(x) \equiv 0\ \forall n$ буде фундаметнальною у просторі RP та збіжною до $f(x)$ у кожній точці $x \notin \mathbb{Q}^p$. Оскільки простір $\mathbb{Q}^p$ зчисленний, то $m\mathbb{Q}^p = 0$, а отже, $0 \equiv f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. Тому $f \in LP$ і $(L)\int\limits_P f\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_P f_n\,dx = 0$.

Раніше було з'ясовано, що ця функція не інтегровна за Ріманом ні на якому прямокутнику P додатної міри.

3°. У прикладі 1 п. 7.2.3 фактично показано за означенням, що функція $f(x) = x$ є L-інтегровною на піввідрізку $P = [0;1)$ і що $(L)\int\limits_P x\,dx = \frac{1}{2}$.

Дослідимо тепер питання, *чи є поняття L-інтеграла узагальненням поняття R-інтеграла.*

□ Припустимо, що функція f інтегровна за Ріманом на замкненому прямокутнику P, що має додатну міру. Тоді функція f обмежена на P і за критерієм інтегровності існує послідовність розбиттів $(T^{(n)})$ прямокутника P на прямокутники $P_k^{(n)}$, $k \in \overline{1,k_n}$, для якої відповідні послідовності нижніх та верхніх сум Дарбу $S_*(T^{(n)})$ і $S^*(T^{(n)})$ збігаються до $(R)\int\limits_P f\,dx$ при $n \to \infty$.

Позначимо $h_k^{(n)} = \inf\limits_{x\in P_k^{(n)}} f(x)$, $H_k^{(n)} = \sup\limits_{x\in P_k^{(n)}} f(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall k \in \overline{1,k_n}$.

Введемо східчасті функції φ_n та Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, поклавши $\varphi_n(x) = h_k^{(n)}$ і $\Phi_n(x) = H_k^{(n)}$, коли $x \in (P_k^{(n)})^\circ$, та $\varphi_n(x) = \Phi_n(x) = 0$ в інших випадках. Дістанемо, що:

$$1)\ \begin{cases} (R)\int\limits_P \varphi_n\, dx = S_*(T^{(n)}) \to (R)\int\limits_P f\, dx, \\ (R)\int\limits_P \Phi_n\, dx = S^*(T^{(n)}) \to (R)\int\limits_P f\, dx \ \text{ при } n \to \infty; \end{cases}$$

2) якщо позначити $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{k_n} \partial P_k^{(n)}$, то X буде множиною L-міри нуль як зчисленне об'єднання множин L-міри нуль, а на множині $P \setminus X$ буде правильною нерівність $\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Phi_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

З умови 1) зокрема випливає, що послідовність (φ_n) фундаментальна у просторі SP, а також $(R)\int\limits_P (\Phi_n(x) - \varphi_n(x))\, dx \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто послідовність $(\Phi_n - \varphi_n)$ збігається до нуля у просторі SP. Тоді за лемою 1 пункту 7.2.2 знайдеться деяка її підпослідовність $(\Phi_{k_n} - \varphi_{k_n})$, яка збігається до нуля майже скрізь на прямокутнику P. Звідси та з умови 2) дістаємо збіжність $\varphi_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. Тому, враховуючи фундаментальність (φ_{k_n}) у просторі SP, дістаємо, що $f \in LP$ і $(L)\int\limits_P f\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P \varphi_{k_n}\, dx = (R)\int\limits_P f\, dx$. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (про зв'язок між інтегралами Рімана і Лебега). *Кожна функція, інтегровна за Ріманом на прямокутнику P, є L-інтегровною на цьому прямокутнику, причому її L-інтеграл збігається з R-інтегралом.*

Як показує приклад 1.2°, твердження, обернене до цієї теореми, неправильне. Тому поняття L-інтеграла ширше, ніж поняття R-інтеграла.

7.3.2. Основні властивості L-інтеграла. Враховуючи означення L-інтеграла, природно чекати, що його властивості для довільних L-інтегровних функцій випливатимуть з відповідних властивостей R-інтегралів східчастих функцій. І це дійсно так.

Властивість 1 (про L-інтегровність еквівалентних функцій). *Якщо $f \in LP$, а $g \sim f$, то $g \in LP$ і $\int\limits_P f\, dx = \int\limits_P g\, dx$. Зокрема, якщо $f(x) \sim c = const$, то $f \in LP$ і $\int\limits_P c\, dx = c\,\mathrm{m}P$.*

□ Нехай $f \in LP$, а $g \sim f$. Тоді існує фундаментальна у просторі SP послідовність (f_n), що збігається до f майже скрізь на P. Але оскільки $g \sim f$, то послідовність (f_n) збігається і до g майже скрізь на P. Тому, за означенням, $g \in LP$ і

$$(L)\int_P g\,dx := \lim_{n\to\infty}(R)\int_P f_n\,dx =: (L)\int_P f\,dx. \blacksquare$$

Властивість 2 (про лінійність L-інтеграла). *Якщо* $f, g \in LP$, *то* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g \in LP$ *і* $\int\limits_P (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha\int\limits_P f\,dx + \beta\int\limits_P g\,dx.$

□ Якщо $f, g \in LP$, то існують (f_n), (g_n) — фундаментальні послідовності у просторі SP, які збігаються відповідно до f і до g майже скрізь на P. Зрозуміло, що $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ послідовність $(\alpha f_n + \beta g_n)$ фундаментальна у просторі SP і збіжна до функції $\alpha f + \beta g$ майже скрізь на P. Тоді $\alpha f + \beta g \in LP$ і $\int\limits_P (\alpha f + \beta g)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_P (\alpha f_n + \beta g_n)\,dx =$
$= \alpha \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_P f_n\,dx + \beta \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_P g_n\,dx = \alpha\int\limits_P f\,dx + \beta\int\limits_P g\,dx.$ $\blacksquare$

Властивість 3 (про L-інтегровність $|f|$). *Якщо* $f \in LP$, *то і* $|f| \in LP$, *причому* $\left|\int\limits_P f\,dx\right| \leqslant \int\limits_P |f|\,dx.$

□ Якщо $f \in LP$, то існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі SP та збіжна до f майже скрізь на P. Зрозуміло, що послідовність $(|f_n|)$ теж фундаментальна у просторі SP і збіжна вона до функції $|f|$ майже скрізь на P. Отже, $|f| \in LP$ і, враховуючи властивість про R-інтегровність модуля, маємо:

$$\left|\int_P f\,dx\right| = \left|\lim_{n\to\infty}(R)\int_P f_n\,dx\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(R)\int_P f_n\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty}(R)\int_P |f_n|\,dx = \int_P |f|\,dx. \blacksquare$$

Властивість 4 (про монотонність L-інтеграла). *Якщо* f *і* $g \in LP$ *і* $f(x) \leqslant g(x)$ *майже скрізь на* P, *то* $\int\limits_P f\,dx \leqslant \int\limits_P g\,dx.$

□ Оскільки $f(x) \leqslant g(x)$ майже скрізь на P, то $g(x) - f(x) = |g(x) - f(x)|$ майже скрізь на P. Тоді за властивостями 1 − 3
$\int\limits_P g\,dx - \int\limits_P f\,dx = \int\limits_P (g-f)\,dx = \int\limits_P |g-f|\,dx \geqslant \left|\int\limits_P (g-f)\,dx\right| \geqslant 0.$ $\blacksquare$

Властивість 5 (про рівність нулеві L-інтеграла). *Якщо* $f \in LP$ *і* $\int\limits_P |f|\,dx = 0$, *то* $f(x) = 0$ *майже скрізь на* P.

$\square$ Нехай (f_n) — фундаментальна послідовність у просторі SP, яка збігається до f майже скрізь на P. Тоді послідовність $(|f_n|)$ фундаментальна у просторі SP і збіжна до $|f|$ майже скрізь на P. Тому $0 = \int\limits_P |f|\,dx = \lim\limits_{n\to\infty}(R)\int\limits_P |f_n|\,dx$. Це означає, що $f_n \to 0$ у просторі SP. За лемою 1 пункту 7.2.2 існує підпослідовність $f_{k_n}(x) \to 0$ майже скрізь на P. Але $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P, тому $f \sim 0$. $\blacksquare$

Властивість 6 (про адитивність L-інтеграла). *Нехай елементарний прямокутник* P *є об'єднанням елементарних прямокутників* P_k, $k \in \overline{1,m}$, *які попарно не перетинаються.*

Тоді $LP = \bigcap\limits_{k=1}^{m} LP_k$ *і* $\int\limits_P f\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{P_k} f\,dx \;\; \forall f \in LP$.

$\square$ Нехай $f \in LP$, а (f_n) — послідовність, фундаментальна у просторі SP і збіжна до f майже скрізь на P. Тоді ця послідовність фундаментальна у кожному просторі SP_k і збіжна до f на майже скрізь на кожному прямокутнику P_k, $k \in \overline{1,m}$. Отже, $f \in LP_k \; \forall k \in \overline{1,m}$, тобто $LP \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} LP_k$.

Нехай $f \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} LP_k$. Для кожного $k \in \overline{1,m}$ виберемо послідовність $(f_n^{(k)})$, фундаментальну у просторі SP_k та збіжну до функції f майже скрізь на прямокутнику P_k.

Позначимо $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = f_n^{(k)}(x)$, коли $x \in P_k$, $k \in \overline{1,m}$. Покажемо, що послідовність (f_n) фундаментальна у просторі SP. Справді, $\|f_i - f_j\|_P = \int\limits_P |f_i - f_j|\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{P_k} |f_i - f_j|\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m} \|f_i^{(k)} - f_j^{(k)}\|_{P_k} \to 0$, коли $i, j \to \infty$, оскільки $\forall k \in \overline{1,m}$ $\|f_i^{(k)} - f_j^{(k)}\|_{P_k} \to 0$, коли $i, j \to \infty$.

Крім того, очевидно, що $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. Отже, $f \in LP$, тобто $\bigcap\limits_{k=1}^{m} LP_k \subset LP$, а тому й $LP = \bigcap\limits_{k=1}^{m} LP_k$.

Далі, враховуючи адитивну властивість R-інтеграла, маємо:

$$\int\limits_P f\,dx = \lim_{n\to\infty}(R)\int\limits_P f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m}(R)\int\limits_{P_k} f_n\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \lim_{n\to\infty} (R)\int_{P_k} f_n\,dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{P_k} f\,dx. \ \blacksquare$$

Властивість 7 (про лінійну заміну змінної в L-інтегралі). *Нехай* $f \in LP$, $a \in \mathbb{R}^p$, $Q = P + a$, $g(x) = f(x-a)\ \forall x \in Q$. *Тоді* $g \in LQ$ *і*

$$\int_Q g\,dx = \int_{P+a} f(x-a)\,dx = \int_P f\,dx.$$

$\square$ Покажемо спочатку, що властивість 7 правильна для східчастих функцій f. Нехай $f(x) = c_k$ на прямокутниках сталості $P_k \subset P$, $k \in \overline{1,m}$. Відмітимо, що множина $Q = P + a := \{x + a\colon x \in P\}$ є елементарним прямокутником, утвореним шляхом "зсуву" P на вектор a. Множини $Q_k = P_k + a$ є прямокутниками сталості функції g, причому $g(x) = c_k$, коли $x \in Q_k$, $k \in \overline{1,m}$. Тому $\int\limits_Q g\,dx = \sum\limits_{k=1}^{m} c_k\,dx = \int\limits_P f\,dx$.

Нехай тепер $f \in LP$, а (f_n) — послідовність, фундаментальна у просторі SP та збіжна до f майже скрізь на P. За доведеним вище, послідовність (g_n): $g_n(x) = f_n(x-a)\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x \in Q$, є фундаментальною у просторі SQ та збіжною до $g(x) = f(x-a)$ майже скрізь на Q. Тому $g \in LQ$ і $\int\limits_Q g\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_Q g_n\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx = \int\limits_P f\,dx$. $\blacksquare$

7.3.3. Простір LP. Лінійна властивість L-інтеграла говорить про те, що множина LP інтегровних за Лебегом на прямокутнику P функцій є лінійним простором. Задамо *норму* у цьому просторі рівністю

$$\|f\|_L = \int_P |f|\,dx.$$

Функціонал $\|f\|_L$, $f \in LP$, задовольнятиме всі аксіоми норми, якщо вважати рівними еквівалентні (тобто рівні майже скрізь) функції. Тому лінійний простір LP є нормованим, якщо ототожнювати еквівалентні функції.

В силу теореми 2, ця сама норма має зміст і в просторі RP інтегровних за Ріманом функцій, і в просторі SP східчастих функцій. При цьому $SP \subset RP \subset LP$. Іноді, щоб підкреслити належність функції f до простору RP або SP, вживаються позначення $\|f\|_R$ і $\|f\|_S$, відповідно.

Встановимо безпосередньо, що простір LP є поповненням простору SP. Першим кроком до цього є наступна

Теорема 3 (Єгорова, про наближення L-інтегровних функцій східчастими). *Для будь-якої L-інтегровної на прямокутнику P функції f можна вказати послідовність (f_n) східчастих функцій, яка має такі властивості:*

1) (f_n) *фундаментальна у просторі* SP;
2) $f_n(x) \to f(x)$ *майже скрізь на* P;
3) $\forall\delta > 0\ \exists E_\delta$: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $P \setminus E_\delta$, *причому множина* E_δ *є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сумарна міра яких менша за* δ;
4) $f_n \to f$ *у просторі* LP.

Зокрема, теорема 3 пунктом 4) стверджує, що множина SP східчастих функцій всюди щільна у нормованому просторі LP (тобто її замикання $\overline{SP} = LP$).

Ця теорема дуже схожа на леми 3 та 4 пункту 7.2.2, але в ній початковим об'єктом є функція, тоді як у лемах — послідовність, а крім того, теорема 3 містить суттєвий новий пункт 4).

☐ За означенням L-інтегровності існує послідовність (g_n), фундаментральна у просторі SP і збіжна до f майже скрізь на P.

За твердженнями лем 3 та 4 і доведенням леми 3, існує функція g і підпослідовність (g_{k_n}), такі, що

а) $g_{k_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P;

б) $\forall\delta > 0\ \exists Y_\delta$: $g_{k_n}(x) \rightrightarrows g(x)$ на $P \setminus Y_\delta$, причому множина Y_δ є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сумарна міра яких менша за $\frac{\delta}{2}$;

в) $\int\limits_P |g_{k_n} - g_m|\, dx < \frac{1}{4^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall m > k_n$.

Покладемо $(f_n) = (g_{k_n})$. Послідовність (f_n) задовольняє пункти 1) і 2) теореми 3.

Позначимо $Y = \{x \in P\colon\ f(x) \neq g(x)\}$. Оскільки $g_n(x) \to f(x)$, а $g_{k_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P, то $f(x) = g(x)$ майже скрізь на P, тобто $\mathrm{m}Y = 0$. Тому $\forall\delta > 0$ існує множина $Z_\delta \supset Y$, яка є об'єднанням не більш ніж зчисленної кількості елементарних прямокутників, сумарна міра яких менша за $\frac{\delta}{2}$.

На множині $P \setminus (Y_\delta \cup Z_\delta) =: P \setminus E_\delta$ $f(x) = g(x)$, тому за пунктом б) на цій множині $f_n(x) = g_{k_n}(x) \rightrightarrows f(x)$. При цьому множина $E_\delta = Y_\delta \cup$

$\cup Z_\delta$ є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників із сумарною мірою, меншою за δ. Отже, послідовність (f_n) задовольняє пункт 3) теореми 3.

Проаналізуємо пункт в), який стосується послідовності (g_n). Зафіксуємо там номер n і розглянемо послідовність $\varphi_m = |g_{k_n} - g_m|$, $m \in \mathbb{N}$. Це фундаментальна у просторі SP послідовність, яка збігається до функції $|g_{k_n} - g|$, а враховуючи, що $f \sim g$, (φ_m) збігається до $|g_{k_n}(x) - f(x)|$ майже скрізь на P. Тому за означенням L-інтеграла

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_P \varphi_m \, dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_P |g_{k_n} - g_m| \, dx = (L) \int\limits_P |g_{k_n} - f| \, dx.$$

Переходячи до границі при $m \to \infty$ у нерівності пункту в), дістанемо нерівність

$$(L) \int\limits_P |g_{k_n} - f| \, dx = (L) \int\limits_P |f_n - f| \, dx \leqslant \frac{1}{4^n},$$

що справедлива $\forall n \in \mathbb{N}$. Остання нерівність означає, що

$$\|f_n - f\|_L = (L) \int\limits_P |f_n - f| \, dx \to 0 \ (n \to \infty),$$

або $f_n \to f$ у просторі LP.

Отже, пункт 4) теореми 3 виконується. ■

Теорема Єгорова має ряд важливих наслідків, до яких належать, зокрема, всі твердження даного пункту.

Наслідок 1 (про збіжність до функціонального представника). *Якщо функція f є функціональним представником послідовності (f_n), фундаментальної у просторі SP (тобто $\exists (f_{k_n})$: $f_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на прямокутнику P), то $f_n \to f$ у просторі LP.*

□ Функція $f \in LP$, згідно з умовою. За теоремою 3 існує така фундаментальна у просторі SP послідовність (g_n), для якої функція f є функціональним представником, причому $g_n \to f$ у просторі LP. За лемою 6 пункту 7.2.2 $(f_n) \sim (g_n)$, тобто $\|f_n - g_n\|_S \to 0$. Тоді

$$\|f_n - f\|_L \leqslant \|f_n - g_n\|_L + \|g_n - f\|_L \to 0 \ (n \to \infty),$$

що й треба було довести. ■

Наслідок 2 (про збіжність в LP і майже скрізь). *Якщо $f_n \to f$ у просторі LP, то $\exists k_n \uparrow \infty$: $f_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на P.*

□ Користуючись теоремою Єгорова, для кожної функції $f_n \in LP$,

$n \in \mathbb{N}$, знайдемо функцію $g_n \in SP$ і множину Y_n:

$$\| f_n - g_n \|_L < \frac{1}{n}, \ \ | f_n(x) < g_n(x) | < \frac{1}{n} \ \forall x \in P \setminus Y_n,$$

причому множина Y_n є зчисленним об'єднанням прямокутників, сумарна міра яких менша за $\frac{1}{2^{n+1}}$. (Пропонуємо читачеві детальніше обгрунтувати можливість такої побудови функцій g_n і множин Y_n).

Позначимо $X_m = \bigcup\limits_{n=m}^{\infty} Y_n \ \forall m \in \mathbb{N}$, $X = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} X_m$. Множина X є множиною L-міри нуль, бо $X \subset X_m \ \forall m \in \mathbb{N}$, а X_m є зчисленним об'єднанням прямокутників, сумарна міра яких менша за $\sum\limits_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^m}$.

Якщо $x \notin X$, то $\exists m$: $x \notin X_m \Rightarrow x \notin Y_n \ \forall n \geqslant m \Rightarrow | f_n(x) - g_n(x) | < \frac{1}{n}$ $\forall n \geqslant m \Rightarrow g_n(x) - f_n(x) \to 0 \ (n \to \infty)$.

Інакше кажучи, $g_n(x) - f_n(x) \to 0$ майже скрізь на P.

Оскільки $f_n \to f$ у просторі LP, то послідовність (f_n) фундаментальна у просторі LP. Тоді

$$\|g_n - g_m\|_S = \|g_n - g_m\|_L \leqslant \|g_n - f_n\|_L + \| f_n - f_m\|_L +$$

$$+ \| f_m - g_m\|_L < \| f_n - f_m\|_L + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0 \ \ (m, n \to \infty),$$

тобто послідовність (g_n) також фундаментальна у просторі SP.

В силу своєї фундаментальності послідовність (g_n) має функціонального представника, яким є функція $g \in LP$, до якої збігається підпослідовність (g_{k_n}) майже скрізь на P. Більше того, за наслідком 1, $g_n \to g$ у просторі LP.

Помічаємо, що $f_{k_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P. Залишилось показати, що $f \sim g$. Остання умова рівносильна рівності $\| f - g\|_L = 0$, яка правильна в силу того, що

$$\| f - g\|_L \leqslant \| f_n - f\|_L + \| f_n - g_n\|_L + \|g_n - g\|_L \to 0 \ \ (n \to \infty). \ \blacksquare$$

Добавимо тепер до властивостей L-інтеграла ще одну важливу властивість.

Властивість 8 (про повноту простору LP). *Нормований простір LP є повним.*

$\square$ Нехай (f_n) — фундаментальна послідовність простору LP, тобто $\| f_n - f_m\|_L \to 0 \ (m, n \to \infty)$. Користуючись щільністю множини SP східчастих функцій у просторі LP, побудуємо послідовність $g_n \in SP$: $\| f_n - g_n\|_L < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси, як і вище, легко довести, що послідовність (g_n) є фундаментальною у просторі SP. Тому за лемою 3 пункту 7.2.2 вона має функціонального представника — функцію $f \in LP$, до якої деяка підпослідовність g_{k_n} збігається майже скрізь на прямокутнику P. За наслідком 1 з теореми Єгорова $g_n \to f$ у просторі LP. Тепер уже легко показати, що $f_n \to f$ у просторі LP: $\|f_n - f\|_L \leqslant \|f_n - g_n\|_L + \|g_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$. ■

Повнота простору LP, щільність множини SP у ньому та рівність норм $\|f\|_L = \|f\|_S$ $\forall f \in SP$ вказують на те, що простір LP є поповненням простору SP. За відомою теоремою це поповнення єдине з точністю до ізометрії, яка залишає нерухомими точки множини SP. Зокрема, простір LP ізометричний простору SP^*, з якого ми починали побудову теорії L-інтеграла.

До цього часу єдиним способом обчислення L-інтеграла було тільки його означення. А за означенням обчислювати L-інтеграли складно навіть для дуже простих функцій (див. приклад 1 п. 7.2.3). Корисно мати на озброєнні більш зручний, потужніший спосіб, який краще застосовується на практиці. ***Основний спосіб обчислення L-інтегралів*** дає наступна

Теорема 4 (про існування та обчислення L-інтеграла). *Якщо існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі LP (зокрема у RP) і збіжна до функції f майже скрізь на прямокутнику P, то $f \in LP$, $\|f_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$ і* $\int\limits_P f\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx.$

□ Послідовність (f_n) є фундаментальною у повному просторі LP. Отже, зайдеться функція $g \in LP$: $\|f_n - g\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$. Тоді за наслідком 2 деяка підпослідовність $f_{k_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P. Оскільки ж $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P, то $f(x) = g(x)$ майже скрізь на P. Звідси за властивістю 1 про L-інтегровність еквівалентних функцій $f \in LP$ і $\|f_n - f\|_L \to 0 \Rightarrow \left|\int\limits_P f\,dx - \int\limits_P f_n\,dx\right| \leqslant$
$\leqslant \int\limits_P |f_n - f|\,dx = \|f_n - f\|_L \to 0 \Rightarrow \int\limits_P f_n\,dx \to \int\limits_P f\,dx$ $(n \to \infty)$. ■

Приклад 2. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in P = (0;1]$. Побудуємо послідовність неперервних на P функцій

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{коли } \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant n, \ \text{тобто } \frac{1}{n^2} \leqslant x \leqslant 1, \\ n, & \text{коли } \frac{1}{\sqrt{x}} > n, \ \text{тобто } 0 < x < \frac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)\ \forall x \in (0;1]$ і $\forall n \in \mathbb{N}$, причому коли $n \geqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $f_n(x) = f(x)$. Тому $f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in (0;1]$.

Перевіримо фундаментальність послідовності (f_n) у просторі RP. Вважаючи $n > m$, матимемо:

$$\|f_n - f_m\|_R = \int_0^1 |f_n - f_m|\,dx = \int_0^1 f_n\,dx = \int_0^1 f_m\,dx =$$

$$= \int_0^{1/n^2} n\,dx + \int_{1/n^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx - \int_0^{1/m^2} m\,dx - \int_{1/m^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{n} + 2\sqrt{x}\,\Big|_{1/n^2}^1 - \frac{1}{m} - 2\sqrt{x}\,\Big|_{1/m^2}^1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \to 0 \ \ (n > m \to \infty).$$

Отже, фундаментальність має місце, і за теоремою 4 $f \in L(0;1]$, а

$$\int_0^1 f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1/n^2} n\,dx + \int_{1/n^2}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 2\sqrt{x}\,\Big|_{1/n^2}^1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2.$$

7.3.4. Наближення L-інтегровних функцій неперервними. Краще уявити структуру L-інтегровних функцій дозволяє наступна

Теорема 5 (Лузіна, про зв'язок L-інтегровних функцій з неперервними). *Якщо функція f є L-інтегровною на прямокутнику P, то для будь-якого $\delta > 0$ існує множина $E_\delta \subset P$, що є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сума мір яких менша за δ, причому функція f неперервна на множині $P \setminus E_\delta$ відносно цієї множини.*

Можна також розцінювати теорему Лузіна як ***необхідну умову L-інтегровності.***

$\square$ Нехай $f \in LP$ і $\delta > 0$ — довільне фіксоване число. За теоремою Єгорова знайдуться послідовність східчастих функцій (f_n), і зчисленна система прямокутників $\{P_k^{(1)}\}$ такі, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m} P_k^{(1)} < \frac{\delta}{2}$, а $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множині $P \setminus X_\delta$, де $X_\delta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} P_k^{(1)}$.

Неважко зрозуміти, що точками розриву східчастої функції можуть бути лише межові точки її прямокутників сталості. Тому множина точок розриву східчастої функції є множиною L-міри нуль. Позначимо через X множину точок розриву усіх функцій f_n, $n \in \mathbb{N}$.

Множина X буде множиною L-міри нуль як зчисленне об'єднання множин L-міри нуль. Отже, можна вказати не більш ніж зчисленну систему прямокутників $\{P_k^{(2)}\}$ таку, що $X \subset Y_\delta = \bigcup\limits_k P_k^{(2)}$ і $\sum\limits_k \mathrm{m} P_k^{(2)} < \frac{\delta}{2}$.

Позначимо $E_\delta = X_\delta \cup Y_\delta$. На множині $P \setminus X$, а тому і на множині $P \setminus E_\delta$, всі функції f_n, $n \in \mathbb{N}$, неперервні (навіть відносно всього прямокутника P). Разом з цим послідовність $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множині $P \setminus E_\delta$. За відомою теоремою про неперервність граничної функції f є неперервною на множині $P \setminus E_\delta$ відносно цієї множини. Множина E_δ є об'єднанням зчисленної кількості прямокутників, сумарна міра яких менша за δ. ■

Природно виникає питання: *чи можна як завгодно добре наблизити у просторі LP довільну функцію f неперервною функцією?*

Розв'язати це питання достатньо лише для східчастих функцій f. Але і в цьому випадку треба вміти будувати наближаючу неперервну функцію для функції f.

Припустимо, що $X = (X, \rho)$ — довільний метричний простір, у якому вибрана довільна непорожня множина E. Як відомо (див. пп. 1.3.3, 2.3.6), *відстанню від точки $x \in X$ до множини E* називають число $\rho(x, E) := \inf\limits_{y \in E} \rho(x, y)$. Для нас зараз важливо, що функція $r(x) = \rho(x, E)$, $x \in X$, неперервна на всьому просторі X, яка б не була множина $E \subset X$ (теорема 7 п. 2.3.6).

Центральним твердженням у даному пункті є наступна

Лема 1 (про наближення у просторі RP східчастих функцій неперервними). *Для довільної функції f, східчастої на прямокутнику P, і довільного $\varepsilon > 0$ існує неперервна на прямокутнику P функція φ така, що*

$$\|f - \varphi\|_R = (R)\int\limits_P |f - \varphi|\, dx < \varepsilon.$$

Для простору $\mathbb{R}^1$ ця властивість майже очевидна (рис. 51). У загальному випадку її доведення дещо складніше.

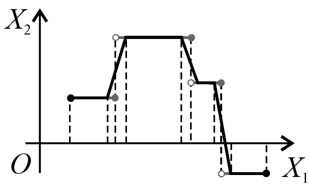

Рис. 51

□ Нехай число $\varepsilon > 0$ зафіксоване, а східчаста функція f набуває значень c_k на прямокутниках сталості P_k, $k \in \overline{1, n}$, причому

$f \not\equiv const$, а $\operatorname{mes} P > 0$. Тоді $H = \max\limits_{x \in P} |f(x)| > 0$ та $\exists k \in \overline{1,n}$: $\operatorname{mes} P_k > 0$. Позначимо $\{k_i\colon i \in \overline{1,\nu}\} = \{k \in \overline{1,n}\colon \operatorname{mes} P_k > 0\}$.

Всередині кожного прямокутника P_{k_i} виберемо замкнений прямокутник $Q_i \subset P^{\circ}_{k_i}$ так, щоб $\operatorname{mes} Q_i > \operatorname{mes} P_{k_i} - \frac{\varepsilon}{2nH}$, $i \in \overline{1,\nu}$. Для зручності позначимо $a_i = c_{k_i}$, $i \in \overline{1,\nu}$.

Розглянемо випадок $\nu > 1$. Утворимо множини $F_k = \bigcup\limits_{i=1}^{\nu} Q_i \setminus Q_k$ $\forall k \in \overline{1,\nu}$, які будуть непорожніми і замкненими.

Позначимо $r_k(x) = \rho(x, F_k) \geqslant 0$, $k \in \overline{1,\nu}$, розуміючи під ρ евклідову відстань у просторі $\mathbb{R}^p$. Визначимо функцію $\varphi\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ так:

$$\varphi(x) = \frac{r_1(x)a_1 + r_2(x)a_2 + \ldots + r_\nu(x)a_\nu}{r_1(x) + r_2(x) + \ldots + r_\nu(x)}.$$

За теоремою 2 пункту 1.3.3 $r_k(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F_k$, а за теоремою 7 пункту 2.3.6 всі функції r_k неперервні на просторі $\mathbb{R}^p$. Тому функція φ неперервна в усьому просторі $\mathbb{R}^p$ і збігається з функцією f на прямокутниках Q_i, $i \in \overline{1,\nu}$. Крім того, її значення знаходяться в межах від $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant \nu} a_i$ до $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant \nu} a_i$, а тому $|\varphi(x)| \leqslant H$ $\forall x \in \mathbb{R}^p \Rightarrow$ $|f(x) - \varphi(x)| \leqslant 2H$ $\forall x \in P$.

Позначаючи $F = \bigcup\limits_{i=1}^{\nu} Q_i$, дістанемо:

$$\operatorname{mes} F = \sum_{i=1}^{\nu} \operatorname{mes} Q_i > \sum_{i=1}^{\nu} \operatorname{mes} P_{k_i} - \frac{\varepsilon\nu}{2nH} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{mes} P_k - \frac{\varepsilon\nu}{2nH} = \operatorname{mes} P - \frac{\varepsilon\nu}{2nH} \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{mes} P - \frac{\varepsilon}{2H} \;\Rightarrow\; \operatorname{mes} P \setminus F < \frac{\varepsilon}{2H}.$$

Враховуючи це, оцінимо інтеграл

$$\int\limits_P |f - \varphi|\, dx = \int\limits_F |f - \varphi|\, dx + \int\limits_{P \setminus F} |f - \varphi|\, dx =$$

$$= \int\limits_{P \setminus F} |f - \varphi|\, dx \leqslant 2H \operatorname{mes} P \setminus F < \varepsilon.$$

Отже, φ — шукана наближаюча неперервна функція для f у випадку $\nu > 1$. У випадку $\nu = 1$ такою функцією буде $\varphi(x) \equiv a_1$. ■

Маючи лему 1 і знаючи про щільність східчастих функцій у просторі LP, можемо констатувати, що має місце

Властивість 9 (про наближення L-інтегровних функцій неперервними). $\forall f \in LP$ *і* $\forall \varepsilon > 0$ *існує неперервна на прямокутнику* P *функція* φ *така, що* $\|f - \varphi\|_L = (L)\int\limits_P |f - \varphi|\, dx < \varepsilon$.

Інакше кажучи, множина CP *неперервних на прямокутнику* P *функцій всюди щільна у просторі* LP.

7.3.5. L-інтегровність зрізок. Нехай на прямокутнику P задано довільну функцію f, а $m \in \mathbb{R}$ — довільне фіксоване число. Тоді *зрізкою функції* f називають функцію

$$f^{[m]}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{коли } f(x) \geqslant m, \\ m, & \text{коли } f(x) < m. \end{cases}$$

Зокрема, функції

$$f^{+}(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0, \\ 0, & f(x) < 0, \end{cases} \quad \text{та} \quad f^{-}(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & f(x) < 0, \end{cases}$$

є зрізками: $f^{+} = f^{[0]}$, а $f^{-} = (-f)^{[0]}$.

Неважко перевірити (зробіть це), що

$$f^{[m]}(x) = \frac{|f(x) - m| + f(x) + m}{2} \quad \forall x \in P.$$

Звідси легко випливають дві властивості зрізок:

з1) якщо $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ у точці $x \in P$, то $f_n^{[m]}(x) \to f^{[m]}(x)$ $(n \to \infty)$ у цій точці;

з2) для довільних функцій f, g, визначених на прямокутнику P, $|f^{[m]}(x) - g^{[m]}(x)| \leqslant |f(x) - g(x)|$ $\forall x \in P$.

Виведемо з цих властивостей деякі наслідки, що стосуватимуться L-інтегровних функцій.

☐ I. Насамперед вирішимо питання про L-інтегровність зрізки функції $f \in LP$.

Припустимо, що $f \in LP$, а отже, існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі SP і збіжна до f майже скрізь на P.

Зафіксуємо довільне число $m \in \mathbb{R}$ і розглянемо зрізки $f^{[m]}$ та $f_n^{[m]}$, $n \in \mathbb{N}$. Помічаємо, що функції $f_n^{[m]}$, $n \in \mathbb{N}$, східчасті, причому за властивістю з1), $f_n^{[m]}(x) \to f^{[m]}(x)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на P.

Враховуючи властивість з2) і фундаментальність послідовності (f_n) у просторі SP, дістанемо: $\|f_i^{[m]} - f_j^{[m]}\| = \int\limits_P |f_i^{[m]} - f_j^{[m]}|\, dx \leqslant$

$\leqslant \int\limits_P |f_i - f_j|\,dx = \|f_i - f_j\| \to 0$ при $i, j \to \infty$.

Отже, послідовність $(f_n^{[m]})$ фундаментальна у просторі SP, а функція $f^{[m]}$ є L-інтегровною на P.

II. З'ясуємо, чи можна послідовність (f_n) в означенні L-інтегровної функції f вважати обмеженою, якщо такою є функція f.

Припустимо, що $f \in LP$ і $h \leqslant f(x) \leqslant H$ $\forall x \in P$. Утворимо зрізки послідовностей: спочатку $u_n = (-f_n)^{[-H]}$, а потім $v_n = (-u_n)^{[h]}$, $n \in \mathbb{N}$. Як показано вище, послідовності (u_n) і (v_n) є фундаментальними у просторі SP.

За властивістю з1) та означенням зрізок, $u_n(x) \to (-f)^{[-H]}(x) = -f(x) \Rightarrow v_n(x) \to f^{[h]}(x) = f(x)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на P.

При цьому $u_n(x) \geqslant -H$, $h \leqslant v_n(x) \leqslant -u_n(x) \leqslant H$ $\forall n$ і $\forall x \in P$. ■

Таким чином, правильна

Властивість 10 (про L-інтегровність зрізок та уточнення означення L-інтегровності обмеженої функції). I. *Якщо $f \in LP$, то $f^{[m]} \in LP$ $\forall m \in \mathbb{R}$, зокрема, $f^+ \in LP$ і $f^- \in LP$.*

II. *Якщо $f \in LP$ і $h \leqslant f(x) \leqslant H$ $\forall x \in P$, то існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі SP, збіжна до f майже скрізь на P і така, що $h \leqslant f_n(x) \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$.*

Тісно пов'язані із зрізками так звані *максимальна* і *мінімальна* функції з функцій $f_k(x)$, $k \in \overline{1,n}$, заданих на прямокутнику P. А саме:

$$M(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(x),\ \ m(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant n} f_k(x),\ \ x \in P.$$

□ Неважко перевірити, що у випадку $n = 2$ $\forall x \in P$

$$M(x) = \frac{1}{2}\Big(f_1(x) + \big(f_1(x) - f_2(x)\big)^+ + \big(f_1(x) - f_2(x)\big)^- + f_2(x)\Big),$$

а

$$m(x) = \frac{1}{2}\Big(f_1(x) - \big(f_1(x) - f_2(x)\big)^+ - \big(f_1(x) - f_2(x)\big)^- + f_2(x)\Big).$$

Звідси за властивістю 10 випливає, що максимальна та мінімальна функції **з двох** L-інтегровних функцій є L-інтегровними.

Припустимо, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ максимальна $M_1(x)$ та мінімальна $m_1(x)$ функції з $(n-1)$ L-інтегровних функцій є L-інтегровними. Розглянемо довільний набір з n L-інтегровних функцій f_k, $k \in \overline{1,n}$. За припущенням, функції $M_1(x) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} f_k(x)$

та $m_1(x) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1} f_k(x)$ є L-інтегровними на P. Тому, за розглянутим вище випадком двох функцій, L-інтегровними будуть і функції $M(x) = \max\{M_1(x), f_n(x)\}$ та $m(x) = \min\{m_1(x), f_n(x)\}$, $x \in P$. ■

Отже, за принципом математичної індукції правильна

Властивість 11 (про L-інтегровність максимальної і мінімальної функцій). *Нехай* $f_k \in LP$ $\forall k \in \overline{1,n}$, $M(x) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$ *і* $m(x) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)$, $x \in P$. *Тоді* $m \in LP$ *і* $M \in LP$.

Як відомо (властивість 4 пункту 5.1.5), добуток двох R-інтегровних функцій є R-інтегровною функцією. *Чи так це для* L*-інтегровних функцій?*

Приклад 3. За прикладом 2 функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ є L-інтегровною на півінтервалі $P = (0;1]$. Якщо припустити, що $g \in (0;1]$, то за адитивною властивістю $g \in L[1/n;1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, причому $\int\limits_P g\,dx \geqslant \int\limits_{1/n}^{1} g\,dx = \int\limits_{1/n}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_{1/n}^{1} = \ln n \to +\infty$, коли $n \to \infty$. Отримано суперечність, а отже, функція g не інтегровна на півінтервалі $(0;1]$.

Таким чином, відповідь на питання про L-інтегровність добутку двох L-інтегровних функцій негативна.

Важливою відмінністю між інтегралами Рімана і Лебега зокрема є обов'язкова обмеженість R-інтегровних функцій.

Тому природно чекати, що добуток двох обмежених L-інтегровних функцій також буде L-інтегровною функцією.

□ Припустимо, що $f, g \in LP$ і $|f(x)| \leqslant H$ та $|g(x)| \leqslant H$ $\forall x \in P$. Користуючись властивістю 10, виберемо фундаментальні у просторі SP послідовності (f_n) і (g_n) так, щоб $f_n(x) \to f(x)$, $g_n(x) \to g(x)$ майже скрізь на P, причому $|f_n(x)| \leqslant H$ і $|g_n(x)| \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$.

Збіжність $f_n(x)g_n(x) \to f(x)g(x)$ майже скрізь на P очевидна. Залишається перевірити фундаментальність послідовності (f_ng_n) у просторі SP. Для цього розглянемо

$$\|f_ng_n - f_mg_m\| \leqslant \|f_ng_n - f_ng_m\| + \|f_ng_m - f_mg_m\| =$$
$$= \int\limits_P |f_ng_n - f_ng_m|\,dx + \int\limits_P |f_ng_m - f_mg_m|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant H\int\limits_P |g_n - g_m|\,dx + H\int\limits_P |f_n - f_m|\,dx \to 0 \ (m,n \to \infty).$$

Отже, добуток $(f_n g_n)$ фундаментальний у просторі SP, а тому $fg \in LP$.

Набагато легше розв'язується питання про L-інтегровність добутку fg, у якому функція f довільна L-інтегровна, а g — східчаста. Пропонуємо читачеві розглянути цей випадок самостійно. ■

Таким чином, доведена

Властивість 12 (про L-інтегровність добутку). *Нехай* $f, g \in LP$ *і* $g \in SP$ *або* $\Big(|f(x)| \leqslant H$ *і* $|g(x)| \leqslant H \ \forall x \in P\Big)$. *Тоді* $fg \in LP$.

7.3.6. Контрольні запитання і завдання.

І. Визначити, чи правильні дані твердження.

1. Функція f є L-інтегровною на P, якщо вона є границею майже скрізь на P послідовності східчастих функцій.
2. Твердження, обернене до твердження 1, є правильним.
3. Якщо послідовність (f_n) фундаментальна у посторі SP, то $\exists H > 0$: $|f_n| \leqslant H \ \forall x \in P$.
4. Якщо f є R-інтегровною функцією, то вона є і L-інтегровною.
5. Твердження, обернене до твердження 4, є правильним.
6. Якщо $\int\limits_P f\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на P.
7. Якщо $\int\limits_P f\,dx = \mathrm{m}P$, то $f(x) = 1$ на P.
8. Якщо $\int\limits_P f\,dx = \int\limits_P g\,dx$, то $f(x) = g(x)$ майже скрізь на P.
9. Якщо $f(x) < g(x)$ на P, то $\int\limits_P f\,dx < \int\limits_P g\,dx$.
10. Будь-яка функція $f \in LP$ обмежена на прямокутнику P.
11. Якщо $f \in L[a;c] \ \forall c \in (a;b)$, то $f \in L[a;b]$.
12. Правильним є твердження, обернене до попереднього.
13. У просторі LP норма визначається за рівністю $\|f\| = \left|\int\limits_P f\,dx\right|$.
14. Простір LP є метричним.
15. Множини SP, RP і CP відповідно східчастих, R-інтегровних і неперервних на прямокутнику P функцій всюди щільні у просторі LP.
16. Простір LP є поповненням неповного нормованого простору RP функцій, R-інтегровних на прямокутнику P, з інтегральною нормою
$$\|f\|_R := (R)\int\limits_P |f|\,dx.$$

17. Якщо $f \in LP$, то її можна вважати неперервною на прямокутнику P, якщо нехтувати множиною як завгодно малої міри.
18. Всяка неперервна на прямокутнику P функція L-інтегровна на ньому.
19. Якщо $f \in LP$, то існує послідовність (f_n) неперервних на прямокутнику P функцій, яка рівномірно збігається до f на P.
20. Твердження, обернене до попереднього, є правильним.
21. $\forall f \in LP$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in CP$: $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in P$.
22. Якщо $f^+ \in LP$ та $f^- \in LP$, то і $f \in LP$.
23. Функція $f(x) = \begin{cases} x^\alpha, & \text{коли } x \in \mathbb{Q}, \\ x^\beta, & \text{коли } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ де $\alpha > -1$, $\beta > -1$, є L-інтегровною на $(0;1]$.
24. Функція $f(x) = \frac{1}{x^2}$ є L-інтегровною на $(0;1]$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо $f(x)$ диференційовна на $[a;b]$ і $f'(x)$ обмежена на $[a;b]$, то $f' \in L[a;b]$ і $f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)\,dt$.
2. Якщо $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$ і $f_n \in L[a;b]$, то $f \in L[a;b]$ і
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\,dx = \int\limits_a^b f\,dx.$$
3. Якщо $f(x) \geqslant 0$ на $[a;b]$, $f \in CR[c;b]$ $\forall c \in (a;b)$ та існує невласний інтеграл $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx = I$, то $f \in L[a;b]$ і $(L)\int\limits_a^b f\,dx = I$.
4. Рівність $f^{[m]}(x) = \frac{|f(x)-m| + f(x) + m}{2}$, де $f^{[m]}$ — зрізка функції f, і властивості з1), з2) зрізок, відмічені в п.7.3.5, правильні на довільній множині $E \subset \mathbb{R}^p$.

7.4. Граничний перехід під знаком L-інтеграла

У даному підрозділі доведено важливі теореми Беппо Леві та Лебега про граничний перехід під знаком L-інтеграла і за їхньою допомогою здійснено подальше вивчення L-інтегровних функцій.

7.4.1. Теорема Беппо Леві. Нехай послідовність функцій $f_n \in LP$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до функції f майже скрізь на прямокутнику P. Спробуємо з'ясувати, коли функція $f \in LP$ і правильна рівність
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx = \int\limits_P f\,dx. \tag{1}$$

Наприклад, якщо послідовність (f_n) фундаментальна у просторі LP, то вказаний граничний перехід можна здійснити за теоремою 4 п. 7.3.3. Проте, перевірити фундаментальність на практиці складно. Набагато простішими є такі умови як монотонність або обмеженість послідовності.

□ Розглянемо послідовність (f_n) L-інтегровних на прямокутнику P функцій і припустимо, що $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ $\forall x \in P$ і $\forall n \in \mathbb{N}$, причому $\int\limits_P |f_n|\,dx \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f_n(x) \geqslant 0$ на P, бо інакше можна перейти до функцій $f_n^* = f_n - f_1$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді числова послідовність (α_n), де $\alpha_n = \int\limits_P f_n\,dx$, невід'ємна, неспадна і обмежена. Тому існує $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx = A$ $(0 \leqslant A < +\infty)$.

Звідси випливає, що $\forall n \geqslant m$

$$\|f_n - f_m\|_L = \int\limits_P |f_n - f_m|\,dx = \int\limits_P f_n\,dx - \int\limits_P f_m\,dx \to 0 \;\; (n \geqslant m \to \infty),$$

тобто послідовність (f_n) фундаментальна у просторі LP. Оскільки цей простір повний, то $\exists g \in LP$: $\|f_n - g\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$. Звідси за наслідком 2 пункту 7.3.3 існує підпослідовність $f_{k_n}(x) \to g(x)$ майже скрізь на P. Але для будь-якого $x \in P$, в силу монотонності послідовності $(f_n(x))$ існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тоді $f(x) = g(x)$ майже скрізь на P. Отже, функція f майже скрізь скінченна (там, де $f(x) = +\infty$, можна перевизначити її значення на довільні скінченні), $f \in LP$ і

$$\left| \int\limits_P f\,dx - \int\limits_P f_n\,dx \right| = \int\limits_P |f_n - f|\,dx = \|f_n - g\|_L \to 0 \;\; (n \to \infty).$$

Звідси дістаємо рівність (1). ■

Проведені міркування доводять наступне твердження.

Теорема 1 (Беппо Леві, про граничний перехід під знаком L-інтеграла). *Нехай* $f_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in P$ *і* $\int\limits_P |f_n|\,dx \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді майже скрізь на P існує скінченна границя* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$, *функція* $f \in LP$, $\|f_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$ *і правильна рівність* (1).

Зауваження. Замість умови $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$ у теоремі 1 можна взяти умову $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$ і навіть вимагати, щоб вона виконувалася лише майже скрізь на P.

7.4.2. Теорема Лебега. З умов теореми Беппо Леві випливає, що майже скрізь на P $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ і $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ $\forall n \in$ $\in \mathbb{N}$, причому $f \in LP$. Тому природно *виникає гіпотеза, що рівність* (1) *має місце, коли послідовність* (f_n) *функцій* $f_n \in LP$ *збігається майже скрізь на P до функції* $f(x)$, *причому* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *і* $\forall x \in P$, *а функція* $g \in LP$ *(зокрема, можливо, що* $g(x) \equiv H$*).*

□ Утворимо послідовності $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$ і $\psi_n(x) = \sup\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$, які задовольнятимуть нерівності

$$g(x) \geqslant \psi_n(x) \geqslant f_n(x) \geqslant \varphi_n(x) \geqslant -g(x) \ \ \forall x \in P \ \text{ і } \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Утворимо також функції

$$\varphi_n^{(m)}(x) = \min_{0 \leqslant k \leqslant m} f_{n+k}(x) \ \text{ і } \ \psi_n^{(m)}(x) = \max_{0 \leqslant k \leqslant m} f_{n+k}(x) \ \ \forall n, m \in \mathbb{N},$$

які задовольнятимуть такі нерівності:

$$\varphi_n^{(1)}(x) \geqslant \varphi_n^{(2)}(x) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n^{(m)}(x) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n(x),$$

і тому $\lim\limits_{m \to \infty} \varphi_n^{(m)}(x) \geqslant \varphi_n(x)$ $\forall x \in P$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

З іншого боку, $\forall x \in P$, $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon, x, n) \geqslant n$:

$$\varphi_n(x) \geqslant f_{n_0}(x) - \varepsilon \geqslant \varphi_n^{(m)}(x) - \varepsilon \ \ \forall m \geqslant n_0 \Rightarrow$$

$$\lim_{m \to \infty} \varphi_n^{(m)}(x) \leqslant \varphi_n(x) + \varepsilon \Rightarrow \lim_{m \to \infty} \varphi_n^{(m)}(x) = \varphi_n(x).$$

За властивістю 11 п. 7.3.5 кожна функція $\varphi_n^{(m)} \in LP$. Тому за теоремою Беппо Леві $\varphi_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Звідси, враховуючи нерівності

$$-g(x) \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \ldots \leqslant g(x) \ \ \forall x \in P$$

та умову, що $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ майже скрізь на P, знову за теоремою Беппо Леві дістаємо, що $f \in LP$ і $\|\varphi_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$. Аналогічно доводимо, що $\|\psi_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$ і тому $\|\psi_n - \varphi_n\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$.

Враховуючи нерівності $\varphi_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant \psi_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$, за властивістю монотонності L-інтеграла дістаємо, що $\|f_n - f\|_L \leqslant$ $\leqslant \|f_n - \varphi_n\|_L + \|\varphi_n - f\|_L \leqslant \|\psi_n - \varphi_n\|_L + \|\varphi_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$, а це навіть сильніша умова, ніж рівність (1). ■

Отже, доведена

Теорема 2 (Лебега, про граничний перехід під знаком L-інтеграла). *Нехай* $f_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *і* $g \in LP$, *причому* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\forall x \in P$ *і* $f_n(x) \to f(x)$ *майже скрізь на* P. *Тоді* $f \in LP$, $\|f_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$ *і правильна рівність* (1).

Зауваження. Нерівність $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ можна вимагати майже скрізь на P.

7.4.3. Інтегрування функціонального ряду.

☐ Розглянемо ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, члени якого є L-інтегровними на прямокутнику P функціями, причому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_P |f_k|\,dx < +\infty$.

За такої умови функції $G_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |f_k|$, $n \in \mathbb{N}$, L-інтегровні, причому послідовність $(G_n(x))$ неспадна на прямокутнику P і

$$\int\limits_P G_n\,dx = \int\limits_P \Big(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\Big)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_P |f_k|\,dx \leqslant H \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Згідно з теоремою Беппо Леві рівність

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = \lim_{n\to\infty} G_n(x),\ x \in P,$$

визначає функцію $G \in LP$. Звідси випливає, що

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \to F(x)\ (n \to \infty)$$

майже скрізь на P і $|F_n(x)| \leqslant G(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ майже скрізь на P. Тому за теоремою Лебега $F \in LP$ і

$$\int\limits_P F\,dx = \int\limits_P \Big(\lim_{n\to\infty} F_n\Big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_P f_k\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_P f_k\,dx,$$

тобто $\int\limits_P \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k\Big)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_P f_k\,dx$.

Навпаки, якщо $G \in LP$, де $G(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ майже скрізь на P, то

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\int\limits_P |f_k|\,dx\Big) = \int\limits_P \Big(\sum_{k=1}^{n} |f_k|\Big)\,dx \leqslant \int\limits_P G\,dx = H < +\infty \ \ \forall n \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int\limits_P |f_k|\,dx\Big) < +\infty. \ \blacksquare$$

Таким чином, має місце

Теорема 3 (про почленне інтегрування функціонального ряду). *Нехай* $f_k \in LP$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Для того щоб ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ *збігався майже скрізь на* P *до функції* $G \in LP$, *необхідно й досить, щоб* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\int\limits_P |f_k|\, dx \Big) < +\infty$. *При цьому* $F \in LP$, *де* $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *майже скрізь на* P, *і* $\int\limits_P \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \Big) dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_P f_k\, dx$.

7.4.4. L-інтегровність граничних функцій. Наслідками з теорем 1 і 2 є ще дві теореми, в яких не йде мова про рівність (1), а лише про L-інтегровність граничної функції.

☐ Спробуємо дещо послабити умови теореми Беппо Леві. Замість умови монотонності послідовності (f_n) вимагатимемо, щоб $0 \leqslant f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на P.

При доведенні теореми 2 (Лебега) було відмічено, що послідовність $\varphi_n(x) = \inf\limits_{k \geqslant n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до функції $f(x)$ майже скрізь на P і $\varphi_{n+1}(x) \geqslant \varphi_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$, причому $\varphi_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тому за теоремою Беппо Леві $f \in LP$ і $\int\limits_P f\, dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P \varphi_n\, dx$.

Оскільки $\varphi_n(x) \leqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$, то

$$\int\limits_P \varphi_n\, dx \leqslant \int\limits_P f_n\, dx \leqslant H \ \ \forall n \in \mathbb{N},$$

а тому і $\int\limits_P f\, dx \leqslant H$. ■

Отже, доведена

Теорема 4 (Фату, про L-інтегровність граничної функції). *Нехай* $f_n(x) \geqslant 0$ *на* P, $f_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *і* $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ *майже скрізь на* P, *а* $\int\limits_P f_n\, dx \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Тоді* $f \in LP$ *і* $\int\limits_P f\, dx \leqslant H$.

☐ Послабимо тепер умови теореми Лебега. Замість умови $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ $\forall n$ вимагатимемо, щоб $|f(x)| \leqslant g(x)$ на P.

За властивістю 11 пункту 7.3.5 маємо, що коли

$$\varphi_n(x) = \max\{f_n(x), -g(x)\} \ \text{ та } \ \psi_n(x) = \min\{\varphi_n(x), g(x)\},$$

то φ_n і $\psi_n \in LP$, причому $\psi_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P і $|\psi_n(x)| \leqslant$ $\leqslant g(x)$ $\forall x \in P$ і $\forall n \in \mathbb{N}$. Тому за теоремою Лебега $f \in LP$. ■

Отже, правильна

Теорема 5 (про L-інтегровність граничної функції). *Нехай функції $f_n \in LP$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на P, причому $|f(x)| \leqslant g(x)$ $\forall x \in P$, де $g \in LP$. Тоді $f \in LP$.*

Зауваження. У теоремах 4 та 5 не стверджується, що має місце рівність (1), бо це, взагалі кажучи, не виконується.

Приклад 1. Нехай

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x < \frac{1}{n} \ \text{або} \ x > \frac{2}{n}, \\ n, & \text{коли} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}, \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тоді $f_n(x) \to 0$ майже скрізь на $[0;1]$, але $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ $\forall n$ і тому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\,dx = 0.$$

За допомогою теорем про граничний перехід під знаком L-інтеграла можна дістати нові властивості L-інтеграла. Сформулюємо їх у вигляді наслідків.

Наслідок 1 (критерій L-інтегровності). *Для того щоб функція $f \in LP$, необхідно й досить, щоб $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ і $\psi \in LP$: $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \psi(x)$ $\forall x \in P$ і $= \int\limits_P \big(\psi - \varphi\big)\,dx < \varepsilon$.*

□ Необхідність очевидна, оскільки можна взяти $\varphi = \psi = f$.

Припустимо, що $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \varphi$ і $\psi \in LP$: $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ $\forall x \in P$ і

$$\int\limits_P \big(\psi - \varphi\big)\,dx < \varepsilon.$$

Тоді, вважаючи $\varepsilon = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, знайдемо функції φ_n і ψ_n, для яких $\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x)$ $\forall x \in P$ і $\int\limits_P \big(\psi_n - \varphi_n\big)\,dx < 2^{-n} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_P \big(\psi_n - \varphi_n\big)\,dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < +\infty.$$

Тому за теоремою про почленне інтегрування функціонального ряду $\psi_n(x) - \varphi_n(x) \to 0$ майже скрізь на P. Враховуючи нерівність $\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_n(x)$, дістаємо $\varphi_n(x) \to f(x)$ і $\psi_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. За теоремою 5 $f \in LP$. ■

Наслідок 2 (про L-інтегровність добутку). *Нехай f і $g \in LP$, а $|g(x)| \leqslant H$ $\forall x \in P$. Тоді $fg \in LP$ і $\left|\int\limits_P fg\,dx\right| \leqslant H \int\limits_P |f|\,dx$.*

□ Візьмемо послідовність (g_n), фундаментальну у просторі SP та збіжну майже скрізь на P до функції g. За властивістю 10 пункту 7.3.5 послідовність (g_n) можна вибрати так, щоб $|g_n(x)| \leqslant H \; \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$.

Тоді $|g_n(x) f(x)| \leqslant H|f(x)| \; \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in P$, $g_n f \in LP \; \forall n \in \mathbb{N}$ (за властивістю 12 пункту 7.3.5) і $g_n(x) f(x) \to g(x) f(x)$ майже скрізь на P. Отже, виконано умови теореми Лебега, за якою $fg \in LP$. Оскільки $|f(x)g(x)| \leqslant H|f(x)| \; \forall x \in P$, то за властивістю монотонності L-інтеграла дістаємо потрібну нерівність. ■

7.4.5. Обчислення кратних L-інтегралів за допомогою повторних. В пункті 5.1.6 доведено теорему Фубіні про зв'язок кратного R-інтеграла з повторним. Знайдемо аналог цієї теореми для L-інтегралів. Перш за все, введемо поняття перерізу множини.

Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$, а $x_1 \in \mathbb{R}$ — фіксоване число. Тоді *перерізом множини E прямою* $x = x_1$ називають множину $E_{x_1} = \{y \in \mathbb{R}\colon (x_1, y) \in E\}$ (рис. 52). Аналогічно визначається переріз E_{y_1} множини E прямою $y = y_1$.

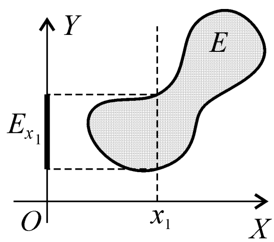

Рис. 52

Припустимо, що $E \subset P = [a;b] \times [c;d]$, $\mathrm{m}E = 0$ у просторі $\mathbb{R}^2$, і з'ясуємо, для яких $x_1 \in [a;b]$ переріз E_{x_1} цієї множини також має нульову L-міру, але в просторі $\mathbb{R}^1$.

□ За теоремою 1 пункту 7.1.1 існує зчисленна кількість елементарних прямокутників $P_k = [a_k; b_k] \times [c_k; d_k]$, $k \in \mathbb{N}$, таких, що $\mathrm{m}P_k > 0 \; \forall k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}P_k < +\infty$ і кожна точка $(x,y) \in E$ належить до зчисленної кількості прямокутників P_k.

Нехай $e_k(x,y)$ — характеристична функція прямокутника P_k. Тоді, вважаючи, що $P_k \subset P \; \forall k$, маємо:

$$\mathrm{m}P_k = (R)\iint\limits_{P_k} e_k(x,y)\,dxdy = (b_k - a_k)(d_k - c_k) =$$

$$= \int\limits_{a_k}^{b_k}\left(\int\limits_{c_k}^{d_k} e_k(x,y)\,dy\right)dx = \int\limits_{[a;b]}\left(\int\limits_{[c;d]} e_k(x,y)\,dy\right)dx \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{m} P_k = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[a;b]} \left(\int\limits_{[c;d]} e_k(x,y)\, dy \right) dx < +\infty.$$

Звідси за теоремою 3 дістаємо, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[c;d]} e_k(x,y)\, dy$ є збіжним майже скрізь на $[a;b]$.

Зафіксуємо x, для якого $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[c;d]} e_k(x,y)\, dy < +\infty$. Зрозуміло, що коли в прямокутнику P_k нема точок з абсцисою x, тобто $(x,y) \neq P_k$ $\forall y \in [c;d]$, то $e_k(x,y) = 0$ $\forall y \in [c;d]$, а тому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[c;d]} e_k(x,y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{[c;d]} e_{k_i}(x,y)\, dy < +\infty,$$

де $\{P_{k_i}\}$ — множина усіх прямокутників P_k, що мають точки з абсцисою x.

Якщо $E_x = \varnothing$, то E_x — множина L-міри нуль. Якщо $E_x \neq \varnothing$, то $\exists (x,y) \in E \Rightarrow (x,y)$ належить до нескінченної множини прямокутників $\{P_{k_i}\}$, причому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{[c;d]} e_{k_i}(x,y)\, dy = \sum_{i=1}^{\infty} (d_{k_i} - c_{k_i}) < +\infty, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} [c_{k_i}; d_{k_i}] \supset E_x$$

і кожна точка E_x належить до зчисленної кількості проміжків $[c_{k_i}; d_{k_i}]$. Це означає, що множина E_x є множиною L-міри нуль у просторі $\mathbb{R}^1$.

Міркування для простору $\mathbb{R}^p$, $p > 2$, аналогічні. ■

Таким чином, правильна

Лема 1 (про переріз множини L-міри нуль). *Нехай E — множина L-міри нуль у просторі $\mathbb{R}^p$, $E \subset [a_1;b_1] \times [a_2;b_2] \times \ldots \times [a_p;b_p]$, а для фіксованого $x_1 \in [a_1;b_1]$ позначимо*

$$E_{x_1} = \{(x_2,\ldots,x_p)\colon\ (x_1,x_2,\ldots,x_p) \in E\}.$$

Тоді майже для всіх $x_1 \in [a_1;b_1]$ множина E_{x_1} (переріз множини E) є множиною L-міри нуль у просторі $\mathbb{R}^{p-1}$.

Перейдемо до питання про обчислення кратних L-інтегралів за допомогою повторних. При цьому спочатку розглянемо функції двох змінних.

Зауважимо, що для східчастих функцій, як і для неперервних, у теоремі Фубіні пункту 5.1.6 не потрібно вимагати існування внутрішнього інтеграла (на відміну від довільних R-інтегровних функцій), бо він завжди існує. Виявляється, що і для довільних L-інтегровних функцій теорема Фубіні правильна у формі, коли існування внутрішнього інтеграла є не вимогою, а висновком.

Теорема 6 (Фубіні, про зв'язок подвійного L-інтеграла з повторним). *Нехай функція f є L-інтегровною на прямокутнику $P = [a;b] \times [c;d]$. Тоді майже скрізь на $[a;b]$ існує*

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy,$$

причому $\varphi \in L[a;b]$ і має місце рівність:

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

□ Проведемо доведення теореми 6 у чотири етапи.

I. Для східчастих функцій теорема 6 є наслідком з теореми 5 пункту 5.1.6, причому $\varphi(x)$ існує $\forall x \in [a;b]$ і $\varphi \in R[a;b]$.

II. Припустимо, що $f \in LP$ і $0 \leqslant f(x,y) \leqslant H$ $\forall (x,y) \in P$. Тоді за властивістю 10 пункту 7.3.5 існує послідовність (f_n), фундаментальна у просторі SP, збіжна до $f(x,y)$ майже скрізь на P і така, що $0 \leqslant f_n(x,y) \leqslant H$ $\forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall (x,y) \in P$. Позначимо $\varphi_n(x) = \int_c^d f_n(x,y)\,dy$.

При фіксованому $x \in [a;b]$ функції $f_n(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$, є східчастими функціями від змінної y на відрізку $[a;b]$. За лемою 1, майже для кожного $x \in [a;b]$ $f_n(x,y) \to f(x,y)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на $[c;d]$. Тому майже для кожного $x \in [a;b]$ за теоремою Лебега $f(x,y) \in L[c;d]$ і

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_c^d f_n(x,y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy = \varphi(x). \tag{3}$$

Оскільки теорема 6 правильна для східчастих функцій, то функції $\varphi_n \in R[a;b] \subset L[a;b]$, $n \in \mathbb{N}$. Тому, в силу рівномірної обмеженості послідовності $(\varphi_n(x))$ на відрізку $[a;b]$ та рівності (3), за теоремою Лебега $\varphi \in L[a;b]$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{4}$$

Звідси, враховуючи теорему Фубіні для східчастих функцій та рівність (4), дістаємо рівність (2):

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\int\limits_P f_n(x,y)\,dxdy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f_n(x,y)\,dy = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x,y)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

III. Припустимо, що $f \in LP$ і $f(x,y) \geqslant 0\ \forall (x,y) \in P$. Побудуємо послідовність (f_n), що визначається рівностями: $f_n(x,y) = f(x,y)$, коли $f(x,y) \leqslant n$, і $f_n(x,y) = n$, коли $f(x,y) > n$, $n \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in P$. Всі функції f_n, $n \in \mathbb{N}$, L-інтегровні, невід'ємні та обмежені на прямокутнику P. Крім того, $f_n(x,y) \to f(x,y)$ $(n \to \infty)$ і послідовність $(f_n(x,y))$ неспадна скрізь на P. За теоремою Беппо Леві

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint\limits_P f_n(x,y)\,dxdy. \tag{5}$$

За доведеною частиною II теореми, $\forall n \in \mathbb{N}$ існує множина $A_n \subset \subset [a;b]$ така, що $\mathrm{m}A_n = 0$ і $\forall x \in [a;b] \setminus A_n$ функція $f_n(x,y) \in L[c;d]$. Крім того, якщо позначити $\varphi_n(x) = \int\limits_c^d f_n(x,y)\,dy$, то $\varphi_n(x) \in L[a;b]$ і

$$\iint\limits_P f_n(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx. \tag{6}$$

Позначимо $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тоді $\mathrm{m}A = 0$ і при фіксованому $x \in [a;b] \setminus A$ функції $f_n(x,y) \in L[c;d]$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x,y) \to f(x,y)$ $(n \to \infty)$ і рівність (6) виконується $\forall n \in \mathbb{N}$.

Послідовність $(\varphi_n(x))$ є невід'ємною і неспадною на $[a;b] \setminus A$, тобто майже скрізь на $[a;b]$. Тому, в силу рівності (6), за теоремою Беппо Леві майже скрізь на $[a;b]$ існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \Phi(x)$, причому функція $\Phi(x) \in L[a;b]$ і

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \Phi(x)\,dx.$$

За властивістю границі монотонної послідовності $\varphi_n(x) \leqslant \Phi(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ майже скрізь на $[a;b]$. З іншого боку, як зазначалося, для всіх $x \in [a;b]$ $f_n(x,y) \to f(x,y)$ $(n \to \infty)$ і послідовність $(f_n(x,y))$ неспадна. Тому за теоремою Беппо Леві майже для кожного фіксованого $x \in [a;b]$ (а саме, для якого $\varphi_n(x) \leqslant \Phi(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$) функція $f(x,y) \in L[c;d]$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_c^d f_n(x,y)\,dy = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$.

Використовуючи зроблені раніше позначення, останню рівність можна записати у вигляді $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,dx = \varphi(x)$ майже скрізь на $[a;b]$. Звідси випливає, що $\varphi(x) = \Phi(x)$ майже скрізь на $[a;b]$, а отже, $\varphi(x) \in L[a;b]$ і

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Отже, рівність (2) випливає з рівностей (5), (6) та (7). Теорема 2 доведена у випадку III.

IV. Для довільної функції $f(x,y) \in LP$ розглянемо її зрізки $f^+(x,y)$ та $f^-(x,y)$ (див. пункт 7.3.5), які є невід'ємними L-інтегровними на P функціями причому $f = f^+ - f^-$. Отже, цей випадок зводиться до попереднього. ■

Аналогічними міркуваннями для загального випадку функції p змінних можна довести наступну теорему 7.

Теорема 7 (Фубіні, про зв'язок кратного L-інтеграла з повторним). *Нехай функція f є L-інтегровною на прямокутнику $P = [a_1;b_1] \times [a_2;b_2] \times \ldots \times [a_p;b_p]$. Тоді майже скрізь на $[a_1;b_1]$ існує*

$$\varphi(x_1) = \int_{P^*} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx^*,$$

де $P^* = \{x^* = (x_2,\ldots,x_p) \colon (x_1,x_2,\ldots,x_p) \in P\}$. При цьому функція $\varphi(x_1)$ є L-інтегровною на $[a_1;b_1]$ і має місце рівність:

$$\int_P f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_p = \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x_1)\,dx_1.$$

Застосовуючи теорему Фубіні до внутрішнього інтеграла $p-1$ раз, дістанемо

$$\int_P f\,dx = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_p}^{b_p} f(x_1,x_2,\ldots,x_p)\,dx_p,$$

причому знаки $\int\limits_{a_k}^{b_k}$ разом із dx_k можна міняти з іншими аналогічними знаками яким завгодно чином. Зокрема, якщо $p = 2$, то

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Таким чином, на відміну від R-інтегралів, існування кратного L-інтеграла гарантує існування повторних інтегралів та їх рівність. У цьому виявляється ще одна перевага L-інтегралів над R-інтегралами.

7.4.6. Критерій Лебега інтегровності за Ріманом. Доведемо тепер критерій інтегровності за Ріманом, згаданий у пункті 5.1.4.

Теорема 8 (критерій Лебега інтегровності за Ріманом). *Нехай функція f обмежена на замкненому елементарному прямокутнику $P \subset \mathbb{R}^p$. Для того, щоб функція f була інтегровною за Ріманом на цьому прямокутнику, необхідно й досить, щоб вона була майже скрізь неперервною на P.*

☐ Припустимо, що функція f обмежена на замкненому елементарному прямокутнику $P \subset \mathbb{R}^p$.

Побудуємо послідовність розбиттів (T_n) прямокутника P на прямокутники $P_k^{(n)}$, $k \in \overline{1,\nu_n}$, $n \in \mathbb{N}$, так, щоб $\lambda(T_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ і щоб розбиття (T_{n+1}) було роздрібненням розбиття (T_n) $\forall n \in \mathbb{N}$.

Позначимо $h_k^{(n)} = \inf\limits_{x \in P_k^{(n)}} f(x)$, $H_k^{(n)} = \sup\limits_{x \in P_k^{(n)}} f(x)$ $\forall k \in \overline{1,\nu_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Введемо східчасті функції φ_n та Φ_n, $n \in \mathbb{N}$, поклавши $\varphi_n(x) = h_k^{(n)}$ і $\Phi_n(x) = H_k^{(n)}$, коли $x \in (P_k^{(n)})^\circ$, та $\varphi_n(x) = \Phi_n(x) = 0$ в інших випадках. (Через E° позначаємо внутрішність множини E).

Утворимо множину $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{k_n} \partial P_k^{(n)}$, що буде множиною L-міри нуль як зчисленне об'єднання множин L-міри нуль.

Правильні такі співвідношення:

$$1)\ \begin{cases} (R)\int\limits_P \varphi_n\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\nu_n} h_k^{(n)} \operatorname{mes} P_k^{(n)} = S_*(T_n), \\ (R)\int\limits_P \Phi_n\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\nu_n} H_k^{(n)} \operatorname{mes} P_k^{(n)} = S^*(T_n), \end{cases}$$

де $S_*(T_n)$ та $S^*(T_n)$ — нижня й верхня суми Дарбу функції f;

2) на множині $P \setminus X$ буде правильною нерівність $\varphi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \leqslant \Phi_n(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$;

3) на множині $P \setminus X$ правильні нерівності $\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x)$ та $\Phi_n(x) \geqslant \Phi_{n+1}(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Необхідність. Припустимо, що $f \in RP$. Тоді за критерієм R-інтегровності (теорема 2 пункту 5.1.3) нижня та верхня суми Дарбу $S_*(T_n)$ та $S^*(T_n)$ збігаються до $(R)\int\limits_P f\,dx$ при $n \to \infty$. Звідси та із співвідношення 1) випливає, що $(R)\int\limits_P (\Phi_n(x) - \varphi_n(x))\,dx \to 0$ $(n \to \infty)$, тобто послідовність $(\Phi_n - \varphi_n)$ збігається до нуля у просторі SP. Тоді за лемою 1 п. 7.2.2 існує підпослідовність $\Phi_{i_n}(x) - \varphi_{i_n}(x) \to \to 0$ майже скрізь на P. Звідси та із співвідношення 2) маємо, що $\Phi_{i_n}(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ майже скрізь на прямокутнику P.

Візьмемо точку $x_0 \notin X$ такою, щоб

$$\Phi_{i_n}(x_0) - \varphi_{i_n}(x_0) \to 0 \ \text{ і } \ \Phi_{i_n}(x_0) - f(x_0) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і знайдемо $N = N(\varepsilon)$, для якого

$$\Phi_{i_N}(x_0) - \varphi_{i_N}(x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \ \text{ і } \ \Phi_{i_N}(x_0) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Знайдемо номер $k_0 \in \overline{1, \nu_{i_N}}$, для якого $x_0 \in (P_{k_0}^{(i_N)})^\circ$, і візьмемо $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таким, щоб $O_\delta(x_0) \subset (P_{k_0}^{(i_N)})^\circ$. Тоді

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - \Phi_{i_N}(x)| +$$
$$+ |\Phi_{i_N}(x) - \Phi_{i_N}(x_0)| + |\Phi_{i_N}(x_0) - f(x_0)| =$$
$$= (\Phi_{i_N}(x) - f(x)) + (\Phi_{i_N}(x_0) - f(x_0)) \leqslant$$
$$\leqslant (\Phi_{i_N}(x) - \varphi_{i_N}(x)) + (\Phi_{i_N}(x_0) - f(x_0)) =$$
$$= (\Phi_{i_N}(x_0) - \varphi_{i_N}(x_0)) + (\Phi_{i_N}(x_0) - f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

якщо $x \in O_\delta(x_0)$. Це означає, що функція f неперервна у точці x_0.

Отже, доведено, що функція f є неперервною майже скрізь на прямокутнику P.

Достатність. Припустимо тепер, що обмежена на прямокутнику P функція f майже скрізь неперервна на P.

Візьмемо яку-небудь точку $x_0 \in P \setminus X$, в якій функція f неперервна, і покажемо, що $\Phi_n(x_0) - \varphi_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$, звідки на основі співвідношення 2) випливатиме, що $\varphi_n(x_0) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.

Справді, за означенням неперервності у точці x_0 для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap P.$$

Далі для того самого ε знайдемо номери $N = N(\varepsilon)$ і k_N такі, що $x_0 \in P_{k_N}^{(N)} \subset O_\delta(x_0)$. Це можна зробити, бо $\lambda(T_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Тоді $\forall n > N \ \exists k_n \in \overline{1, \nu_n}$: $x_0 \in P_{k_n}^{(n)} \subset O_\delta(x_0)$ в силу того що розбиття (T_{n+1}) є роздрібненнями розбиттів (T_n).

Звідси випливає, що $\forall x \in P_{k_n}^{(n)}$, $\forall n \geqslant N$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \Leftrightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \inf_{P_{k_n}^{(n)}} f(x) \leqslant \sup_{P_{k_n}^{(n)}} f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \varphi_n(x_0) \leqslant \Phi_n(x_0) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow$$

$\Phi_n(x_0) - \varphi_n(x_0) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Тепер, беручи до уваги співвідношення 3), за теоремою Беппо Леві дістаємо, що $f \in LP$,

$$\|\varphi_n - f\|_L \to 0,\ \|\Phi_n - f\|_L \to 0 \Rightarrow \|\Phi_n - \varphi_n\|_L \to 0\ (n \to \infty) \Leftrightarrow$$

$$\int_P \Phi_n\,dx - \int_P \varphi_n\,dx \to 0 \Leftrightarrow S^*(T_n) - S_*(T_n) \to 0\ (n \to \infty) \Leftrightarrow f \in RP. \ \blacksquare$$

7.4.7. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні дані твердження.

1. Якщо $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ майже скрізь на P, то майже скрізь на P існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$.
2. Якщо $f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ майже скрізь на P і $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq$ $\neq \infty$ майже скрізь на P, то $f \in LP$.
3. Якщо $f_n \in LP$ і $\int\limits_P |f_n|\,dx \leqslant H < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$, а $f_n(x) \to f(x)$ майже скрізь на P, то $\|f_n - f\|_L \to 0$ $(n \to \infty)$.
4. Якщо $f_n(x) = \begin{cases} n, \text{ коли } n \in [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}], \\ 0, \text{ коли } n \notin [\frac{1}{n}; \frac{2}{n}], \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_L = 0$.
5. Якщо $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ коли } n \in [\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}], \\ 0, \text{ коли } n \notin [\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}], \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$, то

   1) $\int\limits_{[0;1]} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0;1]} f_n(x)\,dx$ і

2) $\exists g \in L[0;1]\colon |f_n(x)| \leqslant g(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ і $\forall x \in [0;1]$.

6. Якщо $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на P і $f_n \in LP\ \forall n \in \mathbb{N}$, то $f \in LP$ і $\int\limits_P f\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx$.
7. У теоремі 3 умову $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_P |f_n|\,dx < +\infty$ можна замінити умовою рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.
8. $f \in LP \Leftrightarrow |f| \in LP$.
9. Якщо f і $g \in LP$, то $fg \in LP$.
10. Якщо $f, g \in LP$ і $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall x \in P$, то $\exists c \in [m;M]\colon \int\limits_P fg\,dx = c\int\limits_P g\,dx$.
11. Якщо кожен переріз E_{x_1} множини $E \subset \mathbb{R}^2$ є множиною L-міри нуль, то і множина E має міру нуль.
12. Твердження, обернене до попереднього, є правильним.
13. Якщо функція східчаста, то для R-інтеграла цієї функції має місце теорема Фубіні.
14. Теорема Фубіні правильна для R-інтеграла будь-якої R-інтегровної функції.
15. Існування подвійного R-інтеграла гарантує існування повторного R-інтеграла.
16. Існування повторного R-інтеграла гарантує існування подвійного R-інтеграла.
17. Існування подвійного L-інтеграла гарантує існування повторного L-інтеграла.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо f диференційовна на $[a;b]$ і f' обмежена на $[a;b]$, то $f' \in L[a;b]$ і $f(x) = f(a) + \int\limits_{[a;x]} f'\,dx\ \forall x \in [a;b]$.
2. Якщо $\mathrm{m}P > 0$, а функція f обмежена на P та L-інтегровна на будь-якому замкненому прямокутнику $Q \subset P^{\circ}$, то $f \in LP$.
3. Якщо $f \in LP$, $f(x) \leqslant 0\ \forall x \in P$, а $f_n(x) = f(x)$, коли $f(x) \geqslant n$, і $f_n(x) = n$, коли $f(x) > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\int\limits_P f\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n\,dx$.
4. Теореми Лебега і Беппо Леві про граничний перехід під знаком інтеграла є рівносильними твердженнями.

7.5. L-вимірні множини і L-інтеграл по L-вимірній множині

У цьому підрозділі введено поняття L-міри і узагальнено поняття L-інтеграла на випадок довільної L-вимірної множини, аналогічно тому, як це було зроблено для міри Жордана та інтеграла Рімана по вимірній за Жорданом множині.

7.5.1. Поняття L-вимірної множини та її L-міри. Нехай непорожня множина $E \subset \mathbb{R}^p$ обмежена, а P — деякий елементарний прямокутник, що містить E. Тоді множину E назвемо *L-вимірною*, або *вимірною за Лебегом*, якщо характеристична функція цієї множини f_E є L-інтегровною на P. При цьому число $\mathrm{m}E := \int\limits_P f_E\,dx$ називатимемо *L-мірою*, або *мірою Лебега множини E*.

Враховуючи адитивність L-інтеграла, легко довести, що L-вимірність множини E та її L-міра не залежать від елементарного прямокутника $P \supset E$.

З теореми 1 пункту 7.3.1 про зв'язок між інтегралами Рімана і Лебега випливає, що *всяка множина E, вимірна за Жорданом, є вимірною і за Лебегом, причому її міри Лебега і Жордана співпадають.*

Разом з цим, існують множини, вимірні за Лебегом, але не вимірні за Жорданом. Такою є, хоча б, множина $P \cap \mathbb{Q}^p$, якщо $\mathrm{m}P > 0$ (див. приклад 1.2° пункту 7.3.1).

Зауважимо також, що з властивості 7 п. 7.3.2 випливає *інваріантність міри відносно зсуву*: множини E та $E + a = \{x + a\colon x \in E\}$ одночасно або L-вимірні (і тоді $\mathrm{m}E = \mathrm{m}(E + a)$), або ні.

Підкреслимо також, що для обмежених множин поняття множини L-міри нуль, введене в пункті 7.1.1, рівносильне щойно введеному поняттю множини, міра Лебега якої дорівнює нулю. Це випливає з того, що $\int\limits_P f_E\,dx = 0 \Leftrightarrow f_E(x) = 0$ майже скрізь на P. Але перше поняття має ширший обсяг, оскільки воно застосовне і до необмежених множин простору $\mathbb{R}^p$.

7.5.2. Основні властивості L-міри. Так само, як і властивості міри Жордана, властивості L-міри випливають з відповідних властивостей L-інтеграла. Сформулюємо ці властивості.

Властивість 1 (про невід'ємність міри). $\mathrm{m}E \geqslant 0$ *для будь-якої L-вимірної множини.*

Властивість 2 (про монотонність L-міри). *Якщо множини E_1 і E_2 L-вимірні і $E_1 \subset E_2$, то* $\mathrm{m}E_1 \leqslant \mathrm{m}E_2$.

Властивість 3 (про L-вимірність множини та її доповнення). *Якщо $E \subset P$, і $CE = P \setminus E$ то множини E і CE одночасно вимірні або ні. При цьому* $\mathrm{m}E + \mathrm{m}CE = \mathrm{m}P$.

Властивість 4 (про повноту міри). *Якщо* $\mathrm{m}A = 0$, *а* $E \subset A$, *то* $\mathrm{m}E = 0$.

Властивість 5 (про L-вимірність об'єднання, перерізу та різниці множин). *Нехай L-вимірні множини $E_k \subset P$, $k \in \overline{1,n}$. Тоді множини $\bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$, $E_1 \setminus E_2$ і $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ також L-вимірні, причому* 1) $\mathrm{m}E_1 \setminus E_2 = \mathrm{m}E_1 - \mathrm{m}E_2$, *коли* $E_1 \supset E_2$, *і* 2) $\mathrm{m}\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{m}E_k$, *коли множини E_k попарно не перетинаються.*

Властивості $1 - 5$ доводяться так само, як і відповідні властивості міри Жордана.

Наступні властивості $6 - 10$ притаманні тільки L-мірі.

Властивість 6 (про повну адитивність L-міри). *Нехай множини E_k, $k \in \mathbb{N}$, L-вимірні, причому $E_k \subset P$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тоді множина $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ L-вимірна і* $\mathrm{m}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}E_k$, *коли множини E_k попарно не перетинаються.*

□ Для доведення властивості 6 розглянемо спочатку випадок, коли множини E_k попарно не перетинаються. У цьому випадку $E \subset P$ і $f_E(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{E_k(x)}$ $\forall x \in P$. Звідси за теоремою 3 пункту 7.4.3 дістаємо, що $f_E \in LP$ і $\int\limits_P f_E\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_P f_{E_k}\,dx$, тобто $\exists \mathrm{m}E = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{m}E_k$.

У загальному випадку подамо множину E у вигляді

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2 \setminus E_1) \cup \ldots,$$

де об'єднувані множини вимірні, містяться у прямокутнику P і попарно не перетинаються. Тому за доведеним вище множина E вимірна. ■

Властивості 5, 6 вказують на те, що система всіх L-вимірних підмножин прямокутника P є σ-алгеброю.

Властивість 7 (про L-вимірність лінійної відкритої множини). *Якщо лінійна відкрита множина* $G \subset [a;b]$, *то вона* L*-вимірна і* $\mathrm{m}G = \sum\limits_k(\beta_k - \alpha_k)$, *де* $(\alpha_k;\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *— складові інтервали множини* G.

Властивість 8 (про L-вимірність лінійної замкненої множини). *Якщо лінійна замкнена множина* $F \subset [a;b]$, *де* $a = \min F$, $b = \max F$, *то вона* L*-вимірна і* $\mathrm{m}F = b - a - \sum\limits_k(\beta_k - \alpha_k)$, *де* $(\alpha_k;\beta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *— суміжні інтервали множини* F.

□ Властивості 7 і 8 є простими наслідками з властивостей 6 та 3 і теорем про будову відкритих і замкнених лінійних множин. ■

Щоб дослідити на L-вимірність будь-яку відкриту обмежену множину у просторі $\mathbb{R}^p$, доведемо наступну лему.

Лема 1 (про будову відкритих множин простору $\mathbb{R}^p$). *Будь-яку відкриту множину* $G \subset \mathbb{R}^p$ *можна представити у вигляді зчисленного об'єднання замкнених елементарних прямокутників.*

□ Зробимо розбиття простору $\mathbb{R}^p$ на прямокутники

$$P^{(n)}_{m_1,\ldots,m_p} = \left[\frac{m_1}{2^n};\frac{m_1+1}{2^n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{m_p}{2^n};\frac{m_p+1}{2^n}\right],$$

де $n \in \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i \in \overline{1,p}$.

Сукупність усіх цих прямокутників зчисленна, всі вони замкнені і мають такі властивості

$$\mathbb{R}^p = \bigcup_{m,n} P^{(n)}_m, \ \ \operatorname{diam} P^{(n)}_m \to 0 \ (n \to \infty),$$

де $m = (m_1, \ldots, m_p) \in \mathbb{Z}^p$. Тому, враховуючи, що множина G відкрита, матимемо: $\forall x \in G\ \exists P^{(n)}_m(x)$: $x \in P^{(n)}_m \subset G$. Отже, $G = \bigcup\limits_{x\in G} P^{(n)}_m(x)$, а це і є потрібне представлення. ■

За допомогою леми 1 і властивостей 6 та 3 легко дістаємо

Властивість 9 (про L-вимірність відкритих і замкнених множин у просторі $\mathbb{R}^p$). *У просторі* $\mathbb{R}^p$ *всі обмежені відкриті та замкнені множини* L*-вимірні.*

Властивість 10 (про неперервність L-міри). *Нехай* L*-вимірні множини* $E_k \subset P$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тоді*

1) *якщо* $E_k \subset E_{k+1}$ $\forall k$, *то* $\mathrm{m}\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}E_n$;

2) *якщо* $E_k \supset E_{k+1}\ \forall k$, *то* $\mathrm{m}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}E_n$.

□ Для доведення співвідношення 1) запишемо множину $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ у вигляді

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots,$$

де об'єднувані множини попарно не перетинються.

Тоді за властивостями 5, 6 множина E вимірна і

$$\mathrm{m}E = \mathrm{m}E_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\mathrm{m}E_k - \mathrm{m}E_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{m}E_n.$$

Співвідношення 2) зводиться до попереднього шляхом переходу до множин $F_k = P \setminus E_k$, $k \in \mathbb{N}$. Позначивши $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, дістанемо, що $\mathrm{m}F = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}F_n$. Тоді для множини $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ матимемо: $E = P \setminus F \Rightarrow$ $\mathrm{m}E = \mathrm{m}P - \mathrm{m}F = \lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{m}P - \mathrm{m}F_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}P \setminus F_n = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}E_n$. ■

Властивість 11 (про існування невимірної множини). *Якщо множина* E L*-вимірна у просторі* $\mathbb{R}^p$ *і* $\mathrm{m}E > 0$, *то існує підмножина* $E_1 \subset E$, *що не є* L*-вимірною у просторі* $\mathbb{R}^p$.

□ Домовимося позначати $K[x,\varepsilon] = \{\, x \in \mathbb{R}^p \colon \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ (тобто замкнену кулю), а $\theta = (0,\ldots,0)$ — нуль простору $\mathbb{R}^p$.

Виділимо у замкненій кулі $K[\theta,\frac{1}{2}]$ зчисленну множину A попарно різних векторів, один з яких нульовий. Утворимо з цих векторів систему B усіляких лінійних комбінацій вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, де $a_i \in A$, $\alpha_i \in \{-1,0,1\}$. Множина B зчисленна і замкнена відносно операцій додавання та віднімання векторів.

Для кожного $x \in K[\theta,\frac{1}{2}]$ позначимо $K(x) = \{y \in K[\theta,\frac{1}{2}] \colon x - y \in B\}$. Зауваживши, що $K(x) = K(z) \Leftrightarrow x - z \in B$, доведемо, що

$$K(x) \neq K(z) \Leftrightarrow K(x) \cap K(z) = \varnothing.$$

Зрозуміло, що коли $K(x) \cap K(z) = \varnothing$, то $K(x) \neq K(z)$.

Нехай $K(x) \neq K(z)$, тобто $x - z \notin B$, і припустимо, що $K(x) \cap$ $\cap K(z) \neq \varnothing$. Тоді $\exists z^* \in K(x) \cap K(z) \Rightarrow z^* = x + b_x = z + b_z$, де b_x і $b_z \in B \Rightarrow x - z = b_z - b_x \in B$, що суперечить умові $x - z \notin B$.

Утворимо множину A^*, що містить тільки по одній точці з кожного класу $K(x)$ і не містить ніяких інших точок.

Доведемо, що **множина $A^* \subset K[\theta, \frac{1}{2}]$ не є L-вимірною.**

Припустимо супротивне, тобто що множина A^* L-вимірна. Тоді в силу інваріантності міри відносно зсуву множина $A^*_{r_k} = \{x + r_k\colon x \in A^*\}$ також L-вимірна $\forall r_k \in B \cap K[\theta, 1] = \{r_0, r_1, \dots\}$, причому $\mathrm{m} A^*_{r_k} = \mathrm{m} A = \alpha$.

Вважаючи $r_0 = 0$, покажемо, що
$$K\left[\theta, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} A^*_{r_k} \subset K\left[\theta, \frac{3}{2}\right]. \tag{1}$$

Дійсно, якщо $x \in K[\theta, \frac{1}{2}]$, то існує клас $K(x) \ni x$. Якщо в A потрапляє елемент $x_0 \in K(x)$, то $x - x_0 = b \in B$ і $|b| \leqslant |x| + |x_0| \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, тобто $b = r_k$ для деякого $k \in \mathbb{N}_0$ і тому $x \in A^*_{r_k} \Rightarrow x \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A^*_{r_k}$. З іншого боку, якщо $x \in \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A^*_{r_k}$, то $\exists k \in \mathbb{N}_0\colon x \in A^*_{r_k} \Rightarrow x = x_0 + r_k$, де $x_0 \in K[\theta, \frac{1}{2}]$, а тому $|x| \leqslant |x_0| + |r_k| \leqslant \frac{3}{2}$, тобто $x \in K[\theta, \frac{3}{2}]$.

Покажемо, що $A^*_{r_k} \cap A^*_{r_i} = \varnothing$ $\forall k \neq i$. Дійсно, якщо $k \neq i$, а $z \in A^*_{r_k} \cap A^*_{r_i}$, то $z = x_k + r_k = x_i + r_i$, де $r_k \neq r_i$, $x_k \in A^*$ і $x_i \in A^* \Rightarrow x_k \neq x_i$ і тому належать різним класам $K(x)$, але $x_k - x_i = r_k - r_i \in B$ і тому x_k та x_i належать одному класу $K(x)$. Дістали протиріччя, яке доводить рівність $A^*_{r_k} \cap A^*_{r_i} = \varnothing$ $\forall k \neq i$.

Тепер, враховуючи включення (1), монотонність і повну адитивність L-міри, дістаємо:
$$\mathrm{m} K\left[\theta, \frac{1}{2}\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{m} A^*_{r_k} \leqslant \mathrm{m} K\left[\theta, \frac{3}{2}\right],$$
або
$$0 < \mathrm{m} K\left[\theta, \frac{1}{2}\right] \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \alpha \leqslant \mathrm{m} K\left[\theta, \frac{3}{2}\right] < +\infty,$$
що неможливо при будь-якому $\alpha \geqslant 0$.

Отже, доведено існування невимірної підмножини $E_1 = A^*$, що міститься в кулі $E = K[\theta, \frac{1}{2}]$.

Аналогічним методом будується невимірна підмножина E_1 всередині будь-якої L-вимірної множини з додатною мірою. ■

Зауваження. Доведення властивості 11 підкреслює надзвичайну загальність поняття міри Лебега у порівнянні з мірою Жордана. Навести приклад невимірної за Жорданом множини не вимагає особливих зусиль, а кожна невимірна за Лебегом множина має досить складну структуру, описати яку досить важко.

7.5.3. Поняття L-інтеграла по L-вимірній множині. Нехай функція f визначена на L-вимірній множині $E \subset P$. Якщо f не визначена в деяких точках x елементарного прямокутника P, то вважатимемо, що $f(x) = 0$ в цих точках. Таку функцію f назвемо *L-інтегровною*, або *інтегровною за Лебегом, на множині E* і писатимемо $f \in LE$, якщо функція $f_1 = f_E f$ є L-інтегровною на елементарному прямокутнику P. При цьому число $\int\limits_E f\,dx := \int\limits_P f f_E\,dx$ називатимемо *L-інтегралом*, або *інтегралом Лебега, функції f по множині E*.

Легко бачити, що L-інтегровність функції f на L-вимірній множині E та її L-інтеграл по множині E не залежать від елементарного прямокутника $P \supset E$.

Зрозуміло також, що коли $E = P$, то $(f_E f)(x) = f(x)\ \forall x \in P$ і тому поняття L-інтеграла по елементарному прямокутнику є частинним випадком поняття L-інтеграла по L-вимірній множині.

З означення L-інтеграла по L-вимірній множині випливає, що всі властивості $1 - 12$ L-інтеграла по прямокутнику, відмічені в підрозділі 7.3, а також теореми про граничний перехід під знаком інтеграла і наслідки з них, сформульовані в підрозділі 7.4, мають місце і для L-інтеграла по довільній L-вимірній множині.

Разом з тим L-інтеграл по L-вимірній множині має деякі специфічні властивості.

Властивість 13 (про повну адитивність L-інтеграла). *Нехай множина $E \subset P$ є об'єднанням зчисленної кількості L-вимірних множин E_k, що попарно не перетинаються. Для того щоб $f \in LE$, необхідно й досить, щоб $f \in LE_k\ \forall k$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f|\,dx < +\infty$. При цьому $\int\limits_E f\,dx = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f\,dx$.*

☐ Оскільки множини E_k попарно не перетинаються, то

$$|f(x)|\,f_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(x)|\,f_{E_k}(x)\ \ \forall x \in P \tag{1}$$

і

$$f(x)f_E(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f(x)f_{E_k}(x)\ \ \forall x\in P. \tag{2}$$

Нехай $f\in LE$, тобто $f f_E\in LP$. З того, що множини E_k є L-вимірними, випливає, що $f_{E_k}\in LP\ \forall k$. Тоді $f f_{E_k}=(f f_E)f_{E_k}\in LP\ \forall k$ як добуток L-інтегровних функцій. Це означає, що $f\in LE_k\ \forall k$.

З іншого боку, оскільки $f f_{E_k}\in LP\ \forall k$ і ряд (1) збігається скрізь на P до функції $|f|f_E\in LP$, то за теоремою 3 п. 7.4.3

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f|\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{P}|f|f_{E_k}\,dx<\infty$$

і рівність (2) можна інтегрувати почленно.

Навпаки, якщо $f\in LE_k\ \forall k$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{E_k}|f|\,dx=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int\limits_{P}|f|f_{E_k}\,dx<\infty$, то знову за згаданою теоремою $f f_E=\sum\limits_{k=1}^{\infty} f f_{E_k}\in LP$, тобто $f\in LE$, і можливе почленне інтегрування рівності (2). ■

Властивість 14 (про абсолютну неперервність L-інтеграла). *Якщо $f\in LE$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\left|\int\limits_e f\,dx\right|\leqslant\int\limits_e|f|\,dx<\varepsilon$ для будь-якої L-вимірної множини $e\subset E$ такої, що* $\mathrm{m}e<\delta$.

□ Можна вважати, що $f(x)\geqslant 0\ \forall x\in P$, бо інакше ми перейдемо до функції $|f|\in LP$.

Скористаємося послідовністю (f_n), де $f_n(x)=f(x)$, коли $f(x)\leqslant n$, і $f_n(x)=n$, коли $f(x)>n$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in E$. Так само, як і для прямокутника P (див. завдання II.3 п. 7.4.7), можна стверджувати, що $f_n\in LE$ і $0\leqslant\int\limits_E f\,dx-\int\limits_E f_n\,dx\to 0$ при $n\to\infty$.

Тому для заданого $\varepsilon>0$ існує $N=N(\varepsilon)$: $\int\limits_E f\,dx-\int\limits_E f_N\,dx<\frac{\varepsilon}{2}$.

Покладемо $\delta=\frac{\varepsilon}{2N}$. В силу невід'ємності підінтегральної функції, для будь-якої вимірної підмножини $e\subset E$ матимемо

$$\int_e(f-f_N)\,dx\leqslant\int_E(f-f_N)\,dx\Rightarrow$$

$$\int_e f\,dx-\int_e f_N\,dx<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow\int_e f\,dx<\int_e f_N\,dx+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Проте, оскільки $f_N(x) \leqslant N$ $\forall x \in E$, то $\int\limits_e f_N\,dx \leqslant N \cdot \mathrm{m}e$, а отже, при $\mathrm{m}e < \delta$ виконуватиметься нерівність $\int\limits_e f\,dx < \varepsilon$. ■

7.5.4. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна скінченна множина $E \subset P$ є L-вимірною і $\mathrm{m}E = 0$.
2. Якщо множина $E \subset P$ не більш ніж зчисленна, то вона L-вимірна і $\mathrm{m}E = 0$.
3. Якщо множина E L-вимірна, то вона обмежена.
4. Якщо E − множина L-міри нуль у розумінні пункту 7.1.1, то вона обов'язково обмежена.
5. Якщо множина E L-вимірна, то вона і вимірна за Жорданом.
6. Твердження, обернене до твердження 5, є правильним.
7. Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathrm{m}E_1 < \mathrm{m}E_2$.
8. Множина E L-вимірна $\Leftrightarrow$ множина CE L-вимірна.
9. Якщо $E = E_1 \cup E_2$ − L-вимірна множина, то множини E_1 і E_2 також L-вимірні.
10. Кожна лінійна відкрита множина є L-вимірною.
11. Кожну відкриту множину G можна представити у вигляді об'єднання скінченної кількості замкнених прямокутників.
12. Кожну відкриту множину G можна однозначно представити у вигляді об'єднання зчисленної кількості замкнених прямокутників.
13. Якщо множини E_k L-вимірні і $E_k \subset E_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то і множина $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ L-вимірна.
14. Якщо множини E_k L-вимірні і $E_k \subset E_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{m}E_n < +\infty$.
15. $f \in LE \Leftrightarrow f_E f \in LP$.
16. На множині E, що має нульову міру, кожна функція $f\colon E \to \mathbb{R}$ є L-інтегровною.
17. Якщо $f \in LE_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то $f \in LE$, де $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо множини E_k, $k \in \mathbb{N}$, L-вимірні, то і множина $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ L-вимірна.

2. Якщо $f \in LE$, $f(x) \geqslant 0$ майже скрізь на E і $\int\limits_E f\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ майже скрізь на E.
3. Якщо множина E вимірна за Жорданом і $f \in RE$, то $f \in LE$ і $(R)\int\limits_E f\,dx = (L)\int\limits_E f\,dx$.

7.6. Функції, L-інтегровні з квадратом

У даному підрозділі введено простір L_2P функцій, L-інтегровних з квадратом — один з найважливіших гільбертових просторів. Розглянуто різні види збіжності послідовностей та ряди Фур'є у просторі L_2P.

7.6.1. Простір L_2P та скалярний добуток у ньому. Зафіксуємо деякий елементарний прямокутник $P \subset \mathbb{R}^p$, не обов'язково замкнений. Використовуючи тотожність паралелограма (п. 1.7.3), неважко переконатися, що норму $\|f\| = \int\limits_P |f|\,dx$ простору LP неможливо задати за допомогою скалярного добутку.

Разом з тим, з прикладу 4.3) п. 1.7.3 відомо, що на множині CP неперервних на прямокутнику P функцій скалярний добуток можна задати за допомогою рівності

$$(f,g) = \int\limits_P fg\,dx. \tag{1}$$

Щоб поширити рівність (1) на ширший клас функцій, виділимо у просторі LP множину $L_2P = \{f \in LP\colon\ f^2 \in LP\}$. Кожну функцію f з множини L_2P називають *функцією, L-інтегровною з квадратом*. Легко бачити, що такою функцією є кожна обмежена L-інтегровна на P функція. При цьому $L_2P \neq LP$, тому що коли $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, то за прикладами 2, 3 пп. 7.3.3, 7.3.5 $f \in L(0;1]$, проте $f \notin L_2(0;1]$.

Перевіримо, чи задає інтеграл (1) скалярний добуток на множині L_2P.

☐ Спершу треба показати, що для довільних двох функцій f, $g \in L_2P$ їхній добуток $fg \in LP$. Для цього візьмемо послідовності (f_n) і (g_n), фундаментальні у просторі SP і збіжні майже скрізь на P до $f(x)$ і $g(x)$, відповідно. Послідовність $(f_n g_n)$ складається з L-інтегровних на P функцій і збігається до $f(x)g(x)$ майже скрізь на P.

При цьому гранична функція задовольняє нерівність

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{2}(f^2(x)+g^2(x)) \text{ майже скрізь на } P.$$

Звідси за теоремою 5 п. 7.4.4 випливає, що $fg \in LP$.

Далі з'ясуємо, чи є множина L_2P лінійним простором. Оскільки $L_2P \subset LP$, то достатньо лише перевірити замкненість відносно додавання і множення на скаляри. Візьмемо довільні $f, g \in L_2P$ та $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ і дістанемо:

$$(\alpha f + \beta g)^2 = \alpha^2 f^2 + 2\alpha\beta fg + \beta^2 g^2 \in LP,$$

оскільки $f^2, g^2 \in LP$ за припущенням, а $fg \in LP$ за доведеним вище. Це означає, що $\alpha f + \beta g \in L_2P$. Отже, L_2P є підпростором лінійного простору LP.

Залишилося перевірити виконання аксіом скалярного добутку, сформульованих у п. 1.7.3. Читач легко може переконатися у справедливості цих аксіом самостійно.

Слід лише мати на увазі дві речі: 1) простір L_2P дійсний; 2) для правильності аксіоми $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$, потрібно вважати дві функції $f, g \in L_2P$ рівними у даному просторі, якщо вони рівні майже скрізь на P. ■

Отже, має місце

Теорема 1 (про евклідовість простору L_2P). *Якщо на множині L_2P задати скалярний добуток за допомогою рівності* (1) *і вважати рівними функції, які рівні майже скрізь на прямокутнику P, то вона стане дійсним евклідовим простором.*

Евклідовий простір L_2P називають *простором функцій, L-інтегровних з квадратом.* Як і будь-який евклідовий простір, цей простір є нормованим, причому його норма має вигляд

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f,f)} = \sqrt{\int_P f^2\,dx} \quad \forall f \in L_2P. \tag{2}$$

Для цієї норми зокрема правильна нерівність трикутника:

$$\sqrt{\int_P (f+g)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int_P f^2\,dx} + \sqrt{\int_P g^2\,dx} \quad \forall f, g \in L_2P.$$

Правильна також нерівність Коші — Буняковського:

$$\int_P |fg|\,dx \leqslant \sqrt{\int_P f^2\,dx}\ \sqrt{\int_P g^2\,dx}\ \ \forall f,g \in L_2P,$$

зокрема, при $g(x) \equiv 1$

$$\int_P |f|\,dx \leqslant \sqrt{\operatorname{mes} P}\ \sqrt{\int_P f^2\,dx}\ \ \forall f \in L_2P. \tag{3}$$

7.6.2. Повнота простору L_2P. Повертаючись до евклідового простору CR_2P, яким є простір неперервних на прямокутнику P функцій зі скалярним добутком (1), мусимо констатувати, що він є неповним. Це можна показати аналогічно тому, як у п. 1.6.5 доведено неповноту простору $CR[a;b]$.

Дослідимо питання про повноту простору L_2P, коли $\operatorname{mes} P > 0$.

$\square$ Візьмемо довільну послідовність (f_n), фундаментальну у просторі L_2P, і, задавши довільне $\forall\varepsilon > 0$, знайдемо номер n_0 такий, щоб

$$\|f_n - f_m\|_{L_2} < \varepsilon\ \ \forall m,n > n_0.$$

В силу нерівності (3) буде правильною нерівність

$$\|f_n - f_m\|_L \leqslant \sqrt{\operatorname{mes} P}\ \|f_n - f_m\|_{L_2} < \varepsilon\sqrt{\operatorname{mes} P}\ \ \forall m,n > n_0,$$

яка означає, що послідовність (f_n) фундаментальна також і в просторі LP. Оскільки простір LP повний, то $\exists f \in LP$: $f_n \to f$ у просторі LP. Через це, згідно з наслідком 2 з теореми Єгорова (див. п. 7.3.3), $\exists f_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на P. При цьому, як частинний випадок попередньої нерівності, буде правильною така нерівність:

$$\|f_m - f_{k_n}\|^2_{L_2} = \int_P (f_m - f_{k_n})^2\,dx < \varepsilon^2\ \ \forall m,n > n_0. \tag{4}$$

Оскільки $(f_m(x) - f_{k_n}(x))^2 \to (f_m(x) - f(x))^2$ $(n \to \infty)$ $\forall m > n_0$ майже скрізь на P, то за теоремою Фату (теорема 4 п. 7.4.4) $(f_m - f)^2 \in LP$ і

$$\int_P (f_m - f)^2\,dx \leqslant \varepsilon^2\ \ \forall m > n_0. \tag{5}$$

З того, що $f_m \in L_2P$ і $f_m - f \in L_2P$ при $m > n_0$, випливає, що $f \in L_2P$. Нерівність же (5) можна переписати так:

$$\|f_m - f\|^2_{L_2} \leqslant \varepsilon^2\ \ \forall m > n_0,$$

де $\varepsilon > 0$ було довільно задано з самого початку, а номер n_0 залежить тільки від ε. Це і означає, що $f_n \to f$ у просторі L_2P. ■

Цим самим доведена

Теорема 2 (про повноту простору L_2P). *Простір L_2P є повним евклідовим, а отже, гільбертовим, простором.*

7.6.3. Різні види збіжності функціональних послідовностей. Згадаємо відомі види збіжності до функції $f(x)$ функціональної послідовності $(f_n(x))$, заданої на прямокутнику P:

1) поточкова;

2) рівномірна;

3) майже скрізь на P;

4) у просторі LP (*збіжність у середньому*);

5) у просторі L_2P (*збіжність у середньому квадратичному*).

Підведемо підсумок про співвідношення між цими видами збіжності.

Очевидно, що 2) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 3).

Легко бачити, що у випадку, коли $f_n, f \in LP$, 2) $\Rightarrow$ 4), а коли $f_n, f \in L_2P$, то 2) $\Rightarrow$ 5).

З нерівності (3) випливає співвідношення

$$\|f_n - f\|_L \leqslant \sqrt{\operatorname{mes} P}\,\|f_n - f\|_{L_2} \quad \forall n,$$

на підставі якого 5) $\Rightarrow$ 4).

Виникає питання: чи 4) $\Rightarrow$ 5), коли $f_n, f \in L_2P$?

Приклад 1. Нехай $P = (0;1]$, а

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{коли } x \in (0; \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{коли } x \in (\frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

У просторі LP $f_n \to 0$, оскільки

$$\|f_n\|_L = \int\limits_P |f_n|\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{n}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 0\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Але у просторі L_2P $f_n \not\to 0$, оскільки

$$\|f_n\|_{L_2}^2 = \int\limits_P f_n^2\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n\,dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 0\,dx = 1 \to 1 \ \ (n \to \infty).$$

Звідси можна також зробити висновок, що послідовність (f_n) взагалі розбіжна у просторі L_2P.

Отже, приклад 1 дає негативну відповідь на поставлене вище питання.

Далі виникає наступне запитання: чи 1) $\Rightarrow$ 4), коли $f_n, f \in LP$?

Приклад 2. Нехай $P = (0;1]$, а

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & \text{коли } x \in (0; \frac{1}{n}], \\ 0, & \text{коли } x \in (\frac{1}{n}; 1]. \end{cases}$$

Поточково $f_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ скрізь на P, оскільки $\forall x \in (0;1]$ $\exists n_0$: $x \notin (0; \frac{1}{n}]$ $\forall n > n_0$, і тому $f_n(x) = 0$ $\forall n > n_0$.

Але у просторі LP $f_n \not\to 0$, оскільки

$$\|f_n\|_L = \int\limits_P |f_n|\, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} n\, dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^1 0\, dx = 1 \to 1 \ (n \to \infty).$$

Згадуючи наслідок 2 з теореми Єгорова (див. п. 7.3.3), прийдемо до висновку, що послідовність (f_n) у просторі LP взагалі не має границі.

Отже, приклад 2 дає негативну відповідь на поставлене перед ним запитання.

Нарешті, залишається запитання: чи 4) $\Rightarrow$ 3), коли $f_n, f \in LP$?

Приклад 3. Нехай $P = [0;1)$. Побудуємо спочатку трикутну матрицю, яка складається з функцій

$$\varphi_{m,k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}), \\ 0, & \text{коли } x \in P \setminus [\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}), \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}, \ k \in \overline{0, m-1}.$$

Якщо виписувати послідовно рядки цієї матриці, а саме:

$$\varphi_{1,0}; \varphi_{2,0}, \varphi_{2,1}; \varphi_{3,0}, \varphi_{3,1}, \varphi_{3,2}; \ldots$$

і нумерувати їх підряд натуральними числами, то дістанемо нову послідовність (f_n). Спробуємо записати аналітично співвідношення між f_n і $\varphi_{m,k}$. Для цього позначимо сумарну кількість елементів у перших m рядках матриці $\varphi_{m,k}$ через q_m, $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, що

$$q_m = 1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2} \ \text{ і } \ q_{m+1} = q_m + m \ \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $q_m \uparrow \infty$, то $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \overline{q_m, q_{m+1} - 1}$, де множини, що об'єднуються, попарно не перетинаються. Тому для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує єдина пара номерів $m = m_n \in \mathbb{N}$ і $k = k_n \in \overline{0, m-1}$ таких, що $n = q_m + k$. Тоді подане вище словесне означення послідовності (f_n) можна задати рівністю

$$f_n = \varphi_{m,k}, \quad \text{де } \ m = m_n, \ k = k_n.$$

Покажемо, що $m_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Справді, $q_{m_n} = n - k_n > n - m_n \Rightarrow m_n(m_n + 1) > 2(n - m_n) \Rightarrow m_n^2 + 3m_n > 2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, звідки вже випливає, що скінченних часткових границь послідовність (m_n) не може мати.

Тому у просторі LP

$$\|f_n\|_L = \|\varphi_{m,k}\|_L = \int\limits_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} 1\,dx = \frac{1}{m} = \frac{1}{m_n} \to 0\ (n \to \infty),$$

тобто $f_n \to 0$.

Спробуємо тепер знайти $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ хоча б в одній точці $x \in P = [0;1)$. Вважаючи $x \in [0;1)$ довільним фіксованим, знайдемо для кожного $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, номери $r = r_m$ і $s = s_m \in \overline{0, m-1}$ такі, що $x \in [\frac{r}{m}; \frac{r+1}{m})$, але $x \notin$ $\notin [\frac{s}{m}; \frac{s+1}{m})$. Позначимо $n_m = q_m + r_m$, $N_m = q_m + s_m$, $m = 2, 3, \ldots$. Зрозуміло, що $n_m, N_m \uparrow \infty$. Розглянемо дві підпослідовності послідовності $(f_n(x))$:

$$f_{n_m}(x) = \varphi_{m,r_m}(x) = 1 \to 1\ \ (m \to \infty),$$

$$f_{N_m}(x) = \varphi_{m,s_m}(x) = 0 \to 0\ \ (m \to \infty).$$

Це говорить про те, що послідовність $(f_n(x))$ розбіжна у точці x. В силу довільності точки $x \in P$, ця послідовність розбіжна скрізь на P.

Отже, приклад 3 теж дає негативну відповідь на поставлене перед ним запитання. Нагадаємо лише (див. наслідок 2 п. 7.3.3), що коли $f_n \to f$ у просторі LP, то з послідовності $(f_n(x))$ можна виділити підпослідовність $(f_{k_n}(x))$, збіжну до $f(x)$ майже скрізь на P.

7.6.4. Ряди фур'є у просторі L_2P. Проілюструємо деякі факти з теорії рядів Фур'є у довільному гільбертовому просторі, встановлені в п. 1.7.4, на прикладі простору L_2P. Зазначимо, що в загальному випадку, коли $P \subset \mathbb{R}^p$, картина виходить дуже складна. Справа у тому, що навіть у просторі $CR_2[a;b]$ важко навести приклад повної ортонормованої системи, яка б складалася з функцій простого аналітичного вигляду.

Виявляється, найпростішим є випадок, коли $P = [-\pi;\pi]$, на якому ми й зупинимося. Неважко перевірити, що так звана *тригонометрична система*

$$T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\} \tag{6}$$

ортонормована у просторі $L_2[-\pi;\pi]$. Значно складніше довести (див., наприклад, [15, с. 47 − 50]), що вона повна.

Визначимо коефіцієнти Фур'є довільної функції f, що є L-інтегровною з квадратом на відрізку $[-\pi;\pi]$: $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$,

$$c_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ \ c_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Для зручності покладають

$$a_0 = c_0\sqrt{\frac{2}{\pi}},\ \ a_n = \frac{c_{2n-1}}{\sqrt{\pi}},\ \ b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Тоді дещо громіздкий ряд Фур'є $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n$ функції f за тригонометричною системою (6) набуває простішого вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx. \qquad (7)$$

Приклад 4. Для функції $f(x) = x$ маємо:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0,\ \ c_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0$$

за властивістю про інтеграл від непарної функції. Тому $a_n = 0\ \forall n\in\mathbb{N}_0$.

Далі, інтегруючи частинами, знайдемо:

$$b_n = \frac{c_{2n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\,d\cos nx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx = -\frac{2}{n}\cos\pi n = \frac{2}{n}(-1)^{n-1},\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Отже, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx$ – ряд Фур'є функції $f(x) = x$.

Позначимо H_n замкнений лінійний підпростір, породжений підсистемою T_n, утвореною першими $2n+1$ функціями системи (6), тобто $H_n = L[T_n]$. Елементи підпростору H_n можна записати у вигляді *тригонометричного многочлена*

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx. \qquad (8)$$

За теоремою 8 п. 1.7.4 найближчим до вектора $f\in L_2[-\pi;\pi]$ елементом простору H_n є часткова сума ряду Фур'є вектора f за ортонормованою системою T_n. Інакше кажучи, серед усіх тригонометричних многочленів (8) найближчим (у розумінні середньоквадратичної відстані, що задається рівністю (2)) до функції f є часткова сума її ряду Фур'є

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Оскільки тригонометрична система повна, то ряд Фур'є (7) будь-якої функції $f \in L_2[-\pi;\pi]$ збігається у просторі $L_2[-\pi;\pi]$ до самої функції f (теорема 9 п. 1.7.4). Як наслідок, згідно з п. 7.6.3, $\exists k_n \uparrow \infty$: $S_{k_n}(x) \to f(x)$ майже скрізь на $[-\pi;\pi]$. Зауважимо при цьому, що ряд Фур'є функції f не зобов'язаний поточково збігатися до $f(x)$ навіть майже скрізь.

Приклад 5. Так, згідно з прикладом 4, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$ є рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на відрізку $[-\pi;\pi]$, а тому він збігається до цієї функції у просторі $L_2[-\pi;\pi]$.

Умови поточкової збіжності рядів Фур'є вивчаються у теорії рядів Фур'є (див., наприклад, [12, 15]).

Теорема 9 пункту 1.7.4 гарантує також для будь-якої функції $f \in \in L_2[-\pi;\pi]$ правильність рівності Парсеваля $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^2 = \|f\|^2$, тобто

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2\, dx. \tag{9}$$

З рівності (9) зокрема випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, або

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = 0 \;\; \forall f \in L_2[-\pi;\pi].$$

Приклад 6. Запишемо рівність Парсеваля (9) для функції $f(x) = x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

7.6.5. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо $f^2 \in LP$, то $f \in LP$.
2. Якщо $f \in L_2P$, то $f \in LP$.
3. Твердження обернене до попереднього, правильне.
4. Якщо $f \in LP$ і f обмежена на P, то $f \in L_2P$.
5. Якщо f неперервна на P, то $f \in L_2P$.

6. Якщо f неперервна на $\overline{P}$, то $f \in L_2 P$.
7. Якщо $f \in L_2 P$, то $f^n \in L_2 P \ \forall n \in \mathbb{N}, n > 2$.
8. Простір $L_2 P$ є поповненням простору $CR_2 P$.
9. Якщо $f_n(x) \to f(x)$ на P, причому $f_n, f \in LP$, то умова "$f_n \not\to f$ у просторі LP" є достатньою для того, щоб $f_n(x)$ збігалася до $f(x)$ нерівномірно.
10. Тригонометрична система функцій замкнена і тотальна у просторі $L_2[-\pi;\pi]$.
11. У просторі $L_2[-\pi;\pi]$ можуть існувати скінченні повні системи функцій.
12. Якщо $f_n \to f$ у просторі $L_2 P$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n g\,dx = \int\limits_P f_n g\,dx \ \forall g \in L_2 P$.
13. Твердження, обернене до попереднього, неправильне.
14. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_P f_n g\,dx = \int\limits_P f_n g\,dx \ \forall g \in L_2 P$ і $\|f_n\|_{L_2} \to \|f\|_{L_2}$, то $f_n \to f$ у просторі $L_2 P$.

II. Виконати наступні вправи.

1. Довести, що простір $CR_2[0;1]$ неповний.
2. Знайти значення α, при яких функція $f(x) = x^{\frac{1}{\alpha}} \sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$ належить простору $L_2[0;1]$.
3. Показати, що функція $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$ належить простору $L[0;\frac{1}{2}]$, але не належить $L_2[0;\frac{1}{2}]$.
4. Знайти у просторі $L_2[0;1]$ найближчий до функції x^2 елемент підпростору H_1, породженого функціями 1 та x.

7.7. Класичне означення міри та інтеграла

У цьому підрозділі встановлюється зв'язок введених раніше понять L-міри та L-інтеграла з класичними поняттями міри та інтеграла Лебега.

7.7.1. Поняття зовнішньої міри та міри Лебега. *Зовнішньою мірою множини* $E \subset P$ Анрі Лебег назвав число

$$\mu^* E = \inf \sum_k \mathrm{m} P_k,$$

де інфімум береться по усіляких не більш ніж зчисленних сукупностях елементарних прямокутників $\{P_k\}$, для яких $\bigcup\limits_k P_k \supset E$ (кожна сукупність $\{P_k\}$ покриває множину E).

Виявляється, що правильна

Лема 1 (про оцінку суми $\mu^* E + \mu^* CE$). *Якщо* $E \subset P$, *то*

$$\mu^* E + \mu^* CE \geqslant \mathrm{m} P.$$

□ За властивостями інфімуму $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{P_k'\}$ і $\{P_k''\}$: $\bigcup\limits_k P_k' \supset E$, $\bigcup\limits_k P_k'' \supset CE$, $\sum\limits_k \mathrm{m} P_k' < \mu^* E + \frac{\varepsilon}{2}$ і $\sum\limits_k \mathrm{m} P_k'' < \mu^* CE + \frac{\varepsilon}{2}$. Зрозуміло, що $\bigcup\limits_k P_k' \cup \bigcup\limits_k P_k'' \supset P$ і тому за лемою 2 пункту 7.1.1

$$\mathrm{m} P \leqslant \sum_k \mathrm{m} P_k' + \sum_k \mathrm{m} P_k'' < \mu^* E + \mu^* CE + \varepsilon \Rightarrow \mathrm{m} P \leqslant \mu^* E + \mu^* CE. \ \blacksquare$$

Множину $E \subset P$ Лебег назвав *вимірною*, якщо

$$\mu^* E + \mu^* CE = \mathrm{m} P,$$

де $CE = P \setminus E$. При цьому *мірою множини* E він назвав число

$$\mu E := \mu^* E.$$

Неважко показати, що довільний елементарний прямокутник вимірний за Лебегом, причому $\mu P = \mathrm{m} P$.

7.7.2. Зв'язок між L-вимірністю і вимірністю за Лебегом.

Теорема 1 (про зв'язок L-вимірності з вимірністю за Лебегом). *Множина* $E \subset P$ *є* L*-вимірною тоді й тільки тоді, коли вона вимірна за Лебегом, тобто коли* $\mu^* E + \mu^* CE = \mathrm{m} P$. *При цьому*

$$\mathrm{m} E := \int\limits_P f_E(x)\, dx = \mu E.$$

□ Припустимо, що множина $E \subset P$ є L-вимірною, тобто її характеристична функція $f_E \in LP$, причому $\mathrm{m} E = \int\limits_P f_E(x)\, dx$. Тоді за теоремою Єгорова (див. пункт 7.3.3) $\forall \varepsilon > 0$ існує послідовність $(f_n(x))$, фундаментальна у просторі SP і $\exists \{P_k\}$: $P_k \subset P$, $\sum\limits_k \mathrm{m} P_k < \frac{\varepsilon}{3}$, $f_n(x) \rightrightarrows f_E(x)$ на $P \setminus \bigcup\limits_k P_k$ і $\int\limits_P f_n(x)\, dx \to \int\limits_P f_E(x)\, dx$ $(n \to \infty)$.

Можна також вважати (див. властивість 10 пункту 7.3.5), що $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ $\forall x \in P$ і $\forall n \in \mathbb{N}$.

Нехай $P_i^{(n)}$, $i \in \overline{1, \nu(n)}$ — прямокутники сталості східчастої функції $f_n(x)$, $x \in P$.

Оскільки $f_n(x) \rightrightarrows f_E(x)$ на $P \setminus \bigcup\limits_k P_k$, то, вважаючи $\varepsilon > 0$ довільним фіксованим, знайдемо $n_0 = n_0(\varepsilon)$:

$$f_n(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{m}P}, \ \text{ коли } \ x \in E \setminus \bigcup_k P_k = E_1,$$

і

$$0 \leqslant f_n(x) < \frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{m}P}, \ \text{ коли } \ x \in (P \setminus \bigcup_k P_k) \setminus E_1 = E_2, \ \forall n > n_0.$$

При цьому $\int\limits_P f_n(x)\,dx < \int\limits_P f_E(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n > n_0(\varepsilon)$.

Прямокутники сталості $P_i^{(n)}$, що мають з E_1 спільні точки, утворюють сукупність A.

Якщо $P_i^{(n)} \notin A$, то можливі два випадки:

1) $P_i^{(n)} \cap E_2 \neq \varnothing$, і сукупність таких прямокутників сталості позначимо B;
2) $P_i^{(n)} \cap E_2 = \varnothing$ і тоді $P_i^{(n)} \subset \bigcup\limits_k P_k$, а сукупність цих прямокутників сталості позначимо C.

Враховуючи повну адитивність L-інтеграла, маємо:

$$\int\limits_P f_n(x)\,dx = \sum_{P_i^{(n)} \in A} \int\limits_{P_i^{(n)}} f_n(x)\,dx + \sum_{P_i^{(n)} \in B} \int\limits_{P_i^{(n)}} f_n(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{P_i^{(n)} \in C} \int\limits_{P_i^{(n)}} f_n(x)\,dx \geqslant \left(1 - \frac{\varepsilon}{3\,\mathrm{m}P}\right) \sum_{P_i^{(n)} \in A} \mathrm{m}P_i^{(n)} \geqslant \sum_{P_i^{(n)} \in A} \mathrm{m}P_i^{(n)} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Оскільки в прямокутниках $P_i^{(n)}$, що належать до B, нема точок з множини E, то множину E покривають лише прямокутники $P_i^{(n)}$, що належать до A чи до C. Звідси, враховуючи останню нерівність, маємо:

$$\mu^* E \leqslant \sum_{P_i^{(n)} \in A} \mathrm{m}P_i^{(n)} + \sum_{P_i^{(n)} \in C} \mathrm{m}P_i^{(n)} \leqslant \int\limits_P f_n(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_k \mathrm{m}P_k <$$

$$< \int\limits_P f_E(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \ \Rightarrow \mu^* E \leqslant \int\limits_P f_E(x)\,dx.$$

Аналогічно доводимо, що

$$\mu^* CE \leqslant \int\limits_P f_{CE}(x)\,dx = \int\limits_P (1 - f_E(x))\,dx =$$

$$= \mathrm{m}P - \int\limits_P f_E(x)\,dx \Rightarrow \mu^* E + \mu^* CE \leqslant \mathrm{m}P.$$

Тому, враховуючи лему 1, дістаємо, що E — вимірна Лебегом множина і $\mathrm{m}E = \mu E$.

Припустимо тепер, що E — вимірна за Лебегом множина, тобто $\mu^* E + \mu^* CE = \mathrm{m}P$, $\mu E = \mu^* E$ і $\mu CE = \mu^* CE$.

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне фіксоване і

$$A = \left\{P'_k\colon \bigcup_k P'_k \supset E \ \text{ і } \ \sum_k \mathrm{m}P'_k < \mu^* E + \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

$$B = \left\{P''_k\colon \bigcup_k P''_k \supset CE \ \text{ і } \ \sum_k \mathrm{m}P''_k < \mu^* E + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Покладемо $\sigma_1(x) = \sum\limits_k f_{P'_k}(x)$, $\sigma_2(x) = \sum\limits_k f_{P''_k}(x)$. За теоремою 3 пункту 7.4.2 про почленне інтегрування функціонального ряду σ_1 і $\sigma_2 \in LP$, а за самою побудовою функцій $\sigma_1(x) \geqslant f_E(x)$, а $\sigma_2(x) \geqslant$ $\geqslant f_{CE}(x) = 1 - f_E(x)$ $\forall x \in P$.

Окрім цього,

$$\int\limits_P \Big(\sigma_1(x) - \big(1 - \sigma_2(x)\big)\Big)\,dx = \sum_k \mathrm{m}P'_k + \sum_k \mathrm{m}P''_k - \mathrm{m}P <$$

$$< \mu^* E + \mu^* CE - \mathrm{m}P + \varepsilon = \varepsilon.$$

Тому, враховуючи, що $1 - \sigma_2(x) \leqslant f_E(x) \leqslant \sigma_1(x)$, за наслідком 1 пункту 7.4.3 дістаємо, що $f_E(x) \in LP$ і

$$\int\limits_P \big(1 - \sigma_2(x)\big)\,dx \leqslant \int\limits_P f_E(x)\,dx \leqslant \int\limits_P \sigma_1(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\mathrm{m}P - \mu CE - \frac{\varepsilon}{2} = \mu E - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int\limits_P f_E(x)\,dx \leqslant \mu E + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$\int\limits_P f_E(x)\,dx = \mu E$, тобто множина E L-вимірна та її L-міра збігається з мірою Лебега. ■

Після того, як доведено теорему 1, можна не розрізняти поняття L-міри і міри Лебега, і завжди позначати міру Лебега $\mathrm{m}E$.

7.7.3. Поняття вимірної та L-вимірної функцій. Другим кроком в теорії Лебега після введення поняття L-вимірної множини є означення вимірної функції. Функцію f А. Лебег назвав *вимірною* *на вимірній множині* E, якщо $\forall c \in \mathbb{R}$ множина $E(f<c) := \{x \in E\colon f(x)<c\}$ вимірна за Лебегом.

Назвемо *L-вимірною функцією на прямокутнику* P таку функцію, яка є границею майже скрізь на P послідовності східчастих функцій $(f_n(x))$.

Функцію f, що задана на L-вимірній множині $E \subset P$, назвемо *L-вимірною на множині* E, якщо функція $f f_E$ L-вимірна на прямокутнику P.

Неважко довести, що

1) коли функція f L-вимірна, то і $|f|$ — L-вимірна функція;
2) якщо f і g — L-вимірні функції, то $f \pm g$, fg та f/g — L-вимірні функції (у випадку f/g вимагають, щоб $|g(x)|>0$ $\forall x \in P$);
3) якщо f_n — L-вимірні функції $\forall n \in \mathbb{N}$ та існує $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ майже скрізь на P, то і f — L-вимірна функція.

□ Проведемо міркування лише для границі. Насамперед зауважимо, що кожна L-вимірна і обмежена функція є L-інтегровною на P. Це випливає з теореми 5 пункту 7.4.4.

Отже, якщо f_n — L-вимірна $\forall n$ і $f_n(x) \to f(x)$ $(n\to\infty)$ майже скрізь на P, то

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{1+|f_n(x)|} \to \frac{f(x)}{1+|f(x)|} =: g(x)\ (n\to\infty)$$

майже скрізь на P, причому $|g(x)|<1$ і $|g_n(x)|<1$ $\forall n$ і $\forall x \in P$.

Оскільки $g_n \in LP$, то за теоремою Лебега $g \in LP \Rightarrow g$ — L-вимірна функція на $P \Rightarrow f = \frac{g}{1-|g|}$ — L-вимірна функція на P. ■

Ці самі властивості мають функції, що вимірні на множині E (впевніться у цьому).

7.7.4. Рівносильність вимірності та L-вимірності функцій.

□ Нехай функція f є L-вимірною на P. Зафіксуємо довільне дійсне число c і розглянемо функцію

$$f^{[c]}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{коли} \quad f(x) \geqslant c, \\ c, & \text{коли} \quad f(x) < c. \end{cases}$$

Можна довести, що функція $f^{[c]}$ є L-вимірною на P, а тому $\forall n \in \mathbb{N}$ функція

$$g_n(x) = \frac{f^{[c-\frac{1}{n}]}(x) - f^{[c]}(x)}{-\frac{1}{n}}$$

є L-вимірною на P. Покажемо, що $g_n(x) \to f_e(x)$ $(n \to \infty)$ $\forall x \in P$, де $e = \{x \in P\colon f(x) < c\}$.

Дійсно, якщо $x_0 \in e$, тобто $f(x_0) < c$, то $f(x_0) < c - \frac{1}{n}$ для досить великих $n \geqslant n_0$, тому

$$g_n(x_0) = \frac{c - \frac{1}{n} - c}{-\frac{1}{n}} = 1 = f_e(x_0) \ \forall n \geqslant n_0.$$

А якщо $x_0 \in P \setminus e$, тобто $f(x_0) \geqslant c$, то

$$f(x_0) \geqslant c - \frac{1}{n} \Rightarrow g_n(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{-\frac{1}{n}} = 0 = f_e(x_0) \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Через це $f_e(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ $\forall x \in P$, а тому $f_e(x)$ — L-вимірна функція на P. Оскільки f_e — обмежена функція, то $f_e \in LP \Rightarrow$ множина $e = P(f < c)$ — вимірна за Лебегом $\forall c \in \mathbb{R}$.

Отже, якщо функція f L-вимірна, то вона вимірна і за Лебегом.

Припустимо тепер, що функція f вимірна за Лебегом, тобто множина $P(f < c)$ вимірна за Лебегом $\forall c \in \mathbb{R}$.

Тоді для будь-яких чисел a і b будуть вимірними множини

$$P(a \leqslant f < b) := \{x \in P\colon\ a \leqslant f(x) < b\},$$

що випливає з рівності $P(a \leqslant f < b) = CP(f < a) \cap P(f < b)$.

Зафіксуємо довільне $H \in \mathbb{N}$ і розглянемо розбиття числової прямої $\mathbb{R}$ точками $\frac{n}{2^H}$, $n \in \mathbb{Z}$. Позначимо $P_n^{(H)} = P\left(\frac{n}{2^H} \leqslant f < \frac{n+1}{2^H}\right)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, а також

$$g_H(x) = \begin{cases} \frac{n}{2^H}, & \text{коли } x \in P_n^{(H)} \text{ і } \frac{|n|}{2^H} \leqslant H+1, \\ 0 & \text{для інших } x \in P. \end{cases}$$

Якщо $x_0 \in P$ фіксоване, то $\forall H \in \mathbb{N}\colon H > |f(x_0)|$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}\colon x_0 \in P_{n_0}^{(H)}$, тобто $\frac{n_0}{2^H} \leqslant f(x_0) < \frac{n_0+1}{2^H}$. Звідси дістанемо, що

$$f(x_0) - \frac{1}{2^H} < \frac{n_0}{2^H} \leqslant f(x_0) \Rightarrow -H-1 < \frac{n_0}{2^H} \leqslant H \Rightarrow \frac{|n_0|}{2^H} \leqslant H+1 \Rightarrow$$

$$g_H(x_0) = \frac{|n_0|}{2^H} \ \text{ і } \ 0 \leqslant f(x_0) - g_H(x_0) < 2^{-H} \to 0 \ (H \to \infty) \Rightarrow$$

$g_H(x) \to f(x)$ $(H \to \infty)$ на множині P. Оскільки $g_H \in LP$, то g_H — L-вимірна функція $\Rightarrow$ функція $f(x) = \lim\limits_{H\to\infty} g_H(x)$ також L-вимірна.

Рівносильність понять вимірності та L-вимірності функцій на довільній вимірній множині E випливає з доведеного вище випадку

$E = P$. Покажемо це.

Нехай функція f L-вимірна на $E \subset P \Rightarrow f_1 = f f_E$ L-вимірна на P. Тоді, за доведеним вище, f_1 вимірна на P, тобто множина $P(f_1 < c)$ вимірна $\forall c \in \mathbb{R}$. Звідси випливає, що множина

$$E(f < c) = P(f_1 < c) \cap E$$

теж вимірна $\forall c \in \mathbb{R}$. Це означає, що функція f вимірна на E.

Навпаки, нехай f — вимірна функція на множині E. Тоді $\forall c \in \mathbb{R}$ можна записати $P(f_1 < c) = E(f_1 < c) \cup (P \setminus E)(f_1 < c)$, причому $E(f_1 < c) = E(f < c)$, а $(P \setminus E)(f_1 < c) = P \setminus E$, коли $c > 0$, або є порожньою множиною, коли $c \leqslant 0$. Тому множина $P(f_1 < c)$ вимірна $\forall c \in \mathbb{R}$ і, відповідно, функція f_1 вимірна на прямокутнику P. ■

Отже, доведена

Теорема 2 (про рівносильність вимірності та L-вимірності функції). *Функція f є вимірною на вимірній множині $E \subset P$ тоді й тільки тоді, коли вона L-вимірна на цій множині.*

7.7.5. Поняття інтеграла Лебега. Введемо тепер поняття інтеграла так, як це робив сам А. Лебег.

Нехай функція f невід'ємна і вимірна на вимірній множині E, причому існує послідовність (l_n), для якої $l_0 = 0$, $0 < l_n \uparrow +\infty$, $n \to \infty$, $0 < l_{k+1} - l_k < \delta$, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k \,\mathrm{m} E_k$, де $E_k = E(l_{k-1} \leqslant f < l_k)$, збіжний.

Такі функції f називатимемо *сумовними на множині E*.

Доведемо, що коли функція f сумовна, то для будь-якої іншої послідовності $(\bar{l}_n)$: $\bar{l}_0 = 0$, $0 < \bar{l}_n \uparrow +\infty$, $0 < \bar{l}_{k+1} - \bar{l}_k < \bar{\delta}$ $\forall k$ ряд вигляду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \bar{l}_k \,\mathrm{m} \tilde{E}_k$, де $\tilde{E}_k = E(\bar{l}_{k-1} \leqslant f < \bar{l}_k)$, також є збіжним.

Дійсно, з означення множин E_k і $\tilde{E}_k$ випливає, що $\forall x \in E$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{l}_{k-1} f_{\tilde{E}_k}(x) \leqslant f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} l_k f_{E_k}(x). \tag{1}$$

Оскільки ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k \,\mathrm{m} E_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k \int\limits_P f_{E_k}(x)\,dx$ збіжний, то за теоремою про почленне інтегрування ряду маємо:

$$\int\limits_P \sum_{k=1}^{\infty} l_k f_{E_k}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \int\limits_P f_{E_k}(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \,\mathrm{m} E_k.$$

Звідси та з нерівності (1) дістаємо $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\bar{l}_{k-1}\int_P f_{\overline{E}_k}(x)\,dx \leqslant \int_P\sum_{k=1}^{\infty} l_k f_{E_k}(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty} l_k\,\mathrm{m}E_k \Rightarrow$$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\bar{l}_{k-1}\,\mathrm{m}\tilde{E}_k$ збіжний, а тому збіжний і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar{l}_k\,\mathrm{m}\tilde{E}_k=\sum_{k=1}^{\infty}\bar{l}_{k-1}\,\mathrm{m}\tilde{E}_k+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{l}_k-\bar{l}_{k-1})\,\mathrm{m}\tilde{E}_k\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\bar{l}_{k-1}\,\mathrm{m}\tilde{E}_k+\bar{\delta}\,\mathrm{m}P. \qquad (2)$$

Проведені міркування також доводять, що

$$\sum_{k=1}^{\infty}\bar{l}_{k-1}\,\mathrm{m}\tilde{E}_k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} l_k\,\mathrm{m}E_k$$

для будь-яких послідовностей (l_k) і $(\bar{l}_k)$: $0<l_k,\bar{l}_k\uparrow+\infty$, $0<l_k-l_{k-1}$, $\bar{l}_k-\bar{l}_{k-1}<\delta<+\infty$. Тому існують

$$\sup_{(l_k)}\sum_{k=1}^{\infty} l_{k-1}\,\mathrm{m}E_k=:I_*\ \text{ та }\ \inf_{(l_k)}\sum_{k=1}^{\infty} l_k\,\mathrm{m}E_k=:I^*.$$

Враховуючи нерівність (2), маємо:

$$0\leqslant I^*-I_*\leqslant\sum_{k=1}^{\infty} l_k\,\mathrm{m}E_k-\sum_{k=1}^{\infty} l_{k-1}\,\mathrm{m}E_k\leqslant\delta\,\mathrm{m}P.$$

Звідси, враховуючи, що число $\delta>0$ можна брати як завгодно малим, дістаємо рівність $I_*=I^*$, і це спільне значення А. Лебег назвав *інтегралом сумовної функції f по вимірній множині E* і позначив $\{L\}\int\limits_E f(x)\,dx$.

Для вимірної функції, що набуває значень будь-якого знаку, маємо:

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x)\ \forall x\in E,$$

і тому цю функцію А. Лебег назвав *сумовною на E*, якщо такими є функції f^+ та f^-. При цьому

$$\{L\}\int_E f(x)\,dx:=\{L\}\int_E f^+(x)\,dx-\{L\}\int_E f^-(x)\,dx.$$

7.7.6. Рівносильність понять інтеграла Лебега та L-інтеграла. У цьому пункті вважаємо, що функція f є невід'ємною на множині E, оскільки в іншому разі можна перейти до функцій f^+ та f^-.

$\square$ Нехай функція f вимірна і сумовна на множині $E \subset P$. Тоді має місце нерівність (1), звідки за наслідком 1 пункту 7.4.4 дістаємо L-інтегровність на прямокутнику P функції $f_1 = f \cdot f_E$.

Навпаки, якщо функція f_1 є L-інтегровною на P, то за теоремою 2 функція f є L-вимірною на E. Зафіксуємо $\delta > 0$ і розглянемо послідовність (l_n): $l_n - l_{n-1} < \delta$, $l_0 = 0$, $l_n < l_{n+1} \to +\infty$ $(n \to \infty)$. Тоді, вважаючи $E_k = E(l_{k-1} \leqslant f < l_k)$, маємо: $f_1(x) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k f_{E_k}(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_1(x) f_{E_k}(x) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (l_k - f_1(x)) f_{E_k}(x) \leqslant f_1(x) + \delta.$

Звідси випливає, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} l_k \mathrm{m} E_k$ збіжний, причому

$$\int\limits_P f_1(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} l_k \mathrm{m} E_k \leqslant \int\limits_P f_1(x)\,dx + \delta \mathrm{m} P \Rightarrow$$

$$\inf_{(l_k)} \sum_{k=1}^{\infty} l_k \mathrm{m} E_k = \int\limits_P f_1(x)\,dx,$$

оскільки $\delta > 0$ — довільне.

Це означає, що функція f є сумовною на множині E і $\{L\} \int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_P f_1(x)\,dx$. $\blacksquare$

Отже, доведена

Теорема 3 (критерій сумовності). *Для того щоб функція f була вимірною і сумовною на вимірній множині $E \subset P$, необхідно й досить, щоб вона була L-інтегровною на цій множині. При цьому*

$$\{L\} \int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E f\,dx.$$

7.7.7. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна множина E має зовнішню міру Лебега $\mu^* E$.
2. $\mu^* E + \mu^* CE = \mathrm{m} P$ для кожної множини $E \subset P$.
3. Існує множина $E \subset P$: $\mu^* E + \mu^* CE < \mathrm{m} P$.
4. Існує множина $E \subset P$: $\mu^* E + \mu^* CE > \mathrm{m} P$.
5. Існує L-вимірна множина $E \subset P$, що не є вимірною за Лебегом.

6. Існує вимірна за Лебегом множина $E \subset P$, що не є L-вимірною.
7. Множина E вимірна за Лебегом, якщо $\exists c \in \mathbb{R}$: $E(f < c)$ — вимірна множина.
8. Існує L-вимірна функція, що не є вимірною за Лебегом.
9. Кожна сумовна функція на множині E має інтеграл Лебега по множині E.
10. Кожна сумовна функція на множині E є L-інтегровною на E.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо одна з множин $E(f > c), E(f < c), E(f \geqslant c), E(f \leqslant c)$ вимірна за Лебегом $\forall c \in \mathbb{R}$, то і будь-яка з цих множин вимірна $\forall c \in \mathbb{R}$.
2. Якщо функція f вимірна на P, то її можна вважати неперервною, якщо нехтувати множиною як зовгодно малої міри.

7.7.8. Історична довідка. Поняття множини L-міри нуль по суті належить французькому математику Е. Борелю (1871 — 1956), який у 1896 році запропонував означення міри, яке узагальнює означення міри Жордана.

У 1902 році французький математик А. Лебег (1875 — 1941) побудував нову теорію міри та інтеграла, яка узагальнює теорію Е. Бореля.

Метод побудови інтеграла Лебега за допомогою східчастих функцій належить угорському математику Ф. Рісу (1890 — 1956), який запропонував цей метод у 1919 році.

Теорема, доведена у 1911 році російським математиком Д. Ф. Єгоровим (1869 — 1931), стала відправною точкою для робіт з теорії функцій дійсної змінної математиків, які працювали в Росії, до складу якої входила тоді й Україна. Більшість із цих математиків входили у славнозвісну московську математичну школу, засновниками якої були Д. Ф. Єгоров та М. М. Лузін (1883 — 1950).

Свою теорему про граничний перехід під знаком інтеграла А. Лебег довів у 1910 році. Італійський математик Б. Леві (1875 — 1961) та французький математик П. Фату довели свої теореми про граничний перехід під знаком інтеграла у 1906 році. По суті ці три твердження еквівалентні між собою.

Теорема про зв'язок подвійного інтеграла Лебега з повторним доведена італійським математиком Г. Фубіні (1879 — 1943).

У 1930 році датський математик Б. Ієнсен (1907) першим узагальнив теорему Фубіні на випадок декартового добутку з нескінченною кількістю співмножників.

Література

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. — М.: Наука, 1977. — 600 с.
2. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. — М.: Наука, 1965. — 424 с.
3. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 1. — К.: Вища школа, 1990. — 384 с.
4. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 2. — К.: Вища школа, 1991. — 366 с.
5. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. Ч. 3. — К.: Вища школа, 1992. — 360 с.
6. *Данфорд Н., Шварц Т.* Линейные операторы. — М.: Иностр. лит., 1962. — 896 с.
7. *Дзядик В. К.* Математичний аналіз. Т. 1. — К.: Вища школа, 1995. — 495 с.
8. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. — К.: Выща школа, 1989. — 152 с.
9. *Михалін Г. О.* Вступ до аналізу у метричних просторах та диференціальне числення функцій кількох змінних. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1999. — 196 с.
10. *Михалін Г. О.* Елементи теорії інтеграла та міри. — К.: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2000. — 266 с.
11. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989. — 624 с.
13. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1988. — 712 с.
14. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 2. — М.: Высшая школа, 1988. — 576 с.
15. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 3. — М.: Высшая школа, 1989. — 352 с.

16. *Ляшко И. И., Емельянов В. Ф., Боярчук А. К.* Основы классического и современного анализа. — К.: Вища школа, 1988. — 592 с.
17. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 1. — М.: Наука, 1967. — 486 с.
18. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
19. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 1. — М.: Наука, 1975. — 432 с.
20. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1975. — 408 с.
21. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979. — 600 с.
22. *Рудин У.* Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976. — 320 с.
23. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Иностр. лит., 1949. — 496 с.
24. *Толстов Г. П.* Мера и интеграл. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
25. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1 — 2. — М.: Наука, 1969. — 528 с.
26. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 3. — М.: Наука, 1970. — 352 с.
27. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. Ч. 1 — 2. — М.: Наука, 1972. — 624 с.
28. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. Общая теория. — М.: Наука, 1967. — 220 с.
29. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Ч. 1. — К.: Вища школа, 2005. — 448 с.
30. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Ч. 2. — К.: Вища школа, 2005. — 510 с.
31. *Халмош П.* Теория меры. — М.: Иностр. лит., 1953. — 292 с.
32. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1072 с.

Предметний покажчик