Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського

А. А. Томусяк, В. С. Трохименко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

посібник для випускників фізико-математичних факультетів
педагогічних університетів та інститутів

Вінниця, 1999

Рецензенти: доктор фізико-математичних наук, професор Панков О.А. (Вінницький педагогічний університет) і доктор фізико-математичних наук, професор Турбін А.Ф. (інститут математики НАН України).

Навчальний посібник написано відповідно до програми державного екзамену з математики з методикою її викладання (розділ „Математичний аналіз“) для спеціальностей „Математика“, „Математика і фізика“, „Фізика і математика“ педагогічних університетів та інститутів.

У посібнику подано 30 оглядових лекцій, що повністю охоплюють згаданий розділ програми. Матеріал кожної з них випускник не зможе викласти на екзамені повністю, а тому він має на основі поданого матеріалу сконструювати 10 – 20 хвилинну відповідь, у якій продемонструвати вміння ввести певне поняття, зпрогнозувати його властивості, обґрунтувати одну з них, розкрити робочі можливості як понятійного апарату, так і використовуваних методів.

Гарантом того, що випускник спроможний упоратись з таким завданням, є „автономний“, однак не „атомістичний“, виклад матеріалу при наявності його історико-логічного аналізу.

Посібник придатний для самостійної підготовки до державного екзамену (особливо студентів заочної форми навчання), а включені до нього завдання для самоконтролю допоможуть випускнику оцінити свої знання і вміння аналізу функцій.

Зміст

Вступ

Математичний аналіз — частина математики, у якій функція та її узагальнення вивчаються методом границь (методом нескінченно малих). Його місце і роль у сучасній математиці може бути охарактеризовано так: „Математичний аналіз (у широкому розумінні слова) і алгебра, переплітаючись, утворили ту кореневу систему, на якій тримається розгалужене дерево сучасної математики і через яку здійснюється його життєдайний контакт з нематематичним світом“ [3, т. 1, с. 8].

Витоки математичного аналізу історія пов'язує з іменами великих греків Евдокса (біля 408–355 до н.е.), Архімеда (біля 287–212 до н.е.) (перший створив метод вичерпування для обчислення площ плоских фігур, другий цим методом знаходив не тільки площі плоских фігур, але й об'єми тіл, крім того з допомогою дотичних розв'язував задачу відшукання екстремуму функції).

Майже 20 століть ці методи були на озброєнні цивілізацій різних часів на терені різних регіонів. і тільки на кінець XVI і початка XVII століття європейські дослідники зробили наступний крок в оновленні елінських методів. іоган Кеплер (1571–1670), Бонавентура Кавальєрі (1598–1647) створили метод неподільних, Еванджелиста Торрічеллі (1608–1647) — кінематичний метод проведення дотичних, а П'єр Ферма (1601–1665) при визначенні екстремальних значень функцій $f(x)$ відмовився від методу дотичних і запропонував чисто алгебраїчний метод, в основі якого рівняння

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0.$$

Звичайно цьому сприяло встановлення Рене Декартом (1596–1650) зв'язку алгебри з геометрією кривих.

Зореносною для математичного аналізу стала друга половина XVII століття, коли два геніальні учені англійський ісаак Ньютон (1642–1727) і німецький Готфрід Лейбніц (1646–1716) здійснили епохальне відкриття, яке „навіть за нинішних масштабів розвитку науки постає як одна з найвидатніших подій в історії науки взагалі і особливо математики" [3, т. 1, с. 8]. Це було відкриття диференціального та інтегрального числення і встановлення зв'язку між ними.

Хоча Ньютон отримав більшість результатів у 60–70 роках [6, с. 177], однак першою була публікація Лейбніца (1648 р.). У цій роботі викладені основи диференціального числення, вводиться символіка ($dx,\ dy$), яка збереглася донині. У 1686 р. виходить у світ друга робота Лейбніца, у якій викладено основи інтегрального числення, зокрема введено символ $\int$.

Відкриті нові методи були застосовані до аналізу змінних величин, які вводились або засобами геометрії, або аналітичними (складеними з певних символів) виразами, або як абстракції різних видів неперервного механічного руху (Ньютон). Необхідно було уніфікувати ті об'єкти, до яких можна було застосовувати нові операції. Таким узагальнюючим поняттям стало поняття функції.

Термін „функція" вперше з'явився у 1692 році у Лейбніца, як вираження залежності довжини відрізків, пов'язаних з кривою, від положення точки на кривій, а в 1718 р. іоган Бернуллі (1667–1748) запропонував під функцією розуміти просто аналітичний вираз. і уже великий будівничий математичного аналізу Леонард Ейлер (1707–1783) у своєму восьмитомному курсі аналізу [6, с. 199] констатує, що „аналіз нескінченно малих обертається навколо змінних величин і їх функцій". Таким чином основний об'єкт математичного аналізу чітко визначився ще у XVIII ст.

Щодо методів дослідження функцій прерогатива була за диференціюванням (вивчення властивостей функції за допомогою розкладу у степеневий ряд) та інтегруванням (відшукання первісних).

Разом з тим не тільки теоретичні дослідження, але й розв'язання практичних задач вимагали більш точних методів і у першу чергу вимагали вияснення сутності нескінченно малої, пояснення правомірності використовуваних методів.

і знову вихід було знайдено через осмислення способу діяння древніх греків, а саме через усвідомлення того, що ті граничні переходи, які проводились в окремих задачах, можуть слугувати для побудови теорії границь.

Перша спроба була зроблена ще Ньютоном (він же ввів спеціальний термін „$limes$“). Не обійшов цієї важливої проблеми і Ейлер. Однак ці намагання не сприймались математиками XVIII століття у першу чергу із-за відсутності алгоритму обчислення границь. і тільки після того як Огюстен-Луї Коші (1789–1857) запропонував свій ε–δ інструментарій і побудував з допомогою нього курс математичного аналізу, головним методом аналізу було визнано граничний перехід.

Завершив систему логічного обгрунтування математичного аналізу Карл Вейєрштрасс (1815–1897), підвівши під нього фундамент у вигляді строгої теорії дісного числа.

Паралельно з теорією числових функцій розвивалась теорія функцій комплексної змінної, функцій багатьох змінних та їх узагальнення. А найбільш великим здобутком аналізу XX століття була побудова функціонального аналізу, основною метою якого є вивчення функцій (операторів), у яких хоча б одна змінна приймає значення з нескінченно вимірного простору. Найвищий рівень абстракції досягнуто в аналізі функцій, визначених на так званих топологічних просторах.

Підсумовуючи ще раз наголосимо, що основним об'єктом математичного аналізу (аналізу функцій) є функція, а основним методом її дослідження є метод граничного переходу.

Глобальними задачами теорії функцій є: їх конструювання, знаходження значення функції для відповідного значення аргумента, обернена задача (знаходження значення аргумента за значенням функції), вивчення властивостей функції, заданої самими різними способами, знаходження функції за її властивостями і, нарешті, використання методів математичного аналізу для розв'язування задач з інших розділів математики і прикладних задач.

1*ЛЕКЦІЯ*: Множина дійсних чисел

Аксіоматика множини дійсних чисел. Властивість неперервності множини дійсних чисел. Поняття верньої і нижньої граней числової множини, їх існування і властивості.

Література. [3], т.1, с.11–26; [2], ч.1, с.44–82; Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. М.: Наука, 1979. С. 35–60.

З формального погляду множина дійсних чисел означається як математична структура $(\mathbb{R}, 0, 1, \leqslant, +, \cdot)$ з базисною множиною $\mathbb{R}$, виділеними елементами 0, 1, відношенням порядку $\leqslant$, алгебраїчними операціями $+, \cdot$, яка задовольняє такі властивості (аксіоми).

I. Аксіоми порядку:

$$1^\circ\ (\forall x \in \mathbb{R})(x \leqslant x);$$
$$2^\circ\ (\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leqslant y \wedge y \leqslant x \Longrightarrow x = y);$$
$$3^\circ\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leqslant y \wedge y \leqslant z \Longrightarrow x \leqslant z);$$
$$4^\circ\ (\forall x, y \in \mathbb{R})(x \leqslant y \vee\ y \leqslant x).$$

II. Аксіоми додавання:

$$1^\circ\ (\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y = y + x);$$
$$2^\circ\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x + (y + z) = (x + y) + z);$$
$$3^\circ\ (\forall x \in \mathbb{R})(x + 0 = x);$$
$$4^\circ\ (\forall x \in \mathbb{R})(\exists - x \in R)(x + (-x) = 0).$$

III. Аксіоми множення:

$$1^\circ\ (\forall x, y \in \mathbb{R})(x \cdot y = y \cdot x);$$
$$2^\circ\ (\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z);$$
$$3^\circ\ (\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot 1 = x);$$
$$4^\circ\ (\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})(\exists x^{-1} \in \mathbb{R})(x \cdot x^{-1} = 1).$$

IV. Аксіома зв'язку додавання і множення:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{R})((x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z).$$

V. Аксіоми зв'язку додавання і порядку, множення і порядку:

$$1^\circ \ (\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z);$$
$$2^\circ \ (\forall x, y, z \in \mathbb{R})(x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z \Longrightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z).$$

V. Аксіома неперервності:

$$(\forall X, Y \in 2^{\mathbb{R}})(X \neq \varnothing \wedge Y \neq \varnothing \wedge (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leqslant y)) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leqslant z \leqslant y).$$

Будь-яку множину, яка задовольняє перелічені властивості, називають множиною дійсних чисел, а елементи — дійсними числами.

Перша група аксіом характеризує множину $\mathbb{R}$ як лінійно впорядковану множину, відносно додавання $\mathbb{R}$ — абелева група, відносно множення $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ теж абелева група, а II, III, IV групи аксіом характеризують множину $\mathbb{R}$ як поле, причому V група аксіом наділяє $\mathbb{R}$ структурою впорядкованого, навіть більше, розташованого поля. Аксіома неперервності, у якій стверджується, що для будь-яких непорожніх підмножин X, Y множини $\mathbb{R}$ таких, що кожен елемент першої не перевищує будь-якого елемента другої, то в $\mathbb{R}$ існує елемент z такий, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ $x \leqslant z \leqslant y$, характеризує поле $\mathbb{R}$ як неперервне поле.

Подана аксіоматика несуперечлива (точніше несуперечлива в рамках теорії множин, побудованої на основі, наприклад, аксіоматики Цермело), оскільки множини, які задовольняють перераховані аксіоми, існують. При побудові конкретної моделі, як правило, виходять з множини раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Найбільш популярними є моделі Вейєрштрасса, Дедекінда і Коші.

У першій множина $\mathbb{R}$ — множина всіх можливих нескінченних десяткових дробів за винятком тих, у яких 9 є періодом, у другій множина $\mathbb{R}$ — множина розрізів множини $\mathbb{Q}$, у третій — фактор-множина, що породжується відношенням еквівалентності на множині фундаментальних послідовностей раціональних чисел. Зрозуміло, що найбільш практична є модель Вейєрштрасса, яка дозволяє ототожнювати дійсні числа з послідовностями їх наближень (наприклад, десятковими дробами). Якраз на цій моделі базуються фрагменти теорії дійсних чисел у шкільному курсі математики.

Основне місце в аксіоматиці посідає аксіома неперервності (властивість повноти множини $\mathbb{R}$). Якраз вона виводить за межі алгебри і дозволяє ввести основну неалгебраїчну операцію — граничний перехід, а з геометричної точки зору означає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між множиною $\mathbb{R}$ і множиною точок числової (координатної) прямої, тобто геометризувати множину $\mathbb{R}$. Як наслідок, ми дістаємо чудову геометричну інтерпретацію відношення порядку, означаємо відстань між числами (точками), яка добре узгоджується з поняттям відстані на прямій.

Властивість неперервності може бутя вираженою іншими (еквівалентними аксіомі VI) способами, наприклад, через поняття нижньої і верхньої грані (підхід Вейерштрасса).

Оскільки множина $\mathbb{R}$ наділена лінійним порядком $\leqslant$, (а, отже, і лінійними порядками $<, \geqslant, >$), то в очевидний спосіб означається поняття множини обмеженої зверху (знизу), найбільшого і найменшого елемента. А саме, множина X ($X \subset \mathbb{R}$) називається обмеженою зверху (знизу), якщо існує таке дійсне число a, що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $x \leqslant a$ ($a \leqslant x$). Природно множину обмежену як знизу так і зверху називати обмеженою, іншими словами, множина X — обмежена, якщо існують дійсні числа a і b такі, що для всіх $x \in X$ $a \leqslant x \leqslant b$. Між іншим зауважимо, що з огляду на геометричне подання множини $\mathbb{R}$ природно говорити про обмеженість зліва (обмеженість справа). Елемент (число) $a \in X$ будемо називати мінімальним (найменшим) елементом множини X, якщо $a \leqslant x$ для будь-якого $x \in X$, а елемент (число) $b \in X$ будемо називати максимальним (найбільшим) елементом множини X, якщо $x \leqslant b$ для будь-якого $x \in X$.

З геометричної точки зору зрозуміло, що коли множина X має мінімальний (максимальний) елемент, то він єдиний, бо ж мінімальний це сама ліва точка на числовій прямій, а максимальний це сама права точка. У рамках аксіоматичної теорії цей факт необхідно доводити.

Теорема 1.1. *Якщо множина X має мінімальний (максимальний) елемент, то він єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існує множина дійсних чисел X, яка має принаймні два різних мінімальних елементи, тобто існують такі два елементи a_1 і a_2 ($a_1 \neq a_2$), що для всіх $x \in X$ $a_1 \leqslant x$ і $a_2 \leqslant x$. Але тоді з того, що a_1 мінімальний елемент множини X і $a_2 \in X$, випливає, що $a_1 \leqslant a_2$, а з того, що a_2 мінімальний елемент множини X і $a_1 \in X$, випливає, що $a_2 \leqslant a_1$. Таким чином маємо два числа a_1 і a_2, для яких $a_1 \leqslant a_2$ і $a_2 \leqslant a_1$. В силу другої аксіоми порядку маємо, що $a_1 = a_2$. Останнє суперечить припущенню. Отже, не існує непорожньої підмножини множини $\mathbb{R}$, яка б мала більше одного мінімального елемента. ■

Нехай маємо непорожню множину X.

Означення 1.1. *Число a називається нижньою (верхньою) гранню множини X, якщо:*

1. для будь-якого $x \in X$ $a \leqslant x$ ($x \leqslant a$),

2. для будь-якого числа $a' > a$ ($a' < a$) існує хоча би один елемент $x' \in X$ такий, що $x' < a'$ ($x' > a'$).

Позначається $\inf X$ *— нижня грань, а* $\sup X$ *— верхня грань множини X.*

Приклад 1. У якому відношенні знаходиться дійсне число a (нижня межа, верхня межа, найменший елемент, найбільший елемент, нижня грань, верхня грань) стосовно множини всіх тих дійсних чисел, подання яких нескінченними десятковими дробами починається так $1,41\ldots$, якщо $a = \sqrt{2}$; $1,41$; $\frac{31}{22}$; $1,42$; $\sqrt{3}$.

Розв'язання. Нехай X — множина всіх тих дійсних чисел, подання яких у вигляді нескінченного десяткового дробу має цілою частиною 1, а перші дві цифри після коми 4 і 1. Тоді виходячи з подання $\sqrt{2} = 1,414213\ldots, 1,41 = 1,41000\ldots, \frac{31}{22} = 1,4090909\ldots, 1,42 = 1,42000\ldots, \sqrt{3} = 1,73205\ldots$ і означення відношення $<$ у множині нескінченних десяткових дробів, у яких 9 не є періодом, робимо висновок, що 1,41 — нижня грань, $\frac{31}{22}$ —нижня межа, 1,42 — верхня грань, $\sqrt{3}$ — верхня межа множини X, причому $\inf X \in X$, $\sup X \notin X$. Отже, X має найменший елемент, але немає найбільшого елемента.

Приклад 2. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини площ всіх можливих трикутників описаних навколо кола радіуса r.

Розв'язання. Нехай у трикутнику, описаному навколо кола радіуса r, два кути відповідно дорівнюють α і β (Рис. 1).

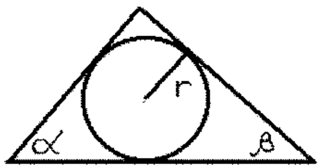


Рис. 1

Тоді площа описаного трикутника залежить від того, якими будуть кути α і β, тобто є функцією змінних α і β. Позначимо її $S(\alpha, \beta)$.

Оскільки $S(\alpha, \beta) = rp = r(r\text{ctg}\frac{\alpha}{2} + r\text{ctg}\frac{\beta}{2} + r\text{ctg}(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2})) = r^2(\text{ctg}\frac{\alpha}{2} + \text{ctg}\frac{\beta}{2} + \text{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}))$, то задача зводиться до знаходження найменшого та найбільшого значення функції $S(\alpha, \beta)$ при умові $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta < \pi$. Якщо якийсь із кутів буде прямувати до нуля, то, очевидно, що площі відповідних трикутників будуть нескінчено зростати, і ніяке число не може бути верхньою гранню множини площ трикутників, описаних навколо заданого кола. Таким чином, ця множина необмежена зверху і верхньої грані, а, отже, найбільшого значення, немає. із системи

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = r^2 \left(-\frac{1}{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2\cos^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = r^2 \left(-\frac{1}{2\sin^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2\cos^2(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2})} \right) = 0$$

дістаємо $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\beta}{2}$. А оскільки $0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$,$0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, то остання рівність виконується тільки при $\alpha = \beta$. Тоді з рівняння $\cos^2 \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0$ і заданих умов дістанемо, що $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Таким чином, функція $S(\alpha, \beta)$ досягає мінімуму у точці $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ і мінімальне значення це площа рівностороннього трикутника, описаного навколо кола радіуса r. Звідси маємо, що найменшим елементом заданої множини є число $3\sqrt{3}r^2$.

Очевидно, що не кожна навіть обмежена множина має найменший і найбільший елемент. А от питання існування нижньої і верхньої грані відразу знімається, якщо є інформація про обмеженість множини.

Теорема 1.2. *Кожна непорожня обмежена зверху множина дійсних чисел має точну верхню грань, причому вона єдина.*

Доведення. Нехай $X \subset \mathbb{R}$ обмежена зверху множина дійсних чисел, а $Y = \{y \mid y \in \mathbb{R} \wedge (\forall x \in X)(x \leqslant y)\}$ — множина всіх верхніх меж множини X. Ці множини непорожні і $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leqslant y)$. Тоді за аксіомою неперервності існує число c таке, що $(\forall x \in X)(\forall y \in Y)(x \leqslant c \leqslant y)$. Оскільки для будь-якого $x \in X$ $x \leqslant c$, то $c \in Y$, а оскільки для будь-якого

$y \in Y$ $c \leqslant y$, то c — мінімальний елемент множини Y. А найменша межа множини X і є її верхньою гранню. єдиність верхньої грані випливає з єдиності мінімального елемента множини Y. ■

Доведення того факту, що кожна непорожня обмежена знизу множина має єдину нижню грань, проводиться так саме.

Виявляється, що теорема 1.2 рівноцінна аксіомі неперервності, тобто коли замість аксіоми VI прийняти аксіому

VI′. *Будь-яка непорожня обмежена зверху множина має точну верхню грань*,

то можна довести таку теорему:

Теорема 1.3. *Якщо X і Y — непорожні підмножини множини $\mathbb{R}$ такі, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ виконується нерівність $x \leqslant y$, то існує таке $c \in \mathbb{R}$, що $x \leqslant c \leqslant y$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$.*

Доведення. Нехай X і Y — непорожні множини такі, що $\forall x \in X$ і $\forall y \in Y$ $x \leqslant y$. Тоді множина X обмежена зверху, а, отже, має верхню грань. Покажемо, що $\forall x \in X$ і $\forall y \in Y$ $x \leqslant \sup X \leqslant y$. Справді, якщо $Z = \{z \mid z \in \mathbb{R} \wedge (\forall x \in X)(x \leqslant z)\}$, то $\sup X = \min Z$, а оскільки $Y \subset Z$, то для будь-якого $y \in Y$ $\min Z \leqslant y$. Отже, $\sup X$ є якраз тим числом, що $x \leqslant \sup X \leqslant y$ для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$. ■

Якщо за аксіому неперервності прийняти аксіому VI, то кажуть, що неперервність множини дійсних чисел означена за Дедекіндом, якщо ж — аксіому VI′, то за Вейерштрассом.

Нарешті, якщо у множині $\mathbb{R}$ виділити множину натуральних чисел $\mathbb{N}$, як найменшу індуктивну множину (множину, яка з кожним числом x, що їй належить, містить число $x + 1$), яка містить 1, то неперервність множини $\mathbb{R}$ можна охарактеризувати такими двома аксіомами.

Аксіома Архімеда. *Для будь-якого дійсного числа x існує натуральне число n таке, що $n > x$.*

Аксіома Кантора. *Для будь-якої системи вкладених відрізків* $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$*, де*

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1,$$

існує хоча би одне число, яке належить всім відрізкам.

Якщо на систему вкладених відрізків накласти додаткову вимогу, щоб вона була стяжною ($\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ такий, що $\forall n > n_0$ $b_n - a_n < \varepsilon$), то легко показати, що тоді існує єдина точка, що належить всім відрізкам системи.

Якраз у такому вигляді цей факт широко використовується в аналізі.

Підсумовуючи, підкреслимо, що властивість неперервності множини $\mathbb{R}$ повсюди використовується на практиці. Властивість неперервності множини дійсних чисел виражає собою об'єктивну впевненість у тому, що вимірювана величина має певне значення, яке знаходиться між її наближеними значеннями, обрахованими з недостачею і надлишком [3, т. 1, с. 19]. Як цими значеннями розпорядитись дає відповідь закон великих чисел.

Поняття верхньої і нижньої граней відіграють провідну роль у терії інтегрування, а особливо у теорії міри.

Завдання для самоконтролю.

1. Як означити поняття обмеженої множини з допомогою поняття абсолютної величини (модуля) дійсного числа? Доведіть еквівалентність сформульованого вами означення з означенням, приведеним у тексті.

2. Сформулюйте теорему про єдиність максимального елемента.

3. Якщо кожне число a таке, що для будь-якого елемента $x \in X$ $a \leqslant x$, назвати нижньою межею множини X, а кожне число b таке, що для будь-якого елемента $x \in X$ $x \leqslant b$,

назвати верхньою межею множини X, то яким чином через ці терміни можна означити $\inf X$ і $\sup X$?

4. Знайти грані (якщо вони є) множини

$$\left\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \mid m \in N,\ n \in N\right\}.$$

5. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини площ трикутників, вписаних у коло радіуса $\mathbb{R}$.

6. Довести, що якщо X, Y — непорожні обмежені множини, то

$$\begin{aligned} \inf X \cup Y &= \min(\inf X, \inf Y), \\ \sup X \cup Y &= \max(\sup X, \sup Y). \end{aligned}$$

7. Знайти найменший і найбільший елементи (якщо вони є) множини

$$\{x \mid \log_{x^2+1} \frac{1}{3}|x+1| < 0\}.$$

8. Як зміниться висновок теореми про стяжну систему вкладених відрізків, якщо залишити тільки вимогу про вкладеність відрізків?

9. Чи справедливим буде твердження про те, що будь-яка система вкладених інтервалів має непорожній перетин?

10. Які числові множини виділяються такими характеристичними властивостями:

а) $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(a \leqslant M)$,

б) $(\exists M \in \mathbb{R})(\exists a \in A)(a \leqslant M)$,

в) $(\forall M \in \mathbb{R})(\forall a \in A)(a \leqslant M)$, г) $(\forall M \in \mathbb{R})(\exists a \in A)(a \leqslant M)$,

д) $(\exists a \in A)(\forall M \in \mathbb{R})(a \leqslant M)$,

е) $(\exists a \in A)(\exists M \in \mathbb{R})(a \leqslant M)$,

є) $(\forall a \in A)(\forall M \in \mathbb{R})(a \leqslant M)$,

ж) $(\forall a \in A)(\exists M \in \mathbb{R})(a \leqslant M)$.

2*ЛЕКЦІЯ*: Множина комплексних чисел

Аксіоматика множини комплексних чисел. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Топологія у полі $\mathbb{C}$.

Література. [1], ч. 3, с. 201–206; [3], т. 1, с. 327–335; [4], с. 4–12.

Історія комплесних чисел розпочинається з 16 ст. коли італійські математики Джіроламо Кардано (1501–1576) і Рафаель Бомбелі (біля 1530–1573), розв'язуючи квадратні рівняння, скористались символами $\sqrt{-1}$ (формальний розв'язок рівняння $x^2+1=0$) і $b\sqrt{-1}$ (формальний розв'язок рівняння $x^2+b^2=0$). Однак коли перший вважав такі символи непридатними для використання, то другий побачив їх користь при розв'язуванні кубічних рівнянь (коли дійсні корені виражаються через кубічні корені з уявних величин).

Незважаючи на опір, який чинили математики 17 і навіть 18 століть наданню статусу чисел уявним величинам, такі величини набували все ширшого і ширшого вжитку. Так Жирар (1629) і Декарт (1637) встановили, що коли використовувати уявні величини, то алгебраїчне рівняння має стільки коренів, яким є його степінь. У 18 ст. крім алгебри уявні величини знайшли саме безпосереднє застосування в аналізі. Лейбніц, Іоган Бернуллі, Д'Аламбер, Ейлер не тільки користувались цими величинами, але й функціями таких величин. Знамениті формули Ейлера

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i\right),$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i\right)$$

(тут у Ейлера i — нескінченно велике число, i — перша літера слова $infinite$ — нескінченний), після того як скористатись позначенням

$$\left(1+\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{x\sqrt{-1}}; \quad \left(1-\frac{x\sqrt{-1}}{i}\right)^i = e^{-x\sqrt{-1}}$$

(у сучасних позначеннях $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$) і введеним самим Ейлером (1784) позначенням $i = \sqrt{-1}$, встановили зв'язок між тригонометричними і показниковими функціями

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

Статус чисел уявні величини отримали у роботах Карла Гаусса (1777–1855), який у 1799 році ввів термін „комплексне число" і довів алгебраїчну замкненість множини цих чисел.

Нехай маємо множину $\mathbb{C}$ символів виду $a+bi$, де $a,\ b\in\mathbb{R}$, тобто $C = \{a+bi \mid a,\ b\in\mathbb{R}\}$. Означимо у цій множині дві операції: для будь-яких елементів a_1+b_1i, a_2+b_2i з $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i) &:= (a_1+a_2)+(b_1+b_2)i,\\ (a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i) &:= (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i.\end{aligned} \tag{2.1}$$

В очевидний спосіб перевіряється , що операція додавання є асоціативною і комутативною, що елемент $0+0i$ є нейтральним елементом відносно неї, а елемент $-a-bi$ є протилежним до елемента $a+bi$. Отже, відносно додавання множина $\mathbb{C}$ абелева група.

Також неважко перевірити, що операція множення є асоціативною і комутативною, а елемент $1+0i$ є нейтральним відносно множення, тобто відносно множення $\mathbb{C}$ є комутативною напівгрупою з одиницею.

Якщо $a+bi\neq 0+0i$, то $(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+0i$, причому $a^2+b^2\neq 0$. У зв'язку з цим для кожного елемента $a+bi\neq 0+0i$

існує елемент $c+di \in \mathbb{C}$, а саме

$$c+di=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}\,i,$$

такий, що $(a+bi)(c+di)=1+0i$, що дозволяє ввести операцію ділення: для будь-яких a_1+b_1i, $a_2+b_2i \neq 0+0i$

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{-a_1b_2+b_1a_2}{a_2^2+b_2^2}\,i. \tag{2.2}$$

Практично ділення виконується так: у дробі $\dfrac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}$ чисельник і знаменник домножаються на число a_2-b_2i (спряжене до a_2+b_2i).

Отже, множина $\mathbb{C}\setminus\{0+0i\}$ відносно операції множення є абелева група.

Нарешті, неважко перевірити, що операція множення є дистрибутивною відносно додавання, і з алгебраїчної точки зору множина $\mathbb{C}$ відносно операцій (2.1) є поле.

Доведено, що у полі не можна ввести лінійний порядок, який би був монотоним відносноє додавання, тобто поле $\mathbb{C}$ не можна впорядкувати у такий спосіб, як це було зроблено для поля $\mathbb{R}$.

Означення 2.1. *Поле $\mathbb{C}$ називають полем комплексних чисел, а його елементи комплексними числами. Запис $a+bi$ називають алгебраїчною формою комплексного числа, у якому $a=\operatorname{Re}(a+bi)$ — дійсна, $b=\operatorname{Im}(a+bi)$ — уявна частина.*

Підмножина $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{a+0i \mid a\in\mathbb{R}\}$ множини $\mathbb{C}$ є підполе поля $\mathbb{C}$, яке ізоморфне полю $\mathbb{R}$. У зв'язку з цим у полі $\mathbb{C}$ підполе $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ замінюють на поле $\mathbb{R}$, тобто числа виду $a+0i$ є дійсними числами і записують $a+0i=a$. Комплексні числа виду $0+bi$ називають чисто уявними і записують $0+bi=bi$, зокрема $0+1\cdot i=i$ і $i^2=-1$.

З цієї точки зору поле $\mathbb{C}$ є розширенням поля $\mathbb{R}$, яке виявилось досить продуктивним у тому плані, що стали розв'язними задачі, які над полем $\mathbb{R}$ не мали розв'язку. Яскравий приклад цьому — будь-яке квадратне рівняння має два (з врахуванням кратності) корені.

У шкільному підручнику [8, с. 399–418] при введені комплексних чисел на першому плані символ i, для якого приймається така рівність $i^2 = -1$. Називають цей символ уявною одиницею. А множина $\mathbb{C}$ вводиться як множина всіх чисел виду $a + bi$, де $a,\ b$ — довільні дійсні числа. Число a називається дісною, а вираз bi — уявною частиною комплексного числа $a + bi$. (Останнє не узгоджується із загальновживаним у математиці терміном „уявна частина"). Далі вводяться дії над комплексними числами фактично за формулами (2.1), однак тут же рекомендується, що цілком природно, виконувати дію додавання, віднімання та множення над комплексними числами за правилами цих дій над многочленами. Крім того тут розглядаються дії ділення, піднесення до степення і добування квадратного кореня.

При вивченні властивостей комплексних чисел (як і при вивченні властивостей дійсних чисел) досить зручною є їх геометрична інтерпретація, причому сама структура комплексного числа підказує, що комплексні числа слід зображати точками на координатній площині. А саме, на площині задається прямокутна декартова система координат xOy і вважається, що початок координат є зображенням комплексного числа $z = 0$, а точка з координатами (a, b) є зображенням комплексного числа $z = a + bi$. Таку площину називають комплексною площиною (площиною (z)), причому вісь абсцис — дійсною, а вісь ординат — уявною віссю комплексної площини. При цьому встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною $\mathbb{C}$ і множиною точок комплексної площини, а, отже, між множиною $\mathbb{C}$ і множиною векторів (комплексному числу z відповідає радіусвектор точки z). Так що терміни „комплексне число", „точка площини", „вектор" вживаються як синоніми.

У зв'язку з останнім довжина вектора z називаєтьтся модулем комплексного числа z і позначається $|z|$. Ясно, що якщо $z = a + bi$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Кут між додатним напрямком осі Ox і вектором z (якщо вектор z ненулевий) називають аргументом z і позначають $\operatorname{Arg} z$. Оскільки такий кут визначається з точністю до доданку, кратного 2π, то виділяють так зване головне значення аргумента, тобто те, для якого $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$. Оскільки таке значення визначається однозначно, то його позначають $\arg z$. Для будь-якого $z = a + bi \neq 0$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0,\ b \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0,\ b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0,\ b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Виходячи з очевидних геометричних міркувань, для будь-якого комплексного числа $z = a + bi \neq 0$ має місце подання:

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \tag{2.3}$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\alpha = \arg z$, яке називається *тригонометричною формою* комплексного числа.

Якщо скористатись формулами Ейлера, то дістанемо ще одне подання комплексного числа

$$z = re^{i\alpha}.$$

Це так звана *показникова форма* комплексного числа.

Якщо

$$z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1),$$
$$z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2),$$

то

$$
\begin{aligned}
&z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 + \alpha_2)) = r_1 r_2 e^{i(\alpha_1+\alpha_2)},\\
&\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i\sin(\alpha_1 - \alpha_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\alpha_1-\alpha_2)},\\
&z^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r^n e^{in\alpha},\\
&\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),
\end{aligned}
$$

де $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Геометрична інтерпретація комплексних чисел показує як метризувати поле $\mathbb{C}$. Якщо $z_1 = a_1 + b_1 i,\ \ z_2 = a_2 + b_2 i$, то за відстань між комплексними числами z_1 і z_2 слід приймати відстань між точками $M_1(a_1, b_1)$ і $M_2(a_2, b_2)$, тобто число

$$
d(z_1, z_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = |z_1 - z_2|. \tag{2.4}
$$

Природно, що так означена на $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ функція задовольняє всі три аксіоми метричного простору, тобто

1° $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})(d(z_1, z_2) \geqslant 0 \wedge (d(z_1, z_2) = 0 \Longleftrightarrow z_1 = z_2))$,

2° $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})(d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1))$,

3° $(\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C})(d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2))$.

А наявність метрики дозволяє будувати аналіз функцій комплексної змінної.

Важко переоцінити значення комплексних чисел як інструментарію при розв'язуванні самих різноманітних задач. Звичайно ці задачі можна розв'язати і методами того розділу математики, у якому вони були сформульовані. Проте, як правило, застосування комплексних чисел (у більш широкому плані комплексного аналізу) значно спрощує розв'язування.

Наведемо два приклади таких застосувань, де фактично використовуються тільки основні поняття теорії комплексних чисел.

1. Скориставшись формулами додавання можна записати, що

$$\begin{aligned}
&\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\\
&\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\\
&\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,\\
&\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.
\end{aligned}$$

Звичайно, знайшовши подання $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha, \ldots$ можна врешті решт висунути гіпотезу про подання $\sin n\alpha$ і $\cos n\alpha$, і після цього обгрунтувати її методом математичної індукції. А можна поступати таким чином. Розглянемо комплексне число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Очевидно, що $|z| = 1$ і

$$z^n = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

З останньої рівності маємо:

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \sum_{k=o}^{n} C_n^k(\cos\alpha)^{n-k}(i\sin\alpha)^k.$$

Оскільки два комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівними є їх дійсні і уявні частини, то, враховучи, що $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 =, -1, i^3 = -i, i^4 = 1, \ldots$, маємо:

$$\begin{aligned}
&\cos n\alpha = \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots;\\
&\sin n\alpha = C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ .
\end{aligned}$$

Аналогічно, якщо скористатись формулою суми членів геометричної прогресії

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

і покласти $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, то дістанемо такі формули

$$\sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha \sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha \cos\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

де $\alpha \neq 2k\pi$.

2. Повернемось до геометричної інтерпретації комплексного числа і покажемо, як просто виражаються з допомогою них різні факти геометрії площини.

Формули $z' = -z$, $z' = \overline{z}$ задають претворення площини такі, що у першому випадку образом точки z є точка $-z$ (центральна симетрія відносно початку координат), у другому образом точки z є точка $\overline{z}$ (осьова симетрія відносно осі Ox).

Якщо z_0 ($z_0 \neq 0$) фіксоване комплексне число, то формула $z' = z + z_0$ задає паралельний перенос площини на вектор z_0.

Якщо w_0 ($w_0 \neq 0$) фіксоване комплексне число, у якого $|w_0| = k$, то формула $z' = w_0 z$ задає гомотетію з центром у точці O і коефіцієнтом k. Зокрема, якщо $k = 1$, то остання формула задає поворот на кут $\alpha = \arg w_0$. Більше того кожен рух площини можна записати у вигляді $z' = w_0 z + z_0$ або $z' = w_0\overline{z} + z_0$, де $|w_0| = 1$.

Нехай маємо три різні точки на площині або інакше три різні комплексні числа z_0, z_1, z_2. Комплексне число

$$\lambda(z_0, z_1, z_2) = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$$

називають *відношенням трьох комплексних чисел* (відношенням трьох точок).

З геометричного погляду аргумент цього числа є кут між прямими, що перетинаються у точці z_0 і проходять через точки z_1 і z_2. Очевидно, що точки z_0, z_1, z_2 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли $\arg\lambda(z_0, z_1, z_2)$ дорівнює або 0, або π. А це можливо, коли число $\lambda(z_0, z_1, z_2)$ є дійсним. Звідси умова того, що три різні точки z_0, z_1, z_2 лежать на одній прямій

$$\lambda(z_0, z_1, z_2) = \overline{\lambda}(z_0, z_1, z_2),$$

тобто три різні точки z_0, z_1, z_2 лежать на одній прямій тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}_0}{\overline{z}_2 - \overline{z}_0}.$$

Тоді рівняння прямої, що проходить через дві різні точки z_1 і z_2 має вигляд

$$\frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \frac{\overline{z}_1 - \overline{z}}{\overline{z}_2 - \overline{z}}$$

або $(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_2) = 0$.

Нехай маємо чотири точки z_1, z_2, z_3, z_4. Комплексне число

$$\frac{\lambda(z_1, z_3, z_4)}{\lambda(z_2, z_3, z_4)} = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2}$$

називають *подвійним відношенням чотирьох комплексних чисел* (подвійним відношенням чотирьох точок).

Враховуючи геометричний зміст відношення трьох комплексних чисел, маємо, що

$$\operatorname{Arg}\frac{\lambda(z_1, z_3, z_4)}{\lambda(z_2, z_3, z_4)} = \operatorname{Arg}\lambda(z_1, z_3, z_4) - \operatorname{Arg}\lambda(z_2, z_3, z_4),$$

тобто з точністю до доданка кратного 2π дорівнює різниці між величиною кута між прямими, що перетинаються у точці z_1 і проходять через точки z_3 і z_4 і величиною кута між прямими, що перетинаються у точці z_2 і проходить через точки z_3 і z_4.

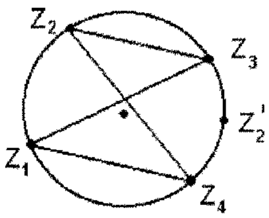


Рис.2

Отже, (див. Рис. 2) чотири точки будуть лежати на одному колі (на одній прямій?) тоді, коли ця різниця буде дорівнювати 0 або π (точка z_2 займає на Рис. 2 положення z_2'), тобто коли число

$$\frac{\lambda(z_1, z_3, z_4)}{\lambda(z_2, z_3, z_4)}$$

є дійсним. Таким чином умову того, що чотири точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на одному колі (на одній прямій) можна записати так:

$$\frac{\lambda(z_1, z_3, z_4)}{\lambda(z_2, z_3, z_4)} = \frac{\overline{\lambda}(z_1, z_3, z_4)}{\overline{\lambda}(z_2, z_3, z_4)}$$

або

$$\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} = \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_1}{\overline{z}_4 - \overline{z}_1} : \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_2}{\overline{z}_4 - \overline{z}_2}.$$

Вважаючи z_4 біжучою точкою, маємо рівняння кола (або прямої), що проходить через три точки z_1, z_2, z_3

$$\frac{z_3 - z_1}{z - z_1} : \frac{z_3 - z_2}{z - z_2} = \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_1}{\overline{z} - \overline{z}_1} : \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_2}{\overline{z} - \overline{z}_2}$$

або

$$Az\overline{z} + Bz - \overline{B}\,\overline{z} + C = 0,$$

де

$$A = z_1\overline{z}_2 - z_1\overline{z}_3 - \overline{z}_1 z_2 + \overline{z}_1 z_3 + z_2\overline{z}_3 - \overline{z}_2 z_3$$

є чисто уявне число ($A = -\overline{A}$),

$$B = z_1\overline{z}_1\overline{z}_3 - z_1\overline{z}_1\overline{z}_2 - \overline{z}_1 z_3\overline{z}_3 + \overline{z}_2 z_3\overline{z}_3 - z_2\overline{z}_2\overline{z}_3 + \overline{z}_1 z_2\overline{z}_2,$$
$$C = -z_1\overline{z}_1 z_2\overline{z}_3 + z_1\overline{z}_1\overline{z}_2 z_3 + z_1 z_2\overline{z}_2\overline{z}_3 - \overline{z}_1 z_2\overline{z}_2 z_3 - z_1\overline{z}_2 z_3\overline{z}_3 +$$
$$+ \overline{z}_1 z_2 z_3\overline{z}_3 \text{ — чисто уявне число } (C = -\overline{C}).$$

Центром цього кола є точка $c_0 = -\dfrac{\overline{B}}{A}$, а радіус

$$R = \sqrt{\frac{B\overline{B} - AC}{A^2}}.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Що означає алгебраїчна замкненість поля $\mathbb{C}$?

2. Як ви розумієте неперервність поля $\mathbb{C}$?

3. Яким чином можна ввести топологію у полі $\mathbb{C}$?

4. Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n} k \sin kx = \frac{\sin(n+1)x}{2\sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{(n+1)\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \cos kx = \frac{(n+1)\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1-\cos(n+1)x}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

5. У курсі геометрії для двох різних точок M_1 і M_2 число $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \neq -1)$ називали відношенням трьох точок M_1, M_2 і M, якщо

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}.$$

інакше, точка M ділить відрізок M_1M_2 у відношенні λ. Встановіть зв'язок цього поняття з поняттям відношення трьох комплексних чисел.

6. Знайти рівняння кола, що проходить через точки $z_1 = 0$, $z_2 = 8 - 4i$, $z_3 = 3 - 9i$. Визначити його центр і радіус.

7. Довести, що геометрична прогресія $\sum\limits_{n=0}^{\infty} az^n$ з комплексним знаменником z збіжна і має суму $\dfrac{a}{1-z}$, якщо $|z| < 1$, і розбіжна, якщо $|z| > 1$.

8. Обчислити суми рядів

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha; \quad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha,$$

якщо $|q| < 1$, q — дійсне число.

3*ЛЕКЦІЯ*: Потужність множини

Зчисленні множини та їх властивості. Зчисленність множин цілих, раціональних, алгебраїчних чисел. Множини потужності континууму та їх властивості. Континуальність множин дійсних та комплексних чисел. існування множин як завгодно великої потужності.

Література. [1], ч. 3, с. 5–24; [5], с. 13–32; Томусяк А.А., Ковтонюк М.М. Практикум з математичного аналізу (Порівняння множин). Вінниця, 1998, с. 104–163.

Аналіз функцій вимагає порівняння множин у класичному розумінні „У якій множині елементів більше?“ Якщо множини скінченні, то цілком природно полічити елементи першої і другої і ту, у якої елементів більше, вважати більш чисельною. Якщо ж число елементів однакове, то множини слід вважати рівночисельними. Однак такий спосіб порівняння множин у випадку великого числа елементів викликає значні труднощі, а для нескінченних множин він просто непридатний. Суть проблеми: чи поняття нескінченної множини є просто антиподом поняття скінченної множини і не допускає розчленування, чи для нескінченних множин можливе „градуювання“, подібне „градуюванню“ скінченних множин за числом елементів.

Поставлена проблема була успішно розв'язана однією із зірок першої величини на небосхилі математики, німецьким математиком Георгом Кантором (1845–1918), який за допомогою поняття взаємно-однозначної відповідності ввів поняття рівнопотужних (еквівалентних) множин і на його основі різні ступені математичної нескінченності (кардинальні числа).

Означення 3.1. *Дві множини X і Y називають еквівалентними (рівнопотужними), якщо існує взаємно-однозначна відповідність f з областю визначення X і множиною значень Y, тобто якщо можна побудувати (довести існування)* *функцію* $f : X \to Y$ *таку, що*

1) $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)((x, y) \in f)$,
2) $(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \wedge (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 \neq y_2)$,
3) $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)((x, y) \in f)$

і позначають $X \sim Y$.

Перша задача, яку будемо розв'язувати буде задача розпізнання еквівалентних множин. Будемо поступати так. Обираємо одну певну (нескінченну) множину і означаємо клас множин еквівалентних їй. Природно розпочати з множини натуральних чисел.

Означення 3.2. *Множина* X *називається зчисленною, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел.*

Встановити взаємно-однозначну відповідність між множиною X і множиною $\mathbb{N}$ означає: кожному елементу множини X віднести натуральне число, інакше занумерувати елементи множини X. Таким чином, елементи зчисленної множини X можна подати у вигляді послідовності (x_n), члени якої попарно різні.

Теорема 3.1. *Будь-яка нескінченна підмножина зчисленної множини зчисленна.*

Доведення. Нехай X — зчисленна множина, причому елементи її занумеровані, тобто $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Нехай X' — нескінченна підмножина множини X. Будемо „сканувати" множину X, розпізнаючи у послідовності елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ті, які належать множині X'. Нехай першим елементом з X' у послідовності елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ буде елемент x_{n_1}, другим — $x_{n_2}, \ldots$, k-им — $x_{n_k}, \ldots$. Зіставляючи кожному елементу підмножини X' номер зустрічі з ним при скануванні послідовності $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, отримуємо нумерацію елементів підмножини X'. А це означає, що X' — зчисленна множина. ■

Як наслідок з теореми 3.1 маємо, наприклад, що множини парних чисел, чисел кратних 5, простих чисел є зчисленними.

Неважко переконатись, що об'єднання скінченної і зчисленної множини, об'єднання скінченного числа зчисленних множин, більше того об'єднання зчисленної множини зчисленних множин є множина зчислена.

Тепер уже легко переконатись, що множина цілих чисел $\mathbb{Z}$ є зчисленною. Справді, в очевидний спосіб встановлюється взаємно-однозначна відповідність між множиною натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ і множиною цілих від'ємних чисел $\{-1, -2, -3, \ldots\}$. Таким чином, множина $\mathbb{Z}$ є зчисленою як об'єднання двох зчисленних множин і одноелементної множини $\{0\}$.

Покажемо, що множина всіх можливих пар натуральних чисел є зчисленною. Справді, занумеруємо пари натуральних чисел у такий спосіб. Елементу $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ припишемо номер

$$n = \frac{(p+q-2)(p+q-1)}{2} + p$$

Наприклад, парі $(1, 1)$ буде приписано номер 1, парі $(1, 2)$ — номер 2, парі $(2, 1)$ — номер 3 і т.д. Нехай $N_k = \{(p, q) \mid p + q = k\}$. Тоді $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup\limits_{k=2}^{\infty} N_k$, причому $N_i \cap N_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$. Елементи множини N_k занумеровані номерами

$$\frac{(k-2)(k-1)}{2} + 1,\ \frac{(k-2)(k-1)}{2} + 2, \ldots, \frac{(k-2)(k-1)}{2} + k - 1,$$

а елементи множини N_{k+1} — номерами

$$\frac{(k-1)k}{2} + 1,\ \frac{(k-1)k}{2} + 2, \ldots, \frac{(k-1)k}{2} + k.$$

Звідси випливає, що різні пари отримають різні номери, і всі натуральні числа будуть використанні при нумерації. Таким чином, елементи множини $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ занумеровані, і тому вона є зчисленною.

Оскільки кожне додатне раціональне число подається у вигляді дробу $\dfrac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{N}$ і $(p, q) = 1$, то множина Q^+ всіх додатних раціональних чисел еквівалентна множині $\widetilde{Q} = \{(p, q) \mid p, q \in \mathbb{N} \wedge (p, q) = 1\}$. А остання множина як нескінченна підмножина зчисленної множини є множина зчисленна. Тоді множина Q^- всіх від'ємних раціональних чисел є теж зчисленною. А, отже, буде зчисленною множина $\mathbb{Q} = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$.

Хоча яким багатим є запас зчисленних множин, проте виявляється, що існують незчисленні множини, причому і серед них є нееквівалентні.

Теорема 3.2. *Множина всіх дійсних чисел з відрізка* $[0, 1]$ *незчисленна.*

Доведення. Оскільки множини $[0, 1]$ і $[0, 1)$ еквівалентні, то теорема буде доведена, якщо буде доведено незчисленність проміжка $[0, 1)$. Припустимо, що множина $[0, 1)$ зчисленна. Тоді всі числа з проміжку $[0, 1)$ можна занумерувати і розташувати у послідовність

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n, \ldots. \tag{3.1}$$

Зрозуміло, що послідовність (3.1) вичерпує всі числа з $[0, 1)$. Подамо кожне число з послідовності (3.1) у вигляді нескінченного десяткового дробу, причому, щоб уникнути двозначності у поданні десяткових дробів ($0,5 = 0,500\ldots,\ 0,5 = 0,499\ldots$), будемо вважати, що жоден з цих дробів не має дев'ятку періодом, і послідовність (3.1) перепишемо у вигляді

$$\alpha_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\ldots,$$

$$\alpha_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n}\ldots,$$

$$\alpha_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots a_{3n}\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn}\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

З цифр, які стоять на головній діагоналі сформуємо нескінченний десятковий дріб $0, a_{11}a_{22}a_{33}\ldots a_{nn}\ldots$ і по ньому побудуємо дійсне число $\beta = 0, b_1b_2b_3\ldots b_n\ldots$, де для $n = 1, 2, \ldots$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad a_{nn} \neq 1, \\ 2, & \text{якщо} \quad a_{nn} = 1. \end{cases}$$

Очевидно, що число $\beta \in [0,\, 1)$, а, отже, воно є у послідовності (3.1), тобто існує такий номер n_0, що $a_{n_0} = \beta$. З другого боку, число β, в силу своєї структури, не дорівнює жодному з чисел послідовності (3.1). Одержане протиріччя свідчить про те, що елементи множини $[0,\, 1)$ не можна занумерувати, а, отже, вона незчисленна.■

Наступним еталоном після множини натуральних чисел візьмемо відрізок $[0,\, 1]$.

Означення 3.3. *Множину X називають континуальною (множиною потужності континууму), якщо вона еквівалентна множині всіх дійсних чисел з відрізка* $[0,\, 1]$.

Оскільки множини

$$[a,\, b], [a,\, b), (a,\, b], (-\infty,\, a], [a,\, +\infty), (a,\, +\infty), (-\infty,\, +\infty)$$

еквівалентні, то всі вони континуальні.

Можна довести, що множина всіх підмножин множини натуральних чисел є континуальною.

Теоретико-множинні операції об'єднання, перетин, різниця, прямий добуток над континуальними множинами дають або континуальну, або зчислену, або скінчену множину.

Наприклад, якщо множина X континуальна, а множина Y скінченна або зчисленна, то множини $X \cup Y$, $X \setminus Y$ континуальні. Отже, якщо з множини дійсних чисел вилучити скінченну або зчислену підмножину, то залишиться континуальна множина. Як наслідок, дістаємо, що множина всіх ірраціональних чисел, множина всіх трансцендентних (неалгебраїчних) чисел є континуальні множини.

Об'єднання не тільки скінченної але й зчисленної множини континуальних множин є множина континуальна. Прямий добуток скінченного числа континуальних множин є множина континуальна. Як наслідок, не тільки множина $\mathbb{R}$ але й $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ і взагалі $\mathbb{R}^n$ є континуальні множини. Більше того прямий добуток зчисленної множини континуальних множин є множина континуальна. Як наслідок, множина всіх послідовностей дійсних чисел (комплексних чисел) є континуальною.

Як приклад, доведемо, що множина всіх функцій, визначених і неперервних на відрізку $[a,\, b]$, є континуальною.

Справді, нехай $C_{[a,\, b]}$ — множина всіх неперервних на відрізку $[a,\, b]$ функцій. Множина всіх раціональних чисел з відрізка $[a,\, b]$ як нескінченна підмножина зчисленної множини $\mathbb{Q}$ є зчисленна множина. Отже, раціональні числа з відрізка $[a,\, b]$ можна занумерувати, тобто записати у вигляді послідовності $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Оскільки кожна функція $f \in C_{[a,\, b]}$ є неперервною на відрізку $[a,\, b]$, то $\forall x_0 \in [a,\, b]$ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

З другого боку, $\forall x \in [a,\, b]$ існує підпослідовність (r_{n_k}) послідовності (r_n) така, що $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} = x$, а, отже, (в силу неперервності) $\lim_{k\to\infty} f(r_{n_k}) = f(x)$. Таким чином, кожна неперервна на відрізку $[a,\, b]$ функція f повністю визначається своїми значеннями у раціональних точках, тобто послідовністю дійсних чисел

$$f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n), \ldots. \tag{3.2}$$

Побудуємо відображення

$$\varphi:\ C_{[a,\,b]} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

у такий спосіб: функції $f \in C_{[a,\,b]}$ віднесемо послідовність дійсних чисел (3.2). Якщо $f_1, f_2 \in C_{[a,\,b]}$ і $f_1 \neq f_2$, то існує раціональне число $r_{n_0} \in [a,\,b]$, для якого $f_1(r_{n_0}) \neq f_2(r_{n_0})$ (якби при всіх n $f_1(r_n) = f_2(r_n)$, то $f_1 = f_2$), а, отже, різним елементам з $C_{[a,\,b]}$ відповідають різні елементи з $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Звідси випливає, що у множині $\mathbb{R}$ є підмножина еквівалентна множині $C_{[a,\,b]}$. З другого, множина всіх сталих на відрізку $[a,\,b]$ функцій є підмножиною множини $C_{[a,\,b]}$, причому вона еквівалентна множині $\mathbb{R}$, яка у свою чергу, еквівалентна множині $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Скориставшись критерієм Кантора-Бернштейна, маємо, що множини $C_{[a,\,b]}$ і $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ еквівалентні. А це означає, що $C_{[a,\,b]}$ є континуальною множиною.

Можна довести, що множина всіх функцій, визначених на відрізку $C_{[a,\,b]}$ є незчисленною, але не є множиною потужності континууму.

Таким чином, маємо, що серед тих нескінченних множин, з якими ми мали справу при вивченні математичного аналізу не всі еквівалентні. Більш того має місце такий факт.

Теорема 3.3. *Будь-яка множина X нееквівалентна множині $2^{\mathbb{N}}$ (множині всіх можливих підмножин множини X).*

Доведення. Якщо X — скінченна множина з числом елементів n, то число елементів множини 2^N дорівнює 2^n. Очевидно, що $\forall n \in \mathbb{N}$ $n \neq 2^n$. А скінченні множини з різним числом елементів еквівалентними бути не можуть. Припустимо, що існує нескінченна множина X така, що $X \sim 2^X$. Нехай відображення

$f : X \to 2^X$ є взаємно-однозначною відповідністю між множинами X і 2^X. Якщо елементу x віднесено згідно f підмножину A $(A \in 2^X)$, то для x маємо тільки дві можливості: або $x \in f(x)$, або $x \notin f(x)$. Домовимось ті елементи множини X, які є елементами свого образу $(f(x) = A, x \in A)$, називати елементами першого роду (наприклад, той елемент x^*, для якого $f(x^*) = X$), а елементи множини X, які не є елементами свого образу $(f(x) = A, x \notin A)$, називати елементами другого роду (наприклад, той елемент x^{**}, для якого $f(x^{**}) = \varnothing$). Зрозуміло, що кожен елемент множини X є або елементом першого, або елементом другого роду („або" виключаюче). Характеристична властивість "x — елемент другого роду"з множини X виділяє підмножину A_0, і оскільки $E(f) = 2^X$, то існує елемент $x_0 \in X$ такий, що $f(x_0) = A_0$. Вияснимо, якого роду буде елемент x_0. Якщо припустити, що x_0 — елемент першого роду, то згідно означення $x_0 \in A_0$, що суперечить тому, що елементами множини A_0 є елементи другого роду. Звідси випливає, що x_0 не є елементом першого роду, а, отже, він є елементом другого роду. Однак підмножині A_0 належать всі елементи другого роду, тобто $x_0 \in A_0$ і x_0 не є елементом другого роду. Таким чином, з одного боку кожен елемент множини X або першого, або другого роду, з другого боку, знайшовся елемент у множині X, який не є ні елементом першого, ні елементом другого роду. Одержане протиріччя свідчить про те, що існує множина X така, що $X \sim 2^X$, невірне, тобто будь-яка множина X нееквівалентна множині 2^X. ■

Як підсумок, можна стверджувати, що відношення еквівалентності визначає класи еквівалентних множин, кожному з яких приписується характеристика, яку називають *потужністю* або *кардинальним числом* (для скінченних множин ця характеристика ототожнюється з числом елементів множини). Очевидно, що множина різних кардинальних чисел скінченних множин є множина нескінченна. Нескінченною є і множина кардинальних чисел нескінченних множин, причому у цій множині можна ввести порядок, операції додавання, множення і піднесення до степеня. Звичайно арифметика таких чисел значно відрізняється від арифметики кардинальних чисел скінченних множин (арифметики натуральних чисел).

На заключення декілька фактів, які є яскравою ілюстрацією того, до яких оригінальних висновків можна прийти, аналізуючи логічні можливості у розвитку теорії множин. На II Міжнародному конгресі математиків (Париж, 6–12 серпня 1900 р.) Давид Гільберт поставив ряд проблем, що стосувались різних розділів математики і потребували розв'язання. На першому місці така: довести, що потужність континууму є найближчою до потужності зчисленної множини. Пізніше ця проблема була сформульована більш загально. А саме, довести, що коли $\mathfrak{m}$ — нескінченне кардинальне число, то не існує кардинального числа $\mathfrak{n}$ такого, що $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

Тільки через 40 років Курту Геделю вдалося зробити перший прорив у розв'язанні цієї проблеми. А саме, ним було встановлено неможливість довести у рамках аксіоматичної теорії множин Цермело-Френкеля (у припущенні, що вона несуперечлива) той факт, що узагальнена континуум-гіпотеза невірна. і, нарешті, у 1963 році Пол Коен встановив неможливість довести в рамках тієї ж аксіоматичної теорії Цермело-Френкеля, що узагальнена континуум гіпотеза вірна. Отже, Гедель довів, що контунуум-гіпотезу неможливо спростувати, а Коен — що її неможливо довести.

У зв'язку з цим склалася думка, що після відкриття Коена теорія множин опинилась у становищі геометрії після відкриття Лобачевського незалежності п'ятого постулата Евкліда. А у 1965 році Анжей Мостовський висловив припущення, що може бути декілька теорій множин. Зокрема та, елементи якої використовувались при вивченні різних розділів математики, це канторова теорія множин, у якій узагальнена континуум-гіпотеза приймається.

Завдання для самоконтролю.

1. У який спосіб можна використати можливість встановити взаємно однозначну відповідність між скінченними множинами? Скориставшись правилом опосередкованого підрахунку числа елементів скінченної множини, знайдіть число дільників натурального числа.

2. Встановіть, що для запису всіх натуральних чисел від 1 до 10^n потрібно $n \cdot 10^{n-1}$ цифр $1, 2, \ldots, 9$ (кожної зокрема) і $n \cdot 10^{n-1} - \dfrac{1}{9}(10^n - 1)$ цифр 0.

3. Доведіть, що об'єднання зчисленної множини скінченних множин є множина зчисленна або скінченна. Скориставшись цим фактом доведіть, що множина алгебраїчних чисел (комплексне число α називається алгебраїчним, якщо існує многочлен з цілими коефіцієнтами степеня $n \geqslant 1$, для якого α є коренем) є зчисленою.

4. Як будується взаємно-однозначна відповідність між нескінченними множинами, які відрізняються скінченною або зчисленною множиною точок? Доведіть, що $[0,\,1] \sim (0,\,1)$.

5. Чи еквівалентні такі дві підмножини множини $C_{[0,\,1]}$ $X = \{ax + b \mid a, b \in R\}$ і $Y = \{P_n(x) \mid n \in \mathbb{N}, P_n(x)$ — многочлен степеня n з цілими коефіцієнтами$\}$?

6. Довести, що множина всіх визначених і монотонних на відрізку $[a,\,b]$ функцій є континуальною.

4_ЛЕКЦІЯ_**:** n**-вимірний евклідів простір** $\mathbb{R}^n$

Означення n-вимірного евклідового простору, основні характеристики. n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ як узагальнення просторів $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$.

Література. [1], ч. 2. с. 4–6, 12–16; [2], ч. 1, с. 412–418; [9], ч. 2, с. 76–79; Г.Е.Горелик, Почему пространство трёхмерное. М.: Наука, 1982.

Важливим геометричним поняттям є поняття скалярного добутку двох векторів, яке означається як число

$$(\vec{a}, \vec{b}) := |a||b| \cos (\vec{a}, \overset{\wedge}{} \vec{b})$$

(зрозуміло, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ мають бути ненулевими). Якщо ж вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ подаються у координатній формі, причому система координат прямокутна декартова, то, наприклад, у просторі скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ є число $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$. Зрозуміло, що таке число можна обчислювати і тоді, коли або $\vec{a}$, або $\vec{b}$ нулевий вектор. Скалярний добуток задовольняє такі властивості:

$$\begin{aligned}
&1.\ (\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}),\\
&2.\ ((\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}),\\
&3.\ (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}),\\
&4.\ (\vec{a}, \vec{a}) \geqslant 0 \text{ і } (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = \vec{0}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Виявляється, що ці властивості є характеристичними, тобто можна взяти множину наділену певною алгебраїчною структурою і на ній задати скалярний добуток. У такий спосіб отримується так званий евклідів простір.

При побудові функцій декількох змінних необхідні множини, елементами яких є не окремі числа, а певні набори чисел.

Зрозуміло, що змістовне вивчення таких функцій стане можливим, якщо такі множини будуть наділені певними властивостями (для функцій однієї змінної це властивості дійсних чисел). Якраз фундаментом побудови таких функцій є n-вимірний евклідів простір.

Нехай маємо множину

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\},$$

тобто множину елементами якої є всі можливі n-ки дійсних чисел. З теоретико-множинної точки зору ця множина є прямий добуток множини $\mathbb{R}$, взятий n разів. Тому цю множину будемо позначати

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ разів}}.$$

Елементи цієї множини будемо позначати літерами $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$, тобто

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} := (y_1, y_2, \dots, y_n), \mathbf{x}_k := (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}).$$

Означимо у множині $\mathbb{R}^n$ операцію додавання і операцію множення елементів R^n на дійсне число, а саме для довільних елементів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ і довільного числа λ

$$\begin{aligned} &1^\circ\ \mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ &2^\circ\ \lambda\mathbf{x} := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned} \tag{4.2}$$

В очевидний спосіб перевіряється, що операції (4.2) задовольняють аксіоми лінійного простору, тобто $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,

2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,

3. $(\exists 0 \in R^n)(\forall \mathbf{x} \in R^n)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x})$,

4. $(\forall \mathbf{x} \in R^n)(\exists \mathbf{x}' \in R^n)(\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{0})$,

5. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$,

6. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$,

7. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,

8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Таким чином множина $\mathbb{R}^n$, наділена операціями (4.2), є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Розмірність цього простору дорівнює n.

У множині $\mathbb{R}^n$ означимо ще одну операцію, яка для будь-яких двох елементів $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ відносить число

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{4.3}$$

Легко перевірити, що так означена операція задовольняє властивості (4.1), і тому її називають *скалярним добутком*.

Означення 4.1. *Лінійний простір $\mathbb{R}^n$ з скалярним добутком (4.3) називається n-вимірним евклідовим простором.*

Зауваження. (4.3) є одним із можливих варіантів означення скалярного добутку. Скалярний добуток у просторі R^n може бути означений у такий спосіб:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k,$$

де матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{n1}a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

симетрична і додатно визначена, тобто $a_{ik} = a_{ki}$, $i,k = \overline{1,n}$ і $\forall x \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \geqslant 0$, причому $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Елементи множини $\mathbb{R}^n$ називають точками простору $\mathbb{R}^n$ або векторами, а відповідні n-ки дійсних чисел їх координатами. Точка $\mathbf{0} = (0,0,\ldots,0)$ — початок координат, а множина точок $\{(0,0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ — i-ою координатною віссю.

Оскільки для ненулевих векторів $\vec{a}$

$$(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{a}) = |\vec{a}|^2,$$

то довжина ненулевого вектора $\vec{a}$ подається у вигляді

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})},$$

а кут між векторами може бути визначений так

$$\cos(\vec{a}\,\widehat{,}\,\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

У такий же спосіб означається довжина вектора (норма елемента) простору $\mathbb{R}^n$ і кут між ненулевими елементами, а саме

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \cos(\mathbf{x}\,\widehat{,}\,\mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \tag{4.4}$$

У тому випадку, коли $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, елементи $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ називають *ортогональними*, зокрема нулевий елемент ортогональний будь-якому елементу.

Нарешті у просторі $\mathbb{R}^n$ можна означити відстань між елементами, а саме

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) &:= |\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Отже, n-вимірний евклідів простір є метричним простором, у якому відстань означається через (4.5).

Доведемо, що у просторі R^n мають місце такі добре відомі факти: довжина суми двох векторів не перевищує суми довжин цих векторів, теорема Піфагора, відстань від однієї точки до другої не перевищує суми відстаней від першої точки до третьої і від неї до другої.

Теорема 4.1 (нерівність Коші-Буняковського). *Для будь-яких двох елементів* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *з* n*-вимірного евклідового простору* R^n *має місце нерівність*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}). \tag{4.6}$$

Доведення. Візьмемо довільне дійсне число λ і елемент $\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y} \in R^n$. Тоді за четвертою властивістю скалярного добутку

$$(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) \geqslant 0.$$

Скориставшись властивостями скалярного добутку, нерівність запишеться у вигляді

$$\begin{aligned}
&(\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}) - (\lambda\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\
&= (\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) - (\mathbf{y}, \lambda\mathbf{c}) - (\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) = \\
&= \lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для того, щоб квадратний тричлен (відносно λ) був невід'ємним необхідно і достатньо, щоб його дискримінант не був додатним, тобто

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqslant 0.$$

Звідси безпосередньо випливає (4.6). ■

Теорема 4.2 (нерівність трикутника). *Для будь-яких двох елементів* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *з* $\mathbb{R}^n$ *має місце нерівність*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{4.7}$$

Доведення. Скориставшись означенням довжини елемента з $\mathbb{R}^n$ і нерівністю Коші-Буняковського маємо

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})} = \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x})+(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{y})} =$$
$$= \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})+2(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{y},\mathbf{y})} \leqslant \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2} =$$
$$= \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|. \blacksquare$$

Теорема 4.3 (теорема Піфагора). *Якщо елементи* $\mathbf{x}$ *і* $\mathbf{y}$ *ортогональні, то* $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2$.

Доведення. Справді маємо, що $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ ортогональні, то $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$. А, отже,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \sqrt{(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y})} = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})+(\mathbf{y},\mathbf{y})} =$$
$$= \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2+\|\mathbf{y}\|^2}. \blacksquare$$

Як наслідок маємо, що коли елементи $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_k$ попарно ортогональні $\big((\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j) = 0$, якщо $i \neq j\big)$, то

$$\|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{x}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\|\mathbf{x}_i\|^2.$$

Теорема 4.4 (нерівність трикутника для відстаней) *Для будь-яких трьох елементів* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ *має місце нерівність*

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \leqslant d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \tag{4.8}$$

Доведення. Скориставшись властивостями довжини елемента з $\mathbb{R}^n$ і теоремою 4.2, маємо

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}-\mathbf{z}+\mathbf{z}-\mathbf{y}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|+\|\mathbf{z}-\mathbf{y}\| = d(\mathbf{x},\mathbf{z})+d(\mathbf{z},\mathbf{y}). \blacksquare$$

історично n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ будувався як узагальнення просторів $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ і $\mathbb{R}^3$. Справді, множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ можна подати як множину точок координатної прямої, або як множину вільних векторів на цій прямій. Тоді за відстань між елементами x, y з $\mathbb{R}$ приймають відстань між точками координатної прямої з координатами x і y відповідно, тобто абсолютну величину (модуль) різниці цих чисел

$$d(x, y) = |x - y|,$$

за довжину елемента (довжину вектора) x відстань від початку координат до точки з координатою x, а оскільки всі вектори на числовій прямій колінеарні, то кут між ними або 0, або π, а отже,

$$(x, y) = |x|\,|y| \cos(x \widehat{,} y) = \begin{cases} |x|\,|y|, & \text{якщо } xy > 0, \\ -|x|\,|y|, & \text{якщо } xy < 0 \end{cases} = xy.$$

У ньому

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x^2} = |x|,$$
$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|.$$

Таким чином, якщо в $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ додавання елементів збігається із додаванням дійсних чисел, множення на число збігається із множенням дійсних чисел, а скалярний добуток будь-яких двох елементів x, y з R^1 означити як добуток xy, то отримаємо одновимірний евклідів простір $\mathbb{R}^1$.

Цілком природно геометричною інтерпретацією множини $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є координатна площина (система координат прямокутна декартова). Тоді кожному елементу (x, y) з $\mathbb{R}^2$ відповідає точка координатної площини з координатами x і y. За відстань між точками $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ приймемо відстань між відповідними точками на координатній площині, яка за теоремою

Піфагора дорівнює

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Пов'язуючи кожну точку площини з відповідним радіусом-вектором, приймаємо, що норма елемента з $\mathbb{R}^2$ дорівнює довжині радіуса-вектора (відстань від точки до початку координат), тобто

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Нарешті означимо скалярний добуток між ненулевими елементами $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, як скалярний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1, y_1), \vec{b}(x_1, y_1)$, тобто

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \stackrel{\wedge}{} \vec{b}) =$$
$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \cos(\vec{a}, \stackrel{\wedge}{} \vec{b}).$$

Обравши на координатній площині ортонормований базис $\vec{i}(1, 0), \vec{j}(0, 1)$, для скалярного добутку маємо подання

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1(1, 0) + y_1(0, 1), x_2(1, 0) + y_2(0, 1)) =$$
$$= x_1x_2((1, 0), (0, 1)) + x_1y_2((1, 0), (0, 1)) +$$
$$+ y_1x_2((1, 0), (0, 1)) + y_1y_2((1, 0), (0, 1)) =$$
$$= x_1x_2 \cos(\vec{i}, \stackrel{\wedge}{} \vec{i}) + x_1y_1 \cos(\vec{i}, \stackrel{\wedge}{} \vec{j}) + y_1x_2 \cos(\vec{j}, \stackrel{\wedge}{} \vec{i}) + y_1y_2 \cos(\vec{j}, \stackrel{\wedge}{} \vec{j}) =$$
$$= x_1x_2 + y_1y_2.$$

Таким чином, якщо в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ означити додавання елементів через додавання векторів на координатній площині, множення елемента на число через множення вектора на число, а скалярний добуток у такий спосіб: для будь-яких $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2,$$

то отримаємо двовимірний евклідів простір $\mathbb{R}_2$. У ньому

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x,y)(x,y)},$$
$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2,y_1-y_2)(x_1-x_2,y_1-y_2)} = \|(x_1-x_2,y_1-y_2)\|.$$

Аналогічно геометричною інтерпретацією множини $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ є координатний простір (знову система координат прямокутна декартова). Тоді кожній точці (x,y,z) з $\mathbb{R}^3$ відповідає точка координатного простору з координатами x,y,z або радіус-вектор з координатами x,y,z. За відстань між точками $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ з $\mathbb{R}^3$ приймемо відстань між відповідними точками координатного простору, яка за теоремою Піфагора дорівнює

$$d((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\ .$$

За норму елемента (x,y,z) з R^3 приймемо довжину відповідного радіуса-вектора, тобто

$$\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ .$$

Скалярний добуток між елементами $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ (обидва елементи ненулеві) означимо, як скалярний добуток двох векторів $\vec{a}(x_1,y_1,z_1),\vec{b}(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$, тобто

$$((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = \|(x_1,y_1,z_1)\|\,\|(x_2,y_2,z_2)\|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

Обравши у координатному просторі ортонормований базис $\vec{i}(1,0,0),\vec{j}(0,1,0),\vec{k}(0,0,1)$, для скалярного добутку маємо подання

$$
\begin{aligned}
&((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \\
&= (x_1(1,0,0) + y_1(0,1,0) + z_1(0,0,1), \\
&\qquad\qquad x_2(1,0,0) + y_2(0,1,0) + z_2(0,0,1)) = \\
&= x_1x_2 \cos(\vec{i}\overset{\wedge}{,}\vec{i}) + x_1y_2 \cos(\vec{i}\overset{\wedge}{,}\vec{j}) + x_1z_2 \cos(\vec{i}\overset{\wedge}{,}\vec{k}) + \\
&\quad + y_1x_2 \cos(\vec{j}\overset{\wedge}{,}\vec{i}) + y_1y_2 \cos(\vec{j}\overset{\wedge}{,}\vec{j}) + y_1z_2 \cos(\vec{j}\overset{\wedge}{,}\vec{k}) + \\
&\quad + z_1x_2 \cos(\vec{k}\overset{\wedge}{,}\vec{i}) + z_1y_2 \cos(\vec{k}\overset{\wedge}{,}\vec{j}) + z_1z_2 \cos(\vec{k}\overset{\wedge}{,}\vec{k}) = \\
&= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.
\end{aligned}
$$

Таким чином, якщо в $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ означити додавання елементів через додавання векторів у координатному просторі, множення елемента на число через множення вектора на число, а скалярний добуток означити у такий спосіб:

$$((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

то отримаємо трьохвимірний евклідів простір. У ньому

$$
\begin{aligned}
&\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{((x, y, z), (x, y, z))}, \\
&d((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)} = \\
&= \|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2)\|.
\end{aligned}
$$

Як підсумок, можемо констатувати, що n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ є узагальнення просторів $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, у яких відповідні операції мають геометричне походження.

Введене у просторі $\mathbb{R}^n$ поняття відстані дозволяє описувати множини з певними властивостями, які будуть слугувати областю визначення функцій n змінних.

Означення 4.2. *Множину точок n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$ $\{\mathbf{x}\,|\,d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})<r\}$, де $\mathbf{x}_0$ — фіксований елемент з $\mathbb{R}^n$, r — додатне число, називають кулею (точніше відкритою кулею) з центром у точці $\mathbf{x}_0$ радіуса r і позначають*

$$B(\mathbf{x}_0,r) := \{\mathbf{x}\,|\,d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})<r\}.$$

У евклідовому просторі $\mathbb{R}^1$ $B(x_0,r) := (\mathbf{x}_0-r,\mathbf{x}_0+r)$ — інтервал з центром у точці x_0 довжини $2r$, у просторі $\mathbb{R}^2$

$$B((\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0),r) = \{(\mathbf{x},\mathbf{y})\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r\}$$

є відкритий круг з центром у точці (x_0,y_0) радіуса r, у просторі $\mathbb{R}^3$

$$B((x_0,y_0,z_0),r) = \{(x,y,z)\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r\}$$

є відкрита куля з центром у точці(x_0,y_0,z_0) радіуса r.

Означення 4.3. *Підмножина G множини $\mathbb{R}^n$ називається відкритою в $\mathbb{R}^n$, якщо для будь-якої точки $\mathbf{x}\in G$ існує куля $B(\mathbf{x},r)$ така, що $B(\mathbf{x},r)\subset G$.*

Означення 4.4. *Підмножина F множини $\mathbb{R}^n$ називається замкненою в $\mathbb{R}^n$, якщо її доповнення до $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n\setminus F$) є відкрита множина в $\mathbb{R}^n$.*

Якщо у просторі $\mathbb{R}^n$ ввести поняття неперервної кривої, то підмножина E множини $\mathbb{R}^n$ називається *зв'язною*, якщо будь-які дві точки множини E можна з'єднати неперервною кривою, що повністю належать E, а відкрита зв'язна множина називається *областю*.

Цих понять достатньо, щоб будувати основи аналізу функцій багатьох змінних.

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що лінійний простір $\mathbb{R}^2$ можна наділити скалярним добутком у такий спосіб: для довільних $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := x_1x_2 + \frac{x_1y_2 + y_1x_2}{\lambda + 1} + \frac{y_1y_2}{2\lambda + 1},$$
де $\lambda > 0$. Який геометричний зміст норми, породженої таким скалярним добутком, і відстані, породженої цією нормою?

2. Нехай $0 < \varphi < \pi$. Довести, що у лінійному просторі $\mathbb{R}^2$ відстань можна задати у такий спосіб: для довільних $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) =$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + 2\cos\varphi(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)^2}.$$
При якому λ таку відстань породжує скалярний добуток, поданий вище?

3. Дослідити, пря яких значеннях p, q, r
$$d((x_1, y_1, z_1)(x_2, y_2, z_2)) =$$
$$= \sqrt{p(x_1 - x_2)^2 + q(y_1 - y_2)^2 + r(z_1 - z_2)^2}$$
буде відстанню в $\mathbb{R}^3$.

4. Довести, що коли означити граничну точку для множини як точку таку, що будь-яка куля з центром у цій точці містить хоч одну точку з цієї множини, відмінну від заданої, то множина F замкнена тоді і тільки тоді, коли вона містить всі свої граничні точки.

5*ЛЕКЦІЯ*: Збіжні послідовності у просторі $\mathbb{R}^n$

Поняття послідовності у просторі $\mathbb{R}^n$. Границя послідовності. Основні властивості границь.

Література. [1], ч. 2, с. 7–12; [3], т. 1, с. 253–256.

Нехай маємо евклідів простір $\mathbb{R}^n$ (далі просто простір $\mathbb{R}^n$).

Означення 5.1. *Відповідність, яка кожному натуральному числу відносить точку з простору $\mathbb{R}^n$, називається послідовністю точок простору $\mathbb{R}^n$ і позначається*

$$(\mathbf{x}_k) = ((x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})).$$

Послідовність $(\mathbf{x}_k)$ називається *обмеженою*, якщо існує куля $B(\mathbf{x}_0, r)$ така, що кожен член послідовності належить цій кулі.

Виділимо клас збіжних послідовностей.

Означення 5.2. *Точку $\mathbf{x}_0$ називають границею послідовності точок $(\mathbf{x}_k)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер k_0 такий, що для всіх $k > k_0$ $\mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$, або, інакше, для всіх $k > k_0$ виконується нерівність*

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \text{ або } \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon.$$

Кожну послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок простору $\mathbb{R}^n$, яка має границю будемо називати *збіжною* послідовністю. Якщо $\mathbf{x}_0$ границя послідовності $(\mathbf{x}_k)$, то цей факт записують

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0.$$

Приклад 1. Довести, що у просторі $\mathbb{R}^2$ послідовність

$$(\mathbf{x}_k) = \left(\left(\frac{k-1}{k}, \frac{2k^2}{k^2+1}\right)\right)$$

має границею точку $(1,2)$.

Розв'язання. Оскільки для кожного k

$$d(\mathbf{x}_k,(1,2))=\sqrt{\left(\frac{k-1}{k}-1\right)^2+\left(\frac{2k^2}{k^2+1}-2\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{k^2}+\frac{4}{(k^2+1)^2}}=\frac{\sqrt{k^4+6k^2+1}}{k(k^2+1)}<\frac{k^2+3}{k(k^2+1)}<\frac{3}{k},$$

то коли взяти

$$k_0=3\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1,$$

де ε — довільне додатне число, будемо мати, що $\forall k>k_0$

$$d(\mathbf{x}_k,(1,2))<\frac{3}{k}<\frac{3}{3\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+\frac{1}{3}}<\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]}\leqslant\varepsilon.$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k-1}{k},\frac{2k^2}{k^2+1}\right)=(1,2).$$

Легко переконатись, що кожна збіжна послідовність є обмеженою, проте не всяка обмежена послідовність є збіжною.

Оскільки у просторі $\mathbb{R}^n$ як лінійному просторі означено операцію додавання і множення на число, то ці операції переносяться на послідовності точок з $\mathbb{R}^n$, а саме, якщо маємо дві послідовності $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$ і $\left(\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$, то сумою цих послідовностей назвемо послідовність $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$, а добутком послідовності $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$ на число λ — послідовність $\left(\lambda\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$.

Теорема 5.1. *Якщо послідовності* $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$ *і* $\left(\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$ *збігаються, то і послідовність* $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$ *збігається, причому*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{x}_k^{(1)}+\mathbf{x}_k^{(2)}\right)=\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^{(1)}+\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^{(2)}.$$

Доведення. Нехай послідовності $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$ і $\left(\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$ збігаються і

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(1)}, \ \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(2)}.$$

Тоді $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{2}$, знайдеться номер k_1 такий, що $\forall k > k_1$ виконується нерівність

$$d(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

А оскільки $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(2)}$, то для обраного $\dfrac{\varepsilon}{2}$ існує номер k_2 такий, що $\forall k > k_2$ виконується нерівність

$$d(\mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $k_0 = \max(k_1, k_2)$. Тоді, скориставшись нерівністю Коші, маємо $\forall k > k_0$

$$d(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_0^{(1)} + \mathbf{x}_0^{(2)}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki}^{(1)} + x_{ki}^{(2)} - x_{0i}^{(1)} - x_{0i}^{(2)})^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((x_{ki}^{(1)} - x_{0i}^{(1)})^2 + (x_{ki}^{(2)} - x_{0i}^{(2)}))^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((x_{ki}^{(1)} - x_{0i}^{(1)})^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} ((x_{ki}^{(2)} - x_{0i}^{(2)})^2} = d(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)}) + d(\mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, справді

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathbf{x}_k^{(1)} + \mathbf{x}_k^{(2)}\right) = \mathbf{x}_0^{(1)} + \mathbf{x}_0^{(2)}.$$

Аналогічно доводиться, що коли послідовність $(\mathbf{x}_k)$ збігається і $\lambda \in \mathbb{R}$, то послідовність $(\lambda \mathbf{x}_k)$ збігається і

$$\lim_{k\to\infty} \lambda \mathbf{x}_k = \lambda \lim_{k\to\infty} X_k. \quad \blacksquare$$

Теорема 5.2. *Якщо послідовності* $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$, $\left(\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$ *збіжні, причому* $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^{(1)} = \mathbf{x}_0^{(1)}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(2)}$, *то числова послідовність* $\left(\left(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}\right)\right)$ *теж збігається, причому*

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}\right) = \left(\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}\right).$$

Доведення. Оскільки послідовності $\left(\mathbf{x}_k^{(1)}\right)$, $\left(\mathbf{x}_k^{(2)}\right)$ збіжні, то вони обмежені. Тому існує куля $B(\mathbf{0}, M)$ така, що $\forall k\ \mathbf{x}_k^{(1)} \in B(O, M)$ і $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}_k^{(2)} = \mathbf{x}_0^{(2)} \in B(\mathbf{0}, M)$, тобто $\forall k\ ||\mathbf{x}_k^{(1)}|| < M$, $||\mathbf{x}_0^{(2)}|| < M$. Якщо взяти довільне додатне ε, то для $\dfrac{\varepsilon}{2M}$ існує номер k_1 такий, що $\forall k > k_1\ d(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)}) < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, а також існує номер k_2 такий, що $\forall k > k_2\ d(\mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Тоді $\forall k > k_0 = \max(k_1, k_2)$

$$\begin{aligned}
&|(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}) - (\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})| = \\
&= |(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)}) - (\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) + (\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) - (\mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})| \leqslant \\
&\leqslant |(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_0^{(2)})| + |(\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_0^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(2)})| \leqslant \\
&\leqslant ||\mathbf{x}_k^{(1)}\| \, \|\mathbf{x}_k^{(2)} - \mathbf{x}_0^{(2)}\| + \|\mathbf{x}_k^{(1)} - \mathbf{x}_0^{(1)}\| \, \|\mathbf{x}_0^{(2)}\| < \\
&< M(d(\mathbf{x}_k^{(2)}, \mathbf{x}_0^{(2)}) + d(\mathbf{x}_k^{(1)}, \mathbf{x}_0^{(1)})) < M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Теорема доведена. ■

Оскільки означення границі послідовності точок простору $\mathbb{R}^n$ є дескриптивне, то для ефективного використання цього поняття необхідні умови, які гарантують існування границі.

У першу чергу звернемо увагу на те, що послідовність точок

$$(\mathbf{x}_k) = ((x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}))$$

породжує n звичайних послідовностей дійсних чисел (послідовностей координат)

$$(x_{k1}), (x_{k2}), \ldots, (x_{kn}),$$

і цілком природно поставити питання „Чи пов'язана збіжність послідовності $(\mathbf{x}_k)$ із збіжністю координатних послідовностей (x_{ki}) $(i = \overline{1, n})$?" Сутність цього зв'язку розкриває така теорема.

Теорема 5.3. *Для того щоб послідовність точок простору* $\mathbb{R}^n$ *збігалась, необхідно і досить, щоб збігались координатні послідовності* (x_{ki}) $(i = \overline{1, n})$*, причому коли послідовність* $(\mathbf{x}_k)$ *збігається, то*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \left(\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \lim_{k\to\infty} x_{k2}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}\right).$$

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність точок простору $\mathbb{R}^n$ збігається, причому

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}).$$

Покажемо, що для кожного $i = \overline{1, n}$ послідовність (x_{ki}) збігається, причому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i}$. Справді, оскільки послідовність $(\mathbf{x}_k)$ збігається до $\mathbf{x}_0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0$ таке, що $\forall k > k_0$ $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$. Тоді для $i = \overline{1, n}$ і $k > k_0$ маємо:

$$|x_{ki} - x_{0i}| = \sqrt{(x_{ki} - x_{0i})^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_{kj} - x_{0j})^2} = d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon.$$

А це й означає, що для $i = \overline{1, n}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i}$.

Достатність. Нехай для кожного $i = \overline{1, n}$ послідовність (x_{ki}) збігається, причому $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i}$. Покажемо, що $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$. Оскільки для кожного $i = \overline{1, n}$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i}$, то для $\forall \varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, існує номер k_i такий, що $\forall k > k_i$ виконується нерівність

$$|x_{ki} - x_{0i}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Тоді для будь-якого $k > k_0 = \max(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ маємо:

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) =$$

$$= \sqrt{(x_{k1} - x_{01})^2 + (x_{k2} - x_{02})^2 + \cdots + (x_{kn} - x_{0n})^2} <$$

$$< \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon.$$

А цей означає, що $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$. ■

Теорема 5.3 дає підставу зробити висновок, що збіжність послідовностей точок у просторі $\mathbb{R}^n$ має покоординатний характер, тобто щоб переконатись, що послідовність $(\mathbf{x}_k)$ збігається, досить переконатись, що всі числові послідовності (x_{ki}) $(i = \overline{1, n})$ збігаються.

Практичне правило.
Якщо

$$\lim_{k\to\infty} x_{k1} = x_{01}, \lim_{k\to\infty} x_{k2} = x_{02}, \ldots, \lim_{k\to\infty} x_{kn} = x_{0n},$$

то

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) = \mathbf{x}_0.$$

Приклад 2. Знайти границю послідовності

$$\left(\left(\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k, k\left(\ln(2k+3) - \ln 2k\right), k \sin\frac{1}{k}\right)\right)$$

точок простору $\mathbb{R}^3$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt{\left(1-\dfrac{1}{2k+1}\right)^{2k+1}}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2k+1}}} = \sqrt{e^{-1}} = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$\lim_{k\to\infty} k(\ln(2k+3)-\ln 2k) = \lim_{k\to\infty} k\ln\left(\frac{2k+3}{2k}\right)^k =$$

$$= \ln\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{3}{2k}\right)^k = \ln\exp\frac{3}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{k\to\infty} k\sin\frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sin\dfrac{1}{k}}{\dfrac{1}{k}} = 1,$$

то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^k, k\left(\ln(2k+3)-\ln 2k\right), k\sin\frac{1}{k}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{3}{2}, 1\right).$$

Теорема 5.3 підказує також як шукати умови збіжності послідовностей точок простору $\mathbb{R}^n$. Якщо за послідовністю $(\mathbf{x}_k) = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ складено числові послідовності (x_{ki}) $(i=\overline{1,n})$, то для того щоб кожна з них була збіжною необхідно і досить, щоб вони були фундаментальними, тобто такі, що $\forall\varepsilon>0$ можна було вказати таке k_i, що $\forall k > k_i$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|x_{ki} - x_{k+p,i}| < \varepsilon$.

За аналогією послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок простору $\mathbb{R}^n$ назвемо *фундаментальною*, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0$ таке, що $\forall k > k_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+p}) < \varepsilon.$$

Можна довести, що послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок простору $\mathbb{R}^n$ фундаментальна тоді і тільки тоді, коли кожна координатна послідовність є фундаментальною.

Тепер уже можна формулювати критерій збіжності послідовності точок простору $\mathbb{R}^n$.

Критерій Коші. *Для того щоб послідовність точок простору $\mathbb{R}^n$ була збіжною необхідно і досить, щоб вона була фундаментальною.*

На заключення відзначимо, що як і в аналізі числових функцій так і в аналізі функцій багатьох змінних істотну роль відіграє структура області визначення функції. Так от поняття збіжності послідовності точок простору R^n дозволяє виділити клас множин, роль яких в аналізі функцій n змінних схожа до ролі відрізків в аналізі числових функцій.

Означення 5.3. *Підмножина K простору $\mathbb{R}^n$ називається компактною, якщо з кожної послідовності $(\mathbf{x}_k)$ точок з множини K можна виділити підпослідовність збіжну до елемента з цієї множини.*

Теорема 5.4. *Для того щоб множина K точок метричного простору $\mathbb{R}^n$ була компактною, необхідно і досить, що вона була обмеженою і замкненою.*

Доведення. Необхідність. Нехай K $(K \subset \mathbb{R}^n)$ є компакт. Якщо вона скінченна, то очевидно, що вона обмежена і замкнена. Припустимо, що існує нескінченна множина K, яка компактна, але необмежена, і нехай $\mathbf{x}_0 \in K$. Тоді в силу припущення

$\operatorname{diam} K = \infty$, тобто яким би не було $M > 0$ існує безліч точок $\mathbf{x}$ з множини K, для яких $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) > M$. Побудуємо послідовність точок множини K у такий спосіб. Візьмемо деяку точку $\mathbf{x}_1 \in K$. Оскільки K необмежена, то знайдеться точка $\mathbf{x}_2 \in K$ така, що $\mathbf{x}_2 \notin B(\mathbf{x}_1, 1)$. Для кулі $B(\mathbf{x}_1, d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + 1)$ знайдеться точка $\mathbf{x}_3$ така, що $\mathbf{x}_3 \notin B(\mathbf{x}_1, d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + 1)$. Для кулі $B(\mathbf{x}_1, d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3))$ знайдеться точка $\mathbf{x}_4$ така, що $\mathbf{x}_4 \notin B(\mathbf{x}_1, d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) + 1)$ і т.д. Така процедура дозволяє побудувати послідовність $\mathbf{x}_k$ точок множини K таку, що $\forall k$ і $\forall p$

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+p}) \geqslant d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+p}) - d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \geqslant d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_{n+1}) - d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \geqslant 1.$$

Останнє означає, що з послідовності $(\mathbf{x}_k)$ не можна виділити збіжну підпослідовність, а, отже, суперечить тому, що K компакт. Припустимо, що існує нескінченна обмежена множина K, яка є компактною, але не є замкненою, і нехай $(\mathbf{x}_0)$ — гранична точка множини K, яка не належить K. Оскільки $(\mathbf{x}_0)$ гранична точка для множини K, то для будь-якої кулі $B(\mathbf{x}, r)$ існує точка $(\mathbf{x}')$ з K, яка належить кулі $B(\mathbf{x}, r)$. Побудуємо послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок з K таку, що

$$\mathbf{x}_1 \in B(\mathbf{x}_0, 1), \mathbf{x}_2 \in B(\mathbf{x}_0, \frac{1}{2}), \ldots, \mathbf{x}_k \in B(\mathbf{x}_0, \frac{1}{k}), \ldots.$$

Очевидно, що ця послідовність збігається до $\mathbf{x}_0$, а, отже, і кожна підпослідовність збігається до $\mathbf{x}_0$. Оскільки $\mathbf{x}_0 \notin K$, то K не є компактною множиною, що суперечить умові.

Достатність. Нехай K — обмежена і замкнена множина точок простору $\mathbb{R}^n$, і нехай $(\mathbf{x}_k)$ послідовність точок цієї множини. Оскільки множина K обмежена, то і послідовність $(\mathbf{x}_k) = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn})$ теж обмежена, а, отже, обмеженою є кожна з числових послідовностей (x_{ki}) $(i = \overline{1, n})$. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса з числової послідовності (x_{k1}) можна виділити збіжну підпослідовність $(x_{k_{m_1}1})$ $m_1 = 1, 2, \ldots$.

Послідовність $(x_{k_{m_1}2})$ обмежена як підпослідовність послідовності (x_{k2}). За тією ж теоремою з неї можна виділити збіжну підпослідовність $(x_{k_{m_2}2})$ $m_2 = 1, 2, \ldots$. Підпослідовність $(x_{k_{m_2}1})$ як підпослідовність збіжної послідовності збігається. Продовжимо цю процедуру і на n-ому кроці дістанемо n збіжних підпослідовностей $(x_{k_{m_n}i})$ $m_n = 1, 2, \ldots$ відповідно послідовностей (x_{ki}) $(i = \overline{1, n})$. із збіжності послідовностей $(x_{k_{m_n}i})$ випливає збіжність послідовності $(\mathbf{x}_{k_{m_n}})$ $m_n = 1, 2, \ldots$, яка є підпослідовністю послідовності $(\mathbf{x}_k)$. Нехай

$$\lim_{m_n \to \infty} \mathbf{x}_{k_{m_n}} = \mathbf{x}_0.$$

Якщо $\mathbf{x}_0$ — один із членів послідовності $\mathbf{x}_k$, то $\mathbf{x}_0 \in K$. Якщо ж $\mathbf{x}_0$ не збігається із жодним членом послідовності $\mathbf{x}_k$, то $\mathbf{x}_0$ гранична точка для множини членів підпослідовності $(\mathbf{x}_{k_{m_n}})$, а, отже, і для множини K. В силу замкнeності останньої $\mathbf{x}_0 \in K$. Таким чином показано, що множини K $(K \subset \mathbb{R}^n)$ можна виділити збіжну до точки з цієї множини підпослідовність. А це й означає, що кожна обмежена і замкнена множина точок простору $\mathbb{R}^n$ є компактною. ■

Як і для числових функцій з допомогою збіжних послідовностей точок простору $\mathbb{R}^n$ можна означити поняття неперервності функцій n змінних у точці.

Завдання для самоконтролю.

1. Назвемо число

$$\operatorname{diam} A := \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

діаметром множини a простору $\mathbb{R}^2$. Знайти діаметр множин:

а) $\{(x, y) \,|\, y \leqslant 6 - 2|x|,\, y \geqslant 2 + 2|x|\}$;

б) $\{(x, y) \,|\, |x| + |y - 1| \leqslant 4\}$;

в) $\{(x, y) \,|\, |x + 1| + |2y - x - 1| \leqslant 0\}$.

2. Знайти границю послідовності
$$\left(\left(\frac{3-2k^3}{4+k+3k^3}, \frac{(k+1)^4-k^4}{k^4+3}\right)\right)$$
точок простору $\mathbb{R}^2$.

3. Знайти границю послідовності
$$\left(\left(\frac{1}{k^2+1}\sum_{i=1}^{k} i, \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{i-1}i, k\operatorname{tg}\frac{2}{k}, \left(1-\frac{3}{5k}\right)^k\right)\right)$$
точок простору $\mathbb{R}^4$.

4. Довести, що послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок простору $\mathbb{R}^n$ є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

5. Довести, що існує послідовність (x_k, y_k) точок простору $\mathbb{R}^2$, члени якої мають вигляд $(m+n\sqrt{2}, p+r\sqrt{3})$, де $m, n, p, r \in \mathbb{Z}$, яка збігається до точки $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

6. Довести, що якщо у послідовності (K_m) компактних множин точок простору $\mathbb{R}^n$
$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_m \supset \cdots,$$
то $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} K_m$ є непорожнім. Яким буде цей перетин, якщо $\operatorname{diam} K_m \to 0$ при $m \to \infty$?

7. Довести, що з будь-якої системи інтервалів, які покривають відрізок, можна виділити скінчене число інтервалів, які теж покривають цей відрізок.

8. Побудувати систему інтервалів, які покривають проміжок $(0; 1]$, але з якої не можна вибрати скінчене підпокриття.

6*ЛЕКЦІЯ*: Границя обмеженої монотонної послідовності. Число e

Границя послідовності, її існування. Границя обмеженої монотоної послідовності. Число e. Різні способи його задання.

Література. [2], ч.1, с.85–115; [3], т.1, с.28–59; [10], с.69–98.

Неперервність множини дійсних чисел є основою для введення основної неарифметичної операції — граничного переходу, інакше — основою для побудови теорії границь. Таку теорію, як правило, розпочинають з введення поняття границі для послідовностей (функцій натурального аргумента).

Відповідність, яка кожному натуральному числу відносить одне дійсне число, називається *послідовністю* (послідовністю дійсних чисел) і позначається $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Значення цієї функції $f(n)$ називаються *членами послідовності*. Такі значення прийнято записувати у вигляді $x_n := f(n)$, $a_n := f(n)$. У зв'язку з цим послідовності записують або у вигляді $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, або у вигляді (x_n). Тоді x_n називають *n-им членом послідовності*.

Означення 6.1. *Число a ($a \in \mathbb{R}$) називають границею послідовності (x_n), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$, і записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Якщо послідовність (x_n) має границю, то її називають *збіжною послідовністю*.

Відразу слід підкреслити, що означення границі послідовності є дескриптивним (описовим) означенням, тобто воно, як і означення точної верхньої і точної нижньої граней, дає можливість перевірити „претендента на границю“ послідовності. Здогадатись, яке саме число буде границею, можна тільки за допомогою самої послідовності (точніше, виявлення того числа, до якого будуть наближатись члени послідовності зі збільшенням номера).

Ось чому при побудові теорій границь послідовностей чільне місце посідають умови, які гарантують збіжність послідовності.

У теоретичному плані найважливішими є критерій Коші, який стверджує, що послідовність (x_n) збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна, тобто коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$.

Приклад 1. Переконатись, що послідовність

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right) \tag{6.1}$$

збігається.

Розв'язання. Візьмемо два натуральних числа n і p і оцінимо різницю $x_{n+p} - x_p$. Маємо

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k(k+1)} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k!|}{k(k+1)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{p}{(n+1)(n+p+1)} < \frac{1}{n}.$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати номер n_0 $\left(n_0 = \frac{1}{[\varepsilon]} + 1\right)$

такий, що $\forall n > n_0$ і $\forall p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon$. А це означає, що задана послідовність фундаментальна, а отже, збіжна.

Якщо, наприклад, можна обгрунтувати, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, де $|q| < 1$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, де $a > 0$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, де $a > 1$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

(таблиця основних границь), то хоча ми переконались, що послідовність (6.1) збіжна, тобто має границю, але яке саме число буде границею цієї послідовності ми не знаємо. інакше кажучи запис

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)} \right)$$

є поданням деякого дійсного числа (нескінченного десяткового дробу, у якого дев'ятка не є періодом). Якщо ж є потреба ним скористатись, то беруть його наближення, тобто обирають конкретне n і підраховують наближене значення $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}$.

Можна виділити цілий клас послідовностей, існування границі у яких можна гарантувати. Це так звані монотонні послідовності, тобто послідовності таких чотирьох типів:

(x_n) — зростаюча, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n < x_{n+1}$;
(x_n) — неспадна, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \leqslant x_{n+1}$;
(x_n) — незростаюча, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geqslant x_{n+1}$;
(x_n) — спадна, якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n > x_{n+1}$.

Теорема 6.1. *Для того щоб неспадна послідовність була збіжною, необхідно і досить, щоб вона була обмеженою зверху.*

Доведення. Необхідність очевидна, оскільки обмеженість є необхідною умовою збіжності.

Достатність. Нехай послідовність (x_n) неспадна і обмежена. Якщо (x_n) фінально стала, тобто існує такий номер n_0, що починаючи з нього всі члени послідовності рівні

$$x_{n_0} = x_{n_0+1} = \ldots = x_0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Справді, яким би не було $\varepsilon > 0$ для всіх $n > n_0$ $|x_n - x_0| = 0 < \varepsilon$. Якщо ж послідовность (x_n) не є фінально сталою, то $\forall n_0\ \exists n > n_0$ таке, що $x_n < x_{n+1}$. Оскільки послідовність (x_n) обмежена, то множина її членів $\{x_n\}$ обмежена зверху, а отже, за принципом Вейєрштрасса має точну верхню грань. Позначимо її через a і покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Оскільки a точна верхня грань множини $\{x_n\}$, то $\forall n\ x_n \leqslant a$, а в силу того, що послідовність (x_n) не є фінально сталою, $\forall n\ x_n \neq a$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує елемент x_{n_0} такий, що $x_{n_0} > a - \varepsilon$. Тоді $\forall n > n_0$ в силу того, що $x_n \geqslant x_{n_0}$, маємо

$$a - \varepsilon < x_n < a$$

або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. А цей означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. ■

Аналогічно можна довести, що для того щоб незростаюча послідовність була збіжною, необхідно і досить, щоб вона була обмеженою знизу.

Приклад 2. Переконатись, що послідовність $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ збігається.

Розв'язання. Подамо n-ий член заданої послідовності у вигляді

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}.$$

Тоді послідовність (x_n) є частка двох послідовностей (y_n) і $\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, і якщо ми покажемо, що послідовність (y_n) збіжна, то в силу теореми про границю частки будемо мати, що послідовність (x_n) збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Переконаємось, що послідовність (y_n) спадна. З цією метою доведемо спочатку так звану нерівність Бернуллі, а саме доведемо, що для будь-якого натурального n і будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$ виконується нерівність $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$. Справді для $n = 1$ нерівність справджується. Крім того для кожного n з того, що

$$(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha,$$

випливає, що

$$\begin{aligned}&(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) = \\ &= 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha.\end{aligned}$$

За принципом індукції нерівність Бернуллі справедлива для будь-якого $n \in \mathbb{N}$. Розглянемо відношення попереднього члена до наступного послідовності (y_n). Тоді, скориставшись нерівністю Бернуллі, маємо для $n \geqslant 2$:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{n}{n^2}\right)\frac{n}{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1.$$

Отже, послідовність (y_n) спадна, і оскільки $\forall n\ y_n > 0$, то обмежена знизу. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ існує.

Таким чином послідовність $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$ має границю. Цю границю (у слід за Ейлером) позначають

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{6.2}$$

Доведено, що число $e = 2,718281\ldots$ ірраціональне, більше того трансцендентне, тобто не є коренем ніякого многочлена з цілими коефіцієнтами. Його особливу роль в аналізі порівнюють з роллю числа π у геометрії або 1 в арифметиці.

Крім подання (6.2) число e має ще й інші подання. Покажемо, наприклад, що

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}, \tag{6.3}$$

тобто e це сума ряду

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\ .$$

Справді, якщо позначити

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

і скористатись формулою бінома Ньютона, то

$$\begin{aligned}
e_n &= 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \cdots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n \frac{1}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{n!}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1)}{n^n} = \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \cdots + \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \leqslant \\
&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n.
\end{aligned}$$

Якщо зафіксувати k, то для $\forall n > k$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)< e_n.$$

А, отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)=s_k\leqslant\lim_{n\to\infty}e_n=e.$$

Але тоді із подвійної нерівності

$$e_n\leqslant s_n\leqslant e$$

дістаємо

$$\lim_{n\to\infty}e_n\leqslant\lim_{n\to\infty}s_n\leqslant e$$

або

$$e\leqslant\lim_{n\to\infty}s_n\leqslant e.$$

Звідси

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e.$$

Зауважимо, що подання (6.3) дає можливість обчислювати число e з якою завгодно точністю.

Приклад 3. Обчислити число e з точністю 10^{-4}.

Розв'язання. Оскільки для $\forall n$

$$0 < e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1 - \dfrac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n!(n+1)^2} = \frac{n+2}{n!(n^2+2n+1)} <$$

$$< \frac{n+2}{n!(n^2+2n)} = \frac{1}{n!n},$$

то з нерівності

$$\frac{1}{n!n} \leqslant 10^{-4}$$

маємо, що уже $n = 7$ розв'язок цієї нерівності. Отже, з точністю 10^{-4}

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} \approx 0,71826.$$

Взявши за основу число e, маємо показникову функцію e^x. Звичайно її можна було б означити і так

$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Такий підхід проходить і для означення функції комплексної змінної $e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$.

Приклад 4. Довести, що для будь-якого $z \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y),$$

де $z = x + iy$.

Розв'язання. Оскільки у поданні

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n}\right)^n$$

при будь-якому x для досить великих n $1+\dfrac{x}{n}>0$, то у такому випадку

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{y}{n}}{1+\dfrac{x}{n}}=\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}.$$

Тоді $\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=$

$$=\left(\sqrt{\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}}\right)^n\left(\cos n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}+i\sin n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}\right).$$

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\dfrac{n}{2}}\quad \text{і}$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}.$$

Врахувавши, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}\right)}{\dfrac{2x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)=x,$$

а $\lim\limits_{n\to\infty}n\operatorname{arctg}\dfrac{y}{n+x}=y$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y)$.

Завдання для самоконтролю.

1. Опишіть інструментарій знаходження границь послідовностей, яким ви володієте.

2. У який спосіб можна скористатись похідною при знаходженні границь послідовностей?

3. У який спосіб можна скористатись інтегралом при знаходженні границь послідовностей?

4. Знайти границю послідовності, виділивши її головну частину:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n};\quad \text{б)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2(n+1)^2}{n^4-2n^2};$$

$$\text{в)}\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right).$$

5. Знайти границі:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n-n^3}+n\right);\quad b)\ \lim_{n\to\infty}3^n\ln\frac{3^n}{3^n-1};$$

$$c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1000n}{n^2+1}\sin(n^2+1);$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right).$$

6. Довести, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda}{k!}=e^{\lambda}.$$

7. Довести, що послідовність (x_n), у якої $x_1 > 0$ і для $n = 1, 2, \ldots$
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right),$$
де $A > 0$, збігається і знайти її границю.

8. Знайти
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

9. Кожен член послідовності $((1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n)$ можна подати у вигляді $x_n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$, де a_n, b_n, c_n, d_n — цілі числа. Знайти:
$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n}; \quad \text{в) } \lim_{n\to\infty} \frac{d_n}{a_n}.$$

10. Будемо називати послідовність (α_n) *нескінченно малою послідовністю*, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| < \varepsilon$. Побудуйте теорію границь послідовностей, прийнявши таке означення границі: „*Якщо послідовність* (x_n) *можна подати у вигляді* $(a + \alpha_n)$*, де* (α_n) *— нескінченно мала послідовність,то число* a *називають границею послідовності* (x_n)“.

7*ЛЕКЦІЯ*: Границя функції n дійсних змінних та її властивості

Поняття функції n дійсних змінних, способи задання. Границя функції n дійсних змінних. Властивості границь. Деякі найважливіші границі функції однієї змінної.

Література. [1], ч. 2, с. 16–20; [2], ч. 2, с. 117–158, 419–424; [3], т. 1, с. 60–84, 266–268; [9], ч. 2, с. 84–89; [10], с. 103–136.

З теоретико-множинної точки зору відношення (X, Y, f), де X, Y — дві довільні множини, $f \subset X \times Y$, називається *функцією*, якщо

$$(\forall x \in X)(\forall y_1, y_2 \in Y)\left((x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2\right),$$

тобто f не містить різних пар з однаковими першими компонентами.

Термін „відношення“ замінюють теорміном „відповідність“ і говорять, що функцією, визначеною на множині X із значеннями у множині Y, називається відповідність, яка кожному елементу з множини X відносить один елемент з множини Y.

Зокрема, якщо X є підмножина n-вимірного евклідового простору $\mathbb{R}^n$, а множина $\mathbb{R}$ (одновимірний евклідів простір), то відповідність, яка кожній n-ці дійсних чисел множини X відносить одне дійсне число, називається *функцією n змінних* і позначається або одним символом f, або у позначення входить і аргумент $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

У випадку, коли X підмножина множини $\mathbb{R}$, то говорять про функцію дійсної змінної і використовують позначення $f(x)$.

Задати функцію $f(\mathbf{x})$ означає задати те правило (закон), згідно якого можна за даним значенням аргументу вказати відповідне значення функції. У зв'язку з цим є різні способи задання функції (словесним заданням відповідності, табличним, а для функції однієї змінної графічним), проте найбільш популярним є аналітичний (за допомогою формули) спосіб задання функції.

Якщо врахувати, що над функціями можна виконувати дві теоретико-множинні операції композиції і обернення, результатом яких є складна і обернена функція, і за рахунок того, що значеннями функції є дійсні числа, чотири арифметичних операції

$$
\begin{aligned}
&(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}),\\
&(f_1 - f_2)(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}),\\
&(f_1 f_2)(\mathbf{x}) := f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}),\\
&\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x}) := \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_2(\mathbf{x})},
\end{aligned}
$$

то задавши деякі основні (базисні) функції і порядок виконання операцій над ними, можна будувати аналітичні вирази, які і будуть аналітичним заданням функції. При такому формальному заданні функцій виникає проблема знаходження області визначення функції.

Якщо скористатись позначенням $D(f)$ для області визначення і $E(f)$ для множини значень, то для функцій n дійсних змінних маємо:

$$
D(f_1 + f_2) = D(f_1 - f_2) = D(f_1 f_2) = D(f_1) \cap D(f_2),
$$

$$
D\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = (D(f_1) \cap D(f_2)) \setminus \{\mathbf{x} \mid f_2(\mathbf{x}) = 0\}
$$

Якщо ж над f можна виконати операцію обернення, а над функціями f_1 і f_2 операцію композиції, то

$$
D(f^{-1}) = E(f),\ D(f_1 \circ f_2) = \{\mathbf{x} \mid f_1(\mathbf{x}) \in E(f_1) \cap D(f_2)\}.
$$

Такий прийом дає змогу виділити певні класи функцій. Наприклад, якщо за вихідні взяти основні елементарні функції:

1. $y = C,\ C \in \mathbb{R}$;	2. $y = x$;
3. $y = x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$;	4. $y = a^x,\ 0 < a \neq 1$;
5. $y = \log_a x,\ 0 < a \neq 1$;	6. $y = \sin x$;
7. $y = \cos x$;	8. $y = \arcsin x$;
9. $y = \arccos x$;	10. $y = \operatorname{arctg} x$,

то кожна функція, яка утворюється з основних за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і композицій, називається *елементарною функцією.*

З елементарних функцій однієї змінної можна конструювати функції двох, трьох і взагалі n змінних. Наприклад,

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},\ f(x,y) = e^{\sin(xy)}, f(x,y,z) = \sin \operatorname{arctg} \frac{x}{yz},$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Функції, які отримуються із змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ з допомогою скінченного числа операцій композиції, додавання, множення, ділення і взяття елементарних функцій однієї змінної, називаються *елементарними функціями змінних* $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Нехай маємо функцію n дійсних змінних $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з областю визначення $D(f)$ і нехай $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ гранична точка множини $D(f)$. Тоді факт, що при наближенні точки $\mathbf{x} \in D(f)$ до точки $\mathbf{x}_0$ значення функції $f(\mathbf{x})$ наближається до деякого числа A, і є сутністю поняття границі функції у точці. Це поняття можна ввести або з допомогою поняття границі послідовності,або з допомогою $\varepsilon - \delta$ техніки Коші.

Означення 7.1 (За Гейне). *Число A називається границею функції $f(\mathbf{x})$ у точці $\mathbf{x}_0$, якщо для будь-якої послідовності $(\mathbf{x}_n)$ точок з E такої, що $\forall n\ \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_o$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, числова послідовність $(f(\mathbf{x}_n))$ відповідних значень функції збігається до числа A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = A$.*

Позначається або

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A,$$

або

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \dots\dots\dots \\ x_n \to x_{0n}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A.$$

Зауважимо, що для функцій більше однієї змінної можна розглядати так званні повторні границі

$$\lim_{x_{i_1}\to\mathbf{x}_{0i_1}} \lim_{x_{i_2}\to\mathbf{x}_{0i_2}} \dots \lim_{x_{i_n}\to\mathbf{x}_{0i_n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Означення 7.2 (за Коші). *Число A називається границею функції $f(\mathbf{x})$ у точці $\mathbf{x}_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x}$ з E, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконується нерівність $|f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$.*

Теорема 7.1 (обмеженість функції, що має границю) *Якщо функція $f(\mathbf{x})$ у точці $\mathbf{x}_0$ має границю, то існує куля $B(\mathbf{x}_0, \delta)$ і число $M > 0$ такі, що $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D(f)$ виконується нерівність $|f(\mathbf{x})| \leqslant M$.*

Доведення. Нехай $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = 1$, можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх $\mathbf{x} \in D(f)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконується нерівність $|f(\mathbf{x}) - A| < 1$. А оскільки $|f(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - A + A| \leqslant |f(\mathbf{x}) - A| + |A|$, то для $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D(f)$ $|f(\mathbf{x})| \leqslant |A| + 1$, якщо $\mathbf{x}_0 \notin D(f)$, і $|f(\mathbf{x})| \leqslant \max(|A| + 1, |f(\mathbf{x}_0)|)$, якщо $\mathbf{x}_0 \in D(f)$. ■

Теорема 7.2 (границя і арифметичні операції) *Якщо функції $f_1(\mathbf{x})$ і $f_2(\mathbf{x})$ мають границі у точці $\mathbf{x}_0$, то у цій точці мають границі функції $(f_1 + f_2)(\mathbf{x})$, $(f_1 - f_2)(\mathbf{x})$, $(f_1 f_2)(\mathbf{x})$, причому*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f_1 - f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f_1 f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}).$$

Якщо ж крім того існує така куля $B(\mathbf{x}_0, r)$, що для всіх $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, які належать $B(\mathbf{x}_0, r) \cap D(f_2)$ $f_2(\mathbf{x}) \neq 0$, і $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) \neq 0$, то у точці $\mathbf{x}_0$ має границю і функція $\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x})$, причому

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x}) = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x})}.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = A$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = B$. Доведемо, що $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = A + B$. З того, що $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = A$ за означенням 7.1 маємо, що для будь-якої послідовності $(\mathbf{x}_n)$ точок з $D(f_1)$ такої, що $\forall n$ $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, числова послідовність $(f_1(\mathbf{x}_n))$ має границею число A, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f_1(\mathbf{x}_n) = A$. А з того, що $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = B$ маємо, що для будь-якої послідовності $(\mathbf{x}_n)$ точок з $D(f_2)$ такої, що $\forall n$ $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$, числова послідовність $(f_2(\mathbf{x}_n))$ має границею число B, тобто

$\lim\limits_{n\to\infty} f_2(\mathbf{x}_n) = B$. Візьмемо тепер довільну послідовність $(\mathbf{x}_n)$ точок з $D(f_1+f_2)$ таку, що $\forall n\ \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$. Оскільки $D(f_1+f_2) = D(f_1)\cap D(f_2)$, то ця послідовність є одночасно послідовністю точок з $D(f_1)$ і точок з $D(f_2)$. Тоді для неї відповідні послідовності $(f_1(\mathbf{x}_n))$, $(f_2(\mathbf{x}_n))$ значень функцій $f_1(\mathbf{x}_n)$ і $f_2(\mathbf{x}_n)$ збігаються і

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}_n) = A, \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}_n) = B.$$

Отже, в силу теореми про границю суми послідовностей маємо

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f_1+f_2)(\mathbf{x}_n) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f_1(\mathbf{x}_n)+f_2(\mathbf{x}_n)) =$$
$$= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}_n) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}_n) = A+B.$$

Доведемо, що

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f_1f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}),$$

скориставшись означенням 7.2. Нехай $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = A$ і $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = B \neq 0$ (випадок, коли $A = B = 0$ розгляньте самостійно). Оскільки $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) = A$, то в силу теореми 7.1 існує куля $B(\mathbf{x}_0,\delta_1)$ і число $M > 0$, що $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0,\delta_1)\cap D(f_1)$ виконується нерівність $|f_1(\mathbf{x})| \leqslant M$, і в силу означення 7.2 для $\varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{2|B|}$, можна вказати $\delta_2 > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in D(f_1)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}) < \delta_2$, виконується нерівність

$$|f_1(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|}.$$

А оскільки $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) = B$, то в силу означення 7.2 для $\dfrac{\varepsilon}{2M}$

можна вказати $\delta_3 > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in D(f_2)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta_3$, виконується нерівність

$$|f_2(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Нехай $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Тоді для всіх $\mathbf{x} \in D(f_1 f_2)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконуються одночасно три нерівності

$$|f_1(\mathbf{x})| \leqslant M,\ |f_1(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2|B|},\ |f_2(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

А, отже, для всіх $\mathbf{x} \in D(f_1 f_2)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, маємо:

$$|(f_1 f_2)(\mathbf{x}) - AB| = |f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) - AB| =$$

$$= |f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})B + f_1(\mathbf{x})B - AB| \leqslant$$

$$\leqslant |f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x}) - f_1(\mathbf{x})B| + |f_1(\mathbf{x})B - AB| =$$

$$= |f_1(\mathbf{x})||f_2(\mathbf{x}) - B| + |B||f_1(\mathbf{x}) - A| <$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + |B|\frac{\varepsilon}{2|B|} = \varepsilon.$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми вказали $\delta > 0$ таке, що $\forall \mathbf{x} \in D(f_1 f_2)$, які задовольняють нерівність $0 < d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконується нерівність $|(f_1 f_2)(\mathbf{x}) - AB| < \varepsilon$, а цей означає, що $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f_1 f_2)(\mathbf{x}) = AB$. ■

Що стосується операції композиції (утворення складної функції), то тут обмежимось функціями однієї змінної (у загальному випадку довелось би розглядати функції f і g, у яких $D(f) \subset R^n$, $E(f) \subset R^p$, $E(g) \subset R^q$.)

Теорема 7.3 (заміна змінної для границь функції) *Якщо існує* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, *причому у деякому околі точки* x_0 $f(x) \neq y_0$ *при* $x \neq x_0$, *крім того існує* $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = A$, *то існує границя складної функції* $g(f(x))$ *і*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = A.$$

Доведення. Тут будемо вважати, що функція $f(x)$ визначена у кожній точці інтервалу (a, b) за винятком, можливо, точки x_0, а функція $g(y)$ визначена у кожній точці інтервалу (c, d), можливо, за винятком точки $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Оскільки існує $\lim\limits_{y \to y_0} g(y)$, то існує ε-окіл точки y_0, тобто інтервал $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, на якому функція $g(y)$ визначена, за винятком, можливо, точки y_0. А оскільки існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то для такого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - y_0| < \varepsilon$. Врахувавши, що $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$, робимо висновок, що на інтервалі $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ за винятком, можливо, точки x_0 визначено функцію $g(f(x))$.

Візьмемо довільну послідовність значень аргументу (x_n) таку, що $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тоді відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції $f(x)$ має границею число y_0. А оскільки послідовність $(f(x_n))$ є послідовність значень аргументу функції $g(y)$, причому $\forall n$ $f(x_n) \neq y_0$ і $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = y_0$, то відповідна послідовність $(g(f(x_n)))$ значень функції $g(y)$ збігається і $\lim\limits_{n \to \infty} g(f(x_n)) = A$. Таким чином, для довільної послідовності значень аргументу (x_n) такої, що $\forall n$ $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність $(g(f(x_n)))$ значень функції $g(f(x))$ має границею число A. А це й означає, що

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = A. \blacksquare$$

Для функції однієї змінної вводять поняття границі функції при x прямує до плюс нескінченності (відповідно до мінус нескінченності). Якщо функція $f(x)$ визначена на проміжку $(a, +\infty)$, то говорять, що число A є границею функції $f(x)$ на плюс нескінченності (записують $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$), коли $\forall\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x > \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Якщо ж функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty, a)$, то говорять, що число A є границею функції $f(x)$ на мінус нескінченності (записують $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$), коли $\forall\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x < -\delta$ виконується нерівність $|f(x)-A| < \varepsilon$. Якщо $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, то говорять про існування границі на нескінченності і записують $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Відзначимо такий дуже важливий факт. Якщо функція $f(x)$ сконструйована з базисних за допомогою п'яти операцій ($f(x)$ — елементарна функція) і x_0 належить її природній області визначення, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Що стосується поведінки елементарних функцій в околі точок, що є граничними для природної області визначення, але їй не належать, або ж поведінки функції на мінус або плюс нескінченності, то тут слід пам'ятати таке (таблиця границь функцій):

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,\ \ \lim_{x\to x-0}\frac{1}{x} = -\infty,\ \ \lim_{x\to x+0}\frac{1}{x} = +\infty;$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

3) $$\lim_{x\to 0+0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ -\infty, & 0 < a < 1; \end{cases}$$

4) $$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty;$$

5) $$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty;$$

6) $$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

7) $$\lim_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \qquad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0;$$

8) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

9) $$\lim_{x\to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \qquad \lim_{x\to \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

10) $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a};$$

11) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a;$$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

Приклад 1. Переконатись, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Розв'язання. Нехай $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Тоді очевидно (Рис. 3), що для площ S_1 трикутника AOB, S_2 сектора AOB і S_3 трикутника AOC можна записати $S_1 < S_2 < S_3$ або

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \mathrm{tg}\, x,$$

де R — радіус сектора з центром у точці O, x — величина кута AOB у радіанах. Оскільки для $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ $0 < \sin x < x$, то, розділивши останню нерівність на $\frac{1}{2}R^2 \sin x$, дістанемо

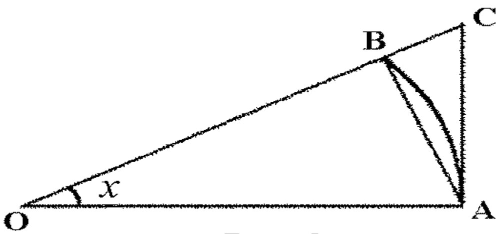


Рис. 3

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Віднявши від кожної частини нерівності 1 і помноживши на -1, маємо

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Але оскільки $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = \frac{x^2}{2}$, то $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ виконується нерівність

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Така нерівність виконується і для $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Справді, коли $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, то $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$. А, отже,

$$0 < 1 - \frac{\sin(-x)}{-x} < \frac{(-x)^2}{2}$$

або

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу така, що $\forall n \; x_n \neq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\sqrt{2\varepsilon}$, можна вказати такий номер n_1, що $\forall n > n_1 \; |x_n| < \sqrt{2\varepsilon}$, а для числа $\frac{\pi}{2}$ — такий номер n_2, що $\forall n > n_2 \; |x_n| < \frac{\pi}{2}$. Якщо $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то $\forall n > n_0$

$$x_n \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{і} \quad |x_n| < \sqrt{2\varepsilon}\ .$$

У відповідній послідовності значень функції $\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)$ для всіх $\forall n > n_0$ її члени задовольняють нерівність

$$\left|\frac{\sin x_n}{x_n} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{1}{2}x_n^2 < \frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon.$$

Таким чином, $\forall \varepsilon > 0$ вказано номер n_0 такий, що $\forall n > n_0$

$$\left|\frac{\sin x_n}{x_n} - 1\right| < \varepsilon.$$

А це й означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Згідно означення 7.1 маємо, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Завдання для самоконтролю.

1. За даними функціями $f_1(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, $f_2(x) = \arcsin x$, $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$ побудувати функцію за схемою $f = f_1 \circ f_2 + f_1 \circ f_3$. Знайти її область визначення і множину значень.

2. Знайти область визначення функцій
$$f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)},$$
$$f(x,y,z) = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Довести, що коли функція f визначена і монотонна на інтервалі $(a;b)$, то дл $x_0 \in (a;b)$
$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup_{x<x_0} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{x>x_0} f(x).$$

4. Знайти ту точку, у якій функція $y = \lg^3 x - 3\lg^2 x + 7\lg x$ має границю число 5.

5. Довести, що
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

6. Знайти границі
$$a)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt[3]{7+x}-4}{\sqrt[4]{13+3x}-2\sqrt{x}}, \qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\lg\sin x}{\cos^2 x};$$
$$c)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+7x+10}{x^2+5x+10}\right)^{-\dfrac{x}{2}}.$$

7. Знайти границі

$$a)\ \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 2}} \frac{\cos xy - \cos 2}{xy - 2}, \quad b)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2};$$

$$c)\ \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

8. Довести, що для функції

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2+(x-y)^2}$$

і для будь-якого $\alpha \in [0,1]$ існує множина E_α така, що

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ (x,y) \in E_\alpha}} f(x,y) = \alpha.$$

9. Довести, що для функції $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0 \\ (x,y) \in E_g}} f(x,y) = \frac{k}{1+k^2},$$

де $E_g = \{(x,y) \,|\, x \neq 0,\ y = g(x),\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x^2} = k\}$.

10. Побудувати графік функції

$$y = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ x \geqslant 0.$$

8*ЛЕКЦІЯ*: Неперервність функцій n дійсних змінних

Неперервність функції n дійсних змінних у точці. Основні властивості неперервних функцій. Властивості функцій, неперервних на обмеженій замкненій множині (на компакті). Рівномірна неперервність функції.

Література. [1], ч. 2, с. 20–27; [2], ч. 1, с. 160–178, 424–429; [3], т. 1, с. 84–96, 270–283. [9], ч. 2, с. 89–92.

Неперервність є одним з наважливіших понять математичного аналізу (і не тільки його). Цей термін стосовно певних множин (і тоді його синонімом є термін „повнота“) виражає неможливість поповнити такі множини новими елементами з допомогою граничного переходу (неперервність множини дійсних чисел, повнота метричного простору). Стосовно функції $f(\mathbf{x})$ він виражає локальну властивість, сутність якої у тому, що для близьких до точки $\mathbf{x}_0$ значень аргумента, відповідні значення функції будуть близькими до $f(\mathbf{x}_0)$ — значення функції у точці $\mathbf{x}_0$.

Нехай маємо функцію n дійсних змінних

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

визначену на множині E ($E \subset \mathbb{R}^n$), і нехай

$$\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$$

точка з цієї множини.

Означення 8.1. *Функція $f(\mathbf{x})$ називається неперервною у точці $\mathbf{x}_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in E$, які задовольняють нерівність $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконується нерівність $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.*

Якщо $\mathbf{x}_0$ — гранична точка для множини E, то згідно означення неперервності функції у точці маємо

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) = f(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{x}).$$

Якщо ж це не так, то точка $\mathbf{x}_0$ є ізольованою точкою множини E, тобто існує куля $B(\mathbf{x}_0, r)$ така, що $E \cap B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x}_0\}$, і у кожній такій точці функція неперервна.

Приклад 1. Переконатись, що функція $\sin x$ неперервна на всій числовій осі.

Розв'язання. Нехай x_0 — довільне, але фіксоване дійсне число. Тоді $\forall x \in \mathbb{R}$

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2} = |x-x_0|.$$

Отже, якщо взяти $\delta = \varepsilon$, де ε — довільне додатне число, то для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - x_0| < \varepsilon$, виконується нерівність $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$. А цей означає, що функція $\sin x$ неперервна у точці x_0.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{, якщо } x \neq 0; \\ 0 & \text{, якщо } x = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо $x_0 \neq 0$ ($x_0 \neq 0$ — гранична точка множини R), то, врахувавши, що

$$\lim_{x\to x_0} \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to\frac{1}{x_0}} \sin y = \sin\frac{1}{y_0},$$

робимо висновок, що $f(x)$ неперервна у точці x_0. Точка $x = 0$ теж гранична для $\mathbb{R}$ і $f(0) = 0$. Однак, якщо розглянути дві послідовності $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)$ і $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi}\right)$, то хоча

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\pi}{2} + (2n+1)\pi} = 0,$$

але

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi\right) = -1.$$

Таким чином, задана функція у точці $x = 0$ границі немає, а це й означає, що вона не є неперервною у цій точці.

Нехай функція $f(\mathbf{x})$ n дійсних змінних неперервна у точці $\mathbf{x}_0$. Тоді існують куля $B(\mathbf{x}_0, r)$ і число $M > 0$ такі, що $\forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, r) \cap D(f)$виконується нерівність $|f(\mathbf{x})| \leqslant M$.

Теорема 8.1 (про збереження знаку). *Якщо функція f неперервна у точці $\mathbf{x}_0$, причому $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то існує така куля $B(\mathbf{x}_0, \delta)$, що для всіх $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D(f)$*

$$\mathrm{sign} f(\mathbf{x}) = \mathrm{sign} f(\mathbf{x}_0).$$

Доведення. Оскільки за умовою $f(\mathbf{x})$ неперервна у точці $\mathbf{x}_0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = |f(\mathbf{x}_0)|$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in D(f)$, які задовольняють нерівність $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < \delta$, виконується нерівність

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < |f(\mathbf{x}_0)|.$$

Останню нерівність перепишемо так

$$-|f(\mathbf{x}_0)| + f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}) < |f(\mathbf{x}_0)| + f(\mathbf{x}_0).$$

Якщо $f(\mathbf{x}_0) > 0$, то $-|f(\mathbf{x}_0)| + f(\mathbf{x}_0) = 0$ і для всіх $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D(f)$ $f(\mathbf{x}) > 0$. Якщо ж $f(\mathbf{x}_0) < 0$, то $|f(\mathbf{x}_0)| + f(\mathbf{x}_0) = 0$ і для всіх $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D(f)$ $f(\mathbf{x}) < 0$. Теорема доведена. ■

Теорема 8.2 (операції над неперервними функціями) *Якщо функції $f_1(\mathbf{x})$ і $f_2(\mathbf{x})$ неперервні у точці $\mathbf{x}_0$, то у цій точці будуть неперервними і функції $(f_1 + f_2)(\mathbf{x})$, $(f_1 - f_2)(\mathbf{x})$, $(f_1 f_2)(\mathbf{x})$. Якщо крім того $f_2(\mathbf{x})$ у точці $\mathbf{x}_0$ відмінна від нуля, то і функція $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x})$.*

Доведення. Якщо $\mathbf{x}_0$ є ізольованою точкою хоча би для однієї з областей визначення заданих функцій, то вона буде ізольованою для областей визначення функцій $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, \dfrac{f_1}{f_2}$. А, отже, всі вони будуть неперервними у такій точці. Якщо ж $\mathbf{x}_0$ є граничною для областей визначення і функції $f_1(\mathbf{x})$, і функції $f_2(\mathbf{x})$, то для доведення слід скористатись тим, що при заданих умовах

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) =$$

$$= f_1(\mathbf{x}_0) + f_2(\mathbf{x}_0) = (f_1 + f_2)(\mathbf{x}_0),$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f_1 - f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) - \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) =$$

$$= f_1(\mathbf{x}_0) - f_2(\mathbf{x}_0) = (f_1 - f_2)(\mathbf{x}_0),$$

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} (f_1 f_2)(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}) \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x}) =$$

$$= f_1(\mathbf{x}_0)f_2(\mathbf{x}_0) = (f_1f_2)(\mathbf{x}_0),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(\mathbf{x}) = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_2(\mathbf{x})} = \frac{f_1(\mathbf{x}_0)}{f_2(\mathbf{x}_0)} = \frac{f_1}{f_2}(\mathbf{x}_0). \quad \blacksquare$$

Означення 8.2. *Функція f називається неперервною на множині E, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.*

Виявляється, що коли множина E має певну топологічну структуру, то неперервна на такій множині функція має цілий ряд цікавих властивостей. Точніше, якщо функція $f(\mathbf{x})$ неперервна на обмеженій замкненій множині E, то $f(\mathbf{x})$ обмежена на цій множині, досягає на ній свого найменшого та найбільшого значення, рівномірно неперервна на ній. Якщо ж множина E є областю (відкрита, зв'язна множина), а неперервна на E функція $f(\mathbf{x})$ приймає два різні значення, то вона приймає і всі проміжні значення.

Теорема 8.3 (Вейєрштрасса). *Якщо функція n дійсних змінних $f(\mathbf{x})$ визначена і неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона обмежена і досягає своєї нижньої і верхньої граней.*

Доведення. Припустимо, що існує обмежена замкнена множина F, на якій визначена функція $f(\mathbf{x})$, яка неперервна у кожній точці множини F, але необмежена на цій множині, тобто яке б ми не взяли число $M > 0$ на множині F існує така точка $\mathbf{x}'$, для якої $|f(\mathbf{x}')| > M$. Нехай $M = 1, 2, \ldots, k, \ldots$. Тоді для $M = 1$ існує точка $\mathbf{x}_1 \in F$ така, що $|f(\mathbf{x}_1)| > 1$, для $M = 2$ існує точка $\mathbf{x}_2 \in F$ така, що $|f(\mathbf{x}_2)| > 2, \ldots$, для $M = k$ існує точка $\mathbf{x}_k \in F$ така, що $|f(\mathbf{x}_k)| > k$ і т.д. У такий спосіб побудовано послідовність $(\mathbf{x}_k)$ точок з множини F. Оскільки множина F обмежена, то обмеженою буде послідовність $(\mathbf{x}_k)$. В силу теореми Больцано-Вейерштрасса з неї можна виділити збіжну підпослідовність $(\mathbf{x}_{k_m})$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Нехай $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{x}_{k_m} = \mathbf{x}_0$. В силу замкненості множини F $\mathbf{x}_0 \in F$. Оскільки функція $f(\mathbf{x})$ неперервна на множині F, то вона неперервна у точці $\mathbf{x}_0$. А оскільки послідовність $(\mathbf{x}_{k_m})$ точок з F збігається до точки $\mathbf{x}_0$, то існує границя числової послідовності $(f(\mathbf{x}_{k_m}))$, причому

$$\lim_{m\to\infty} f(\mathbf{x}_{k_m}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Але ж за побудовою для кожного m $|f(\mathbf{x}_{k_m})| > k_m$, тобто послідовність $(f(\mathbf{x}_{k_m}))$ необмежена і границі мати не може. Отримана суперечність свідчить про те, що наше припущення невірне, тобто не існує такої обмеженої і замкненої множини і неперервної на ній функції, яка б була необмежена на ній. і перша частина теореми доведена, тобто доведено, що існує $M > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in F$ $|f(\mathbf{x})| \leqslant M$.

З обмеженості функції $f(\mathbf{x})$ випливає, що множина $\{f(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in F\}$ має як нижню так і верхню грань. Залишається показати, що у множині F знайдуться такі дві точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, що

$$f(\mathbf{x}_1) = \inf_{\mathbf{x}\in F} f(\mathbf{x}), \quad f(\mathbf{x}_2) = \sup_{\mathbf{x}\in F} f(\mathbf{x}).$$

Другу частину доведення теж проведемо методом від супротивного. Нехай існує обмежена замкнена множина F і неперервна на ній функція f така, що для всіх $\mathbf{x} \in F$

$$f(\mathbf{x}) > m = \inf_{\mathbf{x}\in F} f(\mathbf{x}).$$

Побудуємо функцію

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{f(\mathbf{x}) - m}.$$

Ця функція визначена і неперервна на обмеженій замкненій множині F, а, отже, за першою частиною теореми вона обмежена на F, тобто існує число $L > 0$ таке, що для всіх $\mathbf{x} \in F$

$$|\varphi(\mathbf{x})| = \frac{1}{f(\mathbf{x}) - m} \leqslant L.$$

Оскільки $f(\mathbf{x}) - m > 0$ і $L > 0$, то остання нерівність запишеться у вигляді

$$f(\mathbf{x}) - m \geqslant \frac{1}{L},$$

що суперечить тому, що $m = \inf\limits_{\mathbf{x} \in F} f(\mathbf{x})$. Якщо припустити, що не існує точки у множині F, у якій $f(\mathbf{x})$ досягає свого найбільшого значення, тобто $\forall \mathbf{x} \in F$

$$f(\mathbf{x}) < M = \sup_{\mathbf{x} \in F} f(\mathbf{x}),$$

то побудувавши функцію

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{M - f(\mathbf{x})},$$

і провівши ті ж міркування, отримаємо нерівність

$$f(\mathbf{x}) \leqslant M - \frac{1}{L},$$

яка виконується $\forall \mathbf{x} \in F$. А це суперечить тому, що $m = \sup\limits_{\mathbf{x} \in F} f(\mathbf{x})$. Теорема повністю доведена. ■

Звичайно теорема Вейєрштрасса є теоремою існування, тобто, гарантуючи існування найменшого і найбільшого значення у функції неперервної на обмеженій замкненій множині F, вона не дає інструменту для їх відшукань. Ефективний пошук точок, у яких функція досягає свого найменшого і найбільшого значення, вимагає додаткової інформації про функцію. Наприклад, диференційовність функції дозволяє (інколи) прийти до результату.

Приклад 3. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$$

на множині $F = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Розв'язання. Очевидно, що множина F є обмежена замкнена множина точок простору R^2, а задана функція двох змінних є неперервною на множині F. Отже, існують точки $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in F$ такі, що $\forall (x, y) \in F$

$$f(x_1, y_1) \leqslant f(x, y) \leqslant f(x_2, y_2).$$

Оскільки функція $f(x, y)$ не тільки неперервна, але й диференційовна в області $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$, то, скориставшись необхідною умовою існування екстремуму функції двох змінних, запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - \ y - 1 = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y \quad\ = 0, \end{cases}$$

з якої дістаємо точку $M_1(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ підозрілу на екстремум. Будемо досліджувати функцію на межі множини F, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$. Але на множині $\partial F = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ функція має вигляд

$$\varphi_1(x) = 1 - x\sqrt{1 - x^2} - x$$

на верхньому півколі,

$$\varphi_2(x) = 1 + x\sqrt{1 - x^2} - x$$

на нижньому півколі. Таким чином, треба знайти найбільші і найменші значення функцій $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ на відрізку $[-1, 1]$.

Оскільки на інтервалі $(-1,1)$

$$\varphi_1'(x) = -\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - 1,$$

$$\varphi_2'(x) = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} - 1,$$

то, розв'язавши рівняння $\varphi_1'(x) = 0$, $\varphi_2'(x) = 0$, на інтервалі $(-1,1)$ дістанемо два корені $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ для першого і один корінь $x = 0$ для другого. Визначимо значення функції у точках

$$M_1(\frac{2}{3},\frac{1}{3}),\ M_2(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),\ M_3(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}),$$

$$M_4(0,-1),\ M_5(-1,0),\ M_6(1,0).$$

Маємо

$$f(\frac{2}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}, f(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) = 1+\frac{3\sqrt{3}}{4}, f(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}) = 1-\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$f(0,-1) = 1, f(-1,0) = 2, f(1,0) = 0.$$

Звідси результат

$$f_{\max} = \max_{(x,y)\in F} f(x,y) = 1+\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$f_{\min} = \min_{(x,y)\in F} f(x,y) = -\frac{1}{3}.$$

Нехай функція n змінних $f(\mathbf{x})$ визначена і неперервна на деякій області G, тобто відкритій зв'язній множині точок простору R^n, і нехай для точок $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G$ $f(\mathbf{x}_1) = A$, $f(\mathbf{x}_1) =$

B, причому, наприклад, $A < B$. Можна довести, що яким би не було число C таке, що $A < C < B$, в області G знайдеться така точка $\mathbf{x}_0$, для якої $f(\mathbf{x}_0) = C$. При доведенні на підставі того факту, що множина G зв'язна, задається крива, яка сполучає точки $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})$, $\mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})$. Така крива задається набором неперервних на відрізку $[\alpha, \beta]$ функцій $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ таких, що $\varphi_1(\alpha) = x_{11}, \varphi_2(\alpha) = x_{12}, \ldots, \varphi_n(\alpha) = x_{1n}$, $\varphi_1(\beta) = x_{21}, \varphi_2(\beta) = x_{22}, \ldots, \varphi_n(\beta) = x_{2n}$. Підставивши функції $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ у функцію $f(\mathbf{x})$, маємо неперервну на відрізку $[\alpha, \beta]$ функцію $\Phi(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, для якої $\Phi(\alpha) = A$, $\Phi(\beta) = B$. Далі використовуємо теорему Коші про проміжне значення для функції однієї змінної.

Теорема 8.4 (теорема про проміжне значення) *Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, на кінцях відрізка приймає різні значення $f(a) = A$, $f(b) = B$, то яким би не було число C між A і B на інтервалі (a, b) існує точка x_0 така, що $f(x_0) = C$.*

Доведення. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $f(a) = A < B = f(b)$ і $A < C < B$. Відрізок $[a, b]$ поділимо пополам точкою $\frac{a+b}{2}$. Тоді або $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = C$ і $x_0 = \frac{a+b}{2}$, або $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq C$.

У другому випадку на кінцях одного із відрізків $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ функція f приймає значення, які лежать по різні сторони числа C. Позначимо цей відрізок через $[a_1, b_1]$ ($[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$, якщо $C < f(\frac{a+b}{2})$, і $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$, якщо $f(\frac{a+b}{2}) < C$). З відрізком $[a_1, b_1]$ поступимо точно так саме. Розділимо його пополам точкою $\frac{a_1+b_1}{2}$. Тоді або $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = C$ і $x_0 = \frac{a_1+b_1}{2}$, або $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq C$. У другому випадку на кінцях одного з відрізків $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ функція f приймає значення, які лежать по різні сторони числа C. Позначимо такий відрізок через $[a_2, b_2]$.

У результаті такої процедури або через скінченне число кроків прийдемо до точки x_0, у якій $f(x_0) = C$, або отримаємо послідовність відрізків $([a_n, b_n])$ таких, що

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

і для будь-якого n $f(a_n) < C < f(b_n)$.

Нехай x_0 — спільна точка усіх відрізків. Тоді очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x_0 \quad \text{і}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0),$$

причому в силу того, що $\forall n$ $f(a_n) < C < f(b_n)$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant C \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

З нерівності $f(x_0) \leqslant C \leqslant f(x_0)$ маємо $f(x_0) = C$.

Отже, і тоді, коли використана процедура продовжується нескінченно, існує точка x_0 така, що $f(x_0) = C$. ■

Як наслідок, маємо досить популярний результат, який використовується не тільки для встановлення існування кореня рівняння $f(x) = 0$ на відрізку $[a, b]$, але й знаходження його наближеного значення.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то на цьому відрізку існує хоч одна точка, у якій функція обертається в нуль.

Навпаки, якщо ми знаємо всі нулі неперервної на деякому проміжку функції, то в силу властивості збереження знаку неперервної функції можна дослідити функцію на знак. А саме, якщо, наприклад, відомо, що функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a, b), тільки у точках $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ $(x_1 < x_2 < \cdots < x_n)$ функція обертається в нуль, то, взявши на кожному з інтервалів (a, x_1), $(x_1, x_2), \ldots, (x_n, b)$ по точці і визначивши знак функції у кожній такій точці, робимо висновок про знак функції на кожному з інтервалів. Якраз цей факт використовується при розв'язанні нерівностей методом інтервалів.

На закінчення з класу неперервних функцій n змінних виділимо клас так званих рівномірно неперервних функцій.

Означення 8.3. *Функція $f(\mathbf{x})$ називається рівномірно неперервною на множині E ($E \subset \mathbb{R}^n$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-яких $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E$, які задовольняютіь нерівність $d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta$, виконується нерівність $|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| < \varepsilon$.*

Насамперед очевидно, що кожна рівномірно неперервна на E функція є неперервною на цій множині. А от не всяка неперервна функція є рівномірно неперервною. Наприклад, неперервна, але необмежена на E функція не є рівномірно неперервною. Можна привести приклади неперервних і обмежених функцій, які не є рівномірно неперервними ($\sin x^2, \cos x^2$).

Разом з тим можна виділити клас неперервних функцій, які будуть рівномірно неперервними.

Теорема Кантора. *Якщо функція $f(\mathbf{x})$ неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона рівномірно неперервна на цій множині.*

Для функції однієї змінної цей результат формулюється так: *Будь-яка неперервна на відрізку функція рівномірно неперервна на ньому.*

Якраз останній результат і дозволяє встановити, що будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ інтегровна на цьому відрізку.

Завдання для самоконтролю.

1. Означити для функції однієї змінної лівостороню і правосторону неперервність і сформулювати через ці терміни необхідну і достатну умову неперервності функції у точці. На підставі цього охарактеризувати, у який спосіб може порушуватись неперервність функції у точці.

2. Дослідити на неперервність функції

$$f_1(x) = \sqrt{-\sin^2 x};\ \ f_2(x) = \{x\};\ \ f_3(x,y) = \ln(x^2+y^2-4);$$

$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y} & ,\ \text{якщо } x+y \neq 0, \\ 0 & ,\ \text{якщо } x+y = 0. \end{cases}$$

3. Побудувати числову функцію визначену на $\mathbb{R}$, але неперервну а) тільки в одній точці, б) тільки у двох точках, в) тільки у точках множини $\mathbb{Z}$.

4. Дослідити на знак функцію

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2y - 1.$$

5. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$$

на множині $E = \{(x,y) |\max(|x|,|y|) \leqslant 1\}$.

6. Які з функцій

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

$$f_3(x) = \sin x, \quad f_4(x) = \sin x^2$$

рівномірно неперервні на $\mathbb{R}$?

9 *ЛЕКЦІЯ*: Границя і неперервність функції комплексної змінної

Поняття функції комплексної змінної і її подання через функції двох дійсних змінних. Границя функції комплексної змінної та властивості. Неперервність функції комплексної змінної та властивості.

Література. [1], ч. 3, с. 217–230; [4], с. 25–29. [9], ч. 2, с. 319–326.

Загальне означення функції як відповідності, яка кожному елементу однієї множини відносить один елемент другої множини, чітко обумовлює її однозначність. Ця риса зберігається за функціями однієї і багатьох дійсних змінних. А от в аналізі функцій комплексної змінної виникає потреба розглядати не тільки однозначні, але й багатозначні функції.

Нехай D і E є підмножини множини комплексних чисел $\mathbb{C}$.

Означення 9.1. *Відповідність f, яка кожному комплексному числу з множини D відносить одне комплексне число з множини E називається однозначною функцією комплексної змінної і позначається $w = f(z)$.*

Якщо ж відповідність f кожному комплексному числу з множини D відносить більше одного комплексного числа, то f називається багатозначною функцією комплексної змінної. Позначення залишається теж саме.

Наприклад, відповідність, яка кожному комплексному числу z з $\mathbb{C}$ відносить його квадрат z^2 є однозначною функцією $w = z^2$, визначеною на множині $\mathbb{C}$. А оскільки корінь n-го степеня з комплексного числа z $(z \neq 0)$ має n різних значень

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

де $\sqrt[n]{|z|}$ — арифметичний корінь, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, то відповідність, яка $z = 0$ відносить одне число, а числу $z \neq 0$ — n значень кореня n-го степеня з цього числа є багатозначною (n-значною) функцією $w = \sqrt[n]{z}$. Більше того розглядаються нескінченнозначні функції комплексної змінної. Такими є, наприклад, функція $w = \operatorname{Arg} z$, визначена для всіх $z \neq 0$, значеннями якої для кожного z є зчисленна множина дійсних чисел $\{\arg z + 2\pi k \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, є нескінченнозначною. Такою ж є функція $w = \operatorname{Ln} z$, яка визначена для всіх $z \neq 0$ і значеннями її для кожного z є зчисленна множина комплексних чисел

$$\{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Оскільки аналіз багатозначних функцій зводиться до аналізу однозначних (виділення окремих гілок, використання ріманових поверхонь), то у подальшому ми будемо вести мову тільки про однозначні функції.

Нехай маємо функцію $w = f(z)$ визначену на області G (G — відкрита, зв'язна множина). Якщо покласти $z = x + iy$, $w = u + iv$, то той факт, що кожному комплексному числу z з області G поставлено у відповідність комплексне число $f(z)$, можна виразити так:„кожній точці z з області G, яка має координати x, y, поставлено у відповідність пару дійсних чисел u і v, які є координатами точки $f(z)$“. А це означає, що задано відображення області G ($G \subset \mathbb{R}^2$) в $\mathbb{R}^2$, що еквівалентно заданню двох функцій двох змінних, тобто $f(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

де функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ визначені в області G площини дійсних змінних x, y, яка відповідає області G комплексної площини. Функцію $u(x, y)$ називають *дійсною*, а функцію $v(x, y)$ — *уявною* частиною функції $w = f(z)$.

Наприклад, для функцій

$$w = z^2,\ w = \frac{iz + 2i + 1}{z + i},\ w = e^z,\ w = \cos z,\ w = \sin z$$

мають місце відповідно подання

$$w = x^2 - y^2 + 2xyi,$$

$$w = \frac{y^2 + 2x + y}{x^2 + y^2 + 2y + 1} + i\,\frac{x^2 + xy - y^2 + 1}{x^2 + y^2 + 2y + 1},$$

$$w = e^x(\cos y + i\sin y),$$

$$w = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y,$$

$$w = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y.$$

Зауважимо, що у багатьох випадках зрозуміти характер поведінки функції комплексної змінної допомагає геометричне подання образів певних кривих і областей при відображенні, що задаються цією функцією. З цією метою на площині комплексної змінної z (площині (z)) задають деяку криву або область (як правило, обмежену певною кривою) і будують образ кривої або області при відображенні $f(z)$ на другому примірнику комплексної площини (площини (w)).

Наприклад, функція

$$w = \frac{z - i}{z + i}$$

відображає коло $\{z \mid |z| = 1\}$ на пряму $\operatorname{Re} w = 0$, а функція

$$w = e^{\pi(1-i)z}$$

відображає смугу, обмежену прямими $y = x$, $y = x+1$, на верхню півплощину.

Нехай функція $w = f(z)$ визначена у деякому околі точки z_0, крім можливо, самої точки z_0.

Означення 9.2. *Комплексне число A називається границею функції f у точці z_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує*

$\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Позначається $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Оскільки околом нескінченно віддаленої точки $z_0 = \infty$ є множина точок $\{z \,|\, |z| > M,\, M > 0\}$, то число A називається границею функції $f(z)$, визначенної у деякому околі точки ∞, при $z \to \infty$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $M > 0$, що для всіх z, які задовольняють нерівність $|z| > M$, виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$. Позначається $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = A$. і, нарешті, коли для будь-якого $M > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z)| > M$, то говорять, що невласне комплексне число ∞ є границею функції $f(z)$ у точці z_0 і позначається $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

Означення границі функції комплексної змінної у точці не відрізняється від означення границі функції однієї дійсної змінної, а, точніше, це означення границі функції, яка відображає один метричний простір в інший. Тому зрозуміло, що всі ті властивості, які мають місце для границь відображень метричних просторів автоматично переносяться на границі функцій комплексної змінної. (Звичайно у них не може фігурувати невласне комплексне число ∞, бо у довільному метричному просторі такої точки немає). Наприклад, мають місце теореми.

Теорема 9.1. *Якщо функція $f(z)$ має границю у точці z_0, то вона єдина, а сама функція обмежена у деякому околі цієї точки.*

З другого боку, поле комплексних чисел $\mathbb{C}$ є розширенням поля дійсних чисел $\mathbb{R}$ із збереженням цілого ряду властивостей. Тому відповідні властивості функцій, які мають границі однієї дійсної змінної переносяться на функції комплексної змінної.

Теорема 9.2. *Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ у точці z_0 мають границі, то у цій точці мають границі функції*

$$(f+g)(z),\ (f-g)(z),\ (fg)(z),$$

а якщо, крім того, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)\neq 0$, то і функція $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)$, причому

$$\lim_{z\to z_0}(f+g)(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)+\lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0}(f-g)(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)-\lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0}(fg)(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z),$$
$$\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)}.$$

Зрозуміло, що ці теореми доводяться , спираючись на означення границі. Як приклад, доведемо, що

$$\lim_{z\to z_0}(fg)(z)=\lim_{z\to z_0} f(z)\lim_{z\to z_0} g(z).$$

Справді, оскільки $g(z)$ у точці z_0 має границю, то вона обмежена у деякому околі цієї точки. Тобто існують такі числа $M>0$ і $\delta_1>0$, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0<|z-z_0|<\delta_1$ $|g(z)|\leqslant M$. Тоді в силу того, що $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, для будь-якого $\varepsilon>0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, існує $\delta_2>0$, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0<|z-z_0|<\delta_2$, виконується нерівність

$$|f(z)-A|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

А з того, що $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, випливає, що для $\dfrac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$ існує $\delta_3>0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0<$

$|z - z_0| < \delta_3$, виконується нерівність

$$|g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}.$$

Якщо обрати $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, то для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta_0$, виконуються всі три нерівності:

$$|g(z)| \leqslant M, \ |f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)},$$

а, отже, для таких z

$$|(fg)(z) - AB| = |f(z)g(z) - Ag(z) + Ag(z) - AB| \leqslant$$

$$\leqslant |g(z)||f(z) - A| + |A||g(z) - B| < |g(z)||f(z) - A| +$$

$$+(|A|+1)|g(z) - B| < M\frac{\varepsilon}{2M} + (|A|+1)\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} = \varepsilon\,.$$

Таким чином, показано, що $\forall\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|(fg)(z) - AB| < \varepsilon$. А це й означає, що $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$. ■

Разом з тим, враховуючи специфіку структури функції комплексної змінної, можна звести проблему існування і знаходження границі функції комплексної змінної до розв'язання такої проблеми для функцій $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Теорема 9.3. *Для того щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ мала границю у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ число $A = a + bi$, необхідно і досить, щоб функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мали границями у точці (x_0, y_0) відповідно числа a і b.*

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a + bi$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Якщо $0 < |z - z_0| < \delta$, тобто

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

то для відповідних точок (x, y) площини $\mathbb{R}^2$ виконується нерівність

$$0 < d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) < \delta,$$

і для таких точок

$$|u(x, y) - a| = \sqrt{(u(x, y) - a)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2} =$$

$$= |u(x, y) + iv(x, y) - (a + ib)| = |f(z) - A| < \varepsilon.$$

Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх точок (x, y), які задовольняють нерівність $0 < d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) < \delta$, виконується нерівність $|u(x, y) - a| < \varepsilon$. А це й означає, що

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a.$$

Точно так саме доводиться, що

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Достатність. Нехай

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, існує $\delta > 0$ таке, що для всіх точок (x, y), які задовольняють нерівність $0 < d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) < \delta_1$, виконується нерівність

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

а також існує $\delta_2 > 0$ таке, що для всіх точок (x, y), які задовольняють нерівність $0 < d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) < \delta_2$, виконується нерівність

$$|v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Якщо обрати $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2)$, то для всіх точок (x, y), які задовольняють нерівність

$$0 < d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) < \delta,$$

виконуються нерівності

$$|u(x, y) - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \ |v(x, y) - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Тоді, врахувавши, що $d\left((x, y), (x_0, y_0)\right) = |z - z_0|$ і

$$|f(z) - A| = |u(x, y) - a + i(v(x, y) - b)| =$$

$$= \sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon,$$

маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(z) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. ■

Приклад. Знайти

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y}{x+iy} =$$

$$= \frac{x\sin x \operatorname{ch} y + y\cos x \operatorname{sh} y}{x^2+y^2} + i\frac{x\cos x \operatorname{sh} y - y\sin x \operatorname{ch} y}{x^2+y^2},$$

тобто

$$u(x,y) = \frac{x\sin x \operatorname{ch} y + y\cos x \operatorname{sh} y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\sin x}{x}\cdot \operatorname{ch} y \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{\operatorname{sh} y}{y}\cos x \frac{y^2}{x^2+y^2},$$

$$v(x,y) = \frac{x\cos x \operatorname{sh} y - y\sin x \operatorname{ch} y}{x^2+y^2} =$$

$$= \left(\cos x\frac{\operatorname{sh} y}{y} - \frac{\sin x}{x}\operatorname{ch} y\right)\frac{xy}{x^2+y^2},$$

то, врахувавши, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sh} y}{y} = \lim_{y\to 0}\cos y = 1,$$

$$u(x,y) = (1+\alpha(x))(1+\beta(y))\frac{x^2}{x^2+y^2} +$$

$$+ (1+\gamma(y))(1+\delta(x))\frac{y^2}{x^2+y^2} =$$

$$= 1 + (\alpha(x)+\beta(y)+\alpha(x)\beta(y))\frac{x^2}{x^2+y^2} +$$

$$+ (\gamma(y)+\delta(x)+\gamma(y)\delta(x))\frac{y^2}{x^2+y^2},$$

де $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x) = \lim\limits_{y\to 0}\beta(y) = \lim\limits_{y\to 0}\gamma(y) = \lim\limits_{x\to 0}\delta(x) = 0,$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\cos x\frac{\operatorname{sh} y}{y} - \frac{\sin x}{x}\operatorname{ch} y\right) = 0,$$

а

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{xy}{x^2+y^2}$$

обмежені у деякому околі точки $(0,0)$, маємо, що

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y) = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} v(x,y) = 0.$$

Таким чином, $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1.$

Перейдемо тепер до означення неперервності функції у точці.

Означення 9.3. *Функція $w = f(z)$, визначена у деякому околі точки z_0, називається неперервною у цій точці, якщо $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

З означення і теореми 9.3 безпосередньо випливає, що функція $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ неперервна у точці $z_0 = x_0+iy_0$ тоді і тільки тоді, коли неперервними у точці (x_0,y_0) будуть функції $u(x,y), v(x,y)$.

Очевидно також, що коли неперервними у точці z_0 будуть функції $f(z)$ і $g(z)$, то неперервними у цій точці будуть функції $(f+g)(z)$, $(f-g)(z)$, $(fg)(z)$, а якщо, крім того, $g(z_0)\neq 0$, то і функція $\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)$.

Еквівалентним означенню 9.3 є означення неперервності функції у точці на мові послідовностей.

Означення 9.4. *Функція $w = f(z)$, визначена у деякому околі точки z_0, називається неперервною у цій точці, якщо для будь-якої послідовності (z_n) із згаданого вище околу такої, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, послідовність $(f(z_n))$ відповідних значень функції збігається і $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.*

Зауваження. Вся інформація, яка тут подана, не стосується невласного комплексного числа ∞, тобто маємо на увазі функції визначені на підмножинах поля C (а не розширеної комплексної множини). Що стосується узагальнення поняття неперервності функції у точці (неперервність по множині, неперервність у нескінченно віддаленій точці, випадок $f(z_0) = \infty$), то з ними можна познайомитись у посібнику [1, ч. 3, с. 226–228].

На заключення доведемо дві властивості функція неперервних на обмеженій замкненій множині.

Теорема 9.4. *Якщо функція $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині, то вона обмежена на цій множині.*

Доведення. Припустимо, що існує обмежена і замкнена множина комплексних чисел E і неперервна на ній (неперервна у кожній точці множини E) функція $f(z)$, яка необмежена на цій множині, тобто для будь-якого $M > 0$ знайдеться точка $z' \in E$ така, що $|f(z')| > M$. Тоді для кожного натурального n знайдеться точка $z_n \in E$ така, що $|f(z_n)| > n$, і всі члени так побудованої послідовності належать обмеженій множині E, тобто послідовність (z_n) обмежена. В силу теореми Больцано-Вейєрштрасса, з неї можна виділити збіжну підпослідовність. Нехай (z_{n_k}) — така підпослідовність і

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k} = z^*.$$

Точка z^* належить множині E, бо за умовою E замкнена. А оскільки у точці z^* функція $f(z)$ неперервна, то з того, що

$\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z^*$ випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = f(z^*)$, і послідовність $(f(z_{n_k}))$ обмежена. З другого боку, для кожного k $|f(z_{n_k})| > n_k$, де $n_k \to \infty$, якщо $k \to \infty$, тобто послідовність $(f(z_{n_k}))$ — необмежена. Ця суперечність свідчить про те, що наше припущення невірне. А, отже, кожна неперервна на замкненій обмеженій множині функція є обмеженою на ній. ■

Теорема 9.5. *Якщо функція $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині E, то знайдуться точки $z^*, z^{**} \in E$ такі, що для будь-якого $z \in E$*

$$|f(z^*)| \leqslant |f(z)| \leqslant |f(z^{**})|,$$

тобто модуль неперервної на обмеженій замкненій множині функції досягає на ній свого найменшого і найбільшого значення.

Доведення. Доведемо, наприклад, що на множині E знайдеться точка z^{**} така, що для всіх $z \in E$ $|f(z)| \leqslant |f(z^{**})|$. Насамперед, в силу того, що $f(z)$ неперервна на обмеженій замкненій множині E, то вона, а, отже, і функція $|f(z)|$, обмежені на множині E. Нехай

$$M = \sup_{z\in E} |f(z)|.$$

Якщо існує точка z^{**}, для якої $|f(z^{**})| = M$, то справді для всіх $z \in E$ виконується нерівність $|f(z)| \leqslant |f(z^{**})|$. Нехай існує множина E і неперервна на ній функція $f(z)$ така, що у E немає точки z, для якої $|f(z)| = M$, тобто для всіх $z \in E$ $|f(z)| < M = \sup\limits_{z\in E} |f(z)|$. Побудуємо функцію

$$\varphi(z) = \frac{1}{M - |f(z)|}.$$

Оскільки ця функція неперервна на множині E, то вона обмежена на ній, тобто існує число $A > 0$, що для всіх $z \in E$

$$\frac{1}{M - |f(z)|} \leqslant A$$

або $M - |f(z)| \geqslant \frac{1}{A}$. Звідси для всіх z з E

$$|f(z)| \leqslant M - \frac{1}{A}.$$

Останнє суперечить тому, що M — точна грань множини значень функції $|f(z)|$. Отже, не існує такої обмеженої замкненої множини E і неперервної на ній функції $f(z)$, модуль якої не досягав би свого найбільшого значення на цій множині. ■

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y)$.
2. Довести, що коли $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, то $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |A|$.
3. Довести, що якщо функція $f(z)$ неперервна у точці z_0, існує окіл точки $f(z_0)$, у якому визначена функція $g(z)$, причому вона неперервна у точці $f(z_0)$, то складна функція

$$(g\circ f)(z) = g(f(z))$$

неперервна у точці z_0.

4. Які з функцій

$$\frac{\mathrm{Re}\, z}{z},\ \frac{\mathrm{Im}\, z}{z},\ \frac{z^2}{|z|},\ \frac{\mathrm{Re}\, z^2}{|z|},\ \frac{z\mathrm{Re}\, z^2}{|z|},\ \frac{z+i}{z^3+z},$$

визначенних у деякому околі точки $z = 0$, можуть бути доозначені у точці $z = 0$ так, щоб вони стали неперервними у цій точці?

5. Довести, що тригонометричні функції комплексної змінної $\cos z$ і $\sin z$ необмежені.

6. Знайти найменше і найбільше значення функції

$$w = |(z - 1 + i)^2|$$

на множині $E = \{z \,|\, |z - 1 + i| \leqslant 1\}$.

7. Довести, що функції

$$w = \frac{z}{1+z}, \quad w = \frac{z^2}{z^2 - 4}$$

обмежені відповідно на замкнених множинах

$$\overline{E}_1 = \{z \,|\, 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}\}, \;\; \overline{E}_2 = \{z \,|\, |z| \leqslant 1\}.$$

8. Знайти образ кривих

$$\gamma_1 = \{z \,|\, |z| = r\},$$

$$\gamma_2 = \{z \,|\, \arg z = \varphi_0, \; 0 < |z| < 1\}$$

при відображенні

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

10 *ЛЕКЦІЯ*: Розвиток поняття степеня з дійсним і комплексним показником

Степінь з натуральним показником. Дескриптивне означення степеня з раціональним показником. Функціональний підхід при означенні степеня з ірраціональним показником. Означення степеня з комплексним показником.

Література. [1], ч. 1, с. 86–90; [3], ч. 1, с. 97–105; В. И. Ильин. Э. Г. Позняк, Основы математического анализа, ч. I, М.: Наука, с. 110–112, 117–120; Липман Берс, Математический анализ, М.: Высшая школа, 1975, с. 43–46.

При введенні поняття степеня з дійсним показником виходять з означення натурального степеня дійсного числа

$$a^1 := a,\ a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ разів}}, \tag{10.1}$$

тобто степенем числа a з показником 1 називається саме число a, а степенем числа a з натуральним показником n ($n > 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

Множник, який повторюється називається основою степеня, а число таких множників — показником степеня. Знаходження значення степеня називають піднесенням до степеня.

Очевидними є такі властивості піднесення до степеня:

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N})(a^m \cdot a^n = a^{m+n}), \tag{10.2}$$

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(a^n \cdot b^n = (ab)^n), \tag{10.3}$$

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall m, n \in \mathbb{N})((a^n)^n = a^{mn}). \tag{10.4}$$

Таким чином, при множенні степенів з однаковими основами основа залишається тією ж самою, а показники степенів додаються; при множенні степенів з різними основами, але з однаковими показниками степеня основою стає добуток основ, а показник степеня залишається той самий, при піднесенні до степеня

степеня основа залишається тією ж самою, а показники перемножаються.

Зауваження. Відома формула Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

дає можливість подати n-ий степінь суми через k-ті ($k = 0, 1, \ldots, n$) степені доданків.

При подальшому узагальненні степеня властивості (10.2)–(10.4) будуть слугувати для тестової перевірки коректності відповідних узагальнень.

Перехід до степенів з цілим недодатним показником здійснюється з допомогою означення:

$$\text{для} \quad a \neq 0 \quad a^0 := 1, \ a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ \text{де } n \in \mathbb{N}. \tag{10.5}$$

За a залишається назва „основа“, а за n — назва „показник степеня“.

Неважко перевірити, що властивості (10.2)–(10.4) виконуються для степенів з цілим показником. Наприклад, якщо $m, n \in \mathbb{N}$, то

$$a^m \cdot a^{-n} = \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & , \text{ якщо } m \geqslant n, \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & , \text{ якщо } m < n \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} a^{m-n} & , \text{ якщо } m \geqslant n, \\ a^{-n+m} & , \text{ якщо } m < n \end{cases} = a^{m-n},$$

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Перейдемо до означення степеня з показником $\frac{1}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$ і $n > 1$. З цією метою спочатку покажемо, що має розв'язок одна з двох обернених задач до задачі піднесення до степеня, а саме задача відшукання основи, коли відомо показник степеня n і n-ий степінь невідомої основи.

Тут пропонується два підходи доведення існування кореня (арифметичного кореня) n-го степеня з додатного числа, причому перший з них дає правило, як саме знайти наближене значення кореня з наперед заданою точністю, а другий розв'язує проблему існування через існування оберненої функції для функції $y = x^n$.

Теорема 10.1. *Для кожного дійсного числа $c > 0$ і кожного натурального числа $n > 1$ існує єдине число x таке, що $x^n = c$.*

Доведення. Насамперед переконаємось, що для заданих $c > 0$ і n існує не більше одного числа $x > 0$ такого, що $x^n = c$. Справді, якщо припустити, що існують два додатних дійсних числа x_1 і x_2 таких, що $x_1^n = x_2^n = c$, то в силу того, що числа x_1 і x_2 різні, наприклад, $x_1 < x_2$, дістаємо, що $x_1^n < x_2^n$, що суперечить нашому припущенню. Побудуємо число $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots$ у такий спосіб: a_0 — найбільше невід'ємне ціле число, для якого $a_0^n \leqslant c$, a_1 — найбільше з чисел $0, 1, \ldots, 9$, для якого $(a_0, a_1)^n \leqslant c$, a_2 — найбільше з чисел $0, 1, \ldots, 9$, для якого $(a_0, a_1 a_2)^n \leqslant c, \ldots$, a_k — найбільше з чисел $0, 1, \ldots, 9$, для якого $(a_0, a_1 a_2 \ldots a_k)^n \leqslant c, \ldots$. Оскільки для кожного k

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \leqslant \alpha < a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k},$$

то

$$(a_0, a_1 a_2 \ldots a_k)^n \leqslant \alpha^n < (a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k})^n.$$

Якщо ще врахувати, що для кожного k

$$(a_0, a_1 a_2 \ldots a_k)^n \leqslant c < (a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k})^n,$$

то числа α^n і c належать кожному відрізку

$$[(a_0, a_1 a_2 \ldots a_k)^n; (a_0, a_1 a_2 \ldots a_k + 10^{-k})^n].$$

Звідси випливає, що

$$|\alpha^n - C| \leqslant (a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 10^{-k})^n - (a_0, a_1 a_2 \dots a_k)^n =$$

$$= 10^{-k}\left((a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 10^{-k})^{n-1} + (a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 10^{-k})^{n-2} \times\right.$$

$$\times (a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 10^{-k}) + \dots + (a_0, a_1 a_2 \dots a_k + 10^{-k}) \times$$

$$\left.\times (a_0, a_1 a_2 \dots a_k)^{n-2} + (a_0, a_1 a_2 \dots a_k)^{n-1}\right) \leqslant 10^{-k}\left((a_0+1)^{n-1} +\right.$$

$$\left.+(a_0+1)^{n-1} + \dots + (a_0+1)^{n-1}\right) = 10^{-k} n (a_0+1)^{n-1},$$

тобто $|\alpha^n - c| \leqslant 10^{-k} \cdot n(a_0+1)^{n-1}$.

А оскільки

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n(a_0+1)^{n-1}}{10^k} = 0,$$

то $|\alpha^n - c| = 0$, тобто $\alpha^n = c$. Таким чином, існування і єдиність додатного числа α такого, що $\alpha^n = c$ доведене. ■

Зауваження. Для $n = 2$ і будь-якого $c > 0$ можна дати геометричне обгрунтування існування числа x такого, що $x^2 = c$ (див. Рис. 4).

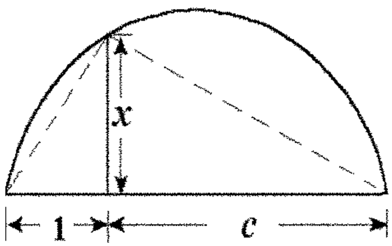


Рис. 4

Додатне число α, для якого $\alpha^n = c$, називається коренем (арифметичним коренем) з додатного числа c і позначається $\alpha = \sqrt[n]{c}$. Крім того доозначається $\sqrt[n]{0} := 0$, і для непарного n $\sqrt[n]{-c} = -\sqrt[n]{c}$. Тепер уже можна означити

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}. \qquad (10.6)$$

При другому підході виходимо з того, що степенева функція $y = x^n$ при будь-якому $n \in \mathbb{N}$ монотонно зростаюча і неперервна на проміжку $[0, +\infty)$. Справді, якщо $0 \leqslant x_1 < x_2$, то

$$
\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) = x_2^n - x_1^n = \\
= (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1}) > 0,
\end{aligned}
$$

і для будь-якої точки $x_0 \in [0, +\infty)$ і приросту $\triangle x$ (якщо $x_0 = 0$, то $\triangle x > 0$)

$$
\begin{aligned}
\triangle y &= f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = (x_0 + \triangle x)^n - x_0^n = \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^{n-k} (\triangle x)^k - x_0^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k x_0^{n-k} (\triangle x)^k = \\
&= \triangle x \sum_{k=1}^{n} C_n^k x_0^{n-k} (\triangle x)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Таким чином, на проміжку $[0, +\infty)$ більшим значенням аргумента відповідають більші значення функції ($y = x^n$ зростає) і у кожній точці $x_0 \in [0, +\infty)$ нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції ($y = x^n$ неперервна).

Якщо тепер взяти довільне число $A > 0$, то на відрізку $[0, A]$ функція $y = x^n$ визначена, зростаюча і неперервна, причому множина її значень є відрізок $[0, A^n]$. А, отже, на відрізку $[0, A^n]$ визначена обернена функція $x = y^{\frac{1}{n}}$, яка монотонно зростає і неперервна на цьому проміжку. Оскільки A^n можна зробити як завгодно великим, то функція $x = y^{\frac{1}{n}}$ визначена для всіх невід'ємних x. Змінивши для цієї функції позначення аргумента y на x, а позначення функції x на y, отримаємо функцію $y = x^{\frac{1}{n}}$, яка визначена для всіх невід'ємних x, причому значенням цієї функції для кожного $x \geqslant 0$ є число y таке, що $y^n = x$, тобто $y = \sqrt[n]{x}$.

Тепер уже можна перейти до наступного кроку узагальнення поняття степеня, а саме для будь-якого раціонального числа

$r = \frac{m}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, а $m \in \mathbb{Z}$, і будь-якого дійсного числа $a > 0$ означимо раціональний степінь r числа a у такий спосіб:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m. \tag{10.7}$$

Переконаємось, що для будь-яких раціональних чисел r_1 і r_2 мають місце властивості (10.2)–(10.4). Справді, якщо $r_1 > 0$ і $r_2 = p \in \mathbb{N}$, то

$$(a^{r_1})^{r_2} = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^p = \underbrace{a^{\frac{m_1}{n_1}} a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdots a^{\frac{m_1}{n_1}}}_{p \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{\left(a^{\frac{1}{n_1}}\right)^{m_1} \left(a^{\frac{1}{n_1}}\right)^{m_1} \cdots \left(a^{\frac{1}{n_1}}\right)^{m_1}}_{p \text{ раз}} =$$

$$= \underbrace{a^{\frac{1}{n_1}} a^{\frac{1}{n_1}} \cdots a^{\frac{1}{n_1}}}_{m_1 p \text{ раз}} = a^{\frac{m_1 p}{n_1}} = a^{r_1 r_2}.$$

Нехай $r_1 = \frac{m_1}{n_1} > 0$, $r_2 = \frac{m_2}{n_2} > 0$. Покладемо

$$c_1 = \left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \quad c_2 = a^{\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}}.$$

Якщо припустити, що $c_1 \neq c_2$, то із зростання функції $y = x^{n_2}$ випливає, що $c_1^{n_2} \neq c_2^{n_2}$, тобто $\left(a^{\frac{m_1}{n_1}}\right)^{m_2} \neq a^{\frac{m_1 m_2}{n_1}}$, що суперечить вище доведеному. Отже, $c_1 = c_2$. Поширення рівності

$$(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$$

на недодатні r_1 і r_2 здійснюється через (10.5).

Доведемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ і будь-яких $a > 0$ і $b > 0$

$$a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}.$$

Справді, в силу взаємнооберненості функцій $y = x^{\frac{1}{n}},\ x = y^n$ ми можемо стверджувати, що

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a,\ \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = b,\ \left((ab)^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab.$$

Тому, поклавши $c_1 = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$, $c_2 = (ab)^{\frac{1}{n}}$ і припустивши, що $c_1 \neq c_2$, відразу отримуємо протиріччя $c_1^n \neq c_2^n$. Після цього уже легко перевірити, що для будь-якого $r \in \mathbb{Q}$ і будь-яких $a > 0,\ b > 0$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r.$$

Нарешті переконаємось, що для будь-яких $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ і будь-якого $a > 0$

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}.$$

Справді, якщо $r_1 = \dfrac{m_1}{n_1},\ r_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, або $r_1 = \dfrac{m_1 n_2}{n_1 n_2}$, $r_2 = \dfrac{m_2 n_1}{n_1 n_2}$, то

$$a^{r_1} a^{r_2} = \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 m_2} \left(a^{\frac{1}{n_1 m_2}}\right)^{m_2 n_1} =$$

$$= \left(a^{\frac{1}{n_1 n_2}}\right)^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2}} = a^{r_1 + r_2}.$$

Зауваження. Якщо раціональний дріб $r = \dfrac{m}{n}$ $(|m|, n) = 1$ має непарний знаменник, то означення раціонального степеня поширюється і на від'ємні числа, а саме, якщо $a > 0$, то

$$(-a)^r = \begin{cases} a^r, & \text{якщо } m \text{ парне}, \\ -a^r, & \text{якщо } m \text{ непарне}. \end{cases}$$

Степінь з ірраціональним показником α і основою $a > 0$ означається або як значення функції

$$y = e^{\alpha \ln x}$$

у точці $x = a$, або як границя послідовності виду (a^{r_n}), де r_n — будь-яка послідовність раціональних чисел, збіжної до α, тобто

$$a^{\alpha} := \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = e^{\alpha \ln a}. \tag{10.8}$$

Скориставшись властивостями показникової і логарифмічної функцій, неважко переконатись, що означення (10.8) задовольняє властивостям (10.2)–(10.4).

Наприклад, якщо $a > 0$ і α_1, α_2 два довільних ірраціональних числа, то

$$a^{\alpha_1} a^{\alpha_2} = e^{\alpha_1 \ln a} e^{\alpha_2 \ln a} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln a} = a^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

У шкільному підручнику [8, с. 158] степінь a^{α}, де a — будь-яке додатне число ($a \neq 1$), а α — будь-яке додатне ірраціональне число,означається як число, яке міститься між степенями a^{α_1} і a^{α_2}, де α_1 — будь-яке раціональне наближення числа α, взяте з недостачею, і α_2 — будь-яке раціональне наближення числа α, взяте з надвишком ($a^{\alpha_1} < a^{\alpha} < a^{\alpha_2}$, якщо $a > 1$, $a^{\alpha_2} < a^{\alpha} < a^{\alpha_1}$, якщо $a < 1$). Якщо ж α — від'ємне ірраціональне число, то

$$a^{\alpha} = \frac{1}{a^{-\alpha}}.$$

Звичайно краще було конкретизувати, які саме раціональні наближення числа α використовуються. Якщо число α має подання $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, то найліпшими, на наш погляд, є такі послідовності раціональних наближень $(\alpha_n^-) = (a_0, a_1 a_2 \ldots a_n)$ (послідовність наближень з недостачею), $(\alpha_n^+) = (a_0, a_1 a_2 \ldots a_n + 10^{-n})$ (послідовність наближень з надвишком). Тоді стане зрозумілим, чому автори підручника стверджують, що "$5^{\sqrt{2}}$ означає таке число, яке більше від кожного з чисел ряду: $5^{1{,}4}$, $5^{1{,}41}$, $5^{1{,}414}$, $5^{1{,}4142}, \ldots$, в якому показники — десяткові наближення числа $\sqrt{2}$, взяті з недостачею, але менше від кожного з чисел ряду: $5^{1{,}5}$, $5^{1{,}42}$, $5^{1{,}415}$, $5^{1{,}4143}, \ldots$, в якому показники — десяткові наближення $\sqrt{2}$, взяті надвишком."

У полі комплексних чисел $\mathbb{C}$ поняття степеня вводиться за тим же сценарієм, що й у полі дійсних чисел $\mathbb{R}$.

1. Для будь-якого комплексного числа z і будь-якого натурального n

$$z^1 := z, \ z^n := \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \text{ разів}} \qquad \text{для} \quad n > 1.$$

Якщо $z \neq 0$ і $|z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ його тригонометрична форма, то

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{(формула Муавра).}$$

2. Для будь-якого комплексного числа $z \neq 0$ і будь-якого натурального n

$$z^0 := 1,$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)} = |z|^{-n}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi).$$

3. Якщо при піднесенні до цілого степеня будь-якого комплексного числа ($z \neq 0$, якщо показник степеня є від'ємним або нуль) отримується одне комплексне число, то при добуванні кореня n-го степеня ($n > 1$) з комплексного числа z тільки у випадку, коли $z = 0$, число, n-ий степінь якого дорівнює нулю, є єдиним і дорівнює нулю. Якщо ж $z \neq 0$, то маємо n різних комплексних чисел, n-ий степінь кожного з яких дорівнює z, а саме

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \\ &= \left(\sqrt[n]{|z|}\right)_+ \left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

де $\left(\sqrt[n]{|z|}\right)_+$ — арифметичний корінь n-го степеня з додатного числа $|z|$, $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Зауважимо, що проблема існування розв'язується тут безпосереднім знаходженням всіх значень кореня.

Якщо у полі дійсних чисел $\mathbb{R}$ для будь-якого додатного числа a і будь-якого дробу $\frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,$$

то у полі комплексних чисел $\mathbb{C}$ це вже не так. Справді, для $\sqrt{i^4} = \sqrt{1}$ множиною значень є двохелементна множина $\{-1,1\}$, а оскільки $\sqrt{i}$ має множиною значень множину

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

і, крім того,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = i^2 = -1,$$

то для $(\sqrt{i})^4$ множиною значень є одноелементна множина $\{-1\}$, тобто множини значень $\sqrt{i^4}$ і $(\sqrt{i})^4$ не збігаються.

Взагалі, якщо m, n — цілі числа, $n > 1$, то коли кожне із n значень $\sqrt[n]{z}$ $(z \neq 0)$ піднести до степеня m, отримаємо множину з n чисел, серед яких можуть бути і однакові. Точніше, кожне з них можна отримати з формули

$$\sqrt[n]{z^m} =$$

$$= \left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)_+ \left(\cos m\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i\,\sin m\,\frac{\arg z + 2k\pi}{n}\right) \tag{10.9}$$

і тільки у тому випадку, коли m і n взаємно прості, то остання формула дає n різних значень, а, отже, множини значень $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ і $\sqrt[n]{z^m}$ збігаються.

У тому випадку, коли m і n взаємно прості означимо для $z \neq 0$

$$z^{\frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

і перепишемо рівність (10.9) у вигляді

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)_+ \left(\cos\frac{m\mathrm{Arg}\, z}{n} + i\,\sin\frac{m\mathrm{Arg}\, z}{n}\right), \tag{10.10}$$

де $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Скориставшись тим, що

$$\cos\frac{m\mathrm{Arg}\, z}{n} + i\,\sin\frac{m\mathrm{Arg}\, z}{n} = e^{i\,\frac{m}{n}\mathrm{Agr}\, z}$$

і $\left(\sqrt[n]{|z|^m}\right)_+ = e^{\frac{m}{n}\ln|z|}$, перепишнемо у вигляді

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\ln|z|}e^{i\,\frac{m}{n}\mathrm{Agr}\, z} = e^{\frac{m}{n}(\ln|z|+i\mathrm{Agr}\, z)} = e^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}\, z}$$

Тепер уже для будь-якого комплексного числа $z \neq 0$ і раціонального числа $r = \frac{m}{n}$ означимо

$$z^{\frac{m}{n}} := e^{\frac{m}{n}\mathrm{Ln}\, z}. \tag{10.11}$$

4. Якщо $z \neq 0$ і α — ірраціональне число, то взявши будь-яку послідовність раціональних чисел (r_n), яка збігається до α, і зафіксувавши значення $\mathrm{Ln}\, z$, наприклад $\ln z$, розглянемо відповідну послідовність значень (z^{r_n})

$$z^{r_n} = e^{r_n \ln z},$$

яка має границю $e^{\alpha\ln z}$ (незалежно від того, як обрана послідовність (r_n)). Таким чином, множина всіх значень z^α, за означенням, буде задовольнятись формулою

$$z^\alpha := e^{\alpha\mathrm{Ln}\, z}, \tag{10.12}$$

де $\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

Нарешті, і у випадку, коли α є будь-яке не дійсне число, всі можливі значення z^α означаються формулою (10.12).

Зауваження. Для $z \neq 0$, z^α має скінченне число різних значень, якщо α — раціональне число, і має нескінченну множину значень, якщо α не є раціональним числом.

Приклад. Знайти всі можливі значення i^i.

Розв'язання. За означенням множина всіх значень i^i задається формулою

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}.$$

Оскільки $\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, де $k \in \mathbb{Z}$, то

$$i^i = e^{i(i(\frac{\pi}{2}+2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi} = e^{\frac{4m-1}{2}}, \quad \text{де } m \in \mathbb{Z},$$

тобто i^i має безліч значень і всі вони дійсні.

На завершення зауважимо, що властивості (10.2)–(10.4) для степенів з довільними показниками, взагалі кажучи, не будуть мати місця. Так, наприклад, для $z \neq 0$ і будь-яких $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ множина значень $z^{\alpha_1} z^{\alpha_2}$ задається формулою

$$\begin{aligned} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} &= e^{\alpha_1 \operatorname{Ln} z} e^{\alpha_2 \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha_1 \ln z + 2\pi\alpha_1 m i} e^{\alpha_2 \ln z + 2\pi\alpha_2 n i} = \\ &= e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z + 2\pi i(m\alpha_1 + n\alpha_2)}, \end{aligned}$$

де $m, n \in \mathbb{Z}$, а множина значень $z^{\alpha_1+\alpha_2}$ задається формулою

$$z^{\alpha_1+\alpha_2} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\operatorname{Ln} z} = e^{(\alpha_1+\alpha_2)\ln z + 2\pi i(\alpha_1+\alpha_2)m},$$

де $m \in \mathbb{Z}$.

Завдання для самоконтролю.

1. Переконатись, що для степенів з цілими показниками виконуються властивості (10.2) – (10.4).

2. Привести приклад таких z, α, β, для яких множини значень $(z^\alpha)^\beta$, $z^{\alpha\beta}$ не збігаються.

3. Як звільнитись від ірраціональності у знаменниках дробів

$$\frac{1}{a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}}, \quad \frac{1}{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}},$$

$$\frac{1}{a\sqrt{\alpha}+b\sqrt{\beta}+c\sqrt{\gamma}}, \quad \frac{1}{a\sqrt[n]{\alpha}+b\sqrt[n]{\beta}},$$

де $n > 3$?

4. Які рівняння і нерівності називаються ірраціональними? Які перетворення ірраціональних рівнянь і нерівностей можуть привести до появи сторонніх коренів? Привести приклади.

5. Розв'язати рівняння:

   а) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$;

   б) $\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{x}=0$;

   в) $\sqrt[3]{x-2}+1=\sqrt{x-1}$.

6. Розв'язати нерівності

   а) $\sqrt{12+x-x^2}<\sqrt{x^2+2x+6}$;

   б) $\sqrt{2x-1}>\sqrt{2x+15}-\dfrac{10}{\sqrt{2x-1}}$;

   в) $\sqrt{1-x^2}>a-x$.

7. Розв'язати рівняння $z^2-2i^iz+1=0$.

11 *ЛЕКЦІЯ*: Похідна функції однієї і багатьох змінних

Поняття похідної для функції однієї і багатьох змінних. Диференційовність функції, необхідна та достатні умови. Правила диференціювання. Похідні основних елементарних функцій.

Література. [1], ч. 1, с. 27–37; [2], ч. 1, с. 182–221; [3], т. 1, с. 121–156; [9], ч. 2, с. 92–107; Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, ч. 2, Київ: Либідь, 1994, с. 50–64.

Важливим інструментом для дослідження властивостей функції є її похідна, значення якої у точці характеризує швидкість зміни функції у цій точці. Звичайно вводиться це поняття з допомогою основної операції аналізу — граничного переходу.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена у деякому околі точки x_0. Тоді для кожного x $(x \neq x_0)$ з цього околу визначено функцію

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Означення 11.1. *Якщо існує*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то її називають похідною функції f у точці x_0 і позначають $f'(x_0)$.

Якщо ввести позначення $x - x_0 = \triangle x$, то означення похідної запишеться у вигляді

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

і, нарешті, покладаючи $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = \triangle y$, маємо ще один запис означення похідної

$$y' = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$

Коли функція f визначена на деякому проміжку і у кожній точці цього проміжка похідна існує, причому, якщо лівий кінець проміжка (точка a) належить йому, то

$$f'(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(*права похідна* у точці a), а якщо правий кінець (точка b) належить йому, то

$$f'(b) = \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

(*ліва похідна* у точці b), тоді відповідність, яка кожній точці проміжка відносить похідну функції у цій точці, називається *похідною функцією* (просто *похідною*) функції f і позначається $f'(x)$. Операцію обчислення похідної заданої функції називають *операцією диференціювання*.

Нехай числова функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена на відкритій підмножині $\mathbf{X}$ евклідового простору $\mathbb{R}^n$, нехай $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ точка множини $\mathbf{X}$ і $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ фіксована $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$ точка простору $\mathbb{R}^n$. Будемо користуватись геометричною термінологією і називати $\mathbf{a}$ *напрямком*, а множину $\{\mathbf{x} \,|\, = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a},\ t \in \mathbb{R}\}$ — *прямою лінією*, що проходить через точку $\mathbf{x}_0$ у напрямку $\mathbf{a}$.

Означення 11.2. *Якщо існує*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0)}{t},$$

то її називають похідною функції f у точці $\mathbf{x}_0$ за напрямком $\mathbf{a}$ і позначають $f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)$.

Звичайно, якщо $f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ визначена у кожній точці $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, то кажуть, що похідна за напрямком визначена на множині $\mathbf{X}$.

У випадку, коли $\mathbf{a}$ є орт $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, де $1 \leqslant k \leqslant n$, то похідна у таких напрямках має спеціальну назву.

Означення 11.3. *Частинною похідною за k-ю змінною (або за змінною x_k) називається похідна $f'_{\mathbf{e}_k}(\mathbf{x})$ і позначається символом $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_k}$.*

Таким чином,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_k} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_k+t,\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{t}.$$

Якщо, наприклад, маємо функцію двох змінних $z = f(x,y)$, то очевидно, що знаходження частинних похідних цієї функції зводиться до знаходження похідних функції однієї змінної. Справді, якщо (x_0,y_0) внутрішня точка області визначення функції $f(x,y)$, то, поклавши $y = y_0$, отримуємо функцію $f(x,y_0)$ визначену у деякому околі точки x_0. Тоді, очевидно, що частинна похідна цієї функції за змінною x у точці (x_0,y_0) буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} = \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x-x_0},\end{aligned}$$

тобто є похідною функції $f(x,y_0)$ у точці x_0. Так саме і $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ є похідною функції $f(x_0,y)$ у точці y_0.

Частинні похідні грають основну роль при дослідженні функцій. Насамперед, вектор

$$\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

називається *похідною функції f у точці* $\mathbf{x}_0$ (його ще називають *градієнтом функції f у точці* $\mathbf{x}_0$) і позначають одним із символів $f'(\mathbf{x}_0)$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Похідна функції f у точці $\mathbf{x}_0$ за напрямком $\mathbf{a}$ обчислюється за формулою

$$f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = (f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{a}) = |f'(\mathbf{x}_0)| \cos \angle (f'(\mathbf{x}_0), \mathbf{a}_0),$$

де $\mathbf{a}_0 = \dfrac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$. Звідси безпосередньо випливає, що $f'_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)$ досягає свого найбільшого значення у напрямку $f'(\mathbf{x}_0)$. Тобто $f'(\mathbf{x}_0)$ є напрямок, у якому швидкість зміни функції f найбільша.

Приклад. Знайдемо $f'(1,1,1)$ і $f'_{\mathbf{a}}(1,1,1)$, де $\mathbf{a} = (1, -1, \sqrt{2})$, функції

$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Очевидно, що

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yz(x^2+y^2+z^2) - 2x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xz(x^2+y^2+z^2) - 2xy^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{xy(x^2+y^2+z^2) - 2xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Тоді

$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x} = \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial y} = \frac{\partial f(1,1,1)}{\partial z} = \frac{1}{9}$$

$$\text{і} \quad f'(1,1,1) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right),$$

$$\text{а} \quad f'_{\mathbf{a}}(1,1,1) = (f'(1,1,1), \mathbf{a}_0), \quad \text{де } \mathbf{a}_0 = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

тобто $f'_{\mathbf{a}}(1,1,1) = \dfrac{1}{18} - \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{9\sqrt{2}} = \dfrac{1}{9\sqrt{2}}$.

Другий підхід для локального описання характеру зміни функції є порівняння її з лінійним еталоном, інакше диференціалом функції у точці.

Нехай функція f визначена у деякому околі точки x_0. Для кожного x ($x \neq x_0$) з цього околу позначимо різницю $x - x_0$ через $\triangle x$, а різницю $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ через $\triangle y$.

Означення 11.4. *Функція f називається диференційовною у точці x_0, якщо приріст функції $\triangle y$, який відповідає приросту аргумента $\triangle x$, можна подати у вигляді*

$$\triangle y = A\triangle x + o(\triangle x),$$

де $o(\triangle x)$ — нескінченно мала порядку вищого ніж $\triangle x$, тобто $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{o(\triangle x)}{\triangle x} = 0$. Головну частину $A\triangle x$ приросту $\triangle y$, лінійну відносно $\triangle x$, називають диференціалом функції f у точці x_0 і позначають

$$d\, f(x_0) := A\triangle x.$$

Точніше, диференціалом функції f у точці x_0 називають лінійну по $\triangle x$ функцію $A(x_0)\triangle x$.

Теорема 11.1. *Для того щоб функція f була диференційовною у точці x_0 необхідно і досить, щоб вона у цій точці мала похідну.*

Доведення. Необхідність. Нехай f диференційовна у точці x_0, тобто

$$\triangle y = A\triangle x + o(\triangle x).$$

Тоді

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = A + \lim_{\triangle x \to 0} \frac{o(\triangle x)}{\triangle x} = A = f'(x_0),$$

тобто похідна існує і дорівнює A. Таким чином, основне співвідношення в означенні диференційовної функції можна розписати так

$$\triangle y = f'(x_0)\triangle x + o(\triangle y).$$

Звідси

$$d\,f(x_0) = f'(x_0)\triangle x.$$

Достатність. Якщо функція f у точці x_0 має похідну, тобто існує $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0)$, то $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = f'(x_0) + \alpha(\triangle x)$, де $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. Тоді

$$\triangle y = f'(x_0)\triangle x + \alpha(\triangle x)\triangle x,$$

де $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \dfrac{\alpha(\triangle x)\triangle x}{\triangle x} = 0$, а це якраз означає, що функція f диференційовна у точці x. ■

Якщо для диференціала ввести позначення $d\,y = f'(x)\triangle x$ і врахувати, що для функції $y = x$ $d\,x = \triangle x$, то маємо ще одне позначення диференціала $d\,y = f'(x)d\,x$ або $d\,y = y'd\,x$ і в зв'язку з цим позначення похідної $y' = \dfrac{d\,y}{d\,x}$.

Означення диференційовності функції однієї змінної в очевидний спосіб переноситься на функції багатьох змінних. Нехай функція $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена на множині $E \subset \mathbb{R}^n$ і точка $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ є внутрішньою точкою множини E. Позначимо $\triangle \mathbf{x} = (\triangle x_1, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n)$, а $\mathbf{x}_0 + \triangle \mathbf{x} = (x_1^{(0)} + \triangle x_1, x_2^{(0)} + \triangle x_2, \ldots, x_n^{(0)} + \triangle x_n)$.

Означення 11.5. *Функція f називається диференційовною у точці $\mathbf{x}_0$, якщо*

$$f(\mathbf{x}_0 + \triangle \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = A_1\triangle x_1 + A_2\triangle x_2 + \ldots + A_n\triangle x_n + \alpha(\mathbf{x}_0, \triangle \mathbf{x}),$$

де $\alpha(\mathbf{x}_0, \triangle\mathbf{x}) = \varepsilon(\mathbf{x}_0, \triangle\mathbf{x})|\triangle\mathbf{x}|$, $|\triangle\mathbf{x}| = \sqrt{\triangle x_1^2 + \triangle x_2^2 + \ldots + \triangle x_n^2}$, *і* $\varepsilon(\mathbf{x}_0, \triangle\mathbf{x}) \to 0$ *при* $|\triangle\mathbf{x}| \to 0$,
а вираз

$$A_1\triangle x_1 + A_2\triangle x_2 + \ldots + A_n\triangle x_n$$

(лінійну функцію n змінних) називають диференціалом (повним диференціалом) функції f у точці $\mathbf{x}_0$.

Можна переконатись, що якщо функція f диференційовна у точці $\mathbf{x}_0$, то вона має похідну

$$f'(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_n}\right) = (A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

Наявність похідної не є достатною умовою для диференційовності функції. Гарантом диференційовності є неперервність всіх частинних похідних у точці $\mathbf{x}_0$.

Проведемо більш докладні викладки для функції двох змінних. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Для точки $M(x, y)$ з цього околу будемо позначати $\triangle x = x - x_0$, $\triangle y = y - y_0$, $d = d(M, M_0) = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}$ і $\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0)$.

Тоді згідно означення 11.5 функція f називається диференційовною у точці (x_0, y_0), якщо існують два числа A і B такі, що

$$\triangle z = A\triangle x + B\triangle y + \alpha(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y),$$

де $\alpha(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) = \varepsilon(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y)d$,

$$\lim_{d\to 0} \varepsilon(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) = 0,$$

а лінійна функція $A\triangle x + B\triangle y$ називається *диференціалом* цієї функції у точці (x_0, y_0) і позначається $d\,z$. Тоді

$$d\,z = A\triangle x + B\triangle y \text{ або } d\,z = Ad\,x + Bd\,y.$$

В силу структури $\alpha(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y)$ маємо:

$$\lim_{d\to 0} \frac{1}{d}\,\alpha(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) = 0,$$

то за аналогією з функціями однієї змінної записують

$$\triangle z = A d\,x + B d\,y + o(d).$$

Зауважимо також, що $o(d) = \alpha(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y)$ можна подати у вигляді

$$\varepsilon_1(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y)\triangle x + \varepsilon_2(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y)\triangle y.$$

Теорема 11.2. *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x_0, y_0) і $d\,z = A d\,x + B d\,y$ її диференціал, то у цій точці вона має похідні і*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B.$$

Доведення. Оскільки за умовою функція f у точці (x_0, y_0) диференційовна, то має місце подання

$$\begin{aligned}\triangle z &= f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = \\ &= A\triangle x + B\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y,\end{aligned}$$

де $\lim\limits_{d\to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{d\to 0} \varepsilon_2 = 0$. Покладемо $\triangle y = 0$. Тоді

$$\triangle z = f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\,\triangle x + \varepsilon_1\triangle x$$

є приріст функції однієї змінної $f(x, y_0)$ і $d = |\triangle x|$. Отже,

$$\lim_{\triangle x\to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x\to 0}(A + \varepsilon_1) = A + \lim_{d\to 0} \varepsilon_1 = A,$$

тобто частинна похідна за змінною x у точці (x_0, y_0) існує і $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A$. Аналогічно показується, що частинна похідна за змінною y у точці (x_0, y_0) існує і $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B$. ■

Теорему можна перефразувати у такий спосіб: якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці (x_0, y_0) і $d\,z = A\triangle x + B\triangle y$ її диференціал, то у цій точці функція f має похідну і $f'(x_0, y_0) = (A, B)$.

Обернене твердження, взагалі кажучи, невірне. Наприклад, функція

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \text{ якщо } x^2+y^2 > 0, \\ 0 & , \text{ якщо } x = y = 0 \end{cases}$$

у точці $(0, 0)$ має обидві частинні похідні

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0,$$

проте вона не диференційовна, бо вона не є неперервною у цій точці.

Теорема 11.3. *Якщо функція $z = f(x, y)$ у деякому околі точки (x_0, y_0) має частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, які неперервні у точці (x_0, y_0), то функція f диференційовна у цій точці.*

Доведення. Нехай $\{(x, y)\,|\,d((x_0, y_0), (x, y)) < \delta\}$ окіл точки, у якому визначено функцію f разом з своїми частиними похідними. Оберемо $\triangle x$ і $\triangle y$ так, щоб точка $(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y)$ належала обраному околу. Відповідний приріст функції $\triangle z$ подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \triangle z &= f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0) = f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y) - \\ &\quad - f(x_0, y_0+\triangle y) + f(x_0, y_0+\triangle y) - f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

До функції $f(x_0, y_0+\triangle y)$ як функції однієї змінної x застосуємо теорему Лагранжа. Маємо:

$$f(x_0+\triangle x, y_0+\triangle y)-f(x_0, y_0+\triangle y) = \frac{\partial f(x_0 + \theta_1\triangle x, y_0 + \triangle y)}{\partial x}\triangle x,$$

де $0 < \theta_1 < 1$. Аналогічно до функції $f(x_0, y)$ як функції однієї змінної y теж застосуємо теорему Лагранжа. Маємо:

$$f(x_0, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0 + \theta_2\triangle y)}{\partial y}\triangle y,$$

де $0 < \theta_2 < 1$. Тоді

$$\begin{aligned}\triangle z &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\triangle y+ \\ &+ \left(\frac{\partial f(x_0 + \theta_1\triangle x, y_0 + \triangle y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y_0}{\partial x}\right)\triangle x+ \\ &+ \left(\frac{\partial f(x_0, y_0 + \theta_2\triangle y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right)\triangle y = \\ &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\triangle y + \varepsilon_1\triangle x + \varepsilon_2\triangle y,\end{aligned}$$

де в силу неперервності $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у точці (x_0, y_0)

$$\lim_{d\to 0}\varepsilon_1 = \lim_{d\to 0}\left(\frac{\partial f(x_0 + \theta_1\triangle x, y_0 + \triangle y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\lim_{d\to 0}\varepsilon_2 = \lim_{d\to 0}\left(\frac{\partial f(x_0, y_0 + \theta_2\triangle y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\right) = 0.$$

А цей означає, що функція f диференційовна у точці (x_0, y_0). ■

В силу того, що над функціями однієї змінної можна виконувати чотири арифметичних і дві теоретико-множинних операції, правила обчислення похідних, пов'язані з цими операціями і складають правила диференціювання.

Теорема 11.4. *Якщо функції f_1 і f_2 мають у точці x_0 похідні, то функції $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$ теж мають у цій точці похідні, причому*

$$(f_1 + f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0),$$

$$(f_1 - f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) - f_2'(x_0),$$

$$(f_1 f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0),$$

а якщо $f_2(x_0) \neq 0$, то і функція $\dfrac{f_1}{f_2}$, причому

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(x_0) = \frac{f_1'(x_0) f_2(x_0) - f_1(x_0) f_2'(x_0)}{f_2^2(x_0)}.$$

Теорема 11.5. *Якщо функція f має похідну у точці x_0, а функція g має похідну у точці $f(x_0)$, то у деякому околі точки x_0 визначено композицію функцій f і g (складну функцію $g(f(x))$) і ця функція має похідну у точці x_0, причому*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Теорема 11.6. *Якщо функція $y = f(x)$ визначена, неперервна і строго монотонна у деякому околі точки x_0, має у цій точці похідну, причому $f'(x_0) \neq o$, то обернена функція $x = f^{-1}(y)$ має похідну у точці $y_0 = f(x_0)$, причому*

$$\frac{d\, f^{-1}(y_0)}{d\, y} = \frac{1}{\dfrac{d\, f(x_0)}{d\, x}}.$$

Оскільки існування похідної є необхідна і достатна умова диференційовності, то вірними будуть і такі твердження. Якщо функції f_1 і f_2 диференційовні у точці x_0, то диференційовними у цій точці будуть функції $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, причому

$$d\,(f_1 + f_2) = df_1 + df_2,$$

$$d\,(f_1 - f_2) = df_1 - df_2,$$

$$d\,(f_1 f_2) = f_1 df_2 + f_2 df_1,$$

а якщо $f_2(x_0) \neq 0$, то і функція $\frac{f_1}{f_2}$, причому

$$d\left(\frac{f_1}{f_2}\right) = \frac{f_2 df_1 - f_1 df_2}{f_2^2}.$$

Якщо функція f диференційовна у точці x_0, а функція g диференційовна у точці $y_0 = f(x_0)$, то функція $g \circ f$ диференційовна у точці x_0, причому

$$d\,(g \circ f)(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) dx = g'(y_0) dy.$$

Щодо функцій багатьох змінних неважко переконатись, що коли функції $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ диференційовні у точці $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, то диференційовними у цій точці функції $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$, $f_1 f_2$, причому

$$(f_1 + f_2)'(\mathbf{x}_0) = f_1'(\mathbf{x}_0) + f_2'(\mathbf{x}_0),$$

$$(f_1 - f_2)'(\mathbf{x}_0) = f_1'(\mathbf{x}_0) - f_2'(\mathbf{x}_0),$$

$$(f_1 f_2)'(\mathbf{x}_0) = f_1'(\mathbf{x}_0) f_2(\mathbf{x}_0) + f_1(\mathbf{x}_0) f_2'(\mathbf{x}_0),$$

а якщо $f_2(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то і функція $\dfrac{f_1}{f_2}$, причому

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(\mathbf{x}_0) = \frac{f_1'(\mathbf{x}_0) f_2(\mathbf{x}_0) - f_1(\mathbf{x}_0) f_2'(\mathbf{x}_0)}{f_2^2(\mathbf{x}_0)}.$$

Наприклад, якщо $f_1(x,y,z) = xyz$, $f_2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, то

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(1,1,1) = \frac{f_2(1,1,1)f_1'(1,1,1) - f_1(1,1,1)f_2'(1,1,1)}{f_2^2(1,1,1)} =$$

$$= \frac{1}{9}(3(1,1,1) - (2,2,2)) = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

На заключення зауважимо, що правила диференціювання дають змогу звести відшукання похідних як елементарних функцій однієї змінної так і елементарних функцій багатьох змінних до відшукання похідних основних елементарних функцій. Останні, як правило, подаються у вигляді таблиці.

N п/п	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$	Область відшукання похідної
1	C (const)	0	$\mathbb{R}$
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$, якщо $\alpha \in \mathbb{N}$, $x > 0$, якщо $\alpha \in \mathbb{R}$
3	a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
4	$\log_a \lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$
5	$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
6	$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
7	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

N п/п	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$	Область відшукання похідної
8	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
9	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;\ 1)$
10	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1;\ 1)$
11	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
12	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
13	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
14	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
15	$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
16	$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
17	$\operatorname{arsh} x =$ $= \ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
18	$\operatorname{arch} x =$ $= \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\{x \mid \lvert x\rvert > 1\}$

N п/п	Функція $f(x)$	Похідна $f'(x)$	Область відшукання похідної
19	$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$(-1;\, 1)$
20	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\{x \mid \lvert x\rvert > 1\}$

Завдання для самоконтролю.

1. Дати фізичну та геометричну інтерпретацію похідної і диференціала функції однієї змінної.

2. Розкрити геометричний зміст частинних похідних і повного диференціала функції двох змінних.

3. Розкрити зміст теми „Похідна“ шкільного курсу математики.

4. Знайти похідні функцій:

   а) $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$;

   б) $y = |\sin^3 x|$;

   в) $y = [x]\sin^2 \pi x$.

5. Побудувати неперервну на $\mathbb{R}$ функцію, яка немає похідної у точках $-1, 0, 1$.

6. Довести, що

   а) дотична до еліпса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   у точці (x_0, y_0) має рівняння

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1;$$

   б) світлові промені від джерела, розташованого в одному з фокусів $F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ еліпса з півосями $a > b > 0$, збираються еліптичним дзеркалом у другому фокусі.

7. Довести, що

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}},$$

   де $a > 0$ і $|x| << a$. З допомогою цієї формули обчислити наближено $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[4]{80}$, $\sqrt[7]{100}$, $\sqrt[10]{1000}$.

8. Нехай $u = x^2 + y^2 + z^2$. У яких точках простору $\mathbb{R}^3$ кут між похідною цієї функції у цих точках і похідною у точці $(1, 1, 1)$ буде дорівнювати $\dfrac{\pi}{3}$?

12 *ЛЕКЦІЯ*: Похідна функції комплексної змінної. Аналітичні функції

Похідна функції комплексної змінної, її диференційовність. Теорема Коші-Рімана. Аналітичні функції. Аналітичність за Коші і за Вейєрштрассом (еквівалентність різних форм означень аналітичності).

Література. [1], ч. 3, с. 258–272, 298–302; [4] с. 33–49, 138–172; [9], ч. 2, с. 326–329.

Поняття похідної функції комплексної змінної вводиться так саме, як і для функції однієї дійсної змінної. А саме, якщо однозначна (саме тільки такі будемо розглядати) функція $w = f(z)$ визначена у деякому околі точки z_0, то, склавши різницеве відношення

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

визначене для кожного z $(z \neq z_0)$ з цього околу, означаємо похідну так.

Означення 12.1. *Якщо існує*

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то її називають похідною функції f у точці z_0 і позначають $f'(z_0)$. Саму функцію f називають диференційовною у точці z_0.

Позначимо $f(z) - f(z_0)$ через $\triangle w$, а $z - z_0$ — через $\triangle z$. Тоді згідно означення

$$f'(z_0) = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle w}{\triangle z}.$$

Останнє співвідношення можна переписати у вигляді

$$\frac{\triangle w}{\triangle z} = f'(z_0) + \varepsilon(z_0, \triangle z),$$

де $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\varepsilon(z_0,\triangle z)=0$, або у вигляді

$$\triangle w = f'(z_0)\triangle z + \varepsilon(z_0,\triangle z)\triangle z.$$

Отже, якщо функція f диференційовна у точці z_0, то її приріст $\triangle w$ може бути поданий у вигляді

$$\triangle w = A\triangle z + \varepsilon(z_0,\triangle z)\triangle z,$$

де A не залежить від $\triangle z$ і $\lim\limits_{\triangle z\to 0}\varepsilon(z_0,\triangle z)=0$. Навпаки, якщо для функції f у точці z_0 має місце останнє подання, то

$$\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\triangle w}{\triangle z}=A,$$

тобто вона диференційовна у точці z_0. Точно так саме, як і для функцій однієї дійсної змінної, головну частину приросту функції лінійну відносно $\triangle z$ називають *диференціалом функції* і позначають

$$d\,w = f'(z_0)dz.$$

З означення похідної і властивостей границь легко отримати основні правила диференціювання.

Якщо функції f_1 і f_2 диференційовні у точці z_0, то диференційовними у цій точці будуть функції f_1+f_2, f_1-f_2, f_1f_2, а якщо $f_2(z_0)\neq 0$, то і функція $\dfrac{f_1}{f_2}$, причому

$$(f_1+f_2)'(z_0) = f_1'(z_0)+f_2'(z_0),$$

$$(f_1-f_2)'(z_0) = f_1'(z_0)-f_2'(z_0),$$

$$(f_1f_2)'(z_0) = f_1'(z_0)f_2(z_0)+f_1(z_0)f_2'(z_0),$$

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(z_0) = \frac{f_1'(z_0)f_2(z_0)-f_1(z_0)f_2'(z_0)}{f_2^2(z_0)}.$$

Якщо функція f диференційовна у точці z_0, а функція g диференційовна у точці $f(z_0)$, то диференційовною буде композиція цих функцій $g \circ f$, причому

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

Якщо функція f є взаємно-однозначною відповідністю між множинами E і F $(E \subset \mathbb{C},\ F \subset \mathbb{C})$, а обернена їй функція f^{-1} є неперервною на F, то з диференційовності функції f у точці x_0 і того, що $f'(z_0) \neq 0$, випливає диференційовність функції f^{-1} у точці $w_0 = f(z_0)$, причому

$$\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Оскільки задання функції $f(z)$ еквівалентно заданню двох дійсних функцій двох дійсних змінних, а саме

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

то цілком природним було бажання фундаторів в теорії функцій комплексної змінної Коші і Рімана виявити зв'язок між диференційовністю функції $f(z)$ і диференційовністю функцій $u(x, y),\ v(x, y)$.

Міркування, які привели їх до результату могли бути такими. Диференційовність функції $f(z)$ як функції комплексної змінної означає існування диференціала $df = f'(z)dz$. Диференційовність функції $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ як комплекснозначної функції двох дійсних змінних означає існування повного диференціала

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy.$$

В останньому виразі перейдемо формально від змінних x і y до змінних z і $\overline{z}$. А саме оскільки з того, що $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$,

$dz = dx + idy$, $d\bar{z} = dx - idy$, маємо

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}),\ y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}),$$

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\overline{z}),\ dy = \frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}),$$

то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}(dz + d\overline{z}) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2i}(dz - d\overline{z}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}.$$

А оскільки

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y},$$

то

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$$

.

Таким чином, щоб диференціал функції $f(z)$ комплексної змінної дорівнював повному диференціалу функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ треба вимагати не тільки диференційовність функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, але й виконання рівності

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad \text{або} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0.$$

Тобто мають виконуватись рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Теорема 12.1 (Коші–Рімана). *Для того щоб функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційовна у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$, $v(x,y)$ були диференційовні у точці (x_0, y_0) і їх частинні похідні у цій точці задовольняли умови*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12.1}$$

Якщо умови теореми виконані, то похідна $f'(z_0)$ має вигляд

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{12.2}$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція f диференційовна у точці z_0. Тоді за означенням

$$\triangle w = f'(z_0)\triangle z + \varepsilon(z_0, \triangle z)\triangle z,$$

де

$$\triangle z = z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0) = \triangle x + i\triangle y,$$

$$\begin{aligned} \triangle w &= f(z) - f(z_0) = \\ &= (u(x,y) - u(x_0,y_0)) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0)) = \triangle u + i\triangle v, \end{aligned}$$

$$f'(z_0) = a + bi,$$

$$\varepsilon(z_0, \triangle z) = \varepsilon_1(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) + i\varepsilon_2(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y),$$

$$\lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \varepsilon_1 = \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \varepsilon_2 = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned}\triangle w &= \triangle u + i\triangle v = \\ &= (a+bi)(\triangle x + i\triangle y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\triangle x + i\triangle y) = \\ &= (a\triangle x - b\triangle y) + i(a\triangle y + b\triangle x) + \\ &\qquad + (\varepsilon_1\triangle x - \varepsilon_2\triangle y) + i(\varepsilon_1\triangle y + \varepsilon_2\triangle x)\end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}\triangle u = a\triangle x - b\triangle y + \varepsilon_1\triangle x - \varepsilon_2\triangle y, \\ \triangle v = b\triangle x + a\triangle y + \varepsilon_2\triangle x + \varepsilon_1\triangle y,\end{aligned} \tag{12.3}$$

де

$$\lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \varepsilon_1 = \lim_{\substack{\triangle x \to 0 \\ \triangle y \to 0}} \varepsilon_2 = 0.$$

Подання(12.3) якраз означає, що функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні у точці (x_0,y_0) і оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = a$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -b$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = b$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = a$, то і умови (12.1) виконуються.

Достатність. Нехай функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ диференційовні у точці (x_0,y_0). Тоді їх прирости подаються у вигляді

$$\begin{aligned}\triangle u &= \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + \\ &+\alpha_1(x_0,y_0,\triangle x,\triangle y)\triangle x + \alpha_2(x_0,y_0,\triangle x,\triangle y)\triangle y, \\ \triangle v &= \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y + \\ &+\beta_1(x_0,y_0,\triangle x,\triangle y)\triangle x + \beta_2(x_0,y_0,\triangle x,\triangle y)\triangle y,\end{aligned}$$

де

$$\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\alpha_1=\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\alpha_2=\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\beta_1=\lim_{\substack{\triangle x\to 0\\ \triangle y\to 0}}\beta_2=0.$$

Врахувавши умови (12.1) і позначивши $\dfrac{\partial u}{\partial x}=a$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=b$, для $\triangle u$ і $\triangle v$ маємо подання

$$\triangle u=a\triangle x-b\triangle y+\alpha_1\triangle x+\alpha_2\triangle y,$$

$$\triangle v=b\triangle x+a\triangle y+\beta_1\triangle x+\beta_2\triangle y.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\triangle w&=\triangle u+i\triangle v=\\&=a(\triangle x+i\triangle y)+b(-\triangle y+i\triangle x)+\\&\qquad+(\alpha_1+i\beta_1)\triangle x+(\alpha_2+i\beta_2)\triangle y=\\&=a(\triangle x+i\triangle y)+ib(\triangle x+i\triangle y)+\\&\qquad+\left((\alpha_1+i\beta_1)\frac{\triangle x}{\triangle z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\triangle y}{\triangle z}\right)\triangle z=\\&=(a+ib)\triangle z+\varepsilon\triangle z.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}|\varepsilon|&=\left|(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\triangle x}{\triangle z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\triangle y}{\triangle z}\right|\leqslant\\&\leqslant|\alpha_1+i\beta_1|\left|\frac{\triangle x}{\triangle z}\right|+|\alpha_2+i\beta_2|\left|\frac{\triangle y}{\triangle z}\right|\leqslant\\&\leqslant|\alpha_1|+|\beta_2|+|\alpha_2|+|\beta_2|\end{aligned}$$

(бо $\left|\frac{\triangle x}{\triangle z}\right| \leqslant 1$ і $\left|\frac{\triangle y}{\triangle z}\right| \leqslant 1$), то, враховуючи, що при $\triangle z \to 0$ $\triangle x \to 0$ і $\triangle y \to 0$, а, отже, $\alpha_1 \to 0$, $\alpha_2 \to 0$, $\beta_1 \to 0$, $\beta_2 \to 0$, маємо, що $\varepsilon \to 0$. А це й означає, що функція f диференційовна у точці z_0 і $f'(z_0) = a + bi$. З останнього маємо, що

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \blacksquare$$

Як приклад, розглянемо функцію

$$w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Оскільки функції

$$u(x,y) = e^x\cos y,\ v(x,y) = e^x\sin y$$

мають на $\mathbb{R}^2$ неперервні частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y) = e^x\cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\cos y) = -e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\sin y) = e^x\sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y) = e^x\cos y,$$

то вони диференційовні на $\mathbb{R}^2$ і очевидно, що для них виконуються умови (12.1). Отже, функція e^z диференційовна у кожній точці комплексної площини і

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z.$$

Означення 12.2. *Функція $f(z)$ називається аналітичною (або голоморфною) у точці z_0, якщо вона диференційовна у кожній точці деякого околу точки z_0.*

Наприклад, функції

$$e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ P_n(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$$

є аналітичні на всій комплексній площині, а дробово-раціональна функція $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ — аналітична у кожній точці комплексної площини за виключенням скінченного числа точок (нулів многочлена $Q_m(z)$). А от функція $w = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ не аналітична у жодній точці комплексної площини, хоча вона у точці $z = 0$ диференційовна.

Зауважимо, що з означення випливає, що коли функція аналітична у точці z_0, то вона аналітична у кожній точці деякого околу точки z_0. Тому множина точок, на якій функція аналітична, є обов'язково відкритою множиною.

Виключна важливість класу аналітичних функцій зумовлена тим, що, по-перше, цей клас досить широкий (він охоплює більшість функцій, які зустрічаються у різних розділах математики і її застосуваннях), по-друге, він замкнений відносно основних операцій арифметики, алгебри і аналізу, по-третє, аналітична функція володіє властивістю єдиності у тому розумінні, що коли дві однозначні аналітичні на G функції набирають однакових значень на підмножині E, яка має хоч одну скінченну граничну точку, що належить G, то функції збігаються.

Серед найбільш важливих властивостей аналітичних функцій особливе місце посідають інтегральна теорема Коші і нескінченна диференційовність таких функцій.

Доведено (див., наприклад, [4, с. 114–120]), що коли D — однозв'язна область і $f(z)$ — однозначна аналітична на цій області функція, то для будь-якої спрямлюваної кривої Γ, яка лежить в області D, інтеграл функції $f(z)$ вздовж кривої Γ дорівнює нулю.

Цим фактом ми скористаємось при доведенні другої вищезгаданої властивості.

Теорема 12.2. *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \tag{12.4}$$

збігається у крузі (відкритому крузі) $B(z_0,R)$ $(R>0)$, то сума цього ряду $S(z)$ є аналітичною функцією, причому

$$S'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}. \tag{12.5}$$

Доведення. Оскільки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},$$

то радіуси збіжності рядів (12.4) і (12.5) рівні. Нехай $\varphi(z)$ сума ряду (12.5). Нехай z_1 будь-яка точка з круга $B(z_0,R)$, а ζ така, що $|z_1-z_0|<|\zeta-z_0|=\rho<R$ (Рис. 5).

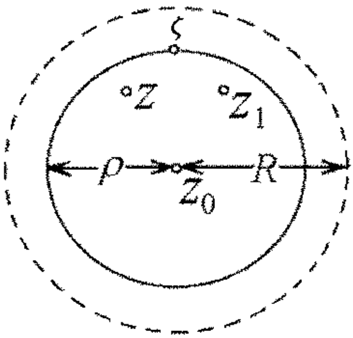


Рис. 5

Оскільки ряд (12.5) у крузі збіжності збігається абсолютно, то $\forall\varepsilon>0$, зокрема, для $\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\exists n_0$ такий, що $\forall n>n_0$ виконується нерівність

$$\sum_{k=n}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Візьмемо будь-яку точку $z\neq z_1$ таку, що $|z-z_0|<\rho$. Тоді в силу того, що

$$S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

маємо:

$$\left|\frac{S(z)-S(z_1)}{z-z_1}-\varphi(z_1)\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(z-z_0)^n-(z_1-z_0)^n}{z-z_1}-\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1}\right|=$$

$$=\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n((z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z_1-z_0)+\cdots+\right.$$

$$\left.+(z-z_0)(z_1-z_0)^{n-2}+(z_1-z_0)^{n-1})-\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z_1-z_0)^{n-1}\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k((z-z_0)^{k-1}+(z-z_0)^{k-2}(z_1-z_0)+\cdots+\right.$$

$$+(z-z_0)(z_1-z_0)^{k-2}+(z_1-z_0)^{k-1}-ka_k(z_1-z_0)^{k-1})+$$

$$+\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k((z-z_0)^{k-1}+(z-z_0)^{k-2}(z_1-z_0)+\cdots+$$

$$\left.+(z-z_0)(z_1-z_0)^{k-2}+(z_1-z_0)^{k-1})-ka_k(z_1-z_0)^{k-1}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k((z-z_0)^{k-1}+(z-z_0)^{k-2}(z_1-z_0)+\cdots+\right.$$

$$+ (z - z_0)(z_1 - z_0)^{k-2} + (z_1 - z_0)^{k-1} - k(z_1 - z_0)^{k-1})\big| +$$

$$+ \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |a_k|(\rho^{k-1} + \rho^{k-1} + \cdots + \rho^{k-1} + k\rho^{k-1}) =$$

$$= A(z, z_0) + 2\sum_{k=n_0+1}^{\infty} k|a_k|\rho^{k-1} < A(z, z_0) + \frac{2}{3}\varepsilon,$$

де для $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\frac{(z - z_0)^n - (z_1 - z_0)^n}{z - z_1} = \frac{(z - z_0)^n - (z_1 - z_0)^n}{(z - z_0) - (z_1 - z_0)} =$$

$$= (z - z_0)^{n-1} + (z - z_0)^{n-2}(z_1 - z_0) + \cdots +$$

$$+ (z - z_0)(z_1 - z_0)^{n-2} + (z_1 - z_0)^{n-1},$$

$$\lim_{z \to z_1} A(z, z_0) =$$

$$= \lim_{z \to z_1} \Bigg| \sum_{k=1}^{n_0} a_k((z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^{k-2}(z_1 - z_0) + \cdots +$$

$$+ (z - z_0)(z_1 - z_0)^{k-2} + (z_1 - z_0)^{k-1} - k(z_1 - z_0)^{k-1})\Big| = 0.$$

З останнього маємо, що для $\dfrac{\varepsilon}{3}$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $0 < |z - z_1| < \delta$, випливає нерівність $A(z, z_0) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ ми вказали $\delta > 0$ таке, що для всіх z, які задовольняють нерівність $0 < |z - z_1| < \delta$, виконується нерівність

$$\left| \frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} - \varphi(z_1) \right| < \varepsilon.$$

А це й означає, що

$$\lim_{z \to z_1} \frac{S(z) - S(z_1)}{z - z_1} = \varphi(z_1),$$

тобто $S'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^n$. ■

Теорема 12.3. *Якщо однозначна функція $f(z)$ аналітична в області D і $z_0 \in D$, то вона розкладається у ряд Тейлора за степенями $z - z_0$, який збігається у крузі $\{z \,|\, |z - z_0| < R\}$, де R — відстань від точки z_0 до межі області D.*

Доведення. Нехай z — точка круга $\{z \,|\, |z - z_0| < R\}$ і ρ таке, що $|z - z_0| < \rho < R$ (Рис. 6).

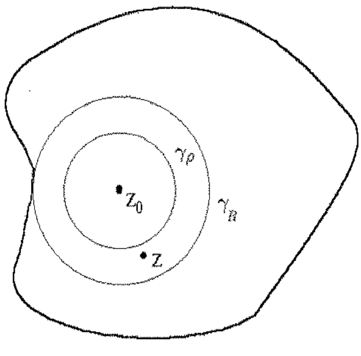


Рис. 6

Якщо $\gamma_\rho = \{z \,|\, |z_0 - z| = \rho\}$, то в силу інтегральної формули Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (12.6)$$

Розкладемо функцію

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

у ряд Тейлора за степенями $z - z_0$. Маємо

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Оскільки для всіх $\zeta \in \gamma_\rho$ і будь-якого n

$$\left| f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \leqslant \max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

і числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \frac{|z - z_0|^n}{\rho^{n+1}}$$

збігається, як геометрична прогресія із знаменником $\dfrac{|z - z_0|^n}{\rho} < 1$, то функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \max_{\zeta \in \gamma_\rho} |f(\zeta)| \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

рівномірно збігається на колі γ_ρ, а, отже, його можна почлено інтегрувати. Звідси маємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Зауважимо, що хоча коло γ_ρ ми брали в залежності від z, однак враховуючи, що інтеграл

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

не залежить від контура інтегрування, якщо він належить області аналітичності, маємо формулу для обчислення коефіцієнтів ряду

$$a_n = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \tag{12.7}$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots, \ 0 < \rho < R$. Таким чином остаточно маємо, що

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

де a_n для $n = 0, 1, 2, \ldots$ обчислюється за формулою (12.7), і радіус збіжності цього ряду дорівнює R. ■

Висновок. Теореми 12.2 і 12.3 дають нам необхідну і достатню умову аналітичності функції у точці, а, отже, можна користуватись і таким означенням аналітичної функції.

Означення 12.3. *Функція $f(z)$ називається аналітичною у точці z_0, якщо в околі цієї точки її можна розкласти у ряд Тейлора за степенями $z - z_0$.*

Таке означення аналітичності дозволяє стверджувати, що функція $f(z)$ аналітична в області D, безліч раз диференційовна у цій області, причому її похідна n-го порядку може бути обчислена за формулою

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Ця властивість аналітичної функції комплексної змінної суттєво відрізняє її від функцій дійсної змінної, для яких існування першої похідної, взагалі кажучи, не гарантує існування похідних вищих порядків.

Ще одна із важливих властивостей аналітичних функцій виражається так: якщо функції $f_1(z)$ і $f_2(z)$ однозначні аналітичні в області D і приймають рівні значення у кожній точці множини E ($E \subset D$) такої, що хоч одна (скінченна) гранична для неї точка належить D, то $f_1(z) = f_2(z)$ для всіх $z \in D$.

Нарешті, поняття аналітичної функції дозволила Карлу Веєрштрассу по-новому підійти до означення функції, розглядаючи однозначну аналітичну функцію із заданою областю визначення як відправний елемент для побудови функції, означеної на заданій кривій.

Як приклад, розглянемо логарифмічну функцію. Оскільки функція $\frac{1}{z}$ аналітична у кожній точці $z \in \mathbb{C}$, крім точки $z = 0$, то інтеграл

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta},$$

визначенний у будь-якій обмеженій, однозв'язній області, яка не містить точки $\zeta = 0$, причому цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а тільки від точки z.

Відповідність, яка кожному $z \in D$, де D — обмежена, однозв'язна область, що не містить точки $z = 0$, є аналітична у цій області функція. Якраз її і візьмемо за відправний елемент функції $\operatorname{Ln} z$ і позначимо

$$\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Відправний елемент $\ln z$ можна аналітично продовжити вздовж будь-якої кривої Γ з початком у точці $\zeta = 1$, що не проходить через точку $\zeta = 0$, а у розширеній комплексній площині і через точку $\zeta = \infty$. Результатом аналітичного продовження буде функція

$$(\ln z)_\Gamma = \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta},$$

значення якої підраховуються у такий спосіб.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ $(-\pi < \varphi < \pi)$, і нехай крива Γ складається з відрізка з початком у точці $\zeta = 1$ і кінцем у точці $\zeta = r$ і найкоротшої дуги кола $\{\zeta \,|\, |\zeta| < r\}$ з початком у точці $\zeta = r$ і кінцем у точці $\zeta = z$ (Рис. 7). Тоді,

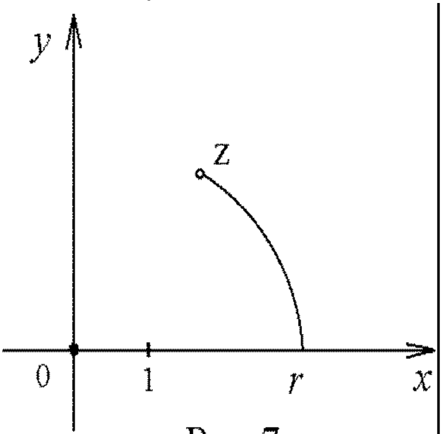


Рис. 7

скориставшись тим, що на відрізку $\zeta = x$, а на дузі кола $\zeta = re^{i\theta}$, маємо

$$\begin{aligned} \ln z &= \int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ &= \int\limits_1^r \frac{dx}{x} + \int\limits_0^\varphi \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \\ &= \ln r + i\varphi. \end{aligned}$$

Якщо ж крива Γ раніше, ніж попасти у точку z, робить один обхід навколо точки $z = 0$, то інтеграл вздовж такої кривої можна подати так:

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_1^r \frac{dx}{x} + \int\limits_0^\varphi \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta = \ln r + i\varphi + 2\pi i.$$

Таким чином, в залежності від кількості обходів навколо точки $z = 0$ і напрямку обходів маємо:

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln r + i\varphi + 2\pi n i,$$

де $n \in \mathbb{Z}$, тобто значення функції $\operatorname{Ln} z$. Однак тепер ця функція може розглядатись як однозначна функція, значення якої визначаються як точкою z так і тим шляхом, який привів з точки $\zeta = 1$ у точку $\zeta = z$.

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що функції $\sin z$ і $\cos z$ є аналітичними на всій комплексній площині.

2. Довести, що для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ має місце подання
$$\cos z = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(z + \frac{\pi}{4}\right)^n .$$

3. Який геометричний зміст має модуль і аргумент похідної функції у точці, якщо вона не дорівнює нулю?

4. Знайти множини тих точок комплексної площини, у яких коефіцієнт лінійного розтягу при відображеннях
$$\text{а) } w = iz^2; \text{ б) } w = z^2 - 2z; \text{ в) } w = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$
дорівнює одиниці.

5. Знайти множини тих точок комплексної площини, у яких кут повороту при відображеннях
$$\text{а) } w = z^2; \text{ б) } w = -z^3; \text{ в) } w = \frac{1}{z}$$
дорівнює нулю.

6. До якого класу функцій належать дійсна і уявна частини аналітичної функції?

7. Розкласти у ряд Тейлора в околі точки $z = z_0$ функції

   а) $\operatorname{sh}\sqrt{z}\sin\sqrt{z},\ z_0 = 0;$ б) $\ln(1 + z + z^2),\ z_0 = 0;$

   в) $\dfrac{z^2 - 5}{z^2 - 4z + 3},\ z_0 = 2.$

8. Довести, що будь-яка ціла функція, яка обмежена за модулем, є константа (теорема Ліувілля). На підставі цього факту довести основну теорему алгебри.

9. Чому аналітична функція, яка не дорівнює тотожньо нулю, може мати нулями тільки ізольовані точки?

13 *ЛЕКЦІЯ*: Основні теореми диференціального числення. Формула Тейлора

Теореми Ролля, Лагранжа і Коші. Подання функції через многочлен. Формули Тейлора для основних елементарних функцій. Обчислення значень ірраціональних і трансцендентних функцій з допомогою формули Тейлора.

Література. [1], ч. 1, с. 121–125; [2], ч. 1, с. 221–239; [3] т. 1, с. 156–164, 173–183.

Серед найбільш важливих результатів теорії диференційовних функцій особливе місце посідають теорема Лагранжа, яка виражає приріст функції через приріст аргумента, що спричинив його, і формула Тейлора, яка подає функцію у вигляді суми многочлена і залишкового члена, і дозволяє вивчення ряду властивостей функції (з певним числом похідних) звести до вивчення таких властивостей відповідного многочлена Тейлора.

Насамперед доведемо дві допоміжні теореми, що стосуються обертання в нуль похідної.

Теорема 13.1 (лема Ферма). *Якщо функція f визначена в інтервалі $(a;b)$, у точці $x_0 \in (a;b)$ диференційовна і приймає у ній найбільше або найменше значення, то її похідна у цій точці дорівнює нулю, тобто $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Нехай для означенності функція f у точці x_0 приймає найбільше на інтервалі $(a;b)$ значення, тобто для всіх $x \in (a;b)$ $(x \neq x_0)$ $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тоді для всіх $x \in (a;b)$ $(x < x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0, \tag{13.1}$$

а для всіх $x \in (a;b)$ $(x > x_0)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0, \tag{13.2}$$

Врахувавши, що функція f у точці x_0 диференційовна, маємо:

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

А, отже, з нерівностей (13.1) і (13.2) випливає, з одного боку, $f'(x_0)\geqslant 0$, з другого $f'(x_0)\leqslant 0$, що можливо, коли $f'(x_0)=0$. ■

Теорема 13.2 (Ролля). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка приймає рівні значення, то існує точка $x_0\in(a;b)$ така, що $f'(x_0)=0$.*

Доведення. Оскільки за умовою функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на ньому свого найменшого і найбільшого значення. Нехай

$$m=\min_{x\in[a;b]}f(x),\ M=\max_{x\in[a;b]}f(x).$$

Якщо $m=M$, то функція f стала на відрізку $[a;b]$ і у будь-якій точці інтервалу $(a;b)$ похідна дорівнює нулю. Отже, за x_0 можна взяти будь-яку точку з інтервалу (a,b). Якщо ж $m\neq M$, то з умови, що $f(a)=f(b)$, випливає, що або $m\neq f(a)$, або $M\neq f(a)$. Тобто на інтервалі (a,b) є точка, у якій функція f досягає свого найменшого або найбільшого значення. За лемою Ферма у цій точці похідна обертається в нуль. Теорема доведена. ■

Тепер уже можна довести теорему, яка найчастіше використовується при дослідженні числових функцій.

Теорема 13.3 (Лагранжа). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то існує точка $c\in(a;b)$ така, що*

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{13.3}$$

Доведення. Побудуємо функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Очевидно, що функція F неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$ і $F(a) = F(b) = 0$, тобто ця функція задовольняє умови теореми Ролля. А, отже, існує точка $c \in (a;b)$, у якій

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Звідси в очевидний спосіб отримуємо формулу (13.3). ■

Теорема 13.4 (Коші). *Якщо функції f і g неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні в інтервалі $(a;b)$ і для будь-якого $x \in (a;b)$ $g'(x) \neq 0$, то існує точка $c \in (a;b)$ така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{13.4}$$

Доведення. Насамперед доведемо, що $g(a) \neq g(b)$. Справді, з припущення про те, що $g(a) = g(b)$, неперервності функції g на відрізку $[a;b]$ і диференційовності в інтервалі $(a;b)$ випливало б, що функція g задовольняє умови теореми Ролля. А, отже, існує точка $c \in (a;b)$, у якій $f'(c) = 0$, що суперечить умові теореми. Побудуємо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Очевидно, що функція F неперервна на відрізку $[a,b]$ (як результат арифметичних операцій над неперервними функціями), диференційовна в інтервалі (a,b) (як результат арифметичних операцій над диференційовними функціями) і $F(a) = F(b) = 0$, тобто побудована функція задовольняє умови теореми Ролля. А, отже, існує точка $c \in (a, b)$ така, що

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Звідси в очевидний спосіб отримуємо формулу (13.4). ■

Зауваження. У вище приведених теоремах мова йде про існування точки c внутрішньої (інакше „точки із середини“), для якої виконується певна рівність. Якраз це є причиною того, що цю групу теорем називають „теореми про середнє“.

Розглянемо многочлен n-го степеня, який записано у вигляді

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k, \end{aligned} \tag{13.5}$$

де $a_n \neq 0$, x_0 — фіксоване дійсне число. Для цього многочлена

$$P_n(x_0) = a_0,\ P'_n(x_0) = a_1 \cdot 1!,\ P''_n(x_0) = a_2 \cdot 2!, \ldots,$$

$$P_n^{(n)}(x_0) = a_n \cdot n!,\ \ P_n^{(n+1)}(x_0) = P_n^{(n+2)}(x_0) = \cdots = 0.$$

Таким чином, многочлен (13.5) можна подати у вигляді

$$\begin{aligned} P_n(x) &= P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \\ &+ \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

тобто многочлен $P_n(x)$ повністю визначається заданням значення многочлена і його похідних в одній (довільній) точці.

Зрозуміло, що таке подання можна побудувати і для многочлена виду

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k .$$

Нехай маємо функцію f, яка у точці x_0 має n похідних. Побудуємо многочлен

$$\begin{aligned}P_n(f, x_0, x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,\end{aligned} \tag{13.6}$$

який називають *многочленом Тейлора порядку n функції f у точці x_0*, і позначимо

$$r_n(f, x_0, x) = f(x) - P_n(f, x_0, x).$$

Теорема 13.5. *Якщо функція f визначена на інтервалі (a, b) і у точці $x_0 \in (a; b)$ має n похідних, то ця функція подається у вигляді*

$$\begin{aligned}f(x) &= P_n(f, x_0, x) + o((x - x_0)^n) = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),\end{aligned} \tag{13.7}$$

де

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Доведення. Оскільки згідно (13.6)

$$P_n(f, x_0, x_0) = f(x_0),\ P_n'(f, x_0, x_0) = f'(x_0),$$

$$P_n''(f, x_0, x_0) = f''(x_0), \ldots,\ P_n^{(n)}(f, x_0, x_0) = f^{(n)}(x_0),$$

то

$$r_n(f,x_0,x_0) = r'_n(f,x_0,x_0) = r''_n(f,x_0,x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(f,x_0,x_0) = 0,$$

причому в силу того, що $r_n^{(n)}(f,x_0,x)$ у точці x_0 має похідну n-го порядку, існує окіл точки x_0, у кожній точці якого існують похідні до $n-1$ порядку включно. Тому для розкриття неозначеності

$$\frac{r_n(f,x_0,x)}{(x-x_0)^n}$$

при $x \to x_0$ можна застосувати n раз правило Лопіталя. В результаті отримаємо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(f,x_0,x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r'_n(f,x_0,x)}{n(x-x_0)^{n-1}} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(f,x_0,x)}{n!(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n)}(f,x_0,x)}{n!} = 0.$$

Отже, справді $r_n(f,x_0,x)$ є при $x \to x_0$ нескінченно мала порядку вищого, ніж $(x-x_0)^n$. А це й означає, що для функції f має місце подання (13.7). ■

Формула (13.7) називається *формулою Тейлора n-го порядку із залишковим членом у формі Пеано*. У ній $P_n(f,x_0,x)$ — многочлен Тейлора, а $o((x-x_0)^n)$ — залишковий член n-го порядку формули Тейлора. При $x_0 = 0$ називають *формулою Маклорена*.

Многочлен Тейлора степеня n є многочлен, який серед усіх многочленів n-го степеня найкращим наближенням функції f у досить малому околі точки x_0, тобто ніякий многочлен степеня, що не перевищує n, не може бути наближенням розглядуваної функції з точністю $o((x-x_0)^n)$ (а, отже, і з більш високою точністю). Отож, у достатньо малому околі точки x_0 маємо

$$f(x) \approx P_n(f,x_0,x)$$

з точністю до $o((x-x_0)^n)$.

Зрозуміло, що при заміні функції f її многочленом Тейлора нас цікавить не порядок похибки, а її оцінка. Таку оцінку можна отримати, скориставшись іншими формами залишкового члена. Серед них найбільш популярними є

$$r_n(f,x_0,x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}, \quad (13.8)$$

де $0<\theta<1$, (*форма Лагранжа*),

$$r_n(f,x_0,x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, (13.9)$$

де $0<\theta<1$, (*форма Коші*),

$$r_n(f,x_0,x)=\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \quad (13.10)$$

(*інтегральна форма*).

Якщо функція $f(x)$ раціональна, то обчислення її значень зводиться до підстановки на місце незалежної змінної x відповідного числа і виконання чотирьох арифметичних дій. Якщо ж функція не є раціональною, то тут підстановка дає результат тільки в окремих випадках, а, взагалі, значення, наприклад, логарифмічної або ж тригонометричних функцій обчислюється за допомогою таблиць. Якраз формули Тейлора і є інструментом для складання таких таблиць.

Візьмемо, для прикладу, функцію $f(x)=\sin x$. Оскільки для цієї функції

$$f^{(0)}(x)=\sin x, \quad f^{(0)}(0)=0,$$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right), \quad f'(0)=1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right), \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right), \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{(IV)}(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right), \quad f^{(IV)}(0) = 0$$

і, взагалі,

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо} \quad n = 4k, \\ \cos x, & \text{якщо} \quad n = 4k+1, \\ -\sin x, & \text{якщо} \quad n = 4k+2, \\ -\cos x, & \text{якщо} \quad n = 4k+3, \end{cases}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо} \quad n = 2k+1, \end{cases}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$, то на підставі (13.6) маємо:

$$P_1(\sin, 0, x) = x,$$

$$P_3(\sin, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!},$$

$$P_5(\sin, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_{2n-1}(\sin, 0, x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

многочлени Тейлора (точніше, многочлени Маклорена) відповідно степеня $1, 3, \ldots, 2n-1, \ldots$. Скориставшись залишковим членом у формі Лагранжа, для функції $f(x) = \sin x$ маємо таке подання

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} +$$
$$+ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x + \frac{\pi}{2}(2n+1)).$$

Випишемо многочлен, який дозволяє обчислювати значення $\sin x$ для будь-якого x з відрізка $[-1; 1]$ з точністю до 10^{-4}. Оскільки

$$\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin(\theta x + \frac{\pi}{2}(2n+1))\right| \leqslant \frac{1}{(2n+1)!},$$

то з нерівності

$$\frac{1}{(2n+1)!} < 10^{-4}$$

отримуємо, що шуканим многочленом буде

$$P_7(\sin, 0, x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}.$$

Звичайно, коли $|x| < 1$ задану точність забезпечує многочлен нижчого степеня. Наприклад, обчислимо з точністю до 10^{-4} $\sin 10^\circ$. Оскільки

$$10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0,174533 < 0,2\,,$$

то

$$\left|\frac{1}{(2n+1)!}\sin(\theta x + \frac{\pi}{2}(2n+1))\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}\right| \leqslant \frac{(0,2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

і нерівність

$$\frac{(0,2)^{2n+1}}{(2n+1)!} < 10^{-4}$$

виконується при $n = 2$. А, отже,

$$\sin 10^\circ \approx 0,17453 - \frac{0,17453^3}{6} \approx 0,1736.$$

Розглянемо функцію $f(x) = (1+x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$. Для цієї функції

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (1+x)^\alpha, & f^{(0)}(0) &= 1,\\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1}, & f'(0) &= \alpha,\\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, & f''(0) &= \alpha(\alpha-1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, & f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\times\\
& & &\times\cdots(\alpha-n+1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

а, отже,

$$P_1(f,0,x) = 1 + \alpha x,$$

$$P_2(f,0,x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2,$$

$$P_3(f,0,x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3,$$

. . . .

$$P_n(f,0,x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k,$$

. . . .

Скориставшись залишковим членом у формі Коші, для функції $f(x) = (1+x)^\alpha$ маємо таке подання

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \\ &+ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1},\end{aligned}$$

де $0 < \theta < 1$.

Зауважимо, що коли α — натуральне число ($\alpha = n$), то

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}x^n = \\ &= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n,\end{aligned}$$

тобто для цього випадку $(1+x)^n$ подається формулою *бінома Ньютона*. У зв'язку з цим користуються позначенням

$$C_\alpha^n := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$, і записують

$$(1+\alpha)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n).$$

Продемонструємо застосування останньої формули при добуванні коренів, а саме обчислимо $\sqrt{2}$ з точністю до 10^{-4}. Насамперед $\sqrt{2}$ перетворимо так, щоб під коренем було число близьке до 1. З цією метою випишемо два рядки чисел

$$
\begin{array}{ccccccc}
1, & 4, & 9, & 16, & 25, & 36, & \underline{49} \\
\\
2, & 8, & 18, & 32, & \underline{50}, & 72, & 98
\end{array}
$$

(у першому — квадрати натуральних чисел, у другому — числа першого рядка помножені на 2). Шукаємо у цих рядках числа, відношення яких достатньо близьке до 1 (числа підкреслені). Тоді

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 49}{25 \cdot 49}} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}},$$

і уже з цим виразом можна працювати. Однак $\sqrt{2}$ можна подати у більш зручному для обчислення вигляді, а саме

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\frac{1}{\sqrt{\frac{49}{50}}} = \frac{7}{5}\left(1 - \frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{7}{5}\,(1 - 0,02)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тепер треба знайти таке n, щоб

$$\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1-0,02\,\theta)^{\alpha-n-1}(1-\theta)^n 0,02^{n+1}\right| < 10^{-4},$$

де $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $0 < \theta < 1$. Оскільки $1-\theta < 1-0,02\,\theta$, то

$$\left(\frac{1-\theta}{1-0,02\,\theta}\right)^n < 1,$$

а для $n = 3$

$$\frac{1}{(1-0,02\,\theta)^{3/2}} < 2.$$

Звідси маємо, що

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{6!}\cdot 2\cdot(0,02)^4=\frac{35}{16}\cdot(0,02)^4=$$

$$=35\cdot(0,01)^4=0,00000035<\frac{7}{5}\cdot 10^{-4}.$$

Отже,

$$\sqrt{2}\approx\frac{7}{5}\left(1+C^1_{-0,5}(-0,02)+C^2_{-0,5}(-0,02)^2+C^3_{-0,5}(-0,02)^3\right)=$$

$$=\frac{7}{5}\left(1+0,01+\frac{3}{2!}(0,01)^2+\frac{3\cdot 5}{3!}(0,01)^3\right)\approx$$

$$\approx 1,40000+0,01400+0,00021\approx 1,4142.$$

Формула Тейлора дає просте і достатньо загальне правило виділення головної частини функції, що, як підкреслено у ([3], т. 1, с. 181), надає методу обчислення границь функцій через виділення правильної частини алгоритмічного характеру.

Нехай, наприклад, необхідно знайти

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

де $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$. Подаємо функції $f(x)$ і $g(x)$ у вигляді

$$f(x)=a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n),$$

$$g(x)=b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m),$$

де $a \neq 0,\ b \neq 0$. Тоді

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{a(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m+o((x-x_0)^m)} =$$

$$= \frac{a}{b}\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^{n-m} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad n>m, \\ \dfrac{a}{b}, & \text{якщо} \quad n=m, \\ \infty, & \text{якщо} \quad n<m. \end{cases}$$

Неозначеності типу $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 зводяться шляхом алгебраїчних перетворень до неозначеності $\dfrac{0}{0}$.

Ефективність цього методу значно підвищується, якщо використовується готовий набір асимптотичних формул при $x\to 0$, тобто подання основних елементарних функцій в околі точки 0 через відповідні розклади Тейлора, а саме

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+o(x^n),$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n}),$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+o(x^{2n-1}),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o(x^n),$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^{2n-1}),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{((2k-1)!!)^2}{(2k-1)!} x^{2k-1} + o(x^{2n-1}).$$

Приклад. Знайти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x}.$$

Розв'язання. Для функцій $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$, $\arcsin x$ розклади маємо. Для функції $\operatorname{tg} x$

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x},\ \operatorname{tg}'' x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x},\ \operatorname{tg}''' x = \frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{2}{\cos^2 x}.$$

Тоді за формулою Тейлора

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

А, отже,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \sin x}{\operatorname{tg} x - \arcsin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{(x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)) - (x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -1.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що якщо многочлен $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами має n простих дійсних коренів, то його похідна має $n-1$ простий дійсний корінь.

2. Довести, що всі корені похідної від многочлена

$$P(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$$

дійсні і вказати межі, у яких вони містяться.

3. Нехай $f(x) = x^2 + px + q$, де $p, q \in \mathbb{R}$, і $[a; b]$ — довільний відрізок. Чи застосовна до цієї функції теорема Лагранжа? Якщо так, то у якій точці береться значення похідної?

4. Нехай функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$ і

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Довести, що існує точка $c \in [a; b]$, у якій

$$f'(c) = f(c).$$

5. Знайти

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2)}{x \sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

6. Нехай f — нескінченне число раз диференційовна у нулі функція. Довести, що

а) якщо f — парна, то у многочлені Маклорена тільки парні степені x;

б) якщо f — непарна, то у многочлені Маклорена тільки непарні степені x.

7. Нехай $f(x)$ — нескінченно раз диференційовна у точці $x = 0$, і нехай

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Довести, що

$$f(x) = f(0) + \frac{a_0}{1}x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o(x^{n+1}),$$

і на підставі цього знайти тейлореві розклади функцій $\operatorname{arctg} x$ і $\arcsin x$.

8. Довести, що коли функція f диференційовна на відрізку $[a; b]$ і $f'(a) = A < f'(b) = B$, то для кожного C $(A < C < B)$ існує точка $c \in (a; b)$, для якої $f(c) = C$.

14 *ЛЕКЦІЯ*: Дослідження функцій методами диференціального числення

Умови сталості і монотонності функції на проміжку. Екстремуми функції. Опуклість і точки перегину. Асимптоти. Повне дослідження функції та побудова її графіка.

Література. [1], ч. 1, с.128–136; [2], ч. 1, с. 242–268; [3] т. 1, с. 184–209.

Як правило, досліджуються функції, задані одним (явно, неявно, полярними координатами) або двома (параметрично) рівняннями, тобто об'єктами дослідження є або рівняння $y = f(x)$, або $F(x, y) = 0$, або $\rho = \rho(\varphi)$, або два рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Таке дослідження можна інколи спростити, якщо перейти від одного способу задання функції (кривої) до іншого.

Якщо функція задана явно (зрозуміло, що мова йде про елементарну функцію), то її областю визначення є всі ті значення аргументу, для яких відповідний аналітичний вираз має зміст. Це так звана природна область визначення, у кожній внутрішній точці якої функція не тільки визначена, але й неперервна. Вимагає додаткового дослідження поведінка функції в околі межових точок області неперервності, яке проводиться з допомогою операції граничного переходу, тобто знаходять або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, або обидві. У випадку, коли область визначення необмежена, поведінку функції на нескінченності досліджують з допомогою границь виду

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \quad \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Подальшу інформацію як про локальні так і про глобальні (інтегральні) властивості функції можна здобути засобами диференціального числення. Якраз застосування інструментарію диференціального числення для дослідження функції і побудови її графіка є предметом вивчення цієї лекції.

Насамперед, на підставі теореми Лагранжа можна стверджувати, що якщо функція f визначена і диференційовна на інтервалі (a, b), то мають місце такі твердження:

1. $(\forall x \in (a, b))(f'(x) = 0) \iff (\forall x \in (a, b))(f(x) = 0)$,
2. $(\forall x \in (a, b))(f'(x) \geqslant 0) \iff (\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2))$,
3. $(\forall x \in (a, b))(f'(x) \leqslant 0) \iff (\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2))$,
4. $(\forall x \in (a, b))(f'(x) > 0) \Longrightarrow (\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2))$,
5. $(\forall x \in (a, b))(f'(x) < 0) \Longrightarrow (\forall x_1, x_2 \in (a, b))(x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2))$,

тобто функція f диференційовна на інтервалі (a, b) є сталою тоді і тільки тоді, коли її похідна дорівнює тотожно нулю на цьому інтервалі, неспадною тоді і тільки тоді, коли її похідна невід'ємна на цьому інтервалі, незростаючою тоді і тільки тоді, коли її похідна недодатна на цьому інтервалі. Додатність похідної є достатньою (але не необхідною) умовою строгого зростання функції, а її від'ємність є достатньою (але не необхідною) умовою строгого спадання функції.

При доведенні усіх цих тверджень використовується той факт, що для будь-яких $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_2)$ функція f на відрізку $[x_1, x_2]$ задовольняє умови теореми Лагранжа, а, отже, існує точка $c \in (x_1, x_2)$ така, що

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

У шкільному підручнику [8, с. 322–323] обгрунтовуються тільки достатні умови строгого зростання та спадання функції, причому при доведенні використовується безпосередньо означення похідної. Правда, це змусило означити, наприклад, зростаючу на проміжку $\langle a, b\rangle$ функцію як функцію, що зростає у кожній внутрішній точці цього проміжку. Таким чином, поняття монотонності вводиться як локальна властивість функції, а саме, функція $f(x)$ визначена на проміжку $\langle a, b\rangle$ називається зростаючою у внутрішній точці x_0 цього проміжку, якщо існує інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, який знаходиться у проміжку $\langle a, b\rangle$ і такий, що $f(x) < f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta, x_0)$ і $f(x) > f(x_0)$ для всіх x з інтервалу $(x_0, x_0 + \delta)$. Після цього той факт, що якщо функція f у внутрішній точці x_0 проміжку $\langle a, b\rangle$ має похідну $f'(x_0)$ і $f'(x_0) > 0$, то функція f у точці x_0 зростає, доводиться так: „Оскільки за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

і за умовою $f'(x_0) > 0$, то знайдеться інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такий, що для всіх x з цього інтервалу, крім точки $x = x_0$, справджуватиметься нерівність:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

(Зауважимо, що про збереження знаку функцією, яка має у точці відмінну від нуля границю, ніде не згадується). Нехай $x_0 - \delta < x < x_0$, то $x - x_0 < 0$, а, отже, $f(x) - f(x_0) < 0$. Нехай $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, то $x - x_0 > 0$, а, отже, $f(x) - f(x_0) > 0$. Отже, існує інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ такий, що для всіх x з інтервалу $(x, x_0 + \delta)$ матимемо $f(x) > f(x_0)$, а це й означає, що у точці x_0 функція є зростаюча.“

Більш детально розглянемо питання дослідження функції на екстремум і на опуклість. Нехай функція f визначена на інтервалі (a, b) і $x_0 \in (a, b)$.

Означення 14.1. *Точка x_0 називається точкою максимуму (мінімуму) функції f, якщо існує окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$).*

Означення 14.2. *Точка x_0 називається точкою строгого максимуму (мінімуму), якщо існує окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.*

У подальшому, як правило, мова буде йти про точки строгого максимуму і мінімуму, які називають точками екстремуму. Очевидно, що тільки для точок строгого екстремуму приріст функції $\triangle f$ не змінює знак при переході через точку екструмуму x_0.

Теорема 14.1 (необхідні умови екстремуму). *Якщо функція f визначена у деякому околі точки x_0, яка є її точкою екстремуму, то або функція не диференційовна у точці x_0, або $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Якщо точка x_0 є точкою, наприклад, максимуму функції f, то існує окіл $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такий, що для всіх x з цього околу $f(x) \leqslant f(x_0)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0-\delta, x_0)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$$

і лівостороння границя (якщо вона існує)

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0, \qquad (14.1)$$

а для всіх x з інтервалу $(x_0, x_0+\delta)$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$$

і правостороння границя (якщо вона існує)

$$\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0. \qquad (14.2)$$

Таким чином, якщо хоч одна із цих границь не існує, або обидві існують, однак не рівні між собою, то функція f у точці x_0 недиференційовна. Якщо ж

$$\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

то функція f у точці x_0 диференційовна і в силу (14.1) і (14.2) $f'(x_0)\geqslant 0$, $f'(x_0)\leqslant 0$. Це можливо, коли $f'(x_0)=0$. ■

Таким чином, точками підозрілими на екстремум (*стаціонарними точками*) для функції f є корені рівняння $f'(x_0)=0$ і ті точки, у яких функція визначена, однак похідна не існує.

Теорема 14.2 (достатні умови екстремуму). *Якщо функція f диференційовна на інтервалі (a,b), крім, можливо, точки $x_0\in(a,b)$, у якій похідна може не існувати, однак функція у цій точці неперервна, і при переході через точку x_0 похідна змінює знак, то точка x_0 є точкою екстремуму, причому точкою строгого максимуму, якщо зміна знаку з плюса на мінус, і точкою строгого мінімуму, якщо зміна знаку з мінуса на плюс.*

Доведення. Нехай x_0 — стаціонарна точка для функції f, тобто у цій точці або функція недиференційовна, або ж $f'(x_0)=0$. і нехай, для означеності на інтервалі $(x_0-\delta,x_0)$ $f'(x_0)>0$, а на інтервалі $(x_0,x_0+\delta)$ $f'(x_0)<0$. Якщо $x\in(x_0-\delta,x_0)$, то на відрізку $[x,x_0]$ функція f задовольняє умови теореми Лагранжа. А, отже, існує така точка $c_1\in(x,x_0)$, що

$$f(x_0)-f(x)=f'(c_1)(x_0-x).$$

Врахувавши, що для будь-якого $x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad f'(x) > 0$, маємо, що $f'(c_1) > 0$ і $f(x_0) - f(x) > 0$ для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Якщо ж $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то на відрізку $[x_0, x]$ функція f теж задовольняє умови теореми Лагранжа. А, отже, існує така точка $c_2 \in (x_0, x)$, що

$$f(x) - f(x_0) = f'(c_2)(x - x_0).$$

Врахувавши, що для будь-якого $x \in (x_0, x_0 + \delta) \quad f'(x) < 0$, маємо, що $f'(c_2) < 0$ і $f(x) - f(x_0) < 0$. Таким чином, для всіх $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(x \neq x_0)$, виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$. А це й означає, що точка x_0 є точкою максимуму для функції f. Аналогічно доводиться друга частина теореми. ■

Можна довести, що якщо функція f визначена у деякому околі точки x_0, у точці x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то точка x_0 є точкою максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$, і точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$.

Теорема 14.3 (достатні умови екстремуму). *Якщо функція f визначена у деякому околі точки x_0, має у точці x_0 похідні до n-го порядку включно, причому*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при n непарному у точці x_0 екстремуму немає, а при n парному точка x_0 є точкою строгого мінімуму, якщо $f^{(n)} > 0$ і точкою строгого максимуму, якщо $f^{(n)} < 0$.

Доведення. Оскільки за умовою функція f у точці x_0 має n похідних, то її можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right) \tag{14.3}$$

(формула Тейлора). Врахувавши, що

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, (14.3) можна записати у вигляді

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \qquad (14.4)$$

Зрозуміло, що коли x досить близьке до x_0, то знак цієї різниці повністю визначає перший доданок. Якщо n непарне, то при переході через точку x_0 $(x - x_0)^n$ змінює знак, а, отже, змінюється знак різниці $f(x) - f(x_0)$ і екстремуму немає. Якщо ж n парне, то перший доданок у (14.4) для x близьких до x_0 повністю визначається знаком числа $f^{(n)}(x_0)$. Зокрема, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$, то існує окіл точки x_0 такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу має місце нерівність $f(x) - f(x_0) > 0$ або $f(x) > f(x_0)$, і точка x_0 є точкою мінімуму. Якщо ж $f^{(n)}(x_0) < 0$, то існує окіл точки x_0 такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу має місце нерівність $f(x) - f(x_0) < 0$ або $f(x) < f(x_0)$, і точка x_0 є точкою максимуму. Теорема доведена. ■

Наступна важлива глобальна властивість функції її опуклість вниз (опуклість вгору).

Означення 14.3. *Функція f, визначена на інтервалі (a, b), називається опуклою вниз на ньому, якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in (a, b)$ і будь-якого числа α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ виконується нерівність*

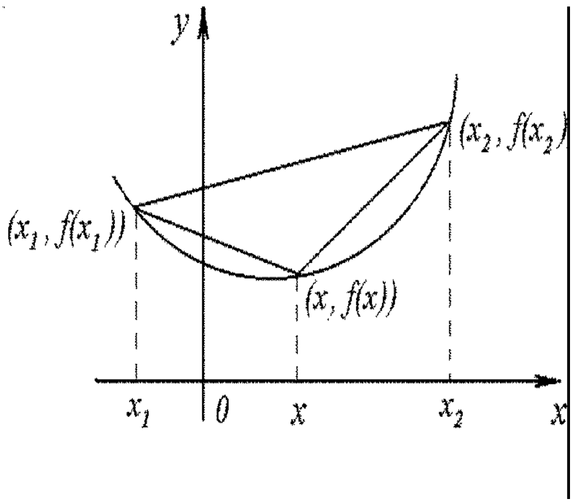
$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2). \qquad (14.5)$$

Якщо при $x_1 \neq x_2$ і $0 < \alpha < 1$ нерівність (14.5) є строгою, то функція f називається строго опуклою вниз на інтервалі (a, b).

Означення 14.4. *Функція f, визначена на інтервалі (a, b), називається опуклою вгору на ньому, якщо для будь-яких точок $x_1, x_2 \in (a, b)$ і будь-якого числа α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ виконується нерівність*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geqslant \alpha f(x_1) + (1 - \alpha) f(x_2). \qquad (14.6)$$

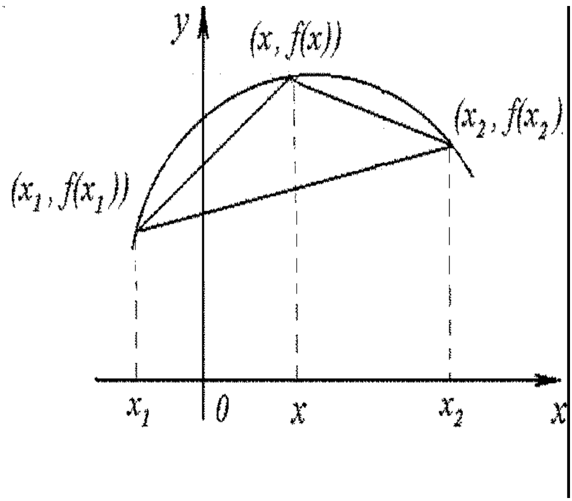
Якщо при $x_1 \neq x_2$ і $0 < \alpha < 1$ нерівність (14.6) є строгою, то функція f називається строго опуклою вгору на інтервалі (a, b).



Нерівність (14.5) означає, що точки будь-якої дуги графіка функції f лежать під хордою, яка стягує цю дугу (Рис. 8), де

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$$

Рис. 8



Нерівність (14.6) означає, що точки будь-якої дуги графіка функції f лежать над хордою, яка стягує цю дугу (Рис. 9), де

$$x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$$

Рис. 9

Можна довести, що будь-яка функція опукла вниз (вгору) на інтервалі (a, b) є неперервною на цьому інтервалі. Однак не цей факт нас буде цікавити.

Оскільки мова йде про дослідження диференційовної функції, то природно вказати ту властивість похідної, яка є гарантом опуклості функції.

Теорема 14.4. *Для того щоб диференційовна на інтервалі (a, b) функція f була опуклою вниз на цьому інтервалі необхідно і досить, щоб її похідна f' не спадала на ньому.*

Доведення. Необхідність. Нехай функція f диференційовна і опукла вниз на інтервалі (a, b). Візьмемо дві довільні точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_2)$. Оскільки функція f опукла вниз на цьому інтервалі, то для будь-якого α $(0 < \alpha < 1)$ виконується нерівність (14.5). Позначимо $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Звідси

$$\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \alpha = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

і нерівність (14.5) можна записати у вигляді

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Домноживши останню нерівність на $x_2 - x_1$, дістанемо

$$(x_2 - x + x - x_1) f(x) \leqslant (x_2 - x) f(x_1) + (x - x_1) f(x_2)$$

або

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Оскільки функція f диференційовна у точках x_1 і x_2, то

$$\lim_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$\lim_{x \to x_2} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(x_2) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

З подвійної нерівності

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_2)$$

випливає, що для будь-яких $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_2)$

$$f'(x_1) \leqslant f'(x_2),$$

тобто похідна f' неспадна на інтервалі (a, b).

Достатність. Нехай f' неспадна на інтервалі (a, b) і $\alpha \in (0, 1)$. (Якщо $\alpha = 0$ або $\alpha = 1$ нерівність (14.5) очевидна). Позначивши через $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, маємо три точки $x_1 < x < x_2$. Тоді за теоремою Лагранжа існують $\xi_1 \in (x_1, x)$, $\xi_2 \in (x, x_2)$ такі, що

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2).$$

Врахувавши, що $\xi_1 < \xi_2$, маємо $f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$ або

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Перехід від останньої нерівності до нерівності (14.5) очевидний. Теорема доведена. ■

Точно у такий самий спосіб можна обгрунтувати, що для того щоб диференційовна на інтервалі (a, b) функція f була опуклою вгору на цьому інтервалі необхідно і досить, щоб її похідна f' була незростаючою на (a, b).

Зрозуміло, що строга монотонність похідної є достатною умовою строгої опуклості, а якщо функція f на інтервалі (a, b) має другу похідну, то функція f строго випукла вниз, якщо для всіх $x \in (a, b)$ $f''(x) > 0$, і строго випукла вгору, якщо для всіх $x \in (a, b)$ $f''(x) < 0$.

Означення 14.5. *Нехай функція f визначена у деякому околі точки x_0 і неперервна у цій точці. Точка x_0 називається точкою перегину функції f, якщо ця точка є одночасно кінцем як інтервала строгої опуклості вниз так і інтервала строгої опуклості вгору. Точку $(x_0, f(x_0))$ називають точкою перегину графіка функції.*

Неважко переконатись, що коли функція f має на інтервалі (a, b) неперервну другу похідну і точка $x_0 \in (a, b)$ є її точкою перегину, то $f''(x_0) = 0$, тобто точки перегину для двічі диференційовної функції слід шукати серед розв'язків рівняння $f''(x_0) = 0$ (а також серед точок, у яких f' неперервна, а f'' не існує). Достатною умовою того, що двічі диференційовна функція f у точці підозрілій на перегин його має, є зміна знаку другою похідною при переході через точку x_0.

Коли виникає питання про поведінку функції поблизу деякої точки (або на нескінченності), у якій, як правило, сама функція невизначена, то говорять про асимптотичну поведінку функції в околі цієї точки.

Асимптотичну поведінку функції у загальному випадку характеризують більш простою або більш вивченою функцією, яка в околі досліджуваної точки з достатно малою відносною похибкою подає значення досліджуваної функції. Найпростішої з цієї точки зору є лінійна функція або, висловлюючись геометричною мовою, асимптота.

Означення 14.6. *Пряма $x = a$ називається вертикальною асимптотою графіка функції f у тому випадку, якщо або $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, або $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ є $+\infty$ або $-\infty$.*

Означення 14.7. *Пряма $y = kx + b$ називається похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$), якщо*

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \quad (\lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx - b) = 0).$$

Теорема 14.5. *Для того щоб графік функції $y = f(x)$ мав похилу асимптоту при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) необхідно і досить, щоб існували границі*

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - kx) = b.$$

Доведення. Необхідність. Нехай графік функції $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ асимптотою пряму $y = kx + b$, тобто $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Тоді

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достатність. Нехай

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - kx) = b.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, а це й означає, що пряма $y = kx + b$ асимптота для функції $f(x)$. ■

і на завершення, *схема дослідження функцій і побудова графіків:*

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву і вертикальні асимптоти.
4. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5. Дослідити поведінку функції на нескінченності, знайти горизонтальні і похилі асимптоти.
6. Знайти точки екстремуму, проміжки монотонності функції та її екстремальні значення.

7. Знайти точки перегину графіка функції, проміжки опуклості і значення функції у точках перегину.

8. Результати дослідження звести в таблицю.

9. Вибрати систему координат і нанести асимптоти, точки перетину з осями координат, точки максимуму, мінімуму, перегину і фрагменти графіка функції поблизу цих точок і асимптот.

10. Побудувати графік функції.

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що додатність (від'ємність) похідної є достатньою, але не необхідною умовою зростання (спадання) диференційовної на проміжку функції.

2. Довести, що відмінність від нуля другої похідної у стаціонарній точці є достатньою умовою екстремуму функції.

3. Довести, що диференційовна на інтервалі (a, b) функція є опуклою вниз (вгору) тоді і тільки тоді, коли для всіх $x \in (a, b)$ нерівність

   $$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0)$$

   виконується для всіх $x \in (a, b)$.

4. Довести, що коли для двічі диференційовної функції, заданої рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярних координатах, точка $M_0(\varphi_0, \rho(\varphi_0))$ є точкою перегину, то φ_0 є коренем рівняння

   $$\rho(\varphi)\rho''(\varphi) - 2(\rho'(\varphi))^2 - (\rho(\varphi))^2 = 0.$$

5. Чи може точка перегину функції бути її точкою екстремуму?

6. Довести, що у будь-якої двічі диференційовної функції між двома точками екстремуму лежить хоч одна точка перегину.

7. Довести, що у двічі диференційовної функції між двома точками перегину може і не бути точок екстремуму.

8. Дослідити і побудувати графіки функцій:

$$\text{а) } f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}, \qquad \text{б) } f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}.$$

9. Дослідити і побудувати графіки функцій:

$$\text{а) } \begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{4(1-t)}, \\[2ex] y = \dfrac{t}{1+t}; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x = \dfrac{t}{1-t^2}, \\[2ex] y = \dfrac{t-2t^3}{1-t^2}. \end{cases}$$

10. Дослідити і побудувати графіки функцій:

$$\text{а) } xy(x-y) + x + y = 0, \qquad \text{б) } (x^2+y^2)^2 = xy.$$

15 *ЛЕКЦІЯ*: Первісна і невизначений інтеграл

Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування. Таблиця основних інтегралів.

Література. [1], ч. 1, с. 194–199, ч. 2, с. 118–135; [2], ч. 1, с. 313–328; [3] т. 1, с. 318–328, 350–378, [8] с. 343–349.

Через основну операцію аналізу (граничний перехід) означається операція диференціювання функцій, результатом якої є знову таки функції. Точніше, якщо у кожній точці деякого проміжку функція f має похідну (під похідною у межовій точці проміжку розуміють відповідну односторонню похідну), то відповідність, яка кожній точці цього проміжку відносить похідну функції f у цій точці, називають *похідною функцією функції* f і позначають f'. Відшукання похідної функції f' за заданою функцією f це, так би мовити, пряма задача.

Цілком природною є постановка оберненої задачі: *за заданою на деякому проміжку функцією f необхідно відшукати таку функцію F, що для всіх x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.*

Те, що така задача може бути розв'язаною, є очевидним фактом. Справді, взявши будь-яку диференційовну на проміжку функцію f і знайшовши її похідну f', маємо, що для функції f' функція f є шуканою. Більше того, таким методом можна було побудувати таблиці, з допомогою яких здійснювати пошук потрібної функції.

Якраз таким шляхом поставлена задача була розв'язана для деяких найпростіших елементарних функцій, і на цій основі для класу раціональних і деяких класів ірраціональних та трансцендентних функцій. А самим сильним результатом є те, що для будь-якої неперервної на проміжку функції f існує функція F (яка не обов'язково елементарна) така, що $F'(x) = f(x)$.

Означення 15.1. *Функція $F(x)$ називається первісною функцією (або просто первісною, ще примітивною або анти-*

похідною) функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо у кожній точці цього проміжку $F(x)$ диференційовна і

$$F'(x) = f(x).$$

Теорема 15.1. *Якщо функція $F(x)$ є первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, то множина*

$$\{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\} \tag{15.1}$$

є множиною всіх первісних для цієї функції.

Доведення. Оскільки для кожного елемента з множини (15.1) $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$, то кожен елемент цієї множини є первісною функції $f(x)$. Якщо $\Phi(x)$ деяка первісна функції $f(x)$ ($\Phi(x) \neq F(x)$), то очевидно, що $(\Phi(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$. Звідси випливає, що будь-яку первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ можна подати у вигляді

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

тобто $\Phi(x)$ є елементом множини (15.1). ■

Означення 15.2. *Множина всіх первісних функції f на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається*

$$\int f(x)dx.$$

З теореми 15.1 випливає, що коли $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то

$$\int f(x)dx := \{F(x) + C \,|\, C \in \mathbb{R}\}.$$

Однак у сучасній математиці використовується позначення

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де $C \in \mathbb{R}$. Так наприклад,

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

множина всіх первісних функцій, а $\sin x + 1$ конкретна первісна (Л. Ейлер невизначений інтеграл називав повним інтегралом, а конкретну первісну частковим інтегралом).

Операція переходу від функції $f(x)$ до первісної $F(x)$ або невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ називається *інтегруванням*, причому відшукання невизначеного інтеграла зводиться до відшукання однієї первісної.

З того, що $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$ випливає, що

$$d\int f(x)dx = dF(x) = f(x),$$

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C,$$

тобто операції диференціювання та інтегрування взаємно обернені, однак у другому випадку з точністю до константи.

Операція інтегрування, як і операція диференціювання, є лінійною, тобто якщо f_1 і f_2 мають первісні на деякому проміжку, то на цьому проміжку має первісну функція $f_1 + f_2$, причому

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Більше того, для довільних дійсних чисел λ і μ

$$\int (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))dx = \lambda \int f_1(x)dx + \mu \int f_2(x)dx. \quad (15.2)$$

До основних правил інтегрування також відносять метод інтегрування частинами і метод заміни змінної (метод підстановки).

Теорема 15.2. *Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *диференційовні на деякому проміжку і невизначений інтеграл* $\int v(x)u'(x)dx$ *існує, то і невизначений інтеграл* $\int u(x)v'(x)dx$ *існує, причому*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \tag{15.3}$$

Доведення. Оскільки за умовою функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовні, то і добуток цих функцій є диференційовна функція і

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Звідси $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$. Очевидно, що $u(x)v(x)$ є первісна функції $(u(x)v(x))'$. Крім того за умовою теореми функція $u'(x)v(x)$ теж має первісну. Тоді в силу (15.2) має первісну функція $u(x)v'(x)$, а отже,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx. \quad \blacksquare$$

Зауваження. Формулу (15.3) записують у вигляді

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx.$$

Теорема 15.3. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $\varphi(t)$ *визначені на деяких проміжках таких, що визначено складну функцію* $f(\varphi(t))$. *Якщо функція* $f(x)$ *має первісну* $F(x)$, *а функція* $\varphi(t)$ *диференційовна, то функція* $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ *також має первісну і*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{15.4}$$

Доведення. Оскільки функція $F(x)$ визначена на тому ж проміжку, що й функція $f(x)$, то складна функція $F(\varphi(t))$ визначена і згідно правила диференціювання складної функції

$$\frac{d}{dt}(F(\varphi(t))) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Таким чином, функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має своєю первісною функцію $F(\varphi(t))$. А, отже, має місце формула (15.4). ■

Зауваження. Формула (15.4) використовується при обчисленні невизначених інтегралів у такий спосіб: якщо підінтегральна функція може бути поданою у вигляді $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, прячому первісна функції $f(x)$ відома, то

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) =$$

$$= \int f(x)dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C.$$

Нехай маємо раціональний дріб $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, і нехай знаменник $Q(x)$ подано у вигляді

$$Q(x) = \alpha_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{m_r},$$

де α_0 — коефіцієнт при x^n многочлена $Q(x)$, $x_1, \dots, x_l$ — дійсні корені многочлена $Q(x)$ відповідно кратності $k_1, \dots, k_l$, $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_rx + q_r$ — незвідні над полем дійсних чисел дільники многочлена $Q(x)$ (квадратні тричлени з комплексними коренями) відповідно кратності $m_1, \dots, m_r$, $k_1+k_2+\cdots+k_l+2m_1+2m_2+\cdots+2m_r = n$. Тоді цей раціональний дріб можна подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}, \quad (15.5)$$

де $q(x)$ — ціла частина дробу $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, A_{ij} $(i=\overline{1,l},\ j=\overline{1,k_i})$, B_{ij}, C_{ij} $(i=\overline{1,r},\ j=\overline{1,m_i})$ числа, які визначаються методом невизначенних коефіцієнтів. А, отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена та інтегрування елементарних дробів виду

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k},$$

де $k\in\mathbb{N},\ A,B,C\in\mathbb{R},\ p^2-4q<0$.

Тепер уже можна описати інструментарій, з допомогою якого для заданої функції знаходять її первісну, а, отже, невизначений інтеграл.

Насамперед, скориставшись таблицею похідних елементарних функцій можна скласти таблицю основних невизначених інтегралів. Так, оскільки

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^\alpha, \quad x>0,\ \alpha\neq-1,$$

то на будь-якому проміжку додатної півосі має місце формула:

$$1. \quad \int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C.$$

У тому випадку, коли α — раціональне число, область визначення функції x^α може поширитись і на від'ємну піввісь і навіть на всю числову пряму. Так, наприклад, формула

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$$

справедлива на всій числовій осі, а от для $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2}$ слід писати:

$$\int\frac{dx}{x^2}=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{якщо } x>0,\\ -\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{якщо } x<0,\end{cases}$$

і не існує невизначеного інтеграла $\int \frac{dx}{x^2}$ на будь-якому проміжку, який містить точку 0.

Оскільки для функції

$$\ln|x| \quad = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x > 0, \\ \ln(-x), & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln|x|)' \quad = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$$

то можна записати формулу:

$$2. \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

на будь-якому проміжку, якому не належить точка $x = 0$.

Далі таблиця похідних дає можливість записати такі формули, що справедливі на будь-якому проміжку числової прямої.

$$3. \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln x} + C,$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$, зокрема

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$4. \qquad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \quad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$7. \quad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$8. \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Наступні формули справедливі на тих проміжках, які включаються в область визначення підінтегральної функції.

$$9. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$10. \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$11. \quad \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

$$12. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$13. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right) + C.$$

$$14. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2-1} \right| + C.$$

У таблицю невизначених інтегралів не увійшли інтеграли навіть деяких основних елементарних функцій ($\log_a x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ тощо). Знайти такі інтеграли можна за допомогою основних правил інтегрування (15.2) – (15.4). Так, наприклад, при обчисленні інтеграла $\int \log_a x dx$ покладемо

$$u = \log_a x, \quad dv = dx.$$

Тоді

$$du = \frac{dx}{x \ln a}, \quad v = x$$

і, скориставшись формулою (15.3), маємо:

$$\int \log_a x dx = x \log_a x - \int \frac{x dx}{x \ln a} = x \log_a x - x \log_a e + C.$$

Точно у такий саме спосіб можна отримати:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C,$$

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

А от правило підстановки дає можливість знайти невизначений інтеграл дробу

$$\frac{Ax + B}{x^2 + px + q},$$

де $p^2 - 4q < 0$. Справді, якщо подати

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = t^2 + a^2,$$

де $t = x + \frac{p}{2}$, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{A(t - \frac{p}{2}) + B}{t^2 + a^2} dt = \\ &= A \int \frac{t dt}{t^2 + a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2}. \end{aligned}$$

Якщо покласти $u = t^2 + a^2$, то

$$\int \frac{tdt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln u + C.$$

А якщо покласти $u = \dfrac{t}{a}$, то

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u + C.$$

Отже,

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{2B - Ap}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2B - Ap}{2a} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{2a} + C,$$

де $a = \dfrac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

При інтегруванні дробів виду

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n},$$

де $n > 1$, $p^2 - 4q < 0$, діють точно так саме, як і у попередньому випадку, а інтеграл

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}$$

обчислюють з допомогою рекурентної формули

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2} I_n.$$

При інтегруванні нераціональних елементарних функцій найбільш продуктивним є метод раціоналізації, тобто перехід з допомогою певної підстановки до інтегрування раціональної функції. Звичайно такі функції мають певну структуру ($R(\cos x, \sin x)$, $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ тощо).

Зауваження. Коли операція диференціювання елементарних функцій не виводить за межі класу елементарних функцій, то для операції інтегрування все значно складніше. Причина у тому, що для операції диференціювання ми мали правила диференціювання суми, добутку, частки, композиції функцій, а якраз останні операції, виконані скінченне число раз над основними елементарними функціями (кожна з яких має похідну) дають елементарну функцію. Для операції інтегрування немає правил інтегрування добутку, частки, композиції, так що вповні можливо, що для певних елементарних функцій первісними є елементарні функції, але знайти їх ще нікому не вдалося. Разом з тим встановлено, що хоча кожна неперервна на проміжку елементарна функція має первісну, однак є елементарні функції, первісні яких не можна подати у скінченному вигляді через елементарні функції, тобто операція інтегрування виводить за межі класу елементарних функцій. Так, наприклад, показано, що інтеграли

$$\int e^{x^2}dx,\ \int \cos x^2 dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \operatorname{arctg}^2 x dx,$$

$$\int \frac{e^x}{x^n}dx,\ \int \frac{\sin x}{x^n}dx,\ \int \frac{\cos x}{x^n}dx,$$

де $n \in \mathbb{N}$, не подаються у скінченному вигляді через елементарні функції.

На закінчення зазначимо, що у шкільному підручнику [8, с. 343–350] вводиться тільки поняття первісної (термін „інтеграл“ синонім терміна „визначений інтеграл“), а саме: „Первісною для даної функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $\langle a, b\rangle$

називається така функція F, похідна якої для всіх x з інтервалу (a, b) дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in (a, b)$.“

Замість терміну „невизначений інтеграл“ автори користуються терміном „*загальний вигляд первісної*“ і позначенням $F(x) + C$. Відмовившись від використання терміну „множина всіх первісних“, автори змушені були основну властивість первісної сформулювати у вигляді двох теорем:

Теорема 1. *Якщо на проміжку $\langle a, b\rangle$ функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то на цьому проміжку первісною для $f(x)$ буде також функція $F(x) + C$, де C — довільна стала (число).*

Теорема 2. *Будь-які дві первісні функції для однієї і тієї самої функції відрізняються одна від одної на сталий доданок.*

До інструментарію знаходження первісних включено таку таблицю.

Функція $y = f(x)$	Загальний вигляд первісної $F(x) + C$
k, де k — стала	$kx + C$
x^n, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

і три правила:

1. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для $g(x)$, то $F(x)+G(x)$ є первісною для $f(x)+g(x)$.

2. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k — стале число, то $kF(x)$ є первісною для $kf(x)$.

3. Якщо $F(x)$ є первісною для $f(x)$, а k і b — сталі (числа), причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною для $f(kx+b)$.

Таблицю первісних доповнюють первісні показникової, логарифмічної та степеневої функції [8, с. 379–387].

Завдання для самоконтролю.

1. Перевірити, що функції $\operatorname{arctg} x$, $-\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$, $\operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$ є первісними для функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на інтервалі $(-1,1)$ і відрізняються одна від одної на певну сталу.

2. Знайти функцію F, для якої
$$F''(x) = x^2 + x + 1, \quad F'(1) = F(1) = 1.$$

3. Знайти інтеграли:
$$\text{а) } \int (3x-2)^5 dx, \quad \text{б) } \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{в) } \int \frac{xdx}{x^2+2x-3},$$
$$\text{г) } \int \frac{xdx}{x^2+2x+3}, \quad \text{д) } \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+1}}.$$

4. Знайти інтеграли:
$$\text{а) } \int \frac{x^5}{(x^2-10)^{10}}, \quad \text{б) } \int xe^{-x^2} dx, \quad \text{в) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx,$$
$$\text{г) } \int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x+\ln^2 x}}, \quad \text{д) } \int \sqrt{a^2-x^2} dx.$$

5. Знайти інтеграли:

$$\text{а)} \int \ln^2 x dx, \quad \text{б)} \int x^2 \cos^2 x dx, \quad \text{в)} \int x^2 a^x dx,$$

$$\text{г)} \int x^2 \arcsin x dx, \quad \text{д)} \int e^{ax} \cos bx dx.$$

6. Знайти інтеграли:

$$\text{а)} \int \frac{xdx}{2x^2 - 3x - 2}, \ \text{б)} \int \frac{x^2dx}{x^2 - 6x + 10}, \ \text{в)} \int \frac{dx}{x^3 + 1} dx,$$

$$\text{г)} \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}, \quad \text{д)} \int \frac{dx}{x^6 + 2x^4 + x^2}.$$

7. Побудувати таку функцію $R(x, f(x))$, де $R(x, y)$ — раціональна функція змінних x і y, для якої можна обчислити

$$\int R(x, f(x)) dx.$$

8. Знайти функцію $y = f(x)$, для якої $f(1) = 0$ і похідна подається у вигляді

$$y' = \frac{y^2 + 1}{xy(x^2 + 1)}.$$

16 *ЛЕКЦІЯ*: Інтеграл Рімана

Поняття інтеграла Рімана для функції n ($n = 1, 2, 3$) дійсних змінних. Необхідні і достатні умови інтегровності функції. Обчислення інтегралів.

Література. [1], ч. 2, с. 118–160; [2], ч. 1, с. 335–375, ч. 2, с. 113–152; [3], т. 1, с. 379–412, т. 2, с. 81–98; [9], ч. 2, с. 207–234; Dennis D.Berkey Calculus. – New York, Saundes college publishing, 1984, p. 267–368.

історично поняття інтеграла (визначеного інтеграла, інтеграла Рімана) зароджувалось і формувалось в органічній єдності із методами відшукання площ фігур і об'ємів тіл.

Першим був метод вичерпування, за допомогою якого грецький математик Евдокс (його вважають винахідником цього методу) дав логічне обгрунтування (доведення) того, що площі двох кругів відносяться як квадрати їх діаметрів, що об'єм конуса дорівнює одній третині об'єму циліндра з тими ж основою і висотою, А трохи більше, ніж через сто років найвидатніший математик античності Архімед значно удосконалив метод Евдокса і отримав низку нових результатів, серед яких межі для числа π $3\frac{10}{71}$ і $3\frac{10}{70}$, і, чим він найбільше пишався, зв'язок між площею і об'ємом кулі і циліндра, описаного навколо неї. Міркування Архімеда були настільки витончені і за своєю сутністю близькі до методу інтегровних сум, що дехто (наприклад, Д. Пойа) схильні говорити про відкриття ним інтегрального числення.

Задачі Архімеда переглядались знову і знову з метою виявлення їх можливостей у розв'язанні нових задач. і тільки через дві тисячі років набувають громадянства власне інтегральні методи оперування з актуальними нескінченно малими (метод неподільних Кавал'єрі) і операція інтегрування, під якою Ньютон і Лейбніц розуміли сумування диференціалів.

Сучасне означення інтеграла було сформульовано Коші

(1823) і дістало своє логічне завершення у працях Рімана (1853). Означається визначений інтеграл або як границя інтегральних сум, побудованих для функуції, визначеної на деякому відрізку, або як різниця значень первісної на кінцях відрізка (так вводиться поняття інтеграла у шкільному курсі математики).

Нехай функція f визначена на відрізку $[a, b]$, і нехай τ множина точок цього відрізка $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Множину τ називають *розбиттям відрізка* $[a, b]$ *на елементарні відрізки* $[x_{i-1}, x_i]$, де $i = \overline{1, n}$. Через $\triangle x_i$ будемо позначати довжину відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, де $i = \overline{1, n}$. Через $\triangle x_i$ будемо позначати довжину відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, тобто $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, а через $\lambda(\tau)$ — найбільшу з довжин елементарних відрізків, тобто

$$\lambda(\tau) = \max_{i=\overline{1,n}} \triangle x_i,$$

і називати *діаметром розбиття* (норма розбиття, дрібність розбиття). Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ набір чисел таких, що $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, $\xi_2 \in [x_1, x_2]$, ... , $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$, тобто ξ множина чисел, вибраних по одному з кожного елементарного відрізка. Знайдемо значення функції f у кожній точці ξ_i $(i = \overline{1, n})$ і складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Останню суму будемо називати *інтегральною сумою* функції f, яка відповідає розбиттю τ і набору ξ точок з кожного з елементарних відрізків, і позначати

$$\sigma(f, \tau, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \triangle x_i.$$

Означення 16.1. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma(f, \tau, \xi),$$

яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ *на частини, ні від вибору точок з кожного елементарного відрізка, то її називають інтегралом (інтегралом Рімана) функції* f *на відрізку* $[a,b]$ *і позначають*

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що запис

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma(f,\tau,\xi)=\int\limits_a^b f(x)dx=I$$

означає, що для будь-якого $\varepsilon>0$ можна вказати $\delta>0$ таке, що для будь-якого τ, діаметр якого задовольняє нерівність $\lambda(\tau)<\delta$, і будь-якого набору ξ точок з елементарних відрізків, породжених розбиттям τ, виконується нерівність

$$|\sigma(f,\tau,\xi)-I|<\varepsilon.$$

Таким чином, визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ є число, у той час як невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ є множина функцій, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx\in\mathbb{R},\ \text{а}\quad\int f(x)dx=F(x)+C,$$

де $F'(x)=f(x)$.

Поняття інтеграла для функцій двох і трьох змінних можна ввести у такий спосіб. Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена на прямокутнику

$$\Pi=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}=[a,b]\times[c,d],$$

і нехай $\tau_x = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, розбиття відрізка $[a, b]$ на m елементарних відрізків, а $\tau_y = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, де $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, розбиття відрізка $[c, d]$ на n елементарних відрізків. Провівши через точки $x_0, x_1, \ldots, x_m$ прямі паралельні осі Oy, а через точки $y_0, y_1, \ldots, y_n$ прямі паралельні осі Ox, отримаємо mn елементарних прямокутників

$$\pi_{ij} = \{(x, y) \,|\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\} = [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j].$$

Множину $\tau = \{\pi_{ij} \,|\, i = \overline{1, m},\ \ j = \overline{1, n}\}$ назвемо *розбиттям прямокутника* Π *на елементарні прямокутники*, а число

$$\lambda(\tau) = \max_{(i,j)} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2}$$

назвемо *діаметром* цього розбиття.

Нехай $\xi = \{(\xi_i, \eta_j) \,|\, (\xi_i, \eta_j) \in \pi_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ — множина точок, вибраних по одній з кожного елементарного прямокутника, а $f(\xi_i, \eta_j)$ — значення функції f у точці (ξ_i, η_j). Суму

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j) \triangle x_i \triangle y_j,$$

де $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, $\triangle y_j = y_j - y_{j-1}$ ($\triangle x_i \triangle y_j$ — площа елементарного прямокутника π_{ij}), називають *інтегральною сумою функції* f, яка відповідає розбиттю τ і набору точок ξ, і позначають $\sigma(f, \tau, \xi)$.

Означення 16.2. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma(f, \tau, \xi),$$

яка не залежить ні від способу розбиття прямокутника Π *на елементарні прямокутники, ні від вибору точок з кожного елементарного прямокутника, то її називають подвійним* *інтегралом функції f на прямокутнику Π і позначають*

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy.$$

Нехай функція $f(x,y)$ визначена на обмеженій квадровній області G, і нехай Π — прямокутник, який включає область G. Позначимо через $\widetilde{f}\,(x,y)$ продовження функції $f(x,y)$ з області G на $\mathbb{R}^2$ такого типу

$$\widetilde{f}\,(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{якщо} \quad (x,y)\in G, \\ \quad 0 \quad , & \text{якщо} \quad (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus G. \end{cases}$$

Означення 16.3. *Подвійним інтегралом функції f по області G називають подвійний інтеграл продовження $\widetilde{f}$ на будь-якому прямокутнику Π, який включає область G, і позначають*

$$\iint\limits_{G} f(x,y)dxdy := \iint\limits_{\Pi} \widetilde{f}\,(x,y)dxdy.$$

Як показано у [2, ч. 2, с. 124–125] означення 16.3 коректне у тому розумінні, що для будь-яких двох прямокутників Π_1 і Π_2 таких, що $G\subset \Pi_1\cap\Pi_2$, інтеграли

$$\iint\limits_{\Pi_1} \widetilde{f}\,(x,y)dxdy, \qquad \iint\limits_{\Pi_2} \widetilde{f}\,(x,y)dxdy$$

існують або не існують одночасно, причому у першому випадку їх значення збігаються.

Нехай маємо функцію $u=f(x,y,z)$, визначену на паралелепіпеді

$$\begin{aligned} \Pi \;&= \{(x,y,z)\,|\, a\leqslant x\leqslant b,\; c\leqslant y\leqslant d,\; e\leqslant z\leqslant f\} = \\ &= [a;b]\times[c;d]\times[e;f], \end{aligned}$$

і нехай $\tau_x = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$, де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, розбиття відрізка $[a; b]$ на m елементарних відрізків, $\tau_y = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$, де $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, розбиття відрізка $[c; d]$ на n елементарних відрізків, і $\tau_z = \{z_0, z_1, \ldots, z_p\}$, де $e = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = f$, розбиття відрізка $[e; f]$ на p елементарних відрізків. Провівши через точки $x_0, x_1, \ldots, x_m$ площини, паралельні yOz, через точки $y_0, y_1, \ldots, y_m$ площини, паралеьні xOz, і через $z_0, z_1, \ldots, z_p$ площини, паралельні xOy, отримаємо $m \cdot n \cdot p$ елементарних паралелепіпедів

$$\begin{aligned} \pi_{ijk} &= \{(x, y, z) \,|\, x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j,\ z_{k-1} \leqslant z \leqslant z_k\} = \\ &= [x_{i-1}; x_i] \times [y_{j-1}; y_j] \times [z_{k-1}; z_k]. \end{aligned}$$

Множину $\tau = \{\pi_{ijk} \,|\, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ k = \overline{1, p}\}$ назвемо розбиттям паралелепіпеда П на елементарні паралелепіпеди, а число

$$\lambda(\tau) = \max_{(i,j,k)} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$$

назвемо діаметром цього розбиття.

Нехай

$$\xi = \{(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \,|\, (\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in \pi_{ijk}, i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n},\ k = \overline{1, p}\}$$

є множина точок, вибраних по одній з кожного елементарного паралелепіпеда, а $f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ — значення функції f у точці (ξ_i, η_j, ζ_k). Суму

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k,$$

де $\triangle x_i = x_i - x_{i-1}$, $\triangle y_j = y_j - x_{j-1}$, $\triangle z_k = z_k - z_{k-1}$ ($\triangle x_i \triangle y_j \triangle z_k$ — об'єм елементарного паралелепіпеда π_{ijk}), називають інтегральною сумою функції f, яка відповідає розбиттю τ і набору точок ξ, і позначають $\sigma(f, \tau, \xi)$.

Означення 16.4. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f, \tau, \xi),$$

яка не залежить ні від способу розбиття паралелепіпеда Π *на елементарні паралелепіпеди, ні від вибору точок з кожного елементарного паралелепіпеда, то її називають потрійним інтегралом функції* f *на паралепіпеді* Π *і позначають*

$$\iiint\limits_{\Pi} f(x, y, z)dxdydz.$$

Зауваження. У випадку, коли G — обмежена кубовна область, потрійний інтеграл функції f по області G означається так:

$$\iiint\limits_{G} f(x, y)dxdydz := \iiint\limits_{\Pi} \widetilde{f}\ (x, y, z)dxdydz,$$

де $G \subset \Pi$,

$$\widetilde{f}\ (x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{якщо } (x, y, z) \in G, \\ \quad 0 \quad , & \text{якщо } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus G. \end{cases}$$

Щодо умов існування інтегралів функцій n $(n = 1, 2, 3)$ змінних, то, насамперед, необхідною умовою інтегровності функції є її обмеженість, а необхідною і достатною умовою інтегровності функції f на Π є її неперервність майже скрізь на Π, тобто міра Лебега точок розриву функції f на Π дорівнює нулю.

Тут буде подано класичний критерій інтегровності функції за Ріманом, який належить Дарбу, причому для функції однієї змінної. Нехай функція f визначена і обмежена на відрізку $[a; b]$, і нехай τ — будь-яке розбиття відрізка $[a; b]$ на елементарні відрізки. Суми

$$s(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k, \quad S(f, \tau) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k,$$

де $m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$ $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1};x_k]} f(x)$, називають відповідно *нижньою і верхньою сумами Дарбу*, побудованими за розбиттям τ для функції f.

Теорема 16.1. *Для того щоб визначена і обмежена на відрізку* $[a;b]$ *функція* f *була інтегровною на цьому відрізку, необхідно і достатньо, щоб*

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}(S(f,\tau) - s(f\tau)) = 0 \tag{16.1}$$

Доведення. Необхідність. Нехай визначена і обмежена на відрізку $[a;b]$ функція f інтегровна на цьому відрізку, тобто існує

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sigma(f,\tau,\xi) = I.$$

А це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{3}$, існує $\delta > 0$ таке, що для кожного розбиття τ, діаметр якого $\lambda(\tau) < \delta$, виконується нерівність

$$|\sigma(f,\tau,\xi) - I| < \frac{\varepsilon}{3}$$

або

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sigma(f,\tau,\xi) < I + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16.2}$$

Врахувавши, що для будь-якого розбиття τ відрізка $[a;b]$ на частини

$$s(f,\tau) = \inf_{\xi}\sigma(f,\tau,\xi),$$

$$S(f,\tau) = \sup_{\xi}\sigma(f,\tau,\xi),$$

з нерівності(16.2) дістанемо

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant s(f,\tau) \leqslant S(f,\tau) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Звідси $S(f,\tau)-s(f,\tau)\leqslant I+\dfrac{\varepsilon}{3}-I+\dfrac{\varepsilon}{3}<\varepsilon$. Отже, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує $\delta>0$ таке, що як тільки $\lambda(\tau)<\delta$, то має місце нерівність $S(f,\tau)-s(f,\tau)<\varepsilon$. А це й означає, що

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}(S(f,\tau)-s(f,\tau))=0.$$

Достатність. Нехай для функції f визначеної і обмеженої на відрізку $[a;b]$ має місце (16.1). З обмеженості зверху множини всіх нижніх сум Дарбу випливає існування

$$\sup_{\tau} s(f,\tau)=I_*,$$

а з обмеженості знизу множини всіх верхніх сум Дарбу випливає існування

$$\inf_{\tau} S(f,\tau)=I^*,$$

причому $I_*\leqslant I^*$. Тоді для будь-якого τ

$$s(f,\tau)\leqslant I_*\leqslant I^*\leqslant S(f,\tau) \tag{16.3}$$

або $0\leqslant I^*-I_*\leqslant S(f,\tau)-s(f,\tau)$, що у поєднанні з умовою (16.1) дає рівність $I^*-I_*=0$. Нехай $I=I_*=I^*$. Тоді з (16.3) дістаємо, що для будь-якого τ

$$s(f,\tau)\leqslant I\leqslant S(f,\tau),$$

і тому для будь-якого τ виконуються нерівності

$$0\leqslant I-s(f,\tau)\leqslant S(f,\tau)-s(f,\tau),$$

$$S(f,\tau)-I\leqslant S(f,\tau)-s(f,\tau).$$

Врахувавши умову (16.1) дістаємо, що

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}s(f,\tau)=\lim_{\lambda(\tau)\to 0}S(f,\tau)=I.$$

А оскільки для будь-якої інтегровної суми $\sigma(f,\tau,\xi)$ виконується нерівність

$$s(f,\tau) \leqslant \sigma(f,\tau,\xi) \leqslant S(f,\tau),$$

то в силу теореми „про два міліціонери“ маємо, що $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to 0} \sigma(f,\tau,\xi) = I$. А це й означає, що функція f інтегровна на відрізку $[a;b]$. ■

Тепер уже легко обгрунтувати, що кожна неперервна на відрізку $[a;b]$ функція f є інтегровною на цьому відрізку, що якщо функція f на відрізку $[a;b]$ має скінченне число точок розриву першого роду, то вона інтегровна на ньому.

Встановити факт існування інтеграла не так уже й важко, а от його обчислення задача далеко не проста (див. [11, с. 156–183]).

1. Нехай маємо інтегровну на відрізку $[a;b]$ функцію f. Зрозуміло, що можна для обчислення спробувати побудувати послідовність розбиттів, у кожному з яких взяти точки так, щоб для побудованої послідовності інтегральних сум можна було знайти границю.

Приклад 1. Знайти $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$, де $0 < a < b$.

Розв'язання. На відрізку $[a;b]$, де $a > 0$, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна, а отже, інтегровна. Нехай $\tau_n = \{a, aq, aq^2 \ldots, aq^n\}$, де $q = \sqrt{\frac{b}{a}}$, розбиття відрізка $[a;b]$ на n частин. Для послідовності (τ_n) маємо

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} aq^{n-1}(q-1) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n(q-1)}{q} = \lim_{n\to\infty} \frac{b\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)}{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}} = 0.$$

На кожному відрізку $[x_{i-1}; x_i]$ візьмемо точку
$$\xi_i = \sqrt{x_{i-1}x_i} = aq^{i-1}\sqrt{q}$$
і побудуємо послідовність $(\sigma(f, \tau_n))$, де
$$\sigma(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\triangle x_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{aq^{i-1}\sqrt{q}}\, aq^{i-1}(q-1) = \frac{q-1}{\sqrt{q}} \sum_{i=1}^{n} 1 = \frac{n(q-1)}{\sqrt{q}}.$$
Знайдемо границю цієї послідовності
$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \tau_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{b}{a}}} = \ln\frac{b}{a}.$$
Отже, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln\frac{b}{a}$.

2. Основним методом обчислення інтегралів є обчислення їх за допомогою первісної, точніше за допомогою формули Ньютона-Лейбніца. Якщо функція f неперервна на відрізку $[a, b]$ і Φ її первісна, то
$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$
Якщо ж функція f кусково-неперервна на відрізку $[a, b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, де $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, точки розривів першого роду і $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ первісні для функції f відповідно на інтервалах (a, x_1), (x_1, x_2), …, (x_{n-1}, b), то
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (\Phi_k(x_k) - \Phi_k(x_{k-1})).$$

Приклад 2. Знайти

$$\int\limits_0^4 \frac{|x-1|dx}{|x-2|+|x-3|}.$$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^4 \frac{|x-1|dx}{|x-2|+|x-3|} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x-1}{2x-5}dx - \int\limits_1^2 \frac{x-1}{2x-5}dx + \int\limits_2^3 (x-1)dx + \int\limits_3^4 \frac{x-1}{2x+5}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Bigg|_0^1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Bigg|_1^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(x-1)^2\Bigg|_2^3 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{2}\ln|2x-5|\right)\Bigg|_3^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 5 - 1 + \frac{3}{2}\ln 3 + 3 + 1 + \frac{3}{2}\ln 3\right) =$$

$$= 2 + \frac{9}{4}\ln 3 - \frac{3}{4}\ln 5.$$

3. На основі правила диференціювання добутку функцій

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = \frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx}$$

можна сформулювати правило інтегрування частинами для визначеного інтеграла (або ж на основі правила інтегрування частинами для невизначеного інтеграла). А саме, якщо на відрізку $[a;b]$ функції u і v неперервні разом з своїми похідними, то

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Очевидно, щоб застосувати це правило при обчисленні інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx,$$

треба подати спочатку функцію f у вигляді uv' так, щоб можна було знайти первісну для функції $u'v$.

4. На основі правила диференціювання композиції функцій

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi(t))) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

можна сформулювати правило заміни змінної у визначеному інтегралі. А саме, якщо функція φ визначена і неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha;\beta]$, $\varphi([\alpha;\beta]) = [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції f функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

5. При обчисленні визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

можна скористатись розкладом функції $f(x)$ у степеневий ряд і звести задачу до задачі знаходження суми числового ряду.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx$ з точністю до 10^{-4}.

Розв'язання. Функція

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & , \text{ якщо } x \in [0,\ 0,2], \\ 1 & , \text{ якщо } x = 0 \end{cases}$$

неперервна на відрізку $[0; 0,2]$, а отже, інтегровна на ньому. Проте її первісну не можна подати у скінченному вигляді через елементарні функції. Разом з тим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!},$$

причому останній ряд рівномірно збігається на відрізку $[0; 0,2]$. Тоді

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{0,2} f(x) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \int\limits_0^{0,2} t^{2n-2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot 0,2^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

Дістали ряд лейбніцевого типу. Тоді число членів ряду, яке гарантує задану точність, визначаємо з нерівності

$$\frac{0,2^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)} < 10^{-4}.$$

Для $n = 2$
$$\frac{1}{3! \cdot 3 \cdot 5^3} = \frac{1}{2250} > 10^{-4},$$
для $n = 3$
$$\frac{1}{5! \cdot 5 \cdot 5^5} = \frac{1}{24 \cdot 5^7} < 10^{-4}.$$
Отже,
$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx \approx 0,2 - \frac{0,2^3}{3! \cdot 3} \approx 0,2 - 0,0004 = 0,1996,$$
причому
$$\left| \int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x} dx - 0,1996 \right| < 10^{-4}.$$

6. Нарешті приведемо основні методи чисельного інтегрування (їх називають *квадратурними формулами*), ототожнюючи інтеграл з площею відповідної криволінійної трапеції.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і інтегровна на відрізку $[a; b]$ і нехай $h = \dfrac{b-a}{n}$, $x_k = a + kh$, $y_k = f(x_k)$, де $k = 0, 1, \ldots, n$. Тоді за формулою прямокутників
$$\int\limits_a^b f(x)dx = h \sum_{k=1}^{n} y_k + R_1,$$
де у випадку, коли функція f має неперервну першу похідну
$$R_1 = \frac{f'(\xi)}{2} \cdot \frac{(b-a)^2}{n}, \quad \xi \in [a; b];$$
за формулою трапецій
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2 \sum_{k=1}^{n} y_k) + R_2,$$

де у випадку, коли функція f має неперервну другу похідну,

$$R_2 = -\frac{f''(\xi)}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2}, \quad \xi \in [a;b];$$

за формулою Сімпсона (формулою парабол)

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b f(x)dx \ &= \frac{h}{3}(y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + R_3,\end{aligned}$$

де n — парне і у випадку, коли функція f має неперервну четверту похідну,

$$R_3 = -\frac{f^{(IV)}(\xi)}{180} \cdot \frac{(b-a)^5}{n^4}, \quad \xi \in [a;b].$$

Отже,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - h\sum_{k=1}^{n} y_k \right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n},$$

де $M_1 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f'(x)|$,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_k) \right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2},$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f''(x)|$,

$$\left| \int\limits_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} \right| \leqslant \frac{M_3(b-a)^5}{180(2n)^5},$$

де $h = \dfrac{b-a}{2n}$, $M_3 = \max\limits_{x\in[a;b]} |f^{(IV)}(x)|$.

Основним методом обчислення подвійних і потрійних інтегралів в рамках вузівської програми є зведення до повторних інтегралів.

7. Нехай функція $z = f(x, y)$ інтегровна на прямокутнику $\Pi = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$, причому для кожного $x \in [a; b]$ функція $f(x, y)$ як функція змінної y інтегровна на відрізку $[c; d]$. Тоді має місце рівність

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y) dx dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y) dx dy.$$

8. Нехай маємо область G. Будемо називати її *елементарною відносно осі Oy*, якщо

$$G = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\},$$

де $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$ функції. Аналогічно область G будемо називати *елементарною відносно осі Ox*, якщо

$$G = \{(x, y) \,|\, c \leqslant y \leqslant d, \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(x)\},$$

де $\gamma(y), \delta(y)$ — неперервні на відрізку $[c; d]$ функції.

Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна на елементарній відносно осі Oy області

$$G = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b, \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\},$$

то

$$\iint\limits_{G} f(x, y) dx dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy.$$

Аналогічно для елементарної відносно осі Ox області G

$$\iint\limits_{G} f(x, y) dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx.$$

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_G (x+1)dxdy$, де

$$G = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 8-2y\}.$$

Розв'язання. Очевидно, що область G є круг з центром у точці $M_0(0,-1)$ радіусом 3, тобто область G є елементарною як відносно осі Oy так і осі Ox. Подамо область G у вигляді

$$G = \{(x,y)\,|\,-4 \leqslant y \leqslant 2,\ -\sqrt{8-y^2-2y} \leqslant x \leqslant \sqrt{8-y^2-2y}\}.$$

Тоді

$$\iint\limits_G (x+1)dxdy = \int\limits_{-4}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{8-y^2-2y}}^{\sqrt{8-y^2-2y}} (x+1)dx =$$

$$= \int\limits_{-4}^{2} \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-\sqrt{8-y^2-2y}}^{\sqrt{8-y^2-2y}} dy =$$

$$= 2\int\limits_{-4}^{2} \sqrt{9-(y+1)^2}dy = 2\int\limits_{-3}^{3} \sqrt{9-t^2}dt = 4\int\limits_{0}^{3} \sqrt{9-t^2}dt =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\pi/2} 9\cos^2 udu = 18\int\limits_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2u)du = 9\pi,$$

де $t = 3\sin u,\ dt = 3\cos udu$.

Завдання для самоконтролю.

1. Користуючись означенням визначеного інтеграла, обчислити $\int\limits_a^b \frac{\ln x}{x}dx$, де $0 < a < b$.

2. Обчислити визначені інтеграли

$$\text{а) } \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx, \quad \text{б) } \int\limits_0^1 \arcsin^2 x dx, \quad \text{в) } \int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

3. Проаналізувати, як саме вводиться і як обчислюється визначений інтеграл у шкільному підручнику.

4. Обчислити подвійні інтеграли:

   а) $\iint\limits_G x dx dy$, де G — область, межею якої є крива
$$x^2 + y^2 = 4x - 2y + 4,$$
   б) $\iint\limits_G (x+y) dx dy$, де G — область, обмежена лініями
$$y^2 = 2x, \ x + y = 4, \ x + y = 12,$$
   в) $\iint\limits_G e^{-x^2-y^2} dx dy$, де G — область, обмежена кривою
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

5. Сформулюйте ознаку Дарбу інтегровності функції трьох змінних, визначеної і обмеженої на паралелепіпеді П. Доведіть на її основі, що неперервна на паралелепіпеді П функція $f(x, y, z)$ інтегровна на ньому.

6. Обчислити потрійні інтеграли:

а) $\iiint\limits_G xy\sqrt{z}dxdydz$, де G — область, обмежена поверхнями $z=0,\ z=y,\ y=x^2,\ y=1$,

б) $\iiint\limits_G ((x+y)^2-z)dxdydz$, де G — область, обмежена поверхнями $z=0,\ (z-1)^2=x^2+y^2$,

в) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, де G — область, обмежена поверхнею $x^2+y^2+z^2=z$.

17 *ЛЕКЦІЯ*: Криволінійні інтеграли

Поняття криволінійного інтеграла для функції дійсних змінних та функції комплексної змінної. Умови існування. Методи обчислення.

Література. [1], ч. 2, с. 169–185; [3], т. 2, с. 119–129; [4], с. 108–115, 133–137; [9], ч. 2, с. 181–200.

Поняття одномірного визначеного інтеграла для функції однієї змінної, визначеної на відрізку, можна перенести на функцію двох (трьох) змінних, визначену на плоскій (просторовій) кривій. Це означає, що в другому випадку ми будемо діяти у такий саме спосіб, яким було введено поняття інтеграла для функції однієї змінної. Такого типу інтеграли прийнято називати криволінійними інтегралами.

Нехай маємо спрямлювану (криву, яка має довжину) плоску криву Г, задану параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

причому будемо припускати, що крива немає точок самоперетину і не є замкненою, тобто точки $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ (початок кривої) і $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ (кінець кривої) — різні. Припустимо також, що на цій кривій визначена функція $f(x, y)$. Нехай

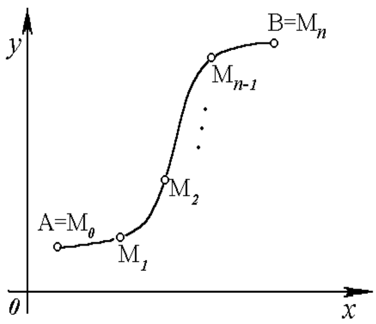


Рис. 10

$$\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\},$$

де $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ на частини. Тоді кожній точці t_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ відповідає точка $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ кривої Г. Будемо говорити, що множина точок $T = \{M_0, M_1, \ldots, M_n\}$ задає розбиття кривої L на n елементарних дуг $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$ (Рис. 10). Позначимо довжину елементарної дуги $M_{i-1}M_i$ через $\triangle l_i$ ($i = \overline{1, n}$), а число

$$\lambda(T) = \max_{i=\overline{1,n}} \triangle l_i$$

назвемо *діаметром розбиття* T *кривої* Γ. На кожній елементарній дузі $M_{i-1}M_i$ оберемо точку $N_i(\xi_i; \eta_i)$ (зрозуміло, що відрізку $[t_{i-1}; t_i]$ існує точка t_i^* така, що $\xi_i = \varphi(t_i^*)$, $\eta_i = \psi(t_i^*)$) і обчислимо значення функції f у кожній такій точці. Складемо суму

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \triangle l_i,$$

де через ξ позначена множина $\{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$.

Означення 17.1. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi),$$

яка не залежить ні від способу розбиття кривої Γ *на частини, ні від вибору точок на кожній з елементарних дуг, то її називають криволінійним інтегралом першого роду функції* f *по кривій* Γ *і позначають*

$$\int_\Gamma f(x, y) dl.$$

Зауважимо, що запис

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} \sigma(f, T, \xi) = I$$

означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати $\delta > 0$ таке, що для всіх розбиттів T, діаметр яких менший δ, виконується нерівність

$$|\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Можна довести, що коли крива Γ спрямлювана і $x = x(l)$, $y = y(l)$ $(0 \leqslant l \leqslant S)$, де параметр l — довжина дуги кривої від точки $M_0(x(0), y(0))$ до точки $M(x(l), y(l))$ і функція $f(\varphi(l), \psi(l))$ неперервна на відрізку $[0, S]$, то інтеграл $\int\limits_L f(x, y)dl$ існує. Зокрема має місце теорема.

Теорема 17.1. *Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у деякій області G, яка містить криву Γ, а крива Γ є гладкою, тобто функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha; \beta]$, то криволінійний інтеграл першого роду функції f по кривій L існує і має місце рівність*

$$\int\limits_\Gamma f(x, y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt.$$

Доведення. Оскільки за умовою крива Γ гладка, то вона спрямлювана. Якщо від параметричного подання кривої $\Gamma : x = x(l), y = y(l)$ перейти до її параметричного подання $x = x(t), y = y(t)$, то з того, що $x(0) = \varphi(\alpha)$, $y(0) = \psi(\alpha)$, $x(S) = \varphi(\beta)$, $y(S) = \psi(\beta)$ і

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt,$$

дістанемо

$$\int\limits_0^S f(x(l), y(l))dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \blacksquare$$

Зауваження. Хоча означення криволінійного інтеграла першого роду пов'язане з функцією двох змінних, визначеною на кривій Γ, однак він подається через інтеграл Рімана функції однієї змінної на відрізку. З цієї причини на криволінійні інтеграли переносяться всі властивості інтеграла Рімана.

Нехай у площині xOy задано криву $\overset{\frown}{AB}$ параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$ функції, причому початок кривої точка A має координати $(\varphi(\alpha); \psi(\alpha))$, а кінець кривої точка B має координати $(\varphi(\beta); \psi(\beta))$, і нехай на цій кривій визначені функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$.

Задамо розбиття $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, де $(\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta)$, відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини. У кожному з елементарних відрізків $[t_{k-1}; t_k]$ візьмемо точку τ_k і знайдемо значення функцій P і Q у точках $M_k(\varphi(\tau_k); \psi(\tau_k))$ кривої $\overset{\frown}{AB}$. Складемо суми

$$\sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k) \triangle x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k) \triangle y_k,$$

де $\triangle x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$, $\triangle y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$.

Означення 17.2. *Якщо існують границі*

$$\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \triangle x_k, \quad \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sum_{k=1}^{n} Q(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \triangle y_k,$$

які не залежать ні від способу розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини, ні від вибору точок на кожному з елементарних відрізків, то їх називають криволінійними інтегралами другого роду функцій P і Q вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$ відповідно по абсцисі x і по ординаті y і позначають

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx, \qquad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x, y) dy.$$

На практиці, як правило, користуються сумою таких інтегралів, яку записують так:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

і називають *криволінійним інтегралом другого роду функцій P і Q вздовж кривої* $\overset{\frown}{AB}$.

Теорема 17.2. *Якщо функції P і Q неперервні у деякій області G, яка містить криву $\overset{\frown}{AB}$, а крива $\overset{\frown}{AB}$ є гладкою, тобто функції $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha; \beta]$, то криволінійні інтеграли другого роду функцій P і Q вздовж кривої $\overset{\frown}{AB}$ відповідно по абцисі x і по ординаті y існують і має місце рівність*

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt.$$

Якщо крива $\overset{\frown}{AB}$ гладка, то у кожній своїй точці вона має дотичну, напрямні косинуси якої є функціями параметра l (довжини кривої). Тоді формули

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\cos l dl, \quad \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)\sin l dl,$$

пов'язують криволінійні інтеграли першого і другого роду.

Встановлено зв'язок між криволінійним інтегралом другого роду по замкненому контуру і подвійним інтегралом.

Означення 17.3. *Область G будемо називати елементарною як відносно Oy так і відносно осі Ox, якщо її замикання $\overline{G}$ подається у вигляді (див. Рис. 11),*

$$\overline{G} = \{(x,y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\} =$$

$$= \{(x,y) \,|\, c \leqslant y \leqslant d,\ \gamma(y) \leqslant x \leqslant \delta(y)\},$$

де $\alpha(x), \beta(x)$ *— неперервні на відрізку* $[a;b]$ *функції, а* $\gamma(y), \delta(y)$ *є неперервні функції на відрізку* $[c;d]$.

Теорема 17.3. *Якщо функції* P, Q *неперервні разом з похідними* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *на замикані елементарної відносно осей* Ox *і* Oy *області* G, *то має місце рівність*

$$\iint\limits_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy, \tag{17.1}$$

де Γ *— межа області* G, *причому обхід вдовж кривої* Γ *здійснюється у додатному напрямку.*

Доведення. Оскільки замикання $\overline{G}$ області G є область елементарна відносно осі Oy, тобто

$$\overline{G} = \{(x,y)\,|\,a \leqslant x \leqslant b,\ \alpha(x) \leqslant y \leqslant \beta(x)\},$$

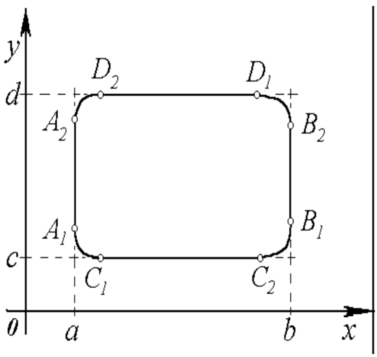


Рис. 11

де $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — неперервні на відрізку $[a;b]$ функції, то подвійний інтеграл $\iint\limits_{G} \dfrac{\partial P}{\partial y} dxdy$ існує і дорівнює повторному

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy.$$

Отже,

$$\iint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{a}^{b} P(x,y)|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dx =$$

$$= \int_a^b (P(x,\beta(x)) - P(x,\alpha(x)))dx =$$

$$= \int\limits_{A_2\frown B_2} P(x,y)dx - \int\limits_{A_1\frown B_1} P(x,y)dx.$$

Врахувавши, що

$$\int\limits_{A_2\frown B_2} P(x,y)dx = -\int\limits_{B_2\frown A_2} P(x,y)dx,$$

$$\int\limits_{B_1\frown B_2} P(x,y)dx = \int\limits_{A_2\frown A_1} P(x,y)dx = 0,$$

маємо

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\int\limits_{A_1\frown B_1} P(x,y)dx - \int\limits_{B_1\frown B_2} P(x,y)dx -$$

$$-\int\limits_{B_2\frown A_2} P(x,y)dx - \int\limits_{A_2\frown A_1} P(x,y)dx = -\int\limits_\Gamma P(x,y)dx.$$

Аналогічно, враховуючи, що область G є елементарною областю відносно осі Ox, маємо:

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{\gamma(y)}^{\delta(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d (Q(\delta(y), y) - Q(\gamma(y), y))dy =$$

$$= \int\limits_{C_2 \overset{\frown}{} D_1} Q(x, y)dy + \int\limits_{D_2 \overset{\frown}{} C_1} Q(x, y)dy + \int\limits_{C_1 \overset{\frown}{} C_2} Q(x, y)dy +$$

$$+ \int\limits_{D_1 \overset{\frown}{} D_2} Q(x, y)dy = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y)dy.$$

Якщо від останньої рівності відняти попередню, то отримаємо рівність (17.1). ■

На підставі формули (17.1) (її називають формулою Гріна) можна сформулювати один з найважливіших результатів теорії криволінійних інтегралів, а саме умову незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування. Точніше, якщо функції P, Q визначені і неперервні разом з своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ на однозв'язній області G, причому для будь-якої точки $(x, y) \in G$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то якими б не були точки A і B з G криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

по кусково-гладкій кривій $\overset{\frown}{AB} \subset G$, не залежить від кривої $\overset{\frown}{AB}$, тобто інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, а залежить тільки від точок A і B.

Перейдемо до означення поняття криволінійного інтеграла для функції комплексної змінної. Нехай у комплексній площині задано спрямлювану криву Γ рівнянням $z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, де t змінюється від α до β і точка $z(\alpha) = \varphi(\alpha) + i\psi(\alpha)$ початок, а $z(\beta) = \varphi(\beta) + i\psi(\beta)$ кінець кривої Γ.

Нехай функція $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ однозначна і неперервна у кожній точці кривої Γ. Для означеності, будемо вважати, що $\alpha < \beta$. Тоді функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ визначені і неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$. Нехай $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, де $\alpha < t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини і $\lambda(\tau)$ його діаметр. Кожній точці t_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ відповідає точка $z_k = \varphi(t_k) + i\psi(t_k)$, а множина точок z_k породжує розбиття кривої Γ на елементарні дуги. На кожному елементарному відрізку $[t_{k-1}; t_k]$ $(k = \overline{1, n})$ візьмемо точку τ_k. Тоді на кожній елементарній дузі кривої маємо точку $\zeta_k = \varphi(\tau_k) - i\psi(\tau_k)$. Знайдемо значення функції $f(z)$ у кожній точці ζ_k і складемо суму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}),$$

яку природно назвати комплексною інтегральною сумою, яка відповідає розбиттю τ і набору точок τ_k.

Означення 17.4. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}),$$

яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$ на частини, ні від вибору точок τ_k на кожному з елементарних відрізків, то її називають інтегралом функції $f(z)$ вздовж кривої Γ (у заданому напрямку по кривій) і позначають

$$\int_{\Gamma} f(z)dz.$$

Зрозуміло, що коли $\int\limits_\Gamma f(z)dz$ існує, то це є комплексне число, тому хотілось би мати його подання в алгебраїчній формі. З цією метою скористаємось алгебраїчною формою функції $f(z)$ і позначеннями

$$x_k + i\,y_k = \varphi(t_k) + i\,\psi(t_k),$$

$$x_k - x_{k-1} = \triangle x_k, \quad y_k - y_{k-1} = \triangle y_k,$$

$$\xi_k + i\,\eta_k = \varphi(\tau_k) + i\,\psi(\tau_k) = \zeta_k$$

Тоді

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k,\eta_k) + i\,Q(\xi_k,\eta_k))(x_k + iy_k - x_{k-1} - iy_{k-1}) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k,\eta_k) + i\,Q(\xi_k,\eta_k))(\triangle x_k + i\triangle y_k) = \\
&= \sum_{k=1}^{n} (P(\xi_k,\eta_k)\triangle x_k - Q(\xi_k,\eta_k)\triangle y_k) + \\
&\qquad + i\sum_{k=1}^{n} (Q(\xi_k,\eta_k)\triangle x_k + P(\xi_k,\eta_k)\triangle y_k).
\end{aligned}$$

Очевидно, що дійсна і уявна частини комплексної інтегральної суми самі є інтегральними сумами, побудованями для пари функцій $P(x,y)$, $Q(x,y)$, з допомогою яких вводились криволінійні інтеграли другого роду (по координатах).

Таким чином, якщо існує

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}),$$

то існують границі

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{k=1}^{n}(P(\xi_k,\eta_k)\triangle x_k - Q(\xi_k,\eta_k)\triangle y_k),$$
$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{k=1}^{n}(Q(\xi_k,\eta_k)\triangle x_k + P(\xi_k,\eta_k)\triangle y_k),$$

тобто криволінійні інтеграли другого роду

$$\int_\Gamma P(x,y)dx - Q(x,y)dy,\ \int_\Gamma Q(x,y)dx + P(x,y)dy,$$

а, отже,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma P(x,y)dx - Q(x,y)dy+\\ &+ i\int_\Gamma Q(x,y)dx + P(x,y)dy.\end{aligned} \tag{17.2}$$

Подання (17.2) підказує метод обчислення інтеграла функції комплексної змінної. А саме, якщо Γ — гладка крива, тобто подання

$$z(t) = \varphi(t) + i\,\psi(t)$$

має неперервну похідну $z'(t) = \varphi'(t) + i\,\psi'(t)$, яка не обертається в нуль на відрізку $[\alpha;\beta]$, а функція $f(z) = P(x,y) + i\,Q(x,y)$ — визначена і неперервна у кожній точці кривої Γ, то

$$\int_\Gamma f(z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) - Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big)dt +$$

$$+i\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big(Q(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+P(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\Big)dt. \quad (17.3)$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_{\Gamma}\overline{z}dz$, де Γ — частина кола $|z|=2$, яка лежить у півплощині $\operatorname{Im} z<0$, причому точка $z_1=-2$ є початок, а точка $z_2=2$ є кінець кривої Γ.

Розв'язання. Очевидно, що крива Γ задається рівнянням

$$z(t)=2(\cos t+i\sin t)=2e^{it},$$

де t змінюється від π до 2π, а функція $f(z)=\overline{z}=x-iy$. Тоді за формулою (17.3) маємо

$$\int\limits_{\Gamma}\overline{z}\,dz=\int\limits_{\pi}^{2\pi}(2\cos t(-2\sin t)+2\sin t2\cos t)dt+$$

$$+i\int\limits_{\pi}^{2\pi}(4\sin^2 t+4\cos^2 t)dt=4i\int\limits_{\pi}^{2\pi}dt=4\pi i.$$

До найважливіших результатів інтегрального числення функцій комплексної змінної належить, насамперед, центральна теорема теорії аналітичних функцій (інтегральна теорема Коші) та інтегральна формула Коші.

Теорема 17.4 (інтегральна теорема Коші). *Якщо функція $f(z)$ є однозначною та аналітичною в однозв'язній області G комплексної площини, то для будь-якої замкнутої спрямлюваної кривої Γ, яка лежить в області G, інтеграл функції $f(z)$ вздовж кривої Γ дорівнює нулю.*

Доведення. Оскільки за умовою функція $f(z)=P(x,y)+iQ(x,y)$ аналітична в області G, то у кожній точці замикання $\overline{D}$

області, обмеженої кривою Γ, функції P, Q, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, неперервні, і виконуються умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Будемо вважати, що замкнена область $\overline{D}$ є елементарною областю як відносно осі Oy так і відносно осі Ox. Тому за формулою Гріна для пари функцій $P(x, y)$ і $-Q(x, y)$ маємо

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} P(x, y)dx - Q(x, y)dy,$$

а для пари функцій $Q(x, y)$ і $P(x, y)$ маємо:

$$\iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\Gamma} Q(x, y)dx + P(x, y)dy.$$

Таким чином, врахувавши рівняння Коші-Рімана, маємо

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} P(x, y)dx - Q(x, y)dy + i \int\limits_{\Gamma} Q(x, y)dx + P(x, y)dy =$$

$$= \iint\limits_{\overline{D}} \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy + i \iint\limits_{\overline{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0. \blacksquare$$

інтегральна теорема Коші дозволяє виявити зв'язок між значеннями аналітичної функції всередині області і на її межі. А саме, якщо функція $f(z)$ є однозначною і аналітичною в області G і на її межі Γ, яка складається з одного або декількох спрямлюваних контурів, орієнтованих додатно відносно області $\overline{G}$ (при проходженні контура область $\overline{G}$ має залишатись зліва), то для будь-якої точки $z_0 \in G$ має місце інтегральна формула Коші:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Як обчислюється криволінійний інтеграл

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy,$$

   якщо $Pdx + Qdy$ — повний диференціал функції $u(x, y)$?

2. Довести, що площу плоскої фігури, обмежену кривою Г можна обчислювати за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} xdy - ydx.$$

   Скориставшись цією формулою, обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{\Gamma} xy^2dy - x^2ydx$, де

   Г — коло $x^2 + y^2 = r^2$,

   а) звівши його до інтеграла Рімана;

   б) скориставшись формулою Гріна.

4. Обчислити $\int\limits_{\Gamma} \frac{\overline{z}}{|z|} dz$, де Γ — півколо $|z| = 2$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}$.

5. Обчислити інтеграли від аналітичних функцій:

$$\text{а) } \int\limits_{0}^{1+i} (z^2 - 2iz) dz; \quad \text{б) } \int\limits_{0}^{1+i} z \cos 2z dz;$$

$$\text{в) } \int\limits_{0}^{\ln 2} z^2 e^z dz.$$

6. Скориставшись інтегральною формулою Коші, обчислити інтеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{ze^z}{(z^2 + 1)(z - 1)}\, dz,$$

де $\Gamma = \{z \,|\, |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$.

18 *ЛЕКЦІЯ*: Інтеграл Лебега

Міра Лебега, основні властивості. Вимірні функції, основні властивості. інтеграл Лебега, основні властивості.

Література. [1], ч. 3, с. 45–95; [5], с. 56–153; Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989; Тумаков И. М. Анри Леон Лебег. М.: Наука, 1975.

Одним із найважливіших досягнень математики XX століття (точніше рубежу XIX і XX ст.) було узагальнення поняття інтеграла Рімана, запропоноване видатним французьким математиком Анрі Лебегом.

У його докторській дисертації, опублікованій у 1902 році (яку по праву вважають відкриттям нової ери у математиці), була розвинена теорія міри лінійних і плоских множин і на її основі побудована нова теорія інтеграла. Якраз ця теорія стала фундаментом і головним теоретичним інструментом для сучасної теорії диференціальних рівнянь як звичайних так і з частинними похідними, математичної і теоретичної фізики, теорії узагальнених функцій, теорії лінійних операторів і спектральної теорії, збіжності і сумовності розкладів функцій в ряди ортогональних функцій, теорії ймовірностей і випадкових процесів та інших розділів сучасної математики.

Для введення поняття інтеграла Лебега необхідні поняття міри множини і вимірної функції. Міра лінійної множини (підмножини множини дійсних чисел) як узагальнення поняття довжини відрізка означається поетапно. Спочатку означається міра інтервала

$$m(a;b) := b - a.$$

Далі, виходячи з того, що кожну обмежену відкриту множину G можна подати у вигляді об'єднання скінченного числа або зчисленної множини попарно неперекривних інтервалів

$$G = \bigcup_{k=1}^{n} (\alpha_k; \beta_k) \quad \text{або} \quad G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\alpha_k; \beta_k),$$

де $(\alpha_i; \beta_i) \cap (\alpha_j; \beta_j) = \varnothing$, якщо $i \neq j$, її міра означається так:

$$mG := \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \alpha_k) \quad \text{або} \quad mG := \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k).$$

Якщо тепер E будь-яка обмежена лінійна множина, то *зовнішньою мірою* цієї множини називають точну нижню грань мір відкритих множин, кожна з яких включає E, тобто

$$m^*E := \inf_{G \supset E} mG,$$

а її *внутрішньою мірою* називають число

$$m_*E := b - a - m^* C_{(a;b)} E,$$

де $G \subset (a; b)$, $C_{(a;b)} E = (a; b) \setminus E$.

Означення 18.1. *Обмежена лінійна множина E називається вимірною (вимірною за Лебегом), якщо*

$$m_*E = m^*E,$$

а спільне значення внутрішньої і зовнішньої мір називається мірою Лебега множини E і позначають $mE = m_*E = m^*E$.

Вимірними за Лебегом виявляються відрізки, причому міра відрізка дорівнює його довжині, інтервали та напівінтервали, причому $m(a; b) = m(a; b] = m[a; b) = b - a$, скінченні і обмежені зчисленні множини, і їх міра дорівнює нулю, знаменита множина Кантора, і її міра дорівнює нулю. Вимірною є всяка обмежена відкрита множина, і її міра дорівнює сумі довжин усіх інтервалів, з яких складається ця множина, а також будь-яка обмежена замкнена множина F, і її міра

$$mF = b - a - mC_{[a;b]}F,$$

де $a = \inf F$, $b = \sup F$. Взагалі, якщо множина E вимірна і $E \subset [a;b]$, то множина $C_{[a;b]}E$ — вимірна і

$$mC_{[a;b]}E = b - a - mE.$$

Більше того, об'єднання (якщо воно обмежене) і перетин скінченного або зчисленного числа вимірних множин є вимірні множини. Так що привести приклад невимірної множини далеко не просто (див. [5, с. 78–79]).

Зауважимо, що для будь-якої вимірної множини E $mE \geqslant 0$, і для будь-яких вимірних множин E_1 і E_2 $(E_1 \cap E_2 = \varnothing)$

$$m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2,$$

тобто для міри Лебега має місце властивість адитивності (характеристична властивість довжини і її узагальнення міри Жордана). Однак, міра Лебега володіє також властивістю зчисленної адитивності (σ-адитивності), тобто якщо у послідовності (E_n) вимірних множин $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ і $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ обмежена, то

$$mE = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n.$$

Для міри Жордана остання властивість, взагалі кажучи, місця немає. Наприклад, множина всіх раціональних точок відрізка $[0;1]$ невимірна за Жорданом, хоча ця множина є об'єднанням зчисленного числа одноточкових множин, міра кожної з них дорівнює нулеві, тоді як міра Лебега цієї множини дорівнює нулеві.

Нехай функція f визначена на вимірній множині E. Далі будемо користуватись такими позначеннями:

$$E(f < c) := \{x \,|\, x \in E,\ f(x) < c\},$$

$$E(f \leqslant c) := \{x \,|\, x \in E,\ f(x) \leqslant c\},$$

$$E(f > c) := \{x \,|\, x \in E,\ f(x) > c\},$$

$$E(f \geqslant c) := \{x \,|\, x \in E,\ f(x) \geqslant c\},$$

$$E(f = c) := \{x \,|\, x \in E,\ f(x) = c\}.$$

Означення 18.2. *Функція f, визначена на вимірній множині E, називається вимірною на цій множині, якщо для кожного $c \in \mathbb{R}$ множина $E(f < c)$ вимірна.*

Зауважимо, що перші чотири множини у приведеному вище списку множин є рівноправними у тому розумінні, що в означенні вимірної функції множину $E(f < c)$ можна замінити на одну із трьох множин $E(f \leqslant c)$, $E(f > c)$, $E(f \geqslant c)$.

Поняття міри дає можливість ввести поняття функцій, які хоча і не є рівними, однак у певних випадках вони можуть замінювати одна одну.

Означення 18.3. *Функції f і g, визначені на вимірній множині E, називають еквівалентними на цій множині, якщо $m\{x \,|\, x \in E,\ f(x) \neq g(x)\} = 0$.*

Наприклад, функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число,} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число} \end{cases}$$

еквівалентна на відрізку $[a, b]$ функції $g(x) \equiv 0$ на цьому відрізку.

Властивість вимірності функції є властивістю класів еквівалентних функцій, тобто якщо функція f вимірна на множині E, то і будь-яка еквівалентна їй функція теж буде вимірною.

Серед найважливіших властивостей вимірних функцій назвемо такі:

1°. Якщо функція f вимірна на множині E, то вона вимірна на будь-якій вимірній підмножині множини E.

2°. Якщо функція f вимірна на множинах $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, то вона вимірна на перетині цих множин, і коли $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ обмежена, то і на їх об'єднанні.

3°. Будь-яка функція, визначена на множині міри нуль, є вимірною.

4°. Якщо функції f і g вимірні на множині E, то функції

$$(f+g)(x),\ (f-g)(x),\ (fg)(x) \text{ і } \left(\frac{f}{g}\right)(x)$$

(за умови, що $\forall x \in E\ g(x) \neq 0$) вимірні на E.

5°. Якщо послідовність $(f_n(x))$ вимірних на множині функцій збігається до функції $f(x)$, то гранична функція f вимірна на E.

Таким чином, не тільки арифметичні операції над вимірними функціями не виводять за межі класу вимірних функцій, але й основна операція аналізу граничний перехід теж не виводить за межі цього класу.

6°. Будь-яка неперервна на відрізку $[a;b]$ функція є вимірною на цьому відрізку.

і на завершення фундаментальний результат М. М. Лузіна про зв'язок між класом неперервних і класом вимірних функцій.

7° (теорема Лузіна або C-властивість вимірних функцій). Для того щоб функція f була вимірною на відрізку $[a;b]$, необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувала неперервна на відрізку $[a, b]$ функція g така, що

$$m\{x \mid x \in [a, b],\ f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon.$$

Можна сказати, що теорема Лузіна стверджує, що будь-яка вимірна на відрізку функція може бути трансформованою у неперервну шляхом зміни її значень на множині як завгодно малої міри, тобто у цьому розумінні вимірні функції близькі до неперервних.

інтеграл Лебега можна ввести по-різному. Тут пропонується підхід, запропонований самим Лебегом. Нехай на вимірній множині E визначена обмежена і вимірна функція f. Обмеженість функції f гарантує існування такої пари чисел A і B (звичайно не єдиної), що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $A < f(x) < B$.

Нехай $T = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$, де $A = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = B$, розбиття відрізка $[A, B]$ на частини і

$$\lambda(T) = \max_{k=\overline{1,n}}(y_k - y_{k-1}) = \max_{k=\overline{1,n}} \triangle y_k$$

є діаметр цього розбиття. Нехай $E_k = \{x \mid y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}$ $(k = \overline{1,n})$ множина тих точок з множини E, для яких значення функції f належить напівінтервалу $[y_{k-1}, y_k)$ (множина E_k формується не за принципом близькості точок на осі Ox, а за принципом близькості значень функції). Вимірність функції f на множині гарантує вимірність множин $E_k = \{x \mid f(x) < y_k\} \setminus \{x \mid f(x) < y_{k-1}\}$. На кожному відрізку $[y_{k-1}, y_k]$ візьмемо точку $\overline{y}_k$ і складемо суму

$$\sigma(f, T, Y) = \sum_{k=1}^{n} \overline{y}_k m E_k,$$

де $Y = \{\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n\}$, і назвемо її *інтегральною сумою Лебега*, побудованою для функції f при розбитті T відрізка $[A, B]$ на частини і множині Y точок, вибраних з кожного елементарного відрізка $[y_{k-1}, y_k]$.

Означення 18.4. *Якщо існує*

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, Y),$$

яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[A, B]$ *на частини, ні від вибору точки на кожному з елементарних відрізків, то її називають інтегралом Лебега функції* f *по множині* E *і позначають*

$$(L)\int\limits_E f(x)dm(x),$$

а про функцію f *кажуть, що вона інтегровна за Лебегом на множині* E.

Приклад 1. Довести, що функція Діріхле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне число,} \\ 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне число} \end{cases}$$

інтегровна за Лебегом на відрізку $[0; 1]$, і що

$$(L)\int\limits_{[0;1]} D(x)dm(x) = 0.$$

Розв'язання. Очевидно, що відрізок $[0; 1]$ є вимірна множина, а функція $D(x)$ вимірна на ньому. Справді, для $c \leqslant 0$

$$\{x \,|\, x \in [0, 1],\ D(x) < c\} = \varnothing,$$

для $c \in (0; 1]$

$$\{x \,|\, x \in [0; 1], D(x) < c\} = \{x \,|\, x \in [0; 1], x \text{ є ірраціональним } \},$$

для $c > 1$

$$\{x \,|\, x \in [0; 1],\ D(x) < c\} = [0; 1],$$

тобто для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ множина $\{x \mid D(x) < c\}$ є вимірною. Нехай $A = -1,\ B = 2$. Тоді для будь-якого розбиття $T = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ $E_{k_1} = \{x \mid x \in [0;1], x$ — ірраціональне число$\}$, $E_{k_2} = \{x \mid x \in [0;1], x$ — раціональне число$\}$, де k_1 — номер того елементарного відрізка, для якого $0 \in [y_{k_1-1}, y_{k_1}]$, k_2 — номер того елементарного відрізка, для якого $1 \in [y_{k_2-1}, y_{k_2}]$, для всіх останніх k $E_k = \varnothing$. Отже,

$$\sigma(f, T, Y) = \overline{y}_{k_1} mE_{k_1} = \overline{y}_{k_1},$$

де $\overline{y}_{k_1} \in [y_{k_1-1}, y_{k_1}]$, а

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(f, T, Y) = 0.$$

А це й означає, що $\quad (L) \displaystyle\int\limits_{[0,1]} D(x)dm(x) = 0.$

Теорема 18.1. *Якщо визначена на вимірній множині E функція f обмежена і вимірна, то вона інтегровна на цій множині.*

Доведення. Для кожного розбиття T можна побудувати дві суми

$$s(f, T) = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} mE_k,\ \ S(f, T) = \sum_{k=1}^{n} y_k mE_k.$$

Суми першого типу називають *нижніми інтегральними сумами Лебега*, а суми другого типу — *верхніми інтегральними сумами Лебега* (аналог сум Дарбу). Очевидно, що множина нижніх сум Лебега обмежена зверху, а множина верхніх сум Лебега обмежена знизу. Отож існують

$$I_* = \sup_T s(f, T), \quad I^* = \inf_T S(f, T).$$

Якщо врахувати, що

$$S(f,T)-s(f,T)=\sum_{k=1}^{n} y_k mE_k-\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} mE_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \triangle y_k mE_k \leqslant \lambda(T)\sum_{k=1}^{n} mE_k=\lambda(T)mE,$$

то $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}(S(f,T)-s(f,T))=0$ і $I_*=I^*=I$. А оскільки для будь-якого розбиття T і будь-якого вибору точок з кожного елементарного відрізка

$$s(f,T)\leqslant \sigma(f,T,Y)\leqslant S(f,T),$$

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} s(f,T)=\lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,T)=I,$$

то $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sigma(f,T,Y)=I$. А це й означає, що функція f інтегровна за Лебегом на множині E. ■

Зауваження. Не важко обгрунтувати коректність означення інтеграла Лебега, тобто незалежність границі інтегральних сум від вибору відрізка $[A,B]$, всередині якого містяться всі значення обмеженої вимірної функції (див. [1, с. 82]).

Теорема 18.2. *Якщо визначена на вимірній множині E функція f обмежена і вимірна, то має місце нерівність*

$$a\,mE\leqslant (L)\int\limits_E f(x)dm(x)\leqslant b\,mE, \tag{18.1}$$

де $a=\inf\limits_{x\in E} f(x)$, $b=\sup\limits_{x\in E} f(x)$.

Доведення. Насамперед, з умови теореми відразу випливає інтегровність функції f. Якщо m — натуральне число, то $a-\frac{1}{m}<$

a і $b < b + \frac{1}{m}$ і для всіх x з E $a - \frac{1}{m} < f(x) < b + \frac{1}{m}$. Нехай T довільне розбиття відрізка $[a - \frac{1}{m}, b + \frac{1}{m}]$ на частини. Тоді для $k = \overline{1, n}$

$$a - \frac{1}{m} < y_k < b + \frac{1}{m},$$

а також

$$\left(a - \frac{1}{m}\right) \sum_{k=1}^{n} mE_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k \, mE_k \leqslant \left(b + \frac{1}{m}\right) \sum_{k=1}^{n} mE_k$$

або

$$\left(a - \frac{1}{m}\right) mE \leqslant S(f, T) \leqslant \left(b + \frac{1}{m}\right) mE.$$

Якщо тепер перейти до границі спочатку при $\lambda(T) \to 0$, а потім при $m \to \infty$, то отримаємо нерівність (18.1). ■

Теорема 18.3 (лінійність інтеграла Лебега). *Якщо функції f і g інтегровні за Лебегом на множині E, а α і β є довільні дійсні числа, то функція $\alpha f + \beta g$ інтегровна на E, причому*

$$(L) \int_E (\alpha f(x) + \beta g(x)) dm(x) =$$

$$= (L)\, \alpha \int_E f(x) dm(x) + (L)\, \beta \int_E g(x) dm(x). \tag{18.2}$$

Теорема 18.4 (адитивність інтеграла Лебега). *Якщо функція f інтегровна за Лебегом на множині E, то вона інтегровна на множинах $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, де $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ — вимірні підмножини множини E такі, що $E^{(1)} \cap E^{(2)} = \varnothing$, $E^{(1)} \cup E^{(2)} = E$, причому*

$$(L) \int_E f(x) dm(x) = (L) \int_{E^{(1)}} f(x) dm(x) + (L) \int_{E^{(2)}} f(x) dm(x). \tag{18.3}$$

Доведення. Нехай $E^{(1)}$ — вимірна підмножина вимірної множини E. Тоді для будь-якого $c \in \mathbb{R}$ множина

$$\{x \,|\, x \in E^{(1)},\ f(x) < c\} = E^{(1)} \cap \{x \,|\, x \in E,\ f(x) < c\}$$

є вимірною як перетин двох вимірних множин. Таким чином, звуження $f^{(1)}$ функції f на вимірну підмножину $E^{(1)}$ є вимірною функцією на $E^{(1)}$. Точно так саме звуження $f^{(2)}$ функції f на вимірну підмножину $E^{(2)}$ є вимірною функцією на $E^{(2)}$. З обмеженості і вимірності функції f на вимірних множинах $E^{(1)}$ і $E^{(2)}$ випливає існування інтегралів

$$(L)\int\limits_{E^{(1)}} f(x)dm(x), \quad (L)\int\limits_{E^{(2)}} f(x)dm(x).$$

Залишається показати, що має місце рівність (18.3). Нехай для всіх $x \in E$ $A < f(x) < B$, і нехай T — розбиття відрізка $[A, B]$ на частини. Тоді для кожного елементарного відрізка $[y_{k-1}, y_k]$ множина

$$E_k = \{x \,|\, x \in E,\ y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}$$

подається як об'єднання двох вимірних множин

$$E_k^{(1)} = \{x \,|\, x \in E^{(1)},\ y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\},$$
$$E_k^{(2)} = \{x \,|\, x \in E^{(2)},\ y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\},$$

причому ці множини не мають спільних точок. Звідси випливає, що

$$mE_k = mE_k^{(1)} + mE_k^{(2)},$$

а також

$$S(f,T) = \sum_{k=1}^{n} y_k\, mE_k = \sum_{k=1}^{n} y_k\,(mE_k^{(1)} + mE_k^{(2)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_k\, mE_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} y_k\, mE_k^{(2)} = S(f^{(1)}, T) + S(f^{(2)}, T).$$

Якщо в останній рівності перейти до границі при $\lambda(T) \to 0$, то дістанемо рівність (18.3). ■

Теорема 18.5 (зчисленна адитивність). *Якщо функція f інтегровна за Лебегом на множині E, а $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^{(n)}$, де $E^{(i)} \cap E^{(j)} = \varnothing$, якщо $i \neq j$, то*

$$(L)\int\limits_{E} f(x)dm(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int\limits_{E^{(n)}} f(x)dm(x). \qquad (18.4)$$

Доведення. Скориставшись методом математичної індукції, не важко показати, що коли $E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E^{(k)}$, де $E^{(k)}$ $(k = \overline{1,n})$ — вимірні підмножини вимірної множини E і $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то для вимірної і обмеженої на E_n функції f маємо

$$(L)\int\limits_{E_n} f(x)dm(x) = \sum_{k=1}^{n}(L)\int\limits_{E^{(k)}} f(x)dm(x).$$

Оскільки функція f обмежена, то існує $M > 0$ таке, що для всіх $x \in E$ $|f(x)| \leqslant M$. Нехай $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^(n)$, де $E^(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — вимірні підмножини вимірної множини E і $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Тоді в силу зчисленної адитивності міри Лебега

$$mE = \sum_{n=1}^{\infty} mE^{(n)},$$

і для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{M}$, можна вказати n_0 таке, що для всіх $n > n_0$

$$mE - \sum_{k=1}^{n_0} mE^{(k)} = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} mE^{(k)} < \frac{\varepsilon}{M}.$$

А оскільки для кожного n

$$(L)\int\limits_E f(x)dm(x) = \sum_{k=1}^{n}(L)\int\limits_{E^{(k)}} f(x)dm(x) + (L)\int\limits_{\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E^{(k)}} f(x)dm(x),$$

то для $n > n_0$

$$|(L)\int\limits_E f(x)dm(x) - \sum_{k=1}^{n}(L)\int\limits_{E^{(k)}} f(x)dm(x)| =$$

$$= |(L)\int\limits_{\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E^{(k)}} f(x)dm(x)| \leqslant (L)\int\limits_{\bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E^{(k)}} |f(x)|dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant M(L)\int\limits_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E^{(k)}} dm(x) = M\, m\bigcup_{k=n}^{\infty} E^{(k)} =$$

$$= M \bigcup_{k=n+1}^{\infty} mE^{(k)} < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Отже, ми показали, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$|\sum_{k=1}^{n}(L)\int\limits_{E^{(k)}} f(x)dm(x) - (L)\int\limits_E f(x)dm(x)| < \varepsilon.$$

А це й означає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(L)\int\limits_{E^{(n)}} f(x)dm(x)$$

збігається, і його сума дорівнює

$$(L) \int_E f(x) dm(x).$$

Теорема доведена. ■

Теорема 18.6. *Якщо функція f інтегровна на відрізку $[a, b]$ за Ріманом, то вона інтегровна на цьому відрізку і за Лебегом, причому*

$$\int_a^b f(x) dx = (L) \int_{[a,b]} f(x) dm(x). \tag{18.5}$$

Доведення. Якщо функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$, то вона обмежена (необхідна умова збіжності) і вимірна на цьому відрізку. А, отже, вона інтегровна за Лебегом на відрізку $[a, b]$. Залишається довести, що має місце рівність (18.5). Нехай $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, розбиття відрізка $[a, b]$ на частини. На кожному проміжку $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2), \ldots$, $[x_{n-2}, x_{n-1})$, $[x_{n-1}, x_n)$ функція f обмежена і вимірна, а, отже, існують інтеграли Лебега

$$(L) \int_{[x_0,x_1)} f(x) dm(x), \quad (L) \int_{[x_1,x_2)} f(x) dm(x), \ldots,$$

$$(L) \int_{[x_{n-2},x_{n-1})} f(x) dm(x), \quad (L) \int_{[x_{n-1},x_n)} f(x) dm(x).$$

Нехай

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Тоді за теоремою 18.2 мають місце нерівності

$$m_1 m[x_0, x_1) \leqslant (L) \int\limits_{[x_0,x_1)} f(x)dm(x) \leqslant M_1 m[x_0, x_1),$$

$$m_2 m[x_1, x_2) \leqslant (L) \int\limits_{[x_1,x_2)} f(x)dm(x) \leqslant M_2 m[x_1, x_2),$$

. . . .

$$m_{n-1} m[x_{n-2}, x_{n-1}) \leqslant (L) \int\limits_{[x_{n-2},x_{n-1})} f(x)dm(x) \leqslant$$

$$\leqslant M_{n-1} m[x_{n-2}, x_{n-1}),$$

$$m_n m[x_{n-1}, x_n] \leqslant (L) \int\limits_{[x_{n-1},x_n]} f(x)dm(x) \leqslant M_n m[x_{n-1}, x_n].$$

Якщо врахувати, що $m[x_0, x_1) = x_1 - x_0 = \triangle x_1$, $m[x_1, x_2) = x_2 - x_1 = \triangle x_2$, $\dots$, $m[x_{n-2}, x_{n-1}) = x_{n-1} - x_{n-2} = \triangle x_{n-1}$, $m[x_{n-1}, x_n] = x_n - x_{n-1} = \triangle x_n$, і скласти ці нерівності, то будемо мати нерівність

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} (L) \int\limits_{[x_{k-1},x_k)} f(x)dm(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

або

$$s(f, \tau) \leqslant (L) \int\limits_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant S(f, \tau),$$

де $s(f,\tau)$, $S(f,\tau)$ відповідно нижня і верхня суми Дарбу, побудовані для функції f при розбитті τ. А оскільки

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s(f,\tau) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S(f,\tau) = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

то при $\lambda(\tau) \to 0$ маємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant (L) \int\limits_{[a,b]} f(x)dm(x) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx.$$

А отже, має місце рівність (18.5). ■

Зауваження. Якщо врахувати, що обмежена на відрізку $[a,b]$ функція f інтегровна на ньому тоді і тільки тоді, коли вона неперервна майже скрізь, тобто міра Лебега множини її точок розриву дорівнює нулю, то при обчислені інтеграла Рімана можна перейти до інтеграла Лебега, який вдається обчислити, скориставшись зчисленною адитивністю. Якщо ж врахувати, що інтеграли Лебега від еквівалентних функцій рівні між собою, то при обчисленні інтеграла Лебега розривної функції можна спробувати перейти до неперервної функції еквівалентної даній і обчислити інтеграл Рімана неперервної функції.

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^1 f(x)dx$, де

$$f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & \text{якщо } \ x \in P_0, \\ \dfrac{1}{2^n}, & \text{якщо } x \text{ належить інтервалу } n\text{-го рангу}, \end{cases}$$

P_0 — множина Кантора.

Розв'язання. Оскільки множина точок розриву функції f є підмножиною множини P_0, а $mP_0 = 0$, то інтеграл Рімана існує. А отже,

$$\int_0^1 f(x)dx = (L)\int_{[0,1]} f(x)dm(x) = (L)\int_{P_0} f(x)dm(x) +$$

$$+(L)\int_{[0,1]\setminus P_0} f(x)dm(x) = (L)\int_{[0,1]\setminus P_0} f(x)dm(x) =$$

$$= \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{2}dx + 2\int_{1/9}^{2/9} \frac{1}{2^2}dx + 2^2\int_{1/27}^{2/27} \frac{1}{2^3}dx + \cdots +$$

$$+2^{n-1}\int_{1/3^n}^{2/3^n} \frac{1}{2^n}dx + \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots\right) = \frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити $(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)dm(x)$, де

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{якщо} \quad x \in [0, \frac{1}{2}) \cap C_{[0,1]}P_0, \\ \cos \pi x, & \text{якщо} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1] \cap C_{[0,1]}P_0, \\ e^{x^2}, & \text{якщо} \quad x \in P_0, \end{cases}$$

де P_0 — канторова множина.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ еквівалентна функції

$$g(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{якщо} \quad x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \cos \pi x, & \text{якщо} \quad x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

яка кусково неперервна, а, отже, інтегровна за Ріманом, то

$$(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)dm(x)=\int\limits_0^1 g(x)dx=$$

$$=\int\limits_0^{1/2}\sin\pi x dx+\int\limits_{1/2}^{1}\cos\pi x dx=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^{1/2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi x\Big|_{-1/2}^{1}=0.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Означити множину Кантора P_0 і знайти її міру Лебега.

2. Нехай $0<a<1$. Побудуємо множину D з допомогою такої процедури. За першим кроком з сегмента $[0,1]$ вилучимо серединний інтервал (інтервал з центром у середині відрізка $[0,1]$) довжини $\dfrac{a}{2}$. На другому кроці з кожного відрізка, що залишились, вилучимо серединний інтервал довжини $\dfrac{a}{2^3}$. На n-му кроці з кожного з 2^{n-1} відрізків, що залишились, вилучимо серединний інтервал довжини $\dfrac{a}{2^{2n-1}}$. Множина точок відрізка $[0,1]$, які залишаться після зчисленного числа кроків, і є множина D. Знайти її міру.

3. Довести, що множина E $(E\subset[A,B])$ і функція

$$\varphi_E(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x\in E,\\ 0, & \text{якщо } x\in[A,B]\setminus E\end{cases}$$

(характеристична функція множини E) одночасно або вимірні, або ні.

4. Приведіть приклад функції, яка інтегровна за Лебегом, але не інтегровна за Ріманом.

5. Обчислити інтеграл Лебега функції $f(x)$ на відрізку $[0, 1]$, якщо $f(x) = 10$ у точках канторової множини P_0, а на суміжних інтервалах графіком функції є верхні півкола, які опираються на ці інтервали, як на діаметри.

6. Довести, що коли

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \in P_0, \\ n, & \text{якщо } x \text{ належить інтервалу } n\text{-го рангу}, \end{cases}$$

то

$$(L) \int\limits_{[0,1]} f(x) dm(x) = 3\,.$$

19 *ЛЕКЦІЯ*: Застосування інтегрального числення до розв'язування задач геометрії

Обчислення площ плоских фігур. Обчислення довжини дуги кривої. Обчислення об'ємів тіл. Обчислення площ поверхонь тіл.

Література. [1], ч. 1, с. 248–264, ч. 2, с. 160–166; [2], ч. 1, с. 379–389, ч. 2, с. 135–136, 188–194; [3], т. 1, с. 413–438, т. 2, с. 159–161; [10], с. 189–214.

Важливим класом задач, при розв'язуванні яких істотно використовується інтеграл Рімана, є задачі, пов'язані з обчисленням певних величин (площі фігури, довжини кривої, роботи, яку виконує певна сила тощо). У таких задачах метод обчислення органічно пов'язаний з означенням такої величини.

Так при обчисленні площ плоских фігур виходять з того, що відомо характеристичні властивості площ і площі найпростіших геометричних фігур, і на підставі цього будують процедуру обчислення площі заданої фігури (наприклад, криволінійної трапеції). Результатом цієї процедури (завершується вона, як правило, граничним переходом) є деяке число, яке й приймають за площу фігури, тобто ніби хід думки спрямовуємо у зворотньому напрямку, перетворюючи метод обчислення площі в її означення, не перевіряючи, як правило того, що таке означення площі задовольняє її характеристичні властивості, але використовують це у разі потреби.

Зауваження. Оскільки інтеграл Рімана є адитивною функцією на класі множин, вимірних за Жорданом, то при поданні певної адитивної величини через інтеграл не складають інтегральних сум, а знаходять так званий диференціальний елемент (диференціал) цієї величини, який інтегрують на заданій множині (у такому розумінні інтеграл можна вважати неперервним аналогом суми, а метод обчислення — аналогом методу неподільних Кавальєрі).

1. Обчислення площ плоских фігур.

Множину точок площини, аналітичне подання якої має вигляд

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

де $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, називають *криволінійною трапецією.*

Будемо вважати, що така фігура має площу, якщо існує спільна границя площ многокутників, вписаних у цю фігуру, і площ многокутників, описаних навколо неї, причому многокутники будемо будувати у такий спосіб (Рис. 12).

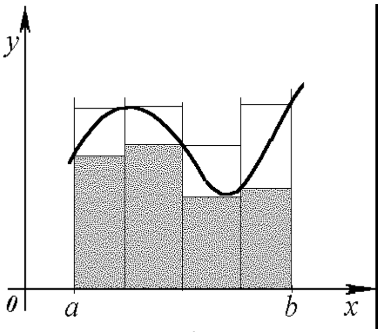


Рис. 12

Задамо розбиття

$$\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, відрізка $[a, b]$ на частини, і на кожному елементарному відрізку побудуємо два прямокутники з основою $[x_{k-1}; x_k]$ і висотами відповідно

$$m_k = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x), \quad M_k = \min_{x \in [x_{k-1}; x_k]} f(x)$$

(останні існують, оскільки функція f неперервна на відрізку $[a; b]$). Тоді площа многокутника, складеного з прямокутників

$$d_k = \{(x, y) \,|\, x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,\ 0 \leqslant y \leqslant m_k\},$$

дорівнює $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$, а площа многокутника, складеного з прямокутників

$$D_k = \{(x, y) \,|\, x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k,\ 0 \leqslant y \leqslant M_k\},$$

дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$.

Якщо існують

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k, \quad \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k,$$

де $\lambda(\tau)$ — діаметр розбиття τ, і рівні між собою, то їх спільне значення називають *площею криволінійної трапеції* D (саму фігуру D називають *квадровною фігурою*) і позначають $S(D)$.

Проблема існування площі у даному випадку негайно знімається, якщо врахувати, що суми

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k, \quad \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k$$

є відповідно нижньою і верхнею сумами Дарбу, побудованими для функції f за розбиттям τ, і що кожна неперервна на відрізку функція є інтегровною на ньому. Таким чином,

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

а, отже, площа криволінійної трапеції D обчислюється за формулою

$$S(D) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{19.1}$$

На підставі властивості адитивності площі за площу фігури

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\},$$

де $f(x)$, $g(x)$ — неперервні на відрізку $[a, b]$ функції, слід прийняти число

$$S(D) = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \tag{19.2}$$

Якщо фігура D має аналітичне подання виду

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\},$$

то за площу цієї фігури приймають число

$$S(D) = \int_a^b |f(x)|dx. \tag{19.3}$$

Приклад 1. Обчислити площу спільної частини двох фігур, обмежених лініями $x^2 + y^2 = 25$, $(x - 8)^2 + y^2 = 25$.

Розв'язання. Очевидно, що даними рівняннями задаються два кола з центрами відповідно у точках $O(0, 0)$, $C(8, 0)$ і радіусом $r = 5$. Перетинаються ці кола у точках $A(4, 3)$ і $B(4, -3)$ (Рис. 13).

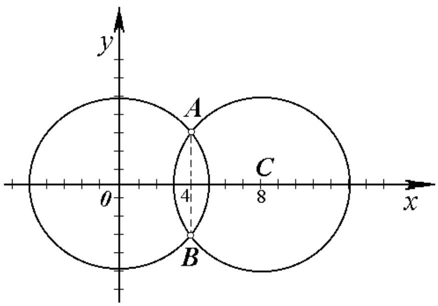


Рис. 13

Тоді

$$S = 4 \int_4^5 \sqrt{25 - x^2}dx.$$

Нехай $x = 5\sin t$. Тоді $dx = 5\cos t dt$, нові межі

$$\alpha = \arcsin\frac{4}{5},\ \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Отже,

$$
\begin{aligned}
S &= 4\int\limits_{\arcsin 4/5}^{\pi/2} 25\cos^2 t dt = 50\int\limits_{\arcsin 4/5}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = \\
&= 50\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\arcsin 4/5}^{\pi/2} = \\
&= 50\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{4}{5} - \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos(\arcsin\frac{4}{5})\right) = \\
&= 50(\arcsin 1 - \arcsin\frac{4}{5}) - 50\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = 50\arcsin\frac{3}{5} - 24 \approx \\
&\approx 50\cdot 0,6435 - 24 = 8,175.
\end{aligned}
$$

Нехай межа плоскої фігури D є кусково-гладкою замкненою кривою, заданою параметрично рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, де φ,ψ — неперервно диференційовні функції на відрізку $[\alpha,\beta]$, за винятком, можливо, скінченного числа точок. Вважаємо, що точка $M(\varphi,\psi)$ при зміні t у межах від α до β пробігає межу фігури D, залишаючи її зліва від напрямку руху. Тоді площа фігури D може бути обчисленою за однією з формул

$$
\begin{aligned}
S &= -\int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt, \\
S &= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\psi'(t)dt, \qquad (19.4)
\end{aligned}
$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t))dt.$$

Нехай криву, яка має у полярних координатах рівняння $\rho = \rho(\varphi)$, де функція ρ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$. Ця крива і два полярні радіуси, проведені під кутами α і β, є межами фігури, яку назвемо *сектором* кривої $\rho = \rho(\varphi)$. Диференціальним елементом є площа кругового сектора з радіусом $\rho(\varphi)$ і центральним кутом величини $d\varphi$, тобто число $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$. Тоді за площу даного сектора приймають число

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi. \tag{19.5}$$

2. Обчислення довжини кривої.

Нехай плоска крива Γ задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, де φ, ψ — неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$. Якщо розглядати параметр t як час, то рівняння $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, визначають закон руху точки M з координатами x і y на площині, а крива Γ є траекторією рухомої точки. Отже, довжину кривої можна розглядати як шлях пройдений рухомою точкою.

Вважатимемо, що крива гладка, тобто функції $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ на відрізку $[\alpha; \beta]$ мають неперервні похідні, які з фізичної точки зору задають вектор швидкості $\vec{v}(t) = (\varphi'(t), \psi'(t))$ у кожний момент t з часового проміжку $[\alpha, \beta]$.

Якщо позначити через $s(t_1, t_2)$ шлях пройдений точкою за проміжок часу $[t_1; t_2]$, то зрозуміло, що для будь-яких трьох моментів часу t_1, t_2, t_3 $(\alpha \leqslant t_1 < t_2 < t_3 \leqslant \beta)$

$$s(t_1, t_3) = s(t_1, t_2) + s(t_2, t_3)$$

і, крім того,

$$\min_{t\in[t_1,t_2]} |\vec{v}(t)|(t_2-t_1) \leqslant s(t_1,t_2) \leqslant \max_{t\in[t_1,t_2]} |\vec{v}(t)|(t_2-t_1),$$

де $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$. Тоді

$$s(t_1,t_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt,$$

і якщо $l(\alpha,\beta)$ — довжина кривої Γ, то

$$l(\alpha,\beta) = s(\alpha,\beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \qquad (19.6)$$

Якщо крива Γ є графіком неперервно диференційовної на відрізку $[a,b]$ функції $y = f(x)$, то формула (19.6) має вигляд

$$L = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \qquad (19.7)$$

і, нарешті, якщо крива задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi. \qquad (19.8)$$

Приклад 2. Довести, що кардіоїда $\rho = a(1-\cos\varphi)$ і одна арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ мають однакову довжину

Розв'язання. Скориставшись формулою (19.8), маємо

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \\
&= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \\
&= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi = a\int\limits_0^{2\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
&= -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8a.
\end{aligned}$$

Скориставшись формулою (19.6), маємо

$$L_2 = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\, dt = 8a.$$

3. Обчислення об'ємів тіл.

Нехай D — квадровна замкнена плоска фігура. Множину точок простору, аналітичне подання якої має вигляд

$$\Pi = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$$

називають *циліндром* з основою D і висотою h. Будемо вважати, що таке тіло має об'єм, якщо існує спільна границя об'ємів прямих призм, вписаних у це тіло, і об'ємів прямих призм, описаних навколо нього, причому як вписані так і описані призми мають основи, що знаходяться у площинах основ циліндра. Легко переконатись, що об'єм циліндра дорівнює $V(\Pi) = S(D) \cdot h$.

Множину точок простору, аналітичне подання якої має вигляд

$$\Pi = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\},$$

де $f(x,y)$ — неперервна на D функція, називають *циліндричним тілом*. Будемо вважати, що таке тіло має об'єм, якщо існує спільна границя об'ємів тіл, що складаються з прямих цилідрів з основами, що знаходяться в основі циліндричного тіла, і вписані у це тіло, і об'ємів тіл, що складаються з таких же циліндрів, але таких, що над їх верхніми основами немає жодної точки тіла. Точніше, вписані і описані тіла будемо будувати так. Системою гладких кривих розіб'ємо область D на квадровні замкнені частини, які не мають попарно спільних внутрішніх точок, тобто задамо розбиття $T = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$, де для будь-яких $i \neq j$ точка, що належить $\Delta_i \cap \Delta_j$ не є одночасно внутрішньою як для Δ_i так і для Δ_j, а $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = D$. На кожній елементарній області Δ_k (Рис. 14) побудуємо два циліндра з основою Δ_k і висотами

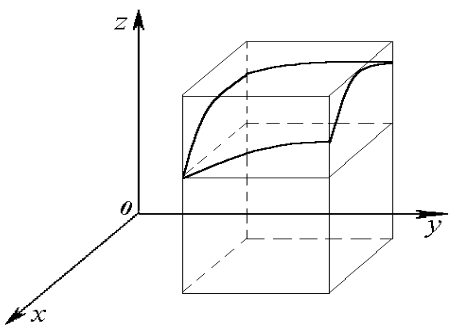


Рис. 14

відповідно

$$m_k = \min_{(x,y)\in\Delta_k} f(x,y),$$

$$M_k = \max_{(x,y)\in\Delta_k} f(x,y),$$

(останні існують, бо функція f неперервна на замкненій області Δ_k). Тоді об'єм тіла, складеного з циліндрів

$$\pi_k = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in \Delta_k,\ 0 \leqslant z \leqslant m_k\},$$

дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k S(\Delta_k)$, а об'єм тіла, складеного з циліндрів

$$\Pi_k = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \Delta_k,\ 0 \leqslant z \leqslant M_k\},$$

дорівнює $\sum\limits_{k=1}^{n} M_k S(\Delta_k)$. Якщо існують

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k S(\Delta_k), \quad \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k S(\Delta_k),$$

де $\lambda(\tau)$ — діаметр розбиття T, і рівні між собою, то їх спільне значення називають *об'ємом циліндричного тіла* Π (саме тіло Π називають кубовним тілом) і позначають $V(\Pi)$.

Проблема існування об'єму знову таки знімається, якщо врахувати, що суми

$$\sum_{k=1}^{n} m_k S(\Delta_k), \quad \sum_{k=1}^{n} M_k S(\Delta_k)$$

є відповідно нижньою і верхньою сумами Дарбу, побудованими для функції f за розбиттям T, і що кожна неперервна на квадровній замкненій обмеженій області функція є інтегровною на ній. Таким чином,

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} s(f, T) = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} S(f, T) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy,$$

а, отже, об'єм цилідричного тіла Π обчислюється за формулою

$$V(\Pi) = \iint\limits_D f(x, y)dxdy. \tag{19.9}$$

Приклад 3. Знайти об'єм тіла Π, обмеженого поверхнями $z = 0,\ z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ y = 1.$

Розв'язання. Очевидно, що задане тіло буде циліндричним тілом (Рис. 15) з аналітичним поданням

$$\Pi = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}.$$

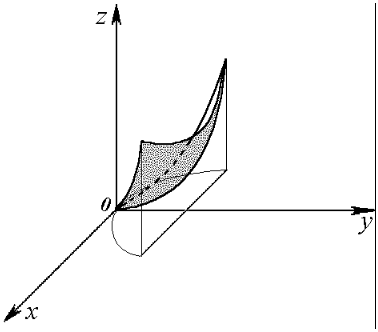


Рис. 15

Тоді шуканий об'єм

$$V(\Pi) =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^{1} dx = \int_{-1}^{1} \left(x^2(1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 - x^6) \right) dx =$$

$$= 2 \int_{0}^{1} \left(x^2 - x^4 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^6 \right) dx = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{21} \right) = \frac{88}{105}.$$

Зауваження. Об'єм V кубовного тіла T у просторі $\mathbb{R}^3_{x,y,z}$ виражається формулою

$$V = \iiint_T dxdydz. \qquad (19.10)$$

Можна виділити клас тіл, обчислення об'ємів яких зводиться до обчислення інтеграла функції однієї змінної. Це так звані тіла обертання і тіла, у яких поперечний переріз є функцією однієї змінної. Нехай криволінійна трапеція, яка має аналітичне подання $\{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, де f — неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, обертається навколо осі Ox (Рис. 16).

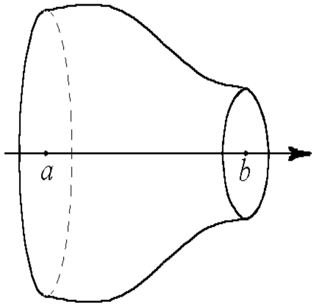


Рис. 16

Будемо виходити з того, що об'єм існує, і якщо позначити через $V(\alpha, \beta)$ об'єм тіла, яке утворюється від обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції з аналітичним поданням

$$\{(x, y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\},$$

то для будь-яких α, β, γ $(a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b)$

$$V(\alpha, \gamma) = V(\alpha, \beta) + V(\beta, \gamma),$$

тобто $V(\alpha, \beta)$ є адитивною функцією. Очевидно також, що для цієї функції і для функції $\pi f^2(x)$ виконується нерівність

$$\pi \min_{x \in [\alpha, \beta]} f^2(x)(\beta - \alpha) \leqslant V(\alpha, \beta) \leqslant \pi \max_{x \in [\alpha, \beta]} f^2(x)(\beta - \alpha)$$

(зліва — об'єм циліндра з радіусом основи $\min\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|$ і висотою $\beta - \alpha$, справа — об'єм циліндра з радіусом основи $\max\limits_{x \in [\alpha, \beta]} |f(x)|$ і тією ж висотою). Отже об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x) dx. \tag{19.11}$$

Приклад 4. Обчислити об'єм тора (тіла, яке утворюється від обертання круга радіуса a навколо осі, що лежить у його площині на відстані b ($a \leqslant b$) від центра).

Розв'язання. Нехай систему координат вибрано так, що центр круга C має координати $(0, b)$ (Рис. 17). Очевидно, що

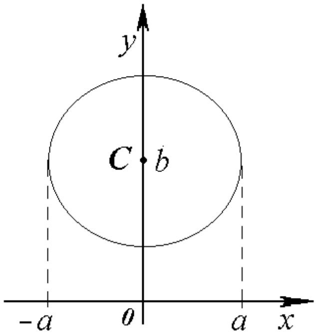


Рис. 17

коли круг обернути навколо осі Ox, то дістанемо тіло, яке за формою схоже на бублик або автомобільну шину. Крім того, неважко збагнути, що об'єм тіла дорівнює різниці об'ємів двох тіл: перше, утворене від обертання криволінійної трапеції з аналітичним поданням

$$\{(x, y) \mid -a \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b + \sqrt{a^2 - x^2}\},$$

а друге, утворене від обертання криволінійної трапеції з аналітичним поданням

$$\{(x, y) \mid -a \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b - \sqrt{a^2 - x^2}\}.$$

Тоді

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int\limits_{-a}^{a} \left(b + \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx -$$

$$-\pi \int\limits_{-a}^{a} \left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = 4\pi b \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b.$$

Нехай тіло T заключене між площинами $x = a$ і $x = b$. і нехай площу поперечного перерізу тіла T площиною $x = t$ можна подати як значення функції $S(t)$, визначеної і неперервної на відрізку $[a, b]$. Тоді об'єм цього тіла обчислюється за формулою

$$V = \int\limits_a^b S(t)dt. \tag{19.12}$$

Приклад 5. Знайти об'єм трьохосного еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

Розв'язання. Очевидно, що $-a \leqslant x \leqslant a$ і поперечним перерізом цього тіла площиною $x = t$ для $t \in (-a, a)$ є еліпс

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{t^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{t^2}{a^2}\right)} = 1$$

з півосями $b\sqrt{1 - t^2/a^2}$, $c\sqrt{1 - t^2/a^2}$. Його площа дорівнює

$$S(t) = \pi bc\left(1 - \frac{t^2}{a^2}\right).$$

При $t = -a$ і $t = a$ маємо точки, і природно, що $S(-a) = S(a) = 0$. Скориставшись формулою (19.12) маємо

$$V = \int\limits_{-a}^{a} S(t)dt = \pi\frac{bc}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}(a^2 - t^2)dt =$$

$$= \pi\frac{bc}{a^2}\left(a^2t - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

4. Обчислення площ поверхонь.

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервно диференційовна у кожній точці квадровної області D. Множину точок $\sigma = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$ називають *поверхнею* і говорять, що поверхня σ задана явно неперервно диференційовною на області D функцією $z = f(x, y)$. Необхідно обчислити площу цієї поверхні (точніше, означити, що таке площа поверхні, і через означення отримати відповідну формулу).

Для розв'язання цієї задачі область D системою гладких кривих розіб'ємо на квадровні частини, які не мають спільних внутрішніх точок, тобто задамо розбиття $T = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n\}$, де для будь-яких $i \neq j$ точка, що належить $\Delta_i \cap \Delta_j$ не є одночасно внутрішньою як для Δ_i так і для Δ_j, а $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = D$. На кожній елементарній області Δ_k оберемо точку (ξ_k, η_k). Тоді точка $M_k(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k))$ є точкою на поверхні σ і цій точці відповідає дотична площина t_k, рівняння якої має вигляд:

$$z - f(\xi_k, \eta_k) = f'_x(\xi_k, \eta_k)(x - \xi_k) + f'_y(\xi_k, \eta_k)(y - \eta_k).$$

Циліндрична поверхня, напрямною якої є межа області Δ_k, а твірна паралельна осі Oz, виріже з дотичної площини частину Δ'_k. Якщо позначити через γ_k кут між площиною xOy і дотичною площиною t_k, то

$$S(\Delta'_k) = \frac{S(\Delta_k)}{\cos\gamma_k}.$$

Оскільки вектор $\vec{k} = (0, 0, 1)$ є вектором нормалі до площини xOy, а вектор

$$\vec{n}_k = (-f'_x(\xi_k, \eta_k), -f'_y(\xi_k, \eta_k), 1)$$

є вектором нормалі до площини t_k, то

$$\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (f'_y(\xi_k, \eta_k))^2}}$$

і $$S(\Delta'_k) = \sqrt{1 + (f'_x(\xi_k, \eta_k))^2 + (f'_y(\xi_k, \eta_k))^2} S(\Delta_k).$$

Якщо існує

$$\lim_{\lambda(T)} \sum_{k=1}^{n} S(\Delta'_k),$$

де $\lambda(T)$ — діаметр розбиття T, яка не залежить ні від способу розбиття області D на квадровні частини, ні від вибору точки на кожній з них, то її називають *площею поверхні* σ і позначають $S(\sigma)$.

Легко зрозуміти, що побудована сума є інтегральною сумою для функції

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2},$$

яка в силу неперервної диференційовності функції f є неперервною, а, отже, інтегровною на області D, і тому

$$S(\sigma) = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dxdy. \qquad (19.13)$$

Можна виділити клас поверхонь, обчислення площ яких зводиться до обчислення інтегралів функції однієї змінної. Нехай маємо невід'ємну, неперервно диференційовну на відрізку $[a, b]$ функцію f. Поверхню, яка утворюється від обертання графіка цієї функції навколо осі Ox, називають *поверхнею обертання*. Якщо $\tau = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, де $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, довільне розбиття відрізка $[a, b]$ на частини, $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$, $\triangle y_k = y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1})$, то площа поверхні, утвореної від обертання ламаної з вершинами (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, навколо осі Ox, дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(y_{k-1} + y_k) \sqrt{\triangle x_k^2 + \triangle y_k^2}.$$

Тоді за площу поверхні, утвореної при обертанні графіка функції $y = f(x)$ навколо осі Ox, приймають границю таких сум.

Неважко переконатись, що площа такої поверхні обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{19.14}$$

Якщо ж у півплощині $y \geqslant 0$ крива задана параметрично рівняннями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

де функції φ і ψ неперервно диференційовні, то площа поверхні, утвореної при обертанні цієї кривої навколо осі Ox, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}dt. \tag{19.15}$$

і нарешті, якщо крива задана в полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2 \leqslant \pi$, де функція ρ неперервно диференційовна на відрізку $[\varphi_1, \varphi_2]$, то площа поверхні, утвореної при обертанні цієї кривої навколо полярного променя, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho(\varphi)\sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi. \tag{19.16}$$

Завдання для самоконтролю.

1. Обчислити за допомогою інтеграла площу круга, кругового сектора і кругового сегмента.

2. Обчислити за допомогою інтеграла довжину кола, довжину дуги параболи $y = x^2$ з початком у точці $(-1, 1)$ і кінцем у точці $(1, 1)$.

3. Обчислити за допомогою інтеграла об'єм піраміди, конуса і зрізаного конуса, кулі, кульового сегмента і кульового сектора.

4. Обчислити площу поверхні конуса, зрізаного конуса, кулі.

5. Довести, що для ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}$ мають місце властивості:

   а) довжина дуги від її вершини до точки на ній дорівнює проекції ординати цієї точки на дотичну, проведену через цю саму точку;

   б) площа криволінійної трапеції, обмеженої її дугою, пропорційна довжині цієї дуги;

   в) добуток довжин дуг від вершини до точок, у яких дотичні взаємно перпендикулярні, є сталим.

6. Довести, що коли функція $y = f(x)$ визначена і неперервно диференційовна на на відрізку $[a, b]$, а пряма $Ax + By + C = 0$ така, що довільна пряма, яка проходить через будь-яку точку проекції графіка функції на задану пряму, має з ним одну спільну точку, то площа поверхні, утвореної при обертанні графіка функції f навколо цієї примої, обчислюється за формулою

$$S = 2\pi \int\limits_a^b \frac{|Ax + Bf(x) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

20 ***ЛЕКЦІЯ*: Застосування інтегрального числення до розв'язування задач фізики**

Шлях і швидкість. Маса тіла. Тиск. Робота сили. Статичні моменти і центр ваги. Момент інерції.

Література. [1], ч. 1, с. 267–272, ч. 2, с. 166–173; [2], ч. 1, с. 389–395; [3], т. 1, с. 438–442, т. 2, с. 161–162; [10], с. 214–222.

Застосування інтегрального числення до розв'язування задач фізики грунтується на тому, що в результаті ідеалізації і формалізації зв'язок між певними фізичними величинами виражається простими математичними законами (наприклад, лінійна залежність), які мають місце за ідеальних умов. Задача полягає у тому, що необхідно визначити одну фізичну величину через іншу за умови, що одна з них подається як функція точки (точки відрізка прямої або відрізка кривої, точки плоскої фігури або просторового тіла), а характерною властивістю другої є її адитивність. При розв'язанні задачі той геометричний об'єкт, з яким пов'язана зміна першої фізичної величини, розбивається на частини і, припустивши, що на кожній такій частині ця величина не змінюється, визначають значення другої фізичної величини на кожній з цих частин. Просумувавши одержані значення, означають другу фізичну величину як границю такого типу сум. Остання (за умови, що вона існує) якраз і є інтегралом Рімана функції точки на геометричному об'єкті, де ця функція визначена.

1. Шлях і швидкість.

Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно. °ї місце знаходження на прямій, швидкість і прискорення описуються трьома функціями $s(t), v(t), a(t)$, причому перехід від першої до другої і далі до третьої здійснюється з допомогою операції диференціювання $(s'(t) = v(t), v'(t) = a(t))$.

Будемо тепер вважати, що матеріальна точка рухається прямолінійно в одному напрямку з швидкістю $v(t)$. Нам необхідно підрахувати, який шлях вона пройде від моменту часу $t = a$ до моменту часу $t = b$.

Якби протягом цього часу швидкість не змінювалась ($v(t) = v_0$ для всіх $t \in [a; b]$), то шуканий шлях дорівнював би $v_0(b - a)$ (зв'язок між шляхом і швидкістю при рівномірному прямолінійному русі). Якщо швидкість $v(t)$ не є сталою, то будемо діяти за схемою, поданою вище. Відрізок часу $[a; b]$ розіб'ємо на n рівних частин (що, взагалі кажучи, необов'язково), тобто задамо розбиття $\tau_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, де $t_0 = a$, $t_1 = a + \triangle t$, $t_2 = a + 2\triangle t$, $\ldots$, $t_n = b$ і $\triangle t = \dfrac{b-a}{n}$, і припустимо, що на кожному відрізку $[t_{k-1}; t_k]$ швидкість є сталою. Точніше для кожного $k = \overline{1, n}$ $v(t) \equiv v(c_k)$ для всіх $t \in [t_{k-1}; t_k]$, де $c_k \in [t_{k-1}; t_k]$.

Скориставшись основним співвідношенням

$$\textit{відстань} = \textit{швидкість} \times \textit{час},$$

маємо, що за такої умови матеріальна точка за час $t_k - t_{k-1}$ пройде відстань $\triangle s_k = v(c_k)\triangle t$. Сумуючи по всіх k наближені значення $\triangle s_k$, отримуємо наближене значення шляху, пройденого нею за час $b - a$

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\triangle t. \qquad (20.1)$$

За шлях, пройдений матеріальною точкою від моменту часу $t = a$ до моменту часу $t = b$, приймають

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\triangle t.$$

Якщо швидкість $v(t)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, то з того, що права частина апроксімаційної формули (20.1) є інтегральна сума для цієї функції, отримуємо

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(c_k)\triangle t = \int\limits_a^b v(t)dt. \tag{20.2}$$

Зауваження. У тому випадку, коли напрямок руху може змінюватись на протилежний, шлях, пройдений матеріальною точкою, буде обрахована за формулою

$$s = \int\limits_a^b |v(t)|dt. \tag{20.3}$$

У випадку, коли рух непрямолінійний і швидкість подається у вигляді

$$\vec{v}(t) = v_1(t)\vec{i} + v_2(t)\vec{j} + v_3(t)\vec{k},$$

то шлях, пройдений матеріальною точкою, обчислюється також за формулою (20.3).

2. Маса тіла.

Нехай маємо тіло з відомою густиною ρ. Тоді його маса обраховується за формулою $m = \rho V$, де V — об'єм цього тіла.

В залежності від того, яким буде аналітичне подання тіла T, будемо мати формули для обчислення його маси:

$$m = \rho \iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy,$$

якщо $T = \{(x,y,z)\,|\,(x,y) \in \overline{D}, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$, або

$$m = \rho \iiint\limits_{T} dxdydz,$$

якщо $\partial T = \{(x,y,z)\,|\,F(x,y,z)=0\}$, де $F(x,y,z)=0$ — рівняння поверхні тіла T.

Якщо ж густина цього тіла є функцією точки, тобто описується функцією $\rho(x,y,z)$, яка визначена у кожній точці тіла T, то, розбивши тіло T на кубовні частини $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, де $\bigcup\limits_{k=1}^{n} T_k = T$, і для будь-яких $i \neq j$ $T-i$ і T_j не мають спільних внутрішніх точок, і обравши у кожній частині T_k точку (a_k, b_k, c_k), дістаємо наближене значення маси тіла T

$$m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(a_k, b_k, c_k) \triangle V_k, \tag{20.4}$$

де $\triangle V_k$ — об'єм частини тіла T_k. За масу тіла T приймають

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(a_k, b_k, c_k) \triangle V_k.$$

Якщо густина $\rho(x,y,z)$ є неперервною у кожній точці тіла T функцією, то з того, що права частина апроксімаційної формули (20.4) є інтегральна сума для цієї функції, отримаємо

$$m = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)\,dxdydz. \tag{20.5}$$

У випадку, коли маємо плоску пластинку, яка подається аналітично як область $\overline{D}$, що має площу, а її поверхнева густина є неперервною функцією $\rho(x,y)$ визначеною на області $\overline{D}$, то маса такої пластинки обраховується за формулою

$$m = \iint\limits_{\overline{D}} \rho(x,y)\,dxdy.$$

і, нарешті, для стержня з лінійною густиною $\rho(x)$ маємо

$$m = \int_a^b \rho(x)dx.$$

Приклад 1. Нехай куля радіуса R має густину, яка пропорційна відстані від центра кулі

$$\rho(M) = \rho_0 + kd(O, M),$$

де ρ_0 і k — константи, M — точка кулі, $d(O, M)$ — відстань від центра кулі до точки M. Знайти масу цієї кулі.

Розв'язання. Якщо вважати, що початок прямокутньої декартової системи координат знаходиться у центрі кулі, то густина є функцією точки, яка записується у вигляді

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 + k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Скориставшись формулою (20.5), маємо:

$$m = \iiint\limits_K \left(\rho_0 + k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) dxdydz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^R (\rho_0 + k\rho)\rho^2 d\rho =$$

$$= 4\pi \left(\frac{\rho_0 R^3}{3} + \frac{kR^4}{4}\right) = \frac{\pi R^3(4\rho_0 + 3kR)}{3}.$$

(При обчисленні потрійного інтеграла було здіснено перехід до сферичних координат.)

3. Тиск.

Тиск рідини (чи газу), який діє на певний об'єкт, означається як сила, що діє на одиницю площі об'єкту. Якщо рідина міститься у відкритій посудині, то тиск p на глибині h нижче поверхні рідини дорівнює добутку густини рідини на h, тобто $p = \rho h$, де ρ — густина рідини. Таким чином тиск, наприклад, на глибині 1 м однаковий як в океані так і у бочці, заповненій океанською водою. Згідно закону Паскаля у будь-якій точці посудини з рідиною тиск однаковий в усіх напрямках. Тоді сила тиску на пластинку, занурену у рідину, буде однаковою незалежно від того, як пластинка розташована (горизонтально, вертикально чи під кутом), причому напрямок цієї сили завжди перпендикулярний до поверхні. Звідси маємо основне співвідношення

$$F = \rho h S, \tag{20.6}$$

що визначає силу тиску на пластинку з площею S, занурену у рідину з густиною ρ на глибину h.

Якщо ж у рідині знаходиться пластинка великих розмірів (вертикально чи під кутом), то різні частини її знаходяться на різній глибині і співвідношенням (20.6) безпосередньо скористатись уже не можна. У цьому випадку пластинку поділяємо на частини, для кожної частини визначаємо наближене значення сили тиску за формулою (20.6) і, скориставшись адитивністю, знаходимо наближене значення сили тиску, що діє на всю пластинку. Скориставшись граничним переходом, отримаємо інтеграл, що означає силу тиску на пластинку.

Приклад 2. Нехай пластинка (Рис. 18) занурена вертикально у воду так, що верхня її основа знаходиться на глибині $h = a$, а нижня — на глибині $h = b$. Знайти силу тиску на пластинку, якщо її ширина може бути поданою як функція висоти.

Розв'язання. Нехай Oh вертикальна вісь напрямлена вниз і $w(t)$ — ширина пластинки на глибині h. Розділимо відрізок

$[a;b]$ на n рівних частин і через точки поділу $h_k = a + k\triangle h$, де $\triangle h = \dfrac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, проведемо прямі, паралельні поверхні води, і будемо вважати, що пластинка поділена на n горизонтальних полосок, кожну з яких апроксімуємо прямокутником R_k з основою, наприклад, $w(h_{k-1})$ і висотою $\triangle h$.

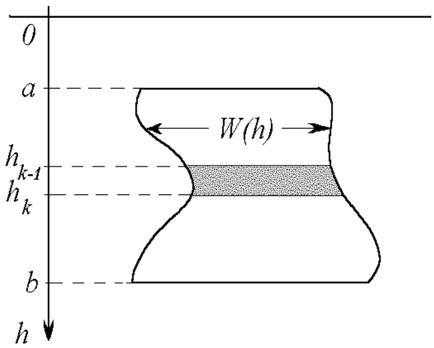


Рис. 18

Якщо вважати, що прямокутник R_k знаходиться на глибині h_{k-1}, причому горизонтально до поверхні води, то сила тиску, що діє на нього, дорівнює

$$\triangle F_k = \rho h_{k-1} w(h_{k-1}) \triangle h.$$

Просумувавши сили $\triangle F_k$, отримаємо наближене значення сили тиску F, що діє на пластинку

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} \rho h_{k-1} w(h_{k-1}) \triangle h.$$

Якщо функція $w(t)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \rho h_{k-1} w(h_{k-1}) \triangle h,$$

яку і приймаємо за величину сили тиску води на пластинку. Звідси дістаємо

$$F = \int_a^b \rho h w(h) dh. \qquad (20.7)$$

4. Робота сили.

Енергетичні витрати, пов'язані з переміщенням тіла під дією сили $\vec{F}$, називають *роботою сили* $\vec{F}$ при заданому переміщенні $\vec{s}$, і у випадку, коли на тіло діє стала сила під кутом α до напрямку переміщення, то вона обчислюється за формулою

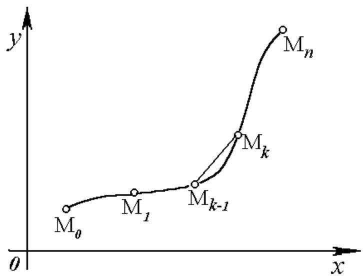
$$A = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha = \vec{F}\cdot\vec{s}. \tag{20.8}$$

Якщо ж сила $\vec{F}$ є змінною і під дією цієї сили тіло переміщається вздовж кривої L, то робота сили уже не може бути обрахованою за формулою (20.8). Однак вона може бути використаною, якщо скористатись методом, який використовується в інтегральному численні. Розглянемо випадок, коли сила $\vec{F}$ діє вздовж гладкої кривої L, заданої параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції, причому $\vec{F}$ є векторнозначною функцією

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

визначеною і неперервною у кожній точці кривої L.

Криву L розіб'ємо на n елементарних дуг, що можна виконати у такий спосіб. Задамо розбиття $\tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, де $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, відрізка $[\alpha, \beta]$ на частини. Тоді точки $M_0(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, $M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1))$, ... , $M_n(\varphi(t_n), \psi(t_n))$ є точки кривої, які розбивають криву L на частини $\overset{\frown}{M_0M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, ... , $\overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$. Точки $M_0, M_1, \dots, M_n$ сполучимо послідовно (Рис. 19) відрізками прямої і будемо вважати, що для $k = 1, 2, \dots, n$ при



переході від точки M_{k-1} до точки M_k переміщення здійснюється у напрямку вектора $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ під дією сили $\vec{F}(x'_k, y'_k)$, де $x'_k = \varphi(t'_k)$, $y'_k = \psi(t'_k)$ і $t'_k \in [t_{k-1}; t_k]$. За таких умов робота сили $\vec{F}(x'_k, y'_k)$ при переміщенні у напрямку $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ від точки M_{k-1} до

Рис. 19
точки M_k дорівнює

$$\triangle A_k = \vec{F}(x'_k, y'_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = P(x'_k, y'_k)\triangle x_k + Q(x'_k, y'_k)\triangle y_k,$$

де $\triangle x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$, $\triangle y_k = \psi(t_k) - \psi(t_{k-1})$. А повна робота виконана при переміщенні вздовж ламаної $M_0M_1 \ldots M_n$ силою, яка стала на кожному відрізку ламаної, в силу адитивності дорівнює

$$\sum_{k=1}^{n} \triangle A_k = \sum_{k=1}^{n} (P(x'_k, y'_k)\triangle x_k + Q(x'_k, y'_k)\triangle y_k).$$

За роботу сили $\vec{F}(x, y)$ при переміщенні вздовж кривої L приймають число

$$A = \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \triangle A_k.$$

А оскільки $P(x, y)$, $Q(x, y)$ неперервні на спрямлюваній кривій L, то ця границя є криволінійний інтеграл другого роду функцій $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ вздовж кривої L, тобто

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{20.9}$$

Якщо врахувати, що крива L гладка, то формулу (20.9) можна переписати у вигляді

$$A = \int_\alpha^\beta (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t))dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta (\vec{F}(\varphi(t), \psi(t))s'(t))dt. \tag{20.10}$$

Зауваження. Формула (20.10) має місце і у випадку, коли крива просторова.

Приклад 3. Тіло маси m піднімається над поверхнею Землі по траєкторії, що подається векторнозначною функцією $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ скалярного аргумента t (t — час), визначеною і неперервною разом з своєю похідною на відрізку $[\alpha, \beta]$. Знайти роботу, яка виконується при подоланні сили тяжіння Землі.

Розв'язання. Врахувавши, що згідно закону всесвітнього тяжіння

$$\vec{F}(x, y, z) = G\,\frac{mM}{|\vec{r}|^3}\,\vec{r},$$

де G — гравітаційна стала, M — маса Землі, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ — вектор з початком у центрі Землі і кінцем у точці з координатами (x, y, z), і скориставшись формулою (20.10), маємо:

$$A = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\vec{F} \cdot \vec{r}\,')dt = GmM \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}\,'}{|\vec{r}|^3} dt =$$

$$= GmM \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t)}{\left(\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\right)^3} dt =$$

$$= \frac{1}{2} GmM \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{((x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2)'}{\left(\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}\right)^3} dt =$$

$$= -\frac{GmM}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}}\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = -\frac{GmM}{|\vec{r}(t)|}\Bigg|_{\alpha}^{\beta}.$$

Отже, шукана робота дорівнює

$$A = GmM\left(\frac{1}{|\vec{r}(\alpha)|} - \frac{1}{|\vec{r}(\beta)|}\right)$$

або

$$A = mgR^2\left(\frac{1}{|\vec{r}(\alpha)|} - \frac{1}{|\vec{r}(\beta)|}\right),$$

де R — радіус Землі, $g = \dfrac{GM}{R^2}$ — прискорення вільного падіння.

Якщо вважати, що у початковий момент часу тіло було на поверхні Землі, то робота виконана тілом при подоланні сили тяжіння Землі за час t буде дорівнювати

$$A(t) = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{|\vec{r}(t)|}\right).$$

і для того щоб вийти з поля тяжіння Землі треба виконати роботу

$$A_b = \lim_{|\vec{r}(t)|\to+\infty} A(t) = mgR.$$

5. Статичні моменти і центр ваги.

Ще один клас задач, при розв'язуванні яких істотно використовується інтеграл Рімана, пов'язаний з обчисленням статичних моментів кривих, плоских фігур і просторових тіл.

Якщо матеріальна точка маси m має координати (x, y), то числа my і mx називають її *статичними моментами* відповідно відносно осей Ox і Oy. Якщо ж маємо скінченне число матеріальних точок маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$ відповідно з координатами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, то статичним моментом такої системи точок відносно осі Ox називають число

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k, \tag{20.11}$$

а статичним моментом цієї системи точок відносно осі Oy — число

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k. \tag{20.12}$$

Центром ваги цієї системи точок називають таку точку, що коли у ній помістити матеріальну точку маси $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$, то її статичні моменти відносно осей Ox і Oy будуть збігатись з відповідними статичними моментами системи точок, тобто центром ваги даної системи точок є точка з координатами

$$x_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k x_k,\ y_0 = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k y_k. \tag{20.13}$$

Нехай маємо спрямлювану матеріальну криву L, задану параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\varphi(t), \psi(t)$ — неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ функції, причому крива має сталу лінійну густину. Нехай $\tau = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$, де $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$, розбиття відрізка $[\alpha, \beta]$ на частини. Тоді кожній точці $t_k \in [\alpha, \beta]$ відповідає точка $M_k(\varphi(t_k), \psi(t_k))$ кривої L, і розбиття τ задає розбиття кривої L на частини $\overset{\frown}{M_0M_1}$, $\overset{\frown}{M_1M_2}$, $\ldots$, $\overset{\frown}{M_{n-1}M_n}$. Якщо точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ сполучити послідовно відрізками прямої, на кожній елементарній дузі $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ взяти точку $M_k'(\varphi(t_k'), \psi(t_k'))$, де $t_k' \in [t_{k-1}; t_k]$ і вважати, що у таких точках зосереджені маси

$$\rho\sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2},$$

то статичні моменти такої системи матеріальних точок будуть дорівнювати

$$\sum_{k=1}^{n} \rho\sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2}\, \psi(t_k')$$

відносно осі Ox,

$$\sum_{k=1}^{n} \rho\sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2+(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2}\,\varphi(t_k')$$

відносно осі Oy.

За статичні моменти матеріальної кривої L відносно осей Ox і Oy приймаємо відповідно

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \rho\sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2+(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2}\,\psi(t_k'),$$

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \rho\sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2+(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2}\,\varphi(t_k').$$

Якщо крива L гладка, то для статичних моментів маємо формули:

$$M_x = \rho\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt, \tag{20.14}$$

$$M_y = \rho\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt, \tag{20.15}$$

а її центр ваги має координати

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt, \\ y_0 &= \frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt, \end{aligned} \tag{20.16}$$

де $l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$. Якщо крива L задана явно $y = f(x)$, де $f(x)$ — неперервно диференційовна на відрізку $[a;b]$

функція, то формули (20.14)–(20.16) записуються у вигляді

$$M_x = \rho \int\limits_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$M_y = \rho \int\limits_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$x_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$y_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

де $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$

Якщо у формулі

$$y_0 = \frac{1}{l}\int\limits_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

де $\forall x \in [a;b]\ f(x) \geqslant 0$, обидві частини домножити на $2\pi l$, то дістанемо рівність

$$2\pi y_0 l = 2\pi \int\limits_a^b y\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

у якій ліву частину можна розглядати, як добуток довжини кола, радіус якого дорівнює ординаті центра ваги кривої, на довжину кривої, а права частина дорівнює площі поверхні, яка утворюється від обертання кривої L навколо осі Ox. Якраз ця рівність і визначає зміст першої теореми Гульдіна *„Площа поверхні, яка утворена від обертання плоскої кривої L навколо осі, яка її не перетинає і лежить з кривою в одній площині, дорівнює добутку довжини дуги цієї кривої на довжину кола, яке описує центр ваги кривої.“*

Для плоскої фігури, яка має сталу поверхневу густину ρ, форму криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, статичні моменти відносно осей Ox і Oy дорівнюють відповідно

$$M_x = \frac{\rho}{2} \int\limits_a^b f^2(x)dx, \quad M_y = \rho \int\limits_a^b xf(x)dx. \tag{20.17}$$

А якщо врахувати, що маса такої фігури

$$m = \rho \int\limits_a^b f(x)dx,$$

то центр ваги цієї фігури має координати

$$x_0 = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_0 = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}. \tag{20.18}$$

Якщо в останній формулі обидві частини помножити на $2\pi S$, де $S = \int\limits_a^b f(x)dx$ площа криволінійної трапеції, то дістанемо рівність

$$2\pi y_0 S = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx,$$

у якій ліва частина є добуток площі криволінійної трапеції на довжину кола, радіус якого дорівнює ординаті центра ваги цієї фігури, а права частина є об'єм тіла, утвореного від обертання трапеції навколо осі Ox. Ця рівність визначає зміст другої теореми Гульдіна *„Об'єм тіла обертання плоскої фігури навколо осі, що її не перетинає, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яке описує центр ваги даної фігури."*

Приклад 4. Знайти координати центра ваги фігури

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \quad x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0,$$

вважаючи, що фігура є однорідною.

Розв'язання. Задана фігура є частиною еліпса, що міститься у першій чверті. Площа цієї фігури дорівнює $\frac{1}{4}\pi ab$. Звідси її маса

$$m=\frac{1}{4}\pi ab\rho,$$

де ρ — поверхнева густина фігури. Скориставшись формулами (20.17), маємо

$$M_x=\frac{\rho}{2}\int\limits_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{ab^2}{3}\rho,$$

$$M_y=\rho\int\limits_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\rho a^2b\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=\frac{a^2b}{3}\rho$$

(тут скористались підстановкою $x=a\sin t$). Звідси

$$x_0=\frac{4a}{3\pi},\ y_0=\frac{4b}{3\pi}.$$

Центр ваги плоскої фігури із змінною поверхневою густиною означають і знаходять з допомогою подвійних інтегралів. Будемо вважати, що у деякій квадровній області D розподілена маса, взагалі кажучи, із змінною густиною $\rho(x, y)$, тобто на замиканні $\overline{D}$ області D визначена деяка невід'ємна неперервна функція $\rho(x, y)$, і діяти стандартним способом.

Розіб'ємо область $\overline{D}$ на частини, тобто задамо множину $\tau = \{\overline{D}_1, \overline{D}_2, \ldots, \overline{D}_n\}$ квадровних елементарних областей таких, що для будь-яких $i \neq j$ $\overline{D}_i$ і $\overline{D}_j$ не мають спільних внутрішніх точок і $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{D}_i = \overline{D}$. На кожній з частин $\overline{D}_k$ оберемо точку (a_k, b_k) і будемо припускати, що густина у кожній точці області $\overline{D}_k$ дорівнює $\rho(a_k, b_k)$, а маса $m_k = \rho(a_k, b_k)\triangle S_k$, де $\triangle S_k$ — площа області $\overline{D}_k$, зосереджена у точці (a_k, b_k). У такий спосіб від матеріальної плоскої фігури здійснено перехід до системи матеріальних точок (a_k, b_k) $(k = \overline{1, n})$ відповідно з масами m_k. Для цієї системи статичні моменти відносно осей Ox і Oy дорівнюють відповідно

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \rho(a_k, b_k)\triangle S_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \rho(a_k, b_k)\triangle S_k,$$

а координати центра ваги будуть

$$\widetilde{x}_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \rho(a_k, b_k)\triangle S_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(a_k, b_k)\triangle S_k}, \quad \widetilde{y}_0 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k \rho(a_k, b_k)\triangle S_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \rho(a_k, b_k)\triangle S_k}.$$

Оскільки за умовою функція $\rho(x, y)$ неперервна на $\overline{D}$, то існують

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} a_k \rho(a_k, b_k) S_k, \quad \lim_{\lambda(\tau)\to 0} \sum_{k=1}^{n} b_k \rho(a_k, b_k) S_k,$$

$$\lim_{\lambda(\tau)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(a_k,b_k)S_k,$$

які і примають відповідно за M_y, M_x, m. Отже за означенням

$$M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy \tag{20.19}$$

статичні моменти матеріальної області відносно осей Ox і Oy, а

$$x_0 = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}, \quad y_0 = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy} \tag{20.20}$$

координати її центра ваги.

Нарешті, якщо T — неоднорідне матеріальне тіло із змінною густиною $\rho(x,y,z)$, тобто на замиканні $\overline{T}$ кубовної області T визначена деяка невід'ємна неперервна функція $\rho(x,y,z)$ так, як було показано при розв'язанні задачі про знаходження маси тіла, його маса

$$m = \iiint\limits_T \rho(x,y,z)dxdydz.$$

Метод знаходження координат його центра ваги нічим не відрізняється від методу розв'язання попередньої задачі, і результатом його застосування будуть формули

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_T x\rho(x,y,z)dxdydz, \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_T y\rho(x,y,z)dxdydz, \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_T z\rho(x,y,z)dxdydz. \end{aligned} \tag{20.21}$$

Завдання для самоконтролю.

1. Кінець пружини, що вільно коливається у момент часу t сек знаходиться на відстані $6\cos\pi t$ см. Який шлях пройде кінець пружини за час від моменту $t = 0$ до моменту $t = 3$?

2. Знайти силу тиску води на вертикальну стінку дамби, яка має форму рівнобічної трапеції з висотою 5 м, верхньою основою 10 м і нижньою основою 8 м, якщо глибина води біля неї 4 м.

3. Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб викачати воду з казана, який має форму параболоїда обертання з радіусом основи r і висотою h.

4. Куля радіусом r з питомою вагою γ лежить на дні басейну, глибина якого h. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб витягнути кулю з води.

5. Обчислити роботу сили $\vec{F} = (x - y, 2x + y)$ вздовж трикутника з вершинами $A(1;1), B(3;3), C(3;-1)$ у додатному напрямку.

6. За який час вода витече з конічної лійки, висота якої $H = 50$ см, радіус верхньої основи $R = 5$ см і радіус нижньої основи $r = 0,2$ см.

7. У дні циліндричної посудини з площею основи 100 см^2 і висотою 30 см є отвір. Обчислити площу цього отвору, якщо відомо, що вода з посудини виливається за 2 хв.

8. Знайти координати центра ваги дуги кола $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, де $|\varphi| \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

9. Знайти координати центра ваги однорідної півкулі радіуса r.

10. Знайти координати центра ваги круглої пластинки радіуса r, якщо її густина у точці $M(x, y)$ пропорційна відстані точки M до точки $M_0(r, 0)$.

21 *ЛЕКЦІЯ*: Показникова функція дійсної та комплексної змінної

Означення показникової функції дійсної змінної через поняття степеня, її властивості. інші підходи до поняття показникової функції. Показникова функція комплексної змінної, її властивості. Показникові рівняння і нерівності.

Література. [1], ч. 1, с. 88, 89; [3], т. 1, с. 97–103; [4], с. 80–85, 104–105; [8], с. 181–203; [9], ч. 2, с. 355–356.

Будемо виходити з того, що для додатного числа a і будь-якого дійсного числа α означено степінь a^α. А саме, $a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ раз}}$, якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$, $a^r := \sqrt[n]{a^m}$, якщо $\alpha = r = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ і $r > 0$, $a^\alpha := \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, якщо α — ірраціональне додатне число і послідовність (r_n) раціональних чисел має границею число α, $a^0 := 1$, $a^\alpha = \dfrac{1}{a^{-\alpha}}$, якщо α — від'ємне дійсне число, причому степені мають такі властивості: для будь-яких додатних дійсних чисел a і b і будь-яких додатних дійсних чисел α і β мають місце рівності

$$a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta, \quad a^{\alpha-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}, \quad (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha.$$

Означення 21.1. *Відповідність, яка кожному $x \in \mathbb{R}$ відносить степінь x додатного числа a, називається показниковою функцією з основою a і позначається $y = a^x$.*

Зауваження. Оскільки для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ $1^x = 1$, тобто при $a = 1$ маємо константу, то випадок $a = 1$ виключається, і термін „показникова функція“ означає „функція виду $y = a^x$, де $0 < a \neq 1$.“ У такий саме спосіб означається показникова функція у шкільному підручнику. Цитуємо: „Ви вже знаєте, що коли a — додатне, то для будь-якого числа x степінь a^x має цілком певне додатне значення. Тому a^x є функцією змінної x, яка визначена на всій числовій осі. Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$ називається показниковою (з основою a).“ [8, с. 181].

В силу означення областю визначення показникової функції є множина $\mathbb{R}$. Покажемо, що вона є монотонною і неперервною.

Теорема 21.1. *Показникова функція a^x зростає, якщо $a > 1$, і спадає, якщо $0 < a < 1$.*

Доведення. Нехай $a > 1$ і $x_1 < x_2$. Тоді існують раціональні числа r_1 і r_2 такі, що $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$ і $a^{r_1} < a^{r_2}$. Нехай (r'_n), (r''_n) послідовності раціональних чисел такі, що для будь-якого n $r'_n < x_1 < x_2 < r''_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x_2$. Тоді для будь-якого n

$$a^{r'_n} < a^{r_1} < a^{r_2} < a^{r''_n}.$$

А отже,

$$a^{x_1} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^{x_2}.$$

Аналогічно доводиться, що функція a^x спадає, якщо $0 < a < 1$. ■

Теорема 21.2 (характеристична властивість). *Для будь-яких дійсних чисел x_1 і x_2 має місце рівність*

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Доведення. Нехай (r'_n) і (r''_n) послідовності раціональних чисел такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} r'_n = x_1$ і $\lim\limits_{n\to\infty} r''_n = x_2$, а, отже, $\lim\limits_{n\to\infty} (r'_n + r''_n) = x_1 + x_2$. Тоді в силу означення показникової функції

$$a^{x_1+x_2} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n + r''_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} \lim_{n\to\infty} a^{r''_n} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}. \blacksquare$$

Лема 1. *Для будь-якого $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.*

Доведення. Нехай $a > 1$. Тоді $\sqrt[n]{a} > 1$ і $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1$. Позначивши $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha$, дістанемо $a = (1+\alpha)^n$. Звідси в силу нерівності Бернуллі $a > 1 + n\alpha$ або $\sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a-1}{n}$. Очевидно, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ нерівність $\dfrac{a-1}{n} < \varepsilon$ виконується для всіх n, які більші $\left[\dfrac{a-1}{n}\right] + 1$. Отже, $\forall \varepsilon > 0$ вказано n_0 ($n_0 = \left[\dfrac{a-1}{n}\right] + 1$) таке, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Нехай $0 < a < 1$. Тоді $\sqrt[n]{a} < 1$ і $|\sqrt[n]{a} - 1| = 1 - \sqrt[n]{a}$. Оцінимо різницю

$$1 - \sqrt[n]{a} = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{\sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} - 1.$$

Очевидно, що $\dfrac{1}{a} > 1$ і, за тільки що доведеним, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = 1$. Це означає, що $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ таке, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} - 1 < \varepsilon$. Але для таких самих n $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$. ■

Лема 2. $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

Доведення. Оскільки функція a^x монотонна, то існують $\lim\limits_{x\to -0} a^x$ і $\lim\limits_{x\to +0} a^x$, причому

$$\lim_{x\to -0} a^x = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1,$$

$$\lim_{x\to +0} a^x = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Отже, існує $\lim\limits_{x\to 0} a^x$ і дорівнює 1. ■

Теорема 21.3. *Показникова функція a^x неперервна у кожній точці числової прямої.*

Доведення. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$. Тоді приріст функції $\triangle y$, який відповідає приросту аргумента $\triangle x$, подається у вигляді

$$\triangle y = a^{x_0 + \triangle x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\triangle x} - 1).$$

А оскільки в силу леми 2

$$\lim_{\triangle x \to 0} (a^{\triangle x} - 1) = 0,$$

то $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$. А це й означає, що показникова функція неперервна у точці x_0. ■

Оскільки $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, якщо $a > 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$, якщо $0 < a < 1$, то яким би не було додатне число b існують дійсні числа x_1 і x_2 такі, що $a^{x_1} < b < a^{x_2}$. А, отже, в силу теореми про проміжне значення неперервної на відрізку $[x_1; x_2]$ функції маємо, що існує (а в силу монотонності) єдине $x_0 \in (x_1; x_2)$ таке, що $a^{x_0} = b$. Таким чином, множиною значень показникової функції є множина всіх додатних дійсних чисел і рівняння $a^x = b$, де $b > 0$, має єдиний розв'язок.

Звичайно означення 21.1 не єдиний спосіб введення поняття показникової функції. Наприклад, її можна означити таким чином.

Означення 21.2. *Показниковою функцією з основою a називають функцію f таку, що*

а) $D(f) = \mathbb{R},\ E(f) = \mathbb{R}^+,\ f(1) = a$,

б) для будь-яких x_1, x_2 з $\mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \tag{21.1}$$

в) функція f неперервна на $\mathbb{R}$.

Мовою алгебри показникова функція є неперервним ізоморфізмом групи $(\mathbb{R},+)$ і групи $(\mathbb{R}^+,\cdot)$, при якому образом 1 є число a $(0<a\neq 1)$.

Теорема 21.4. *Якщо $a>0$ і $a\neq 1$, то існує єдине неперервне відображення f групи $(\mathbb{R},+)$ на групу $(\mathbb{R}^+,\cdot)$ таке, що $f(1)=a$.*

Доведення. Проблема існування розв'язується автоматично, оскільки функція a^x означена, як степінь x числа a, задовольняє властивості а)–в). Доведемо, що така функція єдина. Припустимо, що існує функція f така, що задовольняє властивості а)–в), але $f(x)\neq a^x$. Скориставшись методом математичної індукції, можемо обгрунтувати, що для будь-яких дійсних чисел $x_1,x_2,\dots,x_n$ маємо

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)=\prod_{k=1}^{n} f(x_k).$$

Тоді для натурального n

$$f(n)=f(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n\text{ разів}})=\underbrace{f(1)f(1)\cdots f(1)}_{n\text{ разів}}=f(1)^n=a^n,$$

тобто значення функцій f і a^x на множині натуральних чисел збігаються. Нехай $r=\dfrac{m}{n}$ — довільне додатне раціональне число. Тоді $rn=m$ натуральне, і $f(rn)=f(r)^n=f(m)=a^m$. А оскільки $f(r)>0$, то

$$f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\sqrt[n]{a^m},$$

тобто значення функцій f і a^x збігаються на множині всіх додатних раціональних чисел. Якщо α — ірраціональне додатне число і (r_n) послідовність раціональних додатних чисел така, що

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, то в силу неперервності функції f $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f(\alpha)$. Разом з тим $f(\alpha) = a^\alpha$ за означенням степеня з ірраціональним показником. Таким чином значення функцій f і a^x збігаються на множині всіх додатних дійсних чисел.

Залишилось зауважити, що $\forall x \;\; f(x+0) = f(x)f(0)$ і тому $f(0) = 1$, а $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$ і тому $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$. Отже, функції f і a^x збігаються на множині $\mathbb{R}$, що суперечить нашому припущенню. Звідси випливає, що функція a^x є єдиною функцією, яка задовольняє умови а)–в). ■

Особливо часто зустрічаються показникова функція e^x. У цьому випадку її називають експоненціальною функцією і інколи використовують позначення $\exp x$. (Якщо $a \neq e$, то $a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$).

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, то легко показати, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Звідси уже легко отримати, що $(a^x)' = a^x \ln a$, зокрема $(e^x)' = e^x$, тобто функція e^x збігається з своєю похідною.

Покажемо, що функцію e^x можна означити як суму степеневого ряду. З цією метою розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$. Цей ряд абсолютно збігається на всій числовій осі і його сума $\varphi(x)$ є неперервною функцією для всіх x. Якщо позначити

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_n, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n,$$

то, скориставшись формулою бінома Ньютона, маємо

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 +$$

$$+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k+\cdots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{n!}=s_n.$$

З другого боку, для $\forall k < n$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)<e_n$$

і при $n\to\infty$ маємо $s_k \leqslant e$. Таким чином, для $\forall n$

$$e_n < s_n \leqslant e \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \varphi(1) = e.$$

Нарешті, для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_1^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_2^n}{n!} =$$

$$= 1 + (x_1+x_2) + \left(\frac{x_1^2}{2!}\right) + x_1x_2 + \frac{x_2^2}{2!} + \cdots +$$

$$+\sum_{k=0}^{n}\frac{x_1^{n-k}x_2^k}{(n-k)!k!}+\cdots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}x_1^{n-k}x_2^k=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x_1+x_2)^n}{n!}=$$

$$=\varphi(x_1+x_2),$$

тобто властивість б) виконується. Оскільки $\varphi(0) = 1$, то для $x > 0$ $\varphi(-x)\varphi(x) = 1$ і $\varphi(-x)\frac{1}{\varphi(x)}$, тобто $\varphi(x)$ додатна для всіх x. Залишилось показати, що $E(\varphi) = \mathbb{R}^+$. Справді, оскільки для будь-якого натурального n $\varphi(n) = 1 + n + \cdots > n$, то $\varphi(-n)\frac{1}{\varphi(n)} < \frac{1}{n}$, тобто $\varphi(x)$ може приймати як завгодно великі так і як завгодно малі додатні значення. Якщо $b \in \mathbb{R}^+$, то існує натуральне n що $\frac{1}{n} < b < n$, а, отже, $\varphi(-n) < b < \varphi(n)$. Теорема про проміжне значення неперервної на відрізку функції $\varphi(x)$ гарантує існування $x_0 \in (-n; n)$ такого, що $\varphi(x_0) = b$.

Таким чином, функція

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

задовольняє всі умови теореми 21.4 і $\varphi(1) = e$, а, отже, $\varphi(x) = e^x$.

Подання показникової функції у вигляді степеневого ряду дає можливість поширити її (аналітично продовжити) на всю комплексну площину. Розглянемо степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Оскільки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0,$$

то цей ряд збігається, причому абсолютно на всій комплексній площині. Покладемо за означенням

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{21.2}$$

Підставою для такої назви є те, що у випадку $\operatorname{Im} z = 0$ (21.2) є показниковою функцією дійсної змінної з основою e, і для будь-яких $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1} e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^{n-1} z_2^k}{(n-k)!k!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z_1^{n-k} z_2^k = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} =$$

$$= e^{z_1 + z_2}.$$

З допомогою рівності

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \tag{21.3}$$

легко отримати формулу для обчислення значень функції e^z, не сумуючи ряду (21.2). Справді, якщо покласти $z = x + iy$, де $x, y \in \mathbb{R}$, то з того, що $e^z = e^x e^{iy}$ і

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} +$$

$$+ \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + (-1)^k i \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \cos y + i \sin y,$$

маємо
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y). \tag{21.4}$$

Тепер уже легко перевірити, що функція e^z аналітична у кожній точці комплексної площини, і що її похідна $(e^z)' = e^z$.

З формули (21.4) маємо, що

$$|e^z| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x\sin^2 y}} = e^x,$$

$$\operatorname{Arg}(e^z) = y + 2k\pi, \text{ де } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Стосовно можливих значень, то, насамперед, очевидно, що оскільки для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ $e^x > 0$, і ні при якому y $\cos y$ і $\sin y$ одночасно не обертаються в нуль, то ні при якому z e^z не може дорівнювати 0. Якщо ж A будь-яке комплексне число відмінне від нуля, то, подавши його у тригонометричній формі $A = |A|(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, маємо, що $e^x = |A|$ або $x = \ln|A|$ і $y = \arg A + 2k\pi$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, рівняння $e^z = A$, де $A \neq 0$, має безліч розв'язків, а саме

$$z = \ln|A| + i(\arg A + 2k\pi), \text{ де } \ k \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки функції $\cos y$ і $\sin y$ періодичні з періодом 2π, то для будь-якого $z \in \mathbb{C}$

$$e^{z+2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi),$$

тобто e^z періодична з періодом $2\pi i$.

Показникова функція e^z дає можливість крім алгебраїчної та тригонометричної форм подання комплексного числа використовувати *показникову форму*. А саме, якщо у формулі (21.4) покласти $x = 0$ і $y = \alpha$, то

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Тоді будь-яке комплексне число $z \neq 0$ можна подати у вигляді

$$z = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = |z|e^{i\arg z}.$$

Якраз останнє і є показниковою формою подання комплексного числа.

Повернемось до показникової функції дійсної змінної. Однією із популярних задач (особливо шкільної математики) є розв'язування показникових рівнянь та нерівностей. Показниковим називають рівняння, у яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах. Найпростішим показниковим рівнянням є $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$. Воно має єдиний розв'язок $x = \log_a b$. Показникове рівняння

$$a^{f(x)} = b^{g(x)},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, $b \neq 1$, розв'язується методом зведення до однієї основи. Якщо $c > 0$ і $c \neq 1$, то останнє рівняння рівносильне рівнянню

$$c^{f(x) \log_c a} = c^{g(x) \log_c b},$$

яке у свою чергу рівносильне рівнянню

$$f(x) \log_c a = g(x) \log_c b,$$

зокрема рівняння

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

Другим найпоширенішим методом розв'язування показникових рівнянь є метод заміни змінної, який приводить розв'язування рівняння

$$F(a^{f(x)}) = 0,$$

до розв'язування рівняння $F(t) = 0$, і після до розв'язування рівнянь виду $a^{f(x)} = t_0$, де t_0 — додатний розв'язок рівняння $F(t) = 0$.

Так, наприклад, показникове рівняння виду

$$c_1a^{nx} + c_2a^{kx}b^{(n-k)x} + c_3b^{nx} = 0,$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ $k, n \in \mathbb{N}$ і $k < n$, (його називають однорідним) розв'язується так: поділивши на b^{nx} і поклавши $\left(\frac{a}{b}\right)^x = t$, дістанемо рівняння $c_1t^n + c_2t^k + c_3 = 0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$3 \cdot 2^{3x+2} - 47 \cdot 12^x + 53 \cdot 18^x - 2 \cdot 3^{3x+2} = 0.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді

$$12 \cdot 2^{3x} - 47 \cdot 2^{2x} \cdot 3^x + 53 \cdot 2^x 3^{2x} - 18 \cdot 3^{3x} = 0$$

і поділимо обидві частини на 3^{3x}. Маємо

$$12\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} - 47\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 53\left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 18 = 0.$$

Заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ приводить до кубічного рівняння

$$12t^3 - 47t^2 + 53t - 18 = 0.$$

Очевидним коренем цього рівняння є $t_1 = 1$, а коренями квадратного рівняння $12t^2 - 35t + 18 = 0$ є $t_2 = \frac{9}{4}$, $t_3 = \frac{2}{3}$. Отже, корені заданого показникового рівняння будуть $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0,5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $y = 3+x$, то перше рівняння системи запишеться так:

$$4^x - 7 \cdot 2^{0,5x-1,5} = 2^{-x}$$

або

$$2^{3x} - 7 \cdot 2^{1,5x} 2^{-1,5} = 1.$$

Заміна $2^{1,5x} = t$ приводить до квадратного рівняння

$$2\sqrt{2}t^2 - 7t - 2\sqrt{2} = 0,$$

корені якого $t_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $t_2 = 2\sqrt{2}$. Тоді $x = 1$, $y = 4$ шуканий розв'язок системи.

Показниковими нерівностями називають нерівності, у яких невідоме входить лише до показників степенів при сталих основах. Розв'язування таких нерівностей зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей виду

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}, \quad a^{f(x)} \leqslant a^{g(x)},$$

які, враховуючи монотонність показникової функції, зводяться до розв'язування нерівностей $f(x) < g(x)$, $f(x) \leqslant g(x)$, якщо $a > 1$, і нерівностей $f(x) > g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$, якщо $0 < a < 1$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1.$$

Розв'язання.

$$\left(\frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1\right) \Longleftrightarrow \left(\frac{2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x - 3 \cdot 3^x} < 0\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow ((2^x - 2 \cdot 3^x)(2^x - 3 \cdot 3^x) < 0) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\left(\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 3\right)\right) < 0\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(2 < \left(\frac{2}{3}\right)^x < 3\right) \Longleftrightarrow \left(\log_{\frac{2}{3}} 3 < x < \log_{\frac{2}{3}} 2\right).$$

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

2. Побудувати графіки функцій:

$$y = 2^x;\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ y = 2^{-x};\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x};\ y = 2^{|x|};$$

$$y = 2^{-|x|};\ y = 2^{x+a};\ y = 2^x + a.$$

3. Довести нерівності:

а) $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ для $x > 0$;

б) $e^{-x} > 1 - x$ для $x < 0$;

в) $e^{2x} < \dfrac{1+x}{1-x}$ для $x \in (0; 1)$.

4. Розв'язати рівняння

а) $9 \cdot 4^{1/x} + 5 \cdot 6^{1/x} = 4 \cdot 9^{1/x}$;

б) $5^{x+\frac{1}{2}} - 9^x = 3^{2x-2} - 5^{x-\frac{1}{2}}$;

в) $5^{3x} + 9 \cdot 5^x + 27(5^{-3x} + 5^{-x}) = 64$.

5. Розв'язати нерівності:

а) $5^x - 5^{3-x} > 20$;

б) $(\sqrt{5}+2)^{x-1} \geqslant (\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$;

в) $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$.

22 *ЛЕКЦІЯ*: Логарифмічна функція дійсної та комплексної змінної

Означення логарифмічної функції дійсної змінної як оберненої до показникової, її властивості. інші підходи до поняття логарифмічної функції. Логарифмічна функція комплексної змінної, її властивості. Логарифмічні рівняння і нерівності.

Література. [1], ч. 1, с. 89–90; [2], ч. 1, с. 133–135; [3], т. 1, с. 104–105; [4], с. 85–92; [8], с. 204–242; [9], ч. 2, с. 359–361.

Як правило, у рамках достатно розвинутої теорії неперервних функцій логарифмічну функцію означають як функцію обернену до показникової. Справді, на будь-якому відрізку $[\alpha;\beta]$ функція $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$ визначена, строго монотонна і неперервна. А отже, існує обернена до неї функція, яка визначена строго монотонна і неперервна на відрізку $[a^\alpha;a^\beta]$, якщо $a>1$, або на відрізку $[a^\beta;a^\alpha]$, якщо $0<a<1$. Враховуючи те, що для будь-якого додатного числа c існують дійсні числа x_1 і x_2 такі, що $a^{x_1}<c<a^{x_2}$, то логарифмічна функція визначена, строго монотонна і неперервна на множині додатних дійсних чисел.

Для логарифмічної функції використовують позначення $y=\log_a x$ (читається „логарифм x за основою a“). Однак у випадку $a=e$ замість $\log_e x$ пишуть $\ln x$, а у випадку $a=10$ замість $\log_{10} x$ пишуть $\lg x$.

Властивості логарифмічної функції формулюються на підставі відповідних властивостей показникової функції.

1. Оскільки при $a>1$ функція $y=a^x$ зростає і

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0, \quad \lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty,$$

то логарифмічна функція $y=\log_a x$ теж зростає і

$$\lim_{x\to+0} \log_a x=-\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x=+\infty.$$

2. Оскільки при $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає і

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0,$$

то логарифмічна функція $y = \log_a x$ теж спадає і

$$\lim_{x \to +0} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty.$$

3. Оскільки значення показникової функції $y = a^x$ у точці $x = 1$ дорівнює a, то значення функції $y = \log_a x$ у точці $x = a$ дорівнює 1. (Значення логарифмічної функції $y = \log_a x$ у точці $x = 1$ дорівнює нулеві.)

4. Оскільки для показникової функції $y = a^x$ має місце рівність $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$ для будь-яких дійсних чисел x_1 і x_2, то для логарифмічної функції $y = \log_a x$ має місце рівність

$$\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 x_2)$$

для будь-яких додатних чисел x_1 і x_2.

Справді $\log_a x_1$ це той показник степеня α_1, для якого $a^{\alpha_1} = x_1$, а $\log_a x_2$ це той показник степеня α_2, для якого $a^{\alpha_1} = x_2$. Тоді $\alpha_1 + \alpha_2$ це той показник степеня, для якого $a^{\alpha_1 + \alpha_2} = x_1 x_2$, тобто $\alpha_1 + \alpha_2$ є $\log_a (x_1 x_2)$.

історично поняття логарифмічної функції сформувалось на основі таблиць логарифмів, які одночасно розроблялись на початку 17 століття швейцарцем Йостом Бюргі, шотландцем Джоном Непером і англійцем Генрі Брігсом, однак першою (1614) була публікація Непера. Він же обрав термін „логарифм“, що означає „число відношення“ (від поєднання грецьких слів $\lambda \acute{o} \gamma o \zeta$ — відношення, $\acute{\alpha} \rho \iota \theta \mu o \zeta$ — число).

Сучасною мовою таблиці Непера є відповідність, яка кожному числу виду $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$ відносить число $\frac{n}{10^7}$, тобто $\frac{n}{10^7}$ є логарифм числа $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n$ за основою $\frac{1}{e}$, якщо $\frac{1}{e}$ замінено на число $\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$.

Відправним поняттям є логарифм і при введені логарифмічної функції у шкільному курсі математики.

Означення 22.1. *Логарифмом числа N за основою a ($a>0$ і $a\neq 1$) називається показник степеня α, до якого треба піднести a, щоб дістати число N.*

Позначається цей показник степеня символом $\log_a N$. Таким чином, $\log_a N$ є коренем рівняння $a^x = N$, тобто

$$a^{\log_a N} = N$$

(основна логарифмічна тотожність).

Оскільки степінь a^α $(a>0, a\neq 1)$ при будь-якому $\alpha \in \mathbb{R}$ є додатне число і для будь-яких α і β

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}, \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}, \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

то логарифми за основою a мають тільки додатні числа і вони задовольняють такі властивості:

а) логарифм добутку двох додатних чисел дорівнює сумі їх логарифмів;

б) логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника);

в) логарифм степеня дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня.

Означення 22.2. *Відповідність, яка кожному додатному числу x відносить логарифм цього числа за основою a, називається логарифмічною функцією за основою a і позначається $y = \log_a x$.*

Мовою алгебри логарифмічна функція $y = \log_a x$ задає ізоморфне відображення групи $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ на групу $(\mathbb{R}^+, +)$. Звичайно означення 22.2 тісно пов'язане з поняттям степеня і тому властивості логарифмічної функції формулюються і обгрунтовуються на підставі властивостей показникової функції. Серед них особливе місце за такими:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)}\quad D(\log) = \mathbb{R}^+, \quad E(\log) = \mathbb{R};\\
&\text{б)}\quad \text{функція } \log_a x \text{ неперервна на } \mathbb{R}^+;\\
&\text{в)}\quad \text{для будь-яких } x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+\\
&\quad \log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2;\\
&\text{г)}\quad \log_a a = 1.
\end{aligned}
\tag{22.1}
$$

Перелічені властивості є характеристичними для логарифмічної функції. А саме, має місце така теорема.

Теорема 22.1. *Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то існує єдина функція f, яка задовольняє властивості (22.1).*

Доведення. існування випливає з того, що функція $y = \log_a x$ задовольняє властивості (22.1). Залишається довести єдиність. Припустимо, що існує функція f, яка задовольняє властивості (22.1) і не збігається з $\log_a x$. Методом математичної індукції легко обгрунтувати, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $f\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$. Тоді для будь-якого натурального n

$$f(a^n) = \underbrace{f(a) + f(a) + \cdots + f(a)}_{n \text{ разів}} = nf(a) = n,$$

тобто $f(a^n) = \log_a a^n$ і значення функції f збігається із значеннями функції $\log_a x$ на множині $\{a^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Нехай $r = \dfrac{m}{n}$ — довільне додатне число. Тоді $rn = m$ і

$$m = f(a^m) = f(a^{rn}) = f(\underbrace{a^r \cdot a^r \cdots a^r}_{n \text{ разів}}) = nf(a^r),$$

тобто $f(a^r) = \dfrac{m}{n} = r$ і значення функції f збігається із значеннями функції $\log_a x$ на множині $\{a^r \,|\, r$ — додатне раціональне число$\}$. Нехай α — довільне додатне ірраціональне число. Тоді існує послідовність (r_n) додатних раціональних чисел така, що $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, а, отже, в силу неперервності функції a^x

$$\lim_{n\to\infty} r_n = a^\alpha.$$

Скориставшись неперервністю функції f у точці a^α, маємо

$$f(a^\alpha) = \lim_{n\to\infty} f(a^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} r_n f(a) = \alpha,$$

тобто $f(a^\alpha) = \alpha$ і значення функції f збігається із значеннями функції $\log_a x$ на множині $\{a^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}^+\}$. А врахувавши, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ і що у точці $x = 1$ функція f неперервна, маємо

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} f(\sqrt[n]{a}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f(a) = 0 = \log_a 1.$$

Нехай $\alpha > 0$. Тоді $0 = f(1) = f(a^\alpha a^{-\alpha}) = f(a^\alpha) + f(a^{-\alpha}) = \alpha + f(a^{-\alpha})$, тобто $f(a^{-\alpha}) = -\alpha$. Таким чином, значення функції f збігаються із значеннями функції $\log_a x$ на множині $\{a^\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Якщо тепер $x \in \mathbb{R}^+$, то

$$f(x) = f\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x,$$

що суперечить припущенню. Отже, $\log_a x$ єдина функція, яка задовольняє умови (22.1). ■

Якщо припустити, що функція $f(x)$, яка задовольняє умови (22.1), диференційовна, то можна знайти її похідну. Справді, якщо $f'(x)$ існує, то

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(x\left(1+\dfrac{\triangle x}{x}\right)\right) - f(x)}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x) + f\left(1+\dfrac{\triangle x}{x}\right) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(1+\dfrac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f\left(1+\dfrac{\triangle x}{x}\right)}{\dfrac{\triangle x}{x}} = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)}{h} = \frac{c}{x},$$

де $c = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)}{h}$ не залежить від x. Покладемо $c = 1$. Тоді $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ і $f(x) = \displaystyle\int\limits_1^x \frac{dt}{t}$.

Розглянемо функцію

$$f(x) = \int\limits_1^x \frac{dt}{x} := \begin{cases} -\displaystyle\int\limits_x^1 \frac{dt}{t}, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ \quad 0, & \text{якщо } x = 1, \\ \displaystyle\int\limits_1^x \frac{dt}{t}, & \text{якщо } x > 1 \end{cases} \tag{22.2}$$

і покажемо, що вона задовольняє умови (22.1). Очевидно, що $f(x)$ визначена, неперервна і зростаюча ($f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$) на проміжку $(0, +\infty)$. А оскільки $f(1) = 0$, то $f(x) < 0$, якщо $0 < x < 1$, і $f(x) > 0$, якщо $x > 1$. Якщо $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, то

$$f(x_1x_2) = \int\limits_1^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = \int\limits_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int\limits_{x_1}^{x_1x_2} \frac{dt}{t} = \int\limits_1^{x_1} \frac{dt}{t} + \int\limits_1^{x_2} \frac{du}{u} = f(x_1) + f(x_2)$$

(в другому інтегралі виконано підстановку $t = x_1u$). Тепер уже не важко переконатись, що $f(2^n) = nf(2)$, а $f(2^{-n}) = -nf(2)$. Отже,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

і множиною значень функції $f(x)$ є множина $\mathbb{R}$. Але тоді існує таке число e, для якого $f(e) = 1$.

Таким чином, показано, що функція (22.2) задовольняє умови (22.1), а, отже, це логарифмічна функція з основою e, тобто означення 22.2 дає функцію $y = \ln x$. Означення 22.2 дає можливість, скориставшись формулами чисельного інтегрування, обчислювати логарифми чисел. Однак більш ефективним інструментом є ряди. Якщо почлено проінтегрувати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$$

який збігається на інтервалі $(-1; 1)$ і має сумою функцію $\dfrac{1}{1+x}$ (сума членів нескінченної геометричної прогресії із знаменником $-x$ ($|x| < 1$)), то отримаємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

який збігається на проміжку $(-1;1]$ і має сумою функцію $\ln(1+x)$. Отож маємо, що

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \tag{22.3}$$

для всіх x з проміжку $(-1;1]$, і, користуючись цим рядом, можна обрахувати значення логарифмів чисел з проміжку $(0;2]$. Так, наприклад,

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

і щоб знайти наближене значення $\ln 2$ з точністю до чотирьох знаків, слід взяти 10^4 членів ряду. (Маємо достатньо пристойну збіжність, коли $|x|<\frac{1}{2}$).

Разом з тим можна побудувати ряд, який збігається значно швидше. Більш того, він дозволить обчислювати логарифми чисел, які більші 2. Якщо у (22.3) покласти $-x$, то для всіх x з проміжку $[-1;0)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Тоді $\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, причому ряд справа збігається на інтервалі $(-1;1)$, тобто для всіх $x\in(-1;1)$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}. \tag{22.4}$$

і тепер, щоб знайти наближене значення $\ln 2$ з точністю до 10^{-4}, досить у (22.4) покласти $x=\frac{1}{3}$ і у ряді

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}}$$

взяти перші чотири члени. Справді,

$$\frac{2}{9\cdot 3^9}+\frac{2}{9\cdot 3^{11}}+\dots<\frac{2}{9\cdot 3^9}+\frac{2}{9\cdot 3^{11}}+\frac{2}{9\cdot 3^{13}}+\dots=$$

$$=\frac{2}{9\cdot 3^9}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{4\cdot 3^9}<10^{-4}$$

і

$$\ln 2\approx\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\frac{1}{7\cdot 3^7}\approx$$

$$\approx 0,66667+0,02469+0,00165+0,00013=0,69314,$$

тобто $\ln 2=0,6931$ з точністю до 10^{-4}.

Нехай $n=4$, тоді

$$\ln 5-\ln 4=2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\dots\right)\approx$$

$$\approx 0,22222+0,00092=0,22314$$

і

$$\ln 10=\ln 5+\ln 2=3\ln 2+(\ln 5-\ln 4)\approx 2,30258.$$

Перехід від натуральних до десяткових логарифмів здійснюється за формулою

$$\lg N=M\ln N,$$

де $M=\lg e=\dfrac{1}{\ln 10}\approx 0,43429$ називається *модулем переходу* від натуральних до логарифмів десяткових. Тоді

$$\lg(n+1)=\lg n+2M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)^{2k-1}},$$

а для $n\geqslant 100$, врахувавши, що $2M<1$, отримаємо

$$\lg(n+1)=\lg n+\frac{2M}{2n+1}$$

з точністю до $5 \cdot 10^{-8}$. Так, наприклад,

$$\lg 101 = 2 + \frac{2M}{201} \approx 2,0043,$$

$$\lg 102 = 2,00432 + \frac{2M}{203} \approx 2,0086.$$

Логарифмічна функція комплексної змінної вводиться як обернена до показникової функції. Точніше, як відповідність, яка кожному комплексному числу $z \neq 0$ відносить множину розв'язків рівняння $e^w = z$. Останню можна знайти, якщо e^w і z подати у тригонометричній формі і розв'язати рівняння

$$e^u(\cos\nu + i\sin\nu) = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

де $\alpha = \arg z$. Тоді

$$\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

шукана множина розв'язків.

Означення 22.3. *Відповідність, яка кожному комплексному числу $z \neq 0$ відносить множину комплексних чисел*

$$\{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z \qquad (22.5)$$

називається логарифмічною функцією комплексної змінної і позначається $w = \mathrm{Ln}\, z$.

Теорема 22.2. *Якщо $z_1 z_2 \neq 0$,то*

$$\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \qquad (22.6)$$

$$\mathrm{Ln}\,\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2. \qquad (22.7)$$

Доведення. Враховуючи, що для будь-яких z_1 і z_2 ($z_1 z_2 \neq 0$) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $|\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$, і скориставшись означенням 22.6 $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$ можна подати у вигляді

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \ln|z_1 z_2| + i \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \ln|z_1| + \ln|z_2| +$$
$$+ i \operatorname{Arg} z_1 + i \operatorname{Arg} z_2 = \{\ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\arg z_1 + 2k\pi) +$$
$$+ i(\arg z_2 + 2n\pi) \,|\, k, n \in \mathbb{Z}\}. \tag{22.8}$$

З другого боку, $\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ є позначення множини комплексних чисел, елементами якої є всі можливі суми елементів множин

$$\{\ln|z_1| + i(\arg z_1 + 2k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{і}$$
$$\{\ln|z_2| + i(\arg z_2 + 2k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\},$$

взятих по одному з кожної множини. Очевидно, що кожен елемент множини $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$ є елементом множини $\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ і навпаки. Рівність (22.7) доводиться аналогічно. ■

Зауваження. Множини $\operatorname{Ln} z^\alpha$ і $\alpha \operatorname{Ln} z$, взагалі кажучи, не є рівними. Так, наприклад,

$$\operatorname{Ln} z^2 = \operatorname{Ln} z + \operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\} +$$
$$+ \{\ln|z| + i(\arg z_2 n\pi) \,|\, n \in \mathbb{Z}\} =$$
$$= \{2\ln|z| + i(2\arg z + 2k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\},$$

а $2\operatorname{Ln} z = \{2\ln|z| + i(2\arg z + 4k\pi) \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$, тобто $\operatorname{Ln} z^2 \neq 2\operatorname{Ln} z$.

При дослідженні багатозначних функцій виділяють так звані однозначні неперервні гілки. Для логарифмічної функції такими гілками будуть функції виду

$$w = \operatorname{Ln}_k z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$

для кожного $k \in \mathbb{Z}$, визначені на всій комплексній площині з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі. Множиною значень функції $w = \operatorname{Ln}_k z$ є множина

$$\{w \,|\, (2k-1)\pi < |\operatorname{Im} w| < (2k+1)\pi\}.$$

Гілка $\operatorname{Ln}_0 z$ називається головним значенням функції $\operatorname{Ln} z$ і позначається $\ln z = \ln|z| + i\arg z$.

Покажемо, що функція $\ln z$ є аналітичною у кожній точці своєї області визначення. Справді,

$$w = \ln z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arg z,$$

де

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y \geqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0, \end{cases}$$

і

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(\sqrt{x^2+y^2})\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(\sqrt{x^2+y^2})\right) = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\arg z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\arg z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

тобто умови Коші-Рімана виконуються, і функція $\ln z$ аналітична на всій комплексній площині з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі, а її похідна дорівнює

$$\ln' z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Аналогічно для кожної гілки $\mathrm{Ln}_k\, z$.

Логарифмічну функцію комплексної змінної можна ввести і з допомогою інтеграла. З цією метою розглянемо

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta},$$

де Γ — спрямлювана крива, яка не проходить через точки $\zeta = 0$ і $\zeta = \infty$. Оскільки функція $f(z) = \dfrac{1}{z}$ визначена і аналітична на всій комплексній площині крім точки $z = 0$, то цей інтеграл залежить тільки від початкової і кінцевої точок шляху інтегрування. Нехай точка $\zeta = 1$ початок кривої Γ, а точка $\zeta = z$ її кінець, а крива Γ складається з прямолінійного відрізка Γ_1 з початком у точці $\zeta = 1$ і кінцем у точці $\zeta = |z|$ і дуги кола Γ_2 з центром у точці $\zeta = 0$ радіуса $|z|$ з початком у точці $\zeta = |z|$ і кінцем точці $\zeta = z$, причому будемо вважати, що крива не обходить точку $\zeta = 0$. Тоді

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_{1}^{|z|} \frac{dx}{x} + \int\limits_{0}^{\arg z} \frac{i|z|e^{i\varphi}}{|z|e^{i\varphi}} d\varphi = \ln|z| + i\arg z.$$

Врахувавши, що коли γ — коло з центром у точці $\zeta = 0$ радіуса R, то

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = 2\pi i,$$

можемо обрахувати $\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta}$ у випадку, коли крива Γ декілька раз обходить точку $\zeta = 0$, а саме

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i,$$

де k число обходів кривою Γ точки $\zeta = 0$ (k — додатне, якщо обхід здійснюється у додатному напрямку, і k — від'ємне, якщо обхід здійснюється у зворотному напрямку). Звідси маємо, що

$$\operatorname{Ln} z = \int\limits_{\Gamma_z} \frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{22.9}$$

де Γ_z — спрямлювана крива, що сполучає точку $\zeta = 1$ і точку $\zeta = z$.

На заключення декілька зауважень щодо розв'язування логарифмічних рівнянь та нерівностей. Логарифмічними називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма. Найпростішими логаримічними рівняннями є рівняння виду $\log_a x = b$ і його узагальнення $\log_a f(x) = b$. Очевидно, що останнє рівносильне рівнянню $f(x) = a^b$. Найбільш популярними у шкільній практиці є логарифмічні рівняння виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \tag{22.10}$$

яке рівносильне кожній з двох систем

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases}$$

Рівняння виду

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a h(x),$$

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a h(x),$$

$$\alpha \log_a f(x) = \log_a g(x)$$

за допомогою основних властивостей логарифмів зводяться до рівнянь виду (22.10). Такий перехід, взагалі кажучи, може привести до сторонніх коренів. Тому з множини знайдених коренів слід взяти тільки ті, які належать множині $\{x \mid f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0\}$, або перевірити кожен з них підстановкою у вихідне рівняння.

Якщо при розв'язуванні логарифмічних рівнянь виконуються перетворення виразів виду $\log_a(f(x)g(x))$, $\log_a\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$, $\log_a(f(x))^p$, де p — раціональне число, подання якого у вигляді нескоротного дробу має парний знаменник, то можлива втрата коренів. Щоб запобігти цьому, слід користуватись основними властивостями логарифмів у такому вигляді:

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a|f(x)| + \log_a|g(x)|,$$

$$\log_a\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \log_a|f(x)| - \log_a|g(x)|,$$

$$\log(f(x))^p = p\log_a|f(x)|.$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$\frac{\log_2(x^2+3x^2+2x-1)}{\log_2(x^3+2x^2-3x+5)} = \log_{2x} x + \log_{2x} 2.$$

Розв'язання. Права частина визначена для $x > 0$ і $x \neq \dfrac{1}{2}$. Для таких x

$$\log_{2x} x + \log_{2x} 2 = \log 2x(2x) = 1.$$

і задане рівняння записуємо у вигляді

$$\log_2(x^3+3x^2+2x-1) = \log_2(x^3+2x^2-3x+5).$$

Перейдемо до рівняння

$$x^3+3x^2+2x-1 = x^3+2x^2-3x+5$$

або $x^2 + 5x - 6 = 0$, розв'язками якого є $x_1 = 1$, $x_2 = -6$. Оскільки виконувані перетворення до втрати коренів привести не могли, то з допомогою підстановки у вихідне рівняння переконуємось, що $x = 1$ є його єдиний корінь.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3^{1+2\log_3(y-x)} = 48, \\ 2\log_5(2y - x - 12) - \log_5(y - x) = \log_5(y + x). \end{cases}$$

Розв'язання. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю перше рівняння запишемо у вигляді $(y - x)^2 = 16$, де $y - x > 0$. Тоді задана система буде еквівалентною системі

$$\begin{cases} y - x > 0, \\ 2y - x - 12 > 0, \\ y + x > 0, \\ \dfrac{(2y - x - 12)^2}{4} = y + x, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок (16; 20).

Щодо логарифмічних нерівностей, то найпоширенішим у шкільній математиці є нерівності, які мають вигляд

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \qquad (22.11)$$

(нерівність може бути не строгою) або зводяться до них. Нерівність (22.11) еквівалентна системі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \end{cases}$$

якщо $a > 1$, і системі

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

якщо $0 < a < 1$.

Приклад 3. Розв'язати нерівність

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + \log_{\sqrt{3}}(5-x) < 1.$$

Розв'язання. Ліва частина нерівності визначена на множині $\{x \,|\, x-1 > 0, x+1 > 0, 5-x > 0\} = (1;5)$, і її можна подати у вигляді

$$-\log_3(x-1) - \log_3(x+1) + 2\log_3(5-x) = \log_3 \frac{(5-x)^2}{x^2-1} < 1.$$

На множині (1;5) задана нерівність еквівалентна нерівності $\dfrac{(5-x)^2}{x^2-1} < 3$ або $x^2 + 5x - 14 > 0$. Отже, множиною розв'язків є інтервал (2;5).

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що для будь-яких $N_1 > 0, N_2 > 0$

$$\log_a(N_1 N_2) = \log_a M_1 + \log_a N_2,$$

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

2. Довести, що для будь-якого $N > 0$ і будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N.$$

3. Довести, що для $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

4. Спростити вираз

$$\frac{\left(\lg b \cdot 2^{\log_2 \lg b}\right)^{1/2} \log_2^{-1/2} b^2}{\sqrt{\dfrac{\lg^2 b + 1}{2 \lg b} + 1 - 10^{0,5 \lg \lg b^{1/2}}}}.$$

5. Виходячи з інтегрального означення логарифмічної функції, обгрунтувати властивості, приведені в 1–3.

6. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \frac{3}{2}(\log_5(2x-3)^2)^2 + 12(\log_5 \sqrt{x})^2 =$$
$$= (\log_5(2x-3)^3) \log_5 x^3;$$

$$\text{б) } 1 + \lg(1 + x^2 - 2x) - \lg(1 + x^2) = 2 \lg(1 - x);$$

$$\text{в) } (\log_2 x)^2 + \sqrt{3} = 2(1 + \sqrt{3}) \log_2 \sqrt{x}.$$

7. Розв'язати системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \log_2(x - y) = 5 - \log_2(x + y), \\ \dfrac{\lg x - \lg 4}{\lg y - \lg 3} = -1 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \log_2(x + y) - \log_3(x - y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

8. Розв'язати нерівності

$$\text{а)}\ \log_3(x^2-2) < \log_3\left(\frac{3}{2}|x|-1\right)$$

$$\text{б)}\ \log_{\frac{1}{2}}((x+1)(x+3)) + \log_2(x+3) > -2\log_4 11;$$

$$\text{в)}\ \log_5(\sqrt{2+x-x^2}+4) >$$

$$> \log_{\frac{1}{5}} \frac{25}{\sqrt{2+x-x^2}+\sqrt{1-x}+3} + 2.$$

9. Нехай D — однозв'язна область, яка не містить точок $z = \infty$ і $z = 0$, але ще містить точку $z = 1$. Довести, що для всякого цілого n в області D існує тільки одна гілка $\varphi(z)$ функції $w = \operatorname{Ln} z$, яка задовольняє умову $\varphi(1) = 2\pi n i$.

10. Знайти образи площини з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі при відображеннях гілками логарифмічної функції $w = \operatorname{Ln} z$, якщо:
1) точка $z_0 = 1$ переходить у точку $w_0 = 4\pi i$;
2) точка $z_0 = -i$ переходить у точку $w_0 = \dfrac{3\pi i}{2}$;
3) точка $z_0 = i$ переходить у точку $w_0 = -\dfrac{7\pi i}{2}$.

23 *ЛЕКЦІЯ*: Степенева функція дійсної та комплексної змінної

Означення степеневої функції через поняття степеня, основні властивості. інші підходи до означення степеневої функції. Степенева функція комплексної змінної.

Література. [1], ч. 1, с. 86–87, 90; [2], ч. 1, с. 136; [3], т. 1, с. 105; [4], с. 72–80, 104–107; [9], ч. 2, с. 362.

Будемо вважати, що для будь-якого дійсного α означено степінь будь-якого додатного числа з показником степеня α, зокрема $1^\alpha = 1$. Для нього мають місце основні властивості, зокрема, для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ і будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x_1^\alpha x_2^\alpha = (x_1 x_2)^\alpha. \tag{23.1}$$

Крім того будемо вважати обгрунтованими основні властивості показникової функції.

Означення 23.1. *Відповідність, яка кожному $x \in \mathbb{R}^+$ відносить число x^α, називається степеневою функцією і позначається $y = x^\alpha$ (читається „x у степені α“).*

В силу означення її областю визначення є множина $\mathbb{R}^+$ і набирає вона тільки додатних значень. Якщо $\alpha > 0$, то для $x > 1$ степінь $x^\alpha > 1$, а для $x < 1$ степінь $x^\alpha < 1$. Звідси маємо, що коли $x_1 < x_2$, то $x_2^\alpha - x_1^\alpha = x_2^\alpha \left(1 - \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^\alpha\right) > 0$, тобто степенева функція $y = x^\alpha$ у випадку $\alpha > 0$ є зростаючою. Якщо ж $\alpha < 0$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}^+$ $x^\alpha = \dfrac{1}{x^{-\alpha}}$, де $-\alpha > 0$. Звідси уже легко отримати, що степенева функція $y = x^\alpha$ у випадку $\alpha < 0$ є спадною.

Покажемо, що

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha. \tag{23.2}$$

Справді, якщо покласти $x = e^y - 1$ і скористатись тим, що

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1,$$

то дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y} - 1}{\alpha y}\cdot\frac{y}{e^y - 1}\alpha = \alpha.$$

Теорема 23.1. *Функція $y = x^\alpha$ неперервна у кожній точці своєї області визначення.*

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}^+$. Тоді

$$\lim_{\triangle x\to 0}\triangle y = \lim_{\triangle x\to 0}\left((x+\triangle x)^\alpha - x^\alpha\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} x^\alpha\left(\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)^\alpha - 1\right) =$$

$$= \lim_{\triangle x\to 0} x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\dfrac{\triangle x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\triangle x}{x}}\triangle x = 0,$$

тобто нескінченно малому приросту аргумента відповідає нескінченно малий приріст функції. А це й означає, що функція $y = x^\alpha$ неперервна у кожній точці $x \in \mathbb{R}^+$. ■

Зауваження. Оскільки функція $y = x^\alpha$ є монотонною і неперервною на $\mathbb{R}^+$, то

$$\lim_{x\to 0+0} x^\alpha = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha > 0,\\ +\infty, & \text{якщо } \alpha < 0,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^\alpha = \lim_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } \alpha > 0,\\ 0, & \text{якщо } \alpha < 0.\end{cases}$$

Звідси випливає, що множиною значень функції $y = x^\alpha$ ($\alpha \neq 0$) є множина $\mathbb{R}^+$.

Теорема 23.2. *Функція $y = x^\alpha$ диференційовна у кожній точці своєї області визначення, причому*

$$y' = \alpha x^{\alpha - 1}. \tag{23.3}$$

Доведення. Нехай $x \in \mathbb{R}^+$. Тоді

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x + \triangle x)^\alpha - x^\alpha}{\triangle x} =$$

$$= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\left(1 + \dfrac{\triangle x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\triangle x}{x}} = \alpha x^{\alpha - 1},$$

тобто у кожній точці своєї області визначення функція $y = x^\alpha$ має похідну. А це й означає, що вона диференційовна у кожній точці $x \in \mathbb{R}^+$. ■

Скориставшись основною логарифмічною тотожністю, степеневу функцію $y = x^\alpha$ можна подати у вигляді

$$y = x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}, \tag{23.4}$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$, тобто у вигляді композиції логарифмічної та показникової функції, і останнє можна прийняти за означення степеневої функції.

Означення 23.2. *Відповідність, яка кожному $x \in \mathbb{R}$ відносить $e^{\alpha \ln x}$ (за a взято число e), називається степеневою функцією і позначається $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.*

При дослідженні так означеної функції слід скористатись властивостями логарифмічної і показникової функцій, а також властивостями композиції двох функцій. Так, наприклад, оскільки для будь-якого додатного x $\alpha \ln x \in \mathbb{R}$, а показникова функція визначена на $\mathbb{R}$, то функція $f(x) = x^\alpha$ визначена на $\mathbb{R}^+$, причому для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$

$$f(x_1 x_2) = e^{\alpha \ln(x_1 x_2)} = e^{\alpha(\ln x_1 + \ln x_2)} = e^{\alpha \ln x_1} e^{\alpha \ln x_2} = f(x_1) f(x_2).$$

А оскільки композиція двох зростаючих функцій є зростаюча, а композиція спадної і зростаючої функцій є спадна функція, то врахувавши, що функція $\alpha \ln x$ зростає, якщо $\alpha > 0$ і спадає якщо $\alpha < 0$, а функція e^x зростає, маємо, що степенева функція зростає, якщо $\alpha > 0$, і спадає, якщо $\alpha < 0$. Ця функція неперервна, як композиція двох неперервних функцій. і нарешті,

$$y' = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Можна дати також і дескриптивне означення степеневої функції.

Означення 23.3. *Степеневою функцією називають таку функцію f, для якої*

1) $D(f) = E(f) = \mathbb{R}^+$*;*

2) функція f неперервна на $\mathbb{R}^+$;

3) для будь-яких $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$;

4) має місце рівність $f(a) = b$, де $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Очевидно, що степенева функція $y = x^\alpha$, де $\alpha = \log_a b$, задовольняє всі чотири властивості. Залишається довести єдиність.

Теорема 23.3. *Для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^+$ $a \neq 1$ існує єдина функція, яка задовольняє властивостям 1) – 4).*

Доведення. Прупустимо, що крім функції $y = x^{\alpha}$, де $\alpha = \log_a b$ існує ще одна функція f, яка задовольняє властивості 1) – 4) і не збігається з функцією $y = x^{\alpha}$. Насамперед очевидно, що $f(1) = 1$ і для будь-яких $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$f(x_1 x_2 \dots x_n) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n).$$

Звідси отримаємо, що для будь-якого натурального n $f(a^n) = b^n$, $f(a^{-n}) = b^{-n}$. А оскільки $b = f(a^{\frac{1}{n}\cdot n}) = \left(f(a^{\frac{1}{n}})\right)^n$, то $f(a^{\frac{1}{n}}) = b^{\frac{1}{n}}$, а отже, для будь-якого раціонального числа $r = \dfrac{p}{q}$, де $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$

$$f(a^r) = f\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \left(f(a^{\frac{1}{q}})\right)^p = \left(b^{\frac{1}{q}}\right)^p = b^r.$$

Нехай γ — довільне ірраціональне число і послідовність (r_n) є послідовністю його раціональних наближень. Тоді в силу неперервності функції a^x, $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = \lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n} = b^{\gamma}$. Таким чином, для будь-якого дійсного числа c має місце рівність $f(a^c) = b^c$. Звідси маємо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = f\left(a^{\log_a x}\right) = b^{\log_a x} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a x} =$$

$$= a^{\log_a b \log_a x} = a^{\log_a x^{\log_a b}} = x^{\log_a b},$$

тобто для кожного $x \in \mathbb{R}^+$ $f(x)$ збігається з функцією $y = x^{\log_a b}$. Отримане протиріччя і доводить, що існує єдина функція, яка задовольняє властивості 1) – 4). ■

Зауваження. Якщо α — раціональне додатне число і у поданні $\alpha = \dfrac{p}{q}$, де $p, q \in \mathbb{N}$ $(p,q) = 1$, q — непарне, то степеневу функцію $y = x^{\alpha}$ можна продовжити на всю числову вісь, поклавши $f(0) = 0$ і для $x < 0$

$$x^{\alpha} = \begin{cases} |x|^{\alpha}, & \text{якщо } p \text{ — парне,} \\ -|x|^{\alpha}, & \text{якщо } p \text{ — непарне,} \end{cases}$$

У випадку парного q функція $y = x^\alpha$ доозначається тільки у точці $x = 0$ ($0^\alpha = 0$). Якщо ж α — раціональне від'ємне число і у поданні $\alpha = \dfrac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(|p|, q) = 1$, q — непарне, то степеневу функцію $y = x^\alpha$ доозначають як і для α додатного, але тільки для $x < 0$.

У шкільному курсі математики вивчення степеневої функції розпочинається у VIII класі ($y = x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = \dfrac{k}{x}$), продовжується у IX класі, де фактично уже йде мова про степеневу функцію $y = x^\alpha$ з раціональним показником. У X класі після узагальнення поняття степеня [8, с. 153–158] степенева функція означається так „Функцію $f(x) = x^p$, де p — стале дійсне число, а x — (основа) змінна, називають степеневою функцією." Область визначення такої функції пов'язується з показником степеня p.

Означення степеневої функції комплексної змінної можна дати за зразком означень 23.1 і 23.2.

Означення 23.4. *Відповідність, яка кожному комплексному числу $z \neq 0$ відносить степінь z^α, де $\alpha \in \mathbb{C}$, називається степеневою функцією комплексної змінної і позначається $w = z^\alpha$.*

Якщо врахувати, що для $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy},$$

а для кожного $z \neq 0$ і $\alpha = a + bi$

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},$$

де

$$\alpha \operatorname{Ln} z = (a + bi) \operatorname{Ln} z = (a + bi)(\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)) =$$
$$= a \ln|z| - b \arg z - b2k\pi + i(b \ln|z| + a \arg z + a2k\pi),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, то степеневою функцією $w = z^\alpha$ є відповідність, яка кожному $z \neq 0$ відносить множину чисел

$$\{e^{a\ln|z| - b\arg z - 2k\pi b}(\cos(b\ln|z| + a\arg z + 2k\pi a) +$$

$$+ i\sin(b\ln|z| + a\arg z + 2k\pi a)) \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

і тільки, коли α є цілим числом функція $w = z^\alpha$ є однозначною. Наприклад, функція

$$w = z^i = e^{-(\arg z + 2k\pi)}(\cos\ln|z| + i\sin\ln|z|)$$

є нескінченно-значною, і для фіксованого z всі можливі її значення розташовуються на промені $\arg w = \ln|z|$, причому їх модулі утворюють дві геометричні прогресії із знаменниками $e^{-2\pi}$ і $e^{2\pi}$. Зокрема, якщо $|z| = 1$, то всі ці значення дійсні. Очевидно також, що

$$\lim_{k\to\infty} e^{-(\arg z + 2k\pi)} = 0, \quad \lim_{k\to-\infty} e^{-(\arg z + 2k\pi)} = \infty,$$

тобто значення функції $w = z^i$, які відповідають додатним k, збігаються до точки $w = 0$, а ті, які відповідають від'ємним k збігаються до точки $w = \infty$.

Нескінченнозначною степенева функція $w = z^\alpha$ буде у випадку, коли α — ірраціональне число. Якщо ж α — раціональне, то ця функція скінченнозначна. Справді, якщо $\alpha = \dfrac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $(|p|, 1) = 1$, то

$$\alpha \operatorname{Ln} z = \frac{p}{q}\ln|z| + i\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi),$$

де $k \in \mathbb{Z}$, і в силу періодичності функції e^z маємо:

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = \{e^{\frac{p}{q}\ln|z| + i\frac{p}{q}(\arg z + 2k\pi)} \mid k = 0, 1, \ldots, q-1\}.$$

Врахувавши той факт, що функція $w = z$ аналітична на всій комплексній площині, і скориставшись правилом диференціювання добуіку, легко переконатись, що для функції $w = z^n$ $w' = nz^{n-1}$, тобто степенева функція з натуральним показником аналітична на всій комплексній площині.

Якщо ж α — раціональне, зокрема $\alpha = \dfrac{1}{n}$, то функція $w = \sqrt[n]{z}$ для $z \neq 0$ є n-значною (її доозначають однозначно у точці $z = 0$), і тому дослідження ведуть для окремих гілок цієї функції, виділених на деякій області D. Як правило, за область D беруть комплексну площину з розрізом по від'ємній частині дійсної осі. У цій області існує n різних віток

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n}\right),$$

де $2k\pi - \pi < \operatorname{Arg}_k z < -\pi + 2(k+1)\pi$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, функції $w = \sqrt[n]{z}$. Кожна з цих віток взаємно однозначно відображає область D на один із секторів

$$D_k = \left\{ w \;\middle|\; \frac{2\pi}{n}k - \frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg} w < \frac{2\pi}{n}(k+1) - \frac{\pi}{n}, k = 0, \ldots, n-1 \right\}.$$

В результаті однократного обходу навколо початку координат вздовж будь-якого кола $|z| = r$ значення $\sqrt[n]{z}$, неперервно змінюючись, переходять від гілки $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ до гілки $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k+1}$ при обході проти руху годинникової стрілки і до гілки $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k-1}$ — при обході за годинниковою стрілкою. Після n-кратного обходу навколо початку координат в одному напрямку значення функції $\sqrt[n]{z}$, переходячи від однієї гілки до іншої, повернеться до вихідного. Кожна гілка функції $w = \sqrt[n]{z}$ задовольняє теорему про похідну оберненої функції, а отже, для кожного $z \in D$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)'_k = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)^{n-1}}, \ k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

і гілка $(\sqrt[n]{z})_k$ є аналітичною функцією на D.

Приклад 1. У площині (z) з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі знайти значення гілки функції $\sqrt[4]{z}$ та її похідної у точці $z=-i$, якщо $\sqrt[4]{1}=i$.

Розв'язання. Оскільки

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_k = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{4} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{4}\right),$$

де $2k\pi-\pi < \operatorname{Arg}_k z < -\pi+2(k+1)\pi$, $k=0,1,2,3$, то за умови $\sqrt[4]{1}=i$ треба знайти те k, для якого $\cos\dfrac{\operatorname{Arg}_k z}{4}+i\sin\dfrac{\operatorname{Arg}_k z}{4}=i$. Остання рівність має місце, коли

$$\sin\frac{\operatorname{Arg}_k 1}{4}=1,$$

тобто $\operatorname{Arg}_k 1 = 2\pi$. Звідси маємо, що при $k=1$ $\pi<\operatorname{Arg}_1 1<3\pi$, і шукана гілка має вигляд

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_1 = \sqrt[4]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_1 z}{4} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_1 z}{4}\right).$$

Тоді значення цієї гілки функції $\sqrt[4]{z}$ у точці $z=-i$ дорівнює $\left(\operatorname{Arg}_1(-i)=\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$$\left(\sqrt[4]{-i}\right)_1 = \cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}.$$

А оскільки $\left(\sqrt[4]{z}\right)_1' = \dfrac{1}{4\left(\sqrt[4]{z}\right)_1^3}$, то

$$\left(\sqrt[4]{z}\right)_1'\Big|_{z=-i} = \frac{1}{4\left(\sqrt[4]{-i}\right)_1^3} = \frac{1}{4\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4\left(-\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{4}\left(-\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right).$$

Якщо α не є раціональним, то функція

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)},$$

де $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, нескінченнозначна. Знову за область D візьмемо комплексну площину з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі, і для кожного $k \in \mathbb{Z}$ маємо гілку $(z^\alpha)_k = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)}$. Обчислимо похідну гілки $(z^\alpha)_k$. Скориставшись правилом диференціювання складної функції, маємо

$$(z^\alpha)'_k = e^{\alpha(\ln z + 2k\pi i)}(\alpha(\ln z + 2k\pi i))' = (z^\alpha)_k \cdot \frac{\alpha}{z} = \alpha(z^{\alpha-1})_k.$$

Отже, кожна гілка $(z^\alpha)_k$ є аналітичною функцією на області D.

Приклад 2. У площині (z) з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі знайти значення гілки функції $w = z^i$ та її похідної у точці $z = 1 + i$, якщо $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Розв'язання. Оскільки

$$i^i = e^{i(\ln|i| + i\frac{\pi}{2}) + i2k\pi} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi},$$

де $k \in \mathbb{Z}$, то $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ при $k = 0$. Отже, $(z^i)_0 = e^{-\arg z} e^{i\ln|z|}$ шукана гілка. Тоді

$$((1+i)^i)_0 = e^{-\frac{\pi}{4}} e^{i\ln\sqrt{2}} = e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2}).$$

Оскільки похідна цієї гілки має вигляд

$$(z^i)'_0 = i(z^{i-1})_0 = ie^{(i-1)\ln z} = ie^{(i-1)(\ln|z| + i\arg z)},$$

то її значення у точці $z = 1 + i$ дорівнює

$$(z^i)'_0\big|_{z=1+i} = ie^{(i-1)(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4})} = ie^{-\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}} e^{i(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4})} =$$

$$= e^{-\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}}(\sin(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i\cos(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4})).$$

На закінчення декілька зауважень щодо рівнянь, що містять степеневі функції. Це, насамперед, алгебраїчні рівняння

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — коефіцієнти рівняння (дійсні або комплексні числа), $a_0 \neq 0$, $n \geqslant 1$. В силу основної теореми алгебри таке рівняння над полем комплексних чисел з врахуванням кратності має рівно n коренів.

Популярними у шкільному курсі математики є ірраціональні рівняння $F(x) = 0$, де $F(x)$ — алгебраїчна функція, яка містить радикали. Звичайно степенева функція може входити до складу і показникового, і логарифмічного, і взагалі будь-якого рівняння. Так що виділити клас рівнянь, які слід було назвати степеневими напевно неможливо.

Завдання для самоконтролю.

1. Скориставшись означенням степеневої функції

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

   дослідити її і побудувати графіки при різних значеннях показника степеня α.

2. Проаналізувати означення степеневої функції, яке запропоновано у шкільному підручнику. Чим різниця воно від запропонованих вище?

3. Порівняйте властивості функцій

   а) $y = x, \quad y = x^3, \quad y = x^5;$

   б) $y = x^2, \quad y = x^4, \quad y = x^6;$

   в) $y = x^{-2}, \quad y = x^{-3}.$

4. Знайти образ координатної сітки при відображенні
$$w = z^2.$$

5. Довести, що степенева функція $w = z^\alpha$ буде однозначною, якщо $\alpha \in \mathbb{Z}$, нескінченнозначною, якщо α — ірраціональне.

6. Довести, що при фіксованому z різні значення степеневої функції $w = z^\alpha$, де $\alpha = a + bi$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, лежать на колах, радіуси яких утворюють дві нескінченні геометричні прогресії, а аргументи цих значень — дві нескінченні арифметичні прогресії.

7. Довести, що при фіксованому z значення степеневої функції $w = z^\pi$ лежать на колі $|w| = r^\pi$, причому множина цих значень скрізь щільна на цьому колі.

8. Означимо логарифм при будь-якій основі $a \neq 0$ так
$$\mathrm{Log}_a z := \frac{\mathrm{Ln}\, z}{\mathrm{Ln}\, a} = \frac{\ln z + 2k\pi i}{\ln a + 2n\pi i},$$
де $k, n \in \mathbb{Z}$. Чи існує такий показник степеня α, що $1^\alpha = 100$?

9. Означимо показникову функцію $w = a^z$ при будь-якому $a \neq 0$ так
$$a^z := e^{z\,\mathrm{Ln}\, a}.$$
Знайти всі розв'язки рівнянь:
$$\text{а)}\ \ (-1)^z = 1^z; \quad \text{б)}\ \ e^z = 1^z; \quad \text{в)}\ \ i^z = 1^z.$$

24 *ЛЕКЦІЯ*: Тригонометричні та обернені тригонометричні функції дійсної та комплексної змінної

Класичне означення тригонометричних функцій дійсної змінної, основні властивості. Обернені тригонометричні функції, їх властивості. інші підходи до означення тригонометричних функцій. Тригонометричні функції комплексної змінної, їх властивості. Тригонометричні рівняння та нерівності.

Література. [1], ч. 3, с. 252–257; [3], т. 1, с. 105–106; [4], с. 92–99; [8], с. 18–123; [9], ч. 2, с. 356–358; Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч. 1. М.: Наука, 1971, с. 120–125, 139–148; Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа. М.: Наука, 1971, с. 422–429.

Термін „тригонометричні функції“ означає клас елементарних функцій, до складу якого входять функції : $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$. А оскільки

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}, \ \operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}, \ \sec x := \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cosec} x := \frac{1}{\sin x},$$

то природно основну увагу зосередити на функціях : $y = \sin x$, $y = \cos x$. Слід також зазначити, що класичне означення цих функцій має геометричне походження, точніше воно грунтується на поняттях кута і його міри, а тому нагадаємо саму необхідну інформацію щодо вимірювання кутів.

Геометричним кутом називають частину площини, обмеженої двома променями, які виходять з однієї точки (вершини кута), зокрема кут, сторони якого лежать на одній прямій, називається розгорнутим. За одиницю вимірювання геометричних кутів приймають градус, який вважають мірою кута, що становить $\frac{1}{180}$ частину розгорнутого. Очевидно, що мірою геометричного кута може бути будь-яке число від 0° до 360°.

Однак для побудови теорії тригонометричних функцій як функцій числових більш зручним є так зване радіанне вимірювання кутів, яке вводиться так. Нехай маємо деякий поки-що геометричний кут. Опишемо коло з центром у вершині кута радіуса R. Тоді стосовно цього кола заданий кут є центральним кутом, а та частина кола, яка розташована всередині кута, називається дугою кола, на яку він спирається. Виявляється, що відношення довжини такої дуги до радіуса не залежить від радіуса і тому може бути прийняте за міру заданого кута, зокрема, якщо взяти коло з радіусом 1, то мірою кута буде довжина дуги на яку він спирається як центральний кут. За одиницю вимірювання кутів приймають радіан, який вважають мірою кута, для якого відповідний центральний кут спирається на дугу одиничного кола, довжина якої дорівнює 1 (на дугу кола, довжина якої дорівнює радіусу). Очевидно, що радіанну міру має кожний геометричний кут, зокрема міра розгорнутого кута дорівнює π. Якщо позначити через θ_d і θ_r міру кута θ відповідно в градусах і в радіанах, то, враховуючи, що π радіан $= 180^\circ$, маємо

$$\frac{\theta_r}{\pi} = \frac{\theta_d}{180} \quad \text{або} \quad \theta_r = \frac{\pi}{180}\theta_d.$$

Вимірювання кутів довжиною дуги одиничного кола дає можливість узагальнити поняття кута так, що для будь-якого $t \in \mathbb{R}$ існує кут, міра якого дорівнює t. З цією метою на одиничному колі фіксуємо точку P_0 і вважаємо, що промінь OP_0 (O — центр кола) є фіксованою стороною кута з вершиною O. Якщо $t > 0$, то, знайшовши на одиничному колі точку P_t, відстань якої від точки P_0 вздовж одиничного кола у додатному напрямку (проти годинникової стрілки) дорівнює t, вважаємо, що промінь OP_t є другою стороною кута, міра якого дорівнює t радіан. Якщо ж $t < 0$, то, знайшовши на одиничному колі точку P_t, відстань якої від точки P_0 вздовж одиничного кола у від'ємному напрямку (за годинниковою стрілкою) дорівнює $|t|$, вважаємо, що промінь OP_t є другою стороною кута, міра якого дорівнює t радіан.

Про точку P_t кажуть, що вона є образом точки P_0 при повороті навколо центра кола на кут t радіан.

Нехай на координатній площині xOy задано одиничне коло, тобто коло з центром у початку координат і одиничним радіусом (Рис. 20), і нехай P_t є образ точки $P_0(1,0)$ при повороті навколо центра на кут t радіан.

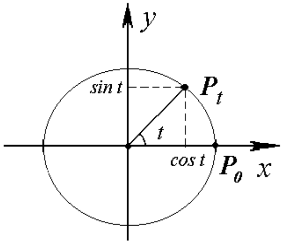


Рис. 20

Означення 24.1. *Синусом числа t називають ординату точки P_t і позначають $\sin t$, а відповідність, яка кожному дійсному числу t відносить його синус, є тригонометричною функцією $y = \sin t$.*

Означення 24.2. *Косинусом числа t називають абсцису точки P_t і позначають $\cos t$, а відповідність, яка кожному дійсному числу t відносить його косинус, є тригонометричною функцією $x = \cos t$.*

У шкільному курсі математики поняття синуса і косинуса вводяться спочатку у прямокутному трикутнику для гострих кутів (міра кутів градусна), далі з допомогою одиничного кола для кутів від 0° до 180°, і тільки у 10 класі вводяться поняття синуса і косинуса числа. Після цього констується [8, с. 29], що „оскільки кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність дійсні числа $\sin x$ і $\cos x$, то вважатимемо, що на множині $\mathbb{R}$ задано функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$.“

З означень 24.1 і 24.2 відразу випливає, що $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, а оскільки для кожного $k \in \mathbb{Z}$ $P_{t+2k\pi} = P_t$, то функції $y = \sin t$ і $x = \cos t$ періодичні з основним періодом 2π. Координатні осі поділяють площину на чотири частини, які називають координатними четвертями, причому першою, якщо $x > 0$ і $y > 0$, другою, якщо $x < 0$ і $y > 0$, третьою, якщо $x < 0$ і $y < 0$, четвертою, якщо $x > 0$ і $y < 0$. Тоді точка P_t буде знаходитись у першій чверті ($\sin t > 0, \cos t > 0$), якщо $t \in (2k\pi; 2k\pi + \frac{\pi}{2})$, у другій ($\sin t > 0, \cos t < 0$),якщо $t \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}; (2k\pi+1)\pi)$, у третій ($\sin t < 0, \cos t < 0$),якщо $t \in ((2k\pi+1)\pi; 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$, у четвертій ($\sin t < 0, \cos t > 0$),якщо $t \in (2k\pi + \frac{3\pi}{2}; 2(k+1)\pi)$, де $k \in \mathbb{Z}$. При $t = 2k\pi \;\; \sin t = 0, \cos t = 1$ (максимальне значення функції $x = \cos t$), при $t = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \;\; \sin t = 1$ (максимальне значення функції $y = \sin t$), $\cos t = 0$, при $t = (2k+1)\pi \;\; \sin t = 0, \cos t = -1$ (мінімальне значення функції $x = \cos t$), при $t = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$ $\sin t = -1$ (мінімальне значення функції $y = \sin t$), $\cos t = 0$. Знову таки безпосередньо з означення випливає, що функція $y = \sin t$ зростає на інтервалах $(2k\pi - \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ і спадає на інтервалах $(2k\pi + \frac{\pi}{2}; 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$, де $k \in \mathbb{Z}$. Оскільки при кожному t точки P_t і P_{-t} симетричні відносно осі абсцис, то абсциси цих точок збігаються і $\cos t = \cos(-t)$, а ординати протилежні і $\sin t = -\sin(-t)$. А оскільки при кожному t точка P_t лежить на колі $x^2 + y^2 = 1$, то має місце тотожність $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ (основна тригонометрична тотожність).

Теорема 24.1. *Функції $x = \cos t, y = \sin t$ неперервні у кожній точці своєї області визначення.*

Доведення. Нехай $t_0 \in \mathbb{R}$. Тоді $\triangle x = \cos(t_0 + \triangle t) - \cos t_0$ є приріст функції $x = \cos t$, що відповідає приросту аргумента $\triangle t$. Покажемо, що $\lim\limits_{\triangle t \to 0} \triangle x = 0$. Нехай P_{t_0} і $P_{t_0+\triangle t}$ (Рис. 21) є образ точки $P_0(1,0)$ при повороті навколо центра кола на кути t_0 і $t_0 + \triangle t$ радіан. Тоді у прямокутному трикутнику $QP_{t_0}P_{t_0+\triangle t}$ катет $QP_0 = |\triangle x|$, а його гіпотенуза $P_{t_0}P_{t_0+\triangle t}$ менша, ніж довжина дуги $\overset{\frown}{P_{t_0}P_{t_0+\triangle t}}$, тобто $|\triangle x| = QP_{t_0} < P_{t_0}P_{t_0+\triangle t} < |\triangle t|$.

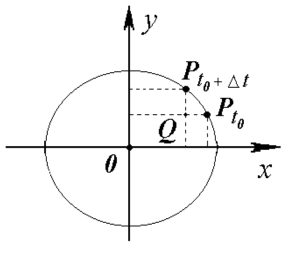


Рис. 21

Звідси випливає, що коли $\triangle t \to 0$, то і $\triangle x \to 0$. Точно так саме доводиться неперервність функції $y = \sin t$. ■

Наслідок. *Для функцій* $y = \sin t, x = \cos t$ $E(\sin) = E(\cos) = [-1;1]$*, тобто для будь-якого* $a \in [-1;1]$ *рівняння* $\sin t = a$ *і* $\cos t = a$ *мають розв'язки.*

Теорема 24.2. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1.$

Теорема 24.3. *Функції* $y = \sin t$*,* $x = \cos t$ *диференційовні у кожній точці своєї області визначення, причому* $(\sin t)' = \cos t$*,* $(\cos t)' = -\sin t$*.*

З останньої теореми випливає, що функції $y = \sin t$, $x = \cos t$ у будь-якій точці нескінченне число раз диференційовні. Тому для кожної з них можна побудувати ряд Тейлора, причому мають місце рівності

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n,$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n,$$

зокрема при $t_0 = 0$ маємо:

$$\begin{aligned}\cos t &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!},\\ \sin t &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.\end{aligned}\tag{24.1}$$

Формули (24.1) можуть бути використані для обчислення наближених значень тригонометричних функцій як значень многочленів, причому

$$\left|\cos t - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+2)!}\,t^{2n+2},$$

$$\left|\sin t - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!}\right| \leqslant \frac{1}{(2n+1)!}\, t^{2n+1}.$$

Приклад 1. Обчислити $\sin 1$ з точністю до 10^{-5}.

Розв'язання. Оскільки

$$\sin 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$$

і

$$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} < \frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} < 10^{-5},$$

то

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = \frac{4241}{5040} \approx 0,84147$$

і

$$|\sin 1 - 0,84147| < 10^{-5}.$$

Теорема 24.4 (теорема додавання). *Для будь-яких t, $x \in \mathbb{R}$ мають місце рівності*

$$\begin{aligned} \sin(t+x) &= \sin t \cos x + \cos t \sin x, \\ \cos(t+x) &= \cos t \cos x - \sin t \sin x. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Доведення. Звичайно довести справедливість (24.2) можна, скориставшись класичним означенням тригонометричних функцій. Ми ж скористаємось диференційовністю цих функцій і тим, що загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 0$ має вигляд $y = A \sin t + B \cos t$, де $A, B \in \mathbb{R}$. Нехай $f(t) = \sin(t+x)$, де x — фіксоване. Тоді $f''(t) = -\sin(t+x)$, і $f(t)$ розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 0$, який задовольняє початкові умови $f(0) = \sin x$, $f'(0) = \cos x$. Цей розв'язок можна отримати із загального, врахувавши, що $y(0) =$

$B = f(0) = \sin x$, $y'(0) = A = f'(0) = \cos x$. Звідси дістаємо, що $f(t) = \cos x \sin t + \sin x \cos t$, тобто першу з рівностей (24.2). Друга обгрунтовується аналогічно. ■

Якщо залишатись у межах однозначних функцій, то в силу періодичності функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ (ми перейшли до звичайного позначення незалежної змінної) обернених не мають. Однак, враховуючи, що ці функції кусково монотонні, можна ставити питання про існування обернених функцій на певному проміжку. Оскільки функція $y = \sin x$ визначена, зростаюча і неперервна на відрізку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, причому $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, то існує обернена функція, яка визначена, зростаюча і неперервна на відрізку $[-1; 1]$. Стандартне позначення $y = \arcsin x$ (геометричною мовою $\arcsin x$ — це дуга, синус якої дорівнює x, $\sin \arcsin x = x$). Аналогічно, оскільки функція $y = \cos x$ визначена, спадна і неперервна на відрізку $[0; \pi]$, причому $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, то існує обернена функція, яка визначена, спадна і неперервна на відрізку $[-1; 1]$. Позначення $y = \arccos x$.

В очевидний спосіб перевіряється, що для всіх $x \in [-1; 1]$ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Як приклад, переконаемось, що має місце третя рівність. Справді, якщо $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$0 < \arcsin x + \arccos x < \pi.$$

А отже, $\cos(\arcsin x + \arccos x) = \cos(\arcsin x)\cos(\arccos x) - \sin(\arcsin x)\sin(\arccos x) = x\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} = 0$, тобто $\arcsin x + \arccos x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. Якщо ж $-1 \leqslant x < 0$, то $0 < -x \leqslant 1$ і $\arcsin x + \arccos x = -\arcsin(-x) + \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2}$.

Скориставшись основними співвідношеннями, що пов'язують тригонометричні функції, можна кожну обернену тригонометричну функцію виразити через іншу.

Приклад 2. Довести, що

а) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$,

де $0 < x < 1$;

б) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,

де $0 < x < 1$;

в) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$,

де $x > 0$;

г) $\operatorname{arcctg} x = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$,

де $x > 0$.

Розв'язання. а) Нехай $y = \arcsin x$ і $0 < x < 1$. Тоді $\sin y = x$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$,

$$\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{ctg} y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

і $y = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

в) Нехай $y = \operatorname{arctg} x$ і $x > 0$. Тоді $\operatorname{tg} y = x$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$,

$$\sin y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 y}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}} = \frac{\operatorname{tg} y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\cos y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{ctg} y = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{x},$$

і $\quad y = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{x}.$

Скориставшись інструментарієм аналізу функцій, можна уникнути тих геометричних міркувань, які використовуються у класичному означенні тригонометричних функцій та обгрунтуванні їх властивостей. Так, наприклад, доведено, що існує єдина пара функцій $S(x)$ і $C(x)$ визначених на $\mathbb{R}$, які задовольняють умови:

1) для будь-яких $x', x'' \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &S(x'+x'') = S(x')C(x'') + C(x')S(x''),\\ &C(x'+x'') = C(x')C(x'') - S(x')S(x''),\\ &S^2(x) + C^2(x) = 1; \end{aligned} \tag{24.3}$$

2) $$S(0)=0,\ C(0)=1,\ S(\frac{\pi}{2})=1,\ C(\frac{\pi}{2})=0; \tag{24.4}$$

3) для будь-якого $x \in (0; \dfrac{\pi}{2})$ виконується нерівність

$$0 < S(x) < x. \tag{24.5}$$

Очевидно, що функції $S(x) = \sin x$, $C(x) = \cos x$ задовольняють умови (24.3) – (24.5), а отже, можна дати таке означення тригонометричних функцій.

Означення 24.3. *Функції, які задовольняють умови (24.3) – (24.5) називаються тригонометричними функціями і позначаються* $S(x) = \sin x$, $C(x) = \cos x$.

Скориставшись тим, що функції $y = \cos x$, $y = \sin x$ диференційовні нескінченне число раз, ми прийшли до їх подання у вигляді (24.1). Можна діяти навпаки. А саме, оскільки степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

збігаються на $\mathbb{R}$, то їх суми є функції визначені на $\mathbb{R}$. Позначимо суму першого ряду і другого ряду відповідно через $C(x)$ і $S(x)$, і перевіримо, що ці функції задовольняють умови (24.3) – (24.5). Скориставшись тим, що абсолютно збіжні ряди можна перемножати (множення за Коші) і що сума отриманого ряду дорівнює добутку сум рядів, які перемножалися маємо, наприклад,

$$C(x')C(x'') - S(x')S(x'') = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x')^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x'')^{2n}}{(2n)!} -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(x')^{2n-1}}{(2n-1)!} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{(x'')^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= 1 - \frac{(x')^2}{2!} - \frac{(x'')^2}{2!} - \frac{x'x''}{1!1!} + \frac{(x')^4}{4!} + \frac{(x')^2(x'')^2}{2!2!} + \frac{(x'')^4}{4!} +$$

$$+\frac{x'(x'')^3}{1!3!} + \frac{(x')^3 x''}{3!1!} - \cdots + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{(x')^{2k}}{(2k)!}(-1)^{n-k} \frac{(x'')^{2n-2k}}{(2n-2k)!} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{(x')^{2k-1}}{(2k-1)!}(-1)^{n-k} \frac{(x'')^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}((x')^2 + 2x'x'' + (x'')^2) + \frac{1}{4!}((x')^4 + C_4^1 x'(x'')^3 +$$

$$+C_4^2 (x')^2 (x'')^2 + C_4^3 x'(x'')^3 + (x'')^4) - \cdots +$$

$$+(-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k (x')^k (x'')^{2n-k} + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x' + x'')^{2n}}{(2n)!} = C(x' + x'').$$

Аналогічно обгрунтовуються ще дві рівності з (24.3). Очевидно, що $S(0) = 0$, $C(0) = 1$. Покажемо, що $S(\frac{\pi}{2}) = 1$, $C(\frac{\pi}{2}) = 0$. З цією метою спочатку покажемо, що на інтервалі $(0; 2)$ існує єдина точка, у якій функція $C(x)$ обертається в нуль. Справді, оскільки $C(0) = 1$, а

$$C(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \cdots - \frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!} +$$

$$+ \frac{2^{4n}}{(4n)!} - \cdots = -\frac{1}{3} - \frac{2^6}{6!}\left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!}\left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right) - \cdots$$

$$- \frac{2^{4n-2}}{(4n-2)!}\left(1 - \frac{2^2}{4n(4n-1)}\right) - \cdots < 0,$$

і $C(x)$ неперервна на відрізку $[0; 2]$, то існує точка $\alpha \in (0; 2)$, у якій $C(\alpha) = 0$. А оскільки

$$S(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{x^{4k-3}}{(4k-3)!}\left(1 - \frac{x^2}{(4k-2)(4k-1)}\right) + \cdots > 0$$

для всіх $x \in (0; 2)$ і $C'(x) = -S(x)$, то $C(x)$ на відрізку $[0; 2]$ спадає і α єдина точка, у якій $C(\alpha) = 0$. Тоді з рівності $C^2(\alpha) + S^2(\alpha) = 0$ маємо, що $S(\alpha) = 1$. Покажемо, що $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Справді, оскільки з одного боку,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{4},$$

а, з другого боку, проінтегрувавши частинами, дістанемо

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = x\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= -\int_0^1 \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

і $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$. В останньому інтегралі проведемо заміну змінної $x = S(t)$. Тоді $dx = C(t)dt$, $\sqrt{1-x^2} = C(t)$ і $\frac{\pi}{2} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_0^\alpha dt = \alpha$. Нарешті нерівність (24.5) має місце для всіх $x \in (0; \frac{\pi}{2})$, оскільки для таких x ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ є рядом лейбніцевого типу.

Отже, можемо означити тригонометричні функції і у такий спосіб.

Означення 24.4. *Тригонометричними функціями* $y = \sin x$, $y = \cos x$ *називають функції виду*

$$\sin x := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos x := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (24.6)$$

Аналітичне означення можна дати і для обернених тригонометричних функцій, а саме

$$\arccos x := \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arcsin x := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad (24.7)$$

які визначені на відрізку $[-1;1]$. Після цього довести, що існує єдина пара неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, які задовольняють такі умови:

а) функція $x=\cos\theta$ парна, має період 2π і на проміжку $[0;\pi]$ є оберненою до функції

$$\arccos x = \int\limits_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}};$$

б) функція $y=\sin\theta$ непарна, має період 2π і

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

на проміжку $[0;\pi]$;

в) кожна точка $(x;y)$, для якої $x^2+y^2=1$, має координатне подання $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, і таке подання єдине для $\theta\in[0;2\pi)$.

Аналітичне означення тригонометричних функцій (24.6) підказує, як ввести такі функції комплексної змінної. Розглянемо на комплексній площині степеневі ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}. \tag{24.8}$$

Легко перевірити, що ці ряди збігаються на всій комплексній площині, причому якщо $z=x\in\mathbb{R}$, то сумою першого ряду є $\cos z$, а другого $\sin z$, тобто ряди (24.8) являють собою функції комплексної змінної, які є аналітичним продовженням на всю комплексну площину функцій дійсної змінної $\cos x$ і $\sin x$. Тому природно за сумами цих рядів зберегти такі ж позначення. Таким чином, маємо:

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \sin z := \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Оскільки

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} = 1 + i\frac{z}{1!} - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \cdots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \\
&= \cos z + i\sin z, \\
e^{-iz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!} = \cos z - i\sin z,
\end{aligned}
$$

Якраз останнім, як правило, користуються при дослідженні тригонометричних функцій $\cos z,\ \sin z$.

Означення 24.5. *Косинусом і синусом комплексної змінної називають функції виду:*

$$
\begin{aligned}
\cos z &:= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \\
\sin z &:= \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).
\end{aligned}
\tag{24.9}
$$

З формул (24.9) безпосередньо випливає, що $\cos z$ — парна, а $\sin z$ — непарна функції, що вони періодичні, причому 2π є їх основний період. Справді, якщо, наприклад, T є період функції $\cos z$, то для будь-якого z $\cos(z+T) = \cos z$ і при $z = \frac{\pi}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Але тоді

$$
\begin{aligned}
e^{i(\frac{\pi}{2}+T)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+T)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right) + \\
&+ \cos\left(\frac{\pi}{2}+T\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}+T\right) = 0
\end{aligned}
$$

або $e^{2i\left(\frac{\pi}{2}+T\right)} = -1$. Звідси $2i\left(\frac{\pi}{2}+T\right) = \mathrm{Ln}(-1)$ або $i(\pi+2T) = i(\pi+2k\pi)$, де $k \in \mathbb{Z}$, тобто $T = k\pi$, а оскільки $\cos T = \cos 0 = 1$, то k має бути парним, тобто $T = 2n\pi$. А це й означає, що 2π основний період функції $\cos z$.

Теорема 24.5 (теорема додавання). *Для будь-яких z', $z'' \in \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} \cos(z'+z'') &= \cos z' \cos z'' - \sin z' \sin z'', \\ \sin(z'+z'') &= \sin z' \cos z'' + \cos z' \sin z''. \end{aligned} \tag{24.10}$$

Доведення. Оскільки

$$\cos(z'+z'') + i\sin(z'+z'') = e^{i(z'+z'')} = e^{iz'}e^{iz''} =$$

$$= (\cos z' + i\sin z')(\cos z'' + i\sin z'') =$$

$$\cos z' \cos z'' - \sin z' \sin z'' + i(\cos z' \sin z'' + \sin z' \cos z''),$$

$$\cos(z'+z'') - i\sin(z'+z'') = e^{-i(z'+z'')} = e^{-iz'}e^{-iz''} =$$

$$= (\cos z' - i\sin z')(\cos z'' - i\sin z'') =$$

$$\cos z' \cos z'' - \sin z' \sin z'' - i(\cos z' \sin z'' + \sin z' \cos z''),$$

то якщо скласти ці рівності, отримаємо першу рівність з (24.10). Якщо ж від першої відняти другу, то отримаємо другу рівність з (24.10). ■

Зауваження. З (24.10). легко одержати основну тригонометричну тотожність і формули зведення.

Теорема 24.6. *Функції $\cos z$ і $\sin z$ необмежені.*

Доведення. Покладемо $z = x + iy$ і знайдемо $|\cos z|$ і $|\sin z|$. Оскільки

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \\ &= \cos x \cdot \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} - \sin x \cdot \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} - i \sin x \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\
&= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \\
&= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,
\end{aligned}
$$

то

$$
\begin{aligned}
|\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\
&= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y(1 - \sin^2 x) + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y} = \\
&= \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x} \geqslant \\
&\geqslant \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1} = |\operatorname{sh} y|,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 \operatorname{sh}^y} = \\
&= \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + (1 - \sin^2 x) \operatorname{sh}^2 y} = \\
&= \sqrt{\sin^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) + \operatorname{sh}^2 y} = \\
&= \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y} \geqslant |\operatorname{sh} y|.
\end{aligned}
$$

Враховуючи, що гіперболічний синус є функція необмежена, то для будь-якого $M > 0$ існує таке $y_0 \in \mathbb{R}$, що $|\operatorname{sh} y_0| > M$. А тоді для $z = iy_0$ $|\cos z| > M$ і $|\sin z| > M$. ■

Теорема 24.7. *Функції* $\cos z$ *і* $\sin z$ *аналітичні на всій комплексній площині, причому*

$$
\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z.
$$

Доведення. Оскільки для функції $\cos z$

$$u(x,y) = \operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y,$$

$$v(x,y) = \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y$$

і

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\cos x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x \operatorname{ch} y,$$

то для будь-якого z

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отже, для функції $\cos z$ умови Коші-Рімана виконуються і функція $\cos z$ диференційовна на всій комплексній площині, тобто вона аналітична у кожній точці комплексної площини. °ї похідна

$$\cos' z = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -\sin x \operatorname{ch} y - i\cos x \operatorname{sh} y = -\sin z.$$

Аналогічно обгрунтовується аналітичність функції $\sin z$ і те, що $\sin' z = \cos z$. ■

Означимо функцію $w = \operatorname{Arccos} z$ як обернену до функції $z = \cos w$. іншими словами, $w = \operatorname{Arccos} z$ для кожного z є множина розв'язків рівняння $\cos w = z$. При фіксованому z маємо

$$\frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw}) = z$$

або $t^2 - 2zt + 1 = 0$, де $t = e^{iw}$. Звідси $t = z + \sqrt{z^2 - 1}$, причому $t \neq 0$. Отже,

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$$

і

$$w = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Якщо $z \neq \pm 1$, то $\sqrt{z^2-1}$ має два корені і t має два різні значення t_1 і t_2, причому $t_1 t_2 = 1$. Тоді множина $\mathrm{Arccos}\, z$ є об'єднанням двох множин $-i\,\mathrm{Ln}\, t_1$, $-i\,\mathrm{Ln}\, t_2 = -i\,\mathrm{Ln}\,\frac{1}{t_1} = i\,\mathrm{Ln}\, t_1$, і її записують у вигляді $\mathrm{Arccos}\, z = \pm i\,\mathrm{Ln}\, t_1$. Якщо $z = 1$ або $z = -1$, то $t_1 = t_2 = z$, і $\mathrm{Arccos}\, 1 = -i\,\mathrm{Ln}\, 1 = -i \cdot 2n\pi i = 2n\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{Arccos}(-1) = -i\,\mathrm{Ln}(-1) = -i(\pi + 2n\pi)i = (2n+1)\pi$, де $n \in \mathbb{Z}$. Якщо ж $z = x$ і $-1 < x < 1$, то поклавши $x = \cos\theta$, де $0 < \theta < \pi$, маємо:

$$\begin{aligned} \mathrm{Arccos}\, z &= \pm i\,\mathrm{Ln}(\cos\theta + i\sin\theta) = \pm i\,\mathrm{Ln}\, e^{i\theta} = \\ &= \pm i(\theta + 2n\pi)i = \pm\theta + 2n\pi = \\ &= \pm \arccos\theta + 2n\pi, \text{ де } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Аналогічно означається функція $w = \mathrm{Arcsin}\, x$ як обернена до функції $z = \sin w$. Для неї маємо формулу

$$\mathrm{Arcsin}\, z = \frac{1}{i}\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

а для $z = x$, де $-1 \leqslant x \leqslant 1$,

$$\mathrm{Arcsin}\, x = (-1)^n \arcsin x + n\pi, \text{ де } n \in \mathbb{Z}.$$

На завершення декілька зауважень щодо розв'язування тригонометричних рівнянь і нерівностей. Тригонометричним рівнянням (нерівністю) називається рівняння (нерівність), у якому невідомі містяться тільки під знаками тригонометричних функцій. Наприклад, тригонометричне рівняння з одним невідомим має вигляд $f(\sin x, \cos x) = 0$, де $f(u, v)$ — функція двох змінних, як правило, алгебраїчна. Основним методом розв'язування тригонометричних рівнянь є зведення його за допомогою тотожніх перетворень до одного або декількох найпростіших тригонометричних рівнянь, тобто рівнянь виду:

$$\sin x = a,\ \cos x = a,\ \operatorname{tg} x = a,\ \operatorname{ctg} x = a.$$

Рівняння $\sin x = a$, $\cos x = a$ мають розв'язки, якщо $|a| \leqslant 1$, причому множинами їх розв'язків будуть відповідно множини:

$$\{(-1)^n \arcsin a + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\},\ \{\pm \arccos a = 2n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ мають розв'язки при будь-якому $a \in \mathbb{R}$, причому множинами їх розв'язків будуть відповідно множини:

$$\{\operatorname{arctg} a + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\},\ \{\operatorname{arcctg} a + n\pi \,|\, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Серед методів розв'язування тригонометричних рівнянь назвемо: зведення до рівняння відносно однієї функції того самого аргумента (цим методом розв'язуються, наприклад, рівняння, однорідні відносно синуса і косинуса того самого аргумента), розкладання лівої частини на множники (права дорівнює нулеві), перетворення добутків тригонометричних функцій у суми.

Звичайно при розв'язуванні тригонометричних рівнянь може порушитись еквівалентність як за рахунок алгебраїчних перетворень так і за рахунок переходу від тригонометричних функцій, які визначені не при всіх значеннях невідомого, до функцій, які визначені при всіх значеннях невідомого. Розв'язуючи тригонометричні рівняння, слід не допускати втрати коренів і обов'язково перевіряти розв'язки тих рівнянь, при розв'язуванні яких могли виникнути сторонні корені. Розв'язування тригонометричних нерівностей, як правило, зводиться до розв'язування найпростіших нерівностей виду: $\sin x < a$, $\cos x \geqslant a$ і т.д., які розв'язуються або з допомогою координатного кола, або з допомогою графіків тригонометричних функцій. Досить часто, тригонометричні нерівності (як і алгебраїчні) розв'язуються методом інтервалів. А саме, при розв'язуванні нерівності, наприклад, $f(t) > 0$ знаходять основний період T функції $f(t)$. З множини розв'язків рівняння $f(t) = 0$ беруть тільки ті, які належать проміжку $[0; T)$. Досліджують функцію $f(t)$ на знак на кожному з інтервалів, на які поділили проміжок $[0; T)$ корені рівняння $f(t) = 0$ та її точки розриву. Якщо, наприклад, нерівність $f(t) > 0$ виконується на інтервалі $(\alpha; \beta)$, то вона буде виконуватись на множині $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha+nT; \beta+nT)$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x.$$

Розв'язання. Врахувавши, що $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$, перейдемо до рівняння

$$4\sin^4 x - 4\cos^4 x - 8\cos^2 x = 0.$$

Далі

$$\sin^4 x - \cos^4 x - 2\cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x) = 0,$$

від якого переходимо до однорідного рівняння

$$\sin^4 x - 2\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0.$$

Оскільки x, при якому $\cos x = 0$ не може бути розв'язком останнього рівняння, то воно еквівалентне рівнянню

$$\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0.$$

Звідси дістаємо два найпростіших рівняння $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Отже, $X = \{\frac{\pi}{3}(3n+1) \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ множина розв'язків заданого рівняння.

Приклад 4. Розв'язати нерівність

$$\sin 2x - \sin 3x > 0.$$

Розв'язання. Оскільки період функції $\sin 2x$ дорівнює π, а функції $\sin 3x$ — $\frac{2\pi}{3}$, то основний період функції $\sin 2x - \sin 3x$ дорівнює 2π. Проміжку $[0; 2\pi)$ належать такі корені рівняння $\sin 2x - \sin 3x = 0$:

$$0,\ \frac{\pi}{5},\ \frac{3\pi}{5},\ \pi,\ \frac{7\pi}{5},\ \frac{9\pi}{5}.$$

Оскільки функція $\sin 2x - \sin 3x$ неперервна на $\mathbb{R}$, то досліджувати її на знак слід на інтервалах:

$$(0; \frac{\pi}{5}),\ (\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}),\ (\frac{3\pi}{5}; \pi),\ (\pi; \frac{7\pi}{5}),\ (\frac{7\pi}{5}; \frac{9\pi}{5}),\ (\frac{9\pi}{5}; 2\pi).$$

З допомогою пробних точок встановлюємо, що задана нерівність виконується на інтервалах

$$(\frac{\pi}{5}; \frac{3\pi}{5}),\ (\pi; \frac{7\pi}{5}), (\frac{9\pi}{5}; 2\pi).$$

Отже,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Bigg((\frac{\pi}{5} + 2n\pi; \frac{3\pi}{5} + 2n\pi) \cup (\pi + 2n\pi; \frac{7\pi}{5} + 2n\pi) \cup$$

$$\cup \quad (\frac{9\pi}{5} + 2n\pi; 2(n+2)\pi) \Bigg).$$

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

де a, b, c — сторони трикутника, α — кут, що лежить проти сторони a, $2p = a + b + c$.

2. Довести, виходячи з геометричного означення, що для всіх $x', x'' \in \mathbb{R}$

$$\cos(x' + x'') = \cos x' \cos x'' - \sin x' \sin x'',$$
$$\sin(x' + x'') = \sin x' \cos x'' + \cos x' \sin x''.$$

3. Означити функції $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ та обгрунтувати їх основні властивості.

4. Означити функції $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$ та обгрунтувати їх основні властивості.

5. Знайти проміжки, на яких мають місце тотожності:

а) $\arcsin(\sin x) = x - 4\pi$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$;

в) $\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3 - 3x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$.

6. Розв'язати рівняння:

а) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$;

б) $4\sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$;

в) $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.

7. Розв'язати нерівності:

а) $\cos^2 x < \frac{1}{4}$;

б) $4\cos^2 x + 2\sin^2 x < 5\cos x$;

в) $\cos x + \cos 2x > 0$.

8. Розв'язати рівняння

а) $\sin z + \sin 2z = 0;$

б) $\cos z = i;$

в) $\sin z + \cos z = 2.$

25 *ЛЕКЦІЯ*: Метричні простори. Елементи аналізу у метричних просторах

Поняття метричного простору. Приклади метричних просторів. Збіжні послідовності у метричних просторах. Відображення (оператори, функціонали) метричних просторів. Границя і неперервність функції у метричному просторі.

Література. [1], ч. 3, с. 97–104, 120–126; [2], ч. 2, с. 11–17, 25–30, 38–44; [3], т. 3, с. 96–111; Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972, с. 44–52; Maurin K. Analysis, P. 1 – Warshawa, Polish scientific Publishes, 1976, p. 31–50.

Побудова аналізу нечислових функцій $f : X \to Y$ потребує наділення множин X і Y певними властивостями, основним джерелом яких є, насамперед, геометрія (простір, відстань між точками, вектор і його модуль, операції над векторами тощо). Найважливішою з них є можливість визначити відстань між елементами множини. Адже саме поняття відстані дає можливість ввести основну операцію аналізу граничний перехід у нечислові множини (множини n-ок чисел, множини послідовностей, множини функцій, визначених на деякому проміжку тощо).

Означення 25.1. *Говорять, що непорожня множина X наділена метрикою (між елементами множини X задано відстань), якщо задано відповідність, яка кожній парі елементів x і y з X відносить число $d(x, y)$ і задовольняє такі умови:*

1) $(\forall x, y \in X)(d(x, y) \geqslant 0 \wedge d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$;
2) $(\forall x, y \in X)(d(x, y) = d(y, x))$ (*аксіома симетрії*);
3) $(\forall x, y, z \in X)(d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y))$
(*аксіома трикутника*).

Означення 25.2. *Непорожню множину X із заданою у ній метрикою d називають метричним простором і позначають (X, d). Елементи множини X називають точками метричного простору, а число $d(x, y)$ називають відстанню між точками x і y.*

Наділити множину X метрикою означає задати функцію $d : X \times X \to \mathbb{R}$ з властивостями (аксіомами) 1) – 3).

Приклад 1. Дано функцію f, визначену і строго монотонну на множині $\mathbb{R}$. Довести, що функція $d(x, y) := |f(x) - f(y)|$ задає метрику на множині $\mathbb{R}$.

Розв'язання. Насамперед очевидно, що для будь-яких дійсних чисел x і y $d(x, y) \geqslant 0$, причому $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Остання рівність в силу строгої монотонності функції f має місце тоді і тільки тоді, коли $x = y$. Далі для будь-яких $x, y \in \mathbb{R}$ $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(x, y)$. і, нарешті, для будь-яких $x, y, z \in \mathbb{R}$ $d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| = d(x, z) + d(z, y)$. Таким чином, функція d задовольняє всі три аксіоми відстані, тобто наділяє множину відстанню.

Зауваження. Як наслідок при $f(x) = x$ маємо евклідову відстань на прямій $d_1(x, y) = |x - y|$, а, наприклад, при $f(x) = \operatorname{arctg} x$ — відстань на прямій визначається за формулою

$$d_2(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|,$$

і характерна тим, що вона менша, ніж π.

Хоча множину $\mathbb{R}$ можна наділити метрикою по-різному, але першість за евклідовою. Якраз метричний простір $(\mathbb{R}, d)$, де d — евклідова метрика, є основою теорії числових функцій однієї дійсної змінної.

Множину $\mathbb{R}^n$ можна наділити метрикою також по-різному, але найбільш популярними є такі:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \text{ — евклідова метрика,}$$

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \tag{25.1}$$

$$d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|,$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ довільні елементи з $\mathbb{R}^n$. Приведені метрики виявляються рівноцінними у тому плані, що класи збіжних послідовностей елементів з $\mathbb{R}^n$ відносно кожної з цих метрик збігаються. Однак з точки зору їх придатності для обчислень між ними є істотна різниця.

Нехай $C_{[a;b]}$ — множина всіх неперервних на відрізку $[a;b]$ функцій. Можна перевірити, що функції

$$d_1(f, g) = \max_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|,$$

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2}, \tag{25.2}$$

де f, g — довільні елементи з $C_{[a;b]}$, є метриками, якими можна наділити множину $C_{[a;b]}$. Перша з них називається рівномірною (збіжність послідовності функцій відносно цієї метрики еквівалентна рівномірній збіжності), друга — евклідова (збіжні послідовності функцій відносно цієї метрики називають збіжними у середньому квадратичному).

Центральним топологічним поняттям метричного простору є поняття відкритої кулі, аналогом якої є інтервал на прямій, відкритий круг на площині, відкрита куля у просторі. Нехай маємо метричний простір (X, d), і нехай $x_0 \in X$, а r — довільне додатне число.

Означення 25.3. *Відкритою кулею або просто кулею з центром у точці x_0 радіуса r називають множину всіх точок метричного простору X, відстань яких до точки x_0 менша, ніж r, і позначають $B(x_0, r)$, тобто*

$$B(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x_0, x) < r\}.$$

Цілком природно множину

$$\overline{B}(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x_0, x) \leqslant r\}$$

назвати замкненою кулею з центром у точці x_0 радіуса r, а множину

$$S(x_0, r) := \{x \mid x \in X, d(x_0, x) = r\}$$

— сферою з центром у точці x_0 радіуса r.

Означення 25.4. *Точка a метричного простору (X, d) називається границею послідовності (x_n), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $d(x_n, a) < \varepsilon$.*

Про послідовність, яка має границю, кажуть, що вона збігається (є збіжною), а за границею залишають стандартне позначення.

Приклад 2. Довести, що послідовність

$$(\mathbf{x}_n) = \left(\left(\frac{n-1}{n}, \frac{2n^2}{n^2+1}\right)\right)$$

точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою збігається до точки (1;2).

Розв'язання. Оскільки для будь-якого n

$$d(\mathbf{x}_n,(1;2)) = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}-1\right)^2 + \left(\frac{2n^2}{n^2+1}-2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{4}{(n^2+1)^2}} = \frac{\sqrt{n^4+6n^2+1}}{n(n^2+1)} < \frac{n^2+3}{n(n^2+1)} < \frac{3}{n},$$

то, взявши $n_0 = 3\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, де ε — довільне число, маємо, що для всіх $n > n_0$ $d(\mathbf{x}_n,(1;2)) < \varepsilon$. А це й означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n},\frac{2n^2}{n^2+1}\right) = (1;2).$$

Приклад. Довести, що послідовність

$$(f_n(x)) = \left(x + (-1)^n\frac{x^2}{n}\right)$$

точок метричного простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою збігається до точки $f_0(x) = x$.

Розв'язання. Оскільки для будь-якого n

$$d(f_n(x), f_0(x)) = \max_{x\in[0;1]}\left|x + (-1)^n\frac{x^2}{n} - x\right| = \max_{x\in[0;1]}\frac{x^2}{n} = \frac{1}{n},$$

то очевидно, що $d(f_n(x), f_0(x)) < \varepsilon$, як тільки $n > n_0$, де $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$.

Теорема 25.1. *Якщо послідовність (x_n) точок метричного простору (X,d) має границю, то вона єдина.*

Доведення. Припустимо, що існує метричний простір (X, d) і послідовність (x_n) точок цього простору, яка має більше однієї границі, тобто існують такі точки $a, b \in X$, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, причому $a \neq b$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = \frac{1}{3}d(a,b)$, можна вказати номер n_1 такий, що для всіх $n > n_1$ $d(x_n, a) < \frac{1}{3}d(a,b)$. А оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то для $\varepsilon = \frac{1}{3}d(a,b)$ можна вказати номер n_2 такий, що для всіх $n > n_2$ $d(x_n, b) < \frac{1}{3}d(a,b)$. Нехай $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тоді для всіх $n > n_0$ одночасно виконуються дві нерівності $d(x_n, a) < \frac{1}{3}d(a,b)$, $d(x_n, b) < \frac{1}{3}d(a,b)$. А отже, для таких n маємо:

$$d(a,b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, b) < \frac{1}{3}d(a,b) + \frac{1}{3}d(a,b) = \frac{2}{3}d(a,b).$$

Одержане протиріччя $\left(d(a,b) < \frac{2}{3}d(a,b)\right)$ свідчить про те, що припущення про існування збіжних послідовностей з більше, ніж однією границею невірне. А отже, якщо послідовність має границю, то вона єдина. ■

Теорема 25.2 (необхідна умова збіжності). *Якщо послідовність точок метричного простору збіжна, то вона обмежена.*

Доведення. Нехай послідовність (x_n) точок метричного простору (X, d) є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Покажемо, що існує куля $B(a, r)$ така, що для всіх n $x_n \in B(a, r)$. Справді, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\varepsilon = 1$, існує n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ $d(x_n, a) < 1$. Тоді або для всіх членів послідовності (x_n) $d(x_n, a) < 1$, або є члени цієї послідовності такі, що $d(x_n, a) \geqslant 1$. У першому випадку для всіх n $x_n \in B(a, 1)$, у другому для всіх n $x_n \in B(a, r)$, де $r = 1 + \max\{1, d(x_1, a), d(x_2, a) \ldots, d(x_{n_0}, a)\}$. ■

Щодо достатніх умов, то і для метричних просторів вводиться поняття фундаментальної послідовності (послідовність (x_n) фундаментальна, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$). Однак критерій Коші має місце не для всіх метричних просторів. Ті з них, для яких кожна фундаментальна послідовність є збіжною, називають *повними метричними просторами*.

З'ясуємо характер збіжності послідовностей точок деяких метричних просторів. Нехай маємо метричний простір $(\mathbb{R}^n, d)$, де d — евклідова метрика. Якщо послідовність (x_k) точок простору $\mathbb{R}^n$ записати у вигляді

$$(\mathbf{x}_k) = ((x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})),$$

то поряд з нею можна розглядати n числових послідовностей (x_{k1}), (x_{k2}), ... , (x_{kn}). Більше того, має місце рівність

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} (x_{k1}, \dots, x_{kn}) = (\lim_{k\to\infty} x_{k1}, \dots, \lim_{k\to\infty} x_{kn}).$$

Неважко також переконатись, що кожна фундаментальна послідовність точок простору $\mathbb{R}^n$ є повним (повним він буде і відносно метрик d_2 і d_3 з (25.1)).

У просторі $C_{[a;b]}$ з рівномірною метрикою послідовність (f_n) збігається тоді і тільки тоді, коли вона збігається до f_0 рівномірно на відрізку $[a; b]$. Справді, якщо послідовність (f_n) збігається до точки $f_0 \in C_{[a;b]}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$d(f_n, f_0) = \max_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon.$$

Звідси випливає, що для всіх $x \in [a; b]$ $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. А це й означає, що функціональна послідовність (f_n) збігається рівномірно до функції f_0 на відрізку $[a;b]$.

Нехай функціональна послідовність (f_n) точок з $C_{[a;b]}$ рівномірно збігається до функції f_0 на відрізку $[a;b]$. Тоді $f_0 \in C_{[a;b]}$ як границя рівномірно збіжної на відрізку $[a;b]$ послідовності неперервних функцій є неперервна функція. Крім того, в силу рівномірної збіжності для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і всіх x з відрізка $[a;b]$ виконується нерівність $|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon$. Для кожного n функція $|f_n(x) - f_0(x)|$ є неперервною на відрізку $[a;b]$. А отже, за теоремою Вейерштраса досягає на ньому свого найбільшого значення, тобто існує точка $x_0 \in [a;b]$ така, що

$$|f_n(x_0) - f_0(x_0)| = \max_{x \in [a;b]} |f_n(x_0) - f_0(x)|.$$

Таким чином, для всіх $n > n_0$

$$d(f_n, f_0) = \max_{x \in [a;b]} |f_n(x) - f_0(x)| = |f_n(x_0) - f_0(x_0)| < \varepsilon.$$

А це й означає, що послідовність (f_n) точок простору $C_{[a;b]}$ з рівномірною метрикою є повним, а от цей простір відносно метрики d_2 з (25.2) є неповним.

Нехай маємо метричні простори $(X, d_X), (Y, d_Y)$.

Означення 25.5. *Відповідність f, яка кожній точці метричного простору X відносить одну точку метричного простору Y називається відображенням простору X у простір Y і позначається $f : X \to Y$.*

Зауважимо, що термін „відображення" синонім терміну „функція". Термін „оператор" і „функціонал"використовуються тоді, коли X і Y наділені не тільки топологічною, але й алгебраїчною структурою. Зокрема, термін „оператор" вживається для відображень функціональних просторів у функціональні, а термін „функціонал“ для відображень функціональних просторів у множину $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$.

Далі будемо розглядати відображення з метричного простору X у метричний простір Y, тобто відповідність f, яка кожній точці $x \in X$ відносить не більше, ніж один елемент з простору Y, і записувати відображення f з X у Y. Нехай $E \subset X$, на якій відображення f визначено. Образ точки $x \in E$ при відображенні f будемо позначати у стандартний спосіб $f(x)$.

Означення 25.6. *Точка y_0 метричного простору Y називається границею відображення f у точці $x_0 \in X$ відносно множини E, якщо для будь-якої послідовності (x_n) точок множини E такої, що для кожного n $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, відповідна їй послідовність образів $(f(x_n))$ збігається до точки y_0, і позначається*

$$\lim_{x\to x_0, x\in E} f(x) = y_0.$$

Зауважимо, що у точці x_0 відображення f може бути невизначеним, разом з тим x_0 є граничною точкою відносно множини E. Далі, коли мова буде йти про границю відображення f, будемо вважати, що f визначено у кожній точці метричного простору X крім, можливо, точки x_0, а його границю у точці x_0 відносно множини $X \setminus \{x_0\}$ будемо позначати $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Теорема 25.3. *Для того щоб $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ необхідно і досить, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$ існувало $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < d_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність*

$$d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. Припустимо, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для будь-якого $\delta > 0$ існує точка $x_\delta \in X$ $(x_\delta \neq x_0)$, що хоча $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$, однак $d_Y(f(x_0), y_0) \geqslant \varepsilon_0$, і нехай $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$. Тоді, в силу припущення, для кожного n існує точка $x_n \in X$ $(x_n \neq x_0)$ така, що $d_X(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$ і $d_Y(y_0, f(x_n)) \geqslant \varepsilon_0$. Очевидно, що для так побудованої послідовності (x_n) при кожному n $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. А отже, відповідна послідовність образів $(f(x_n))$ має збігатись, причому $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = y_0$. Останнє неможливо, оскільки для кожного n $d_Y(f(x_n), y_0) \geqslant \varepsilon_0$. Таким чином, наше припущення невірне, і з того що $\lim\limits_{x\to x} f(x_n) = y_0$ випливає, що, справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $d_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$.

Достатність. Нехай y_0 задовольняє умову теореми, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < d_X(x, x_0) < \delta$, виконується нерівність $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$. Нехай послідовність (x_n) точок простору X така, що для кожного n $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Якщо ε довільне, але фіксоване, і для нього обрано $\delta > 0$, то для такого δ існує номер n_0 такий, що для будь-якого $n > n_0$ $d_X(x_n, x_0) < \delta$. А отже, в силу умови для будь-якого $n > n_0$ $d_Y(f(x), y_0) < \varepsilon$. А це й означає, що $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = y_0$. ■

Зрозуміло, що доведена теорема дає ще одне означення границі відображення (перше називають означенням границі відображення за Гейне, друге — за Коші). Якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$, то вона єдина. А також існує куля $B(x_0, r)$ і куля $B(y_0, R)$ такі, що для всіх $x \in B(x_0, r)$ і $x \neq x_0$ $f(x) \in B(y_0, R)$, тобто відображення f, яке має границю у точці x_0, обмежене у деякому околі цієї точки.

Приклад 4. Нехай відображення A з метричного простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою у метричний простір $\mathbb{R}$ задається у такий спосіб:

$$Af = \int\limits_0^1 f(x)dx.$$

Довести, що існує границя цього відображення у точці $f_0(x) = x^2 + 1$ відносно множини $E = \{ax^2 + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Розв'язання. Оскільки $\int\limits_0^1 (x^2+1)dx = \frac{4}{3}$, то природно є гіпотеза, що

$$\lim_{f \to f_0, f \in E} Af = \frac{4}{3}.$$

Для будь-якого $f \in E$

$$d_{\mathbb{R}}(Af, f_0) = \left| \int\limits_0^1 (ax^2 + b)dx - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{a}{3} + b - \frac{4}{3} \right| =$$

$$= \left| \frac{a-1}{3} + b - 1 \right| \leqslant \max_{x \in [0;1]} \left| (a-1)x^2 + b - 1 \right| =$$

$$= \max_{x \in [0;1]} |ax^2 + b - (x^2+1)| = d_C(f, f_0).$$

Отже, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ взяти $\delta = \varepsilon$, то з того, що $d_C(f, f_0) < \delta$, випливає, що $d_{\mathbb{R}}(Af, \frac{4}{3}) < \varepsilon$. А це й означає, що

$$\lim_{f \to f_0, f \in E} Af = \frac{4}{3}.$$

Означення 25.7. *Відображення f з метричного простору X у метричний простір Y називається неперервним у точці $x_0 \in X$ відносно множини E, якщо* $\lim\limits_{x \to x_0, x \in E} f(x) = f(x_0)$.

У подальшому мова буде йти про відображення $f : X \to Y$, і таке відображення ми будемо називати неперервним у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх $x \in B(x_0, \delta)$ $\quad f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$. Зауважимо, що при такому означенні точка x_0 не обов'язково має бути граничною відносно простору X, тобто відображення f неперервне у кожній ізольованій точці. Відображення $f : X \to Y$ називають *неперервним*, якщо воно неперервне у кожній точці $x \in X$.

Теорема 25.4 (критерій неперервності). *Відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли прообраз будь-якої відкритої (замкненої) множини точок метричного простору Y є відкритою (замкненою) множиною точок метричного простору X.*

Доведення. Необхідність. Нехай відображення $f : X \to Y$ є неперервним, тобто f неперервне у кожній точці метричного простору X, і нехай G_Y довільна, але фіксована, відкрита множина точок метричного простору Y. Доведемо, що множина $G_X = f^{-1}(G_Y)$ є відкритою у метричному просторі X. Справді, якщо $G_X = \varnothing$, то очевидно, що вона відкрита. Якщо ж $G_X \neq \varnothing$ і $x_0 \in G_X$, то $f(x_0)$ є точкою відкритої множини G_Y, тобто існує куля $B(f(x_0), \varepsilon)$, яка є підмножиною G_Y. А оскільки відображення f неперервне у точці x_0, то для кулі $B(f(x_0), \varepsilon)$ існує куля $B(x_0, \delta)$ така, що $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. Звідси випливає, що

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(x_0, \varepsilon)) \subset f^{-1}(G_Y) = G_X.$$

Отже, для точки x_0 існує куля $B(x_0, \delta)$, яка повністю міститься у G_X, тобто кожна точка множини G_X є внутрішньою. А це й означає, що множина G_X відкрита.

Достатність. Нехай прообраз $f^{-1}(G_Y)$ кожної відкритої множини G_Y точок метричного простору Y є відкритою множиною. Доведемо, що відображення f є неперервним.

Візьмемо довільну, але фіксовану, точку $x_0 \in X$ і довільну кулю $B(f(x_0), \varepsilon)$. Тоді $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ є відкрита множина точок метричного простору X, і x_0 належить цій множині, тобто x_0 внутрішня точка множини $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$. Але тоді існує куля $B(x_0, \delta)$, яка повністю міститься у множині $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, тобто $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ або $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$. А це й означає, що відображення f неперервне у точці x_0. Якщо врахувати, що при відображенні f прообраз доповнення є доповненням до прообразу, то доведення теореми для замкнених множин є очевидним. ■

Приклад 5. Нехай відображення A метричного простору $C_{[0;1]}$ з евклідовою метрикою у метричний простір $\mathbb{R}$ задається у такий спосіб: для будь-якого $f \in C_{[0;1]}$ $\quad Af = f(0) + f(1)$. Довести, що воно не є неперервним на $C_{[0;1]}$.

Розв'язання. Візьмемо точку $f_0(x) \equiv 0$ з $C_{[0;1]}$ і послідовність $(f_n(x)) = (x^n)$ точок цього простору. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} d_C(f_n, f_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int\limits_0^1 (f_n(x) - f_0(x))^2 dx} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0,$$

то послідовність (x^n) збігається до f_0. Разом з тим $d_{\mathbb{R}}(Af_n, Af_0) = |f_n(0) + f_n(1) - f_0(0) - f_0(1)| = 1$, тобто відповідна послідовність (Af_n) образів не збігається до образу точки f_0.

В аналізі числових функцій ряд властивостей неперервних функцій істотно залежить від структури області, на якій вони визначені. Маємо на увазі властивості неперервних функцій, визначених на відрізку. В аналізі відображень метричних просторів роль, подібну до ролі відрізків в аналізі числових функцій, відіграють так звані компактні множини.

Означення 25.8. *Множина K точок метричного простору X називається компактною множиною, якщо з кожної* *послідовності* (x_n) *точок множини* K *можна виділити збіжну підпослідовність* (x_{n_k}), *причому* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in K$.

Наприклад, кожна скінченна множина будь-якого метричного простору є компактною. Кожна обмежена замкнена множина точок метричного простору $\mathbb{R}^n$ з будь-якою метрикою з (25.1) є компактною. Взагалі, кожна компактна множина є обмеженою і замкненою. Разом з тим існують метричні простори і у них обмежені замкнені множини, які не є компактними. Так у метричному просторі $C_{[a;b]}$ з рівномірною метрикою замкнена куля з центром у точці $f_0(x) \equiv 0$ і радіусом $r = 1$ є обмеженою і замкненою, однак вона не є компактною множиною. Справді, якщо припустити, що куля $\overline{B}(f_0, 1) = \{f \mid f \in C_{[0;1]}, d(f, f_0) \leqslant 1\} = \{f \mid \max\limits_{x\in[0;1]} |f(x) - f(x_0)| \leqslant 1\} = \{f \mid |f(x)| \leqslant 1, x \in [0;1]\}$ є компактною, і взяти послідовність (x^n) точок з $\overline{B}(f_0, 1)$, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність (x^{n_k}), яка рівномірно збігається до якоїсь точки $\widetilde{f}$ з $\overline{B}(f_0, 1)$. Але яку б підпослідовність (x^{n_k}) послідовності (x^n) ми не взяли, її границя

$$\lim_{k\to\infty} x^{n_k} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, \text{ якщо } x = 1 \end{cases}$$

є функція, яка не належить навіть метричному простору $C_{[a;b]}$.

Теорема 25.5 (про неперервний образ компакта) *Якщо відображення* f *неперервне на компактній множині* K, *то* $f(K)$ *є компактна множина*

Доведення. Нехай (y_n) довільна послідовність точок з множини $f(K)$. Тоді існує послідовність (x_k) точок множини K така, що для кожного n $f(x_n) = y_n$. А оскільки за умовою K компактна множина, то з послідовності (x_n) можна виділити підпослідовність (x_{n_k}) таку, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in K$. Звідси, в силу неперервності відображення f у точці x_0, маємо, що відповідна послідовність образів $(f(x_{n_k})) = (y_{n_k})$ збігається до образу точки x_0, тобто до точки $y_0 = f(x_0)$, яка є елементом множини $f(K)$. Отже, з кожної послідовності (y_n) точок множини $f(K)$ можна виділити підпослідовність, яка збігається до точки цієї множини. А це й означає, що $f(K)$ — компактна множина. ■

Як наслідок маємо, що неперервний образ компактної множини є обмежена множина (згадайте першу теорему Вейєрштрасса для числових функцій, неперервних на відрізку). Для відображення f з метричного простору X у множину дійсних чисел $\mathbb{R}$ (метричний простір з евклідовою метрикою) може бути сформульованою і друга теорема Вейєрштрасса.

Теорема 25.6. *Якщо відображення f з метричного простору X у метричний простір $\mathbb{R}$ неперервне на компактній множині K ($K \subset X$), то воно досягає на ній свого найменшого і найбільшого значення.*

Доведення. Оскільки за умовою множина K є компактною множиною і відображення f неперервне на K, то множина $f(K)$ теж компактна множина, а отже, вона обмежена і замкнена. В силу того, що $f(K)$ є числовою множиною, з її обмеженості випливає існування $\inf f(K)$ і $\sup f(K)$, а з її замкненості — те, що $\inf f(K) \in f(K)$ і $\sup f(K) \in f(K)$. А отже, існують точки x_1 і x_2 у K такі, що для всіх $x \in K$ $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$, тобто $f(x_1)$ є найменшим, а $f(x_2)$ є найбільшим значенням відображення f на компактній множині K. ■

Щоб перенести теорему Коші про проміжне значення неперервної на відрізку функції на відображення з довільною метрикою простору X у метричний простір $\mathbb{R}$, крім поняття компактності необхідне ще поняття зв'язності. Метричний простір X вважають *зв'язним*, якщо не існує відкритих непорожніх підмножин A і B таких, що $A \cup B = X$, $A \cap B = \varnothing$. То от коли відображення f з метричного простору x у метричний простір $\mathbb{R}$

є неперервним на компактній і зв'язній множині K, і у точках x_1 і x_2 з K приймає різні значення, то яким би не було число γ між $f(x_1)$ і $f(x_2)$ існує точка $x_0 \in K$ така, що $f(x_0) = \gamma$.

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що функції

   а) $d(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$, де $x, y \in \mathbb{R}$;

   б) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{2(x_1-y_1)^2 + 3(x_2-y_2)^2}$, де

   $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$;

   в) $d(f,g) = \max\limits_{x\in[0;\frac{1}{2}]} |f(x)-g(x)| + \displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x)-g(x)|dx$,

   де $f, g \in C_{[0;1]}$,

   наділяють метриками відповідо множини $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $C_{[0;1]}$.

2. Довести, що для будь-яких фіксованих точок a, b метричного простору (X, d) множина $A = \{x \mid d(x,a)+d(x,b) < 1\}$ — відкрита, а множина $B = \{x \mid d(x,a) + d(x,b) \geqslant 1\}$ — замкнена.

3. Які з множин

   1) $\{f \mid f(x) \geqslant 0\}$;

   2) $\{f \mid \displaystyle\int\limits_0^1 x \sin(f(x))dx < 1\}$;

3) $\{f \mid f(0) \leqslant 1, f(1) \geqslant 1\}$;

4) $\{f \mid \int\limits_0^1 \sin(f(x))dx > t,\ t \in [0;1]\}$.

точок метричного простору $C_{[0;1]}$ з рівномірною метрикою є відкритими (замкненими)?

4. Знайти границі послідовностей точок метричного простору $\mathbb{R}^2$ з евклідовою метрикою:

а) $\left(\left(\frac{(n+1)(n+2)(2n-1)}{4n^3+1}, n\sin\frac{1}{n}\right)\right)$;

б) $\left(\left(\frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}, n\operatorname{arctg}\frac{5}{n^2}\right)\right)$;

в) $\left(\left(\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n, n(\ln(2n+3)-\ln(2n))\right)\right)$.

5. Знайти границі послідовностей точок метричного простору $C_{[a;b]}$ з рівномірною метрикою:

а) $\left(\frac{nx}{1+n+x}\right)$ у просторі $C_{[0;1]}$;

б) $(x\operatorname{arctg} nx)$ у просторі $C_{[\frac{1}{2};2]}$;

в) $\left(\sqrt[n]{1+x^n}\right)$ у просторі $C_{[0;2]}$.

6. Знайти границю векторнозначної функції

$$\vec{f}(x,y) = \left(\frac{\sin(xy)-2}{xy-2}, \frac{\cos(xy)-\cos 2}{xy-2}, \frac{\operatorname{tg}(xy)-\operatorname{tg} 2}{xy-2}\right)$$

у точці $(1;2)$.

7. Довести, що відображення $\vec{f}$ з метричного простору $\mathbb{R}^n$ у метричний простір $\mathbb{R}^m$ є неперервним у точці тоді і тільки тоді, коли є неперервними у цій точці координатні відображення.

8. Нехай K_1, K_2 $(K_1 \cap K_2 = \varnothing)$ — компактні множини метричного простору (X, d). Довести, що

$$\inf_{x \in X, y \in Y} d(x, y) > 0.$$

9. Довести, що відображення $f : X \to Y$, неперервне на компакті K $(K \subset X)$, є рівномірно неперервним на ньому.

26 *ЛЕКЦІЯ*: Повні метричні простори. Теорема Банаха про стискуючі відображення та її застосування

Збіжні і фундаментальні послідовності точок метричного простору. Повні метричні простори. Повнота просторів $\mathbb{R}^n$ з евклідовою і простору $C_{[a;b]}$ з рівномірною метриками. Стискуючі відображення. Теорема Банаха (принцип стискуючих відображень). Приклади застосувань.

Література. [1], ч. 3, с. 107–111, 127–134; [2], ч. 2, с. 31–38, 44–49; [3], т. 3, с. 101–107, 111–116; Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972, с. 61–66, 69–78; Maurin K. Analysis, P. 1 – Warshawa, Polish scientific Publishes, 1976, p. 227–232.

Властивість неперервності (повноти) множини дійсних чисел формулюється у різних формах (наявність верхньої межі у множини обмеженої зверху, наявність єдиної спільної точки у стяжної системи вкладених відрізків та ін.). Проте тільки одна з них, а саме ознака Коші збіжності послідовності, не використовує при формулюванні ніяких інших понять, крім метричних. Якраз узагальнену ознаку Коші збіжності послідовності точок метричного простору і було прийнято за означення його повноти, а у 1920 році видатним польським математиком Стефаном Банахом було доведено існування нерухомої точки у так званих стискуючих відображень повних метричних просторів у себе.

Нехай маємо метричний простір (X, d).

Означення 26.1. *Послідовність (x_n) точок метричного простору X називається функкдаментальною, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$.*

Легко переконатись, що кожна збіжна послідовність є фундаментальною. Однак можна вказати метричні простори, у яких існують функдаментальні послідовності, які не є збіжними. (Наприклад, у множині раціональних чисел $\mathbb{Q}$ можна вказати фундаментальну послідовність, яка не має границі у $\mathbb{Q}$.)

Означення 26.2. *Метричний простір X називається повним, якщо у ньому кожна фундаментальна послідовність є збіжною.*

Теорема 26.1. *Послідовність $\mathbf{x}_k = ((x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}))$ точок простору $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою є функдаментальною тоді і тільки тоді, коли фундаментальні послідовності $(x_1^{(k)})$, $(x_2^{(k)})$, ..., $(x_n^{(k)})$.*

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність $(\mathbf{x}_k)$ є фундаментальною, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує k_0, що для всіх $k > k_0$ і будь-якого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)})^2} < \varepsilon.$$

Врахувавши, що для кожного $i = \overline{1,n}$

$$d(x_i^{(k+p)}, x_i^{(k)}) = \left| x_i^{k+p} - x_i^{(k)} \right| \leqslant d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_k) < \varepsilon,$$

маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує k_0, що для всіх $k > k_0$ і будь-якого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left| x_i^{k+p} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon.$$

А це й означає, що для $i = \overline{1,n}$ послідовність $\left(x_i^{(k)}\right)$ фундаментальна.

Достатність. Нехай числові послідовності $\left(x_i^{(k)}\right)$ $(i = \overline{1, n})$ фундаментальні. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{n}$, існує $k_0^{(i)}$ $(i = \overline{1, n})$ таке, що для всіх $k > k_0^{(i)}$

$$\left|x_{k+p}^{(i)} - x_k^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Нехай $k_0 = \max\limits_{i=\overline{1,n}} k_0^{(i)}$. Тоді для будь-якого $k > k_0$ і будь-якого $p \in \mathbb{N}$ виконується n нерівностей виду

$$\left|x_{k+p}^{(i)} - x_k^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Врахувавши, що

$$d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)})^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)})^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)}||x_j^{(k+p)} - x_j^{(k)}|} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k+p)} - x_i^{(k)}|,$$

маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ і будь-якого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$d(\mathbf{x}_{k+p}, \mathbf{x}_k) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

А, отже, послідовність $(\mathbf{x}_k)$ фундаментальна. ■

Точно у такий саме спосіб можна довести

Теорема 26.2. *Послідовність* $(\mathbf{x}_k) = ((x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}))$ *точок простору* $\mathbb{R}^n$ *з евклідовою метрикою є збіжною тоді і тільки тоді, коли збіжні послідовності* $(x_1^{(k)})$, $(x_2^{(k)})$, $\ldots$, $(x_n^{(k)})$.

Як наслідок з теорем 26.1 і 26.2 дістаємо, що простір $\mathbb{R}^n$ з евклідовою метрикою є повним.

Теорема 26.3. *Метричний простір* $C_{[a;b]}$ *з рівномірною метрикою є повним.*

Доведення. Нехай послідовність (f_n) є фундаментальною послідовністю точок простору $C_{[a;b]}$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{2}$, існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$d(f_n, f_{n+p}) = \max_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Але тоді для кожного $x \in [a; b]$

$$|f_n(x) - f_{n+p}(x)| \leqslant \max_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

тобто виконується достатня умова рівномірної збіжності функціональної послідовності. Нехай

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x).$$

Оскільки фундаментальна послідовність $f_n(x)$ неперервних на відрізку $[a; b]$ функцій рівномірно збігається до функції $f_0(x)$, то остання є неперервною на відрізку $[a; b]$, тобто $f_0(x) \in C_{[a;b]}$. Якщо в останній нерівності перейти до границі при $p \to \infty$, то для всіх $n > n_0$ і будь-якого $x \in [a; b]$

$$|f_n(x) - f_0(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси в силу неперервності функції $|f_n(x) - f_0(x)|$ на відрізку $[a;b]$ маємо, що $\max\limits_{x\in[a;b]} |f_n(x) - f_0(x)| = d(f_n(x), f_0(x)) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ $\;d(f_n(x), f_0(x)) < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x) \in C_{[a;b]}$. А це й означає, що кожна фундаментальна послідовність є збіжною, тобто простір $C_{[a;b]}$ з рівномірною метрикою є повним. ■

Контрприклад. Покажемо, що метричний простір $C_{[-1;1]}$ з евклідовою метрикою не є повним. Розглянемо послідовність $(f_n(x))$, де

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{якшо } -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{якшо } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{якшо } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

і покажемо, що вона є фундаментальною. Справді, для будь-яких n, p

$$d(f_{n+p}, f_n) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} (f_{n+p}(x) - f_n(x))^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\int\limits_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n+p}} (nx+1)^2 dx + \int\limits_{-\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n+p}} p^2x^2 dx + \int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (nx-1)^2 dx} =$$

$$= \sqrt{2\int\limits_{\frac{1}{n+p}}^{\frac{1}{n}} (nx-1)^2 dx + 2p^2 \int\limits_{0}^{\frac{1}{n+p}} x^2 dx} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+p}-1\right)^3\right)+\frac{2p^2}{3(n+p)^3}} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Отже, як тільки $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, то для всіх $n > n_0$ і будь-якого p $d(f_{n+p}, f_n) < \varepsilon$. А це й означає, що задана послідовність фундаментальна.

Припустимо, що існує функція $f_0(x) \in C_{[-1;1]}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n(x), f_0(x)) = 0$. В силу того, що $f_0(x)$ неперервна на відрізку $[-1;1]$, а функція $\operatorname{sign} x \notin C_{[-1;1]}$, то

$$\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(f_0(x)-\operatorname{sign} x)^2dx} = d(f_0(x), \operatorname{sign} x) > 0.$$

Разом з тим

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^{1}(f_n(x)-\operatorname{sign} x)^2dx = 2\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{1}{n}}(nx-1)^2dx =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left.\frac{(nx-1)^3}{3n}\right|_0^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

тобто $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n(x), \operatorname{sign} x) = 0$. А оскільки

$$\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(f_0(x)-\operatorname{sign} x)^2dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(f_0(x)-f_n(x)+f_n(x)-\operatorname{sign} x)^2dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(f_0(x)-f_n(x))^2dx}+\sqrt{\int\limits_{-1}^{1}(f_n(x)-\operatorname{sign}x)^2dx},$$

то $d(f_n(x),\operatorname{sign}x) \geqslant d(f_0(x),\operatorname{sign}x) - d(f_0(x),f_n(x))$. Звідси $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n(x),\operatorname{sign}x) \geqslant d(f_0(x),\operatorname{sign}x) > 0$. Отримане протиріччя свідчить про те, що наше припущення невірне. А, отже, побудована фундаментальна послідовність не є збіжною, тобто простір $C_{[-1;1]}$ з евклідовою метрикою неповний.

Нехай маємо метричний простір (X,d), і нехай f — відображення X в X $(f: X\to X)$, тобто f є відображенням X в себе.

Означення 26.3. *Відображення f метричного простору в себе називається стискуючим, якщо існує число q $(0<q<1)$ таке, що для довільних x',x'' з X виконується нерівність*

$$d(f(x'),f(x''))\leqslant qd(x',x'').$$

Приклад 1. Покажемо, що функція $f(x)=\sqrt{\sin x}$ є стискуючим відображенням відрізка $[\frac{1}{2};1]$ в себе.

Насамперед з того, що $f(x)$ як композиція двох монотонно зростаючих функцій є монотонно зростаючою на відрізку $[\frac{1}{2};1]$ і

$$f(\frac{1}{2})=\sqrt{\sin\frac{1}{2}}=\sqrt{0,4794\ldots}>\frac{1}{2},$$

$$f(1)=\sqrt{\sin 1}=\sqrt{0,8414\ldots}<1,$$

випливає, що f є відображенням відрізка $[\frac{1}{2};1]$ в себе. А врахувавши, що

$$f'(x)=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}>0$$

на відрізку $[\frac{1}{2};1]$ і

$$\max_{x\in[\frac{1}{2};1]} f'(x) = \frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sqrt{\sin\frac{1}{2}}} = \frac{0,8703\ldots}{2\sqrt{0,4794\ldots}} = q < 1,$$

в силу теореми Лагранжа маємо: для будь-яких $x', x'' \in [\frac{1}{2};1]$ $x' < x''$ $d(f(x'), f(x'')) = |f(x') - f(x'')| = \sqrt{\sin x''} - \sqrt{\sin x'} = f'(c)(x'' - x') \leqslant qd(x', x'')$. Отже, задане відображення є стискуючим.

Приклад 2. Нехай маємо лінійне відображення $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, яке подається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{3} \\ \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{1}{5} \end{pmatrix},$$

причому метрика у просторі $\mathbb{R}^2$ задається так: для будь-яких $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|).$$

Тоді

$$d(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) =$$

$$= d\left((\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2, \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2), (\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{3}y_2, \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{5}y_2) \right) =$$

$$= \max\left(|\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{3}y_2|, |\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{2}{3}y_1 - \frac{1}{5}y_2| \right) =$$

$$= \max\left(|\frac{1}{2}(x_1 - y_1) - \frac{1}{3}(x_2 - y_2)|, |\frac{2}{3}(x_1 - y_1) + \frac{1}{5}(x_2 - y_2)| \right) \leqslant$$

$$\leqslant \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|) \max\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{15} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Отже, задане відображення є стискуючим.

Очевидно, що будь-яке стискуюче відображення є неперервним.

Означення 26.4. *Точка x_0 метричного простору X називається нерухомою точкою відображення $f : X \to X$, якщо $f(x_0) = x_0$, тобто x_0 — розв'язок рівняння $f(x) = x$.*

Наступна теорема дає відповідь на питання „У якому випадку останнє рівняння має розв'язок, причому єдиний? "

Теорема Банаха (принцип стискуючих відображень). *Будь-яке стискуюче відображення повного метричного простору в себе має єдину нерухому точку.*

Доведення. Нехай (X, d) — повний метричний простір, f — стискуюче відображення простору X в себе і нехай x_0 — довільна фіксована точка цього простору. Побудуємо послідовність (x_n) точок простору X у такий спосіб:

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),\ x_3 = f(x_2) =$$

$$= f(f(f(x_0))), \ldots, x_n = f(x_{n-1}) = \underbrace{f(f(f(\ldots f(x_0)\ldots)))}_{n \text{ кратна композиція}}, \ldots$$

Покажемо, що ця послідовність є фундаментальною. Врахувавши, що задане відображення є стискуючим, тобто існує q $(0 < q < 1)$ таке, що для будь-яких $x, y \in X$ $d(f(x), f(y)) \leqslant q d(x, y)$, для $n = 2, 3, \ldots$ маємо:

$$d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leqslant q d(x_1, x_0),$$

$$d(x_3, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leqslant q d(x_2, x_1) \leqslant q^2 d(x_1, x_0),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d(x_n, x_{n-1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) \leqslant qd(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant$$

$$\leqslant q^{n-1} d(x_1, x_0),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Тоді для будь-якого n і будь-якого p

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant d(x_{n+p}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \cdots +$$

$$+ d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \leqslant$$

$$\leqslant (q^{n+p-1} + q^{n+p-2} + \cdots + q^{n+1} + q^n) d(x_1, x_0) <$$

$$< (q^n + q^{n+1} + \cdots) d(x_1, x_0) = \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0).$$

Оскільки $0 < q < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) = 0$. А отже, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$\frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) < \varepsilon.$$

Звідси маємо, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого p виконується нерівність

$$d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon.$$

А це й означає, що послідовність (x_n) фундаментальна. В силу повноти простору X ця послідовність збігається. Нехай

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$. Покажемо, що $f(x^*) = x^*$. Справді, оскільки стискуюче відображення є неперервним, то

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = f(x^*).$$

Доведемо єдиність точки x^*. Припустимо, що існує точка $x^{**} \in X$ $(x^{**} \neq x^*)$ така, що $f(x^{**}) = x^{**}$. Тоді

$$d(x^*, x^{**}) = d(f(x^*), f(x^{**})) \leqslant qd(x^*, x^{**}),$$

де $q < 1$. і з нерівності $d(x^*, x^{**}) \leqslant qd(x^*, x^{**})$ дістаємо $1 \leqslant q$. Отримане протиріччя і доводить єдиність нерухомої точки. ■

Зауваження 1. Оскільки для кожного n і кожного p

$$d(x_{n+p}, x_n) < \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1),$$

то, перейшовши до границі у лівій частині при $p \to \infty$, маємо:

$$d(x^*, x_n) < \frac{q^n}{1-q}\, d(x_0, x_1).$$

Зауваження 2. Принцип стискуючих відображень можна застосувати для доведення існування і єдиності розв'язку рівнянь різних типів, причому метод доведення дає метод наближеного знаходження невідомого розв'язку. Такий метод розв'язування рівнянь виду $f(x) = x$ носить назву методу послідовних наближень.

Застосування.

1. Розв'язування рівнянь виду $f(x) = 0$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a; b]$ і задовольняє на цьому відрізку умови Ліпшиця, тобто існує число $L > 0$ таке, що для всіх $x', x'' \in [a; b]$ виконується нерівність

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant L|x' - x''|.$$

Якщо $f([a;b]) \subset [a;b]$ і $L < 1$, то f є стискуючим відображенням цього відрізка. А, отже, в силу теореми Банаха рівняння $f(x) = x$ має єдиний розв'язок, причому він є границею послідовності (x_n), де $x_0 \in [a;b]$ — фіксоване число, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $\ldots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $\ldots$. Зокрема, якщо $f(x)$ диференційовна на відрізку $[a;b]$ і $\forall x \in [a;b] \quad |f'(x)| \leqslant q < 1$, то рівняння $f(x) = x$ можна розв'язувати методом послідовних наближень.

Наприклад, вище було доведено, що відображення $f(x) = \sqrt{\sin x}$ є стискуючим відображенням відрізка $[\frac{1}{2}, 1]$. Поклавши $x_0 = 1$, дістанемо $x_7 \approx f(x_7) \approx 0,8768$, тобто 0,8768 є наближене значення кореня рівняння $\sqrt{\sin x} = x$.

Досить популярним чисельним методом розв'язування рівнянь є метод Ньютона. Так у випадку, коли функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;b]$, на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, опукла донизу і має додатну похідну, то пошук кореня рівняння можна здійснити так. Візьмемо точку $x_0 \in [a;b]$ і запишемо рівняння $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці $(x_0, f(x_0))$. Знайдемо точку перетину дотичної з віссю Ox

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{f'(x_0)}\, f(x_0).$$

З точкою x_1 проробимо ту ж процедуру. і взагалі послідовно будемо обчислювати наближення невідомого кореня за формулою

$$x_n = x_{n-1} - \frac{1}{f'(x_{n-1})}\, f(x_{n-1}).$$

Неважко переконатись, що побудована послідовність (x_n) буде монотонно прямувати до кореня рівняння $f(x) = 0$.

Зокрема, якщо $f(x) = x^k - a$, тобто необхідно знайти $\sqrt[k]{a}$, де $a > 0$, рекурентне співвідношення має вигляд

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^k - a}{k x_{n-1}^{k-1}},$$

а при $k = 2$ маємо відоме рекурентне співвідношення для наближеного обчислення кореня квадратного

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

Розглянемо модифікацію методу Ньютона. А саме, побудуємо послідовність (x_n) за формулою

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_0)},$$

де похідна обчислена тільки у точці x_0. Тоді для відображення

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

за теоремою Лагранжа маємо, що для будь-яких $x', x'' \in [a; b]$

$$|F(x') - F(x'')| = \frac{f'(c)}{f'(x_0)}\,|x' - x''|,$$

де c — деяка точка між x' і x''. Якщо на деякому відрізку $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ $F([\alpha; \beta]) \subset [\alpha; \beta]$ і для всіх $x \in [\alpha; \beta]$

$$\frac{f'(x)}{f'(x_0)} \leqslant q < 1,$$

то $F(x)$ — стискуюче відображення відрізка $[\alpha; \beta]$, а, отже, має єдину нерухому точку. Таким чином, рівняння $F(x) = x$ або $f(x) = 0$ має на відрізку $[\alpha; \beta]$ єдиний корінь, наближене значення якого можна знайти методом послідовних наближень.

Звичайно умови, які гарантують застосовність модифікованого методу Ньютона можна послабити, а саме досить мати відрізок $[\alpha; \beta]$, на якому $F([\alpha; \beta]) \subset [\alpha; \beta]$, і

$$\left|\frac{f'(x)}{f'(x_0)}\right| \leqslant q < 1 \text{ для всіх } x \in [\alpha; \beta].$$

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь.
Нехай маємо систему лінійних рівнянь

$$A\mathbf{x}^t = \mathbf{b}^t,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n). \end{array}$$

Перепишемо його у вигляді $A\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^t - \mathbf{b}^t = \mathbf{x}^t$ або $\widetilde{A}\,\mathbf{x}^t - \mathbf{b}^t = \mathbf{x}^t$, де

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+1 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+1 \end{pmatrix}.$$

Будемо вважати, що для будь-яких $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|.$$

Розглянемо відображення $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, яке діє за таким правилом:

$$\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad f(\mathbf{x}) = (\,\widetilde{A}\,\mathbf{x}^t - \mathbf{b}^t)^t.$$

Тоді для будь-яких $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = d\left((\,\widetilde{A}\,\mathbf{x}^t - \mathbf{b}^t)^t, (\,\widetilde{A}\,\mathbf{y}^t - \mathbf{b}^t)^t\right) =$$

$$= d\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{1j}\, x_j - b_1, \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{2j}\, x_j - b_2, \dots, \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{nj}\, x_j - b_n\right),\right.$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{1j}\, y_j - b_1, \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{2j}\, y_j - b_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{nj}\, y_j - b_n\right)\Bigg) =$$

$$= \max_{i=\overline{1,n}} \Big| \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}\, (x_j - y_j) \Big| \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |\, \widetilde{a}_{ij}\, ||x_j - y_j| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=\overline{1,n}} |x_j - y_j| \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |\, \widetilde{a}_{ij}\, | = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |\, \widetilde{a}_{ij}\, | d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Отже, якщо $\max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |\, \widetilde{a}_{ij}\, | < 1$, то відображення f є стискуючим і рівняння $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ має єдиний розв'язок, тобто задана система рівнянь має єдиний розв'язок, який можна шукати методом послідовних наближень.

3. Розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку.

Нехай у диференціального рівняння

$$y' = f(x, y)$$

функція $f(x, y)$ визначена і неперервна на прямокутнику $D = \{(x, y) \,|\, |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$ і задовольняє на ньому умови Ліпшиця по змінній y, тобто існує $L > 0$ таке, що для будь-яких точок $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ виконується нерівність

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

і нехай $h = \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$, де $M = \max\limits_{(x,y)\in D} |f(x, y)|$.

Позначимо через X множину всіх неперервних на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ функцій, кожна з яких набуває значень з відрізка $[y_0 - b; y_0 + b]$, тобто $X = \{f \,|\, f \in C_{[x_0 - h; x_0 + h]}, |f(x) - y_0| \leqslant b\}$.

Ця множина, як замкнена підмножина повного метричного простору $C_{[x_0-h;x_0+h]}$ з рівномірною метрикою, є повним метричним простором з цією ж метрикою.

Побудуємо відображення F множини X у множину $C_{[x_0-h;x_0+h]}$ у такий спосіб: кожній функції $y(x) \in X$ віднесемо функцію $y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, яка є неперервною на відрізку $[x_0 - h; x_0 + h]$ як сума сталої та інтеграла зі змінною верхнею межею від неперервної функції. Крім того, оскільки

$$|y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt - y_0| = |\int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt| \leqslant$$

$$\leqslant |\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt| \leqslant M|\int\limits_{x_0}^{x} dt| \leqslant Mh \leqslant b,$$

то образ кожної функції $y(x)$ з X належить множині X, тобто відображення F є відображенням X в себе. А оскільки для будь-яких $y_1(x), y_2(x) \in X$

$$d(F(y_1(x)), F(y_2(x))) = d(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt, y_0 +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt) = \max_{x \in [x_0-h;x_0+h]} |\int\limits_{x_0}^{x} |f(t, y_1(t)) -$$

$$-f(t, y_2(t))|dt| \leqslant L \max_{x \in [x_0-h;x_0+h]} \int\limits_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x_0}^{x_0+h} \max_{x\in[x_0-h;x_0+h]} |y_1(t) - y_2(t)|dt =$$

$$= L \int\limits_{x_0}^{x_0+h} d(y_1(x), y_2(x))dt = L \cdot hd(y_1(x), y_y(x)),$$

то, врахувавши, що $L \cdot h < 1$, маємо, що відображення F є стискуючим. Отже, рівняння

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

має єдиний розв'язок $Y(x)$, який задовольняє умову $Y(x_0) = y_0$. А оскільки задача відшукання розв'язку цього інтегрального рівняння еквівалентна задачі відшукання розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, причому цей розв'язок має задовольняти початкову умову $Y(x_0) = y_0$, то задачу Коші для останнього рівняння можна розв'язувати методом послідовних наближень.

Як ілюстрацію розглянемо диференціальне рівняння

$$y' = y + \ln x$$

і будемо шукати розв'язок, який задовольняє початкову умову $Y(1) = 1$, тобто будемо шукати інтегральну криву, що проходить через точку $M(1, 1)$. Легко переконатись, що

$$y = e^x(C + \int\limits_{1}^{x} e^{-t} \ln t \, dt)$$

загальний розв'язок цього рівняння. (Зауважимо, що

$\int e^{-t}\ln t\,dt$ у скінченному вигляді через елементарні функції не подається). При $C = e^{-1}$ маємо інтегральну криву

$$y = e^{x-1} + e^{x}\int\limits_{1}^{x} e^{-t}\ln t\,dt,$$

яка проходить через точку $M_0(1,1)$.

У прямокутнику $D = \{(x,y) \,|\, |x-1| \leqslant \frac{1}{2}, |y-1| \leqslant \frac{1}{2}\}$ функція $f(x,y) = y + \ln x$ неперервна і для всіх $(x,y) \in D$ $\;|f(x,y)| \leqslant 2$. Для будь-яких $(x,y_1),(x,y_2) \in D$ $\;|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2|$, тобто ця функція задовольняє умови Ліпшиця по змінній y з константою $L = 1$. Оскільки

$$\min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1\right\} = \frac{1}{4} < 1,$$

то існує єдина функція $y = Y(x)$, визначена і неперервна разом з своєю похідною на відрізку $[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}]$, яка є розв'язком заданого рівняння і задовольняє умову $Y(1) = 1$. Застосувавши метод послідовних наближень, маємо:

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x}(1 + \ln t)dt = 1 + x\ln x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x}(1 + \ln t + t\ln t)dt = \frac{5}{4} + x\ln x - \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4},$$

$$y_3(x) = 1 + \int\limits_{1}^{x}(\frac{5}{4} + t\ln t + \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{4} + \ln t)dt =$$

$$= \frac{41}{36} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{5}{36}x^3 + x\ln x + \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^3}{6}\ln x.$$

Врахувавши, що для всіх $x \in [x_0 - h; x_0 + h]$

$$|Y(x) - y_n(x)| \leqslant \frac{M}{L}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(Lh)^k}{k!},$$

у нашому випадку маємо:

$$|Y(x) - y_3(x)| \leqslant 2\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{4^k k!} = 2\left(\sqrt[4]{e} - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4\cdot 2!} - \frac{1}{4\cdot 3!}\right) < \quad < 3\cdot 10^{-4}.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Нехай на множині X задано дві метрики d_1 і d_2. Будемо називати їх еквівалентними, якщо для будь-якої послідовності (x_n) $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(x_n, x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(x_n, x_0) = 0$. Довести, що якщо існують $\alpha_1 > 0$ і $\alpha_2 > 0$ такі, що

$$\alpha_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant \alpha_2 d_1(x, y)$$

для будь-яких $x, y \in X$, то метрики d_1 і d_2 еквівалентні, пручому з повноти одного з просторів $(X, d_1), (X, d_2)$ випливає повнота другого.

2. Довести, що метричні простори $(\mathbb{R}^n, d_i)$, де

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2},$$

$$d_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|,$$

$$d_3(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k - y_k|$$

повні, а їх метрики еквівалентні.

3. Довести, що у повному метричному просторі кожна послідовність вкладених одна в одну замкнених куль, радіуси яких прямують до нуля, має перетином одноелементну множину.

4. Знайдіть нерухомі точки відображення f

   а) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ за правилом $y_1 = 2x_2 + 3x_2^2, y_2 = 2x_1 + 3x_1^2$;

   б) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ за правилом $y_1 = x_2x_3, y_2 = 2x_1x_3,$
   $y_3 = 3x_1x_2$;

   в) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ за правилом $y_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4,$
   $y_2 = 4x_1 + 3x_3 + x_4 - 4, y_3 = 2 - 2x_1 + 3x_2 + x_4,$
   $y_4 = x_4.$

5. Які з відображень

   а) $f(x) = x^2$ на $[0; \frac{1}{3}]$;

   б) $u = 0,7x + 0,8y, v = 0,2x + 0,05y$ на $\mathbb{R}^2$;

   в) $F(y) = \frac{1}{3}\int\limits_0^x y(x)dx$ на $C_{[0;2]}$ з рівномірною метрикою є стискуючим?

6. Переконайтесь, що система

$$\begin{cases} 10x - 2y + \ \ z = \ \ 9, \\ \ \ x + 5y - \ \ z = \ \ 8, \\ 4x + 2y + 8z = 32 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок, і знайдіть його з точністю до 0,01 методом послідовних наближень, взявши за нульове наближення точку (0,0,0).

7. Методом послідовних наближень розв'язати функціональні (інтегральні) рівняння:

а) $f(x) = 1 + \int\limits_0^x f(t)dt, \ f_0(x) \equiv 0;$

б) $f(x) = x - \int\limits_0^x (x-t)f(t)dt, \ f_0(x) \equiv 0;$

в) $f(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x f(t)dt + e^x - \frac{1}{2}(e-1), \ f_0(x) \equiv 0.$

27 *ЛЕКЦІЯ*: Числові ряди з дійсними та комплексними членами

Числовий ряд, його збіжність. Геометрична прогресія та гармонійний ряд. Властивості збіжних рядів. Ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами. Абсолютно ти умовно збіжні ряди та їх властивості.

Література. [1] ч. 1, с. 272–275, 283–292; [3] т. 1, с. 477–514; [9], ч. 2, с. 3–25.

Нехай маємо послідовність (z_n) комплексних чисел. Для кожного n існує число

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k,$$

яке є сумою n перших членів заданої послідовності, тобто послідовність (z_n) породжує нову послідовність (S_n), де

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$

Застосування до послідовності (S_n) основної операції аналізу дає можливість поняття суми узагальнити на деякі випадки „сум“ нескінченного числа доданків. Таким узагальненням є поняття ряду і його суми.

Означення 27.1. *Символ виду*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \quad \textit{або} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{27.1}$$

називається числовим рядом (або просто рядом), а числа $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ *називають членами ряду.*

Послідовність (S_n), де $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$, називають *послідовністю часткових сум* ряду (27.1), а ряд

$$z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+k} + \cdots \quad \text{або} \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} z_n$$

називають *залишком* ряду (27.1) після n-го члена.

Означення 27.2. *Якщо існує*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд (27.1) називається збіжним, а число S називається його сумою і записують

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

У противному разі ряд (27.1) називається розбіжним.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, де $a, q \in \mathbb{C}$ (геометрична прогресія з першим членом a і знаменником q).

Розв'язання. Оскільки для заданого ряду

$$S_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$

а $qS_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n$, то, віднявши почлено ці рівності, маємо

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ і

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \right) = \frac{a}{1-q}.$$

Отже, у цьому випадку заданий ряд збігається і його сумою є число $\dfrac{a}{1-q}$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Якщо ж $|q| \geqslant 1$, то послідовність (q^n) розбіжна, а, отже, буде розбіжною послідовність (S_n), тобто у цьому випадку заданий ряд розбігається.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (гармонійний ряд).

Розв'язання. Нехай (S_n) послідовність часткових сум заданого ряду, а (S_{2^n}) її підпослідовність. Оскільки для кожного n

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

то

$$S_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) >$$

$$> \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2},$$

тобто підпослідовність S_{2^n} необмежена, а отже, розбіжна. Звідси випливає, що послідовність S_n розбіжна. А це й означає, що гармонійний ряд розбіжний.

Зауваження. Якщо вважати, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, то кажуть, що гармонійний ряд має нескінченну суму.

Можна довести, що

а) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається, то збігається будь-який його залишок, причому

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{n} z_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k$$

(звідси маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ є необхідною умовою збіжності ряду);

б) якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha z_n^{(1)}$, де $\alpha \in \mathbb{C}$, назвати добутком ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ на число α а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n^{(1)} + z_n^{(2)})$ сумою рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}$, то із збіжності останніх випливає збіжність рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha z_n^{(2)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (z_n^{(1)} + z_n^{(2)}),$$

причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha z_n^{(1)} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (z_n^{(1)} + z_n^{(2)}) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(2)}.$$

Якщо кожен член ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ записати в алгебраїчній формі, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \tag{27.2}$$

породжує два ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{27.3}$$

Теорема 27.1. *Ряд (27.2) збігається тоді і тільки тоді, коли збігаються ряди (27.3), причому якщо* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n) = A + iB.$$

Доведення. Необхідність. Нехай ряд (27.2) збігається і його сума дорівнює $A+iB$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A+iB$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|S_n - (A+iB)| < \varepsilon$. Для таких n

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k - A| =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right)^2} \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k - B\right)^2} =$$

$$= \left|\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right) + i\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - B\right)\right| =$$

$$= |\sum_{k=1}^{n}(a_k + ib_k) - A - iB| = |S_n - (A+iB)| < \varepsilon.$$

А це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Аналогічно доводиться, що $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

Достатність. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, існує n_1 таке, що для всіх

$n > n_1$ виконується нерівність $|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k - A| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Для цього ж $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ існує номер n_2 такий, що для всіх $n > n_2$ виконується нерівність $|\sum\limits_{k=1}^{n} b_k - B| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Нехай $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тоді для всіх $n > n_0$ виконуються обидві нерівності

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k - A| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{і} \quad |\sum_{k=1}^{n} b_k - B| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

А отже,

$$|S_n - (A + iB)| = |\sum_{k=1}^{n} a_k - A + i(\sum_{k=1}^{n} b_k - B)| =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - A\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k - B\right)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

для всіх $n > n_0$. А це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = A + iB$. ∎

Оскільки послідовність (z_n) комплексних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна, тобто коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність $|z_n - z_{n+p}| < \varepsilon$, то послідовність (S_n) часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого натурального p виконується нерівність

$$|S_n - S_{n+p}| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Якраз останнє і дозволяє сформулювати необхідну і достатню умову збіжності числового ряду.

Теорема 27.2 (критерій Коші). *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *збігається тоді і тільки тоді, коли для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існує номер* n_0 *такий, що для всіх* $n > n_0$ *і будь-якого натурального* p *виконується нерівність*

$$|S_n - S_{n+p}| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Ряд (27.2) крім рядів (27.3) породжує, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|, \tag{27.4}$$

збіжність якого (у чому легко переконатись) гарантує збіжність ряду (27.2). У зв'язку з цим стає зрозумілою необхідність інструментарію для дослідження рядів, всі члени яких є невід'ємними.

Нехай у ряді

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{27.5}$$

всі члени невід'ємні. Тоді послідовність (S_n) його часткових сум буде неспадною, і для її збіжності необхідно і досить, щоб вона була обмежена зверху. Отже, ряд (27.5) збігається, якщо послідовність його часткових сум обмежена.

Питання збіжності ряду (27.5) часто вдається вияснити, порівнюючи його з певним еталонним рядом, тобто рядом, збіжність чи розбіжність якого встановлена.

Теорема 27.3 (теорема порівняння рядів). *Якщо для рядів*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (I), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (II)$$

з невід'ємними членами існує номер n_0 *такий, що для всіх* $n \geqslant n_0$ *виконується нерівність* $a_n \leqslant b_n$*, то із збіжності ряду*

(II) випливає збіжність ряду (I), а з розбіжності ряду (I) випливає розбіжність ряду (II).

Доведення. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що для рядів (I) і (II) нерівність $a_n \leqslant b_n$ виконується для всіх n. (Досить згадати, що ряд збігається або розбігається одночасно із будь-яким своїм залишком.) Тоді очевидно, що для всіх n

$$S_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} a_n \leqslant S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} b_n. \tag{27.6}$$

Якщо ряд (II) збігається, то послідовність $\left(S_n^{(2)}\right)$ його часткових сум обмежена зверху, тобто існує $M > 0$, що для всіх n $S_n^{(2)} \leqslant M$. Врахувавши нерівність (27.6), маємо, що для всіх n $S_n^{(1)} \leqslant M$. А це й означає, що ряд (I) збігається. Якщо ж ряд (I) розбігається, то послідовність $\left(S_n^{(1)}\right)$ необмежена зверху, тобто для будь-якого $M > 0$ існує n_0 таке, що $S_{n_0}^{(1)} > M$. Врахувавши нерівність (27.6), маємо що і $S_{n_0}^{(2)} > M$. А це означає, що послідовність $\left(S_{n_0}^{(2)}\right)$ необмежена, тобто що ряд (II) розбіжний. ■

Зручним для практичного використання є наслідок з теореми 27.3.

Наслідок. *Якщо у ряді (II) для всіх n $b_n > 0$ і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k,$$

то із збіжності ряду (II) і того, що $0 \leqslant k < +\infty$, випливає збіжність ряду (I), а з розбіжності ряду (I) і того, що $0 < k \leqslant +\infty$, випливає розбіжність ряду (II).

Скориставшись теоремою порівняння рядів і еталонними рядами можна розв'язати питання збіжності досить широкого класу рядів. Нехай маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами, і нехай існує число q $(0 < q < 1)$ і номер n_0 такі, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q.$$

Тоді для всіх $n \geqslant n_0$ маємо:

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} \leqslant q a_{n_0},\\
&a_{n_0+2} \leqslant q a_{n_0+1} \leqslant q^2 a_{n_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{n_0+k} \leqslant q a_{n_0+k-1} \leqslant \dots \leqslant q^k a_{n_0},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Таким чином, кожен член ряду $\sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty} a_k$ не перевищує відповідного члена ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_0 q^n$. Останній ряд збігається як геометрична прогресія із знаменником q $(0 < q < 1)$. Звідси випливає, що збіжним буде і заданий ряд.

Якщо ж існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1,$$

то для заданого ряду не виконується необхідна умова збіжності і він розбігається. Фактично тут обгрунтована ознака Д'Аламбера збіжності ряду з додатними членами, яку на практиці використовують у такій формі.

Гранична форма ознаки Д'Аламбера. *Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то ряд збігається, якщо $l < 1$, і розбігається, якщо $l > 1$. Якщо ж $l = 1$, ряд потребує додаткового дослідження.*

Порівняння рядів з невід'ємними членами з геометричною прогресією дозволяє сформулювати ще одну ознаку збіжності.

Гранична форма ознаки Коші. *Якщо для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *з невід'ємними членами існує* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, *то ряд збігається, якщо* $l < 1$, *і розбігається, якщо* $l > 1$. *Якщо ж* $l = 1$, *ряд потребує додаткового дослідження.*

Популярною є ще одна ознака збіжності ряду з додатними членами, яка грунтується на порівнянні ряду з невласним інтегралом від додатної функції.

інтегральна ознака збіжності. *Якщо функція* f, *визначена для всіх* $x \geqslant 1$, *є додатною і спадною, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *збігається тоді і тільки тоді, коли збігається інтеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$.

Зрозуміло, що при використанні цієї ознаки при дослідженні на збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ функція f не задається, а її треба побудувати так, щоб для кожного n $f(n) = a_n$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,a^n}{n^n},$$

де $a > 0$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,a^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} n!\,a^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a\,n^n}{(n+1)^{n+1}} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e},$$

то за ознакою Д'Аламбера (у граничній формі) при $0 < a < e$ ряд збігається, а при $a > e$ ряд розбігається. При $a = e$ ряд потребує додаткового дослідження, яке можна провести, скориставшись формулою Стірлінга. А саме врахувавши, що при $n \to \infty$ $(n!) \sim (n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})$, маємо, що при $a = e$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n},$$

тобто не виконується необхідна умова збіжності.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{не існує}, & \text{якщо } \alpha < 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha = 0, \\ 0, & \text{якщо } \alpha > 0, \end{cases}$$

то при $\alpha \leqslant 0$ необхідна умова збіжності не виконується і ряд розбігається. Якщо ж $\alpha > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^\alpha = 1,$$

тобто застосування ознак Д'Аламбера і Коші не дає результату. Якщо ж у n-ому члені $\dfrac{1}{n^\alpha}$ замість n покласти x, то очевидно, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ визначена, додатна і спадна на проміжку $[1; +\infty)$. Тому за інтегральною ознакою заданий ряд збігається одночасно з невласним інтегралом

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Врахувавши, що

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} - \dfrac{A^{-\alpha+1}}{\alpha-1}, & \text{якщо } \alpha \neq 1, \\ \ln A, & \text{якщо } \alpha = 1, \end{cases}$$

маємо, що цей інтеграл розбігається при $0 < \alpha \leqslant 1$ і збігається при $\alpha > 1$. А отже, заданий ряд збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leqslant 1$.

З класу рядів з дійсними, але довільними членами виділимо клас знакозмінних рядів, тобто рядів виду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1}a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n,$$

де $a_n > 0$ для всіх n.

Теорема 27.4 (ознака Лейбніца). *Якщо у ряді*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}a_n, \tag{27.7}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *і для всіх* n $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$, *то такий ряд збігається.*

Доведення. Оскільки для кожного k $a_{2k-1} - a_{2k} \geqslant$, то кожна часткова сума парного порядку

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k}) \geqslant 0.$$

Якщо ж кожну часткову суму парного порядку подати у вигляді

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k},$$

то очевидно, що для кожного k $S_{2k} < a_1$, тобто послідовність (S_{2k}) обмежена зверху. Звідси випливає, що послідовність (S_{2k})збіжна і нехай

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

Врахувавши, що для кожного k $S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}$, і що $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$, дістаємо, що і послідовність часткових сум непарного порядку теж збіжна і

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S.$$

Тоді можна стверджувати, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер k_1 такий, що для всіх $k > k_1$ виконується нерівність $|S_{2k} - S| < \varepsilon$, і для цього ж ε існує номер k_2 такий, що для всіх $k > k_2$ виконується нерівність $|S_{2k+1} - S| < \varepsilon$. Якщо $n_0 = \max(2k_1, 2k_2 + 1)$, то кожне $n > n_0$ буде більшим і $2k_1$, і $2k_2 + 1$, а отже, для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|S_n - S| < \varepsilon$. Останнє якраз і означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. ■

Зауваження. Оскільки послідовність (S_{2k}) часткових сум парного порядку зростає, а послідовність (S_{2k+1}) часткових сум непарного порядку спадає, то для будь-якого k виконується нерівність

$$S_{2k} \leqslant S \leqslant S_{2k+1},$$

де S — сума ряду (27.7). Отже, для будь-якого n $|S_n - S| \leqslant a_{n+1}$.

Повернемось тепер до рядів з комплексними членами і виділимо клас рядів, для яких питання збіжності розв'язується через збіжність рядів з невід'ємними членами.

Означення 27.3. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \tag{27.8}$$

називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \tag{27.9}$$

Очевидно, що коли ряд (27.9) збігається, то збігається ряд (27.8). А от якщо ряд (27.9) розбігається, то не обов'язково ряд (27.8) має розбігатись. Справді, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

задовольняє умовам теореми 27.4, а отже, збігається. Разом з тим ряд, складений з абсолютних величин його членів є гармонійний ряд, тобто розбіжний.

Означення 27.4. *Ряд (27.8) називається умовно збіжним, якщо він збігається, а ряд (27.9) розбігається.*

Виявляється, що властивості абсолютно збіжних рядів багато у чому схожі на властивості звичайних сум. Так, наприклад, у збіжному ряді його члени можна довільним чином об'єднувати у групи, не порушуючи при цьому їх розташування. Як результат отримаємо збіжний ряд з тією ж сумою. А от щодо перестановки членів збіжного ряду, то, взагалі кажучи, вона може змінити суму і навіть збіжний ряд перетворити на розбіжний.

Позначимо через

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n^* \tag{27.10}$$

ряд, складений з усіх членів ряду (27.8), але взяті вони, взагалі кажучи, в іншому порядку.

Теорема 27.5. *Якщо ряд (27.8) збігається абсолютно, то і ряд (27.10) збігається абсолютно і має ту ж суму, що і ряд (27.8).*

Доведення. Нехай ряд (27.8) збігається абсолютно, тобто збігається ряд (27.9), і нехай

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \tilde{s} .$$

Тоді послідовність $(\tilde{S}_n) = (\sum_{k=1}^{n} |z_n|)$ обмежена зверху і для кожного n $\tilde{S}_n \leqslant \tilde{S}$. Розглянемо послідовність $\tilde{S}{}_n^*$ часткових сум ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n^*|. \tag{27.11}$$

Очевидно, що якою б не була часткова сума $\tilde{S}{}_m^*$ ряду (27.11), існує часткова сума $\tilde{S}_n$ $(m \leqslant n)$ ряду (27.9), яка містить всі доданки з суми $\tilde{S}{}_m^*$. А отже,

$$\tilde{S}{}_m^* \leqslant \tilde{S}_n \leqslant \tilde{S},$$

тобто послідовність $(\tilde{S}{}_m^*)$ часткових сум ряду (27.11) обмежена зверху. Звідси випливає, що ряд (27.10) абсолютно збіжний.

Доведемо, що коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S,$$

то сума ряду (27.10) теж дорівнює S. Оскільки ряд (27.9) збігається, то для будь-якого $\varepsilon > 0$, зокрема для $\frac{\varepsilon}{2}$, існує n_0 таке, що залишок ряду після члена з номером n_0 буде менший, ніж ε, тобто

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Але тоді

$$|S - S_{n_0}| = |\sum_{n=n_0+1}^{\infty} z_n| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Виберемо тепер номер m_0 ($n_0 \leqslant m_0$) такий, щоб у частковій сумі $\tilde{S}{}^*_{m_0}$ ряду (27.10) містились всі доданки з суми S_{n_0}. Тоді для всіх $m > m_0$

$$S^*_m - S_{n_0} \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |z_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

а отже,

$$\begin{aligned} |S - S^*_m| &= |S - S_{n_0} + S_{n_0} - S^*_m| \leqslant |S - S_{n_0}| + |S^*_m - S_{n_0}| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким чином, для будь-якого $\varepsilon > 0$ ми вказали номер m_0 такий, що для всіх $m > m_0$ виконується нерівність $|S - S^*_m| < \varepsilon$. А це й означає, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^*_n = S$. ■

Можна довести, що ряд, складений з усіх можливих попарних добутків членів двох абсолютно збіжних рядів є абсолютно збіжний ряд, причому сума його дорівнює добутку сум кожного з цих рядів.

З умовно збіжними рядами так вільно поводитись не можна. Наприклад, доведено, що коли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ з дійсними членами збігається умовно, то яким би не було дійсне число A, члени цього ряду можна переставити так, що отримаємо ряд, сума якого дорівнює A.

Завдання для самоконтролю.

1. Довести, що коли ряд збігається, то будь-який його залишок збігається. Якщо збігається який-небудь залишок ряду, то і ряд збігається.

2. Довести, що коли послідовність (a_n) збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує підпослідовність (a_{n_k}) така, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ збігається і має суму s_0, причому $|s_0| < \varepsilon$.

3. Довести, що коли існує
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = l,$$
то при $l < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ збігається абсолютно, а при $l > 1$ він розбігається.

4. Довести, що коли для послідовності (a_n) з додатними членами існує
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = r,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо $r > 1$, і розбігається, якщо $r < 1$.

5. Дослідити на збіжність ряди:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}; \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}};$$

$$\text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)(\ln\ln(n+1))}.$$

6. Довести, що ряди:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{2n+1}\right)^n; \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln(n+1)]}}{(n+1)\ln^2(n+1)};$$

$$\text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sin n]+1}}{\sqrt[3]{n}} \arcsin\frac{\pi}{6n}.$$

абсолютно збіжні.

7. Довести, що ряди:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}; \qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{(-n)^{n+1}}$$

$$\text{в)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \operatorname{arctg}\frac{2n^2+3}{2n^2+1};$$

умовно збіжні.

28 *ЛЕКЦІЯ*: Степеневі ряди з дійсними та комплексними членами та їх застосування

Функціональний ряд, його збіжність та рівномірна збіжність. Степеневий ряд, структура його області збіжності. Властивості суми степеневого ряду. Розклад у степеневий ряд основних елементарних функцій. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Література. [2] ч. 1, с. 301–305, 318–333, ч. 3, с. 249–251; [3] т. 1, с. 514–562; [4] с. 138–154; [9], ч. 2, с. 34–55.

Природним узагальненням числового ряду є функціональний ряд, тобто ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{28.1}$$

де $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, взагалі кажучи, функції комплексної змінної. Якщо множина

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(f_n) \subset \mathbb{C}$$

непорожня, то казатимемо, що ряд (28.1) визначено на множині D. Тоді кожній точці $z_0 \in D$ відповідатиме числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0), \tag{28.2}$$

і якщо він збіжний, то казатимемо, що точка z_0 є точкою збіжності ряду (28.1), а якщо ряд (28.2) збігається абсолютно, то z_0 є точка абсолютної збіжності ряду (28.1). Множину E всіх тих точок множини D, у яких ряд (28.1) збігається називають його областю збіжності. Відповідність, яка кожному $z \in E$ відносить суму відповідного числового ряду, є функцією $S(z)$, визначеною на множині E, яку називають *сумою функціонального ряду* і записують (28.1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z) = S(z)$.

Особливу роль у теорії функціональних рядів відіграє так звана рівномірна збіжність. Кажуть, що функціональний ряд (28.1) рівномірно збігається до функції $S(z)$ на множині E, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати номер n_0 такий, що для всіх $n > n_0$ і будь-якого $z \in E$ виконується нерівність

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - S(z)| < \varepsilon.$$

Ознака Вейєрштрасса. *Якщо існує збіжний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *з додатними членами такий, що для кожного* n *і всіх* $z \in E$ *виконується нерівність* $|f_n(z)| \leqslant a_n$*, то ряд (28.1) абсолютно і рівномірно збігається на множині* E.

Причина особливої ролі рівномірної збіжності функціонального ряду у тому, що для таких рядів основні властивості, якими володіють всі члени ряду, мають місце і для суми ряду. Так, наприклад, якщо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{28.3}$$

де $f_n(x)$ — функції дійсної змінної, рівномірно збігається на відрізку $[a; b]$ і кожен член ряду є неперервна на цьому відрізку функція, то його сума є неперервна на відрізку $[a; b]$ функція. У цьому випадку ряд (28.3) можна почленно інтегрувати, причому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a}^{b} f_n(x)dx = \int_{a}^{b} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx.$$

Якщо ж у ряді (28.3) кожен член є неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$ функція, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f'(x)$$

рівномірно збігається на відрізку $[a; b]$, а ряд (28.3) збігається хоч в одній точці $x_0 \in [a; b]$, то останній ряд рівномірно збігається на відрізку $[a; b]$, його сума

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

неперервно диференційовна і

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

для всіх $x \in [a; b]$.

Серед функціональних рядів найпростішими є степеневі ряди.

Означення 28.1. *Степеневим рядом називається функціональний ряд виду*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{28.4}$$

де a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — комплексні числа, які називають коефіцієнтами ряду, z — комплексна змінна.

Взагалі кажучи, степеневим рядом називають ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{28.5}$$

де z_0 — фіксоване комплексне число. Однак, коли у ряді (28.5) виконати заміну $\zeta = z - z_0$, то отримаємо ряд виду (28.4), тобто дослідження ряду (28.5) можна звести до дослідження ряду виду (28.4), і тому у подальшому мова буде йти про степеневі ряди виду (28.4).

Очевидно, що кожний степеневий ряд збігається у точці $z = 0$. А от щодо інших точок збіжності, то інформацію про структуру області збіжності можна дістати з таких двох теорем.

Теорема 28.1 (теорема Абеля). *Якщо степеневий ряд (28.4) збігається у точці $z_0 \neq 0$, то він збігається абсолютно для всіх z, у яких $|z| < |z_0|$, а якщо розбігається у точці z_0, то він розбігається для всіх z, у яких $|z| > |z_0|$.*

Доведення. Нехай числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, збігається. Тоді в силу необхідної умови збіжності послідовність $(a_n z_0^n)$ є нескінченно малою, а отже, обмеженою. Тому існує $M > 0$ таке, що для всіх n $|a_n z_0^n| \leqslant M$. Звідси маємо, що для кожного n

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z^n}{z_0^n}\right| \leqslant M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Якщо $|z| < |z_0|$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

як геометрична прогресія із знаменником $\left|\dfrac{z}{z_0}\right| < 1$ збігається. Тоді за теоремою порівняння рядів ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

збігається для всіх z, у яких $|z| < |z_0|$. А отже, ряд (28.4) абсолютно збігається для всіх таких z. Якщо ж ряд (28.4) у точці z_0 розбігається, то припустивши, що він збігається у точці z_1, у якої $|z_1| > |z_0|$, на підставі першої частини теореми маємо зробити висновок, що ряд (28.4) у точці z_0 збігається. ■

З теореми Абеля випливає, що ряд (28.4) збігаєтся або тільки у точці z_0, або у крузі радіуса R, а поза ним розбігається, або на всій комплексній площині. На питання, коли саме буде той чи інший випадок, дає відповідь наступна теорема.

Теорема 28.2 (теорема Коші-Адамара). *Якщо у степеневого ряду (28.4)*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

то він збігається на всій комплексній площині при $l = 0$, *у крузі* $|z| < \dfrac{1}{l}$ *(поза цим кругом розбігається) при* $l > 0$, *тільки у точці* $z = 0$ *при* $l = +\infty$.

Доведення. Насамперед нагадаємо, що коли підпослідовність (u_{n_k}) послідовності дійсних чисел (u_n) є збіжною, то

$$\lim_{k\to\infty} u_{n_k}$$

називають частковою границею послідовності (u_n), а найбільшу з часткових границь називають верхньою границею цієї послідовності і позначають $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, u_n$. У випадку, коли множина часткових границь необмежена зверху, то записують

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = +\infty.$$

Перейдемо тепер до доведення теореми. Будемо досліджувати на збіжність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n \tag{28.6}$$

з допомогою ознаки Коші.

а) Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$. Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$$

і $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||z|^n}=|z|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$. Отже, ряд (28.6) збігається для кожного $z\in\mathbb{C}$. А цей й означає, що ряд (28.4) абсолютно збігається на всій комплексній площині.

б) Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=l>0$. Тоді

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n||z|^n}=|z|\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=|z|l.$$

За ознакою Коші ряд (28.6) буде збігатись, якщо $|z|l<1$, тобто для всіх z з круга $|z|<\dfrac{1}{l}$. Якщо ж $|z|>\dfrac{1}{l}$, то послідовність $(|a_n||z|^n)$, а з нею і послідовність (a_nz^n) не є нескінченно малою. Отже, при таких z для ряду (28.4) не виконується необхідна умова збіжності.

в) Нехай $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$. Тоді існує підпослідовність $(\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|})$, яка необмежена зверху, а отже, і підпослідовність $(a_{n_k}|z|^{n_k})$ для всіх $z\neq 0$ буде необмеженою зверху. Звідси випливає, що для будь-якого $z\neq 0$ послідовність $(|a_n||z|^n)$ не є нескінченно малою, тобто для ряду (28.4) не виконується необхідна умова збіжності. ■

Означення 28.2. *Якщо*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=l>0,$$

то число $R=\dfrac{1}{l}$ *називають радіусом збіжності, а круг* $|z|<R$ *— кругом збіжності степеневого ряду (28.4). Якщо*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0,$$

то вважають, що радіус збіжності $R = +\infty$, а кругом збіжності є вся комплексна площина. і, нарешті, якщо

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty,$$

то вважають, що радіус збіжності $R = 0$, а круг збіжності вироджується в точку $z = 0$.

Зауваження 1. Якщо $R > 0$, то степеневий ряд (28.4) збігається у крузі $|z| < R$ і розбігається поза ним. Що стосується точок кола $|z| = R$, то для них потрібне спеціальне дослідження.

Зауваження 2. Коли мова йде про степеневі ряди з дійсними членами, тобто про ряди виду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, де $a_n \in \mathbb{R}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$, x — дійсна змінна, то замість терміну „круг збіжності“ вживають термін „інтервал збіжності“.

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1,$$

то заданий ряд збігається абсолютно у крузі $|z| < 1$. Якщо ж z є точка кола $|z| = 1$, то $\left|\dfrac{z^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ і ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ складений з абсолютних величин розбігається. Таким чином, точок абсолютної збіжності на колі $|z| = 1$ немає. Очевидно також, що у точці $z = 1$ ряд розбігається. Доведемо, що для всіх $z \neq 1$ у яких $|z| = 1$, заданий ряд збігається. Справді, оскільки послідовність

$\left(\dfrac{1}{n}\right)$ монотонно прямує до нуля, а послідовність часткових сум ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} z^k\right| = \left|\frac{z - z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{|z| + |z|^{n+1}}{|1-z|} = \frac{2}{|1-z|}$$

для $z \neq 1$ обмежена, то за ознакою Діріхле заданий ряд збігається. Отже, областю збіжності цього ряду є множина $D = \{z \,|\, |z| \leqslant 1, z \neq 1\}$.

Теорема 28.3. *Якщо радіус збіжності степеневого ряду (28.4) дорівнює R (включається випадок $R = +\infty$), то для будь-якого r $(0 < r < R)$ він рівномірно збігається на крузі $|z| \leqslant r$.*

Доведення. Візьмемо точку z_0, у якої $|z_0| = r$. Тоді z_0 належить кругу збіжності, а отже, буде збіжним ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n||z_0|^n$ з додатними членами, причому для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$ і всіх z з круга $|z| \leqslant r$ виконується нерівність $|a_n z^n| \leqslant |a_n||z_0|^n$. За ознакою Вейерштрасса степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ рівномірно збігається на крузі $|z| \leqslant r$. ■

Приклад 2. Дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$.

Розв'язання. Очевидно, що радіус збіжності цього ряду дорівнює 1, і для всіх z, у яких $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

В силу попередньої теореми для кожного r $(0 < r < 1)$ цей ряд буде збігатись рівномірно до функції $\dfrac{1}{1-z}$ на крузі $|z| \leqslant r$. Покажемо, що на крузі збіжності рівномірної збіжності уже немає.

Припустимо, що заданий ряд збігається рівномірно до функції $\dfrac{1}{1-z}$ на крузі $|z|<1$. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$, зокрема для $\varepsilon=1$, існує номер n_0 такий, що для всіх $n>n_0$ і будь-якого z, у якого $|z|<1$, виконується нерівність

$$\left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \frac{1}{1-z}\right| < 1.$$

Нехай $n_1>n_0$ і $z=1-\dfrac{1}{n_1+3}$. Тоді

$$\left|\frac{1}{1-1+\frac{1}{n_1+3}} - \sum_{k=0}^{n_1}\left(1-\frac{1}{n_1+3}\right)^k\right| =$$

$$= n_1+3-\sum_{k=0}^{n_1}\left(1-\frac{1}{n_1+3}\right)^k < 1$$

або

$$n_1+3 < 1+\sum_{k=0}^{n_1}\left(1-\frac{1}{n_1+3}\right)^k < 1+\sum_{k=0}^{n_1} 1 = n_1+2.$$

Отримане протиріччя свідчить про те, що наше припущення невірне, а отже, заданий ряд збігається нерівномірно на своєму крузі збіжності.

Нехай степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ має круг збіжності $D = \{z \,|\, |z|<R, R>0\}$ і суму $S(z)$. Тоді в силу того, що всі члени ряду є функції неперервні на всій комплексній площині, а сам він збігається рівномірно до $S(z)$ на будь-якому крузі $|z|\leqslant r$, де $r<R$, то сума ряду неперервна у кожній точці круга збіжності. Якщо Γ — спрямлювана крива, яка належить кругу збіжності

D, то

$$\int\limits_{\Gamma} S(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_{\Gamma} z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z_2^{n+1}}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z_1^{n+1}}{n+1},$$

де z_1 — початок, а z_2 — кінець кривої Г. Сума степеневого ряду є аналітичною функуцією у крузі збіжності D, причому для кожного $z \in D$

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Крім того, оскільки

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = R,$$

то як почленне інтегрування так і почленне диференціювання не змінює радіуса збіжності.

Кожен степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ з сумою $S(z)$ у його крузі збіжності можна диференціювати безліч раз, причому

$$S^{(n)}(0) = n! a_n.$$

Навпаки, якщо функція $f(z)$ є сумою деякого степеневого ряду (аналітична функція) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то коефіцієнти цього ряду мають вигляд

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Застосування степеневих рядів в аналізі грунтується у першу чергу на можливості подання функцій через степеневі ряди, властивості яких багато у чому подібні властивостям многочленів. Тому задача розкладання функції у степеневий ряд є найважливішою у теорії степеневих рядів. Тут ця задача буде розглянута для функцій дійсної змінної.

Нехай функція f визначена у деякому околі точки x_0 і має у цій точці безліч похідних.

Означення 28.3. *Степеневий ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{28.7}$$

називається рядом Тейлора функції f у точці x_0.

Нехай

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}} = R > 0$$

(випадок $R = +\infty$ включається), тобто ряд (28.7) збігається на інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, і нехай $S(x)$ його сума. Якщо для всіх x з інтервалу $(x_0 - h; x_0 + h)$ $S(x) = f(x)$, то кажуть, що на інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$ функція f розкладається у степеневий ряд за степенями $x - x_0$ і записують

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{28.8}$$

Оскільки функція f має у точці x_0 похідні всіх порядків, то для кожного $n = 1, 2, \ldots$ можна записати формулу Тейлора n-го порядку

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{28.9}$$

де $r_n(x)$ — залишковий член n-го порядку формули (28.9). Очевидно, що у цій формулі многочлен Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

є n-а часткова сума ряду Тейлора (28.7). А отже, її можна записати так

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \tag{28.10}$$

Звідси випливає, що для того, щоб для всіх x з інтервалу $(x_0 - h; x_0 + h)$ $S(x) = f(x)$ необхідно і досить, щоб для кожного x з цього інтервалу

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{28.11}$$

Отже, функція f розкладається у степеневий ряд за степенями $x - x_0$ на інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$, якщо у точці x_0 вона має похідні всіх порядків і залишковий член формули Тейлора прямує до нуля для всіх $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$.

Зрозуміло, що для перевірки виконання рівності (28.11) важливо мати подання $r_n(x)$ у зручному для аналізу його поведінки вигляді. Якраз три найбільш популярні форми залишкового члена формули Тейлора складають зміст наступної теореми.

Теорема 28.4. *Якщо функція f визначена і неперервна разом з своїми похідними до $n+1$-го порядку включно на інтервалі $(x_0 - h; x_0 + h)$, то залишковий член $r_n(x)$ її формули Тейлора для всіх $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ можна подати у вигляді:*

а) інтегральна форма

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt; \tag{28.12}$$

б) форма Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{28.13}$$

де $0 < \theta < 1$;

в) форма Коші

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1}, \qquad (28.14)$$

де $0 < \theta < 1$.

Доведення. Очевидно, що для будь-якого $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) = -\int_{x_0}^{x} f'(x)d(x - t)$$

або

$$f(x) = f(x_0) - \int_{x_0}^{x} f'(t)d(x - t). \qquad (28.15)$$

Якщо покласти $u = f'(f),\ dv = d(x - t)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x - t) = -f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)d(x - t).$$

Тоді

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)dt.$$

Знову проінтегрувавши останній інтеграл частинами, поклавши $u = f''(x)$, $dv = (x - t)d(x - t)$, отримаємо

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \int_{x_0}^{x} f'''(t)\frac{(x - t)^2}{2!}dt.$$

Для кожного $m \leqslant n$, проінтегрувавши частинами останній член у рівності

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}dt \tag{28.16}$$

$\left(u = f^{(m)}(t),\ dv = (x-t)^{m-1}d(x-t)\right)$, прийдемо до рівності

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^{m}dt.$$

На підставі принципу індукції робимо висновок, що формула (28.16) вірна для всіх $m \leqslant n$. Якщо покласти у (28.16) $m = n$, то отримаємо формулу Тейлора n-го порядку, у якій залишковий член $r_n(x)$ подається у формі (28.12). В силу того, що за умовою для всіх $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ $(x \neq x_0)$ похідна $n+1$-го порядку функції f є неперервною на відрізку з кінцями $x_0,\ x$, то за узагальненою теоремою про середнє існує точка ξ на інтервалі з кінцями $x_0,\ x$, що

$$\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = f^{(n+1)}(\xi)\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt,$$

тобто

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{n=1}\Bigg|_{x_0}^{x}\right) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

А якщо врахувати, що для точки ξ існує таке θ $(0 < \theta < 1)$, що $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, то приходимо до подання (28.13). і, нарешті, в силу неперервності на відрізку з кінцями x_0, x функції

$f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ за теоремою про середнє існує точка ξ на інтервалі з кінцями x_0, x, що

$$\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0),$$

тобто

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

і якщо знову врахувати, що для точки ξ існує точка θ $(0<\theta<1)$, що $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$, то

$$(x-\xi)^n = (x-x_0-\theta(x-x_0))^n = (x-x_0)^n(1-\theta)^n,$$

і для $r_n(x)$ має місце подання (28.14). ■

Зауважимо, що якщо функція f та її похідні всіх порядків обмежені разом на інтервалі $(x_0-h; x_0+h)$, тобто існує $M>0$ таке, що для всіх $n=0,1,2,\ldots$ і всіх $x \in (x_0-h; x_0+h)$ $|f^{(n)}(x) \leqslant M$, то

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))|}{n!}|x-x_0|^n \leqslant \\ &\leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-x_0|^n \leqslant \frac{Mh^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

А оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Mh^n}{(n+1)!} = 0,$$

то для всіх $x \in (x_0-h; x_0+h)$ $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Отже, у цьому випадку функція f розкладається у ряд Тейлора на інтервалі $(x_0-h; x_0+h)$.

Приклад 3. Розкласти функцію $\sin x$ у степеневий ряд.

Розв'язання. Оскільки для функції $f(x) = \sin x$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right),$$

де $n = 0, 1, 2, \ldots$, то для неї можна побудувати ряд Тейлора у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$, тобто ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Врахувавши, що для всіх x з будь-якого інтервалу $(-h, h)$ і для $n = 0, 1, 2, \ldots$ $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$, маємо, що $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$, а отже, для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Якщо покласти $x_0 = 0$ і врахувати, що

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } n = 2k+1, \end{cases}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots$, то для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Зауважимо, що за інтервал $(x_0 - h; x_0 + h)$, для якого перевіряється той факт, що $r_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всіх $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$, як правило, береться інтервал збіжності ряду (28.8).

Приклад 4. Розкласти функцію $\ln x$ у степеневий ряд.

Розв'язання. Оскільки для функції $f(x) = \ln(1+x)$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

де $n = 1, 2, \ldots$, і $f(0) = 0$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, то її рядом Тейлора у точці $x_0 = 0$ (точніше рядом Маклорена) буде ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

радіус збіжності якого

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Дослідимо поведінку залишкового члена формули Тейлора на інтервалі $(-1; 1)$ при $n \to \infty$. Запишемо його у формі Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді оскільки для всіх $x \in [0; 1)$

$$0 < \frac{x}{1+\theta x} < 1,$$

а отже, $|r_n(x)| < \frac{1}{n+1}$, то для всіх таких x $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Запишемо тепер залишковий член формули Тейлора у формі Коші

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1},$$

де $0 < \theta < 1$. Тоді оскільки для всіх $x \in (-1; 0)$

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|} < 1$$

і
$$\frac{1}{1+\theta x}=\frac{1}{1-\theta|x|}<\frac{1}{1-|x|},$$
а отже
$$|r_n(x)|=\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|}\leqslant\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},$$
то для кожного $x\in(-1;0)$ $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$. Таким чином,
$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
для всіх $x\in(-1;1)$.

На закінчення відзначимо, що степеневі ряди застосовуються при розв'язуванні всіх основних задач, пов'язаних з головним об'єктом аналізу — функцією. Так, за допомогою таких рядів можна означити функції, знаходити значення функції за певним значенням аргумента або значення аргументу за заданим значенням функції, досліджувати функцію (наприклад, знаходити границю функції у точці, її похідну певного порядку або інтеграл на певному проміжку) і навіть знаходити функції за їх властивостями (розв'язувати функціональні рівняння).

Завдання для самоконтролю.

1. Знайти радіус й інтервал збіжності степеневого ряду, дослідити ряд на абсолютну і умовну збіжність на кінцях інтервалу збіжності:

$$\text{а)}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}};\qquad\text{б)}\quad\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n^2+2)(x-2)^n;$$

$$\text{в)}\quad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{3n-2}}{2^{3n}(n+1)\ln(n+1)}.$$

2. Побудувати розклад у ряд Маклорена функцій:

а) e^x; б) $\cos x$; в) $(1+x)^\alpha$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Довести, що

а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

б) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)x^n = \frac{6}{(1-x)^4}$ для всіх $x \in (-1;1)$;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}(1-x^2)\ln(1-x)$.

4. Обчислити з точністю до 10^{-4}:

а) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$; б) $\sin 0,5$; в) $\sqrt[5]{250}$.

5. Розклавши функції у ряд, знайти границі:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x - 1 - x}$; б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}}{\cos x}$.

6. Знайти похідну k-го порядку функції f у точці x_0:

а) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $k = 7$, $x_0 = 0$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}, \ k = 9, \ x_0 = 2;$

в) $f(x) = \ln(x^2 - 9x + 20), \ k = 5, \ x_0 = 3.$

7. Обчислити з точністю до 10^{-3} інтеграли:

$$\text{а)} \int_0^1 \sin x^2 dx; \quad \text{б)} \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx; \quad \text{в)} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x} dx.$$

8. Дослідити на збіжність такі ряди:

$$\text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \frac{i}{1 + (-1)^n ni};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n^2 + n + 1)}{\sqrt{n^6 + n^5} + in(n+1)\sqrt{n}};$$

$$\text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\cos n + i \sin n)}.$$

9. Знайти радіус збіжності таких степеневих рядів:

$$\text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n z^n;$$

$$\text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (1+i)^{3n}}{(n+1)(n+2)} (z+i)^n;$$

$$\text{в)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\alpha}}, \ \text{де } \alpha > 0.$$

29 *ЛЕКЦІЯ*: Диференціальні рівняння першого порядку

Основні поняття теорії диференціальних рівнянь: порядок, розв'язок (частинний, загальний, загальний інтеграл), інтегральні криві. існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння першого порядку, які інтегруються у квадратурах (з відокремлюваними змінними, лінійні, однорідні, у повних диференціалах).

Література. [1] ч. 2, с. 240–244, 271–290; Ляшко і.і., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981, с. 9–14, 22–38; Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – К.: Вища школа, 1984, с. 15–80 .

Означення 29.1. *Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння виду*

$$F(x, y, y') = 0,$$

де F — відома функція своїх аргументів, x — незалежна змінна, y — невідома функція, y' — її похідна, а рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{29.1}$$

де $f(x, y)$ — задана функція двох змінних, називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.

Рівнянням, розв'язаним відносно похідної, буде диференціальне рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{29.2}$$

де $P(x, y), Q(x, y)$ — задані функції. У такому записі змінні x і y рівноправні, так що будь-яку з них можна прийняти за незалежну змінну (симетрична форма).

Означення 29.2. *Розв'язком диференціального рівняння (29.1) на інтервалі* $(a; b)$ *називають будь-яку неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію* $y = \varphi(x)$ *таку, що*

$$\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x))$$

на інтервалі $(a; b)$.

Звичайно розв'язок рівняння (29.1) може подаватись не тільки явно, але й параметрично або неявно, причому у такому поданні можуть фігурувати інтеграли. Загалом, процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають інтегруванням, причому формально задача інтегрування диференціального рівняння вважається закінченою, якщо залишилось знайти інтеграли, хоча, можливо, ці інтеграли не можна подати у скінченному вигляді через елементарні функції. У цьому випадку кажуть, що рівняння інтегрується скінченним числом квадратур. А от у тому випадку, коли розв'язок диференціального рівняння не можна виразити з допомогою скінченног числа алгебраїчних операцій і операцій аналізу (диференціювання та інтегрування) над функціями, які фігурують у заданому рівнянні, то кажуть, що таке рівняння не інтегрується у квадратурах.

Щодо кількості розв'язків, то диференціальне рівняння (29.1) за певних умов, накладених на функцію $f(x, y)$ має нескінчену множину розв'язків. Так наприклад, для найпростішого диференціального рівняння

$$y' = f(x),$$

де $f(x)$ — неперервна на інтервалі $(a; b)$ функція, кожна первісна для функції $f(x)$ на цьому інтервалі є його розв'язком. Множина

$$\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + C \mid C \in \mathbb{R} \right\},$$

де $x_0 \in (a; b)$, є множина всіх розв'язків (це відомо з інтегрального числення), яку, як правило, записують у вигляді формули

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt + C.$$

Звичайно це не означає, що, загалом, для рівняння (29.1) досить знайти один розв'язок $y = \varphi(x)$ і після цього можна записати множину всіх розв'язків у вигляді формули $y = \varphi(x) + C$. Наприклад, функція $\varphi(x) = x \int\limits_0^x \sin t^2 dt$ є розв'язком рівняння $y' = \dfrac{y}{x} + x \sin x^2$ на проміжку $(0; +\infty)$. Однак формула $y = \varphi(x) + C$ ні при якому $C \neq 0$ не дає розв'язку заданого рівняння. А от формула

$$y = Cx + x \int\limits_0^x \sin t^2 dt$$

задає нескінченну множину розв'язків цього рівняння.

Означення 29.3. *Множину (сім'ю) розв'язків, яку можна подати у вигляді формули*

$$y = \varphi(x, C),$$

де C — довільна стала, називають загальним розв'язком рівняння (29.1). Розв'язок, який одержується із загального при фіксованому значенні довільної сталої, називається частинним розв'язком.

інтегруючи диференціальне рівняння (29.1), можна одержати загальний розв'язок у параметричній формі

$$x = \varphi(t, C), \; y = \psi(t, C)$$

або ж у неявному вигляді (у вигляді, не розв'язному ні відносно y, ні відносно x)

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Останню форму загального розв'язку називають загальним інтегралом.

Основною задачею інтегрування диференціального рівняння є знаходження всіх його розв'язків і вивчення їх властивостей. Однак так поставлена задача для рівняння (29.1) в принципі не може бути розв'язаною, бо у загальному вигляді це рівняння не інтегрується у квадратурах. Рівняння, всі розв'язки яких подаються через елементарні функції або ж, принаймні, з допомогою скінченного числа інтегрувань, є рідкістю. (Нижче основні типи таких рівнянь будуть розглянуті.) Тому на перший план виступають наближені методи інтегрування, причому, як правило, шукають розв'язок, який задовольняє певним умовам. Зрозуміло, що задачу можна розв'язувати тоді, коли є упевненість у тому, що такий розв'язок існує. У зв'язку з цим однією з найважливіших задач теорії диференціальних рівнянь є так звана задача Коші.

Постановка задачі: *серед усіх розв'язків рівняння $y' = f(x, y)$ знайти той розв'язок $y = \varphi(x)$, який при заданому значенні x_0 незалежної змінної приймає задане значення y_0 ($\varphi(x_0) = y_0$), де x_0 і y_0 — задані числа, які називають початковими значеннями, а умову $\varphi(x_0) = y_0$ — початковою умовою.*

Приведемо тут теорему існування і єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (29.1).

Теорема 29.1. *Нехай задано рівняння (29.1)*

$$y' = f(x, y)$$

і початкові значення x_0, y_0. Якщо функція $f(x, y)$ визначена і *неперервна на замкненому прямокутнику*

$$\overline{R} = \{(x, y) \,|\, |x - x_0| \leqslant a, |y - y_0| \leqslant b\}$$

і задовольняє у ньому умови Ліпшиця по змінній y*, тобто існує* $L > 0$ *таке, що для будь-яких точок* $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{R}$ *виконується нерівність*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|,$$

то існує єдина функція $y = \varphi(x)$*, яка визначена і неперервно диференційовна принаймні на відрізку* $[x_0 - h; x_0 + h]$*, де*

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\},\ M = \max_{(x,y)\in\overline{R}} |f(x, y)|,$$

і є розв'язком заданого рівняння, який задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$.

Зазначимо, що доведення цієї теореми здійснюється методом послідовних наближень (методом Пікара), який по своїй суті є конструктивним методом, бо він встановлює, що

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} Y_n(x),$$

де $Y_0(x) = y_0$, $Y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, Y_{n-1}(t))dt$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Тепер вже можна уточнити поняття загального та частинного розв'язку. Нехай у кожній точці області D рівняння (29.1) має єдиний розв'язок. Тоді функція $y = \varphi(x, C)$, визначена для всіх $(x, C) \in \Delta$ і частинна похідна якої $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ неперервна на Δ, називається *загальним розв'язком* цього рівняння, якщо рівняння $y = \varphi(x, C)$ розв'язне відносно C для всіх $(x, y) \in D$ ($C = \psi(x, y)$) і для кожного $(x, y) \in D$ $C = \psi(x, y)$ дає таке значення C, при якому $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком заданого рівняння. Розв'язок рівняння (29.1), у кожній точці якого виконується умова єдиності, називається *частинним*. З приведеного тут означення загального розв'язку випливає, що всі розв'язки, отримані із загального при фіксованому значенні довільної сталої (включаючи $\pm\infty$), будуть частинними.

і, нарешті, функція $y = \varphi(x)$ називається *особливим розв'язком* рівняння (29.1) на інтервалі $(a; b)$, якщо для кожної точки (x_0, y_0), де $x_0 \in (a; b)$, $y_0 = \varphi(x_0)$, існує, але не є єдиним, розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. З геометричної точки зору кожен розв'язок рівняння (29.1) є деякою кривою на координатній площині. Такі криві називають інтегральними кривими. А задача Коші геометричною мовою може бути сформульованою так: знайти інтегральну криву в області визначення функції $f(x, y)$, яка проходить через точку (x_0, y_0).

Розглянемо основні типи диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно похідної, які інтегруються у квадратурах.

1. Диференціальне рівняння виду

$$\psi(y)dy = \varphi(x)dx, \tag{29.3}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(y)$ — неперервні функції, називається *рівнянням з відокремленими змінними*.

Якщо $y(x)$ довільний розв'язок цього рівняння, то підставивши його у (29.3) дістанемо тотожність

$$\psi(y(x))y'(x)dx \equiv \varphi(x)dx. \tag{29.4}$$

Проінтегрувавши цю тотожність, прийдемо до рівняння

$$\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C, \tag{29.5}$$

де C — довільна стала, розв'язком якого є кожен розв'язок рівняння (29.3). Якщо, навпаки, $y(x)$ є розв'язком рівняння (29.5), то, підставивши його у (29.5), одержимо тотожність, продиференціювавши яку, прийдемо до тотожності (29.4). Отже, рівняння (29.5) визначає всі розв'язки рівняння (29.3), тобто є загальним інтегралом (загальним розв'язком, заданим неявно) диференціального рівняння (29.3). Частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$, задається неявно рівнянням

$$\int\limits_{y_0}^{y} \psi(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(x)dx.$$

Рівняння виду

$$\psi_1(x)\psi_2(y)dy = \varphi_1(x)\varphi_2(y)dx, \tag{29.6}$$

тобто рівнянн виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

у якому функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ можна подати у вигляді добутків функцій, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної, називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*. Якщо обидві частини рівнянь (29.6) розділити на добуток $\psi_1(x)\varphi_2(y)$, то прийдемо до рівняння

$$\frac{\psi_2(y)}{\varphi_2(y)}\,dy = \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\,dx$$

з відокремленими змінними.

Зауваження. Слід пам'ятати, що якщо рівняння $\psi_1(x) = 0$ або $\varphi_2(y) = 0$ мають розв'язки, то ділення обох частин на $\psi_1(x)\varphi_2(y)$ може привести до втрати частинних розв'язків, а якщо функції $\psi_1(x)$ і $\varphi_2(y)$ можуть бути розривні, то можлива поява зайвих розв'язків, які обертають у нуль множник

$$\frac{1}{\psi_1(x)\varphi_2(y)}.$$

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$(x+1)\sqrt{y}dx - xdy = 0.$$

Розв'язання. Розділивши на добуток $x\sqrt{y}$, прийдемо до рівняння

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{x+1}{x}\,dx.$$

Проінтегрувавши його, маємо

$$2\sqrt{y} = x + \ln|x| + C$$

загальний інтеграл цього рівняння. Рівняння $x = 0$ приводить до розв'язку $x = 0$ $(y \neq 0)$ заданого рівняння, причому оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \ln|x| = -\infty$, то він отримується із загального при $C = -\infty$, а отже, $x = 0$ частинний розв'язок. Рівняння $y = 0$ теж приводить до розв'язку $y = 0$ $(x \neq 0)$, однак його не можна одержати із загального ні при якому значенні довільної сталої C, а отже, він є особливим.

2. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x,y) \tag{29.7}$$

називають *однорідним*, якщо його права частина є однорідною функцією нульового степеня, тобто якщо для всіх $\lambda > 0$ $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$.

Покажемо, що однорідні рівняння зводяться до рівнянь з відокремленими змінними. Справді, якщо взяти $\lambda = \dfrac{1}{x}$, то дістанемо рівність

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

і рівняння (29.7) запишеться у вигляді

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Вводимо заміну
$$z = \frac{y}{x} \text{ або } y = z \cdot x.$$
Тоді $y' = z'x + z$, і рівняння (29.7) матиме вигляд
$$z'x + z = f(1, z)$$
або
$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x}.$$
Це вже рівняння з відокремленими змінними і
$$\int \frac{dz}{f(1, z) - z} = \ln |x| + C$$
його загальний інтеграл.

Розглянемо рівняння $x = 0$, $f(1, z) - z = 0$. Перше визначає розв'язок рівняння
$$xdz = (f(1, z) - z)dx$$
і може виявитись розв'язком рівняння
$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(1, \frac{y}{x})}.$$
Тоді після виключення початку координат він має бути приєднаним до розв'язків рівняння (29.7). Якщо рівняння $f(1, z) - z = 0$ має дійсні розв'язки виду $z = \alpha$, то їм відповідають розв'язки $y = \alpha x$ $(x \neq 0)$ однорідного рівняння. Ці півпрямі, як і півосі Oy, можуть виявитись особливими розв'язками.

Коли диференціальне рівняння подано у симетричній формі (29.2), то воно буде однорідним, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними одного степеня.

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{x-y}{x+y}.$$

Розв'язання. Очевидно, що права частина цього рівняння є однорідною функцією нульового степеня. Введемо заміну $y = zx$ і одержимо рівняння

$$z'x + z = \frac{1-z}{1+z}.$$

Після відокремлення змінних маємо:

$$\frac{1+z}{1-2z-z^2}\,dz = \frac{dx}{x}.$$

Проінтегрувавши його, матимемо:

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-2z-z^2)}{1-2z-z^2} = \ln|x| + C$$

або

$$\ln\frac{1}{|x|\sqrt{1-2z-z^2}} = C = \ln\frac{1}{\sqrt{C_1}}.$$

Замінивши z на $\dfrac{y}{x}$, маємо

$$\sqrt{x^2-2xy-y^2} = C_1.$$

Це і є загальний інтеграл заданого рівняння. Рівняння $x = 0$ не визначає розв'язку рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{x-y}.$$

Рівняння $1-2z-z^2 = 0$ має два дійсні розв'язки $z_1 = -1-\sqrt{2}$, $z_2 = -1+\sqrt{2}$. °м відповідають розв'язки $y = -(\sqrt{2}+1)x$, $y = (\sqrt{2}-1)x$ з виключеною точкою $x = 0$.

3. Диференціальне рівняння виду

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{29.8}$$

де $P(x), Q(x)$ — задані неперервні функції, називається *лінійним*. При $Q(x) \equiv 0$ рівняння

$$y' + P(x)y = 0 \tag{29.9}$$

називають *лінійним однорідним* рівнянням, у противному випадку *лінійним неоднорідним*. Якщо функції $P(x)$ і $Q(x)$ неперервні на інтервалі $(a; b)$, то у смузі $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$ через будь-яку точку $M(x_0, y_0)$ проходить одна інтегральна крива. Особливих розв'язків таке рівняння не може мати.

Розглянемо однорідне рівняння (29.9). Воно має очевидний розв'язок $y = 0$. Нехай $y \neq 0$. Тоді рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx.$$

Звідси

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

так що

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{29.10}$$

де C — довільна стала і $C \neq 0$. Очевидно, що розв'язок $y = 0$ увійде у розв'язок (29.10), якщо зняти обмеження $C \neq 0$. Отже, рівність (29.10) дає загальний розв'язок рівняння (29.9).

Перейдемо тепер до неоднорідного рівняння (29.8), де $Q(x) \not\equiv 0$. є декілька методів інтегрування цього рівняння. Тут ми скористаємось методом варіації довільної сталої (Лагранжа). Якщо у неоднорідному рівняння (29.8) замінити праву частину нулем, то одержимо відповідне йому однорідне рівняння, загальний розв'язок якого має вигляд (29.10). За аналогією з (29.10) будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{29.11}$$

де $C(x)$ — невідома функція. Підставимо (29.11) у рівняння (29.8). Маємо:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}+C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

або

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

звідки

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Проінтегрувавши останнє рівняння, маємо

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C,$$

де C — довільна стала. Отже, загальний розв'язок лінійного необнорідного рівняння (29.8) записується у вигляді

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right).$$

Зауваження. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = x.$$

Розв'язання. Складемо відповідне однорідне рівняння

$$y' + \frac{xy}{x^2+1} = 0.$$

Якщо $y \neq 0$ (очевидно, що $y = 0$ не є розв'язок заданого рівняння), то останнє рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x^2+1}.$$

Звідси

$$y = Ce^{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}$$

або

$$y = \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Скориставшись методом варіації довільної сталої, будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2+1}},$$

де невідома функція $C(x)$ задовольняє рівняння

$$C'(x) = x\sqrt{x^2+1}.$$

Звідси

$$C(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння буде

$$y = \frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{C}{\sqrt{x^2+1}}.$$

4. Диференціальне рівняння

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (29.12)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо існує функція $u(x,y)$ така, що

$$du = Pdx + Qdy.$$

Насамперед, очевидно, що рівняння у повних диференціалах можна подати у вигляді

$$du(x, y) = 0,$$

і тому $u(x, y) = C$ є його загальним інтегралом, тобто задача інтегрування таких рівнянь — це фактично задача про відновлення функції $u(x, y)$ за її повним диференціалом. Цей факт дозволить не тільки сформулювати ознаку, за якою можна розпізнати рівняння в повних диференціалах, але й дасть практичний спосіб розв'язування таких рівнянь.

Теорема 29.2. *Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні разом з своїми частинними похідними $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то рівняння (29.12) є рівнянням у повних диференціалах тоді і тільки тоді, коли в області D виконується тотожність*

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{29.13}$$

Доведення. Необхідність. Нехай рівняння (29.12) є рівнянням у повних диференціалах, тобто його ліва частина є повним диференціалом для деякої функції $u(x, y)$ в області D. Тоді

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}dy,$$

тобто

$$P(x, y) \equiv \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) \equiv \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Якщо продиференціювати останні тотожності, то одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{29.14}$$

тобто функція $u(x,y)$ в області D має змішані похідні, які в силу неперервності частинних похідних $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ є неперервними. Тоді вони не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

звідки з урахуванням (29.14) і випливає (29.13).

Достатність. Нехай умова (29.13) виконується. Знайдемо функцію $u(x,y)$, повний диференціал якої є ліва частина рівняння (29.12).

Оскільки $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, то, проінтегрувавши цю рівність, одержимо

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + C, \tag{29.15}$$

де C, взагалі кажучи, є функція від y. Підберемо функцію $C(y)$ так, щоб

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right) = Q(x,y) \qquad \text{або}$$

$$\frac{dC(y)}{dy} = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx. \tag{29.16}$$

$C(y)$ можна знайти тоді, коли права частини в останньому виразі залежить тільки від y, тобто коли

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right) = 0 \tag{29.17}$$

або

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right) = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Звідси випливає, що (29.17) виконується, якщо має місце (29.13). А отже, функцію $u(x, y)$ можна знайти зінтегрувавши рівняння (29.16) і підставивши загальний розв'язок $C(y)$ у (29.15). ■

Наслідок. *Якщо рівняння (29.12) є рівнянням у повних диференціалах, то його загальний інтеграл має вигляд*

$$\int P(x,y)dx + \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int P(x,y)dx \right) dy = C. \quad (29.18)$$

Зауваження. Якщо рівняння (29.12) є рівнянням у повних диференціалах і у точці (x_0, y_0)

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 > 0,$$

то його загальний інтеграл можна подати у вигляді

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt = C \quad \text{або}$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} P(t,y_0)dt + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,t)dt = C.$$

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y}\, dy = 0.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\sqrt{x^2 - y}\right) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$

то задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо його загальний інтеграл за формулою (29.18)

$$\int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx+\int\left(-\sqrt{x^2-y}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial y}\int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx\right)dy=x^2+\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3}+$$

$$+\int\left(-\sqrt{x^2-y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3}\right)dy\right)=$$

$$=x^2+\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3}+\int\left(-\sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2-y}\right)dy=$$

$$=x^2+\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3}=C.$$

Отже,

$$x^2+\frac{2}{3}\sqrt{(x^2-y)^3}=C$$

загальний інтеграл цього рівняння. Зауважимо, що тут можна визначити y і записати загальний розв'язок

$$y=x^2-\sqrt[3]{\frac{9}{4}\left(C-x^2\right)^2}.$$

Завдання для самоконтролю.

1. Якого типу диференціальні рівняння розглядаються у шкільному підручнику [8]? Які методи пропонуються для їх інтегрування?

2. Як знайти загальний розв'язок рівняння $y'=f(x)$, де f є неперервна на інтервалі $(a;b)$ функція? У якій області

він визначений? Як розв'язується задача Коші з допомогою формули загального розв'язку? Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = 2x$ і розв'язок задачі Коші: $y' = 2x$, $y(0) = 1$. Знайти розв'язки задач Коші: $y' = \dfrac{1}{x}$, $y(1) = 0$ і $y' = \dfrac{1}{x}$, $y(-1) = 0$ — за допомогою відповідних формул загального розв'язку.

3. Показати, що рівняння виду
$$y' = f(ax + by + c)$$
зводиться до рівнянь з відокремлюваними змінними. Побудувати рівняння такого типу і зінтегрувати його.

4. Показати, що рівняння виду
$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$
зводиться до однорідного рівняння. Побудувати рівняння такого типу і зінтегрувати його.

5. Показати, що рівняння виду
$$f'(y)y' + f(y)A(x) = B(x)$$
зводиться до лінійного рівняння. Побудувати рівняння такого типу і зінтегрувати його.

6. Як розв'язується задача Коші методом Пікара?

30 *ЛЕКЦІЯ*: Лінійні диференціальні рівняння вищого порядку із сталими коефіцієнтами та їх застосування до вивчення коливних процесів

Лінійні рівняння вищих порядків, існування розв'язків. Лінійні однорідні рівняняння, фундаментальна система розв'язків, його загальний розв'язок. Лінійні неоднорідні рівняння, структура його загального розв'язку. Знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння за умови, що відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, методом варіації довільних сталих. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння з сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

Література. [1] ч. 2, с. 322–356; Ляшко і.і., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища школа, 1981, с. 96–130; Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. – К.: Вища школа, 1984, с. 129–220; Тихонов А.В., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1980, с. 70–91.

Означення 30.1. *Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння виду*

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x), \qquad (30.1)$$

де $P_1(x), \dots, P_n(x), Q(x)$ — задані функції, визначені і неперервні на інтервалі $(a; b)$.

Загальний розв'язок рівняння (30.1) існує, і якими б не були числа $x_0 \in (a; b)$, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$,який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рівняння (30.1), у якого $Q(x) \equiv 0$ на інтервалі $(a; b)$, називають *однорідним*, у противному випадку *неоднорідним*.

Нехай маємо лінійне однорідне рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x) y' + P_n(x) y = 0. \tag{30.2}$$

Насамперед, очевидно, що таке рівняння має розв'язок $y(x) \equiv 0$, і якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ будь-які його розв'язки, то для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функція $\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$ є розв'язком цього рівняння. Загалом, якщо $y_k(x)$ $(k = \overline{1, n})$ — довільні сталі, то функція

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \, y_k(x) \tag{30.3}$$

також є розв'язком цього рівняння.

Оскільки загальний розв'язок рівняння n-го порядку має містити n незалежних довільних сталих, то цілком природно поставити питання: якими мають бути розв'язки $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, щоб формула (30.3) була загальним розв'язком рівняння (30.2)? Відповідь буде: вони мають бути лінійно незалежними, тобто такими, що

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, y_k(x) \equiv 0$$

на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Нехай $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ розв'язки лінійного однорідного рівняння (30.2) на інтервалі $(a; b)$. Очевидно, що кожна з цих функцій n раз диференційовна. Тоді можна побудувати матрицю

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

°ї визначник називають *визначником Вронського* (вронскіаном) і позначають

$$W(x) := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Теорема 30.1. *Розв'язки* $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ *рівняння (30.2) лінійно незалежні на інтервалі* $(a;b)$ *тоді і тільки тоді, коли для всіх* $x \in (a;b)$ $W(x) \neq 0$.

Доведення. Необхідність. Нехай розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ лінійно незалежні на інтервалі $(a;b)$. Припустимо, що існує $x_0 \in (a;b)$, що $W(x_0) = 0$. Складемо систему лінійних рівнянь з n невідомими $C_1, C_2, \dots, C_n$

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 & + & y_2(x_0)C_2 & + & \cdots & + & y_n(x_0)C_n & = 0, \\ y_1'(x_0)C_1 & + & y_2'(x_0)C_2 & + & \cdots & + & y_n'(x_0)C_n & = 0, \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 & + & y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 & + & \cdots & + & y_n^{(n-1)}(x_0)C_n & = 0. \end{cases} \tag{30.4}$$

Визначник цієї системи $W(x_0) = 0$, тому система має ненульовий розв'язок $\left(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}\right)$. Побудуємо функцію

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x).$$

Очевидно, що вона є розв'язком рівняння (30.2), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x_0) = 0,$$

$$y'(x_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k'(x_0) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

А такі початкові умови (в силу теореми існування і єдиності) задовольняє тільки розв'язок $y(x) \equiv 0$ на інтервалі $(a;b)$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x) = 0$$

на інтервалі $(a;b)$, причому серед чисел $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}$ є принаймні одне число, відмінне від нуля. Це означає, що розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ лінійно залежні на інтервалі $(a;b)$. Останнє суперечить умові. Отже, не існує жодної точки $x_0 \in (a;b)$, для якої $W(x_0) = 0$.

Достатність. Нехай для всіх $x \in (a;b)$ $W(x_0) \neq 0$. Припустимо, що розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ лінійно залежні, тобто існує такий набір чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, серед яких, наприклад, $\alpha_n \neq 0$, для всіх $x \in (a;b)$

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) \equiv 0.$$

Тоді

$$\begin{gathered} y_n(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k(x), \\ y_n'(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k'(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(n-1)}(x) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\alpha_n} y_k^{(n-1)}(x), \end{gathered} \tag{30.5}$$

Якщо у визначнику $W(x)$ замінити елементи n-го стовпця їх значеннями з формул (30.5), то одержимо визначник, у якого n-ий стовпець є лінійною комбінацією всіх інших стовпців. А отже, $W(x) \equiv 0$ на інтервалі $(a; b)$, що суперечить умові. ■

Неважко переконатись, що

$$W'(x) + P_1(x)W(x) = 0,$$

де $P_1(x)$ — коефіцієнт при похідній $n-1$-го порядку у рівнянні (30.2). Звідси одержується чудова формула Остроградського-Ліувілля

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P_1(t)dt},$$

яка дозволяє стверджувати, що якщо існує точка $x_0 \in (a; b)$, у якій $W(x_0) = 0$, то $W(x) = 0$ для всіх $x \in (a; b)$. Якщо ж існує точка $x_0 \in (a; b)$, у якій $W(x_0) \neq 0$, то $W(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$.

Означення 30.2. *Будь-яка система лінійно незалежних розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$ рівняння (30.2) на інтервалі $(a; b)$ називається фундаментальною системою розв'язків на цьому інтервалі.*

Очевидно, що будь-яке лінійне однорідне рівняння (30.2), всі коефіцієнти якого неперервні на інтервалі $(a; b)$, має фундаментальну систему розв'язків на цьому інтервалі. Наприклад, такою є система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... , $y_n(x)$, які визначаються початковими умовами:

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ \ldots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1,$$

де $x_0 \in (a; b)$. Це так, бо $W(x_0) = 1$.

Теорема 30.2. *Якщо система розв'язків $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_n(x)$ лінійного однорідного рівняння (30.1)*

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + P_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

де $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — неперервні на інтервалі $(a;b)$ функції, є фундаментальною на цьому інтервалі, то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(x), \tag{30.6}$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — довільні сталі.

Доведення. Те, що (30.6) є розв'язком рівняння (30.2), очевидно. Покажемо, що він загальняй, тобто містить всі розв'язки цього рівняння. Нехай $\varphi(x)$ розв'язок рівняння (30.2), який задовольняє початкові умови

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0 \in (a;b)$, $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$. Скориставшись формулою (30.6), побудуємо таку систему n лінійних рівнянь відносно невідомих $C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 & + & y_2(x_0)C_2 & + \cdots + & y_n(x_0)C_n & = y_0, \\ y_1'(x_0)C_1 & + & y_2'(x_0)C_2 & + \cdots + & y_n'(x_0)C_n & = y_0', \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 & + & y_2^{(n-1)}(x_0)C_2 & + \cdots + & y_n^{(n-1)}(x_0)C_n & = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Визначник цієї системи $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $\left(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right)$. Тоді

$$y = C_1^{(0)} y_1(x) + C_2^{(0)} y_2(x) + \cdots + C_n^{(0)} y_n(x)$$

є розв'язком рівняння (30.2), який одержується із (30.6) при $C_1 = C_1^{(0)},\ C_2 = C_2^{(0)},\ \dots,\ C_n = C_n^{(0)}$ і задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots\ ,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

А отже, за теоремою існування і єдиності $y(x) \equiv \varphi(x)$ на інтервалі $(a;b)$. Таким чином, кожен розв'язок рівняння (30.2) можна одержати із (30.6) при певних значеннях довільних сталих. А це й означає, що (30.6) є загальним розв'язком рівняння (30.2). ■

Теорема 30.3. *Якщо $\varphi(x)$ — частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (30.1)*

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x),$$

де $P_1(x), \dots, P_n(x), Q(x)$ — неперервні на інтервалі $(a;b)$ функції, а

$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(x)$$

є загальний розв'язок відповідного йому однорідного рівняння, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(x) \tag{30.7}$$

Доведення. Неважко перевірити, що (30.7) є розв'язком рівняння (30.1). Нехай $\psi(x)$ розв'язок рівняння (30.1), який задовольняє початкові умови: $\psi(x_0) = y_0$, $\psi'(x_0) = y_0'$, ... , $\psi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Скориставшись формулою (30.7), побудуємо таку систему n лінійних рівнянь відносно невідомих

$C_1, C_2, \ldots, C_n$

$$\begin{cases} y_1(x_0)C_1 & + \cdots + & y_n(x_0)C_n & = y_0 - \varphi(x_0), \\ y_1'(x_0)C_1 & + \cdots + & y_n'(x_0)C_n & = y_0' - \varphi'(x_0), \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0)C_1 & + \cdots + & y_n^{(n-1)}(x_0)C_n & = y_0^{(n-1)} - \varphi^{(n-1)}(x_0). \end{cases}$$

Визначник цієї системи $W(x_0) \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $\left(C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}\right)$. Тоді

$$y = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k^{(0)} y_k(x)$$

є розв'язком рівняння (30.1), який одержується із (30.7) при $C_1 = C_1^{(0)}$, $C_2 = C_2^{(0)}$, $\ldots$, $C_n = C_n^{(0)}$ і задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

А отже, за теоремою існування і єдиності $y(x) \equiv \psi(x)$ на інтервалі $(a; b)$. Таким чином, кожен розв'язок рівняння (30.1) можна одержати із (30.7) при певних значеннях довільних сталих. А це й означає, що (30.7) є загальним розв'язком рівняння (30.1). ■

Нехай маємо лінійне неоднорідне рівняння (30.1)

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = Q(x)$$

і фундаментальну систему розв'язків $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ відповідного йому однорідного рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0. \qquad (30.8)$$

Тоді
$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(x)$$
загальний розв'язок рівняння (30.8). Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді
$$y = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x) \tag{30.9}$$
Оскільки невідомі функції $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ мають задовольняти тільки співвідношення, яке одержується при підстановці (30.9) у рівняння (30.1) , то на ці функції можна покласти ще $n-1$ умову. Будемо вважати, що для (30.9)
$$y' = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k'(x),$$
$$y'' = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k''(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x).$$
Тоді
$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n)}(x).$$
Підставивши $y, y', \ldots, y^{(n)}$ у рівняння (30.1) і врахувавши, що $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ розв'язки однорідного рівняння (30.8), одержимо
$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n)}(x) +$$

$$+P_1(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k^{(n-1)}(x) + \dots +$$

$$+P_{n-1}(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k'(x) + P_n(x)\sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, y_k(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\, \Big(y_k^{(n)}(x)+$$

$$+P_1(x)y_k^{(n-1)}(x) + \dots + P_{n-1}(x)y_k'(x) + P_n(x)y_k(x)\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k'(x)\, y_k^{(n-1)}(x) = Q(x).$$

Тепер уже можна записати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}
C_1'(x)y_1(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n(x) & = 0, \\
C_1'(x)y_1'(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n'(x) & = 0, \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) & = 0, \\
C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) & + & \cdots & + & C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) & = Q(x).
\end{cases}$$

Дана система відносно невідомих $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\dots$, $C_n'(x)$ є алгебраїчною лінійною неоднорідною системою із визначником $W(x) \neq 0$, і якщо $(w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ її розв'язок, то

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int\limits_{x_0}^{x} w_k(t)dt + \sum_{k=1}^{n} C_k\, y_k(x)$$

є загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (30.1).

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння

$$y'' + \omega^2 y = \sin \omega x,$$

де $\omega > 0$.

Розв'язання. Насамперед, безпосередня перевірка дозволяє переконатись, що $y_1(x) = \cos \omega x$, $y_2(x) = \sin \omega x$ є розв'язки однорідного рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, причому

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} = \omega \neq 0.$$

Тоді

$$y = \varphi(x) + C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x,$$

де $\varphi(x)$ — поки-що невідомий розв'язок заданого рівняння, C_1, C_2 — довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння. Скориставшись методом варіації довільних сталих, запишемо систему

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos \omega x & + & C_2'(x) \sin \omega x & = 0, \\ -\omega C_1'(x) \sin \omega x & + & \omega C_2'(x) \cos \omega x & = \sin \omega x, \end{cases}$$

розв'язавши яку, маємо:

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 \omega x}{\omega}, \; C_2'(x) = \frac{\cos \omega x \sin \omega x}{\omega}.$$

Звідси, наприклад,

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2\omega}\left(x - \frac{\sin 2\omega x}{2\omega}\right), \; C_2'(x) = -\frac{\cos 2\omega x}{4\omega^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{x \cos \omega x}{2\omega} + \frac{\sin 2\omega x \cos \omega x}{4\omega^2} - \frac{\cos 2\omega x \sin \omega x}{4\omega^2} = \\ &= -\frac{x \cos \omega x}{2\omega} + \frac{\sin \omega x}{4\omega^2} \end{aligned}$$

частинний розв'язок заданого рівняння, а

$$y = -\frac{x\cos\omega x}{2\omega} + \frac{\sin\omega x}{4\omega^2} + C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$$

є його загальний розв'язок.

Знання фундаментальної системи розв'язків забезпечує можливість знайти будь-який розв'язок лінійного однорідного рівняння, а подальше застосування методу варіації довільних сталих — будь-який розв'язок неоднорідного рівняння. Отож природним є питання про ефективні методи побудови такої системи.

Ще Л. Ейлер довів, що для лінійного однорідного рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0, \tag{30.10}$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, знаходження фундаментальної системи розв'язків зводиться до розв'язування певного алгебраїчного рівняння. Справді, якщо за його рекомендацією шукати розв'язок рівняння (30.10) у вигляді

$$y = e^{\lambda x}, \tag{30.11}$$

то, врахувавши, що

$$y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x},$$

прийдемо до висновку, що (30.11) є розв'язок рівняння (30.10) тоді і тільки тоді, коли

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$$

або

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \tag{30.12}$$

Алгебраїчне рівняння (30.12) називається *характеристичним рівнянням* рівняння (30.10), а многочлен

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

його характеристичним многочленом.

Якщо λ_0 — корінь рівняння (30.12), то очевидно, що

$$y = e^{\lambda_0 x}$$

є розв'язок рівняння (30.10), де $e^{\lambda_0 x}$ — комплексно-значна функція, якщо λ_0 є комплексне число.

Теорема 30.4. *Якщо λ_0 — корінь характеристичного рівняння (30.12) кратності m ($1 < m \leqslant n$), то кожна функція виду*

$$x^r e^{\lambda_0 x},$$

де $r = 1, 2, \ldots, m-1$, є розв'язком рівняння (30.10).

Доведення. Візьмемо функцію

$$x^r e^{\lambda x}$$

і, скориставшись формулою Лейбніца, обчислимо її похідну k-го порядку.

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^r e^{\lambda x}) = \frac{d^k}{dx^k}(e^{\lambda x} x^r) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (e^{\lambda x})^{(k-i)} (x^r)^{(i)} =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\lambda^k x^r + \sum_{i=1}^{k} \frac{k(k-1)\cdots(k-i+1)}{i!} \lambda^{k-i} (x^r)^{(i)} \right) =$$

$$= e^{\lambda x} \left(\lambda^k x^r + \sum_{i=1}^{k} \frac{(\lambda^k)^{(i)} (x^r)^{(i)}}{i!} \right) = e^{\lambda x} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda^k)^{(i)} (x^r)^{(i)}}{i!}.$$

Підставимо цю функцію та її похідні до n-го порядку включно у ліву частину рівняння (30.10). Маємо:

$$e^{\lambda x} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda^n)^{(i)} (x^r)^{(i)}}{i!} + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda^{n-1})^{(i)} (x^r)^{(i)}}{i!} + \cdots + \right.$$

$$+a_{n-1}\sum_{i=1}^{1}\frac{(\lambda)^{(i)}(x^r)^{(i)}}{i!}+a_nx^r\Bigg)=$$

$$=e^{\lambda x}\left(x^r(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n)+\right.$$

$$+\frac{(x^r)'}{1!}\left((\lambda^n)'+a_1(\lambda^{n-1})'+\cdots+a_{n-1}\right)+\cdots+$$

$$\left.+\frac{(x^r)^{(r)}}{r!}\left((\lambda^n)^{(r)}+a_1(\lambda^{n-1})^{(r)}+a_{n-r}(\lambda^r)^{(r)}\right)\right)=$$

$$=e^{\lambda x}\left(x^rP_n(\lambda)+\frac{(x^r)'}{1!}P_n'(\lambda)+\cdots+\frac{(x^r)^{(r)}}{r!}P_n^{(r)}(\lambda)\right).$$

(Тут враховано, що $(x^r)^{(k)}=0$ для $k>r$). Якщо в останній вираз покласти $\lambda=\lambda_0$ і врахувати, що $P_n(\lambda_0)=P_n'(\lambda_0)=\cdots=P_n^{(r)}(\lambda_0)=0$, то

$$(x^re^{\lambda_0x})^{(n)}+a_1(x^re^{\lambda_0x})^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x^re^{\lambda_0x})'+a_nx^re^{\lambda_0x}\equiv 0,$$

тобто функція $x^re^{\lambda_0x}$ є розв'язком рівняння (30.10). ■

Теорема 30.5. *Якщо $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_l$ — корені характеристичного рівняння (30.12) відповідно кратності $m_1,m_2,\ldots,m_l$ $(m_1+m_2+\cdots+m_l=n)$, то система функцій*

$$e^{\lambda_kx},\ xe^{\lambda_kx},\ \ldots\ ,\ x^{m_k-1}e^{\lambda_kx},$$

де $k=1,2,\ldots,l$, є фундаментальною системою розв'язків рівняння (30.10).

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто припустимо, що задана система функцій є лінійно залежною. Тоді існує набір чисел α_{kj} $(k = \overline{1, l},\ j = \overline{1, m_k - 1})$, серед яких є хоч одне число, відмінне від нуля, такий, що для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_k-1} \alpha_{kj} x^j e^{\lambda_k x} \equiv 0$$

або

$$\sum_{k=1}^{l} A_k(x) e^{\lambda_k x} \equiv 0, \tag{30.13}$$

де $A_k(x)$ — многочлен степеня не вище $m_k - 1$.

Припустимо, що $A_1(x) \not\equiv 0$, тобто

$$A_1(x) = \alpha_{10} + \alpha_{11} x + \cdots + \alpha_{1s} x^s,$$

де $\alpha_{1s} \neq 0$. Помножимо обидві частини тотожності (30.13) на $e^{-\lambda_l x}$. Одержимо

$$A_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_l)x} + A_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_l)x} + \cdots + A_{l-1}(x) e^{(\lambda_{l-1} - \lambda_l)x} + A_l(x) \equiv 0. \tag{30.14}$$

Нехай $A_l(x)$ є многочлен степеня p_1 $(p_1 \leqslant m_l - 1)$. Продиференцюємо тотожність (30.14) $p_1 + 1$ раз. Тоді, врахувавши, що при будь-якому k

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(A(x) e^{\alpha x} \right) = B(x) e^{\alpha x},$$

де $B(x)$ є многочлен того ж степеня, що й многочлен $A(x)$, причому його старший коефіцієнт дорівнює $a_0 \alpha^k$, де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $A(x)$, маємо

$$B_1(x) e^{(\lambda_1 - \lambda_l)x} + B_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_l)x} + \cdots + B_{l-1}(x) e^{(\lambda_{l-1} - \lambda_l)x} \equiv 0$$

або

$$B_1(x) e^{\lambda_1 x} + B_2(x) e^{\lambda_2 x} + \cdots + B_{l-1}(x) e^{\lambda_{l-1} x} \equiv 0, \tag{30.15}$$

причому старший коефіцієнт многочлена $B_1(x)$ дорівнює $\alpha_{1s}(\lambda_1 - \lambda_l)^{p+1}$. З тотожністю (30.15) проробимо те саме, що й з тотожністю (30.13). Одержимо тотожність

$$C_1(x)e^{\lambda_1 x} + C_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_{l-2}(x)e^{\lambda_{l-2} x} \equiv 0,$$

причому старший коефіцієнт многочлена $C_1(x)$ дорівнює $\alpha_{1s}(\lambda_1 - \lambda_l)^{p_1+1}(\lambda_1 - \lambda_{l-1})^{p_2+1}$, де p_2 — степінь многочлена $B_{l-1}(x)$.

Продовжимо цю процедуру. Як результат одержимо тотожність

$$S_1(x)e^{\lambda_1 x} \equiv 0 \text{ або } S_1(x) \equiv 0, \tag{30.16}$$

причому старший коефіцієнт многочлена $S_1(x)$ дорівнює

$$\alpha_{1s}(\lambda_1 - \lambda_l)^{p_1+1}(\lambda_1 - \lambda_{l-1})^{p_2+1} \cdots (\lambda_1 - \lambda_2)^{p_{l-1}+1}.$$

Оскільки $\lambda_1 - \lambda_l \neq 0, \ldots, \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то в силу (30.16) $\alpha_{1s} = 0$, що суперечить припущенню. Таким чином, наше припущення невірне, а отже, задана система розв'язків є лінійно незалежною, тобто є фундаментальною системою розв'язків рівняння (30.10). ■

Висновок. Згідно теореми 30.5 задача інтегрування лінійного однорідного рівняння із сталими коефіцієнтами (30.10)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

зводиться до розв'язування характеристичного рівняння (30.12)

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

і коли корені останнього рівняння знайдені, то загальний розв'язок рівняння (30.10) записується у вигляді

$$y = \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=0}^{m_k-1} C_{kj} x^j e^{\lambda_k x}, \tag{30.17}$$

де C_{kj} — довільні сталі.

У випадку коли $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k i$, де $\beta_k \neq 0$, корінь рівняння (30.12) кратності m_k, то його коренем буде число $\overline{\lambda}_k = \alpha_k - \beta_k i$ тієї ж кратності. А отже, до складу (30.17) увійдуть комплексно значні функції. Врахувавши, що двом комплексним розв'язкам

$$x^m e^{(\alpha_k+\beta_k i)x}, \quad x^m e^{(\alpha_k-\beta_k i)x},$$

де $m < m_k$, відповідають два дійсні розв'язки

$$x^m \cos\beta_k x e^{\alpha_k x}, \quad x^m \sin\beta_k x e^{\alpha_k x},$$

всі комплексно значні розв'язки можна замінити дійсними розв'язками, причому нова система розв'язків є фундаментальною.

Знаючи загальний розв'язок (30.17) лінійного однорідного рівняння, можна побудувати частинний розв'язок (наприклад, методом варіації довільних сталих) лінійного неоднорідного рівняння

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{30.18}$$

і на підставі теореми 30.3 його загальний розв'язок.

Можна виділити клас функцій $f(x)$, для якого можна побудувати частинний розв'язок чисто алгебраїчним шляхом (метод невизначених коефіцієнтів). А саме, якщо

$$f(x) = (P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)e^{\alpha x},$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — задані многочлени відповідно степеня m і n, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причому $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то існує частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який має вигляд

$$(R_{n_0}(x)\cos\beta x + T_{n_0}(x)\sin\beta x)e^{\lambda x}, \tag{30.19}$$

де $R_{n_0}(x)$, $T_{n_0}(x)$ — многочлени степеня $n_0 = \max(m, n)$ з невизначеними коефіцієнтами. Якщо ж $\alpha + \beta i$ є корінь характеристичного рівняння кратності l, то існує частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який має вигляд

$$x^l (R_{n_0}(x) \cos \beta x + T_{n_0}(x) \sin \beta x) e^{\lambda x}. \tag{30.20}$$

Підставивши у неоднорідне рівняння (30.18) (30.19) (у першому випадку) або (30.20) (у другому випадку) і скоротивши обидві частини на $e^{\lambda x}$, прирівнюємо многочлени при $\cos \beta x$ і $\sin \beta x$, і після цього коефіцієнти при x з однаковими степенями. Як результат, одержимо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів многочленів $R_{n_0}(x)$, і $T_{n_0}(x)$. Гарантом існування розв'язку побудованої лінійної системи є існування розв'язку рівняння (30.18), який має вигляд (30.19) або (30.20).

Приклад 2. Зінтегрувати рівняння

$$y^{VI} - 4y^{V} + 8y^{IV} - 8y''' + 4y'' = 0.$$

Розв'язання. Побудуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 + 8\lambda^4 - 8\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0,$$

і знайдемо його корені. Маємо:

$$\lambda^2(\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4) = 0$$

або $\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^2 = 0$. Звідси маємо три корені $\lambda_1 = 0$ кратності 2, $\lambda_2 = 1 + i$ кратності 2, $\lambda_3 = 1 - i$ кратності 2. °м відповідають розв'язки

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{(1+i)x}, y_4 = xe^{(1+i)x}, y_5 = e^{(1-i)x}, y_6 = xe^{(1-i)x},$$

які складають фундаментальну систему. Замінюємо пару розв'язків y_3, y_5 розв'язками $\cos xe^x$, $\sin xe^x$, а пару розв'язків y_4, y_6

розв'язками $x\cos xe^x$, $x\sin xe^x$, і записуємо загальний розв'язок заданого рівняння

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x\cos x + C_4e^x\sin x + C_5xe^x\cos x + C_6xe^x\sin x.$$

Приклад 3. Зінтегрувати рівняння

$$y'' + y = x\cos x.$$

Розв'язання. Побудуємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 1 = 0,$$

і знайдемо його корені. Маємо $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. °м відповідають розв'язки $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. А отже, загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + y = 0$ має вигляд

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Оскільки права частина

$$f(x) = x\cos x,$$

то частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} y &= x((A_1x + B_1)\cos x + (A_2x + B_2)\sin x) = \\ &= (A_1x^2 + B_1x)\cos x + (A_2x^2 + B_2x)\sin x. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} y' &= (2A_1x + B_1 + A_2x^2 + B_2x)\cos x + \\ &+ (-A_1x^2 - B_1x + 2A_2x + B_2)\sin x, \\ y'' &= (2A_1 + 4A_2x + 2B_2 - A_1x^2 - B_1x)\cos x + \\ &+ (-4A_1x - 2B_1 - A_2x^2 - B_2x + 2A_2)\sin x. \end{aligned}$$

Підставивши y, y'' у задане рівняння, одержимо дві рівності многочленів

$$2A_1 + 4A_2x + 2B_2 - A_1x^2 - B_1x + A_1x^2 + B_1x = x,$$
$$-4A_1x - 2B_1 - A_2x^2 - B_2x + 2A_2 + A_2x^2 + B_2x = 0,$$

з якої маємо таку систему

$$4A_2 = 1,\ 2A_1 + 2B_2 = 0,\ -4A_1 = 0,\ -2B_1 + 2A_2 = 0.$$

Звідси $A_1 = B_2 = 0$, $A_2 = B_1 = \frac{1}{4}$. Отже, загальний розв'язок заданого рівняння буде мати вигляд

$$y = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Приклад 4. Зінтегрувати рівняння

$$y'' + 4y = x\cos x + x^2\sin 2x.$$

Розв'язання. Оскільки коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, то загальний розв'язок відповідного рівняння має вигляд

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

Врахувавши, що частинний розв'язок заданого рівняння є сумою частинних розв'язків рівнянь

$$\text{(а)}\quad y'' + 4y = x\cos x, \qquad \text{(б)}\quad y'' + 4y = x^2\sin 2x,$$

будемо шукати їх частинні розв'язки окремо. Розглянемо рівняння

$$z'' + 4z = xe^{ix} = x\cos x + i\sin x.$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді

$$z = (Ax + B)e^{ix}.$$

Тоді

$$z' = (A + iAx + iB)e^{ix}, \quad z'' = (2Ai - Ax - B)e^{ix}.$$

Підставивши z, z'' у це рівняння маємо

$$(2Ai - Ax - B)e^{ix} + 4(Ax + B)e^{ix} = xe^{ix}$$

або $2Ai + 3Ax + 3B = x$. Звідси $3A = 1$, $2Ai + 3B = 0$, тому $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{2}{9}i$ і $z = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}i\right)e^{-ix}$. Тоді розв'язок рівняння (a) буде

$$y_1 = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}i\right)(\cos x + i\sin x) = \frac{1}{3}x\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

Розглянемо рівняння

$$z'' + 4z = x^2 e^{2ix}.$$

Будемо шукати його розв'язок у вигляді

$$z = (Ax^3 + Bx^2 + Cx)e^{2ix}.$$

$$\begin{array}{rcl} z' & = & (3Ax^2 + 2Bx + C + 2Aix^3 + 2Bix^2 + 2Cix)e^{2ix}, \\ z'' & = & (6Ax + 2B + 12Aix^2 + 8Bix + 2Ci - 4Ax^3 - \\ & - & 4Bx^2 - 4Cx)e^{2ix}. \end{array}$$

Підставивши z, z'' у це рівняння, одержимо

$$6Ax + 2B + 12Aix^2 + 8Bix + 4Ci = x^2.$$

Звідси
$$A=-\frac{i}{12},\ B=\frac{1}{16},\ C=\frac{i}{32}.$$
Тоді розв'язок рівняння (б) буде
$$\begin{aligned} y_2=\operatorname{Im} z &= \operatorname{Im}\left(-\frac{i}{12}x^3+\frac{1}{16}x^2+\frac{i}{32}x\right)(\cos 2x+i\sin 2x)= \\ &= -\frac{x^3}{12}\cos 2x+\frac{x}{32}\cos 2x+\frac{x^2}{16}\sin 2x. \end{aligned}$$
Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд:
$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{x^3}{12}+\frac{x}{32}\right)\cos 2x+\frac{x^2}{16}\sin 2x+ \\ &+ \frac{1}{3}x\cos x+\frac{2}{9}\sin x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x. \end{aligned}$$

Завдання для самоконтролю.

1. Що таке комплексний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння? Довести, що коли
$$y=u(x)+iv(x)$$
розв'язок цього рівняння, то його розв'язками будуть функції $u(x)$ і $v(x)$.

2. Довести, що множина всіх розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку відносно операції додавання і множення на скаляр є лінійним простором. Яка розмірність такого простору?

3. Довести, що коли $y_1(x)$, $y_2(x)$ розв'язки відповідно диференціальних рівнянь
$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f_1(x),$$
$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f_2(x),$$

то функція $y_1(x) + y_2(x)$ є розв'язком рівняння

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

4. У чому суть методу Ейлера побудови фундаментальної системи розв'язків однорідного лінійного рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами? Який вигляд мають фундаментальна система розв'язків і загальний розв'язок у випадку різних і кратних коренів характеристичного рівняння?

5. Зінтегрувати рівняння:

а) $y^V - 10y''' + 9y' = 0$;

б) $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$;

в) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

6. Зінтегрувати рівняння:

а) $y''' - y'' = -3x + 1$;

б) $y'' - 4y = e^x((-4x + 4)\cos x - (2x + 6)\sin 2x)$;

в) $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos 2x$.

Література

[1] М. О. Давидов, Курс математичного аналізу. Ч. 1-3. К.: Вища школа, 1990–1991–1992.

[2] В. А. Зорич, Математический анализ. Ч. 1–2. М.: Наука, 1981, 1985.

[3] Л. Д. Кудрявцев, Курс математического анализа. Т. 1–3. М.: Высшая школа, 1988, 1989.

[4] А. И. Маркушевич, Л. А. Маркушевич, Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977.

[5] И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

[6] Л. Шварц, Анализ, т. 1–2. М.: Мир, 1972.

[7] К. А. Рыбников, История математики. М.: Изд. МГУ, 1974.

[8] М. і. Шкіль, З. і. Слєпкань, О. С. Дубинчук, Алгебра і початки аналізу. К.: Зодіак–Еко, 1995.

[9] Ь. і. Шкіль, Математичний аналіз, ч. 1–2. К.: Вища школа, 1995.

[10] Н. М. Шунда, А. А. Томусяк, Практикум з математичного аналізу. Вступ до аналізу. Диференціальне числення. К.: Вища школа, 1993.

[11] Н. М. Шунда, А. А. Томусяк, Практикум з математичного аналізу. інтегральне числення. Ряди. К.: Вища школа, 1995.

Томусяк Андрій Андрійович

Трохименко Валентин Степанович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ