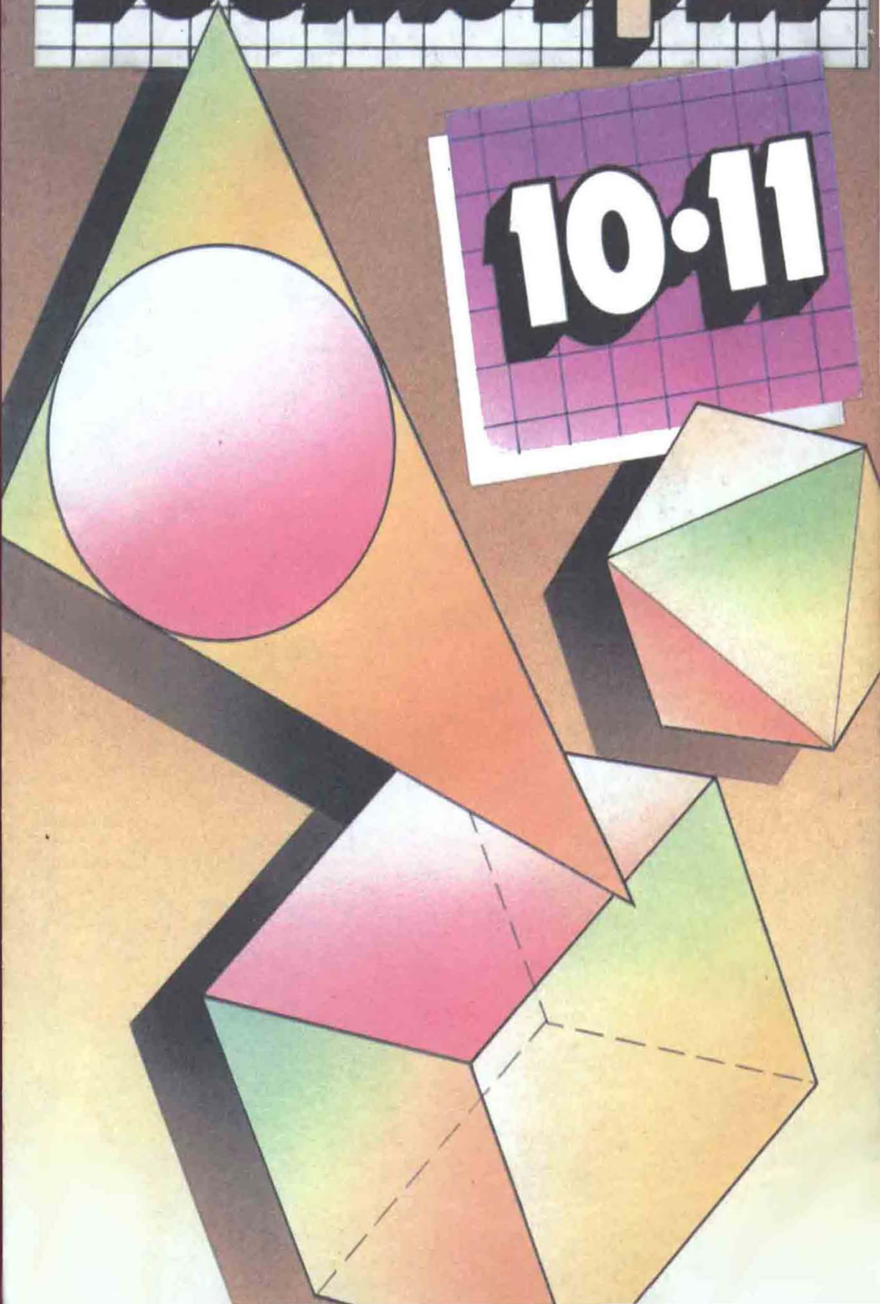
О.В. Погорєлов

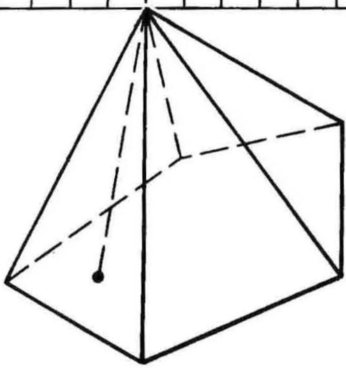
Геометрія

10-11



О. В. Погорєлов

Геометрія



СТЕРЕОМЕТРІЯ

Підручник
для 10—11 класів
середньої школи

Затверджено
Міністерством освіти
України

6-те видання

КИЇВ
«ОСВІТА»
2001

ББК 22.151я72
П43

Затверджено Міністерством освіти України
(Лист Міністерства освіти України № 3/12—67 від 17.03.94)

Навчальне видання

ПОГОРЄЛОВ Олексій Васильович

ГЕОМЕТРІЯ

Стереометрія

Підручник для 10—11 класів
середньої школи

Затверджено Міністерством освіти України
6-те видання

Завідуюча редакцією
природничо-математичних дисциплін *Є. М. Коденко*
Редактор *Г. В. Криволапова*
Художник обкладинки *В. Б. Волков*
Художній редактор *Н. О. Костинська*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Коректори *Л. С. Бобир, Г. А. Зацерковна*

Підписано до друку з діапозитивів 09.04.2001. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарнітура літературна. Друк. офс. Ум. друк. арк. 8+0,06 форзац.
Обл.-вид. арк. 8,19+0,05 форзац. Ум. фарбовідб. 8,58.
Тираж 600 000 пр.(3-й завод 300 001—450 000 пр.). Вид. № 36735. Зам.1-39.

Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Ю. Коцюбинського, 5.
Свідоцтво ДК № 27 від 31.03.2000 р.

Книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе,
61057, Харків, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.

Погорєлов О. В.

П43 Геометрія: Стереометрія: Підруч. для 10—11 кл. серед. шк.— 6-те вид.— К.: Освіта, 2001.— 128 с.
ISBN 966-04-0334-8.

ББК 22.151я72

ISBN 966-04-0334-8

10 клас

§ 1. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ НАСЛІДКИ

1. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Стереометрія — це розділ геометрії, у якому вивчаються фігури у просторі. У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур встановлюються доведенням відповідних теорем. При цьому вихідними є властивості основних геометричних фігур, що виражаються аксіомами. Основними фігурами у просторі є точка, пряма і площина.

Площину ми уявляємо собі як рівну поверхню стола (мал. 1, *а*) і тому зображуватимемо її у вигляді паралелограма (мал. 1, *б*). Площина, як і пряма, нескінченна. На малюнку ми зображаємо лише частину площини, але уявляємо її необмежено продовженою в усі боки. Площини позначаються грецькими буквами α, β, γ, ...

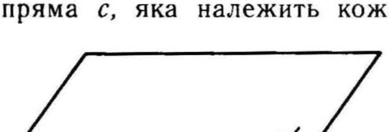
Введення нового геометричного образу — площини — потребує розширення системи аксіом. Тому ми вводимо групу аксіом С, яка виражає основні властивості площин у просторі. Ця група складається з таких трьох аксіом:

C_1. *Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.*

C_2. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.*

Ця аксіома стверджує, що коли дві різні площини α і β мають спільну точку, то існує пряма c, яка належить кожній

а)



б)

Мал. 1

з цих площин. При цьому, якщо точка C належить обом площинам, то вона належить прямій c.

C_3. *Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.*

Це означає, що коли дві різні прямі a і b мають спільну точку C, то існує площина γ, яка містить прямі a і b. Площина, що має цю властивість, єдина.

Таким чином, система аксіом стереометрії складається з аксіом I — IX планіметрії і групи аксіом C.

Зауваження. У планіметрії ми мали одну площину, на якій розміщались усі фігури, що розглядались. У стереометрії багато, навіть нескінченно багато, площин. У зв'язку з цим формулювання деяких аксіом планіметрії, як аксіом стереометрії, потребують уточнення. Це стосується, наприклад, аксіом IV, VII, VIII, IX. Наведемо ці уточнені формулювання.

IV. Пряма, що *належить площині,* розбиває цю площину на дві півплощини.

VII. Від півпрямої *на площині, що містить її,* можна відкласти у задану півплощину кут з даною градусною мірою, меншою 180°, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому, *у даній площині* у заданому розміщенні відносно даної півпрямої у цій площині.

IX. *На площині* через дану точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній.

Для зручності викладу нагадаємо аксіому I.

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

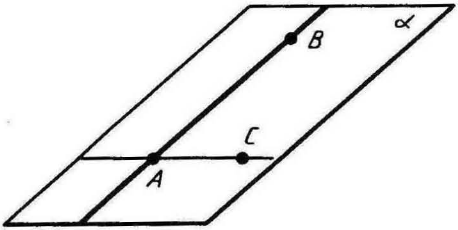
2. ІСНУВАННЯ ПЛОЩИНИ, ЯКА ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ДАНУ ПРЯМУ І ДАНУ ТОЧКУ

Теорема 1.1. ***Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.***

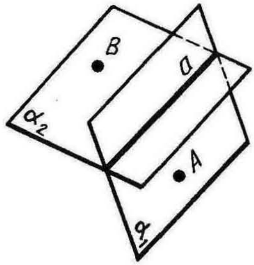
Доведення. Нехай AB — дана пряма і C — точка, яка не лежить на ній (мал. 2). Проведемо через точки A і C пряму (аксіома I). Прямі AB і AC різні, оскільки точка C не лежить на прямій AB. Проведемо через прямі AB і AC площину α (аксіома C_3). Вона проходить через пряму AB і точку C.

Доведемо, що площина α, яка проходить через пряму AB і точку C, єдина.

Припустимо, існує інша площина α', яка проходить через пряму AB і точку C. За аксіомою C_2 площини α і α' перетинаються по прямій. Ця пряма має містити точки A, B, C. Але вони не



Мал. 2



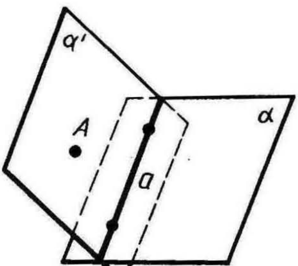
Мал. 3

лежать на одній прямій. Ми прийшли до суперечності. Теорему доведено.

З а д а ч а (7). Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.

Р о з в' я з а н н я. Нехай a — дана пряма (мал. 3). За аксіомою I існує точка A, яка не лежить на прямій a. За теоремою 1.1 через пряму a і точку A можна провести площину. Позначимо її через α_1. За аксіомою C_1 існує точка B, яка не лежить у площині α_1. Проведемо через пряму a і точку B площину α_2. Площини α_1 і α_2 різні, оскільки точка B площини α_2 не лежить на площині α_1.

3. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З ПЛОЩИНОЮ

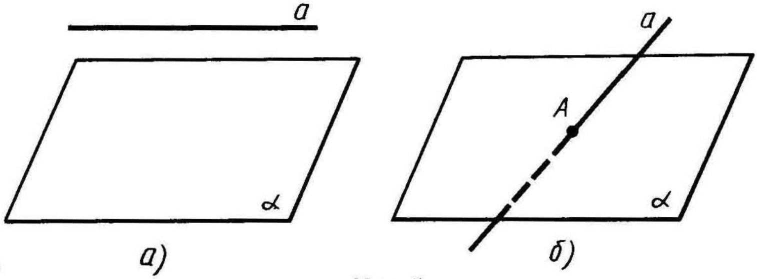


Мал. 4

Т е о р е м а 1.2. ***Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.***

Д о в е д е н н я. Нехай a — дана пряма і α — дана площина (мал. 4). За аксіомою I існує точка A, яка не лежить на прямій a. Проведемо через пряму a і точку A площину α'. Якщо площина α' збігається з α, то площина α містить пряму a, що й стверджує теорема. Якщо площина α' відмінна від α, то ці площини перетинаються по прямій a', яка містить дві точки прямої a. За аксіомою I пряма a' збігається з a і, отже, пряма a лежить у площині α. Теорему доведено.

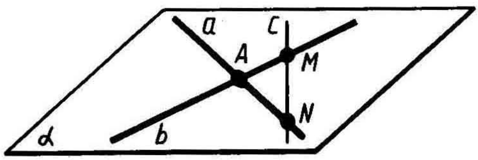
З теореми 1.2 випливає, що ***площина і пряма, яка не лежить на ній, або не перетинаються, або перетинаються в одній точці*** (мал. 5).



Мал. 5

Задача (9). Дано дві різні прямі, які перетинаються в точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі й не проходять через точку A, лежать в одній площині.

Розв'язання. Проведемо через дані прямі a і b площину α (мал. 6). Це можна зробити за аксіомою C_3. Пряма c, яка перетинає дані прямі, має з площиною α дві спільні точки M і N (точки перетину з даними прямими). За теоремою 1.2 ця пряма повинна лежати у площині α.



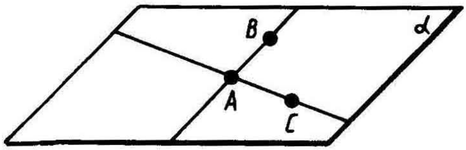
Мал. 6

4. ІСНУВАННЯ ПЛОЩИНИ, ЯКА ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ТРИ ДАНІ ТОЧКИ

Теорема 1.3. ***Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.***

Доведення. Нехай A, B, C — три дані точки, які не лежать на одній прямій (мал. 7). Проведемо прямі AB і AC; вони різні, бо точки A, B, C не лежать на одній прямій. За аксіомою C_3 через прямі AB і AC можна провести площину α. Ця площина містить точки A, B, C.

Доведемо, що площина α, яка проходить через точки A, B, C, єдина. Справді, площина, яка проходить через точки A, B, C, за теоремою 1.2 містить прямі AB і AC. А за аксіомою C_3 така площина єдина.



Мал. 7

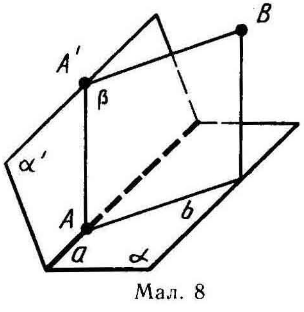
Задача (13). Чи можна провести площину через три точки, якщо вони лежать на одній прямій? Відповідь поясніть.

Розв'язання. Нехай A, B, C — три точки, які лежать на прямій a. Візьмемо точку D, яка не лежить на прямій a (аксіома I). Через точки A, B, D можна провести площину (теорема 1.3). Ця площина містить дві точки прямої a — точки A і B, а тому містить і точку C цієї прямої (теорема 1.2). Отже, через три точки, які лежать на одній прямій, завжди можна провести площину.

5. ЗАУВАЖЕННЯ ДО АКСІОМИ I

Аксіома I у списку аксіом стереометрії набуває іншого змісту, ніж вона мала у планіметрії. У планіметрії ця аксіома стверджує існування точок поза даною прямою *на площині*, в якій лежить пряма. Саме в такому розумінні ця аксіома застосовувалась у процесі побудови геометрії на площині. Тепер ця аксіома стверджує взагалі існування точок, які не лежать на даній прямій. З неї безпосередньо не випливає, що існують точки поза даною прямою на площині, в якій лежить пряма. Це потребує спеціального доведення. Дамо таке доведення.

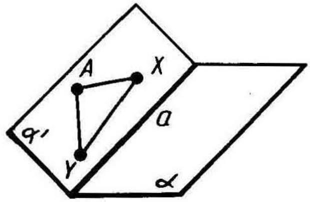
Нехай α — площина і a — пряма у цій площині (мал. 8). Доведемо існування точок у площині α, які не лежать на прямій a.



Мал. 8

Позначимо точку A на прямій a і точку A' поза площиною α. Через пряму a і точку A' проведемо площину α'. Візьмемо точку B поза площиною α' і проведемо через пряму AA' і точку B площину β. Площини α і β перетинаються по прямій b, яка проходить через точку A і відмінна від прямої a. Точки цієї прямої, відмінні від A, лежать у площині α поза прямою a, що й треба було довести.

6. РОЗБИТТЯ ПРОСТОРУ ПЛОЩИНОЮ НА ДВА ПІВПРОСТОРИ



Мал. 9

Теорема 1.4. ***Площина розбиває простір на два півпростори. Якщо точки X і Y належать одному півпростору, то відрізок XY не перетинає площини. Якщо ж точки X і Y належать різним півпросторам, то відрізок XY перетинає площину.***

Доведення (не для запам'ятовування). Нехай α — дана площина. Позначимо точку A, яка не лежить на площині α. Така точка існує за аксіомою C_1. Розіб'ємо усі точки простору, які не лежать на площині α, на два півпростори таким чином. Точку X віднесемо до першого півпростору, якщо відрізок AX не перетинає площину α і до другого півпростору — якщо відрізок AX перетинає площину α. Покажемо, що це розбиття простору має властивості, названі у теоремі.

Нехай точки X і Y належать першому півпростору. Проведемо через точки A, X і Y площину α'. Якщо площина α' не перетинає площину α, то відрізок XY теж не перетинає цю площину. Припустимо, площина α' перетинає площину α (мал. 9). Оскільки площини різні, то їх перетин відбувається по деякій прямій a. Пряма a розбиває площину α' на дві півплощини. Точки X і Y належать одній півплощині, а саме тій, в якій лежить точка A. Тому відрізок XY не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо точки X і Y належать другому півпростору, то площина α' явно перетинає площину α, оскільки відрізок AX перетинає площину α. Точки X і Y належать одній півплощині розбиття площини α' прямою a. Звідси відрізок XY не перетинає пряму a, а отже, і площину α.

Якщо, нарешті, точка X належить одному півпростору, а точка Y — іншому, то площина α' перетинає площину α, а точки X і Y лежать у різних півплощинах площини α' відносно прямої a. Тому відрізок XY перетинає пряму a, а отже, і площину α. Теорему доведено.

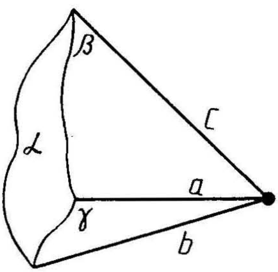
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке стереометрія?
2. Сформулюйте аксіоми групи С.
3. Доведіть, що через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.
4. Доведіть, що коли дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.

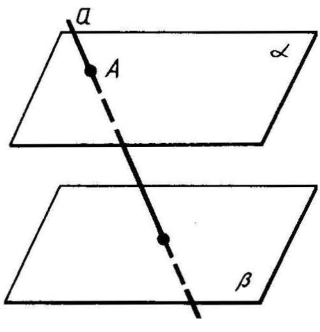
5. Доведіть, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

ЗАДАЧІ

1. Точки A, B, C, D не лежать на одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.
2. Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині? Відповідь поясніть.
3. Точки A, B, C лежать у кожній з двох різних площин. Доведіть, що ці точки лежать на одній прямій.
4. Дано три різні площини, які попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві з прямих перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину (мал. 10).



Мал. 10



Мал. 11

5. Дано дві площини, які перетинаються по прямій a, і пряму b, яка лежить в одній з цих площин і перетинає другу. Доведіть, що прямі a і b перетинаються.
6. Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть будь-які три з них лежати на одній прямій? Відповідь поясніть.
7. Доведіть, що через пряму можна провести дві різні площини.
8.* Дано дві площини, які не перетинаються. Доведіть, що пряма, яка перетинає одну з цих площин, перетинає й другу (мал. 11).
9. Дано дві різні прямі, які перетинаються в точці A. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі і не проходять через точку A, лежать в одній площині.
10. Доведіть, що всі прямі, які перетинають дану пряму і проходять через дану точку поза прямою, лежать в одній площині.

11. Доведіть, що коли прямі AB і CD не лежать в одній площині, то прямі AC і BD також не лежать в одній площині.

12. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки можна провести різних площин, які проходять через три з цих точок? Відповідь поясніть.

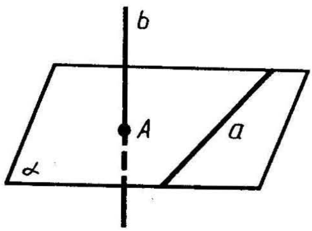
13. Чи можна провести площину через три точки, якщо вони лежать на одній прямій? Відповідь поясніть.

14* Дано чотири точки. Відомо, що пряма, яка проходить через будь-які дві з цих точок, не перетинається з прямою, яка проходить через інші дві точки. Доведіть, що дані чотири точки не лежать в одній площині.

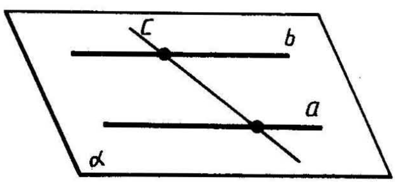
§ 2. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

7. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ В ПРОСТОРІ

Дві прямі в просторі називаються *паралельними,* якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються. Прямі, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними* (мал. 12).



Мал. 12



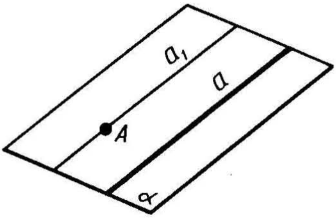
Мал. 13

З а д а ч а (3). Доведіть, що всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки дані прямі a і b паралельні, то через них можна провести площину (мал. 13). Позначимо її α. Пряма c, яка перетинає дані паралельні прямі, має з площиною α дві спільні точки — точки перетину з даними прямими. За теоремою 1.2 ця пряма лежить у площині α. Отже, всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині — площині α.

Т е о р е м а 2.1. ***Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну цій прямій, і тільки одну.***

З а у в а ж е н н я. Твердження єдиності в теоремі 2.1 не є простим наслідком аксіоми паралельних, оскільки цією



Мал. 14

аксіомою стверджується єдиність прямої, паралельної даній в даній площині. Тому це твердження потребує доведення.

Д о в е д е н н я. Нехай a — дана пряма і A — точка, яка не лежить на цій прямій (мал. 14). Проведемо через пряму a і точку A площину α. Проведемо через точку A у площині α пряму a_1, паралельну a. Доведемо, що пряма a_1, паралельна a, єдина.

Припустимо, що існує інша пряма a_2, яка проходить через точку A і паралельна прямій a. Через прямі a і a_2 можна провести площину α_2. Площина α_2 проходить через пряму a і точку A, тому за теоремою 1.1 вона збігається з α. Тоді за аксіомою паралельних прямі a_1 і a_2 збігаються. Теорему доведено.

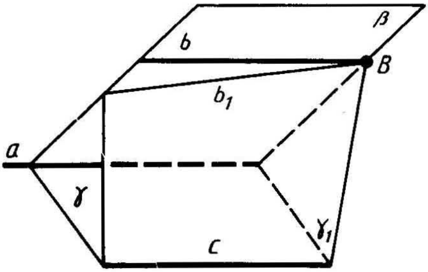
8. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Т е о р е м а 2.2. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

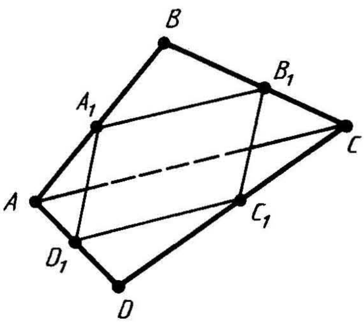
Д о в е д е н н я. Нехай прямі b і c паралельні прямій a. Доведемо, що прямі b і c паралельні.

Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто у планіметрії. Тому припустимо, що наші прямі не лежать в одній площині. Нехай β — площина, в якій лежать прямі a і b, а γ — площина, в якій лежать прямі a і c. Площини β і γ різні (мал. 15). Візьмемо на прямій b будь-яку точку B і проведемо площину γ_1 через пряму c і точку B. Вона перетне площину β по прямій b_1.

Пряма b_1 не перетинає площину γ. Справді, точка перетину повинна належати прямій a, оскільки пряма b_1 лежить у площи-



Мал. 15



Мал. 16

ні β. З другого боку, вона повинна лежати на прямій c, бо пряма b_1 лежить у площині γ_1. Але прямі a і c як паралельні не перетинаються.

Оскільки пряма b_1 лежить у площині β і не перетинає пряму a, то вона паралельна прямій a, а отже, збігається з b за аксіомою паралельних. Таким чином, пряма b, збігаючись з прямою b_1, лежить в одній площині з прямою c (у площині γ_1) і не перетинає її. Отже, прямі b і c паралельні. Теорему доведено.

З а д а ч а (11). Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

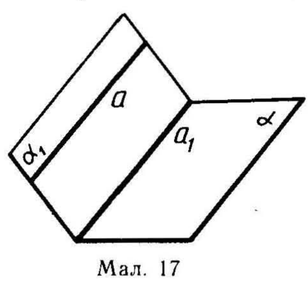
Р о з в' я з а н н я. Нехай $ABCD$ — даний просторовий чотирикутник, а A_1, B_1, C_1, D_1 — середини його сторін (мал. 16). Тоді A_1B_1 — середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, C_1D_1 — середня лінія трикутника ACD, теж паралельна стороні AC. За теоремою 2.2 прямі A_1B_1 і C_1D_1 паралельні, тому лежать в одній площині. Так само доводимо паралельність прямих A_1D_1 і B_1C_1. Отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ лежить в одній площині і його протилежні сторони паралельні. Отже, він — паралелограм.

9. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма і площина називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Т е о р е м а 2.3. ***Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.***

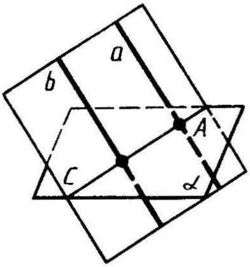
Д о в е д е н н я. Нехай α — площина, a — пряма, яка їй не належить, і a_1 — пряма у площині α, паралельна прямій a. Проведемо площину α_1 через прямі a і a_1 (мал. 17). Площини α і α_1 перетинаються по прямій a_1. Якби пряма a перетинала площину α, то точка перетину належала б прямій a_1. Але це неможливо, оскільки a і a_1 паралельні. Отже, пряма a не перетинає площину α, а тому паралельна площині α. Теорему доведено.



Мал. 17

З а д а ч а (15). Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму.

Р о з в' я з а н н я. Нехай a і b — дві паралельні прямі і α — пло-



Мал. 18

щина, яка перетинає пряму a в точці A (мал. 18). Проведемо через прямі a і b площину. Вона перетне площину α по деякій прямій c. Пряма c перетинає пряму a (у точці A), а отже, перетинає паралельну їй пряму b. Оскільки пряма c лежить у площині α, то площина α перетинає пряму b.

10. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПЛОЩИН

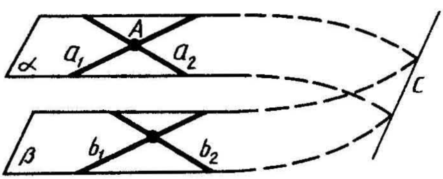
Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Теорема 2.4. ***Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.***

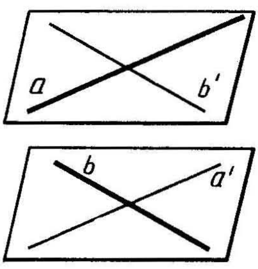
Доведення. Нехай α і β — дані площини, a_1 і a_2 — дві прямі у площині α, які перетинаються у точці A, b_1 і b_2 — відповідно паралельні їм прямі у площині β (мал. 19). Припустимо, що площини α і β не паралельні, тобто перетинаються по деякій прямій c. За теоремою 2.3 прямі a_1 і a_2, як паралельні прямим b_1 і b_2, паралельні площині β, і тому вони не перетинають пряму c, яка лежить у цій площині. Таким чином, у площині α через точку A проходять дві прямі (a_1 і a_2), паралельні прямій c. Але це неможливо за аксіомою паралельності. Ми прийшли до суперечності. Теорему доведено.

Задача (19). Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

Розв'язання. Нехай a і b — дані мимобіжні прямі (мал. 20). Через довільну точку прямої a проведемо



Мал. 19



Мал. 20

пряму b', паралельну b, а через довільну точку прямої b проведемо пряму a', паралельну a. Тепер проведемо дві площини — одну через прямі a і b', а другу — через b і a'. За теоремою 2.4 ці площини паралельні. У першій з них лежить пряма a, а у другій — пряма b.

11. ІСНУВАННЯ ПЛОЩИНИ, ПАРАЛЕЛЬНОЇ ДАНІЙ ПЛОЩИНІ

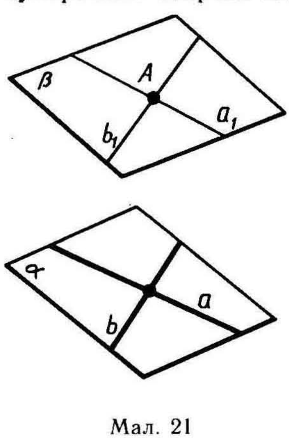
Теорема 2.5. ***Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.***

Доведення. Проведемо у даній площині α які-небудь дві прямі a і b, що перетинаються (мал. 21). Через дану точку A проведемо паралельні їм прямі a_1 і b_1. Площина β, що проходить через a_1 і b_1, за теоремою 2.4 паралельна площині α.

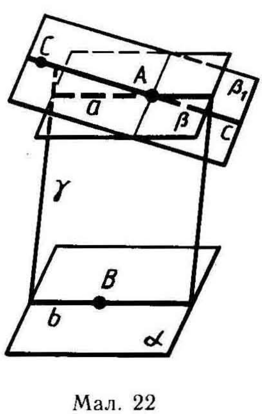
Припустимо, що через точку A проходить інша площина β_1, теж паралельна площині α (мал. 22). Позначимо на площині β_1 довільну точку C, яка не лежить у площині β. Проведемо площину γ через точки A, C і яку-небудь точку B площини α. Ця площина перетне площини α, β і β_1 по прямих b, a і c. Прямі a і c не перетинають пряму b, оскільки не перетинають площину α. Отже, вони паралельні прямій b. Але у площині γ через точку A можна провести тільки одну пряму, паралельну прямій b. Ми прийшли до суперечності. Теорему доведено.

Задача (23). Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

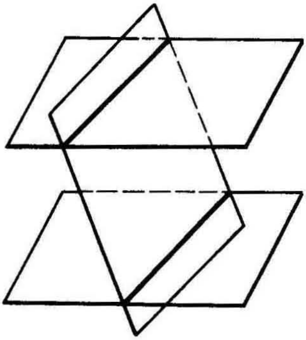
Розв'язання. Площини α і β не можуть перетинатися. Якби площини α і β мали спільну точку, то через цю точку проходили б дві площини (α і β), паралельні площині γ. А це суперечить теоремі 2.5.



Мал. 21



Мал. 22



Мал. 23

12. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні (мал. 23).

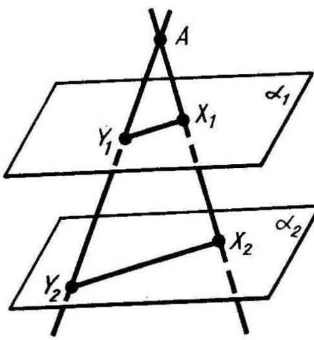
Справді, за означенням паралельні прямі — це прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються. Наші прямі лежать в одній площині — січній площині. Вони не перетинаються, оскільки не перетинаються паралельні площини, які їх містять. Отже, прямі паралельні, що й треба було довести.

Задача (33). Дано дві паралельні площини α_1, α_2 і точка A, яка не лежить в жодній з цих площин. Через точку A проведено довільну пряму. Нехай X_1 і X_2 — точки перетину її з площинами α_1 і α_2. Доведіть, що відношення довжин відрізків $AX_1:AX_2$ не залежить від узятої прямої.

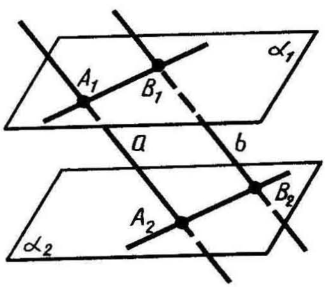
Розв'язання. Проведемо через точку A іншу пряму і позначимо через Y_1 і Y_2 точки перетину її з площинами α_1 і α_2 (мал. 24). Проведемо через прямі AX_1 і AY_1 площину. Вона перетне площини α_1 і α_2 по паралельних прямих X_1Y_1 і X_2Y_2. Звідси випливає подібність трикутників AX_1Y_1 і AX_2Y_2. А з подібності трикутників випливає пропорція

$$\frac{AX_1}{AX_2}=\frac{AY_1}{AY_2},$$

тобто відношення $AX_1:AX_2$ і $AY_1:AY_2$ однакові для обох прямих.



Мал. 24



Мал. 25

Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.

Справді, нехай α_1 і α_2 — паралельні площини, a і b — паралельні прямі, що їх перетинають. A_1, A_2 і B_1, B_2 — точки перетину прямих з площинами (мал. 25). Проведемо через прямі a і b площину. Вона перетинає площини α_1 і α_2 по паралельних прямих A_1B_1 і A_2B_2. Чотирикутник $A_1B_1B_2A_2$ — паралелограм, оскільки в нього протилежні сторони паралельні. А в паралелограма протилежні сторони рівні. Отже, $A_1A_2=B_1B_2$, що й треба було довести.

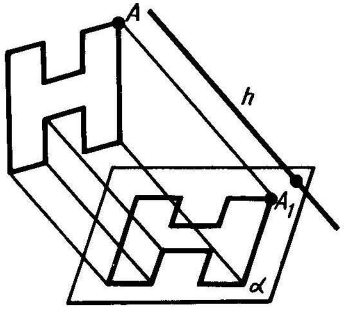
13. ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

Для зображення просторових фігур на площині, як правило, користуються паралельним проектуванням. Розглянемо цей спосіб зображення фігури. Беремо довільну пряму h, яка перетинає площину малюнка α, проводимо через довільну точку A фігури пряму, паралельну h. Точка A_1 перетину цієї прямої з площиною малюнка буде зображенням точки A (мал. 26). Побудувавши таким чином зображення кожної точки фігури, дістанемо зображення самої фігури. Такий спосіб зображення просторової фігури на площині відповідає зоровому сприйманню фігури під час розглядання її здалеку.

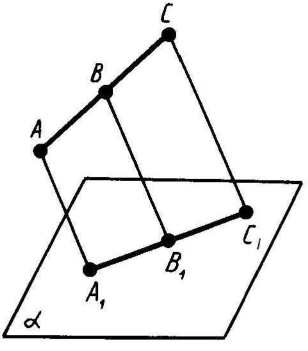
Наведемо деякі властивості зображення фігури на площині, які випливають з описаної її побудови.

Прямолінійні відрізки фігури зображаються на площині малюнка відрізками (мал. 27).

Справді, усі прямі, що проектують точки відрізка AC, лежать в одній площині, яка перетинає площину малюнка α по прямій A_1C_1. Довільна точка B відрізка AC зображається точкою B_1 відрізка A_1C_1.



Мал. 26



Мал. 27

З а у в а ж е н н я. У щойно доведеній властивості й далі передбачається, звичайно, що відрізки, які проектуються, не паралельні напряму проектування.

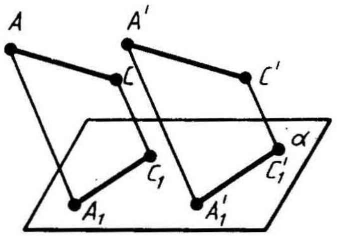
Паралельні відрізки фігури зображаються на площині малюнка паралельними відрізками (мал. 28).

Справді, нехай AC і $A'C'$ паралельні відрізки фігури. Прямі A_1C_1 і $A_1'C_1'$ паралельні, оскільки їх ми дістали в результаті перетину паралельних площин з площиною α. Перша з цих площин проходить через прямі AC і AA_1, а друга — через прямі $A'C'$ і $A'A_1'$.

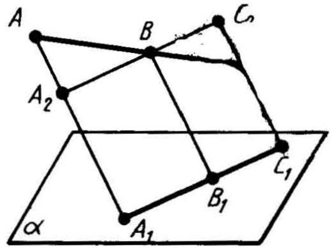
Відношення відрізків однієї прямої або паралельних зберігається при паралельному проектуванні.

Покажемо, наприклад, що (мал. 29)

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$



Мал. 28



Мал. 29

Проведемо через точку B пряму A_2C_2, паралельну A_1C_1. Трикутники BAA_2 і BCC_2 подібні. З подібності трикутників і рівностей $A_1B_1=A_2B$ і $B_1C_1=BC_2$ випливає пропорція (*).

З а д а ч а (37). Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника?

Р о з в' я з а н н я. При паралельному проектуванні зберігається відношення відрізків прямої. Тому середина сторони трикутника проектується в середину проекції цієї сторони. Звідси випливає, що проекції медіан трикутника будуть медіанами його проекції.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

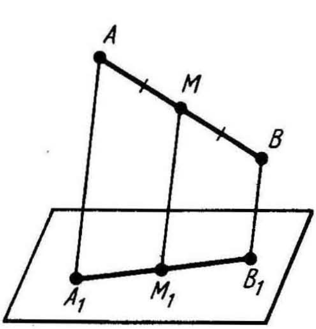
1. Які прямі в просторі називаються паралельними?
2. Які прямі називаються мимобіжними?
3. Доведіть, що через точку поза даною прямою можна провести пряму, паралельну цій прямій, і до того ж тільки одну.
4. Доведіть ознаку паралельності прямих.
5. Що означає: пряма і площина паралельні?

6. Доведіть ознаку паралельності прямої і площини.
7. Які площини називаються паралельними?
8. Доведіть ознаку паралельності площин.
9. Доведіть, що через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.
10. Доведіть, що коли дві паралельні площини перетинаються третьою, то прямі перетину паралельні.
11. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні.
12. Перелічіть властивості паралельного проектування.

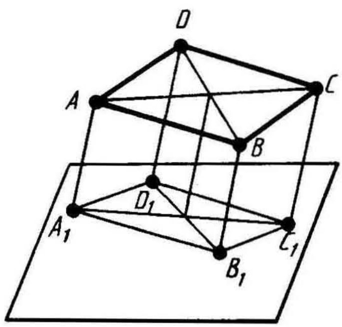
ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що коли прямі AB і CD мимобіжні, то прямі AC і BD теж мимобіжні.
2. Чи можна через точку C, яка не належить мимобіжним прямим a і b, провести дві різні прямі, кожна з яких перетинає прямі a і b? Відповідь поясніть.
3. Доведіть, що усі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.
4. Прямі a і b перетинаються. Доведіть, що усі прямі, які паралельні прямій b і перетинають пряму a, лежать в одній площині.
5. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину (мал. 30) і коли: 1) $AA_1=5$ м, $BB_1=7$ м; 2) $AA_1=3{,}6$ дм, $BB_1=4{,}8$ дм; 3) $AA_1=8{,}3$ см, $BB_1=4{,}1$ см; 4) $AA_1=a$, $BB_1=b$.

6* Розв'яжіть попередню задачу при умові, що відрізок AB перетинає площину.



Мал. 30



Мал. 31

7. Через кінець A відрізка AB проведено площину. Через кінець B і точку C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину в точках B_1 і C_1. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо: 1) $CC_1=15$ см, $AC:BC=2:3$; 2) $CC_1=8{,}1$ см, $AB:AC=11:9$; 3) $AB=6$ см, $AC:CC_1=2:5$; 4) $AC=a$, $BC=b$, $CC_1=c$.

8*. Дано паралелограм $ABCD$ і площину, яка не перетинає його. Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1 (мал. 31). Знайдіть довжину відрізка DD_1, якщо: 1) $AA_1=2$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=8$ м; 2) $AA_1=4$ м, $BB_1=3$ м, $CC_1=1$ м; 3) $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$.

9. Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c, паралельну прямим a і b?

10. Точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків AB і BC, паралельна прямій, яка проходить через середини відрізків AD і CD.

11. Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма (вершини просторового чотирикутника не лежать в одній площині).

12*. Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

13. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC — в точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо: 1) $AB=15$ см, $AA_1:AC=2:3$; 2) $AB=8$ см, $AA_1:A_1C=5:3$; 3) $B_1C=10$ см, $AB:BC=4:5$; 4) $AA_1=a$, $AB=b$, $A_1C=c$.

14. Через дану точку проведіть пряму, паралельну кожній з двох даних площин, які перетинаються.

15. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

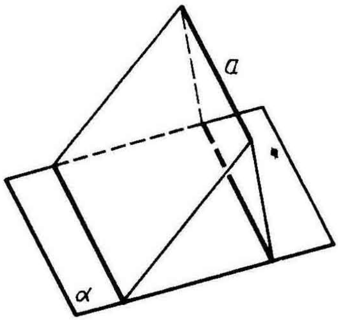
16. Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій.

17. Доведіть, що коли дві площини, які перетинаються по прямій a, перетинають площину α по паралельних прямих, то пряма a паралельна площині α (мал. 32).

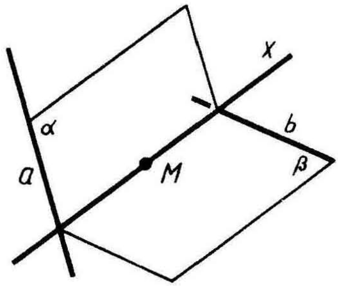
18. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

19. Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

20. Через дану точку простору проведіть пряму, яка перетинає кожну з двох мимобіжних прямих (мал. 33). Чи завжди це можливо?



Мал. 32



Мал. 33

21.* Доведіть, що геометричне місце середин відрізків з кінцями на двох мимобіжних прямих є площина, паралельна цим прямим (мал. 34).

22. Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що будь-яка площина, паралельна прямим AB і CD, перетинає прямі AC, AD, BD і BC у вершинах паралелограма (мал. 35).

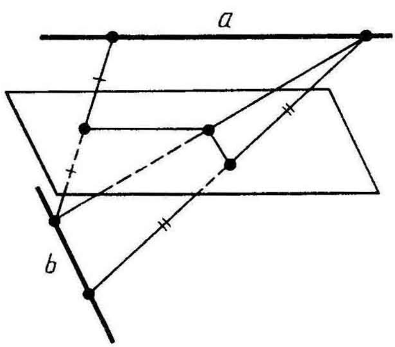
23. Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатись?

24. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

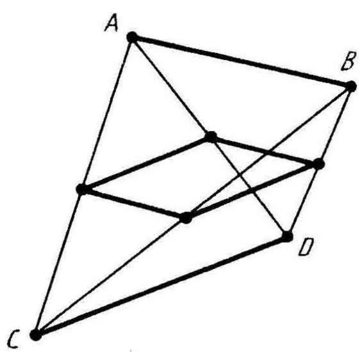
25. Доведіть, що усі прямі, які проходять через дану точку паралельно даній площині, лежать в одній площині.

26. Через дану точку проведіть площину, паралельну кожній з двох прямих, які перетинаються. Чи завжди це можливо?

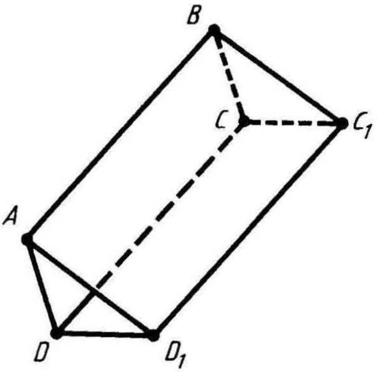
27. Паралелограми $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать в різних площинах. Доведіть, що чотирикутник CDD_1C_1 також паралелограм (мал. 36).



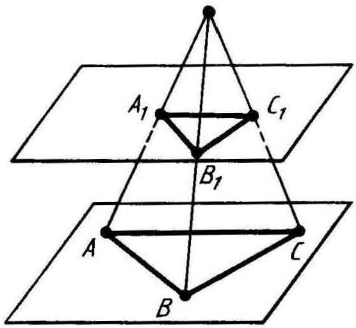
Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36



Мал. 37

28. Через вершини паралелограма $ABCD$, що лежить в одній з двох паралельних площин, проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ також паралелограм.

29. Через вершини трикутника ABC, що лежить в одній з двох паралельних площин, проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1, B_1, C_1. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

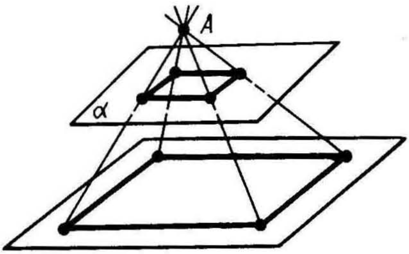
30. Три прямі, які проходять через одну точку, перетинають дану площину в точках A, B, C, а паралельну їй площину в точках A_1, B_1, C_1. Доведіть подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 37).

31. Доведіть, що коли чотири прямі, які проходять через точку A, перетинають площину α у вершинах паралелограма, то вони перетинають будь-яку площину, яка паралельна α і не проходить через точку A, теж у вершинах паралелограма (мал. 38).

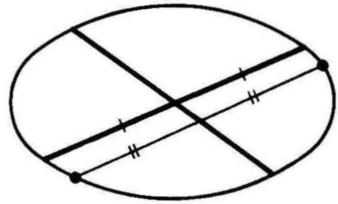
32. Дано дві паралельні площини. Через точки A і B однієї з площин проведено паралельні прямі, які перетинають другу площину в точках A_1 і B_1. Чому дорівнює відрізок A_1B_1, якщо $AB=a$?

33*. Дано дві паралельні площини α_1, α_2 і точка A, яка не лежить в жодній з цих площин. Через точку A проведено довільну пряму. Нехай X_1 і X_2 — точки перетину її з площинами α_1 і α_2. Доведіть, що відношення довжин відрізків $AX_1:AX_2$ не залежить від узятої прямої.

34*. Точка A лежить поза площиною α, X — довільна точка площини α, X' — точка відрізка AX, яка ділить його у відношенні $m:n$. Доведіть, що геометричне місце точок X' є площина, паралельна площині α.



Мал. 38



Мал. 39

35* Дано три паралельні площини: α_1, α_2, α_3. Нехай X_1, X_2, X_3 — точки перетину даних площин з довільною прямою. Доведіть, що відношення довжин відрізків $X_1X_2 : X_2X_3$ не залежить від прямої, тобто однакове для будь-яких двох прямих.

36. Дано чотири паралельні прямі. Доведіть, що коли яка-небудь площина перетинає ці прямі у вершинах паралелограма, то будь-яка площина, не паралельна даним прямим, перетинає їх у вершинах деякого паралелограма.

37. Дано паралельну проекцію трикутника. Як побудувати проекції медіан цього трикутника?

38. Дано паралельну проекцію трикутника. Що є проекцією середньої лінії трикутника?

39. Чи може при паралельному проектуванні паралелограма вийти трапеція? Відповідь поясніть.

40. Чи може проекція паралелограма при паралельному проектуванні бути квадратом?

41. Доведіть, що паралельна проекція центрально-симетричної фігури теж є центрально-симетричною фігурою.

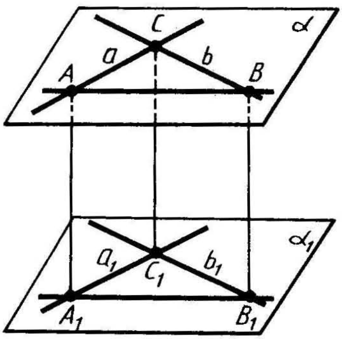
42* Дано паралельну проекцію кола і його діаметра (мал. 39). Як побудувати проекцію перпендикулярного діаметра?

§ 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

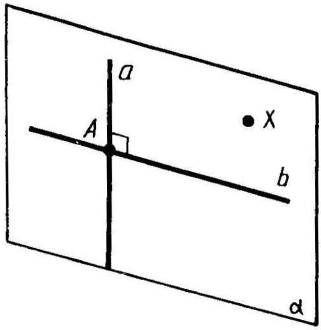
14. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Як і на площині, дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Теорема 3.1. ***Якщо дві прямі, які перетинаються, паралельні відповідно двом перпендикулярним прямим, то вони теж перпендикулярні.***



Мал. 40



Мал. 41

Доведення. Нехай a і b — перпендикулярні прямі, a_1 і b_1 — паралельні їм прямі, які перетинаються. Доведемо, що прямі a_1 і b_1 перпендикулярні.

Якщо прямі a, b, a_1, b_1 лежать в одній площині, то вони мають зазначену в теоремі властивість, що відомо з планіметрії.

Припустимо тепер, що наші прямі не лежать в одній площині. Тоді прямі a і b лежать у деякій площині α, а прямі a_1 і b_1 — у якійсь площині α_1 (мал. 40). За теоремою 2.4 площини α і α_1 паралельні. Нехай C — точка перетину прямих a і b, а C_1 — точка перетину прямих a_1 і b_1.

Проведемо в площині паралельних прямих a і a_1 пряму, паралельну прямій CC_1. Вона перетне прямі a і a_1 в точках A і A_1. У площині прямих b і b_1 проведемо пряму, паралельну прямій CC_1, і позначимо через B і B_1 точки її перетину з прямими b і b_1.

Чотирикутники CAA_1C_1 і CBB_1C_1 — паралелограми, оскільки у них протилежні сторони паралельні. Чотирикутник ABB_1A_1 — теж паралелограм. У нього сторони AA_1, BB_1 паралельні, тому що кожна з них паралельна прямій CC_1. Таким чином, чотирикутник лежить у площині, яка проходить через паралельні прямі AA_1 і BB_1. А вона перетинає паралельні площини α і α_1 по паралельних прямих AB і A_1B_1.

Оскільки в паралелограмі протилежні сторони рівні, то $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. За третьою ознакою рівності трикутників трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. Отже, кут $A_1C_1B_1$, який дорівнює куту ACB, прямий, тобто прямі a_1 і b_1 перпендикулярні. Теорему доведено.

Задача (1). Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можна провести перпендикулярну до неї пряму.

Розв'язання. Нехай a — дана пряма й A — точка на ній (мал. 41). Візьмемо поза прямою a яку-небудь точку X і проведемо через цю точку і пряму a площину α (теорема 1.1). У площині α через точку A можна провести пряму b, перпендикулярну до прямої a.

15. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

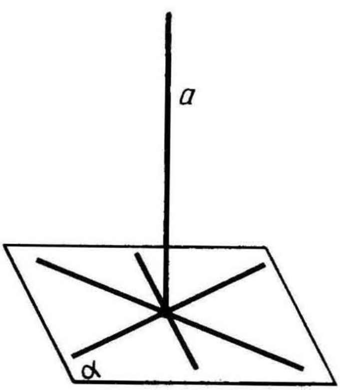
Пряма, яка перетинає площину, називається *перпендикулярною* до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину (мал. 42).

Теорема 3.2. ***Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, які лежать у площині і перетинаються, то вона перпендикулярна до даної площини.***

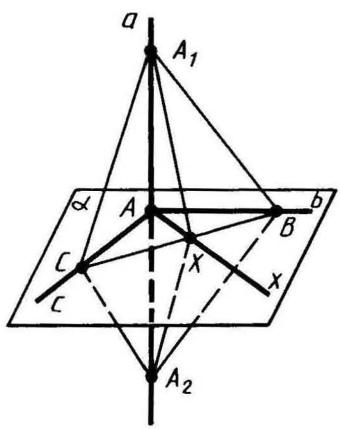
Доведення. Нехай a — пряма, перпендикулярна до прямих b і c у площині α.

Тоді пряма a проходить через точку A перетину прямих b і c (мал. 43). Доведемо, що пряма a перпендикулярна до площини α.

Проведемо довільну пряму x через точку A у площині α і покажемо, що вона перпендикулярна до прямої a. Проведемо у площині α довільну пряму, яка не проходить через точку A і перетинає прямі b, c і x. Нехай точками перетину будуть B, C і X. Відкладемо на прямій a від точки A в різні боки рівні відрізки: AA_1 і AA_2. Трикутник A_1CA_2 рівнобедрений, оскільки відрізок AC є висотою за умовою теореми і медіаною — за



Мал. 42



Мал. 43

побудовою ($AA_1 = AA_2$). З тієї ж причини трикутник A_1BA_2 теж рівнобедрений. Отже, трикутники A_1BC і A_2BC рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

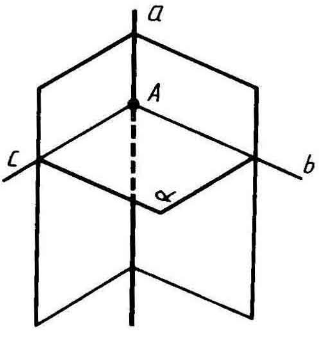
З рівності трикутників A_1BC і A_2BC випливає рівність кутів A_1BX, A_2BX і, отже, рівність трикутників A_1BX і A_2BX за першою ознакою рівності трикутників. З рівності сторін A_1X і A_2X цих трикутників робимо висновок, що трикутник A_1XA_2 рівнобедрений. Тому його медіана XA є також висотою. А це означає, що пряма x перпендикулярна до a. За означенням пряма a перпендикулярна до площини α. Теорему доведено.

16. ПОБУДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

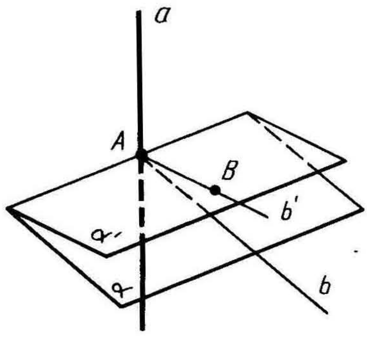
Задача (9). Доведіть, що через дану точку прямої можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї площину.

Розв'язання. Нехай a — дана пряма і A — точка на ній (мал. 44). Проведемо через неї дві площини, а в них — через точку A прямі b і c, перпендикулярні до прямої a. Площина α, яка проходить через ці прямі, перпендикулярна до прямої a за теоремою 3.2.

Доведемо, що ця площина єдина. Припустимо, що крім площини α існує інша площина α', яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a (мал. 45). Нехай B — точка площини α', яка не лежить у площині α. Проведемо через точку B і пряму a площину. Вона перетне площини α і α' по різних прямих b і b', перпендикулярних до прямої a. А це, як ми знаємо, неможливо, оскільки на площині через дану точку прямої проходить тільки одна перпендикулярна до неї пряма. Отже, площина, яка



Мал. 44

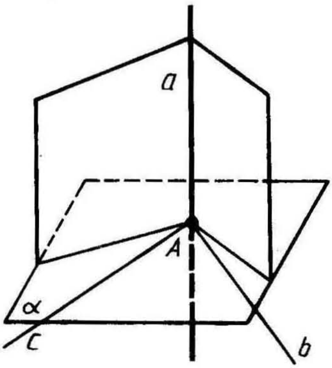


Мал. 45

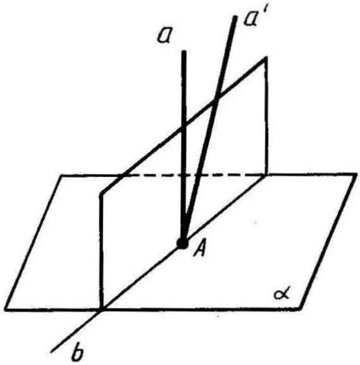
проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a,— єдина.

Задача (11). Доведіть, що через дану точку площини можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї пряму.

Розв'язання. Нехай α — дана площина і A — точка на ній (мал. 46). Проведемо у площині α через точку A дві прямі b і c. Проведемо через точку A перпендикулярні до них площини. Вони перетнуться по деякій прямій a, перпендикулярній до прямих b і c. Отже, пряма a перпендикулярна до площини α.



Мал. 46



Мал. 47

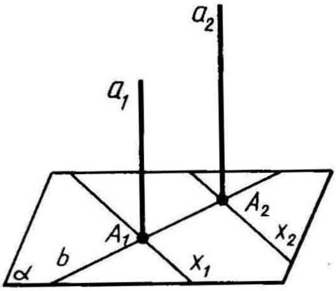
Доведемо, що ця пряма єдина. Припустимо, що крім прямої a існує інша пряма a', яка проходить через точку A і перпендикулярна до площини α (мал. 47). Проведемо через прямі a і a' площину. Вона перетне площину α по деякій прямій b, перпендикулярній до прямих a і a'. А це неможливо. Отже, пряма, яка проходить через дану точку площини і перпендикулярна до цієї площини, єдина.

17. ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИХ МІЖ СОБОЮ

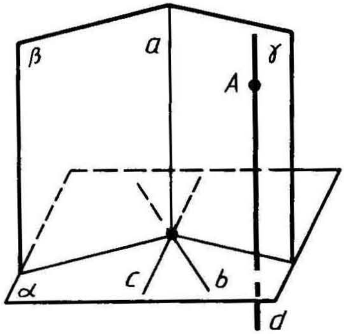
Теорема 3.3. ***Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.***

Доведення. Нехай a_1 і a_2 — дві паралельні прямі і α — площина, перпендикулярна до прямої a_1 (мал. 48). Доведемо, що ця площина перпендикулярна й до прямої a_2.

Проведемо через точку A_2 перетину прямої a_2 з площиною α довільну пряму x_2 у площині α. Проведемо у площині α через



Мал. 48



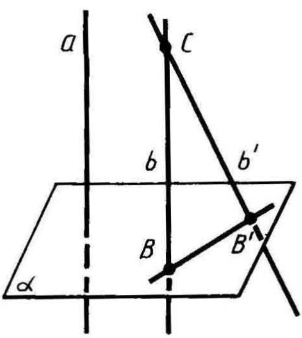
Мал. 49

точку A_1 перетину прямої a_1 з α пряму x_1, паралельну прямій x_2. Оскільки пряма a_1 перпендикулярна до площини α, то прямі a_1 і x_1 перпендикулярні. А за теоремою 3.1 паралельні до них прямі a_2 і x_2, що перетинаються, теж перпендикулярні. Таким чином, пряма a_2 перпендикулярна до будь-якої прямої x_2 у площині α. А це означає, що пряма a_2 перпендикулярна до площини α. Теорему доведено.

Задача (12). Доведіть, що через будь-яку точку A можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини α.

Розв'язання. Проведемо у площині α дві прямі b і c, що перетинаються (мал. 49). Через точку їх перетину проведемо площини β і γ, перпендикулярні до прямих b і c відповідно. Перетином їх буде пряма a. Пряма a перпендикулярна до прямих b і c, отже, і до площини α. Проведемо тепер через точку A пряму d, паралельну a. За теоремою 3.3 вона перпендикулярна до площини α.

Теорема 3.4. ***Дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні.***



Мал. 50

Доведення. Нехай a і b — дві прямі, перпендикулярні до площини α (мал. 50). Припустимо, що прямі a і b не паралельні. Виберемо на прямій b точку C, що не лежить на площині α. Проведемо через точку C пряму b', паралельну прямій a. Пряма b' перпендикулярна до площини α (теорема 3.3). Нехай B і B' — точки перетину прямих b і b' з площиною α. Тоді пряма BB' перпендикулярна до прямих b і b', які перетинаються. А це неможливо. Ми прийшли до суперечності. Теорему доведено.

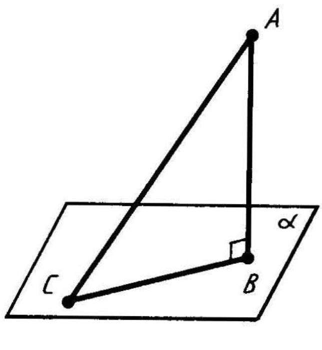
18. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Нехай дано площину і точку, яка не лежить на ній.

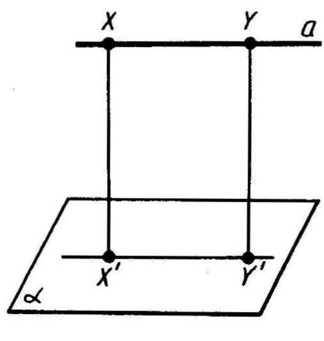
Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кінець цього відрізка, який лежить у площині, називається *основою перпендикуляра. Відстанню* від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець відрізка, що лежить у площині, називається *основою похилої.* Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається *проекцією похилої.*

На малюнку 51 з точки A проведено до площини α перпендикуляр AB і похилу AC. Точка B — основа перпендикуляра, точка C — основа похилої, BC — проекція похилої AC на площину α.



Мал. 51



Мал. 52

З а д а ч а (26). Доведіть, що коли пряма паралельна площині, то всі її точки лежать на однаковій відстані від площини.

Р о з в' я з а н н я. Нехай a — дана пряма і α — дана площина (мал. 52). Візьмемо на прямій a дві довільні точки X і Y. Їх відстані до площини α — це довжини перпендикулярів XX' і YY', опущених на цю площину. За теоремою 3.4 прямі XX' і YY' паралельні, отже, лежать в одній площині. Ця площина перетинає площину α по прямій $X'Y'$. Пряма a паралельна прямій $X'Y'$, тому що не перетинає площину α, якій вона належить. Отже, у чотирикутнику $XX'Y'Y$ протилежні сторони паралельні. Тому він паралелограм, а це означає, що $XX' = YY'$.

Відстанню від прямої до паралельної їй площини називається відстань від будь-якої точки цієї прямої до площини.

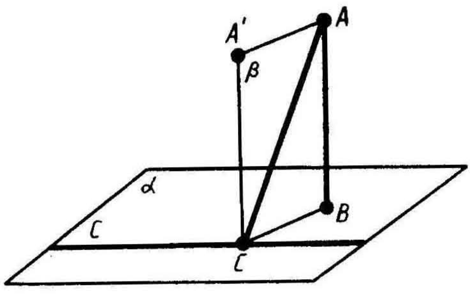
Так само, як і під час розв'язування задачі 26, доводять, що відстані від будь-яких двох точок площини до паралельної площини рівні. У зв'язку з цим *відстанню* між паралельними площинами називається відстань від будь-якої точки однієї площини до другої площини.

19. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

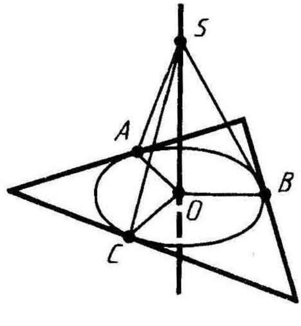
Теорема 3.5. ***Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.***

Доведення. Нехай AB — перпендикуляр до площини α, AC — похила і c — пряма у площині α, яка проходить через основу C похилої (мал. 53). Проведемо пряму CA', паралельну прямій AB. Вона перпендикулярна до площини α. Проведемо через прямі AB і $A'C$ площину β. Пряма c перпендикулярна до прямої CA'. Якщо вона перпендикулярна до прямої CB, то вона перпендикулярна і до площини β, а отже, і до прямої AC.

Аналогічно, якщо пряма c перпендикулярна до похилої CA, то вона, як перпендикуляр і до прямої CA', перпендикулярна до площини β, а отже, і до проекції похилої BC. Теорему доведено.



Мал. 53



Мал. 54

З а д а ч а (45). Через центр вписаного у трикутник кола проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від сторін трикутника.

Р о з в' я з а н н я. Нехай A, B, C — точки дотику сторін трикутника до кола, O — центр кола і S — точка на перпендикулярі (мал. 54). Оскільки радіус OA перпендикулярний до сторони трикутника, то за теоремою про три перпендикуляри відрізок SA є перпендикуляр до цієї сторони, а його довжина — відстань від точки S до сторони трикутника. За теоремою Піфагора $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, де r — радіус вписаного кола. Аналогічно знаходимо: $SB=\sqrt{r^2+OS^2}$, $SC=\sqrt{r^2+OS^2}$, тобто всі відстані від точки S до сторін трикутника рівні.

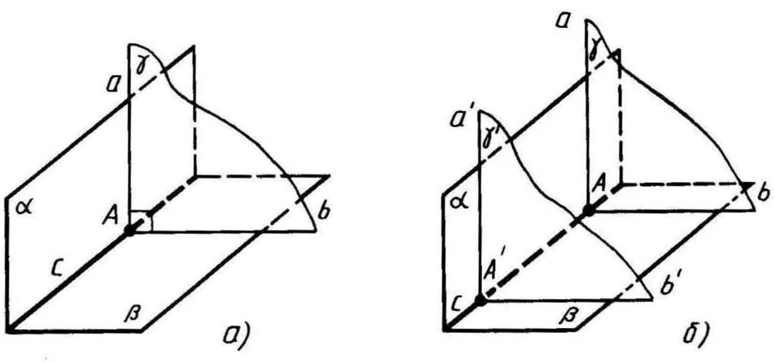
20. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПЛОЩИН

Дві площини, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

На малюнку 55, a ви бачите дві перпендикулярні площини α і β, що перетинаються по прямій c. Площина γ, перпендикулярна до прямої c, перетинає площини α і β по перпендикулярних прямих a і b.

Будь-яка площина, перпендикулярна до лінії перетину перпендикулярних площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

Справді, якщо взяти іншу площину γ', перпендикулярну до прямої c, то вона перетне площину α по прямій a', перпендику-



Мал. 55

лярній до c, а значить, паралельній прямій a, а площину β — по прямій b', перпендикулярній до c, отже, паралельній прямій b (мал. 55, *б*). За теоремою 3.1 з перпендикулярності прямих a і b випливає перпендикулярність прямих a' і b', що й треба було довести.

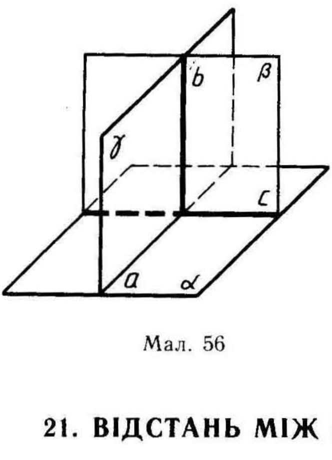
Теорема 3.6. ***Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.***

Доведення. Нехай α — площина, b — пряма, перпендикулярна до цієї площини, β — площина, яка проходить через пряму b, і c — пряма, по якій перетинаються площини α і β (мал. 56). Доведемо, що площини α і β перпендикулярні.

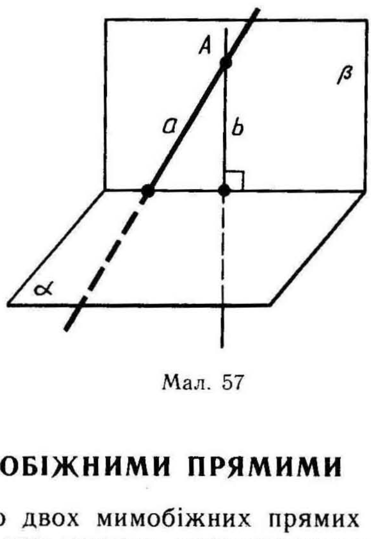
Проведемо у площині α через точку перетину прямої b з площиною α пряму a, перпендикулярну до прямої c. Проведемо через прямі a і b площину γ. Вона перпендикулярна до прямої c, оскільки пряма c перпендикулярна до прямих a і b. Оскільки прямі a і b перпендикулярні, то площини α і β теж перпендикулярні. Теорему доведено.

Задача (54). Дано пряму a і площину α. Проведіть через пряму a площину, перпендикулярну до площини α.

Розв'язання. Через довільну точку прямої a проводимо пряму b (мал. 57), перпендикулярну до площини α (задача 12). Через прямі a і b проводимо площину β. Площина β перпендикулярна до площини α за теоремою 3.6.



Мал. 56

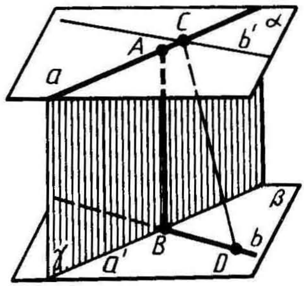


Мал. 57

21. ВІДСТАНЬ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Спільним перпендикуляром до двох мимобіжних прямих називається відрізок з кінцями на цих прямих, перпендикулярний до кожної з них.

Доведемо, що ***дві мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один. Він є спільним перпендикуляром до паралельних площин, які проходять через ці прямі.***



Мал. 58

Справді, нехай a і b — дані мимобіжні прямі (мал. 58). Проведемо через них паралельні площини α і β. Прямі, які перетинають пряму a і перпендикулярні до площини α, лежать в одній площині (γ). Ця площина перетинає площину β по прямій a', паралельній a. Нехай B — точка перетину прямих a' і b. Тоді пряма AB, перпендикулярна до площини α, перпендикулярна і до площини β, оскільки β паралельна α. Відрізок AB — спільний перпендикуляр до площин α і β, а отже, і до прямих a і b.

Доведемо, що цей спільний перпендикуляр єдиний. Припустимо, що прямі a і b мають інший спільний перпендикуляр CD. Проведемо через точку C пряму b', паралельну b. Пряма CD перпендикулярна до прямої b, а отже, і до b'. Оскільки вона перпендикулярна до прямої a, то вона перпендикулярна до площини α, тобто паралельна прямій AB. Виходить, що через прямі AB і CD, як через паралельні, можна провести площину. У цій площині лежатимуть наші мимобіжні прямі AC і BD, а це неможливо, що й треба було довести.

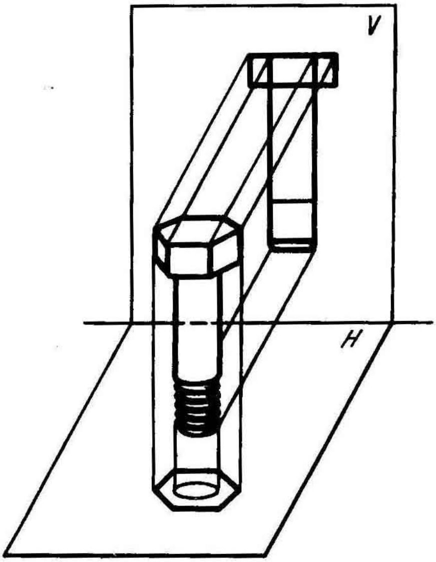
Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їх спільного перпендикуляра. Вона дорівнює відстані між паралельними площинами, які проходять через ці прямі.

22. ЗАСТОСУВАННЯ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ У ТЕХНІЧНОМУ КРЕСЛЕННІ

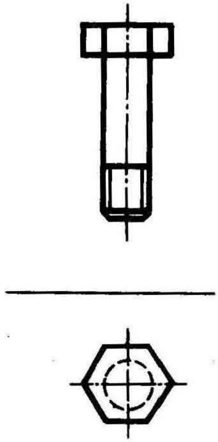
У кресленні застосовується ортогональне проектування, тобто паралельне проектування прямими, які перпендикулярні до площини проекції. Креслення деталей машин дістаємо ортогональним проектуванням на одну, дві або три взаємно перпендикулярні площини. Ці площини називаються площинами проекцій.

На малюнку 59 показано проектування болта на дві площини: на горизонтальну H і вертикальну V. Креслення болта у двох проекціях показано на малюнку 60.

Виготовляючи креслення деталей машин, використовують



Мал. 59



Мал. 60

різні умовності, передбачені стандартом. Зокрема, різьба умовно зображується суцільною тонкою лінією, а центрові і осьові — штрихпунктирними лініями. Ці умовності зображень застосовано на кресленні болта (мал. 60).

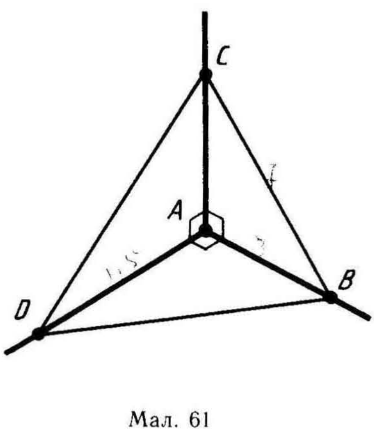
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які прямі у просторі називаються перпендикулярними?
2. Доведіть, що прямі, які перетинаються і відповідно паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні.
3. Дайте означення перпендикулярності прямої і площини.
4. Доведіть ознаку перпендикулярності прямої і площини.
5. Доведіть, що коли площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
6. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні.
7. Що таке перпендикуляр, опущений з даної точки на площину?
8. Що називається відстанню від точки до площини?
9. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
10. Доведіть теорему про три перпендикуляри.
11. Які площини називаються перпендикулярними?

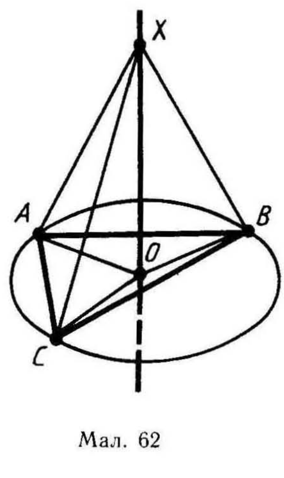
12. Доведіть ознаку перпендикулярності площин.
13. Що таке спільний перпендикуляр мимобіжних прямих?
14. Доведіть, що мимобіжні прямі мають спільний перпендикуляр і до того ж тільки один, причому він є спільним перпендикуляром до паралельних площин, які проходять через ці прямі.
15. Що називається відстанню між мимобіжними прямими?

ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можна провести перпендикулярну до неї пряму.
2. Доведіть, що через будь-яку точку прямої у просторі можна провести дві різні перпендикулярні до неї прямі.
3. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (мал. 61). Знайдіть відрізок CD, якщо: 1) $AB=3$ см, $BC=7$ см, $AD=$ $=1{,}5$ см; 2) $BD=9$ см, $BC=16$ см, $AD=5$ см; 3) $AB=b$, $BC=a$, $AD=d$; 4) $BD=c$, $BC=a$, $AD=d$.
4* Сторони чотирикутника $ABCD$ і прямокутника $A_1B_1C_1D_1$ відповідно паралельні. Доведіть, що $ABCD$ — прямокутник.
5. Доведіть, що через точку, яка не належить даній площині, не можна провести більш ніж одну пряму, перпендикулярну до площини.
6. Через центр описаного навколо трикутника кола проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин трикутника (мал. 62).
7. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AK, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки K до решти вершин прямокутника дорівнюють 6 м, 7 м і 9 м. Знайдіть відрізок AK.



Мал. 61



Мал. 62

8. Через вершину гострого кута прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C проведено пряму AD, перпендикулярну до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до вершин B і C, якщо $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$.

9. Доведіть, що через дану точку прямої можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї площину.

10. Через точку A прямої a проведено перпендикулярні до неї площину β і пряму b. Доведіть, що пряма b лежить у площині β.

11. Доведіть, що через дану точку площини можна провести одну і тільки одну перпендикулярну до неї пряму.

12. Доведіть, що через будь-яку точку A можна провести пряму, перпендикулярну до даної площини α.

13. Через вершину квадрата $ABCD$ проведено пряму BM, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що: 1) пряма AD перпендикулярна до площини прямих AB і BM; 2) пряма CD перпендикулярна до площини прямих BC і BM.

14. Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її в точках C і D. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $AC=3$ м, $BD=2$ м, $CD=$ $=2{,}4$ м і відрізок AB не перетинає площину α.

15. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, які знаходяться на відстані 3,4 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 5,8 м, а другого 3,9 м. Знайдіть довжину поперечки.

16. Телефонний провід завдовжки 15 м протягнуто від телефонного стовпа, де він прикріплений на висоті 8 м від поверхні землі, до будинку, де його прикріпили на висоті 20 м. Знайдіть відстань між будинком і стовпом, вважаючи, що провід не провисає.

17. Точка A знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника.

18. З точки S поза площиною α проведено до неї три рівні похилі SA, SB, SC і перпендикуляр SO. Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.

19. Сторони рівностороннього трикутника дорівнюють 3 м. Знайдіть відстань від площини трикутника до точки, яка віддалена від кожної його вершини на 2 м.

20* У рівнобедреному трикутнику основа і висота дорівнюють 4 м. Дана точка знаходиться на відстані 6 м від площини трикутника і на однаковій відстані від його вершин. Знайдіть цю відстань.

21. Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b.

22. Знайдіть геометричне місце основ похилих даної довжини, проведених з даної точки до площини.

23. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см. Різниця проекцій цих похилих становить 9 см. Знайдіть проекції похилих.

24. З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо: 1) одна з них на 26 см більша від другої, а проекції похилих дорівнюють 12 см і 40 см; 2) похилі відносяться, як 1:2, а проекції похилих дорівнюють 1 см і 7 см.

25. З точки до площини проведено дві похилі, які дорівнюють 23 см і 33 см. Знайдіть відстань від цієї точки до площини, якщо проекції похилих відносяться, як 2:3.

26. Доведіть, що коли пряма паралельна площині, то всі її точки знаходяться на однаковій відстані від площини.

27. Через вершину прямого кута C прямокутного трикутника ABC проведено площину, паралельну до гіпотенузи, на відстані 1 м від неї. Проекції катетів на цю площину дорівнюють 3 м і 5 м. Знайдіть гіпотенузу.

28. Через одну сторону ромба проведено площину на відстані 4 м від протилежної сторони. Проекції діагоналей на цю площину дорівнюють 8 м і 2 м. Знайдіть проекції сторін.

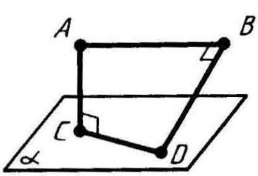
29. З кінців відрізка AB, паралельного площині, проведено перпендикуляр AC і похилу BD, перпендикулярну до відрізка AB (мал. 63). Чому дорівнює відстань CD, якщо $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$?

30. Доведіть, що відстані від усіх точок площини до паралельної площини однакові.

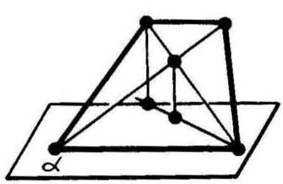
31. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює a. Відрізок довжиною b своїми кінцями упирається у ці площини. Знайдіть проекцію відрізка на кожну з площин.

32. Два відрізки довжинами a і b упираються кінцями у дві паралельні площини. Проекція першого відрізка (довжини a) на площину дорівнює c. Знайдіть проекцію другого відрізка.

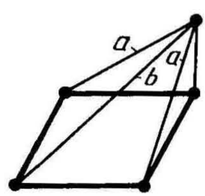
33. Кінці даного відрізка, який не перетинає площину, від-



Мал. 63



Мал. 64



Мал. 65

далені від неї на 0,3 м і 0,5 м. Як віддалена від площини точка, що ділить даний відрізок у відношенні 3:7?

34. Через середину відрізка проведено площину. Доведіть, що кінці відрізка знаходяться на однаковій відстані від цієї площини.

35. Через діагональ паралелограма проведено площину. Доведіть, що кінці другої діагоналі знаходяться на однаковій відстані від цієї площини.

36. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до площини, яка не перетинає цей відрізок, якщо відстані від точок A і B до площини дорівнюють: 1) 3,2 см і 5,3 см; 2) 7,4 см і 6,1 см; 3) a і b.

37*. Розв'яжіть попередню задачу, вважаючи, що відрізок AB перетинає площину.

38. Кінці відрізка довжиною 1 м віддалені від площини, яку він перетинає, на 0,5 м і 0,3 м. Знайдіть довжину проекції відрізка на площину.

39*. Через основу трапеції проведено площину, віддалену від другої основи на відстань a. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини, якщо основи трапеції відносяться, як $m:n$ (мал. 64).

40. Через сторону паралелограма проведено площину на відстані a від протилежної сторони. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей паралелограма до цієї площини.

41. З вершини квадрата проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин квадрата дорівнюють a і b ($a<b$). Знайдіть довжину перпендикуляра і сторону квадрата (мал. 65).

42. З вершини прямокутника проведено перпендикуляр до його площини. Відстані від кінця цього перпендикуляра до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a<c$, $b<c$). Знайдіть довжину перпендикуляра і сторони прямокутника.

43. З даної точки до площини проведено дві рівні похилі довжиною 2 м. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо похилі утворюють між собою кут 60°, а їх проекції перпендикулярні.

44. З точки, віддаленої від площини на 1 м, проведено дві рівні похилі. Знайдіть відстань між основами похилих, коли відомо, що похилі перпендикулярні й утворюють з перпендикуляром до площини кути, які дорівнюють 60°.

45. Через центр вписаного в трикутник кола проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від сторін трикутника.

46. До площини трикутника з центра вписаного у нього кола радіуса 0,7 м проведено перпендикуляр завдовжки 2,4 м. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

47. Відстань від даної точки до площини трикутника дорівнює 1,1 м, а до кожної з його сторін 6,1 м. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

48. З вершини рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до сторони BC, якщо $AD=13$ см, $BC=6$ см.

49. Через кінець A відрізка AB завдовжки b проведено площину, перпендикулярну до відрізка, і в цій площині проведено пряму. Знайдіть відстань від точки B до прямої, якщо відстань від точки A до прямої дорівнює a.

50. Відстані від точки A до всіх сторін квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо діагональ квадрата дорівнює d.

51*. Точка M, яка лежить поза площиною даного прямого кута, віддалена від вершини кута на відстань a, а від його сторін на відстань b. Знайдіть відстань від точки M до площини кута.

52*. Дано рівнобедрений трикутник з основою 6 м і бічною стороною 5 м. З центра вписаного в нього круга проведено перпендикуляр до площини трикутника завдовжки 2 м. Знайдіть відстань від кінця цього перпендикуляра до сторін трикутника.

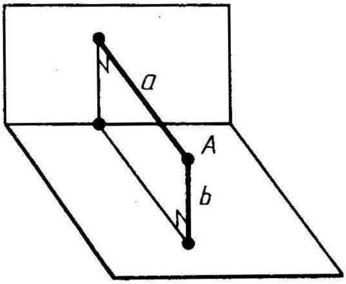
53. З вершини прямого кута C трикутника ABC проведено перпендикуляр CD до площини трикутника. Знайдіть відстань від точки D до гіпотенузи трикутника, якщо $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$.

54. Дано пряму a і площину α. Проведіть через пряму a площину, перпендикулярну до площини α.

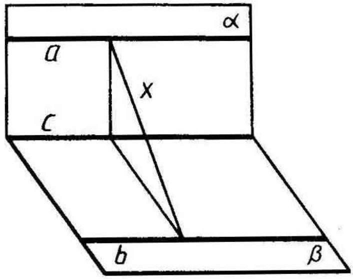
55. Дано пряму a і площину α. Доведіть, що всі прямі, які перпендикулярні до площини α і перетинають пряму a, лежать в одній площині, перпендикулярній до площини α.

56. З вершин A і B рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1, якщо $AB=2$ м, $CA_1=3$ м, $CB_1=7$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.

57. З вершин A і B гострих кутів прямокутного трикутника ABC проведено перпендикуляри AA_1 і BB_1 до площини трикутника. Знайдіть відстань від вершини C до середини відрізка A_1B_1, якщо $A_1C=4$ м, $A_1A=3$ м, $B_1C=6$ м, $B_1B=2$ м і відрізок A_1B_1 не перетинає площину трикутника.



Мал. 66



Мал. 67

58.* Доведіть, що коли пряма, яка лежить в одній з двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до їх лінії перетину, то вона перпендикулярна й до другої площини.

59. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AC і BD на пряму перетину площин. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо: 1) $AC=6$ м, $BD=7$ м, $CD=6$ м; 2) $AC=3$ м, $BD=4$ м, $CD=12$ м; 3) $AD=4$ м, $BC=7$ м, $CD=1$ м; 4) $AD=BC=5$ м, $CD=1$ м; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.

60. Точка знаходиться на відстанях a і b від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин (мал. 66).

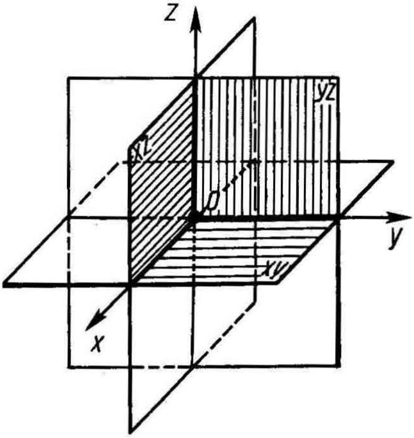
61. Площини α і β перпендикулярні. У площині α взято точку A, відстань від якої до прямої c (лінії перетину площин) дорівнює 0,5 м. У площині β проведено пряму b, яка паралельна прямій c і віддалена від неї на 1,2 м. Знайдіть відстань від точки A до прямої b.

62. Перпендикулярні площини α і β перетинаються по прямій c. У площині α проведено пряму $a \parallel c$, а у площині β — пряму $b \parallel c$. Знайдіть відстань між прямими a і b, якщо відстань між прямими a і c дорівнює 1,5 м, а між прямими b і c — 0,8 м (мал. 67).

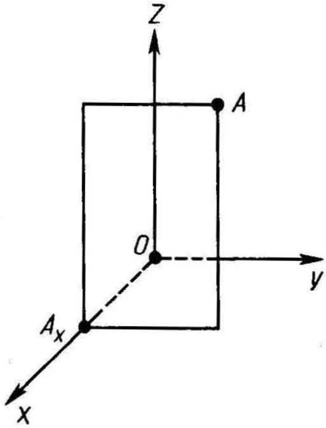
§ 4. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

23. ВВЕДЕННЯ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Візьмемо три взаємно перпендикулярні прямі x, y, z, які перетинаються в одній точці O (мал. 68). Проведемо через кожну пару цих прямих площину. Площина, яка проходить



Мал. 68



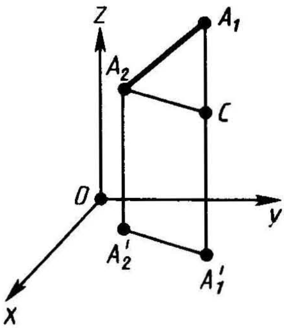
Мал. 69

через прямі x і y, називається площиною xy. Дві інші площини називаються відповідно xz і yz. Прямі x, y, z називаються *координатними осями* (або *осями координат*), точка їх перетину O — *початком координат*, а площини xy, yz, xz — *координатними площинами*. Точка O розбиває кожну з осей координат на дві півпрямі — півосі. Домовимося одну з них називати додатною, а другу — від'ємною.

Візьмемо тепер довільну точку A і проведемо через неї площину, паралельну площині yz (мал. 69). Вона перетинає вісь x у деякій точці A_x. *Координатою* x точки A називається число, яке дорівнює за абсолютною величиною довжині відрізка OA_x: додатне, якщо точка A_x лежить на додатній півосі x, і від'ємне, якщо вона лежить на від'ємній півосі. Якщо точка A_x збігається з точкою O, то вважаємо, що $x=0$. Аналогічно означаємо координати y і z точки A. Координати точки записуватимемо в дужках поряд з буквеним позначенням точки: $A(x; y; z)$. Інколи позначатимемо точку просто її координатами $(x; y; z)$.

З а д а ч а (2). Дано точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$. Які з цих точок лежать: 1) у площині xy; 2) на осі z; 3) у площині yz?

Р о з в' я з а н н я. Точки площини xy мають координату z, яка дорівнює нулю. Тому тільки точка D лежить у площині xy. Точки площини yz мають координату x, яка дорівнює нулю. Відповідно, точки B і C лежать у площині yz. Точки на осі z мають дві координати (x і y), які дорівнюють нулю. Тому тільки точка C лежить на осі z.



Мал. 70

24. ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ

Виразимо відстань між двома точками $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ через координати цих точок.

Розглянемо спочатку випадок, коли пряма A_1A_2 не паралельна осі z (мал. 70). Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, паралельні осі z. Вони перетнуть площину xy у точках A_1' і A_2'. Ці точки мають ті самі координати x, y, що й точки A_1 і A_2, а координата z їх однакова і дорівнює нулю. Проведемо тепер площину через точку A_2, паралельну площині xy. Вона перетне пряму A_1A_1' у деякій точці C. За теоремою Піфагора

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

Відрізок CA_2 дорівнює відрізку $A_1'A_2'$, а

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Довжина відрізка A_1C дорівнює $|z_1 - z_2|$. Тому

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Якщо відрізок A_1A_2 паралельний осі z, то $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Такий самий результат дає і знайдена формула, оскільки в цьому випадку $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Таким чином, ***відстань між точками A_1 і A_2 обчислюється за формулою:***

$$\boldsymbol{A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}.$$

Задача (5). Знайдіть у площині xy точку $D(x;\ y;\ 0)$, рівновіддалену від трьох точок: $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$.

Розв'язання. Маємо:

$$AD^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2,$$
$$BD^2 = (x+1)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2,$$
$$CD^2 = (x-0)^2 + (y+1)^2 + (0-0)^2.$$

Прирівнявши перші дві відстані до третьої, дістанемо два рівняння для визначення x і y:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Звідси $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Шукана точка $D\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right)$.

25. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

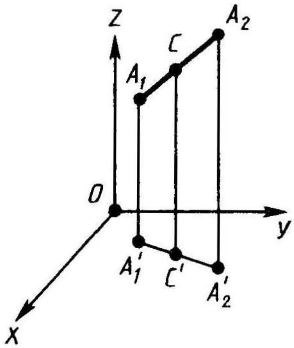
Нехай $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ — дві довільні точки. Виразимо координати x, y, z середини C відрізка A_1A_2 через координати його кінців A_1 і A_2 (мал. 71). Для цього проведемо через точки A_1, A_2 і C прямі, паралельні осі z. Вони перетнуть площину xy

у точках $A_1'(x_1;\ y_1;\ 0)$, $A_2'(x_2;\ y_2;\ 0)$ і $C'(x;\ y;\ 0)$. За теоремою Фалеса точка C' є серединою відрізка $A_1'A_2'$. А ми знаємо, що на площині xy координати середини відрізка виражаються через координати його кінців за формулами

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Щоб знайти формулу для z, досить замість площини xy узяти площину xz або yz. При цьому для z дістанемо аналогічну формулу:

$$z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$



Мал. 71

З а д а ч а (9). Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ є паралелограмом.

Р о з в' я з а н н я. Ми знаємо, що чотирикутник, діагоналі якого перетинаються і в точці перетину діляться пополам, є паралелограмом. Скористаємося цим для розв'язування задачі. Координати середини відрізка AC:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\ y=\frac{3+1}{2}=2,\ z=\frac{2+4}{2}=3.$$

Координати середини відрізка BD:

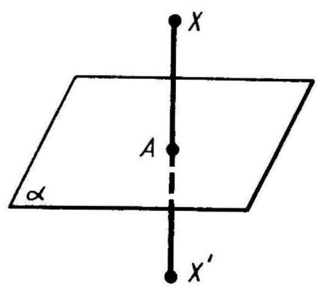
$$x=\frac{0+2}{2}=1,\ y=\frac{2+2}{2}=2,\ z=\frac{4+2}{2}=3.$$

Бачимо, що координати середини відрізків AC і BD однакові. Отже, ці відрізки перетинаються і в точці перетину діляться пополам. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

26. ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРІЇ У ПРОСТОРІ

Поняття перетворення для фігур у просторі означають так само, як і на площині. Як і на площині, означають перетворення симетрії відносно точки і прямої.

Крім симетрій відносно точки і прямої, у просторі розглядають перетворення симетрії відносно площини (мал. 72). Нехай α — довільна фіксована площина. З точки X фігури опускаємо перпендикуляр XA на площину α і на його продовженні за точку A відкладаємо відрізок AX',



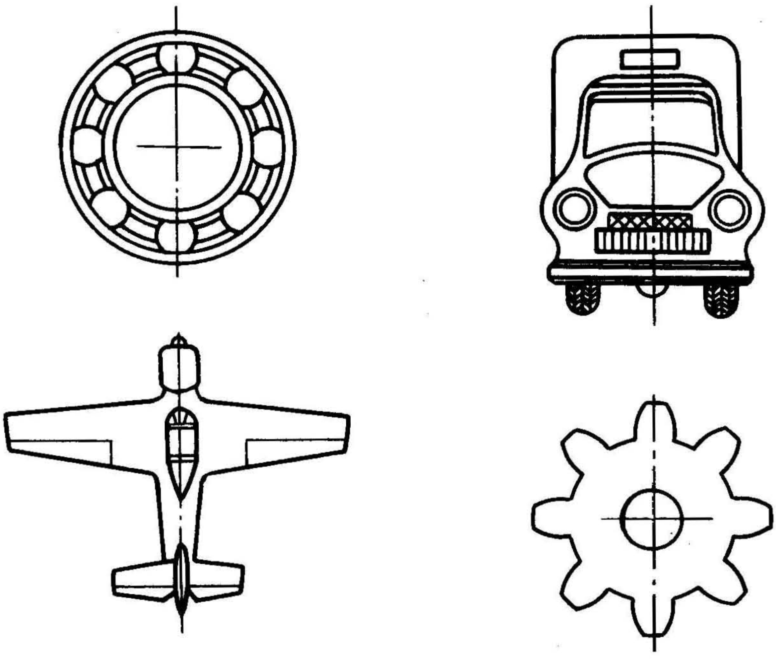
Мал. 72

що дорівнює XA. Точка X' називається *симетричною* точці X відносно площини α, а перетворення, яке переводить точку X у симетричну їй точку X', називається *перетворенням симетрії відносно площини* α.

Якщо точка X лежить у площині α, то вважають, що точка X переходить у себе. Якщо перетворення симетрії відносно площини α переводить фігуру в себе, то фігура називається *симетричною відносно площини* α, а площина α називається *площиною симетрії* цієї фігури.

З а д а ч а (17). Дано точки (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3). Знайдіть точки, симетричні даним відносно координатних площин.

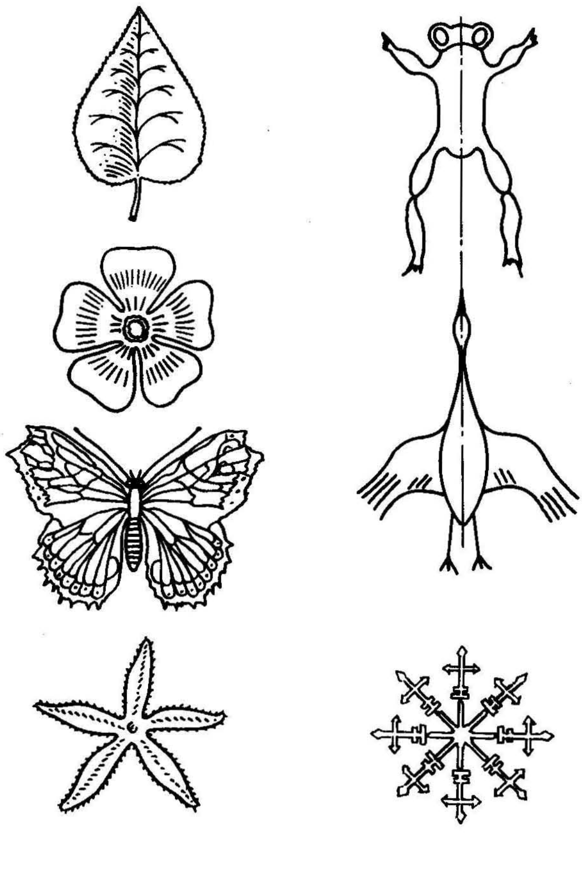
Р о з в' я з а н н я. Точка, симетрична точці (1; 2; 3) відносно площини xy, лежить на прямій, перпендикулярній до площини xy. Тому вона має ті самі координати x і y: $x=1$, $y=2$. Симетрична точка знаходиться на такій самій відстані від площини xy, але з другого боку від неї. Тому координата z у неї відрізняється лише знаком, тобто $z=-3$. Отже, точка, симетрична точці (1; 2; 3) відносно площини xy, буде (1; 2; −3). Для інших точок і решти координатних площин розв'язання аналогічне.



Мал. 73

27. СИМЕТРІЯ У ПРИРОДІ І НА ПРАКТИЦІ

Симетрія досить поширена у природі. Її можна спостерігати у формі листків і квітів рослин, у розміщенні різних органів тварин, у формі кристалічних тіл. Симетрія широко застосовується на практиці, в будівництві, в техніці (мал. 73—74).



Мал. 74

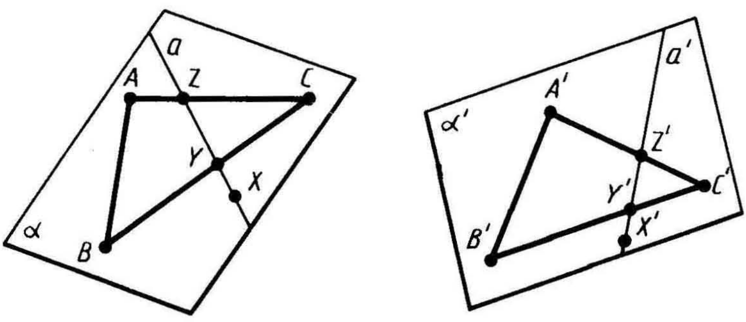
28. РУХ У ПРОСТОРІ

Рух у просторі означають так само, як і на площині. А саме: *рухом* називається перетворення, при якому зберігаються відстані між точками.

Дослівно так само, як і для руху на площині, доводять, що під час руху в просторі прямі переходять у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки і зберігаються кути між півпрямими.

Новою властивістю руху в просторі є те, що ***рух переводить площину у площину.***

Доведемо цю властивість. Нехай α — довільна площина (мал. 75). Позначимо на ній будь-які три точки A, B, C, що не лежать на одній прямій. Під час руху вони перейдуть у три точки A', B', C', які теж не лежать на одній прямій. Проведемо через них площину α'.



Мал. 75

Доведемо, що під час розглядуваного руху площина α переходить у площину α'.

Нехай X — довільна точка площини α. Проведемо через неї у площині α яку-небудь пряму a, яка перетинає трикутник ABC у двох точках Y і Z. Пряма a перейде під час руху у деяку пряму a'. Точки Y і Z прямої a перейдуть у точки Y' і Z', які належать трикутнику $A'B'C'$, а тому і площині α'.

Отже, пряма a' лежить у площині α'. Точка X під час руху переходить у точку X' прямої a', а тому і площини α'. Теорему доведено.

У просторі, так само як і на площині, дві фігури називаються *рівними*, якщо вони суміщаються рухом.

29. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ У ПРОСТОРІ

Паралельним перенесенням у просторі називається таке перетворення, при якому довільна точка $(x;\ y;\ z)$ фігури переходить у точку $(x+a;\ y+b;\ z+c)$, де числа a, b, c — одні й ті самі для всіх точок $(x;\ y;\ z)$. Паралельне перенесення у просторі задають формулами:

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c,$$

що виражають координати x', y', z' точки, в яку переходить точка $(x;\ y;\ z)$ при паралельному перенесенні. Так само, як і на площині, доводять такі властивості паралельного перенесення:

1. Паралельне перенесення є рух.

2. У результаті паралельного перенесення точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, що збігаються) на одну і ту саму відстань.

3. У результаті паралельного перенесення кожна пряма переходить у паралельну їй пряму (або в себе).

4. Які б не були точки A і A', існує єдине паралельне перенесення, в результаті якого точка A переходить у точку A'.

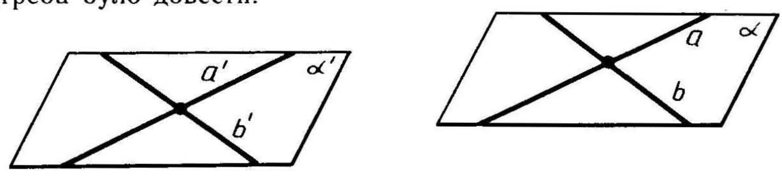
З а д а ч а (23). Знайдіть значення a, b, c з формул паралельного перенесення $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, якщо в результаті цього паралельного перенесення точка $A\,(1;\ 0;\ 2)$ переходить у точку $A'(2;\ 1;\ 0)$.

Р о з в' я з а н н я. Підставивши у формули паралельного перенесення координати точок A і A', тобто $x=1$, $y=0$, $z=2$, $x'=2$, $y'=1$, $z'=0$, дістанемо рівняння, з яких визначимо a, b, c: $2=1+a$, $1=0+b$, $0=2+c$. Звідси $a=1$, $b=1$, $c=-2$.

Новою для паралельного перенесення у просторі є така властивість:

5. ***В результаті паралельного перенесення у просторі кожна площина переходить або в себе, або у паралельну їй площину.***

Справді, нехай α — довільна площина (мал. 76). Проведемо у цій площині дві прямі a і b, які перетинаються. В результаті паралельного перенесення прямі a і b переходять або в себе, або у паралельні прямі a' і b'. Площина α переходить у деяку площину α', яка проходить через прямі a' і b'. Якщо площина α' не збігається з α, то за теоремою 2.4 вона паралельна α, що й треба було довести.



Мал. 76

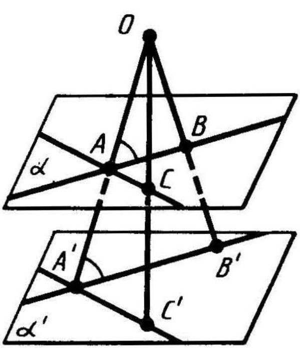
30. ПОДІБНІСТЬ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Перетворення подібності у просторі означають так само, як і на площині. А саме: перетворення фігури F називається *перетворенням подібності*, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну і ту саму кількість разів, тобто для двох довільних точок X і Y фігури F і точок X', Y', фігури F', в які вони переходять, $X'Y' = k \cdot XY$.

Як і на площині, перетворення подібності у просторі переводить прямі у прямі, півпрямі у півпрямі, відрізки у відрізки і зберігає кути між півпрямими. Такими ж міркуваннями, як у п. 28, доводять, що перетворення подібності переводить площини у площини. Так само як і на площині, дві фігури називаються *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Найпростішим перетворенням подібності у просторі є гомотетія. Як і на площині, *гомотетія* відносно центра O з коефіцієнтом гомотетії k — це перетворення, яке переводить довільну точку X у точку X' променя OX таку, що $OX' = k \cdot OX$.

Перетворення гомотетії у просторі переводить довільну площину, яка не проходить через центр гомотетії, у паралельну площину (або в себе, коли $k = 1$).



Мал. 77

Справді, нехай O — центр гомотетії і α — довільна площина, яка не проходить через точку O (мал. 77). Візьмемо довільну пряму AB у площині α. Перетворення гомотетії переводить точку A у точку A' на промені OA, а точку B — у точку B' на промені OB, причому $\frac{OA'}{OA} = k$, $\frac{OB'}{OB} = k$, де k — коефіцієнт гомотетії. Звідси випливає подібність трикутників AOB і $A'OB'$. З подібності трикутників маємо рівність відповідних кутів OAB і $OA'B'$, а отже, паралельність прямих AB і $A'B'$.

Візьмемо тепер іншу пряму AC у площині α. Вона в результаті гомотетії перейде у паралельну пряму $A'C'$. При розглядуваній гомотетії площина α перейде у площину α', яка проходить через прямі $A'B'$ і $A'C'$. Оскільки $A'B' \parallel AB$ і $A'C' \parallel AC$, то за теоремою 2.4 площини α і a' паралельні, що й треба було довести.

31. КУТ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Дві прямі, які перетинаються, утворюють суміжні і вертикальні кути. Вертикальні кути рівні, а суміжні кути доповнюють один одного до 180°. Кутова міра меншого з них називається *кутом між прямими*. Кут між перпендикулярними прямими дорівнює 90° за означенням. Кут між паралельними прямими вважаємо таким, що дорівнює нулю.

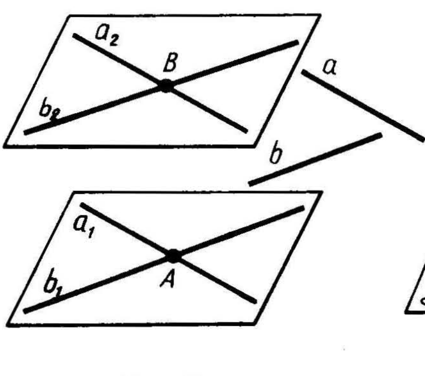
Кутом між мимобіжними прямими називається кут між прямими, які перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим. Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються. Доведемо це.

Нехай a_1 і b_1 — прямі, які перетинаються в точці A і паралельні даним мимобіжним прямим a і b (мал. 78). Нехай a_2 і b_2 — інші прямі, що паралельні даним і перетинаються в точці B. За теоремою 2.2 прямі a_1 і a_2 паралельні (або збігаються) і прямі b_1 і b_2 паралельні (або збігаються).

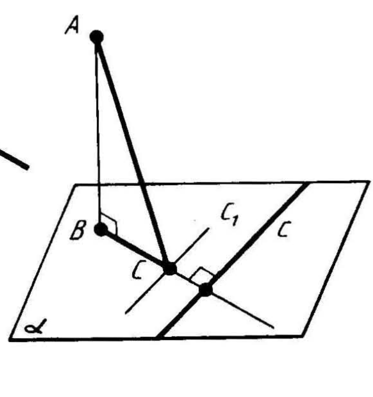
Застосуємо паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B. Оскільки при паралельному перенесенні кожна пряма переходить або в себе, або в паралельну пряму, то зазначене паралельне перенесення переводить пряму a_1 у пряму a_2, а пряму b_1 — у пряму b_2. Оскільки паралельне перенесення зберігає величину кута, то кут між прямими a_1 і b_1 дорівнює куту між прямими a_2 і b_2, що й треба було довести.

За даним раніше означенням перпендикулярними називаються прямі, які перетинаються під прямим кутом. Але інколи мимобіжні прямі теж називаються перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90°.

З а д а ч а (33). Доведіть, що будь-яка пряма на площині, перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, перпендикулярна і до похилої. І, навпаки, якщо пряма на



Мал. 78



Мал. 79

площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

Р о з в' я з а н н я. Нехай AB — перпендикуляр до площини α, AC — похила і c — пряма в площині α, перпендикулярна до BC (мал. 79). Проведемо через основу C похилої пряму $c_1 \parallel c$.

За теоремою про три перпендикуляри c_1 перпендикулярна до похилої AC. А через те, що кут між прямою c і похилою AC дорівнює куту між прямими AC і c_1, то пряма c теж перпендикулярна до похилої AC.

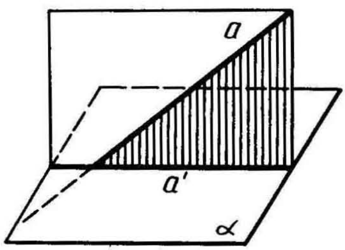
Навпаки: якщо пряма c перпендикулярна до похилої AC, то пряма c_1 теж перпендикулярна до неї, а тому, за теоремою про три перпендикуляри, і до її проекції BC. Оскільки $c \parallel c_1$, то $c \perp BC$.

32. КУТ МІЖ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ

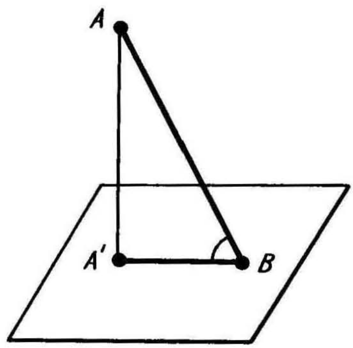
Дамо означення кута між прямою і площиною.

Нехай α — площина і a — пряма, яка її перетинає і не перпендикулярна до площини α (мал. 80). Основи перпендикулярів, опущених з точок прямої a на площину α, лежать на прямій a'. Ця пряма називається *проекцією прямої a* на площину α. *Кутом між прямою і площиною* називається кут між цією прямою і її проекцією на площину.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою і площиною — 0°. Оскільки пряма a, її проекція a' на площину α і перпендикуляр до площини α у точці її перетину з прямою a лежать в одній площині, то *кут між прямою і площиною доповнює до 90° кут між цією прямою і перпендикуляром до площини.*



Мал. 80



Мал. 81

Задача (35). Точка A віддалена від площини на відстань h. Знайдіть довжини похилих, проведених з цієї точки під такими кутами до площини: 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°.

Розв'язання. Опустимо перпендикуляр AA' на площину (мал. 81). Трикутник $AA'B$ — прямокутний з прямим кутом при вершині A'. Гострий кут цього трикутника протилежний катету AA', дорівнює 30° (відповідно 45°, 60°). Тому у першому випадку похила $AB=\frac{AA'}{\sin 30°}=2h$, у другому — $AB=h\sqrt{2}$, а у третьому — $AB=\frac{2h}{\sqrt{3}}$.

33. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

Дамо означення кута між площинами. Кут між паралельними площинами вважається таким, що дорівнює нулю.

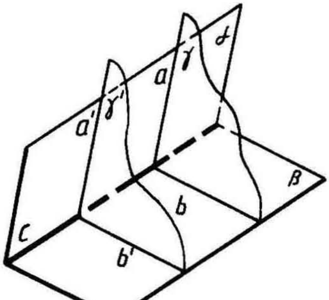
Нехай дані площини перетинаються. Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Вона перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називається *кутом між даними площинами* (мал. 82).

Означений так кут між площинами не залежить від вибору січної площини. Доведемо це.

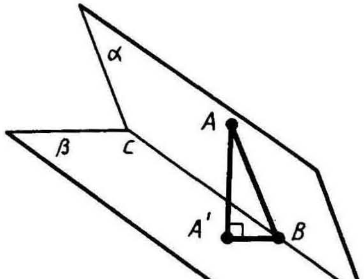
Нехай α і β — дані площини, які перетинаються по прямій c. Проведемо площину γ, перпендикулярну до прямої c. Вона перетне площини α і β по прямих a і b. Кут між площинами α і β дорівнює куту між прямими a і b.

Візьмемо іншу січну площину γ', перпендикулярну до прямої c. Нехай a' і b' — прямі перетину цієї площини з площинами α і β.

Виконаємо паралельне перенесення, при якому точка перетину площини γ з прямою c переходить у точку перетину



Мал. 82



Мал. 83

площини γ' з прямою c. В результаті за властивістю паралельного перенесення пряма a переходить у пряму a', а пряма b — у пряму b'.

Це означає, що кути між прямими a і b, a' і b' рівні, що й треба було довести.

Задача (43). Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка A, яка лежить на одній з цих площин, віддалена від другої площини на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.

Розв'язання. Нехай α і β — дані площини й A — точка, яка лежить у площині α (мал. 83). Опустимо перпендикуляр AA' на площину β і перпендикуляр AB на пряму c, по якій перетинаються площини. За теоремою про три перпендикуляри $A'B \perp c$. Площина трикутника ABA' перпендикулярна до прямої c і тому кут при вершині B прямокутного трикутника ABA' дорівнює 30°. Маємо:

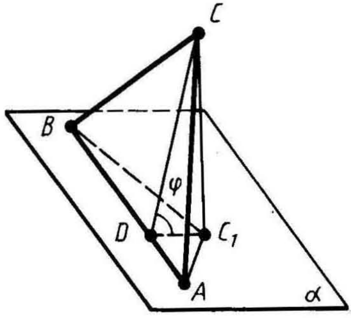
$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

Відстань від точки A до прямої c дорівнює $2a$.

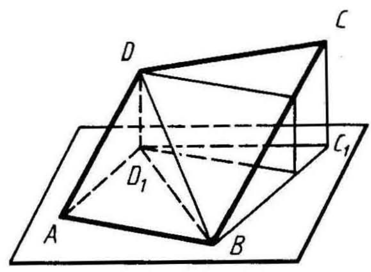
34. ПЛОЩА ОРТОГОНАЛЬНОЇ ПРОЕКЦІЇ МНОГОКУТНИКА

Теорема 4.1. ***Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.***

Доведення. Розглянемо спочатку трикутник і його проекцію на площину, яка проходить через одну з його сторін (мал. 84). Проекцією трикутника ABC є трикутник ABC_1 у площині α. Проведемо висоту CD трикутника ABC. За теоремою



Мал. 84



Мал. 85

про три перпендикуляри відрізок C_1D — висота трикутника ABC_1. Кут CDC_1 дорівнює куту φ між площиною трикутника ABC і площиною проекції α. Маємо:

$$C_1D = CD\cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD, \quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1D.$$

Звідси

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cdot\cos\varphi.$$

Таким чином, для розглядуваного випадку теорема правильна.

Теорема правильна і для випадку, коли замість площини α візьмемо будь-яку паралельну їй площину. Справді, при проектуванні фігури на паралельні площини її проекції суміщаються паралельним перенесенням у напрямі проектування. А суміщені паралельним перенесенням фігури рівні.

Розглянемо тепер загальний випадок. Розіб'ємо даний многокутник на трикутники. Кожний трикутник, який не має сторони, паралельної площині проекції, розіб'ємо на два трикутники із спільною стороною, паралельною площині проекції, як це показано для чотирикутника $ABCD$ на малюнку 85.

Тепер для кожного трикутника Δ нашого розбиття і його проекції Δ' запишемо рівність $S_{\Delta'} = S_{\Delta}\cdot\cos\varphi$. Всі ці рівності додамо почленно. Тоді дістанемо зліва площу проекції многокутника, а справа — площу самого многокутника, помножену на $\cos\varphi$. Теорему доведено.

35. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

У просторі, як і на площині, *вектором* називається напрямлений відрізок. Так само, як і на площині, означають основні поняття для векторів у просторі: абсолютна величина вектора, напрям вектора, рівність векторів.

Координатами вектора з початком у точці $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $A_2(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Так само, як і на площині, доводять, що рівні вектори мають відповідно рівні координати, і, навпаки, вектори з відповідно рівними координатами, рівні. Це дає підставу позначати вектор його координатами: $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ або просто $\overline{(a_1; a_2; a_3)}$.

Задача (50). Дано чотири точки: $A(2; 7; -3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. Вкажіть серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ рівні вектори.

Розв'язання. Треба знайти координати шуканих векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... і порівняти відповідні координати. Рівні вектори мають відповідно рівні координати. Наприклад, вектор $\overline{AB}$ має координати: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. Вектор $\overline{DC}$ має такі самі координати

$-3-(-2)=-1$; $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Таким чином, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$ рівні. Інша пара рівних векторів $\overline{BC}$ і $\overline{AD}$.

36. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ У ПРОСТОРІ

Так само, як і на площині, означають дії над векторами: додавання, множення на число і скалярний добуток.

Сумою векторів $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ і $\bar{b}\,(b_1;\ b_2;\ b_3)$ називається вектор $\bar{c}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$.

Так само, як і на площині, доводять векторну рівність

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}.$$

Добутком вектора $\bar{a}\,(a_1;\ a_2;\ a_3)$ на число λ називається вектор $\lambda\bar{a}=\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)}$.

Так само, як і на площині, доводять, що абсолютна величина вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює $|\lambda||\bar{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda>0$, і протилежний напряму вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda<0$.

Задача (54). Дано вектор $\bar{a}\,(1;\ 2;\ 3)$. Знайдіть колінеарний йому вектор з початком у точці $A\,(1;\ 1;\ 1)$ і кінцем B на площині xy.

Розв'язання. Координата z точки B дорівнює нулю. Координати вектора $\overline{AB}$: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. З колінеарності векторів $\bar{a}$ й $\overline{AB}$ дістаємо пропорцію

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}.$$

Звідси знаходимо координати x, y точки B:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

Скалярним добутком векторів $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$ і $\overline{(b_1;\ b_2;\ b_3)}$ називається число $(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$. Так само, як і на площині, доводять, що скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між векторами.

Задача (59). Дано чотири точки: $A\,(0;\ 1;\ -1)$, $B\,(1;\ -1;\ 2)$, $C\,(3;\ 1;\ 0)$, $D\,(2;\ -3;\ 1)$. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

Розв'язання. Координати вектора $\overline{AB}$: $1-0=1$, $-1-1=-2$, $2-(-1)=3$; $|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$. Координати вектора CD: $2-3=-1$, $-3-1=-4$, $1-0=1$; $|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}$.
Звідси

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як означаються координати точки у просторі.
2. Виразіть відстань між двома точками через координати цих точок.
3. Виведіть формули для координат середини відрізка через координати його кінців.
4. Що таке перетворення симетрії відносно точки? Яка фігура називається центрально-симетричною?
5. Поясніть, що таке перетворення симетрії відносно площини. Що таке площина симетрії фігури?
6. Яке перетворення фігури називається рухом?
7. Доведіть, що рух у просторі переводить площину у площину.
8. Які фігури у просторі називаються рівними?
9. Дайте означення паралельного перенесення.
10. Перелічіть властивості паралельного перенесення.
11. Доведіть, що при паралельному перенесенні у просторі кожна площина переходить або в себе, або у паралельну площину.
12. Що таке перетворення подібності? Перелічіть його властивості.
13. Яке перетворення називається гомотетією? Доведіть, що перетворення гомотетії у просторі переводить будь-яку площину, яка не проходить через центр гомотетії, у паралельну площину (або в себе).
14. Дайте означення кута між мимобіжними прямими.
15. Дайте означення кута між прямою і площиною.
16. Дайте означення кута між площинами.
17. Доведіть, що площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною його проекції.
18. Що таке абсолютна величина вектора? Які вектори називаються однаково напрямленими?
19. Дайте означення координат вектора з початком у точці $A_1(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $A_2(x_2; y_2; z_2)$.
20. Дайте означення дій над векторами: додавання, множення на число, скалярного добутку.

ЗАДАЧІ

1. Де лежать ті точки простору, для яких координати x і y дорівнюють нулю?
2. Дано точки $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 0; 3)$, $D(1; 2; 0)$. Які з цих точок лежать: 1) у площині xy; 2) на осі z; 3) у площині yz?

3. Дано точку $A(1;\ 2;\ 3)$. Знайдіть основи перпендикулярів, проведених з цієї точки на координатні осі і координатні площини.

4. Знайдіть відстані від точки $(1;\ 2;\ -3)$ до: 1) координатних площин; 2) осей координат; 3) початку координат.

5. У площині xy знайдіть точку $D(x;\ y;\ 0)$, рівновіддалену від трьох даних точок: $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$.

6. Знайдіть точки, рівновіддалені від точок $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$ і віддалені від площини yz на відстань 2.

7. На осі x знайдіть точку $C(x;\ 0;\ 0)$, рівновіддалену від двох точок $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(-2;\ 1;\ 3)$.

8. Складіть рівняння геометричного місця точок простору, рівновіддалених від точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і початку координат.

9. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами у точках $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ є паралелограмом.

10. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом, якщо: 1) $A(0;\ 2;\ -3)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$, $C(2;\ -2;\ -1)$, $D(3;\ -1;\ -5)$; 2) $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(1;\ 0;\ 7)$, $C(-2;\ 1;\ 5)$, $D(-1;\ 2;\ 1)$.

11. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є ромбом, якщо: 1) $A(6;\ 7;\ 8)$, $B(8;\ 2;\ 6)$, $C(4;\ 3;\ 2)$, $D(2;\ 8;\ 4)$; 2) $A(0;\ 2;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ 2)$, $D(1;\ 2;\ 2)$.

12. Дано один кінець відрізка $A(2;\ 3;\ -1)$ і його середина $C(1;\ 1;\ 1)$. Знайдіть другий кінець відрізка $B(x;\ y;\ z)$.

13. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо координати решти трьох його вершин відомі: 1) $A(2;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(4;\ 1;\ 0)$; 2) $A(1;\ -1;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ -1)$, $C(-1;\ 0;\ 1)$; 3) $A(4;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ 2)$, $C(-4;\ 2;\ 1)$.

14. Доведіть, що середина відрізка з кінцями у точках $A(a;\ c;\ -b)$ і $B(-a;\ d;\ b)$ лежить на осі y.

15. Доведіть, що середина відрізка з кінцями у точках $C(a;\ b;\ c)$ і $D(p;\ q;\ -c)$ лежить у площині xy.

16. Доведіть, що перетворення симетрії відносно координатної площини xy задається формулами $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$.

17. Дано точки $(1;\ 2;\ 3)$, $(0;\ -1;\ 2)$, $(1;\ 0;\ -3)$. Знайдіть точки, симетричні даним відносно координатних площин.

18. Дано точки $(1;\ 2;\ 3)$, $(0;\ -1;\ 2)$, $(1;\ 0;\ -3)$. Знайдіть точки, симетричні їм відносно початку координат.

19. Доведіть, що перетворення симетрії відносно точки є рух.

20*. Доведіть, що перетворення симетрії відносно площини є рух.

21. Доведіть, що в результаті руху у просторі круг переходить у круг того самого радіуса.

22. Доведіть, що в результаті руху у просторі три точки, які лежать на прямій, переходять у три точки, які теж лежать на одній прямій.

23. Знайдіть значення a, b, c з формул паралельного перенесення $x'=x+a$, $y'=y+b$, $z'=z+c$, якщо при цьому паралельному перенесенні точка $A(1;\ 0;\ 2)$ переходить у точку $A'(2;\ 1;\ 0)$.

24. При паралельному перенесенні точка $A(2;\ 1;\ -1)$ переходить у точку $A'(1;\ -1;\ 0)$. В яку точку переходить початок координат?

25. Чи існує паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку B, а точка C — у точку D, якщо:

1) $A(2;\ 1;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 1)$, $C(3;\ -2;\ 1)$, $D(2;\ -3;\ 0)$;
2) $A(-2;\ 3;\ 5)$, $B(1;\ 2;\ 4)$, $C(4;\ -3;\ 6)$, $D(7;\ -2;\ 5)$;
3) $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(3;\ -2;\ 2)$, $D(2;\ -3;\ 1)$;
4) $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(-2;\ 2;\ 1)$, $D(1;\ 1;\ 1)$?

26. Доведіть, що при паралельному перенесенні паралелограм переходить у рівний йому паралелограм.

27. Чотири паралельні прямі перетинають паралельні площини у вершинах паралелограмів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ суміщаються паралельним перенесенням.

28. Доведіть, що перетворення гомотетії у просторі є перетворенням подібності.

29. Три прямі, які проходять через точку S, перетинають дану площину в точках A, B, C і паралельну їй площину в точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ гомотетичні.

30. Пряма a лежить у площині α, а пряма b перпендикулярна до цієї площини. Чому дорівнює кут між прямими a і b?

31*. Дано три точки A, B, C, які не лежать на одній прямій. Чому дорівнює кут між прямими CA і CB, якщо ці прямі утворюють кути α і β з прямою AB і $\alpha+\beta<90°$?

32. Прямі a, b, c паралельні одній і тій самій площині. Чому дорівнює кут між прямими b і c, якщо кути між цими прямими і прямою a дорівнюють відповідно $60°$ і $80°$?

33. Доведіть, що будь-яка пряма на площині, перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, перпендикулярна і до похилої, і навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої.

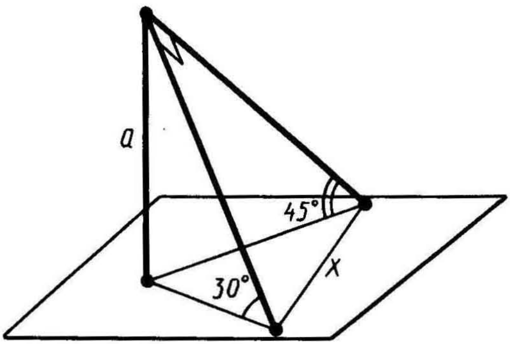
34. 1) Доведіть, що пряма, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.
2) Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні прямі, перетинає їх під однаковими кутами.

35. Точка A віддалена від площини на відстань h. Знайдіть довжини похилих, проведених з цієї точки під такими кутами до площини: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

36. Похила дорівнює a. Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут, що дорівнює: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°?

37. Відрізок завдовжки 10 м перетинає площину; кінці його знаходяться на відстанях 2 м і 3 м від площини. Знайдіть кут між даним відрізком і площиною.

38. З точки, яка віддалена від площини на a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між кінцями похилих (мал. 86).



Мал. 86

39. З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі, які утворюють з площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайдіть відстань між кінцями похилих.

40. З точки, віддаленої від площини на a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини, причому їх проекції утворюють кут 120°. Знайдіть відстань між кінцями похилих.

41. Через катет рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину під кутом 45° до другого катета. Знайдіть кут між гіпотенузою і площиною.

42. Доведіть, що площина, яка перетинає паралельні площини, перетинає їх під однаковими кутами.

43. Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка A, яка лежить в одній з цих площин, віддалена від другої площини на відстань a. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин.

44. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин удвічі далі, ніж від другої площини.

45. Два рівнобедрені трикутники мають спільну основу, а їх площини утворюють кут 60°. Спільна основа дорівнює 16 м;

бічна сторона одного трикутника 17 м, а бічні сторони другого перпендикулярні. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

46. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD із спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайдіть $\cos\alpha$, якщо:

1) $AB=24$ см, $AC=13$ см, $AD=37$ см, $CD=35$ см;

2) $AB=32$ м, $AC=65$ м, $AD=20$ м, $CD=63$ м.

47. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 м і 24 м. Знайдіть відстань від вершини прямого кута до площини, яка проходить через гіпотенузу і утворює з площиною трикутника кут 30°.

48. Дано рівносторонній трикутник із стороною a. Знайдіть площу його ортогональної проекції на площину, яка утворює з площиною трикутника кут, що дорівнює: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

49. 1) Знайдіть площу ортогональної проекції трикутника ABC із задачі 46 на площину трикутника ABD.

2) Знайдіть площу ортогональної проекції трикутника ABD із задачі 46 на площину трикутника ABC.

50. Дано чотири точки: $A\,(2;\ 7;\ -3)$, $B\,(1;\ 0;\ 3)$, $C\,(-3;\ -4;\ 5)$, $D\,(-2;\ 3;\ -1)$. Вкажіть серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BD}$ рівні вектори.

51. Дано три точки $A\,(1;\ 0;\ 1)$, $B\,(-1;\ 1;\ 2)$, $C\,(0;\ 2;\ -1)$. Знайдіть точку $D\,(x;\ y;\ z)$, якщо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ рівні.

52. Знайдіть точку D в задачі 51, якщо сума векторів $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ дорівнює нулю.

53. Дано вектори $\overline{(2;\ n;\ 3)}$ і $\overline{(3;\ 2;\ m)}$. При яких m і n ці вектори колінеарні?

54. Дано вектор $\bar{a}\,(1;\ 2;\ 3)$. Знайдіть колінеарний йому вектор з початком у точці $A\,(1;\ 1;\ 1)$ і кінцем у точці B на площині xy.

55. При яких значеннях n дані вектори перпендикулярні: 1) $\bar{a}\,(2;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}\,(1;\ 3;\ n)$; 2) $\bar{a}\,(n;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}\,(n;\ -n;\ 1)$; 3) $\bar{a}\,(n;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}\,(n;\ 2n;\ 4)$; 4) $\bar{a}\,(4;\ 2n;\ -1)$, $\bar{b}\,(-1;\ 1;\ n)$?

56. Дано точки: $A\,(1;\ 0;\ 1)$, $B\,(-1;\ 1;\ 2)$, $C\,(0;\ 2;\ -1)$. Знайдіть на осі z таку точку $D\,(0;\ 0;\ c)$, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ були перпендикулярні.

57* Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ утворюють кут 60°, а вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до них. Знайдіть абсолютну величину вектора $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$.

58* Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ одиничної довжини утворюють попарно кути 60°. Знайдіть кут φ між векторами: 1) $\bar{a}$ і $\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}$ і $\bar{b}-\bar{c}$.

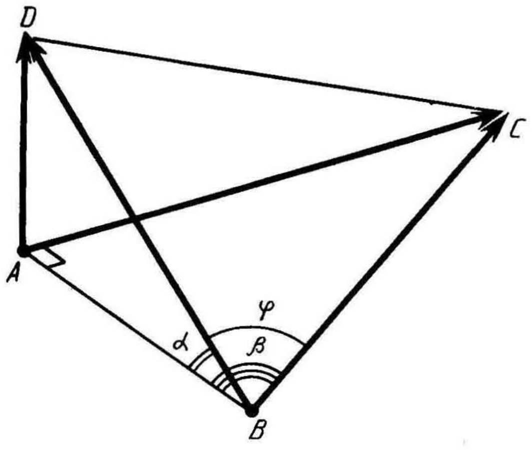
59. Дано чотири точки: $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$, $D(2; -3; 1)$. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$.

60. Дано три точки $A(0; 1; -1)$, $B(1; -1; 2)$, $C(3; 1; 0)$. Знайдіть косинус кута C трикутника ABC.

61.* Доведіть, що кут φ між прямими, на яких лежать вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, визначається рівнянням:

$$|\overline{a}\ \overline{b}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\varphi.$$

62.* З вершини прямого кута A трикутника ABC проведено перпендикуляр AD до площини трикутника. Знайдіть косинус кута φ між векторами $\overline{BC}$ і $\overline{BD}$, якщо кут ABD дорівнює α, а кут ABC дорівнює β (мал. 87).



Мал. 87

63.* Похила з площиною утворює кут 45°. Через основу похилої проведено пряму в площині під кутом 45° до проекції похилої. Знайдіть кут φ між цією прямою і похилою.

64.* З точки поза площиною проведено перпендикуляр і дві рівні похилі, які утворюють кути α з перпендикуляром. Знайдіть кут φ між проекціями похилих, якщо кут між похилими дорівнює β.

11 клас

§ 5. МНОГОГРАННИКИ

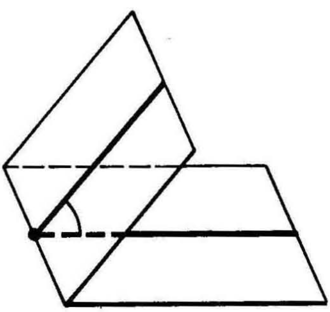
37. ДВОГРАННИЙ КУТ

Двогранним кутом називається фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує (мал. 88). Півплощини називаються *гранями*, а пряма, що їх обмежує,— *ребром* двогранного кута.

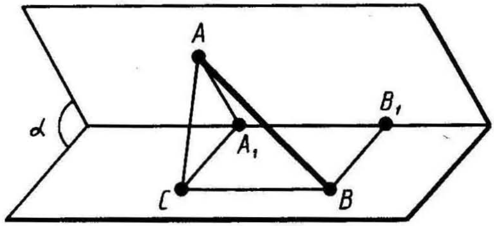
Площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає його грані по двох півпрямих. Кут, утворений цими півпрямими, називається *лінійним кутом* двогранного кута. За міру двогранного кута приймається міра відповідного йому лінійного кута. Усі лінійні кути двогранного кута суміщаються паралельним перенесенням, а отже, вони рівні. Тому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута.

Задача (1). З точок A і B, які лежать на гранях двогранного кута, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ і двогранний кут дорівнює α (мал. 89).

Розв'язання. Проведемо прямі $A_1C \parallel BB_1$ і $BC \parallel A_1B_1$. Чотирикутник A_1B_1BC — паралелограм, отже, $A_1C=BB_1=$ $=b$. Пряма A_1B_1 перпендикулярна до площини трикутника AA_1C, оскільки вона перпендикулярна до двох прямих цієї площини AA_1 і CA_1. Отже, паралельна їй пряма BC також перпендикулярна до цієї площини. Тому



Мал. 88



Мал. 89

трикутник ABC прямокутний з прямим кутом C. За теоремою косинусів

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos\alpha = \\ = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

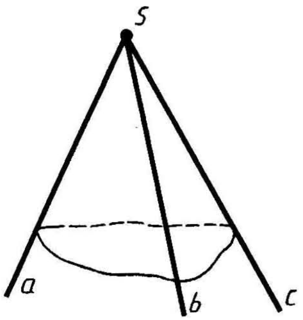
За теоремою Піфагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}.$$

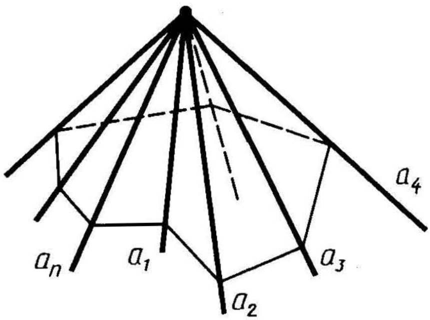
38. ТРИГРАННИЙ І МНОГОГРАННИЙ КУТИ

Розглянемо три промені a, b, c, які виходять з однієї точки і не лежать в одній площині. *Тригранним кутом* (abc) називається фігура, яка складається з трьох плоских кутів (ab), (bc) і (ac) (мал. 90). Ці кути називаються *гранями* тригранного кута, а їх сторони — *ребрами*. Спільна вершина плоских кутів називається *вершиною* тригранного кута. Двогранні кути, утворені гранями тригранного кута, називаються *двогранними кутами тригранного кута.*

Аналогічно дають означення *многогранного* кута (мал. 91).



Мал. 90



Мал. 91

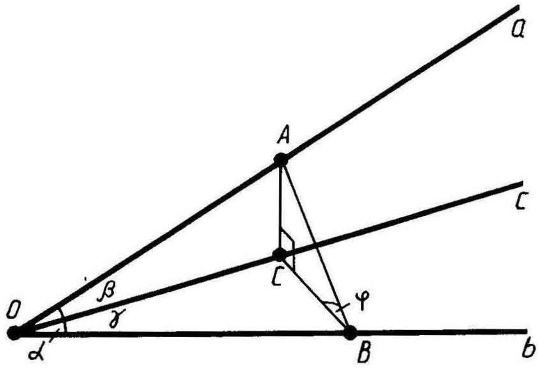
З а д а ч а (2). У тригранному куті (abc) двогранний кут при ребрі c прямий, двогранний кут при ребрі b дорівнює φ, а плоский кут (bc) дорівнює $\gamma\left(\varphi,\ \gamma < \frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть два інших плоских кути: $\alpha = \angle(ab)$, $\beta = \angle(ac)$.

Р о з в' я з а н н я. Опустимо з довільної точки A ребра a перпендикуляр AB на ребро b і перпендикуляр AC на ребро c (мал. 92). За теоремою про три перпендикуляри CB — перпендикуляр до ребра b.

З прямокутних трикутників OAB, OCB, AOC і ABC маємо

$$\operatorname{tg}\alpha = AB : OB = \frac{BC}{\cos\varphi} : \frac{BC}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\beta = AC : OC = BC\operatorname{tg}\varphi : \frac{BC}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\varphi\sin\gamma.$$



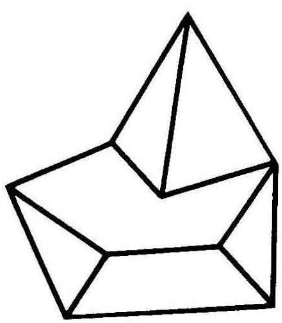
Мал. 92

Зауваження. Залежності між кутами α, β, γ, φ, які дістали: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\varphi}$, $\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\varphi\sin\gamma$, дають можливість, знаючи два кути, знайти два інших кути.

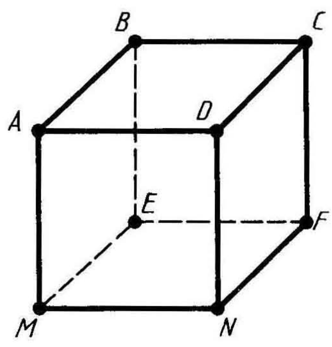
39. МНОГОГРАННИКИ

У стереометрії вивчають фігури у просторі, які називаються тілами. Наочно (геометричне) тіло можна уявити як частину простору, зайняту фізичним тілом і обмежену поверхнею.

Многогранник — це таке тіло, поверхня якого складається із скінченної кількості плоских многокутників (мал. 93). Многогранник називається *опуклим,* якщо він лежить по один бік від площини кожного з плоских многокутників на його поверхні. Спільна частина такої площини і поверхні опуклого многогранника називається *гранню.* Грані опуклого многогранника



Мал. 93



Мал. 94

є плоскими опуклими многокутниками. Сторони граней називаються *ребрами многогранника,* а вершини — *вершинами многогранника.*

Пояснимо сказане на прикладі відомого вам куба (мал. 94). Куб — це опуклий многогранник. Його поверхня складається з шести квадратів $ABCD$, $BEFC$, ... Вони є його гранями. Ребрами куба є сторони цих квадратів AB, BC, BE, ... Вершинами куба є вершини квадратів A, B, C, D, E, ... Куб має шість граней, дванадцять ребер і вісім вершин.

Найпростішим многогранникам — призмам і пірамідам, які будуть основним об'єктом нашого вивчення, ми дамо такі означення, в яких по суті не використовується поняття тіла. Означимо їх як геометричні фігури з переліком усіх точок простору, які їм належать. Поняття геометричного тіла та його поверхні буде дано пізніше.

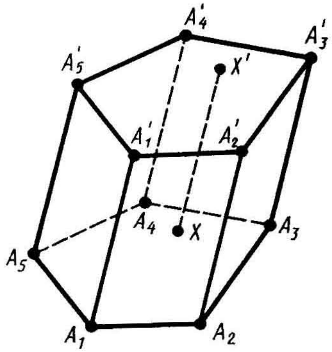
40. ПРИЗМА

Призмою називається многогранник, який складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників (мал. 95). Многокутники називаються *основами призми,* а відрізки, які сполучають відповідні вершини,— *бічними ребрами призми.*

Оскільки паралельне перенесення є рух, то ***основи призми рівні.***

Через те, що при паралельному перенесенні площина переходить у паралельну площину (або в себе), то ***основи призми лежать у паралельних площинах.***

Оскільки при паралельному перенесенні точки зміщуються вздовж паралельних прямих або прямих, які збігаються, на одну і ту саму відстань, то ***бічні ребра призми паралельні і рівні.***



Мал. 95

Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні. *Бічна поверхня* складається з паралелограмів. Кожен з цих паралелограмів має дві сторони, які є відповідними сторонами основи, а дві інші — суміжними бічними ребрами.

Висотою призми називається відстань між площинами її основ. Відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані, називається *діагоналлю призми.*

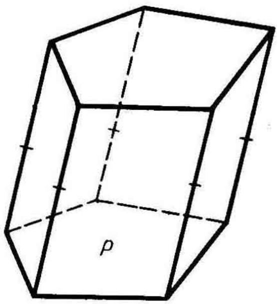
Призма називається n-кутною, якщо її основи n-кутники. Надалі ми розглядатимемо тільки призми, у яких основи — опуклі многокутники. Такі призми є опуклими многогранниками. На малюнку 95 зображено п'ятикутну призму. Основами її є п'ятикутники $A_1A_2...A_5$, $A_1'A_2'...A_5'$. XX' — відрізок, який сполучає відповідні точки основ. Бічні ребра призми — відрізки A_1A_1', A_2A_2', ... , A_5A_5'. Бічні грані призми — паралелограми $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ...

41. ЗОБРАЖЕННЯ ПРИЗМИ І ПОБУДОВА ЇЇ ПЕРЕРІЗІВ

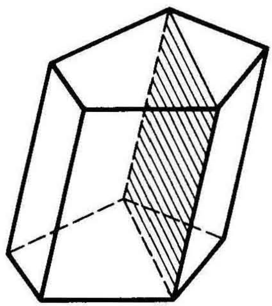
Відповідно до правил паралельного проектування призму зображають таким чином. Спочатку будують одну з основ P (мал. 96). Це деякий плоский многокутник. Потім з вершин многокутника P проводять бічні ребра призми у вигляді паралельних відрізків однакової довжини. Кінці цих відрізків сполучають і дістають другу основу призми. Невидимі ребра зображають штриховими лініями.

Перерізи призми площинами, паралельними бічним ребрам, є паралелограмами. Зокрема, паралелограмами є *діагональні перерізи.* Це перерізи призми площинами, що проходять через два бічні ребра, які не належать одній грані (мал. 97).

На практиці, зокрема, у процесі розв'язування задач часто доводиться будувати переріз призми площиною, що проходить через задану пряму g, яка лежить у площині однієї з основ призми.



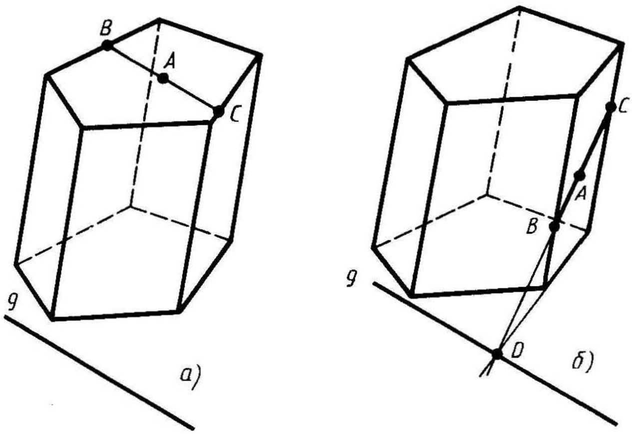
Мал. 96



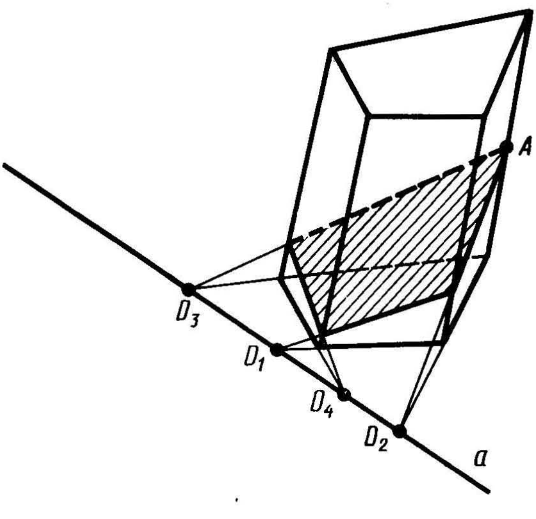
Мал. 97

Така пряма називається *слідом* січної площини на площині основи. Для побудови перерізу призми достатньо побудувати відрізки перетину січної площини з гранями призми. Покажемо, як побудувати такий переріз, коли відома яка-небудь точка A на поверхні призми, що належить перерізу (мал. 98).

Якщо дана точка A належить другій основі призми, то її перетином із січною площиною є відрізок BC, паралельний сліду g і який містить дану точку A (мал. 98, a).



Мал. 98



Мал. 99

Якщо дана точка A належить бічній грані, то перетин цієї грані з січною площиною будують, як показано на малюнку 98, *б*. А саме, спочатку будують точку D, в якій площина грані перетинає даний слід g. Потім проводять пряму через точки A і D. Відрізок BC прямої AD на грані, що розглядається, і є перетином цієї грані з січною площиною. Якщо грань, яка містить точку A, паралельна сліду g, то січна площина перетинає цю грань по відрізку BC, що проходить через точку A і паралельний прямій g.

Кінці відрізка BC належать і сусіднім граням. Тому таким способом можна побудувати перетин цих граней з нашою січною площиною. І так далі.

На малюнку 99 показано побудову перерізу чотирикутної призми площиною, яка проходить через пряму a площини нижньої основи призми і точку A, яка лежить на одному з бічних ребер.

42. ПРЯМА ПРИЗМА

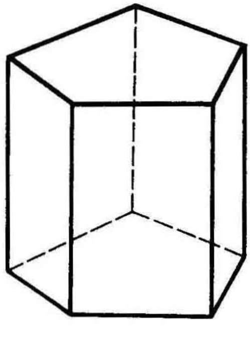
Призма називається *прямою,* якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. У противному разі призма називається *похилою.*

Бічні грані прямої призми — прямокутники. Зображаючи пряму призму на малюнку, бічні ребра звичайно проводять вертикально (мал. 100).

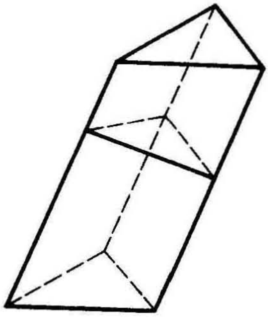
Пряма призма називається *правильною,* якщо її основи є правильними многокутниками.

Бічною поверхнею (точніше, площею бічної поверхні) *призми* називається сума площ бічних граней. *Повна поверхня призми* дорівнює сумі бічної поверхні і площ основ.

Теорема 5.1. ***Бічна поверхня прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми, тобто на довжину бічного ребра.***



Мал. 100



Мал 101

Доведення. Бічні грані прямої призми — прямокутники. Основи цих прямокутників є сторонами многокутника, що лежить в основі призми, а висоти дорівнюють довжині бічних ребер. Звідси випливає, що бічна поверхня призми дорівнює:

$$S = a_1 l + a_2 l + \cdots + a_n l = pl,$$

де a_1, ..., a_n — довжини ребер основи, p — периметр основи призми, а l — довжина бічних ребер. Теорему доведено.

Задача (22). У похилій призмі проведено переріз, перпендикулярний до бічних ребер, що перетинає всі бічні ребра. Знайдіть бічну поверхню призми, якщо периметр перерізу дорівнює p, а бічні ребра дорівнюють l.

Розв'язання. Площина проведеного перерізу розбиває призму на дві частини (мал. 101). Застосуємо до однієї з них паралельне перенесення, яке суміщає основи призми. При цьому дістанемо пряму призму, основою якої є переріз даної призми, а бічні ребра дорівнюють l. Ця призма має ту саму бічну поверхню, що й дана. Таким чином, бічна поверхня даної призми дорівнює pl.

43. ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

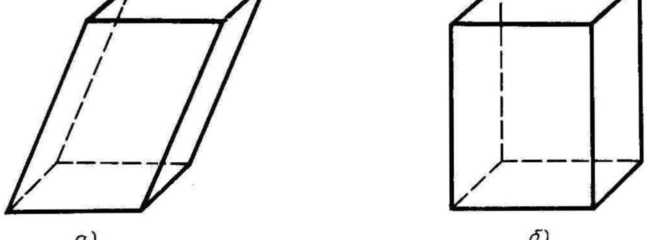
Якщо основою призми є паралелограм, то вона називається *паралелепіпедом*. У паралелепіпеда всі грані — паралелограми.

На малюнку 102, *а* зображено похилий паралелепіпед, а на малюнку 102, *б* — прямий паралелепіпед.

Грані паралелепіпеда, які не мають спільних вершин, називаються *протилежними*.

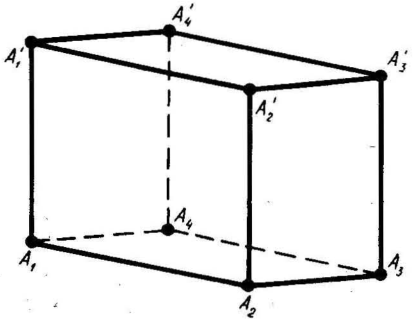
Теорема 5.2. ***Протилежні грані паралелепіпеда паралельні і рівні.***

Доведення. Розглянемо які-небудь дві протилежні грані паралелепіпеда, наприклад $A_1A_2A_2'A_1'$ і $A_3A_4A_4'A_3'$



а) б)

Мал. 102



Мал. 103

(мал. 103). Оскільки всі грані паралелепіпеда — паралелограми, то пряма A_1A_2 паралельна прямій A_3A_4, а пряма A_1A_1' паралельна прямій A_4A_4'. Звідси випливає, що площини граней, які розглядаються, паралельні.

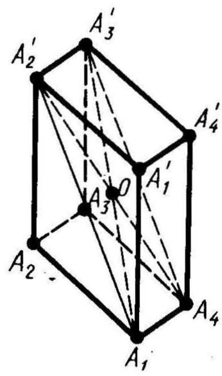
З того, що грані паралелепіпеда — паралелограми, випливає, що відрізки A_1A_4, $A_1'A_4'$, $A_2'A_3'$ і A_2A_3 паралельні і рівні. Звідси робимо висновок, що грань $A_1A_2A_2'A_1'$ суміщається паралельним перенесенням вздовж ребра A_1A_4 з гранню $A_3A_4A_4'A_3'$. Отже, ці грані рівні.

Аналогічно доводимо паралельність і рівність будь-яких двох протилежних граней паралелепіпеда. Теорему доведено.

44. ЦЕНТРАЛЬНА СИМЕТРІЯ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Теорема 5.3. ***Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.***

Доведення. Розглянемо будь-які дві діагоналі паралелепіпеда, наприклад, A_1A_3' і A_4A_2' (мал. 104). Оскільки чотирикутники $A_1A_2A_3A_4$ і $A_2A_2'A_3'A_3$ — паралелограми із спільною стороною A_2A_3, то їх сторони A_1A_4 і $A_2'A_3'$ паралельні одна одній, а отже, лежать в одній площині. Ця площина перетинає площини протилежних граней паралелепіпеда по паралельних прямих A_1A_2' і A_4A_3'. Отже, чотирикутник $A_4A_1A_2'A_3'$ — паралелограм. Діагоналі паралелепіпеда A_1A_3' і A_4A_2' є діагоналями цього паралелограма. Тому вони перетинаються і точкою перетину діляться пополам.



Мал. 104

Аналогічно доводять, що діагоналі A_1A_3' і A_2A_4', а також діагоналі A_1A_3' і A_3A_1'

перетинаються і точкою перетину діляться пополам. Звідси робимо висновок, що всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам. Теорему доведено.

З теореми 5.3 випливає, що ***точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.***

45. ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД

Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається *прямокутним паралелепіпедом.* Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається *кубом.*

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називаються його *лінійними розмірами (вимірами).* У прямокутного паралелепіпеда три лінійні виміри.

Теорема 5.4. ***У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.***

Доведення. Розглянемо прямокутний паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$ (мал. 105). З прямокутного трикутника $AC'C$ за теоремою Піфагора маємо:

$$AC'^2=AC^2+CC'^2.$$

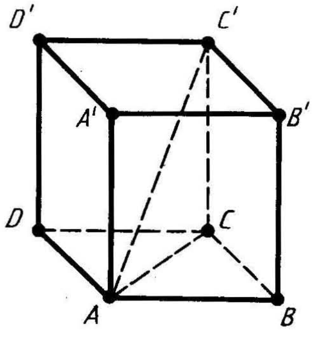
З прямокутного трикутника ACB за теоремою Піфагора маємо:

$$AC^2=AB^2+BC^2.$$

Звідси

$$AC'^2=CC'^2+AB^2+BC^2.$$

Ребра AB, BC і CC' не паралельні, отже, їх довжини є лінійними розмірами паралелепіпеда. Теорему доведено.

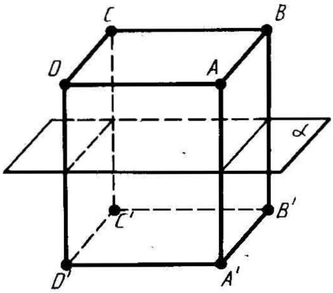


Мал. 105

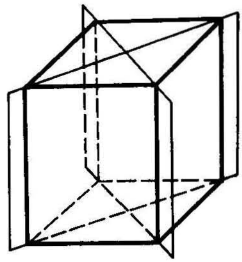
46. СИМЕТРІЯ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

У прямокутного паралелепіпеда, як у будь-якого паралелепіпеда, є центр симетрії — точка перетину його діагоналей. Він має також три площини симетрії, які проходять через центр симетрії паралельно граням. На малюнку 106 показано одну з таких площин. Вона проходить через середину чотирьох паралельних ребер паралелепіпеда. Кінці ребер є симетричними точками.

Якщо у паралелепіпеда всі лінійні розміри різні, то він не має інших площин симетрії, крім названих.



Мал. 106



Мал. 107

Якщо ж у паралелепіпеда два лінійних розміри однакові, то він має ще дві площини симетрії. Це площини діагональних перерізів, показані на малюнку 107.

Якщо у паралелепіпеда всі лінійні розміри однакові, тобто він є кубом, то площина будь-якого його діагонального перерізу є площиною симетрії. Таким чином, куб має дев'ять площин симетрії.

47. ПІРАМІДА

Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника — *основи піраміди,* точки, яка не лежить у площині основи,— *вершини піраміди* і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи (мал. 108).

Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються *бічними ребрами.*

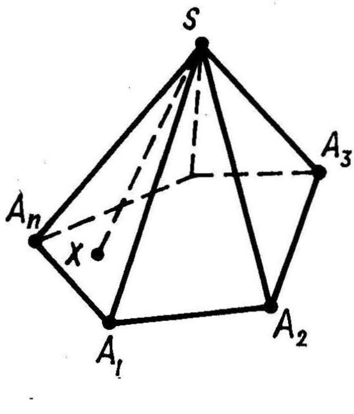
Поверхня піраміди складається з основи і бічних граней. Кожна бічна грань — трикутник. Однією з його вершин є вершина піраміди, а протилежною стороною — сторона основи піраміди.

Висотою піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи.

Піраміда називається n-кутною, якщо її основою є n-кутник. Трикутна піраміда називається також *тетраедром.*

У піраміди, зображеної на малюнку 108, основа — многокутник $A_1A_2 \ldots A_n$, вершина піраміди — S, бічні ребра — SA_1, SA_2, ..., SA_n, бічні грані — $\triangle SA_1A_2$, $\triangle SA_2A_3$, ...

Надалі розглядатимемо лише піраміди з опуклим многокутником в основі. Такі піраміди є опуклими многогранниками.

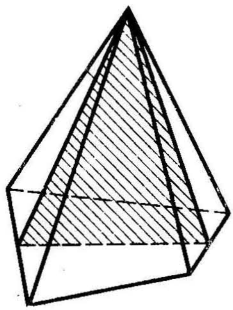


Мал. 108

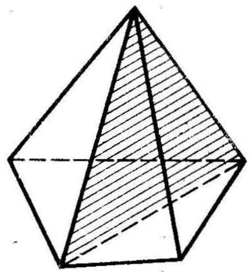
48. ПОБУДОВА ПІРАМІДИ ТА ЇЇ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Відповідно до правил паралельного проектування піраміду зображають таким чином. Спочатку будують основу. Це — деякий плоский многокутник. Потім позначають вершину піраміди, яку сполучають бічними ребрами з вершинами основи. На малюнку 108 показано зображення п'ятикутної піраміди.

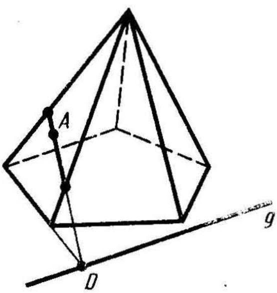
Перерізами піраміди площинами, які проходять через її вершини, є трикутники (мал. 109). Зокрема, трикутниками є *діагональні перерізи.* Це перерізи площинами, які проходять через два не сусідніх бічних ребра піраміди (мал. 110).



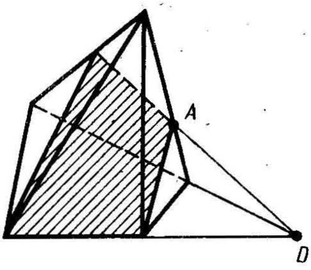
Мал. 109



Мал. 110



Мал. 111



Мал. 112

Переріз піраміди площиною з даним слідом g на площині основи будують так само, як і переріз призми. Для побудови перерізу піраміди площиною досить побудувати перерізи її бічних граней із січною площиною.

Якщо на грані, не паралельній сліду g, відома яка-небудь точка A, що належить перерізу, то спочатку будують перетин сліду січної площини з площиною цієї грані — точку D на малюнку 111. Точку D сполучають з точкою A прямою. Тоді відрізок цієї прямої, який належить грані, є перетином цієї грані із січною площиною. Якщо точка A лежить на грані, паралельній сліду g, то січна площина перетинає цю грань по відрізку, паралельному прямій g. Перейшовши до сусідньої бічної грані, будують її перетин із січною площиною і т. д. В результаті дістають шуканий переріз піраміди.

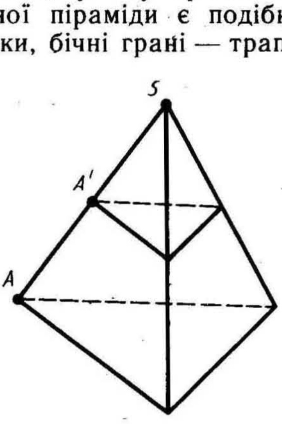
На малюнку 112 побудовано переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через сторону основи і точку A на одному з її бічних ребер.

49. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА

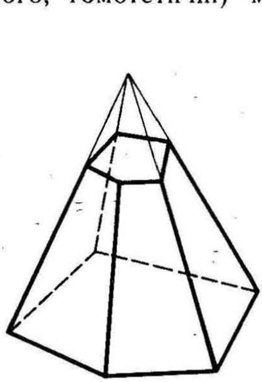
Теорема 5.5. ***Площина, яка паралельна основі піраміди й перетинає її, відтинає подібну піраміду.***

Доведення. Нехай S — вершина піраміди, A — вершина основи і A' — точка перетину січної площини з бічним ребром SA (мал. 113). Застосуємо до піраміди перетворення гомотетії відносно вершини S з коефіцієнтом гомотетії $k=\frac{SA'}{SA}$. У результаті цієї гомотетії площина основи переходить у паралельну площину, яка проходить через точку A', тобто у січну площину, а тому вся піраміда — у ту частину піраміди, яку відтинає ця площина. Оскільки гомотетія є перетворення подібності, то частина, яку відтяли від піраміди, є пірамідою, подібною даній. Теорему доведено.

За теоремою 5.5 площина, яка паралельна площині основи піраміди і перетинає її бічні ребра, відтинає від неї подібну піраміду. Друга частина піраміди — це многогранник, який називається *зрізаною пірамідою* (мал. 114). Грані зрізаної піраміди, що лежать у паралельних площинах, називаються *основами;* решту граней називають *бічними гранями.* Основи зрізаної піраміди є подібні (більше того, гомотетичні) многокутники, бічні грані — трапеції.



Мал. 113



Мал. 114

З а д а ч а (54). Бічне ребро піраміди поділено на чотири рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Площа основи дорівнює 400 см^2. Знайдіть площі перерізів.

Р о з в' я з а н н я. Перерізи подібні основі піраміди з коефіцієнтами подібності $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ і $\frac{3}{4}$. Площі подібних фігур відносяться, як квадрати лінійних розмірів. Тому відношення площ перерізів до площі основи піраміди: $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$ і $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. Отже, площі перерізів дорівнюють: $400\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=25\ (\text{см}^2)$, $400\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2=100\ (\text{см}^2)$, $400\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=$ $=225\ (\text{см}^2)$.

50. ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. *Віссю* правильної піраміди називається пряма, яка містить її висоту. Очевидно, у правильній піраміді бічні ребра рівні, отже, бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*. *Бічною поверхнею піраміди* називається сума площ її бічних граней.

Т е о р е м а 5.6. ***Бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.***

Д о в е д е н н я. Якщо сторона основи a, а кількість сторін n, то бічна поверхня піраміди дорівнює:

$$\frac{al}{2}\cdot n=\frac{anl}{2}=\frac{pl}{2},$$

де l — апофема, а p — периметр основи. Теорему доведено.

Зрізана піраміда, яку дістали з правильної піраміди, також називається *правильною*. Бічні грані правильної зрізаної піраміди — рівні рівнобічні трапеції; їх висоти називаються *апофемами*.

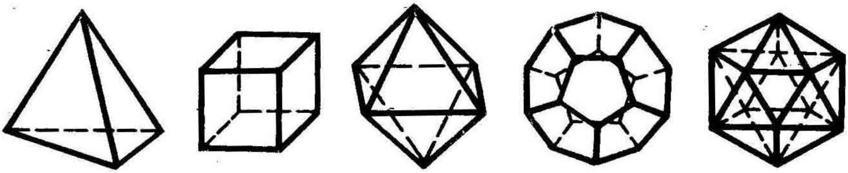
З а д а ч а (69). Доведіть, що бічна поверхня правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.

Р о з в' я з а н н я. Бічні грані зрізаної піраміди — трапеції з однією і тією самою верхньою основою a, нижньою b і висотою (апофемою) l. Тому площа однієї грані дорівнює $\frac{1}{2}(a+b)\,l$. Площа всіх граней, тобто бічна поверхня зрізаної піраміди дорівнює $\frac{1}{2}(an+bn)\,l$, де n — кількість вершин основи піраміди, an і bn — периметри основ.

51. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ

Опуклий многогранник називається ***правильним***, якщо його грані є правильними многокутниками з однією й тією самою кількістю сторін, а в кожній вершині многогранника сходиться одне й те ж число ребер.

Існує п'ять типів правильних опуклих многогранників (мал. 115): *правильний тетраедр, куб, октаедр, додекаедр, ікосаедр.*



Мал. 115

У правильного тетраедра грані — правильні трикутники; у кожній вершині сходиться по три ребра. Тетраедр — трикутна піраміда, всі ребра якої рівні.

У куба всі грані — квадрати; у кожній вершині сходиться по три ребра. Куб — прямокутний паралелепіпед з однаковими ребрами.

У октаедра грані — правильні трикутники, але на відміну від тетраедра у кожній його вершині сходиться по чотири ребра.

У додекаедра грані — правильні п'ятикутники. У кожній вершині його сходиться по три ребра.

У ікосаедра грані — правильні трикутники, але на відміну від тетраедра і октаедра у кожній вершині сходиться по п'ять ребер.

З а д а ч а (81). Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.

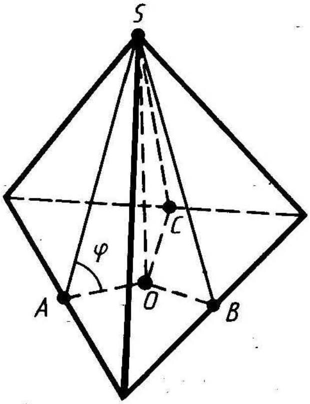
Р о з в' я з а н н я. Проведемо з вершини S тетраедра висоти SA, SB, SC його граней, які сходяться в цій вершині, і висоту SO тетраедра (мал. 116). Якщо ребро тетраедра позначити через a, то висоти граней будуть дорівнювати $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. З рівності висот SA, SB, SC випливає рівність відрізків OA, OB, OC. А вони перпендикулярні до сторін трикутника в основі тетраедра (теорема про три перпендикуляри).

Звідси випливає, що точка O є центром кола, вписаного в основу тетраедра. Отже, відрізки OA, OB і OC дорівнюють $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Позначимо через φ двогранний кут при ребрі, що містить точку A. Тоди матимемо

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3};$$

$$\varphi \approx 70°32'.$$

Очевидно, двогранні кути при інших ребрах тетраедра такі ж за величиною.



Мал. 116

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке двогранний кут (грань кута, ребро кута)?
2. Що таке лінійний кут двогранного кута?
3. Чому міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута?
4. Поясніть, що таке тригранний кут (грані і ребра тригранного кута).
5. Поясніть, що таке плоскі і двогранні кути тригранного кута.
6. Що таке многогранник?
7. Який многогранник називається опуклим?
8. Що таке грань опуклого многогранника, ребро, вершина?
9. Що таке призма (основи призми, бічні грані, ребра)?
10. Доведіть, що основи призми лежать на паралельних площинах і рівні, бічні ребра паралельні і рівні, бічні грані — паралелограми.
11. Що таке висота призми?
12. Що таке діагональ призми?
13. Якою фігурою є переріз призми площиною, паралельною бічним ребрам, зокрема, діагональний переріз?
14. Як побудувати переріз призми площиною, яка проходить через дану пряму в площині основи призми і дану точку на одній з бічних граней?
15. Яка призма називається прямою (похилою)?
16. Яка призма називається правильною?
17. Що таке бічна поверхня призми (повна поверхня призми)?
18. Доведіть, що бічна поверхня прямої призми дорівнює добутку периметра основи на висоту призми.
19. Що таке паралелепіпед?
20. Доведіть, що протилежні грані паралелепіпеда паралельні і рівні.

21. Доведіть, що діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться пополам.
22. Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелепіпеда є його центром симетрії.
23. Який паралелепіпед називається прямокутним? Що таке лінійні розміри прямокутного паралелепіпеда?
24. Що таке куб?
25. Доведіть, що у прямокутному паралелепіпеді квадрат діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.
26. Скільки площин симетрії має прямокутний паралелепіпед?
27. Що таке піраміда (основа піраміди, бічні грані, ребра, висота)?
28. Якою фігурою є переріз піраміди площинами, які проходять через її вершину?
29. Що таке діагональний переріз піраміди?
30. Як побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через дану пряму у площині основи піраміди і дану точку на одній з бічних граней?
31. Доведіть, що площина, яка перетинає піраміду і паралельна її основі, відтинає від неї подібну піраміду.
32. Поясніть, що таке зрізана піраміда.
33. Яка піраміда називається правильною? Що таке вісь правильної піраміди?
34. Що таке апофема правильної піраміди?
35. Доведіть, що бічна поверхня правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра основи на апофему.
36. Який многогранник називається правильним?
37. Перелічіть п'ять типів правильних многогранників і опишіть їх.

ЗАДАЧІ

1. З точок A і B, які лежать на гранях двогранного кута, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайдіть: 1) відрізок AB, якщо $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ і двогранний кут дорівнює α; 2) двогранний кут α, якщо $AA_1=3$, $BB_1=4$, $A_1B_1=6$, $AB=7$.
2. У тригранному куті (abc) двогранний кут при ребрі c — прямий, двогранний кут при ребрі b дорівнює φ, а плоский кут (bc) дорівнює γ $\left(\varphi,\ \gamma<\frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть два інших плоскі кути: $\alpha=\angle(ab)$, $\beta=\angle(ac)$.
3. У тригранному куті один плоский кут дорівнює γ, а кожний прилеглий до нього двогранний кут дорівнює φ $\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Знайдіть два інші плоскі кути α і кут β, який утворює площина кута γ з протилежним ребром.

4* У тригранному куті два плоскі кути гострі і дорівнюють α, а третій кут дорівнює γ. Знайдіть двогранні кути φ, протилежні плоским кутам α, і кут β між площиною γ і протилежним ребром.

5. Доведіть, що переріз призми, паралельний основам, дорівнює основам.

6. Скільки діагоналей має n-кутна призма?

7. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через сторону основи і одну з вершин другої основи.

8. Побудуйте переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки на бічних ребрах призми.

9. Одне бічне ребро призми перпендикулярне до площини основи. Доведіть, що решта бічних ребер теж перпендикулярна до площини основи.

10. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а висота призми 18 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи.

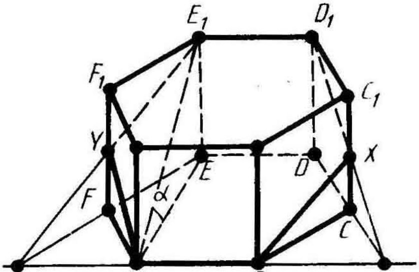
11. Бічне ребро похилої призми дорівнює 15 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту призми.

12* У похилій трикутній призмі відстань між бічними ребрами дорівнює 37 см, 13 см і 40 см. Знайдіть відстань між більшою бічною гранню і протилежним бічним ребром призми.

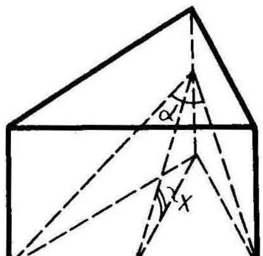
13. Основою призми є правильний шестикутник із стороною a, а бічні грані — квадрати. Знайдіть діагоналі призми і площі її діагональних перерізів.

14* У правильній шестикутній призмі, бічні грані якої — квадрати, проведіть площину через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть площу побудованого перерізу (мал. 117).

15. Через сторону нижньої основи правильної трикутної призми проведено площину, яка перетинає бічні грані по відріз-



Мал. 117



Мал. 118

ках, що утворюють кут α. Знайдіть кут нахилу цієї площини до основи призми (мал. 118).

16. У правильній чотирикутній призмі через середини двох суміжних сторін основи проведено площину, яка перетинає три бічних ребра і нахилена до площини основи під кутом α. Сторона основи дорівнює a. Знайдіть площу утвореного перерізу.

17. У правильній чотирикутній призмі площа основи 144 см^2, а висота 14 см. Знайдіть діагональ призми.

18. У правильній чотирикутній призмі площа бічної грані дорівнює Q. Знайдіть площу діагонального перерізу.

19*. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 15, висота дорівнює 20. Знайдіть найкоротшу відстань від сторони основи до діагоналі призми, яка не перетинає її (мал. 119).

20. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Бічна поверхня дорівнює 12 м^2. Знайдіть висоту.

21. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює 32 м^2, а повна поверхня 40 м^2. Знайдіть висоту.

22*. У похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра. Знайдіть бічну поверхню призми, якщо периметр перерізу дорівнює p, а бічні ребра дорівнюють l.

23. Відстані між паралельними прямими, які містять бічні ребра похилої трикутної призми, дорівнюють 2 см, 3 см і 4 см, а бічні ребра 5 см. Знайдіть бічну поверхню призми.

24. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть повну поверхню правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

25. Площина, яка проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з основою кут 45°. Сторона основи l. Знайдіть бічну поверхню призми.

26. У паралелепіпеді три грані мають площі 1 м^2, 2 м^2 і 3 м^2. Чому дорівнює повна поверхня паралелепіпеда?

27. Дано кути, утворені ребрами паралелепіпеда, які сходяться в одній вершині. Як знайти кути між ребрами, що сходяться у будь-якій іншій вершині?

28. Доведіть, що відрізок, який сполучає центри основ паралелепіпеда, паралельний бічним ребрам.

29. У прямому паралелепіпеді сторони основи 6 м і 8 м утворюють кут 30°; бічне ребро дорівнює 5 м. Знайдіть повну поверхню цього паралелепіпеда.

30. У прямому паралелепіпеді сторони основи 3 см і 8 см; кут між ними 60°. Бічна поверхня дорівнює 220 см^2. Знайдіть повну поверхню.

31. У прямому паралелепіпеді сторони основи 3 см і 5 см, а одна з діагоналей основи 4 см. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, знаючи, що менша діагональ утворює з площиною основи кут 60°.

32. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, кожне ребро якого дорівнює a, а один з кутів основи дорівнює 60°.

33* Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 5 м, сторони основи дорівнюють 6 м і 8 м, а одна з діагоналей основи дорівнює 12 м. Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.

34. У прямому паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 1 м, сторони основи дорівнюють 23 дм і 11 дм, а діагоналі основи відносяться, як 2:3. Знайдіть площі діагональних перерізів.

35. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.

36* Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі, яка сполучає дві інші вершини.

37. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи 7 дм і 24 дм, а висота паралелепіпеда 8 дм. Знайдіть площу діагонального перерізу.

38. Знайдіть поверхню прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: 10 см, 22 см, 16 см.

39. Знайдіть бічну поверхню прямокутного паралелепіпеда, якщо його висота h, площа основи Q, площа діагонального перерізу M.

40. Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, які сходяться в одній вершині, дорівнюють a, b, c. Знайдіть лінійні виміри паралелепіпеда (мал. 120).

41. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона 10 см. Бічні грані утворюють з основою рівні двогранні кути, які містять по 45°. Знайдіть висоту піраміди.

42. Основа піраміди — прямокутник із сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть висоту піраміди.

Мал. 119

Мал. 120

43. Основою піраміди є правильний трикутник, одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α. Як нахилені до площини основи бічні ребра?

44. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою a. Кожне бічне ребро утворює з площиною основи кут β. Знайдіть її висоту.

45. Основа піраміди — прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть висоту піраміди.

46. Основа піраміди — паралелограм, сторони якого 3 см і 7 см, а одна з діагоналей 6 см, висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і дорівнює 4 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

47*. Основа піраміди — ромб з діагоналями 6 м і 8 м; висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей ромба і дорівнює 1 м. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

48. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник із сторонами 40 см, 25 см і 25 см. Її висота проходить через вершину кута, протилежного стороні 40 см, і дорівнює 8 см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

49. Основа піраміди — квадрат, її висота проходить через одну з вершин основи. Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо сторона основи дорівнює 20 дм, а висота 21 дм (мал. 121).

50. Побудуйте переріз піраміди площиною, яка проходить через вершину піраміди і дві дані точки на її основі.

51. Побудуйте переріз трикутної піраміди площиною, яка проходить через сторону основи піраміди і дану точку на протилежному ребрі.

52. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди площиною, яка проходить через сторону основи і точку на одному з бічних ребер.

53. У чотирикутній зрізаній піраміді сторони однієї основи дорівнюють 6, 7, 8, 9 см, а менша сторона другої основи дорівнює 5 см. Знайдіть решту сторін цієї основи.

54. Бічне ребро піраміди поділено на чотири рівні частини і через точки поділу проведено площини, паралельні основі. Площа основи дорівнює 400 см^2. Знайдіть площі перерізів.

55. Висота піраміди дорівнює 16 м. Площа основи дорівнює 512 м^2. На якій відстані від основи знаходиться переріз, паралельний їй, якщо площа перерізу 50 м^2?

56. У правильній трикутній піраміді з висотою h через сторону основи a проведено площину, яка перетинає протилежне бічне ребро під прямим кутом. Знайдіть площу перерізу.

57. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи 8 см. Знайдіть бічне ребро.

58. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть двогранний кут x при основі піраміди.

59. За даною стороною основи a і бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

60. За даною стороною основи a і висотою b знайдіть апофему правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

61. За стороною a і висотою h знайдіть повну поверхню правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

62. Знайдіть повну поверхню правильної шестикутної піраміди, якщо її бічне ребро a, а радіус кола, вписаного в основу, r.

63. У правильній чотирикутній піраміді бічна поверхня дорівнює 14,76 м^2, а повна поверхня 18 м^2. Знайдіть сторону основи і висоту піраміди.

64. За стороною основи a знайдіть бічну поверхню правильної чотирикутної піраміди, діагональний переріз якої рівновеликий основі.

65. Знайдіть бічну поверхню піраміди, якщо площа основи Q, а двогранні кути при основі φ.

66. Знайдіть двогранні кути при основі правильної піраміди, площа основи якої дорівнює Q, а бічна поверхня — S.

67. Знайдіть сторону основи і апофему правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см, а бічна поверхня дорівнює 144 см^2.

68. У правильній чотирикутній піраміді знайдіть сторону основи, якщо бічне ребро дорівнює 5 см, а повна поверхня 16 см^2.

69. Доведіть, що бічна поверхня правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему.

70. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см. Сторони основ дорівнюють 10 см і 2 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

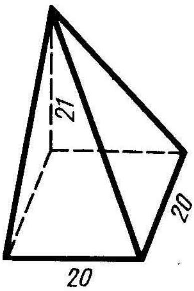
71. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди 4 дм і 1 дм. Бічне ребро 2 дм. Знайдіть висоту піраміди.

72. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді висота дорівнює 2 см, а сторони основи 3 см і 5 см. Знайдіть діагональ цієї піраміди.

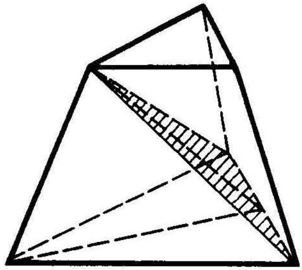
73. Сторони основ зрізаної правильної трикутної піраміди 2 см і 6 см. Бічна грань утворює з більшою основою кут 60°. Знайдіть висоту.

74. У правильній зрізаній трикутній піраміді сторона більшої основи a, сторона меншої основи b. Бічне ребро утворює з основою кут 45°. Знайдіть площу перерізу, який проходить через бічне ребро і вісь піраміди [1].

[1] Вісь правильної зрізаної піраміди збігається з віссю відповідної повної піраміди.



Мал. 121



Мал. 122

75. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 4 см. Сторони основ дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть площі діагональних перерізів.

76. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторона нижньої основи 8 м, верхньої 5 м, а висота 3 м. Проведіть переріз через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої основи. Знайдіть площу утвореного перерізу і двогранний кут між перерізом і нижньою основою (мал. 122).

77. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ 8 м і 2 м. Висота дорівнює 4 м. Знайдіть повну поверхню.

78. Знайдіть повну поверхню правильної зрізаної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної, якщо висота h, а сторони основ a і b.

79. Доведіть, що центри граней куба є вершинами октаедра, а центри граней октаедра є вершинами куба.

80. Доведіть, що кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба є вершинами тетраедра.

81. Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра.

82*. Знайдіть двогранні кути октаедра.

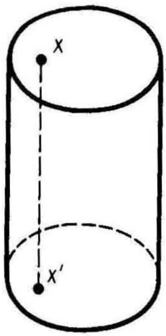
83. Які площини симетрії має правильний тетраедр?

84*. Скільки площин симетрії у правильного октаедра, додекаедра, ікосаедра?

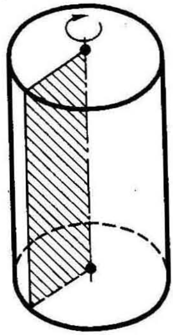
§ 6. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

52. ЦИЛІНДР

Циліндром (точніше, круговим циліндром) називається тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині і суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих кругів (мал. 123). Круги називаються *основами циліндра*, а відрізки, що сполучають точки кіл кругів,— *твірними циліндра*.



Мал. 123



Мал. 124

Оскільки паралельне перенесення є рух, то ***основи циліндра рівні.***

Через те що при паралельному перенесенні площина переходить у паралельну площину (або в себе), то ***основи циліндра лежать у паралельних площинах.***

Оскільки при паралельному перенесенні точки зміщуються вздовж паралельних прямих або прямих, що збігаються, на одну й ту саму відстань, то ***твірні циліндра паралельні і рівні.***

Поверхня циліндра складається з основ і бічної поверхні. Бічна поверхня — з твірних.

Циліндр називається *прямим*, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ.

Далі розглядатимемо тільки прямий циліндр, називаючи його коротко просто циліндром. Прямий циліндр наочно можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника навколо сторони як осі (мал. 124).

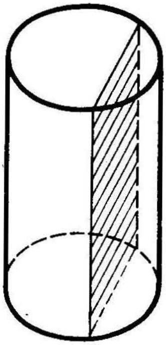
Радіусом циліндра називається радіус його основи. *Висотою циліндра* називається відстань між площинами його основ. *Віссю циліндра* називається пряма, яка проходить через центри основ. Вона паралельна твірним.

53. ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ

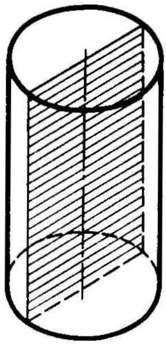
Переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є прямокутник (мал. 125). Дві його сторони — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ. Зокрема, прямокутником є *осьовий переріз*. Це переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь (мал. 126).

З а д а ч а (2). Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого Q. Знайдіть площу основи циліндра.

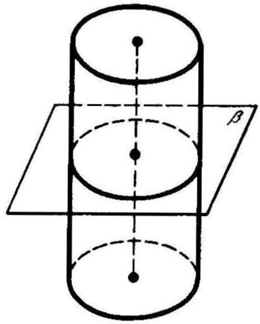
Р о з в'я з а н н я. Сторона квадрата дорівнює $\sqrt{Q}$. Вона дорівнює діаметру основи. Тому площа основи дорівнює $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$.



Мал. 125



Мал. 126



Мал. 127

Т е о р е м а 6.1. ***Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.***

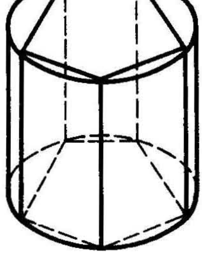
Д о в е д е н н я. Нехай β — площина, паралельна площині основи циліндра (мал. 127). Паралельне перенесення вздовж напряму осі циліндра, яке суміщає площину β з площиною основи циліндра, суміщає переріз бічної поверхні площиною β з колом основи. Теорему доведено.

54. ВПИСАНА І ОПИСАНА ПРИЗМИ

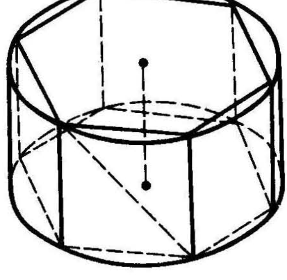
Призмою, вписаною у циліндр, називається така призма, у якої площинами основ є площини основ циліндра, а бічними ребрами — твірні циліндра (мал. 128).

З а д а ч а (7). У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть кут між діагоналлю її бічної грані і віссю циліндра, якщо радіус основи дорівнює висоті циліндра.

Р о з в' я з а н н я. Бічні грані призми — квадрати, оскільки сторона правильного шестикутника, вписаного у



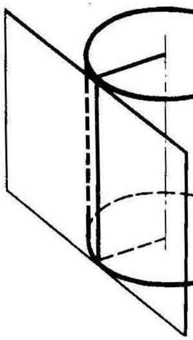
Мал. 128



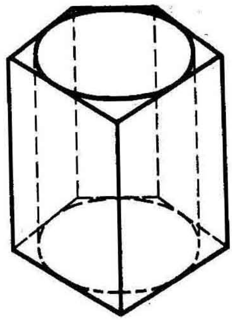
Мал. 129

коло, дорівнює радіусу (мал. 129). Ребра призми паралельні осі циліндра, тому кут між діагоналлю грані і віссю циліндра дорівнює куту між діагоналлю і бічним ребром. А цей кут дорівнює 45°, оскільки грані — квадрати.

Дотичною площиною до циліндра називається площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осьового перерізу, що містить цю твірну (мал. 130).



Мал. 130



Мал. 131

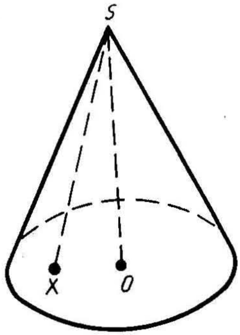
Призмою, описаною навколо циліндра, називається призма, у якої площинами основ є площини основ циліндра, а бічні грані дотикаються до циліндра (мал. 131).

55. КОНУС

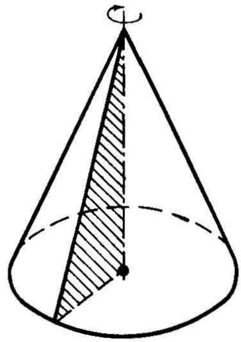
Конусом (точніше, круговим конусом) називається тіло, яке складається з круга — *основи конуса*, точки, яка не лежить у площині цього круга — *вершини конуса* і всіх відрізків, що сполучають вершину конуса з точками основи (мал. 132). Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса.* Поверхня конуса складається з основи і бічної поверхні.

Конус називається *прямим*, якщо пряма, що сполучає вершину конуса з центром основи, перпендикулярна до площини основи. Далі розглядатимемо лише прямий конус, називаючи його просто конусом. Наочно прямий круговий конус можна розглядати як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі (мал. 133).

Висотою конуса називається перпендикуляр, опущений з його вершини на площину основи. У прямого конуса основа висоти збігається з центром основи. *Віссю прямого кругового конуса* називається пряма, яка містить його висоту.



Мал. 132



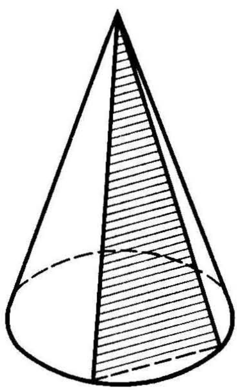
Мал. 133

56. ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ

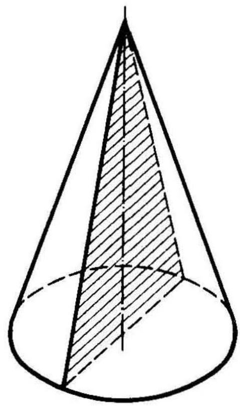
Переріз конуса площиною, яка проходить через його вершину, є рівнобедрений трикутник, у якого бічні сторони є твірними конуса (мал. 134). Зокрема, рівнобедреним трикутником є *осьовий переріз* конуса. Це переріз, який проходить через вісь конуса (мал. 135).

Теорема 6.2. ***Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по кругу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.***

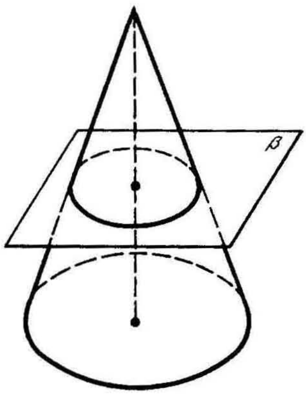
Доведення. Нехай β — площина, яка паралельна площині основи конуса і перетинає конус (мал. 136). Перетворення гомотетії відносно вершини конуса, яке суміщає площину β з площиною основи, суміщає переріз конуса площиною β з основою конуса. Отже, переріз конуса площиною є круг, а переріз



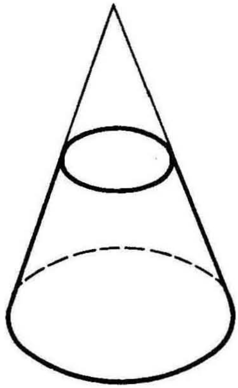
Мал. 134



Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137

бічної поверхні — коло з центром на осі конуса. Теорему доведено.

Задача (15). Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса R, а висота H.

Розв'язання. Переріз конуса дістанемо з основи конуса перетворенням гомотетії відносно вершини конуса з коефіцієнтом гомотетії $k=\frac{d}{H}$. Тому радіус круга перерізу $r=R\frac{d}{H}$. Отже, площа перерізу $S=\pi R^2\frac{d^2}{H^2}$.

Площина, яка паралельна основі конуса і перетинає конус, відтинає від нього менший конус. Частина, що залишилася, називається *зрізаним конусом* (мал. 137).

57. ВПИСАНА І ОПИСАНА ПІРАМІДИ

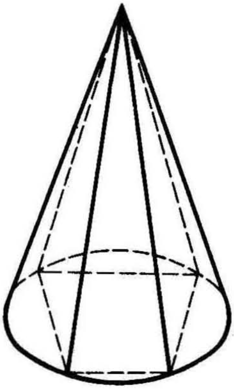
Пірамідою, вписаною в конус, називається така піраміда, основою якої є многокутник, вписаний у коло основи конуса, а вершиною — вершина конуса (мал. 138). Бічні ребра піраміди, вписаної в конус, є твірними конуса.

Задача (25). Усі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що вона вписана у деякий конус.

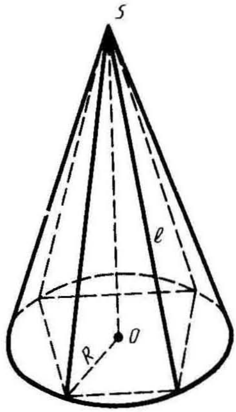
Розв'язання. Опустимо перпендикуляр SO з вершини піраміди на площину основи (мал.139) і позначимо довжину бічних ребер піраміди через l. Вершини основи віддалені від точки O на одну й ту ж відстань

$$R=\sqrt{l^2-OS^2}.$$

Звідси випливає, що наша піраміда вписана в конус, вершина якого є вершиною піраміди, а основа — круг з центром O і радіусом R.



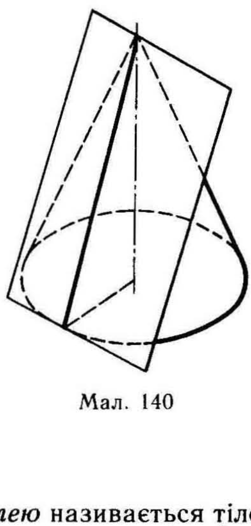
Мал. 138



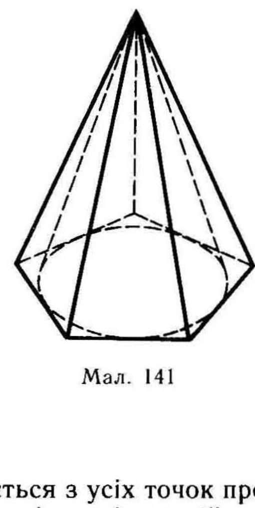
Мал. 139

Дотичною площиною до конуса називається площина, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осьового перерізу, проведеного через цю твірну (мал. 140).

Пірамідою, описаною навколо конуса, називається піраміда, в основі якої лежить многокутник, описаний навколо основи конуса, а вершина збігається з вершиною конуса (мал. 141). Площини бічних граней описаної піраміди є дотичними площинами до конуса.



Мал. 140

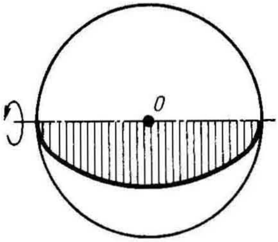


Мал. 141

58. КУЛЯ

Кулею називається тіло, що складається з усіх точок простору, які знаходяться від даної точки на відстані, не більшій за дану. Ця точка називається *центром кулі*, а дана відстань *радіусом кулі*.

Межа кулі називається *кульовою поверхнею* або *сферою*. Таким чином, точками сфери є всі точки кулі, які віддалені від центра на відстань, що дорівнює радіусу. Будь-який відрізок, який сполучає центр кулі з точкою кульової поверхні, теж називається радіусом.



Мал. 142

Відрізок, який сполучає дві точки кульової поверхні і проходить через центр кулі, називається *діаметром*. Кінці будь-якого діаметра називаються *діаметрально протилежними точками кулі*.

Куля так само, як циліндр і конус, є тілом обертання. Вона утворюється під час обертання півкруга навколо його діаметра як осі (мал. 142).

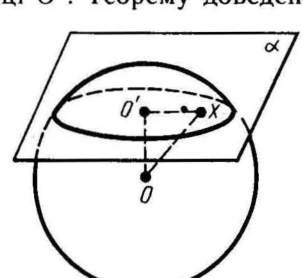
59. ПЕРЕРІЗ КУЛІ ПЛОЩИНОЮ

Теорема 6.3. ***Будь-який переріз кулі площиною є круг. Центр цього круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.***

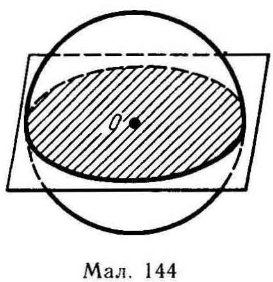
Доведення. Нехай α — січна площина і O — центр кулі (мал. 143). Опустимо перпендикуляр з центра кулі на площину α і позначимо через O' основу цього перпендикуляра.

Нехай X — довільна точка кулі, яка належить площині α. За теоремою Піфагора $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Оскільки OX не більший за радіус R кулі, то $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, тобто довільна точка перерізу кулі площиною α знаходиться від точки O' на відстані, не більшій за $\sqrt{R^2 - OO'^2}$, а тому належить кругу з центром O' і радіусом $\sqrt{R^2 - OO'^2}$.

Навпаки: довільна точка X цього круга належить кулі. А це означає, що переріз кулі площиною α є круг з центром у точці O'. Теорему доведено.



Мал. 143

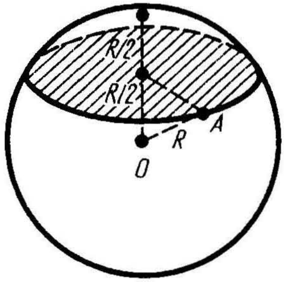


Мал. 144

Площина, яка проходить через центр кулі, називається *діаметральною площиною*. Переріз кулі діаметральною площиною називається *великим кругом* (мал. 144), а переріз сфери — *великим колом*.

Задача (30). Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Як відноситься площа утвореного перерізу до площі великого круга?

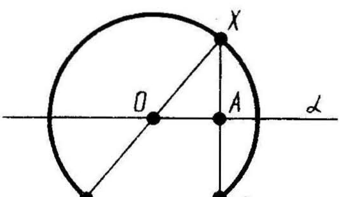
Розв'язання. Якщо радіус кулі R (мал. 145), то радіус круга в перерізі буде $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$. Відношення площі цього круга до площі великого круга дорівнює $\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 : \pi R^2=\frac{3}{4}$.



Мал. 145

60. СИМЕТРІЯ КУЛІ

Теорема 6.4. ***Будь-яка діаметральна площина кулі є її площиною симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.***



Мал. 146

Доведення. Нехай α — діаметральна площина і X — довільна точка кулі (мал. 146). Побудуємо точку X', симетричну точці X відносно площини α.

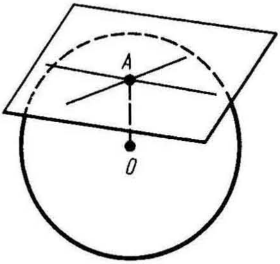
Площина α перпендикулярна до відрізка XX' і ділить його пополам (у точці A). З рівності прямокутних трикутників OAX і OAX' випливає, що $OX'=OX$.

Оскільки $OX \leqslant R$, то і $OX' \leqslant R$, тобто точка, симетрична точці X, належить кулі. Перше твердження теореми доведено.

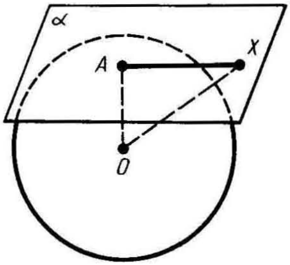
Нехай тепер X'' — точка, симетрична точці X відносно центра кулі. Тоді $OX''=OX \leqslant R$, тобто точка X'' належить кулі. Теорему доведено повністю.

61. ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ДО КУЛІ

Площина, яка проходить через точку A кульової поверхні і перпендикулярна до радіуса, проведеного у точку A, називається *дотичною площиною*. Точка A називається *точкою дотику* (мал. 147).



Мал. 147

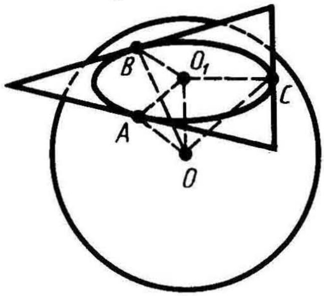


Мал. 148

Теорема 6.5. ***Дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику.***

Доведення. Нехай α — площина, дотична до кулі, і A — точка дотику (мал. 148). Візьмемо довільну точку X площини α, відмінну від A. Оскільки OA — перпендикуляр, а OX — похила, то $OX > OA = R$. Отже, точка X не належить кулі. Теорему доведено.

Пряма, яка належить дотичній до кулі площині і проходить через точку дотику, називається *дотичною до кулі* в цій точці. Оскільки дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку, то дотична пряма теж має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику.



Мал. 149

Задача (39). Куля радіуса R дотикається до всіх сторін правильного трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

Розв'язання. Нехай A, B, C — точки дотику кулі до сторін трикутника (мал. 149). Опустимо з центра O кулі перпендикуляр OO_1 на площину трикутника. Відрізки OA, OB і OC перпендикулярні до сторін. За теоремою про три перпендикуляри відрізки O_1A, O_1B, O_1C теж перпендикулярні до відповідних сторін трикутника.

З рівності прямокутних трикутників OO_1A, OO_1B, OO_1C (у них катет спільний, а гіпотенузи дорівнюють радіусу) випливає рівність сторін $O_1A = O_1B = O_1C$. Отже, O_1 — центр кола, вписаного у трикутник. Радіус цього кола, як ми знаємо, дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. За теоремою Піфагора знаходимо шукану відстань. Вона дорівнює $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$.

62. ПЕРЕТИН ДВОХ СФЕР

Теорема 6.6. ***Лінія перетину двох сфер є коло.***

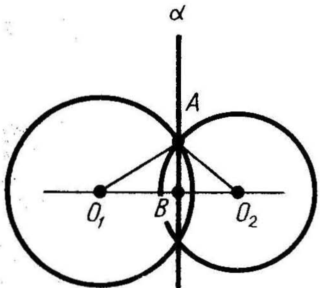
Доведення. Нехай O_1 і O_2 — центри сфер і A — їх точка перетину (мал. 150). Проведемо через точку A площину α, перпендикулярну до прямої O_1O_2.

Позначимо через B точку перетину площини α з прямою O_1O_2. За теоремою 6.3 площина α перетинає обидві сфери по колу K з центром B, яке проходить через точку A. Таким чином, коло K належить перетину сфер.

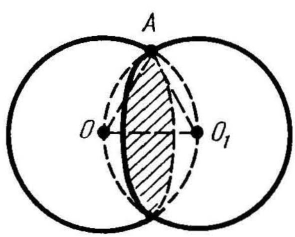
Покажемо тепер, що сфери не мають інших точок перетину, крім точок кола K. Припустимо, що точка X перетину сфер не лежить на колі K. Проведемо площину через точку X і пряму O_1O_2. Вона перетне сфери по колах з центрами O_1 і O_2. Ці кола перетинаються у двох точках, які належать колу K, та ще в точці X. Але два кола не можуть мати більш ніж дві точки перетину. Ми прийшли до суперечності. Отже, перетином наших сфер є коло (K). Теорему доведено.

Задача (44). Дві рівні кулі радіуса R розміщено так, що центр однієї лежить на поверхні другої. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

Розв'язання. Проведемо переріз через центри куль (мал. 151). Лінія, про яку йдеться у задачі, є коло (теорема 6.6). Його радіус дорівнює висоті рівностороннього трикутника OAO_1 із сторонами, які дорівнюють R. Висота дорівнює $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Отже, довжина лінії дорівнює $\pi R\sqrt{3}$.



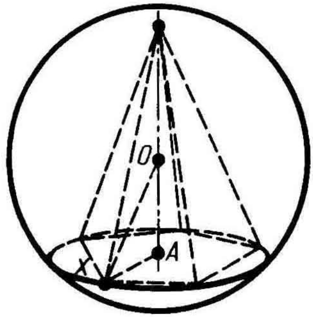
Мал. 150



Мал. 151

63. ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ МНОГОГРАННИКИ

Многогранник називається *вписаним у кулю*, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі. Многогранник називається *описаним навколо кулі*, якщо всі його грані дотикаються до поверхні кулі.



Мал. 152

Задача (47). Доведіть, що центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на її осі.

Розв'язання. Опустимо перпендикуляр OA з центра кулі O на площину основи піраміди (мал. 152). Нехай X — довільна вершина основи піраміди. За теоремою Піфагора $AX^2 = OX^2 - OA^2 = R^2 - OA^2$. Таким чином, AX одне і те саме для будь-якої вершини основи піраміди. А це означає, що точка A є центром кола, описаного навколо основи піраміди. Отже, центр кулі O лежить на осі піраміди.

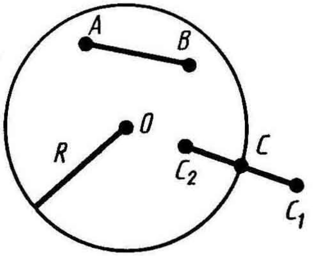
64. ПРО ПОНЯТТЯ ТІЛА І ЙОГО ПОВЕРХНІ В ГЕОМЕТРІЇ

У попередньому викладі матеріалу ми неодноразово вживали вирази — *тіло* і *поверхня тіла*, вкладаючи в їх зміст знайомі вам наочні уявлення. Тепер дамо означення геометричного тіла і його поверхні.

Точка фігури називається *внутрішньою*, якщо існує куля з центром у цій точці, яка повністю належить цій фігурі. Фігура називається *областю*, якщо всі її точки внутрішні і коли будь-які дві її точки можна сполучити ламаною, яка повністю належить фігурі. Пояснимо дане означення на прикладі кулі (мал. 153).

Кожна точка кулі, яка віддалена від її центра на відстань r, меншу від R, є внутрішньою точкою кулі, оскільки куля з центром у цій точці і радіусом $R - r$ міститься у початковій кулі радіуса R. Усі точки кулі, віддалені від центра на відстань, меншу за R, утворюють область. Справді, будь-які такі дві точки A і B сполучаються відрізком AB, всі точки якого віддалені від центра на відстань, меншу від R.

Точка простору називається *граничною точкою* даної фігури, якщо будь-яка куля з центром у цій точці містить як точки, що



Мал. 153

належать фігурі, так і точки, що їй не належать. Для кулі граничними точками є точки, віддалені від точки O на відстань, що дорівнює R, тобто межею кулі є сфера. Для кожної такої точки C можна вказати у кожній кулі з центром C і радіусом $r>0$ точки C_1 і C_2, віддалені від точки O на відстань, більшу від R, і на відстань, меншу за R.

Область разом з її границею називається *замкненою областю.*

Тілом називається скінченна замкнена область. Межа тіла називається *поверхнею тіла.* Куля — приклад тіла. Іншими прикладами тіл є многогранник, циліндр і конус.

Подібно до того, як у просторі, на площині вводяться поняття внутрішньої точки фігури, граничної точки і області. Граничні точки області утворюють границю області. У крузі радіуса R точки, які знаходяться на відстані, меншій за R від центра,— внутрішні, а точки, що знаходяться на відстані R,— граничні. Круг — замкнена область.

Плоский многокутник — це обмежена замкнена область на площині, межею якої є многокутник.

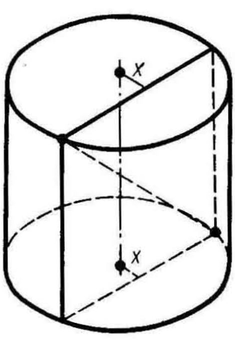
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке круговий циліндр (твірна циліндра, основи циліндра, бічна поверхня циліндра).
2. Який циліндр називається прямим?
3. Що таке радіус циліндра, висота циліндра, вісь циліндра, осьовий переріз циліндра?
4. Доведіть, що площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.
5. Що таке призма, вписана у циліндр (описана навколо циліндра)? Що таке дотична площина до циліндра?
6. Що таке круговий конус, вершина конуса, твірна конуса, основа конуса, бічна поверхня конуса?
7. Який конус називається прямим?
8. Що таке висота конуса, вісь конуса, осьовий переріз конуса?
9. Доведіть, що площина, паралельна площині основи конуса, перетинає бічну поверхню по колу з центром на осі конуса.
10. Що таке зрізаний конус?
11. Яка піраміда називається вписаною у конус (описаною навколо конуса)? Що таке дотична площина до конуса?
12. Що таке куля (кульова поверхня або сфера)?

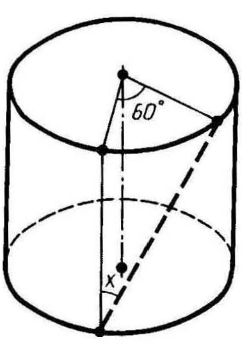
13. Що таке радіус кулі, діаметр кулі? Які точки кулі називаються діаметрально протилежними?
14. Доведіть, що перетином кулі з площиною є круг.
15. Яка площина називається діаметральною площиною кулі? Що таке великий круг?
16. Доведіть, що будь-яка діаметральна площина кулі є площиною її симетрії. Центр кулі є її центром симетрії.
17. Яка площина називається дотичною до кулі?
18. Доведіть, що дотична площина має з кулею тільки одну спільну точку — точку дотику.
19. Яка пряма називається дотичною до кулі?
20. Доведіть, що лінія перетину двох сфер є коло.
21. Який многогранник називається вписаним у кулю (описаним навколо кулі)?

ЗАДАЧІ

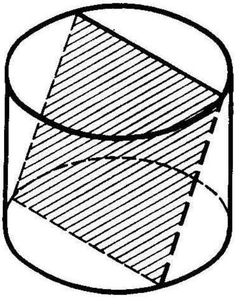
1. Радіус основи циліндра 2 м, висота 3 м. Знайдіть діагональ осьового перерізу.
2. Осьовий переріз циліндра — квадрат, площа якого Q. Знайдіть площу основи циліндра.
3. Висота циліндра 6 см, радіус основи 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.
4. Висота циліндра 8 дм, радіус основи 5 дм. Циліндр перетнуто площиною так, що у перерізі утворився квадрат. Знайдіть відстань від цього перерізу до осі (мал. 154).
5. Висота циліндра 6 дм, радіус основи 5 дм. Кінці відрізка AB завдовжки 10 дм лежать на колах обох основ. Знайдіть найкоротшу відстань від нього до осі.
6. У рівносторонньому циліндрі (діаметр дорівнює висоті циліндра) точку кола верхньої основи сполучено з точкою кола нижньої основи. Кут між радіусами, проведеними у ці точки, дорівнює 60°. Знайдіть кут x між проведеною прямою і віссю циліндра (мал. 155).



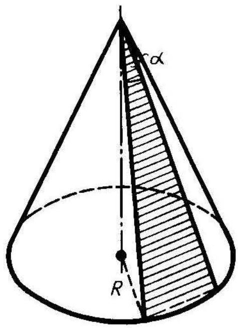
Мал. 154



Мал. 155



Мал. 156



Мал. 157

7. У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Знайдіть кут між діагоналлю її бічної грані і віссю циліндра, якщо радіус основи дорівнює висоті циліндра.

8. Висота циліндра 2 м. Радіус основи 7 м. У цей циліндр похило вписано квадрат так, що всі вершини його лежать на колах основ. Знайдіть сторону квадрата (мал. 156).

9. Радіус основи конуса 3 м, висота 4 м. Знайдіть твірну.

10. Твірна конуса l нахилена до площини основи під кутом 30°. Знайдіть висоту.

11. Радіус основи конуса R. Осьовий переріз конуса — прямокутний трикутник. Знайдіть його площу.

12. У рівносторонньому конусі (в осьовому перерізі — правильний трикутник) радіус основи R. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює α (мал. 157).

13. Висота конуса 20, радіус його основи 25. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину, якщо відстань від нього до центра основи конуса дорівнює 12.

14. Радіус основи конуса R, а твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Знайдіть площу утвореного перерізу.

15. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса R, а висота H.

16. Висота конуса H. На якій відстані від вершини треба провести площину, паралельну основі, щоб площа перерізу дорівнювала половині площі основи?

17. Через середину висоти конуса проведено пряму паралельно твірній l. Знайдіть довжину відрізка прямої, який міститься всередині конуса.

18*. Твірна конуса 13 см, висота 12 см. Конус перетнуто прямою, паралельною основі, відстань від неї до основи дорівнює 6 см, а до висоти 2 см. Знайдіть відрізок цієї прямої, який міститься всередині конуса (мал. 158).

19. Радіуси основ зрізаного конуса 3 м і 6 м, висота 4 м. Знайдіть твірну.

20. Радіуси основ зрізаного конуса R і r, твірна нахилена до основи під кутом 45°. Знайдіть висоту.

21. Твірна зрізаного конуса дорівнює $2a$ і нахилена до основи під кутом 60°. Радіус однієї основи вдвічі більший від радіуса другої основи. Знайдіть кожний з радіусів.

22. Радіуси основ зрізаного конуса 3 дм і 7 дм, твірна 5 дм. Знайдіть площу осьового перерізу.

23. Площі основ зрізаного конуса 4 дм^2 і 16 дм^2. Через середину висоти проведено площину, паралельну основам. Знайдіть площу перерізу.

24. Площі основ зрізаного конуса M і m. Знайдіть площу середнього перерізу, паралельного основам.

25. Усі бічні ребра піраміди рівні. Доведіть, що вона вписана у деякий конус.

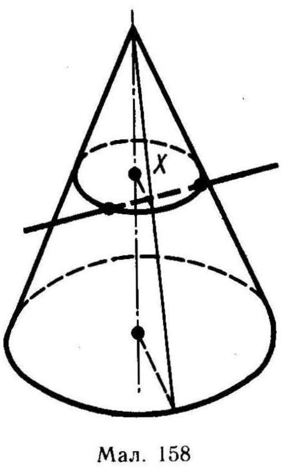
26*. У конусі дано радіус основи R і висоту H. Знайдіть ребро вписаного у нього куба (мал. 159).

27*. У конусі дано радіус основи R і висоту H. У нього вписано правильну трикутну призму, бічні грані якої — квадрати. Знайдіть ребро призми.

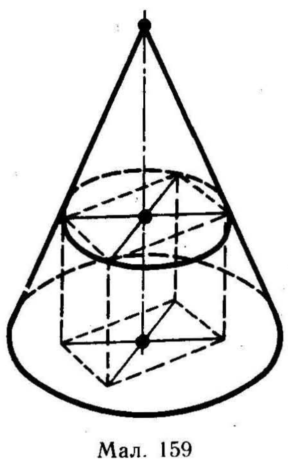
28. Півкуля і вписаний у неї конус мають спільну основу і спільну висоту. Через середину висоти проведено площину, паралельну основі. Доведіть, що площа перерізу, яка міститься між бічною поверхнею конуса і поверхнею півкулі, дорівнює половині площі основи (мал. 160).

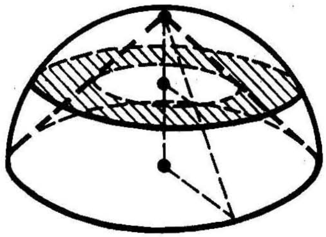
29. Кулю, радіус якої 41 дм, перетнуто площиною на відстані 9 дм від центра. Знайдіть площу перерізу.

30. Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярно до нього площину. Як відноситься площа утвореного перерізу до площі великого круга?

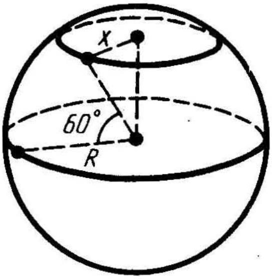


Мал. 158


Мал. 159



Мал. 160



Мал. 161

31. Радіус кулі R. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 60° до нього. Знайдіть площу перерізу.

32. Радіус земної кулі R. Чому дорівнює довжина паралелі, якщо її широта 60° (мал. 161)?

33. Місто N знаходиться на 60° північної широти. Який шлях долає цей пункт за 1 годину внаслідок обертання Землі навколо своєї осі? Вважати, що радіус Землі дорівнює 6000 км.

34. На поверхні кулі дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 6 см, 8 см, 10 см. Радіус кулі 13 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини, яка проходить через ці точки.

35. Діаметр кулі 25 см. На її поверхні дано точку A і коло, всі точки якого віддалені (по прямій лінії) від A на 15 см. Знайдіть радіус цього кола.

36* Радіус кулі 7 см. На її поверхні дано два рівних кола, які мають спільну хорду довжиною 2 см. Знайдіть радіуси кіл, знаючи, що їх площини перпендикулярні (мал. 162).

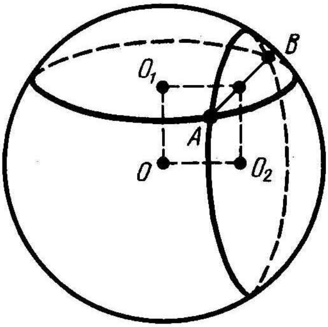
37. Дано кулю радіуса R. Через одну точку її поверхні проведено дві площини: перша — дотична до кулі, друга — під кутом 30° до першої. Знайдіть площу перерізу.

38. Тіло обмежено двома концентричними кульовими поверхнями (порожниста куля). Доведіть, що його переріз площиною, яка проходить через центр, рівновеликий перерізу, дотичному до внутрішньої кульової поверхні (мал. 163).

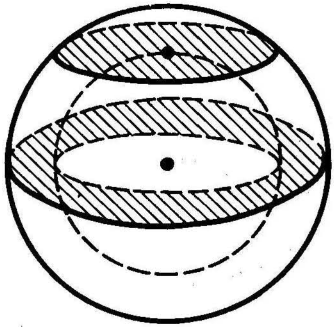
39. Куля радіуса R дотикається до всіх сторін правильного трикутника із стороною a. Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

40. Сторони трикутника 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі 5 см.

41. Діагоналі ромба 15 см і 20 см. Кульова поверхня дотикається до всіх його сторін. Радіус кулі 10 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ромба.



Мал. 162



Мал. 163

42. Через дотичну до поверхні кулі проведено дві взаємно перпендикулярні площини, які перетинають кулю по кругах радіусів r_1 і r_2. Знайдіть радіус кулі R.

43. Кулю радіуса R вписано у зрізаний конус. Кут нахилу твірної до площини нижньої основи конуса дорівнює α. Знайдіть радіуси основ і твірну зрізаного конуса.

44. Дві рівні кулі радіуса R розміщено так, що центр однієї лежить на поверхні другої. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

45. Радіуси куль дорівнюють 25 дм і 29 дм, а відстань між їх центрами 36 дм. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

46. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо куба із стороною a.

47. Доведіть, що центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на її осі.

48. Доведіть, що центр кулі, вписаної у правильну піраміду, лежить на її висоті.

49. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильного тетраедра з ребром a.

50. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a, а плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть радіуси вписаної і описаної куль.

51*. У кулю радіуса R вписано правильну трикутну піраміду з плоскими кутами α при її вершині. Знайдіть висоту піраміди.

52. Правильну n-кутну призму вписано у кулю радіуса R. Ребро основи призми дорівнює a. Знайдіть висоту призми, якщо: 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.

53. Сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, двогранний кут при основі дорівнює φ. Знайдіть радіус кулі, вписаної у піраміду.

54. Знайдіть радіус кулі, описаної навколо правильної n-кутної піраміди, якщо сторона основи дорівнює a, а бічне ребро нахилене до площини основи під кутом α.

§ 7. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ

65. ПОНЯТТЯ ОБ'ЄМУ

Так само, як для фігур на площині вводиться поняття площі, для тіл у просторі вводиться поняття об'єму. Спочатку розглянемо тільки прості тіла. Тіло називається *простим,* якщо його можна розбити на скінченну кількість трикутних пірамід.

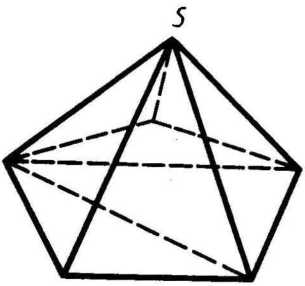
Для простих тіл *об'єм — це додатна величина, числове значення якої має такі властивості:*

1. *Рівні тіла мають рівні об'єми.*

2. *Якщо тіло розбито на частини, які є простими тілами, то об'єм цього тіла дорівнює сумі об'ємів його частин.*

3. *Об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.*

Якщо куб, про який ідеться в означенні, має ребро 1 см, то об'єм буде у кубічних сантиметрах; якщо ребро куба дорівнює 1 м, то — у кубічних метрах; якщо ребро куба дорівнює 1 км, то об'єм — у кубічних кілометрах і т. д.



Мал. 164

Прикладом простого тіла є довільний опуклий многогранник. Його можна розбити на скінченну кількість трикутних пірамід таким чином. Візьмемо яку-небудь вершину S многогранника. Розіб'ємо на трикутники всі грані многогранника, які не містять вершину S. Тоді трикутні піраміди, для яких основами є ці трикутники, а спільною вершиною точка S, дають розбиття многогранника на трикутні піраміди. На малюнку 164 показано таке розбиття для довільної піраміди.

66. ОБ'ЄМ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Знайдемо об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними розмірами a, b, c. Для цього спочатку доведемо, що об'єми двох прямокутних паралелепіпедів з рівними основами відносяться, як їх висоти.

Нехай P і P_1 — два прямокутні паралелепіпеди із спільною основою $ABCD$ і висотами AE і AE_1 (мал. 165). Нехай V і V_1 — їх об'єми. Розіб'ємо ребро AE паралелепіпеда P на велику кількість n рівних частин. Кожна з них дорівнює $\frac{AE}{n}$. Нехай

m — кількість точок поділу, які лежать на ребрі AE_1. Тоді

$$\left(\frac{AE}{n}\right)m \leqslant AE_1 \leqslant \left(\frac{AE}{n}\right)(m+1).$$

Звідси

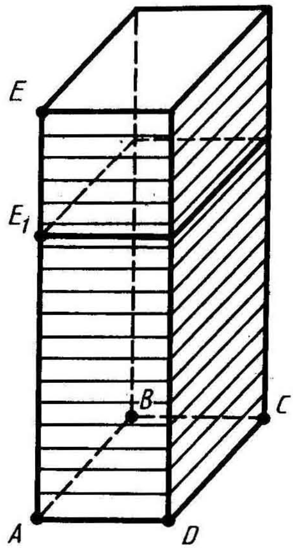
$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AE_1}{AE} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведемо через точки поділу площини, паралельні основі. Вони розіб'ють паралелепіпед P на n рівних паралелепіпедів. Кожний з них має об'єм $\frac{V}{n}$. Паралелепіпед P_1 містить перші m паралелепіпедів, починаючи знизу, і міститься у $m+1$ паралелепіпедах. Тому

$$\left(\frac{V}{n}\right)m \leqslant V_1 \leqslant \left(\frac{V}{n}\right)(m+1).$$

Звідси

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{V_1}{V} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$



Мал. 165

З нерівностей (*) і (**) бачимо, що обидва числа $\frac{V_1}{V}$ і $\frac{AE_1}{AE}$ містяться між $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Тому вони відрізняються не більш ніж на $\frac{1}{n}$. А оскільки n можна взяти як завгодно великим, то це може бути тільки тоді, коли $\frac{V_1}{V} = \frac{AE_1}{AE}$, що й треба було довести.

Візьмемо тепер куб, який є одиницею виміру об'єму, і три прямокутні паралелепіпеди з вимірами: a, 1, 1; a, b, 1; a, b, c. Позначимо їх об'єми V_1, V_2, V. За доведеним

$$\frac{V_1}{1} = \frac{a}{1}, \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{b}{1}, \quad \frac{V}{V_2} = \frac{c}{1}.$$

Перемноживши ці три рівності почленно, дістанемо:

$$V = abc.$$

Отже, ***об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a, b, c обчислюється за формулою V = abc.***

Задача (3). Якщо кожне ребро куба збільшити на 2 см, то його об'єм збільшиться на 98 см^3. Чому дорівнює ребро куба?

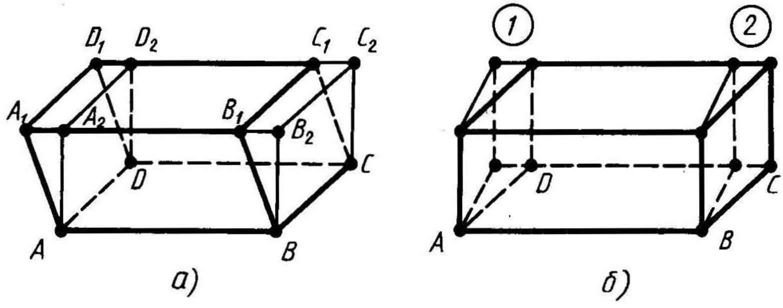
Розв'язання. Позначимо ребро куба через x; тоді $(x+2)^3 - x^3 = 98$, тобто $x^2 + 2x - 15 = 0$. Рівняння має два корені $x = 3$, $x = -5$. Геометричний зміст має тільки додатний корінь. Отже, ребро куба дорівнює 3 см.

67. ОБ'ЄМ ПОХИЛОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА

Знайдемо об'єм похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 166).

Проведемо через ребро BC площину, перпендикулярну до основи $ABCD$, і доповнимо похилий паралелепіпед трикутною призмою $BB_1B_2CC_1C_2$ (мал. 166, *а*). Відітнемо від утвореного тіла трикутну призму площиною, яка проходить через ребро AD і перпендикулярна до основи $ABCD$. Тоді знову утвориться паралелепіпед. Цей паралелепіпед має об'єм, що дорівнює об'єму початкового паралелепіпеда.

Справді, добудована призма і відтята суміщаються паралельним перенесенням на відрізок AB, отже, мають однакові об'єми. При такому перетворенні паралелепіпеда зберігаються площа його основи і висота. Зберігаються також площини двох бічних граней, а дві інші стають перпендикулярними до основ.



Мал. 166

Застосовуючи ще раз таке перетворення до похилих граней, дістанемо паралелепіпед з усіма бічними гранями, перпендикулярними до основи, тобто прямий паралелепіпед.

Утворений прямий паралелепіпед перетворимо аналогічно у прямокутний паралелепіпед, доповнюючи його спочатку призмою 1, а потім відтинаючи призму 2 (мал. 166, *б*). Це перетворення теж зберігає об'єм паралелепіпеда, площу основи і висоту.

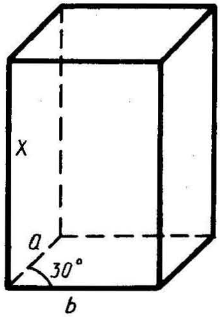
Об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його вимірів. Добуток двох вимірів є площею основи паралелепіпеда, а третій вимір — його висота.

Таким чином, об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту. Оскільки при описаному вище перетворенні даного паралелепіпеда у прямокутний щоразу зберігається об'єм, площа основи і висота, то і об'єм початкового паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.

Отже, ***об'єм будь-якого паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.***

З а д а ч а (11). У прямому паралелепіпеді сторони основи a і b утворюють кут 30°. Бічна поверхня дорівнює S. Знайдіть його об'єм.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо висоту через x (мал. 167). Тоді $(2a+$ $+2b)x=S$. Звідси $x=\frac{S}{2(a+b)}$. Площа основи паралелепіпеда дорівнює $ab\sin 30°=\frac{ab}{2}$. Об'єм дорівнює $\frac{abS}{4(a+b)}$.

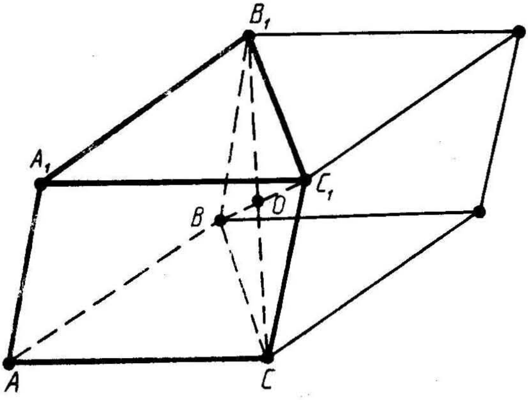


Мал. 167

68. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ

Розглянемо спочатку трикутну призму (мал. 168). Доповнимо її до паралелепіпеда, як показано на малюнку. Точка O є центром симетрії паралелепіпеда. Тому добудована призма симетрична даній відносно точки O, отже, маємо об'єм, який дорівнює об'єму даної призми. Таким чином, об'єм побудованого паралелепіпеда дорівнює подвоєному об'єму даної призми.

Об'єм паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту. Площа його основи дорівнює подвоєній площі трикутника ABC, а висота дорівнює висоті даної призми. Звідси випливає, що об'єм даної призми дорівнює добутку її основи на висоту.



Мал. 168

Розглянемо тепер довільну призму (мал. 169). Розіб'ємо її основу на трикутники. Нехай $\triangle$ — один з цих трикутників. Проведемо через довільну точку X трикутника $\triangle$ пряму, паралельну бічним ребрам. Нехай a_x — відрізок цієї прямої, який належить призмі. Коли точка X описує трикутник $\triangle$, відрізки a_x заповнюють трикутну призму. Побудувавши таку призму для кожного трикутника $\triangle$, дістанемо розбиття даної призми на трикутні. Усі ці призми мають одну і ту саму висоту, яка дорівнює висоті даної призми.

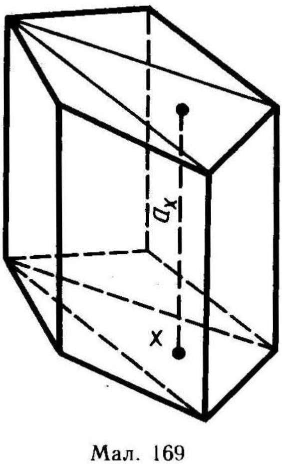
Об'єм даної призми дорівнює сумі об'ємів трикутних призм, з яких вона складається. За доведеним об'єм трикутної призми дорівнює добутку площі її основи на висоту. Звідси випливає, що об'єм даної призми дорівнює

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_nH = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)H,$$

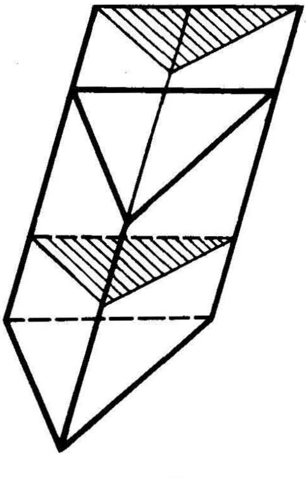
де S_1, S_2, ... , S_n — площі трикутників, на які розбито основу призми, а H — висота призми. Сума площ трикутників дорівнює площі S основи даної призми. Тому

$$V = SH.$$

Отже, ***об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.***



Мал. 169


Мал. 170

З а д а ч а (24). У похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу Q, а бічні ребра дорівнюють l.

Р о з в' я з а н н я. Площина проведеного перерізу розбиває призму на дві частини (мал. 170). Застосуємо до однієї з них паралельне перенесення, яке суміщає основи призми. При цьому дістанемо пряму призму, у якої основою є переріз даної призми, а висота дорівнює l. Ця призма має той самий об'єм. Таким чином, об'єм даної призми дорівнює Ql.

69. РІВНОВЕЛИКІ ТІЛА

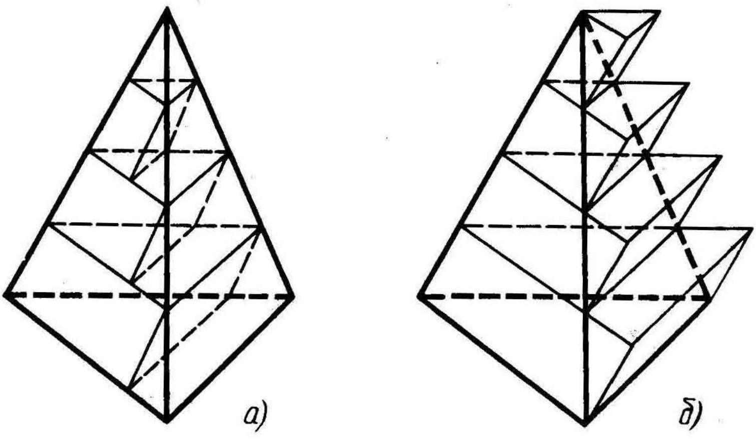
Два тіла називаються *рівновеликими,* якщо вони мають рівні об'єми.

Дві трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами — рівновеликі.

Справді, нехай трикутні піраміди мають рівні площі основ і рівні висоти. Доведемо, що вони рівновеликі, тобто мають рівні об'єми.

Розділимо висоту кожної піраміди на n рівних частин і проведемо через точки поділу площини, паралельні основам. Ці площини розбивають піраміду на n шарів. Для кожного шару першої піраміди побудуємо призму, яка міститься в ньому, як показано на малюнку 171, *а*. Для кожного шару другої піраміди побудуємо призму, яка містить шар (мал. 171, *б*). Призма k-го (починаючи від вершини) шару першої піраміди і призма, яка містить $(k-1)$-й шар другої піраміди, мають рівні площі основ, оскільки ці основи подібні основам пірамід і коефіцієнт подібності один і той самий $\left(\frac{k}{n}\right)$. Оскільки у цих призмах і висоти однакові $\left(\frac{H}{n}\right)$, то вони мають рівні об'єми.

Нехай. V_1 і V_2 — об'єми пірамід, а V_1' і V_2' суми об'ємів



Мал. 171

побудованих для них призм. Оскільки об'єм призми у k-му шарі першої піраміди дорівнює об'єму призми $(k-1)$-го шару другої піраміди, то сума об'ємів всіх призм для першої піраміди дорівнює сумі об'ємів призм всіх шарів другої піраміди, крім останнього. Об'єм призми останнього шару дорівнює $S\cdot\frac{H}{n}$, де S — площа основи піраміди, а H — висота. Звідси випливає, що $V_1'=V_2'-S\cdot\frac{H}{n}$. Оскільки, крім того, $V_1>V_1'$, а $V_2<V_2'$, то $V_1>V_2-\frac{SH}{n}$, або $V_2-V_1\leqslant\frac{SH}{n}$.

Ця нерівність справджується при будь-якому як завгодно великому n. А це можливо, тільки коли $V_2-V_1\leqslant 0$, тобто коли $V_2\leqslant V_1$. Помінявши ролями піраміди, дістанемо протилежну нерівність $V_2\geqslant V_1$. А звідси випливає, що $V_1=V_2$. Твердження доведено.

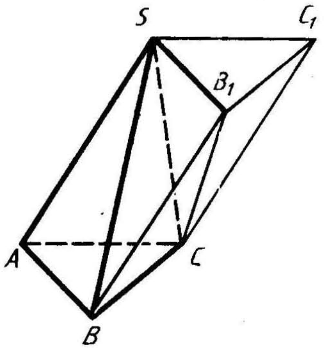
70. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ

Нехай $SABC$ — трикутна піраміда з вершиною S і основою ABC. Доповнимо цю піраміду до трикутної призми з тією самою основою і висотою, як показано на малюнку 172. Ця призма складається з трьох пірамід: даної піраміди $SABC$ і ще з двох трикутних пірамід SCC_1B_1 і $SCBB_1$.

Друга і третя піраміди мають рівні основи $\triangle\ CC_1B_1$ і $\triangle\ B_1BC$ і спільну висоту, проведену з вершини S. Тому у них рівні об'єми.

У першій і третій пірамідах теж рівні основи $\triangle SAB$ і $\triangle BB_1S$ і висоти, проведені з вершини C, збігаються. Отже, у них теж рівні об'єми.

Отже, усі три піраміди мають один і той самий об'єм. Оскільки сума цих об'ємів дорівнює об'єму призми, то об'єми пірамід дорівнюють $\frac{SH}{3}$.



Мал. 172

Отже, ***об'єм будь-якої трикутної піраміди дорівнює третині добутку площі основи на висоту:*** $V=\frac{1}{3}SH$.

Нехай тепер маємо будь-яку, не обов'язково трикутну піраміду. Розіб'ємо її основу на трикутники $\triangle_1$, $\triangle_2$, ..., $\triangle_n$. Піраміди, у яких основами є ці трикутники, а вершинами — вершина даної піраміди, утворюють дану піраміду. Об'єм даної піраміди дорівнює сумі об'ємів пірамід, що її утворюють.

Оскільки всі вони мають одну й ту саму висоту H, що й дана піраміда, то об'єм її дорівнює:

$$V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\ldots+S_n)=\frac{1}{3}SH.$$

Отже, ***об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.***

71. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОЇ ПІРАМІДИ

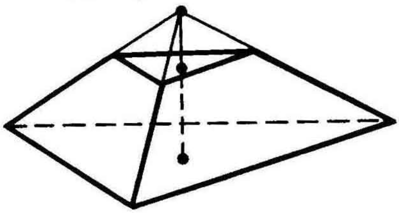
Задача (44). Знайдіть об'єм зрізаної піраміди з площами основ Q_1 і $Q_2(Q_1>Q_2)$ і висотою h.

Розв'язання. Доповнимо дану зрізану піраміду до повної (мал. 173). Нехай x — її висота. Об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів двох повних пірамід: однієї — з площею основи Q_1 і висотою x, другої — з площею основи Q_2 і висотою $x-h$.

З подібності цих пірамід знаходимо x: $\frac{Q_1}{Q_2}=\left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Звідси $x=\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. Об'єм зрізаної піраміди дорівнює:

$$V=\frac{1}{3}\left(Q_1\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\frac{Q_1\sqrt{Q_1}-Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}=\frac{1}{3}h(Q_1+\sqrt{Q_1Q_2}+Q_2).$$



Мал. 173

72. ОБ'ЄМИ ПОДІБНИХ ТІЛ

Нехай T і T' — два простих подібних тіла. Це означає, що існує перетворення подібності, яке переводить тіло T у тіло T'. Позначимо через k коефіцієнт подібності.

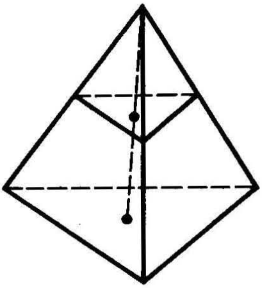
Розіб'ємо тіло T на трикутні піраміди $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Перетворення подібності, яке переводить тіло T у тіло T', переводить піраміди $P_1, P_2, \ldots, P_n$ у піраміди $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$. Ці піраміди утворюють тіло T', а тому об'єм тіла T' дорівнює сумі об'ємів пірамід $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$.

Оскільки піраміди P_i і P_i' подібні і коефіцієнт подібності дорівнює k, то відношення їх висот дорівнює k, а відношення площ їх основ дорівнює k^2. Отже, відношення об'ємів пірамід дорівнює k^3. Оскільки тіло T складається з пірамід P_i, а тіло T' з пірамід P_i', то відношення об'ємів тіл T' і T теж дорівнює k^3.

Число k — коефіцієнт подібності — дорівнює відношенню відстаней між будь-якими двома відповідними парами точок при перетворенні подібності. Отже, це число дорівнює відношенню будь-яких двох відповідних лінійних розмірів тіл T' і T. Таким чином, робимо висновок:

Об'єми двох подібних тіл відносяться, як куби їх відповідних лінійних розмірів.

Задача (48). Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну основі. В якому відношенні вона ділить об'єм піраміди?



Мал. 174

Розв'язання. Як ми знаємо, проведена площина відтинає подібну піраміду (мал. 174). Коефіцієнт подібності дорівнює відношенню висот, тобто $\frac{1}{2}$. Тому об'єми пірамід відносяться, як $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$. Отже, площина ділить дану піраміду на частини, об'єми яких відносяться, як $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7$.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте основні властивості об'єму.
2. Доведіть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку його лінійних розмірів.
3. Доведіть, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі основи на висоту.
4. Доведіть, що об'єм трикутної призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.
5. Доведіть, що об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.
6. Доведіть, що трикутні піраміди з рівними площами основ і рівними висотами рівновеликі.
7. Виведіть формулу для об'єму трикутної піраміди.
8. Доведіть, що об'єм будь-якої піраміди дорівнює третині добутку площі її основи на висоту.
9. Доведіть, що об'єми подібних тіл відносяться, як куби відповідних лінійних розмірів.

ЗАДАЧІ

1. Три латунних куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавлено в один куб. Яке ребро цього куба?
2. Металевий куб має зовнішнє ребро 10,2 см і масу 514,15 г. Товщина стінок дорівнює 0,1 см. Знайдіть густину металу, з якого виготовлено куб.
3. Якщо кожне ребро куба збільшити на 2 см, то його об'єм збільшиться на 98 $см^3$. Яка довжина ребра куба?
4. Якщо кожне ребро куба збільшити на 1 м, то його об'єм збільшиться у 125 раз. Знайдіть ребро.
5. Цеглина розміром $25\times12\times6{,}5$ см має масу 3,51 кг. Яка її густина?
6. Потрібно встановити резервуар для води місткістю 10 $м^3$ на майданчику розміром $2{,}5\times1{,}75$ м, який є для нього дном. Знайдіть висоту резервуара.
7. Виміри прямокутного паралелепіпеда 15 м, 50 м і 36 м. Знайдіть ребро рівновеликого йому куба.
8. Виміри прямокутного бруска 3 см, 4 см і 5 см. Якщо збільшити кожне ребро на x сантиметрів, то поверхня збільшиться на 54 $см^2$. Як збільшиться його об'єм?
9. Чавунна труба має квадратний переріз, її зовнішня ширина 25 см, товщина стінок 3 см. Яка маса одного погонного метра труби (густина чавуну 7,3 г/$см^3$)?
10. Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, діагональ якого a утворює з площиною основи кут α, а з бічною гранню — кут β?
11. У прямому паралелепіпеді сторони основи a і b утворюють кут 30°. Бічна поверхня дорівнює S. Знайдіть його об'єм.
12. У прямому паралелепіпеді сторони основи $2\sqrt{2}$ см і 5 см утворюють кут 45°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть його об'єм.
13. Основа прямого паралелепіпеда — ромб, площа якого 1 $м^2$. Площі діагональних перерізів 3 $м^2$ і 6 $м^2$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
14. Розв'яжіть попередню задачу в загальному вигляді, якщо площа ромба Q, а площі діагональних перерізів M і N.
15. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат, сторона якого дорівнює 1 м. Одне з бічних ребер дорівнює 2 м і утворює з кожною з прилеглих сторін основи кут 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

16*. Грані паралелепіпеда — рівні ромби із стороною a і гострим кутом 60°. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

17*. Кожне ребро паралелепіпеда дорівнює 1 см. При одній з вершин паралелепіпеда всі три плоских кути гострі, по 2α кожний. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

18* У паралелепіпеді довжини трьох ребер, які виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b, c. Ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним з них кут α (мал. 175). Знайдіть об'єм паралелепіпеда.

19. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об'єм правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

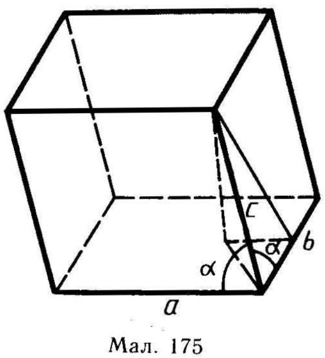
20. Дерев'яна плита у формі правильного восьмикутника із стороною 3,2 см і товщиною 0,7 см має масу 17,3 г. Яка густина дерева?

21. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 3,5 см, а діагональ бічної грані 2,5 см. Знайдіть об'єм призми.

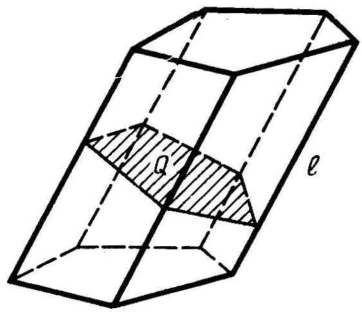
22. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює a, бічна поверхня рівновелика сумі основ. Знайдіть її об'єм.

23. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу 4 м^2, а відстань між двома протилежними бічними гранями 2 м. Знайдіть об'єм призми.

24. У похилій призмі проведено переріз, який перпендикулярний до бічних ребер і перетинає всі бічні ребра. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу Q, а бічні ребра дорівнюють l (мал. 176).



Мал. 175



Мал. 176

25. Бічні ребра похилої трикутної призми дорівнюють 15 м, а відстань між паралельними прямими, які містять ребра, 26 м, 25 м і 17 м. Знайдіть об'єм призми.

26. Обчисліть пропускну спроможність (у кубічних метрах за 1 год) водостічної труби, переріз якої має форму рівнобедреного трикутника з основою 1,4 м і висотою 1,2 м. Швидкість течії 2 м/с.

27. Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої 14 м, а верхня 8 м і висота 3,2 м. Знайдіть, скільки кубічних метрів землі припадає на 1 км насипу.

28. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 4 см, 5 см і 7 см, а бічне ребро дорівнює більшій висоті основи. Знайдіть об'єм призми.

29. Площа основи прямої трикутної призми дорівнює 4 см^2, а площі бічних граней 9 см^2, 10 см^2 і 17 см^2. Знайдіть об'єм.

30. Основа призми — трикутник, в якому одна сторона дорівнює 2 см, а дві інші по 3 см. Бічне ребро дорівнює 4 см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть ребро рівновеликого куба.

31. Основою похилої призми є рівносторонній трикутник із стороною a; одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, менша діагональ якого дорівнює c. Знайдіть об'єм призми.

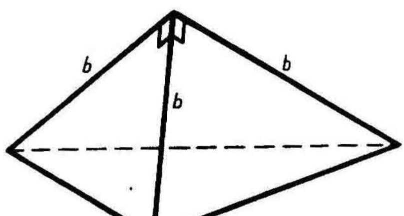
32. Чому дорівнює об'єм прямої чотирикутної призми, якщо її висота h, діагоналі нахилені до площини основи під кутами α і β і гострий кут між діагоналями основи дорівнює γ?

33. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об'єм правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.

34. Сторона основи правильної шестикутної піраміди a, а двогранний кут при основі дорівнює 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

35. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює b (мал. 177). Знайдіть об'єм піраміди.

36. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, сторона основи якої a, а бічні ребра взаємно перпендикулярні.



Мал. 177

37. Знайдіть об'єм тетраедра, ребро якого дорівнює a.

38. Знайдіть об'єм октаедра, ребро якого дорівнює a.

39. Основа піраміди — прямокутник із сторонами 9 м і 12 м, всі бічні ребра дорівнюють 12,5 м. Знайдіть об'єм піраміди.

40*. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник із сторонами 6 см; 6 см і 8 см. Всі бічні ребра дорівнюють 9 см. Знайдіть об'єм піраміди.

41. Одне ребро трикутної піраміди дорівнює 4 см, кожне з решти — 3 см. Знайдіть об'єм піраміди.

42. В основі піраміди лежить прямокутник. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює l і утворює з суміжними сторонами прямокутника кути α і β. Знайдіть об'єм піраміди.

43. Знайдіть об'єм піраміди, основа якої — трикутник з двома кутами α і β і радіусом описаного круга R. Бічні ребра піраміди нахилені до площини її основи під кутом γ.

44. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди з площами основ Q_1 і Q_2 ($Q_1 > Q_2$) та висотою h.

45. У піраміді з площею основи Q_1 проведено переріз паралельно основі, на відстані h від неї. Площа перерізу дорівнює Q_2. Знайдіть висоту піраміди.

46. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони нижньої і верхньої основ дорівнюють a і b, а двогранний кут при ребрі нижньої основи дорівнює α. Знайдіть об'єм піраміди.

47. Розв'яжіть попередню задачу для випадку правильної зрізаної трикутної піраміди.

48. Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну основі. В якому відношенні вона ділить об'єм піраміди?

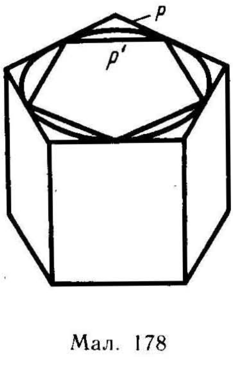
49. Висота піраміди h. На якій відстані від вершини знаходиться переріз, який паралельний основі і ділить її об'єм пополам?

§ 8. ОБ'ЄМИ І ПОВЕРХНІ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

73. ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА

Якщо тіло просте, тобто допускає розбиття на скінченну кількість трикутних пірамід, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів цих пірамід. Для довільного тіла об'єм означають таким чином.

Дане тіло має об'єм V, якщо існують прості тіла, які містять його, і прості тіла, які містяться в ньому, з об'ємами, що як завгодно мало відрізняються від V.



Мал. 178

Застосуємо це означення для знаходження об'єму циліндра з радіусом основи R і висотою H.

У процесі виведення формули для площі круга було побудовано такі два n-кутники (один, який містить круг, а другий — міститься у крузі), що їх площі при необмеженому збільшенні n необмежено наближалися до площі круга. Побудуємо такі многокутники для круга в основі циліндра. Нехай P — многокутник, який містить круг, а P' — многокутник, який міститься у крузі (мал. 178).

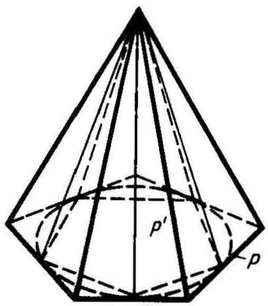
Побудуємо дві прямі призми з основами P і P' і висотою H, яка дорівнює висоті циліндра. Перша призма містить циліндр, а друга призма міститься у циліндрі. Оскільки при необмеженому збільшенні n площі основ призм необмежено прямують до площі основи циліндра S, то їх об'єми необмежено прямують до SH. Відповідно до означення об'єм циліндра

$$V=SH=\pi R^2 H.$$

Отже, ***об'єм циліндра дорівнює добутку площі основи на висоту.***

74. ОБ'ЄМ КОНУСА

Побудуємо два многокутники у площині основи конуса: многокутник P, який містить основу конуса, і многокутник P', який міститься в основі конуса (мал. 179). Побудуємо дві піраміди з основами P і P' і з вершинами у вершині конуса. Перша піраміда містить конус, а друга міститься у конусі.



Мал. 179

Як відомо, існують такі многокутники P і P', площі яких при необмеженому збільшенні числа їх сторін n необмежено прямують до площі круга в основі конуса. Для таких многокутників об'єм побудованих пірамід необмежено прямує до $\frac{1}{3}SH$, де S — площа основи конуса, а H — його висота. Відповідно до означення, звідси випливає, що об'єм конуса

$$V=\frac{1}{3}SH=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

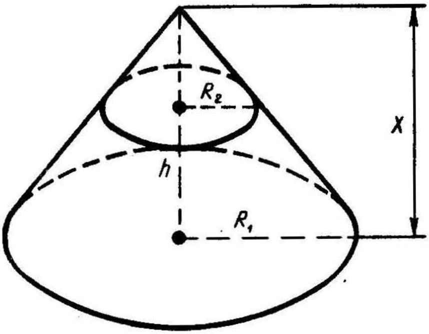
Отже, ***об'єм конуса дорівнює одній третині добутку площі основи на висоту.***

75. ОБ'ЄМ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

Задача (15). Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основ R_1 і R_2 $(R_2<R_1)$, а висота h.

Розв'язання. Доповнимо даний зрізаний конус до повного (мал. 180). Нехай x — його висота. Об'єм зрізаного конуса дорівнює різниці об'ємів двох повних конусів: одного — з радіусом основи R_1 і висотою x, другого — з радіусом основи R_2 і висотою $x-h$. З подібності конусів знаходимо x:

$$\frac{x}{x-h}=\frac{R_1}{R_2},\ x=\frac{hR_1}{R_1-R_2}.$$



Мал. 180

Об'єм зрізаного конуса дорівнює:

$$V=\frac{1}{3}\left(\pi R_1^2\frac{hR_1}{R_1-R_2}-\pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1-R_2}-h\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{R_1^3-R_2^3}{R_1-R_2}=\frac{1}{3}\pi h\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right).$$

76. ЗАГАЛЬНА ФОРМУЛА ДЛЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Тілом обертання у найпростішому випадку називається таке тіло, яке площинами, перпендикулярними до деякої прямої (осі обертання), перетинається по кругах з центрами на цій прямій. Круговий циліндр, конус, куля — приклади тіл обертання. Знайдемо формулу для обчислення об'єму тіла обертання.

Проведемо площину через вісь тіла і введемо у цій площині декартові координати x, y, прийнявши вісь тіла за вісь x (мал. 181). Площина xy перетинає поверхню тіла по лінії, для якої вісь x є віссю симетрії. Нехай $y=f(x)$ — рівняння тієї частини лінії, яка знаходиться над віссю x.

Проведемо через точку $(x;\ 0)$ площину, перпендикулярну до осі x, і позначимо через $V(x)$ об'єм частини тіла, яка лежить зліва від цієї площини. Тоді $V(x)$ є функцією від x. Різниця $V(x+h)-V(x)$ становить об'єм шару тіла товщиною h між двома площинами, перпендикулярними до осі x, які проходять через точки з абсцисами x і $x+h$. Нехай M — найбільше, а m — найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[x;\ x+h]$. Тоді шар тіла, що розглядається, містить циліндр з радіусом m, висотою h і вміщується у циліндрі з радіусом M і тією самою висотою h (див. мал. 181). Тому

$$\pi m^2h\leqslant V(x+h)-V(x)\leqslant\pi M^2h,$$

$$\pi m^2\leqslant\frac{V(x+h)-V(x)}{h}\leqslant\pi M^2.$$

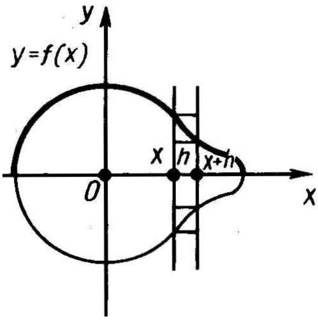
При наближенні висоти h до 0 ліва і права частини останньої нерівності прямують до однієї і тієї самої величини $\pi f^2(x)$. Середня ж частина цієї нерівності при наближенні до 0 прямує до похідної $V'(x)$ функції $V(x)$. Отже:

$$V'(x)=\pi f^2(x).$$

За відомою формулою аналізу

$$V(b)-V(a)=\int_a^b V'(x)\,dx=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx.$$

Ця формула і виражає об'єм частини тіла, що знаходиться між паралельними площинами $x=a$ і $x=b$.



Мал. 181

77. ОБ'ЄМ КУЛІ

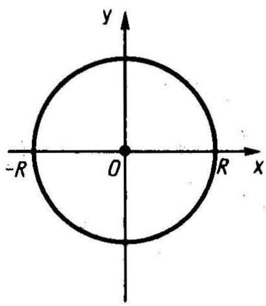
Застосуємо виведену формулу для об'єму тіл обертання до обчислення об'єму кулі.

Введемо декартові координати, взявши за центр кулі початок координат (мал. 182). Площина xy перетинає поверхню кулі радіуса R по колу, яке, як відомо, задається формулою

$$x^2+y^2=R^2.$$

Півколо, розміщене над віссю x, задається рівнянням

$$y=f(x)=+\sqrt{R^2-x^2},\qquad -R\leqslant x\leqslant R.$$



Мал. 182

Тому об'єм кулі знаходимо за формулою

$$V=\pi\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

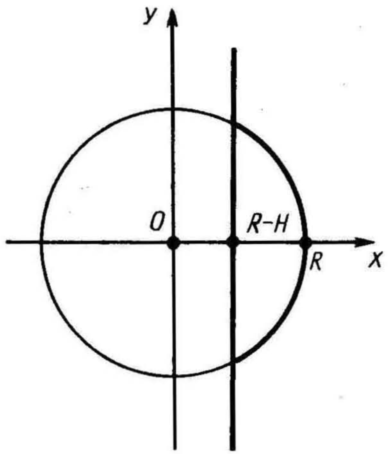
Отже, ***об'єм кулі дорівнює*** $\frac{4}{3}\pi R^3$.

78. ОБ'ЄМ КУЛЬОВОГО СЕГМЕНТА І СЕКТОРА

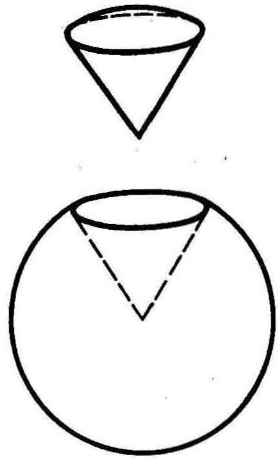
Кульовим сегментом називається частина кулі, яку відтинає від неї січна площина. Формулу для об'єму кульового сегмента дістаємо аналогічно до формули об'єму кулі (мал. 183):

$$V=\pi\int_{R-H}^{R}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-H}^{R}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

де R — радіус кулі, а H — висота кульового сегмента.



Мал. 183

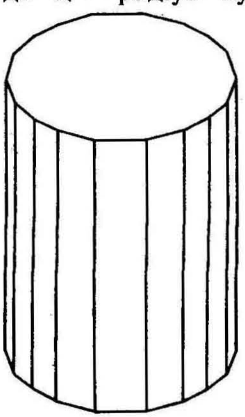


Мал. 184

Кульовим сектором називається тіло, яке дістають з кульового сегмента і конуса таким чином. Якщо кульовий сегмент менший за півкулю, то кульовий сегмент доповнюють конусом, у якого вершина знаходиться в центрі кулі, а основою є основа сегмента. Якщо ж сегмент більший від півкулі, то згаданий конус із нього вилучається (мал. 184). Об'єм кульового сектора дістаємо додаванням або відніманням об'ємів відповідних сегментів і конуса. Для об'єму кульового сектора маємо таку формулу:

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

де R — радіус кулі, H — висота відповідного кульового сегмента.



Мал. 185

79. ПЛОЩА БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА

Впишемо у циліндр правильну n-кутну призму (мал. 185).

Площа бічної поверхні цієї призми $S_n = P_n H$, де P_n — периметр основи призми, а H — її висота.

Як відомо, при необмеженому збільшенні n периметр P_n необмежено прямує до довжини C кола основи циліндра. Отже, площа бічної поверхні призми необмежено прямує до CH. Тому величину CH приймають за площу бічної поверхні циліндра.

Таким чином, ***площа бічної поверхні циліндра обчислюється за формулою***

$$\boldsymbol{S = CH = 2\pi RH,}$$

де R — радіус циліндра, а H — його висота.

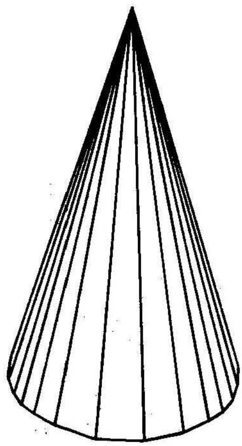
80. ПЛОЩА БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ КОНУСА

Впишемо у конус правильну n-кутну піраміду (мал. 186). Площа її бічної поверхні

$$S_n = \frac{1}{2} P_n l_n,$$

де P_n — периметр основи піраміди, а l_n — апофема.

При необмеженому збільшенні n периметр основи P_n необмежено прямує до довжини C кола основи конуса, а апофема l_n — до довжини l твірної. Відповідно бічна поверхня піраміди необмежено прямує до $C\frac{l}{2}$. У зв'язку з цим величину $C\frac{l}{2}$ приймають за площу бічної поверхні конуса.



Мал. 186

Отже, ***площа бічної поверхні конуса обчислюється за формулою:***

$$\boldsymbol{S = C \cdot \frac{l}{2} = \pi Rl,}$$

де R — радіус основи конуса, а l — довжина твірної.

Аналогічно для площі бічної поверхні зрізаного конуса з радіусами основ R_1 і R_2 і твірною l дістають формулу

$$S = \pi (R_1 + R_2)\, l.$$

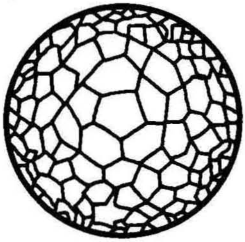
81. ПЛОЩА СФЕРИ

Опишемо навколо сфери опуклий многогранник з малими гранями (мал. 187). Нехай S' — площа поверхні многогранника, тобто сума площ його граней.

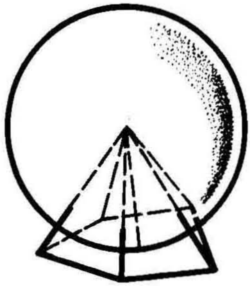
Знайдемо наближене значення площі поверхні многогранника, припускаючи, що лінійні розміри граней, тобто відстань між будь-якими двома точками будь-якої грані, менша за ε.

Об'єм многогранника дорівнює сумі об'ємів пірамід, основами яких є грані многогранника, а вершиною — центр сфери (мал. 188). Оскільки всі піраміди мають одну і ту саму висоту, що дорівнює радіусу R сфери, то об'єм многогранника:

$$V = \frac{1}{3} S'R.$$



Мал. 187



Мал. 188

Об'єм многогранника більший, ніж об'єм кулі, обмеженої сферою, але менший, ніж об'єм кулі з тим самим центром, а радіусом $R+\varepsilon$. Таким чином,

$$\frac{4}{3}\pi R^3 < \frac{1}{3} S'R < \frac{4}{3}\pi (R+\varepsilon)^3.$$

Звідси

$$4\pi R^2 < S' < 4\pi (R+\varepsilon)^2 \left(1+\frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Ми бачимо, що площа поверхні описаного многогранника при необмеженому зменшенні розмірів його граней, тобто при необмеженому зменшенні ε, прямує до $4\pi R^2$. У зв'язку з цим величину $4\pi R^2$ приймають за площу сфери.

Отже, ***площа сфери радіуса R обчислюється за формулою***

$$\boldsymbol{S=4\pi R^2}.$$

Аналогічно знаходять площу сферичної частини поверхні кульового сектора, тобто площу сферичного сегмента. Для неї дістають формулу

$$S=2\pi RH,$$

де H — висота сегмента.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

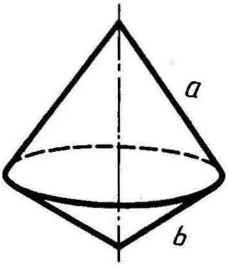
1. Виведіть формулу для об'єму циліндра.
2. Виведіть формулу для об'єму конуса.
3. Виведіть формулу для об'єму тіл обертання.
4. Виведіть формулу для об'єму кулі.
5. Що таке кульовий сегмент? Виведіть формулу для об'єму кульового сегмента.
6. Що таке кульовий сектор? За якою формулою обчислюють об'єм кульового сектора?
7. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
8. За якою формулою знаходять площу бічної поверхні конуса (бічної поверхні зрізаного конуса)?
9. За якою формулою обчислюють площу сфери?

ЗАДАЧІ

1. 25 м мідного дроту мають масу 100,7 г. Знайдіть діаметр дроту (густина міді 8,94 г/см^3).
2. Насос, який подає воду в паровий котел, має два водяних циліндри. Діаметри циліндрів 80 мм, а хід поршня 150 мм. Чому дорівнює годинна продуктивність насоса, якщо кожний поршень робить 50 робочих ходів за хвилину?
3. У скільки разів треба збільшити висоту циліндра, не змінюючи його основу, щоб об'єм збільшився в n раз? У скільки разів треба збільшити радіус основи циліндра, не змінюючи висоту, щоб об'єм збільшився в n раз?
4. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайдіть відношення об'ємів циліндрів.
5. Знайдіть об'єм циліндра, вписаного у правильну шестикутну призму, кожне ребро якої дорівнює a.
6. Свинцева труба (густина свинцю 11,4 г/см^3) з товщиною стінок 4 мм має внутрішній діаметр 13 мм. Яка маса 25 м цієї труби?
7. Купа щебеню має конічну форму, радіус основи якої 2 м, а твірна 3,5 м. Знайдіть об'єм купи щебеню.
8. Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник, площа якого 9 м^2. Знайдіть об'єм конуса.
9. Довжина твірної конуса дорівнює l, а довжина кола основи c. Знайдіть об'єм конуса.
10. Твірна конуса l утворює з площиною основи кут α. Знайдіть об'єм конуса.
11. Стіжок сіна має форму циліндра з конічним верхом. Радіус його основи 2,5 м, висота 4 м, причому циліндрична частина стіжка має висоту 2,2 м. Густина сіна 0,03 г/см^3. Визначте масу стіжка сіна.
12. Рідина, налита в конічну посудину висотою 0,18 м і діаметром основи 0,24 м, переливається в циліндричну посудину, діаметр основи якої 0,1 м. Як високо знаходитиметься рівень рідини в посудині?
13. Рівносторонній трикутник обертається навколо своєї сторони a. Знайдіть об'єм утвореного тіла обертання.
14. Прямокутний трикутник з катетами a і b обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм утвореного тіла (мал. 189).

15* Знайдіть об'єм зрізаного конуса, у якого радіуси основ R_1 і R_2 ($R_2 < R_1$), а висота h.

16. Соснова колода довжиною 15,5 м має діаметри кінців 42 см і 25 см. Яку помилку (в процентах) допускають, обчислюючи об'єм колоди, при множенні довжини на площу поперечного перерізу по середині колоди?
17. Радіуси основ зрізаного конуса R і r; твірна нахилена до площини основи під кутом 45°. Знайдіть об'єм.



Мал. 189

18. Площа осьового перерізу зрізаного конуса дорівнює різниці площ основ, а радіуси основ R і r. Знайдіть об'єм цього конуса.

19. Зрізаний конус, у якого радіуси основ 4 см і 22 см, і рівновеликий циліндр мають одну й ту саму висоту. Чому дорівнює радіус основи цього циліндра?

20. За даними радіусами основ R і r знайдіть відношення об'ємів зрізаного конуса і повного конуса.

21. Чавунна куля регулятора має масу 10 кг. Знайдіть діаметр кулі (густина чавуну 7,2 г/см^3).

22. Потрібно переплавити в одну кулю дві чавунні кулі діаметрами 25 см і 35 см. Знайдіть діаметр нової кулі.

23. Маємо шматок свинцю масою 1 кг. Скільки кульок діаметром 1 см можна відлити із цього шматка? (Густина свинцю 11,4 г/см^3.)

24. З дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи, виточили найбільшу кулю. Скільки процентів матеріалу сточено?

25. Зовнішній діаметр порожнистої кулі 18 см. Товщина стінок 3 см. Знайдіть об'єм матеріалу, з якого виготовлено кулю.

26. Посудина має форму півкулі радіуса R, доповненої циліндром. Якої висоти повинна бути циліндрична частина, щоб посудина мала об'єм V?

27. Площина, перпендикулярна до діаметра кулі, ділить його на частини 3 см і 9 см. На які частини ділиться об'єм кулі?

28. Яку частину об'єму кулі становить об'єм кульового сегмента, у якого висота дорівнює 0,1 діаметра кулі?

29. Дві рівні кулі розміщено так, що центр однієї лежить на поверхні другої. Як відноситься об'єм спільної частини кулі до об'єму цілої кулі?

30. Діаметр кулі, що дорівнює 30 см, є віссю циліндра, у якого радіус основи дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм частини кулі, що міститься всередині циліндра.

31. Чому дорівнює об'єм кульового сектора, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі дорівнює 75 см?

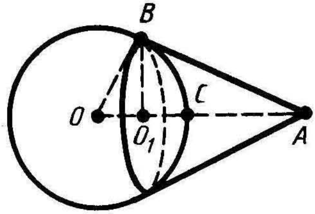
32. Кульовий сектор з кутом 30° і радіусом R обертається навколо одного з бічних радіусів. Знайдіть об'єм утвореного тіла.

33. Поверхні двох куль відносяться, як $m:n$. Як відносяться їх об'єми?

34. Гіпотенуза і катети трикутника є діаметрами трьох куль. Яка існує залежність між їхніми поверхнями?

35. Поверхня тіла, утвореного обертанням квадрата навколо сторони, рівновелика поверхні кулі, радіус якої дорівнює стороні квадрата. Доведіть.

36. Радіус кулі 15 см. Яку площу має частина його поверхні, яку видно з точки, віддаленої від центра на 25 см (мал. 190)?



Мал. 190

37. Кулю радіуса 10 см циліндрично просвердлили по осі. Діаметр отвору 12 см. Знайдіть площу повної поверхні тіла.

38. Циліндрична димова труба діаметром 65 см має висоту 18 м. Скільки жерсті треба для її виготовлення, якщо на заклепку іде 10 % матеріалу?

39. Напівциліндричне склепіння підвалу має 6 м довжини і 5,8 м у діаметрі. Знайдіть площу повної поверхні підвалу.

40. З круглого листа металу виштампували циліндричний стакан діаметром 25 см і висотою 50 см. Припустимо, що площа листа при штампуванні не змінилась. Знайдіть діаметр листа.

41. У циліндрі площа основи дорівнює Q, а площа осьового перерізу M. Чому дорівнює повна поверхня циліндра?

42. Конусоподібну палатку висотою 3,5 м і діаметром основи 4 м покрито тканиною. Скільки квадратних метрів тканини пішло на палатку?

43. Дах силосної башти має форму конуса. Висота даху 2 м, діаметр башти 6 м. Знайдіть поверхню даху.

44. Площа основи конуса S, а твірні нахилені до основи під кутом α. Знайдіть бічну поверхню конуса.

45. Як відносяться між собою бічна і повна поверхні рівностороннього конуса (у перерізі правильний трикутник)?

46. Повна поверхня рівностороннього конуса рівновелика поверхні кулі, побудованої на його висоті як на діаметрі. Доведіть.

47. Півкруг згорнуто у конічну поверхню. Знайдіть кут між твірною і віссю конуса.

48. Радіус кругового сектора дорівнює 3 м, його кут 120°. Сектор згорнуто у конічну поверхню. Знайдіть радіус основи конуса.

49. Скільки квадратних метрів латунного листа потрібно, щоб зробити рупор, у якого діаметр одного кінця 0,43 м, другого — 0,036 м, а твірна 1,42 м?

50. Скільки оліфи треба, щоб пофарбувати зовнішню поверхню 100 однакових відер, які мають форму зрізаного конуса, якщо діаметри основ 25 см і 30 см, твірна 27,5 см і на 1 м^2 витрачають 150 г оліфи?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ

§ 1

2. Можна. **8.** Вказівка. Візьміть точку в другій площині і проведіть через неї і дану пряму площину. Застосуйте до цієї площини аксіому паралельних. **12.** Чотири площини. **14.** Вказівка. Скористайтесь доведенням від супротивного.

§ 2

2. Не можна. **5.** 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **7.** 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **8.** 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. **9.** Не можна. **13.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **19.** Вказівка. Див. задачу 16. **20.** Не завжди. Вказівка. Див. задачу 16. **26.** Розв'язку немає, якщо точка лежить у площині прямих. **32.** $A_1B_1=a$. **35.** Вказівка. Порівняйте відношення відрізків двох довільних прямих: $X_1X_2X_3$ і $Y_1Y_2Y_3$. **38.** Середньою лінією. **39.** Не може. **40.** Може. **41.** Вказівка. Відношення відрізків зберігається. **42.** Вказівка. Проекція перпендикулярного діаметра проходить через середини хорд, паралельних проекції даного діаметра.

§ 3

2. Вказівка. Див. задачу 1. **3.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **7.** 2 м. **8.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **14.** 2,6 м. **15.** $\approx 3{,}9$ м. **16.** 9 м. **17.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **19.** 1 м. **20.** 6,5 м. **21.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **22.** Коло. **23.** 6 см, 15 см. **24.** 1) 15 см, 41 см; 2) 4 см, 8 см. **25.** 9 см. **27.** 6 м. **28.** 5 м, 3 м. **29.** $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **31.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **33.** 0,36 м або 0,44 м. **36.** 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. **37.** 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **38.** 0,6 м. **39.** $\frac{am}{m+n}$ (m відповідає основі, через яку проведено площину). **40.** $\frac{a}{2}$. **41.** Довжина перпендикуляра $\sqrt{2a^2-b^2}$, довжина сторони $\sqrt{b^2-a^2}$. **42.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **43.** $\sqrt{2}$ м. **44.** $2\sqrt{2}$ м. **46.** 2,5 м. **47.** 6 м. **48.** 14 см. **49.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **50.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **51.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **52.** 2,5 м. **53.** $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. **55.** Вказівка. Прямі, перпендикулярні до площини, паралельні. **56.** $\sqrt{23}$ м. **57.** 4 м. **59.** 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **60.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **61.** 1,3 м. **62.** 1,7 м.

§ 4

1. На осі z. **3.** (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3), (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). **4.** Відстань від площини xy дорівнює 3, від площини xz дорівнює 2, від площини yz дорівнює 1; відстані від осей x, y, z відповідно дорівнюють $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$; відстань від початку координат дорівнює $\sqrt{14}$. **6.** (2; 2; 2) і $(-2;\ -2;\ -2)$. **7.** $C(0;\ 0;\ 0)$. **8.** $x+2y+3z=7$. **12.** $B(0;\ -1;\ 3)$. **13.** 1) $D(6;\ 2;\ -2)$; 2) $D(0;\ -2;\ 2)$; 3) $D(-1;\ 7;\ -2)$. **18.** $(-1;\ -2;$

$-3)$; $(0;\ 1;\ -2)$; $(-1;\ 0;\ 3)$. **20.** Вказівка. Див. задачу 16. **24.** $(-1;\ -2;\ 1)$. **25.** 1), 2), 4) не існує; 3) існує. **30.** 90°. **31.** $\alpha+\beta$ або $|\alpha-\beta|$. **32.** 40° або 20°. **36.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **37.** 30°. **38.** $a\sqrt{6}$. **39.** $a\sqrt{2}$. **40.** $3a$. **41.** 30°. **44.** 30°. **45.** 13 м; $\sqrt{409}$ м. **46.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **47.** 3,36 м. **48.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **49.** 1) $\frac{30}{7}$ м^2 або 48 м^2; 2) 2,5 м^2 або $\frac{128}{7}$ м^2. **51.** $D(-2;\ 3;\ 0)$. **52.** $D(2;\ 1;\ -2)$. **53.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. **55.** 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. **56.** $c=1$. **57.** $\sqrt{|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+|\bar{a}||\bar{b}|}$. **58.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90^\circ$. **60.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. **62.** $\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\beta$. **63.** 60°. **64.** $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

§ 5

1. 2) 60°. **4.** $\cos\alpha=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. **6.** $n(n-3)$. **9.** Вказівка. Скористайтесь теоремою 3.3. **10.** 144 см^2. **11.** 7,5 см. **12.** 12 см. **13.** $a\sqrt{5}$, $2a$, $2a^2$, $a^2\sqrt{3}$. **14.** $3a^2$. **15.** $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **16.** $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. **17.** 22 см. **18.** $Q\sqrt{2}$. **19.** 12. **20.** 2 м. **21.** 4 м. **23.** 45 см^2. **24.** 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. **25.** $3l^2\sqrt{3}$. **26.** 12 м^2. **29.** 188 м^2. **30.** ≈ 262 см^2. **31.** 10 см^2. **32.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **33.** 13 м, 9 м. **34.** 2 м^2, 3 м^2. **35.** 1) 3; 2) 7; 3) 11. **36.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **37.** 2 м^2. **38.** 1464 см^2. **39.** $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. **40.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$. **41.** 3 см. **42.** 12 см. **43.** $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **44.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. **45.** $2\sqrt{3}$ см. **46.** 5 см, 6 см. **47.** 26 м^2. **48.** 540 см^2. **49.** 10 м^2. **53.** $\frac{35}{6}$ см, $\frac{20}{3}$ см, $\frac{15}{2}$ см. **55.** 11 м. **56.** $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. **57.** 9 см. **58.** $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **59.** 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. **60.** 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. **61.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a^2+\sqrt{a^2+12h^2})$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2})$. **62.** $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. **63.** 1,8 м, 4 м. **64.** $3a^2$. **65.** $\frac{Q}{\cos\varphi}$. **66.** $\cos\varphi=\frac{Q}{S}$. **67.** 16 см і 6 см або 12 см і 8 см. **68.** $\sqrt{2}$ см. **70.** 9 см. **71.** 1 дм. **72.** 6 см. **73.** 2 см. **74.** $\frac{a^2-b^2}{4}$. **75.** $20\sqrt{2}$. **76.** 24 м^2, 30°. **77.** 168 м^2. **78.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2})$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{2}{3}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\cdot\sqrt{4h^2+3(a-b)^2})$. **82.** $109^\circ 28'$. Вказівка. Доведіть спочатку, що у кожній вершині октаедра сходяться дві пари перпендикулярних ребер. Потім застосуйте формулу задачі 4.

§ 6

1. 5 м. **3.** 36 см^2. **4.** 3 дм. **5.** 3 дм. **6.** $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$. **8.** 10 м. **9.** 5 м. **10.** $\frac{l}{2}$. **11.** R^2. **12.** $2R^2 \sin\alpha$. **13.** 500. **14.** $\frac{R^2 \operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\varphi}$, якщо $\alpha+\varphi<90°$. **16.** $\frac{H}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{3l}{4}$. **18.** 3 см. **19.** 5 м. **20.** $R-r$. **21.** a, $2a$. **22.** 30 дм^2. **23.** 9 дм^2. **24.** $\frac{1}{4}(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. **26.** $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. **27.** $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **29.** $16\pi m^2$. **31.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **32.** πR. **33.** ≈ 785 км. **34.** 12 см. **35.** 12 см. **36.** 5 см. **37.** $\frac{\pi R^2}{4}$. **40.** 3 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. **43.** $R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. **45.** 4π м. **46.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **49.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **50.** $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$, $r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$. **51.** $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. **52.** 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. **53.** $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$. **54.** $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180°}{n}}$.

§ 7

1. 6 см. **2.** $\approx 8{,}4$ г/см^3. **4.** 25 см. **5.** 1,8 г/см^3. **6.** $\approx 2{,}29$ м. **7.** 30 м. **8.** Вдвічі. **9.** $\approx 192{,}72$ кг. **12.** 60 см^3. **13.** 3 м^3. **14.** $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. **15.** $\sqrt{2}$ м^3. **16.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **17.** $2\sqrt{\sin 3\alpha \sin^3\alpha}$. **18.** $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. **19.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **20.** 0,5 г/см^3. **21.** 3 см^3. **22.** $\frac{a^3}{8}$. **23.** 6 м^3. **25.** 3060 м^3. **26.** 6048 м^3/год. **27.** 35 200 м^3. **28.** 48 см^3. **29.** 12 см^3. **30.** 2 см. **31.** $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. **32.** $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **33.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. **34.** $\frac{3a^3}{4}$. В к а з і в к а. Висота піраміди дорівнює радіусу кола, вписаного в основу. **35.** $\frac{1}{6}b^3$. **36.** $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. **37.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **38.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. В к а з і в к а. Розбийте октаедр на дві правильні чотирикутні піраміди. **39.** 360 м^3. **40.** 48 см^3. В к а з і в к а. Основа висоти піраміди збігається з центром кола, описаного навколо основи піраміди. **41.** $\sqrt{11}$ см^3. **42.** $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. **43.** $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\cdot\sin\beta\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. **45.** $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. **46.** $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. В к а з і в к а. Скористайтесь формулою задачі 44. **47.** $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. **49.** $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

§ 8

1. $\approx 0{,}75$ мм. **2.** ≈ 4500 л. **3.** В n раз; в $\sqrt{n}$ раз. **4.** 4 : 1. **5.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **3.** ≈ 61 кг. **7.** $\approx 6{,}3$ м^3. **8.** 9π м^3. Вказівка. Висота конуса дорівнює радіусу його основи. **9.** $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$. **10.** $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. **11.** $\approx 1{,}6$ т. **12.** $\approx 0{,}35$ м. **13.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **14.** $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **16.** $\approx 2\,\%$. **17.** $\frac{\pi}{3}|R^3 - r^3|$. **18.** $\frac{\pi^2}{3}|R^3 - r^3|$. **19.** 14 см. **20.** $1-\left(\frac{r}{R}\right)^3$, якщо $r<R$. **21.** ≈ 14 см. **22.** ≈ 39 см. **23.** 167. **24.** $33\frac{1}{3}\,\%$. Вказівка. Діаметр кулі дорівнює діаметру циліндра. **25.** ≈ 2148 см^3. **26.** $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$. **27.** 45π см^3, 243π см^3. **28.** 0,028. **29.** 5 : 16. **30.** 3528π см^3. Вказівка. Розбийте названу частину кулі на циліндр і два сегменти. **31.** $112{,}5\pi$ дм^3 або 450π дм^3. **32.** $\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3})$. Вказівка. Тіло є кульовим сектором. **33.** $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$. **34.** Більша поверхня рівновелика сумі двох інших. **35.** Вказівка. Виразіть обидві поверхні через сторону квадрата. **36.** 180π см^2. **37.** 512π см^2. **38.** $\approx 40{,}4$ м^2. **39.** ≈ 116 м^2. **40.** 75 см. **41.** $\pi m + 2Q$. Вказівка. За площею основи знайдіть її радіус. **42.** $\approx 25{,}3$ м^2. **43.** $\approx 33{,}98$ м^2. **44.** $\frac{S}{\cos\alpha}$. Вказівка. За площею основи знайдіть її радіус. **45.** 2 : 3. **46.** Виразіть поверхню кулі і конуса через довжину твірної конуса. **47.** 30°. **48.** 1 м. Вказівка. Довжина кола основи дорівнює довжині дуги сектора. **49.** $\approx 1{,}04$ м^2. **50.** $\approx 4{,}3$ кг.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

10 КЛАС

11 КЛАС

§ 5. Многогранники

§ 6. Тіла обертання

§ 7. Об'єми многогранників

§ 8. Об'єми і поверхні тіл обертання