Я. О. Кохан, *канд. філос. наук*

СИМВОЛІЧНА ЛОГІКА: ПОВЕРНЕННЯ ДО ВИТОКІВ. ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ ПОГЛЯД НА СВІТ

Імена засновників сучасної символічної логіки можуть скласти невелику галерею. Але при цьому серед них чітко виділяється одне ім'я: німецького логіка Ґотлоба Фреґе. У його роботах введені й проаналізовані майже всі основні поняття та ідеї дедуктивної системи логіки. Якби окрім Фреґе ніхто не писав тоді на цю тему, символічна логіка все одно склалася б у той самий час і в тому самому вигляді, як ми її знаємо нині. Справді, нова дисципліна отримала остаточне оформлення й визнання у широких колах фахівців тоді, коли Бертран Рассел ознайомився з працями Фреґе і виклав їхні результати у власних роботах.

За наступне століття логіка далеко вийшла за межі дедуктивної концепції Фреґе, однак у власне дедуктивній її частині чогось принципово нового відкрито дивовижно мало порівняно із тим, що явно міститься у роботах німецького ученого. Натуральні та секвенціальні системи виводу Генцена, поняття метамови та метатеорії Тарського та Карнапа, канонічні числення Поста та функції Чорча (і серед них — комбінатори Каррі, які, щоправда, не набули розповсюдження) — здається, це і все, що можна назвати в цьому переліку. Таким чином, попри грандіозний стрибок, який логіка здійснила у своєму розвитку в XX ст., вона залишається переважно в рамках фреґевської парадигми.

Здатність одного дослідника створити цілу наукову дисципліну вражає. Проте програма Фреґе з побудови логіки була більш всеосяжною. Ієнський професор мав на меті збудувати всю цю науку у винятково функціональному вигляді — так, щоб було тільки дві вихідні логічні категорії: індивід (предмет) і функція. З ряду суб'єктивних та об'єктивних причин при реалізації цієї програми замість поняття функції у ролі основоположної категорії було взято значно вужче поняття **предиката**, яке навіть вужче, ніж поняття **пропозиційної функції**. Звідси ядро сучасної логіки — логіка предикатів — будується у формальних мовах, структура яких утворена розрізненням індивідних та предикатних позначень: сталих та змінних, — і не є настільки загальним і охопним, як задумував його творець.

Постає питання: чи можливо і чи доцільно намагатися нині повернутися до початкової програми Фреґе з тим, щоб перебудувати всю логіку у функціональному стилі? З одного боку, класична логіка предикатів витримала перевірку часом і показала свою силу й широку застосовність у математичних, технічних областях та інформаційних технологіях. З другого боку, на її виражальні можливості є багато нарікань від дослідників різноманітних напрямків — у першу чергу, від тих, хто займається людськими, а не машинними міркуваннями. Ми пропонуємо зайняти третю позицію, яка полягає в тому, що чиста теорія має право на автономію від будь-яких застосувань: існують і завжди існуватимуть «чисті» теоретичні проблеми, які заслуговують на не меншу, а часто й на більшу увагу, аніж скороминущі (і, можливо, неправильно сформульовані) практичні запити сьогодення.

За такої точки зору постановка питання буде наступною. За означенням, поняття предиката вужче за поняття функції. У такому разі, як виглядатиме дедуктивна логіка, заснована на останньому понятті, і які відношення виникатимуть між її системами та численнями і системами та численнями стандартної предикатної логіки? Це питання розбиратиметься у наступних публікаціях. У них буде показано, що заміна поняття предиката на поняття функції в якості базової логічної категорії збагачує і розширює логіку. Оскільки ж логіка завжди має справу з деякими штучними мовами та похідними конструкціями над ними, слід розглянути проблему логічних категорій у розрізі їх реалізацій у логічних мовах.

Категоріальна структура формальних мов. Різні дослідники вживають суттєво різні поняття формальної предметної мови. Досить порівняти такі класичні роботи, як підручник Чорча [5] та монографію Кейслера і

Чена [1], щоб переконатися у необхідності декларувати, в якому сенсі термін «мова» вживається далі в тексті. Ми розумітимемо під мовою L об'єднання наступних множин символів (знаків):

- множини K змістовних або дескриптивних (позалогічних) сталих, яку називатимемо *алфавітом* або *словником* мови L;
- множини змінних, відповідних до сталих із K;
- множини логічних символів (у розглядуваних далі випадках це завжди сталі);
- множини службових (технічних, незначущих) знаків.

Із символів описаних типів за деякими *правилами утворення* конструюються послідовності, що називаються *виразами* мови L; для логічної теорії особливе значення має власна підмножина множини всіх виразів будь-якої даної мови, елементи якої (підмножини) називаються *формулами*; не менше значення мають дві власні підмножини множини формул: множина *речень* мови L та множина *теорем* теорії T_L (читається: теорії T в мові L); під *теорією* стандартно розумітимемо будь-яку підмножину множини речень мови L. У розглядуваних далі випадках завжди вводитиметься множина *аксіом* теорії T_L як скінчена підмножина множини теорем теорії T_L.

Логічні мови — це мови з порожнім алфавітом. Вони безпосередньо не містять символів для позначення об'єктів дійсності, а лише розглядають можливі конфігурації з таких символів, для чого послуговуються змінними. Категоріальна структура логічних мов визначається тим, які роди змінних вони допускають. Сучасна предикатна логіка виходить із розрізнення двох родів об'єктів: предметів і предикатів, — тому будується у *предикатних мовах*, які допускають в якості базових і елементарних тільки два роди змістовних знаків: на позначення предметів та на позначення предикатів. Змінні першого роду стандартно позначаються рядковими курсивними латинськими літерами: вільні — з початку алфавіту (a, b, ..., a_1, b_1, ...), зв'язані — з кінця (x, y, ..., x_1, y_1, ...)[1]. Змінні другого роду позначаються заголовними курсивними латинськими літерами до або після середини алфавіту з додаванням після них дужок для розміщення аргументів (F ( ), G ( ), ..., F_1 ( ), G_1 ( ), ... або P ( ), Q ( ), ..., P_1 ( ), Q_1 ( ), ...); кількість аргументів у предикатних змінних (сталих) стандартно позначається верхнім індексом у дужках: $F^{(n)}$ ( ), ..., $Q^{(m)}{}_1$ ( ) тощо.

Неформальний логічний поділ світу, котрий стоїть за предикатними позначеннями, простий та інтуїтивно привабливий: **всякий *n*-місний предикат $F^{(n)}$ ( ) з аргументами a_1, ..., a_n, — що записується як:**

$$F^{(n)}\ (a_1, ..., a_n), \qquad (1)$$

означає деяке n-місне відношення F між предметами a_1, ..., a_n; під предметами при цьому розуміється будь-що, про що можна висловлюватися. При $n = 1$ відношення вироджується у властивість, тобто:

$$F^{(1)}\ (a), \qquad (2)$$

означає, що предмет a має властивість F (або перебуває у (виродженому) унарному відношенні F)[2].

Це — предикатний погляд на світ. Аналогічна інтуїтивна картина для функціонального погляду так і не була розроблена. Тому у Фреґе і наступних дослідників (за винятком Чорча і Каррі) немає зразків функціональних, а не предикатних мов. Нижче якраз здійснюється опис шуканої функціональної картини світу. Вона цілковито базується на понятті функції, тому звернемося до нього.

Категорія функції. За Фреґе, функція відрізняється від предмета тим, що предмети — це завершені («насичені» в термінології Фреґе) об'єкти, функція ж за своєю природою як об'єкт незавершена, «ненасичена» — що відображається в імені функції (функціональному виразі) через наявність «пропусків» або «порожніх місць» (називатимемо їх валентностями або аргументними місцями); заповнення валентностей власними іменами (іменами предметів) перетворює функціональний вираз на власне ім'я; це ім'я позначає предмет, який називається значенням функції. Таким чином, заповнення валентностей в імені $\mathrm{f}^{(n)}$ ( ) n-місної функції f іменами a_1, ..., a_n предметів утворює власне ім'я:

$$f^{(n)}\ (a_1, ..., a_n), \qquad (3)$$

деякого предмета, який є значенням функції f *при аргументах* a_1, ..., a_n. Постулювання того, що істиннєві значення «істина» і «хиба» суть предмети, дозволило стверджувати, що

[1] Багато авторів використовують один список предметних змінних, але це навіть технічно незручно, оскільки у цьому випадку доводиться розрізняти вільні та зв'язані *входження* змінних, що робить означення громіздкими і заплутаними. Як ми побачимо далі, єдиний список неприйнятний також через те, що містить у собі систематичну плутанину семантичного характеру.

[2] Нульмісне відношення вважається висловлюванням; нульмісна предикатна змінна — це, по суті, пропозиційна змінна.

всякий предикат з іменем виду (1) — це така функція з іменем виду (3), що її значенням при вказаних аргументах є істина або хиба, а аргументи (значення імен a_1, ..., a_n) беруться із фіксованої множини, що називається *предметною* або *індивідною областю*[3].

Фреґевське поняття функції дуже загальне, однак не гранично загальне. Існує можливість розширити його — і таке розширення вже буде гранично загальним (як видається на нинішній момент). Воно пов'язане з відмовою від розгляду в якості імен предметів лише ***власних імен.*** Власні імена згідно з теорією семантичного трикутника позначають один-єдиний предмет. Тим самим вони суть однозначні вирази. Однак мовні вирази можуть бути не тільки однозначними, але й порожніми (нульзначними) або багатозначними (n-значними при n > 1). Фреґе відмовився вводити у формальні мови останні дві категорії імен. Відмова від порожніх імен була радше суб'єктивною пересторогою, пов'язаною з характерним для математиків XIX ст. некоректним поводженням з іменами, коли існування значень у імен постулювалося, а не доводилося — що призводило до багатьох хибних тверджень, які видавалися за теореми (доки не спростовувалися). Багатозначні ж імена не були включені у корпус предикатних мов з технічних причин: всі випадки їхнього застосування виражаються за допомогою одномісних предикатів — тобто замість того, щоб казати, що даний об'єкт позначається багатозначним іменем f, можна сказати, що він має властивість F ( ), вживаючи тим самим вираз виду (2). Звідси багатозначні імена зробили б предикатні мови надлишковими: для багатьох ситуацій існувало б по два способи висловлювання. На жаль, сам Фреґе (хибно) сприйняв цю відкриту ним ситуацію таким чином, ніби уникнути вживання понять, замінивши їх на неоднозначні імена, взагалі не можна [4; 252, 275–276]. Насправді, при функціональному погляді на світ, навпаки, є всі підстави прийняти і порожні, й багатозначні імена.

Порожні імена потрібні для обговорення на порожніх універсумах, таких, як індивідні області літературних та міфічних персонажів чи давно померлих історичних діячів, — або універсумів, непорожність яких під питанням. Скажімо, ім'я одномісної функції «король» при аргументі «Франція в XX ст.» стає порожнім іменем, але це ім'я має суттєве логіко-філософське значення і завдяки Расселу широко вживається у дослідженнях з металогіки, тому повинно бути доступним для вживання і в предметних мовах.

З багатозначними іменами ми маємо справу щодня: звичайні імена й прізвища людей, географічні назви, назви організацій тощо суть багатозначні. Вважати їх властивостями, одномісними предикатами було б контрінтуїтивно, якщо не сказати: протиприродно. Багатозначні імена вільно вживалися у логіці до праць Фреґе (навіть Чорч посилається на вживання їх у Мілля [5; 341–342]).

Керуючись такими міркуваннями, ми введемо у формальні логічні мови *неоднозначні* імена. Такі імена можуть з однаковим успіхом бути порожніми, власними або багатозначними: кількість значень у такого імені не визначається його видом. Називатимемо неоднозначні імена *загальними*[4]. При цьому введення таких імен здійснюватиметься не прямо, а за посередництвом категорії функції. А саме, у силу наявності неоднозначних імен ми маємо поширити на них Фреґевське поняття функції. У новому формулюванні на аргументні місця в імені функції допускатимуться підстановки загальних імен; при цьому ім'я функції перетворюватиметься на загальне ім'я (саме ж ім'я функції у будь-якому разі мислиться власним).

В останньому випадку ми отримаємо ***неоднозначну функцію.*** І Фреґе, і всі наступні математики й логіки досі не допускали такої можливості: функцію за означенням прийнято вважати однозначною. Для позначення неоднозначного (переважно багатозначного) випадку функції алгебраїсти послуговуються різними, неузгодженими термінами, напр., «часткове мультивідображення» (Мальцев), [2; 32–33] «відповідність» (Шрейдер) [6; 24–25]. При цьому навіть в елементарній арифметиці ми натрапляємо на приклади широко вживаних неоднозначних функцій. Так, корінь (радикал) є такою функцією вже на множині цілих чисел Z. Скажімо, набуває на Z два значення: 2 та -2. Численні приклади порожніх (0-значних) функцій дають розбіжні ряди в аналізі, які використовував як приклад Фреґе. Через це немає жодних причин вважати поняття неоднозначної функції навіть нововведенням: реально воно вживається вже давно — залишається тільки ввести його у логіку[5].

Це і є узагальнення Фреґевського поняття функції, яке ми приймемо.

[3] Це сучасна трактовка: у Фреге індивідна область була універсальна; в цьому пункті із ним навряд чи можна нині погодитися.

[4] Цим, як видається, ми відступаємо від дофрегевської термінології, зокрема термінології Мілля, в якій загальні імена передбачалися непорожніми.

[5] Чорч визнає, хоча й з обмовками, що «...багатозначні функції виникають в математиці... природним чином при вивченні дійсних або комплексних чисел...» [5; 352].

Оскільки власні імена очевидно є різновидом загальних імен, то загальним випадком функції є саме випадок неоднозначної функції, а функції однозначні складають лише частинний[6] випадок вказаного загального.

Ввести неоднозначні імена тепер нескладно. У теорії рекурсії давно помічено, що предмети можна трактувати як 0-місні функції [3; 31]. Імена неоднозначних 0-місних функцій якраз і будуть неоднозначними іменами (предметів).

Що являють собою неоднозначні 0-місні функції, безпосередньо не очевидно. У силу неоднозначності вони не можуть бути предметами. Для вияснення цього питання розглянемо співвідношення між функціями і предикатами. Відомо, що при довільному натуральному n кожній однозначній n-місній функції $f(\ )$ можна співставити $n+1$-місний предикат[7] $F(\ )$ так, що вирази (5) (див. далі) і $F^{(n+1)}\ (a_0, a_1, ..., a_n)$ будуть рівнозначні при будь-яких аргументах $a_0, a_1, ..., a_n$. Зворотне не має місця, оскільки далеко не для кожного предиката при будь-яких $a_1, ..., a_n$ існує точно один такий a_0, що $a_0, a_1, ..., a_n$ здійснюють цей предикат. Проте, якщо функція, співставлювана предикату, не обов'язково має бути однозначною, то така функція завжди знайдеться. Відтак, між предикатами та неоднозначними функціями, означеними на одній індивідній області, існує взаємно-однозначна відповідність такого характеру, що для будь-яких відповідних одне одному (у цій відповідності) $f^{(n)}(\ )$ і $F^{(n+1)}(\ )$ формула $F^{(n+1)}\ (a_0, a_1, ..., a_n)$ рівнозначна твердженню «a_0 є значенням функції $f^{(n)}$ при аргументах $a_1, ..., a_n$». При $n = 0$ матимемо відповідність 0-місної функції та 1-місного предиката. Оскільки, як вище говорилося, інтуїтивно одномісні предикати — це властивості, 0-місні функції — це так само властивості. Звідси, всяке загальне ім'я зображає або, точніше, вказує (у мові, якій належить) на деяку властивість, притаманну тим і тільки тим предметам, котрі позначає це ім'я. (І через це загальні імена можуть бути рівнооб'ємними, але не тотожними).

Введемо функціональні позначення для формальних мов, альтернативних до предикатних: зображатимемо функціональні змінні тими ж літерами латинського алфавіту, що і предикатні змінні, тільки братимемо рядкові, а не заголовні літери. Матимемо: $f(\ ), g(\ ), ..., f_1(\ ), g_1(\ ), ...$ або $p(\ ), q(\ ), ..., p_1(\ ), q_1(\ ), ...$. Місність (арність) функціональних знаків позначатимемо так само, як місність знаків предикатних: $f^{(n)}(\ ), ..., q^{(m)}{}_1(\ )$ тощо; якщо ж функціональна стала або змінна 0-місна, у неї немає аргументів, отже дужки після її імені писати не треба, потрібно писати просто f або $f^{(0)}$ тощо. Виходячи з цього, можна узагальнити вираз (3) на випадок, коли аргументами функції виступають загальні імена:

$$f^{(n)}\ (g^{(0)}{}_1, ..., g^{(0)}{}_n), \qquad (4)$$

Залишається встановити, яке відношення має місце між функцією при даних аргументах та її значенням (при цих аргументах). Для однозначних функцій це — рівність; якщо значенням функції з виразу (3) є предмет з іменем a_0, твердження «a_0 є значенням функції f при аргументах $a_1, ..., a_n$» можна записати як:

$$a_0 = f^{(n)}\ (a_1, ..., a_n), \qquad (5)$$

У випадку неоднозначних функцій та загальних імен скористатися рівністю не можна, оскільки це відношення за означенням може осмислено вживатися тільки відносно власних імен. Проте неважко переконатися, що шукане відношення є нічим іншим, як узагальненням рівності на випадок загальних імен. Справді, воно має всі властивості рівності. Доведемо це.

Рефлексивність. Кожен предмет із загальним іменем f має властивість $F^{(1)}(\ )$ (наприклад, кожен камінь має властивість бути каменем), отже, є значенням функції $f^{(0)}$. Це випливає зі сказаного вище про відповідність між предикатами й функціями. Рефлексивність можна сформулювати й простіше: кожен f-предмет є f-предметом.

Симетрія. Нехай деякий f-предмет є значенням функції $g^{(0)}$; в такому разі він є одним із g-предметів, і цей g-предмет, оскільки він є f-предметом, є значенням функції $f^{(0)}$. Цим доведено, що для кожного f-предмета, який є g-предметом, знайдеться g-предмет, який є f-предметом. Це формулювання можна посилити наступним чином: для будь-яких f-предмета і g-предмета, якщо (даний) f-предмет є даним g-предметом, то цей g-предмет є вказаним f-предметом.

Транзитивність. Нехай дано f-предмет і g-предмет, при чому даний f-предмет є даним g-предметом, а даний g-предмет є якимось h-предметом. У такому разі очевидно, що даний f-предмет, будучи тим самим, що і даний g-предмет, є також h-предметом.

Узагальнення другої аксіоми рівності (J_2) (ослаблений критерій Лейбніца; у предикатних мовах має вигляд $a_0 = a_1 \rightarrow (F\ (a_0) \rightarrow F\ (a_1)))$. Замінивши тут a_0 на f, a_1 на g, $F(\ )$

[6] Не слід плутати поняття *частинний* і *частковий*: перше вказує на підмножину, а друге — на елемент множини.

[7] Взагалі кажучи, це буде багатосортний предикат.

на h і рівність на шукане відношення, отримаємо таке формулювання: які б не були f-предмет і g-предмет, якщо даний f-предмет є даним g-предметом і ще якимось h-предметом, то і даний g-предмет є h-предметом. Воно очевидно загальнозначуще.

Із першої та останньої з перелічених властивостей виводяться всі інші властивості рівності; у численнях, представлених в наступних публікаціях, аналогічними доведеннями можна отримати всі властивості шуканого відношення між значенням функції та функцією при аргументах. Таким чином, вказане відношення справді узагальнює поняття рівності на випадок загальних імен. Через це позначатимемо його знаком наближеної рівності «≈», який не має стандартного вживання у сучасній предикатній логіці. Тепер можна записати узагальнення (5) як:

$$g^{(0)}_0 \approx f^{(n)}\ (g^{(0)}_1, \ldots, g^{(0)}_n), \qquad (6)$$

і говорити про те, що формула $a_0 \approx f^{(n)}\ (a_1, \ldots, a_n)$ означає те саме, що і $F^{(n+1)}\ (a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Називатимемо введене логічне відношення ...≈... *відношенням представлення* або просто *представленням*, а формули виду (6) — *формулами представлення*. Найбільш загальний вид формул представлення наступний:

$$s \approx t; \qquad (7)$$

тут s і t — терми. Такий вибір термінології диктується тим, що хоча формули виду (7) можна читати аналогічно до того, як читаються формули рівності: «s-предмет є t-предметом», «s-предмет — це t-предмет» — але, по-перше, точне прочитання залежить від застосування чи незастосування принципу вибору[8] і, по-друге, у загальному випадку у формулах представлення йдеться про те, що деякий предмет, представлений у даній мові іменем s, може бути представлений у цій же мові іменем t. Таке прочитання формул виду (7) є найзагальнішим. Окрім нього, є ще ряд однаково допущенних, але більш вузьких прочитань: у термінах предикатів (понять, властивостей, відношень) — «s-предмет підпадає під предикат T ( ) (має властивість T ( ) і т. д.)», у термінах функцій — «s-предмет є значенням функції $t^{(0)}$», навіть у процедурних термінах — «s-предмет є (негарантованим) результатом (можливо, недетермінованої) процедури t».

Називатимемо мови, збудовані на введеному квазіфреґевському понятті неоднозначної функції, не функціональними, а *індивідними*. Такий вибір термінології зумовлений тим, що тільки-но введені функціональні позначення іменують не функції, а предмети (індивіди), і при цьому їхнє призначення полягає саме у представленні: іменуванні або характеризації — а не у вираженні формулювань і тверджень, як у предикатних позначень. Інакше кажучи, предикатні мови мають основним завданням опис пропозиційний, а мови, збудовані з функціональних позначень — опис номінативний.

Порівняння логік, збудованих в індивідних і у предикатних мовах. Поняття функції ширше за поняття предиката. Тому індивідні мови мають бути багатшими за предикатні, а логічні системи, збудовані в індивідних мовах, аналогічних предикатним, мають бути сильнішими.

Справедливість першого із цих тверджень встановлюється дуже легко. Якщо у формулу (7) підставити замість s загальне ім'я, а замість t — власне, отримане висловлювання не матиме буквального відповідника у жодній предикатній мові. Приклад такого висловлювання можна взяти у Арістотеля (змінимо тільки власне ім'я): «Той, хто до нас іде — Сократ». У предикатних мовах для його передачі потрібно буде вжити η-терм (або, більш обережно, ε-терм) та рівність. Однак видається, що рівність тут — занадто сильне відношення, принаймні зворотне не випливає із самого формулювання. Більш точно можна означити рівність у термінах представлення; тоді ми отримаємо дві нееквівалентні формули: (7) і s = t, які у випадку наведеного арістотелевого прикладу однаково передаватимуться формулою рівності.

Друге твердження потребує доведення. Для цього у наступних публікаціях буде збудовано дві схожі мови — предикатна P=L й індивідна IL, — які різнитимуться тільки деякими змістовними знаками та логічною функцією вибору, і в них буде збудовано два числення: класичне (чисте) першопорядкове числення предикатів з рівністю $P{=}F^1$ та аналогічне за змістом класичне першопорядкове числення індивідів (зі стандартною семантикою) I_sF^1, після чого ми порівняємо їхні дедуктивні можливості.

Література:

1. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.
2. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970.
3. *Успенский В. А.* Лекции о вычислимых функциях. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1960.
4. *Фреге Г.* Логика и логическая семантика: Сб. трудов / Пер. с нем. – М.: Аспект-Пресс, 2000.
5. *Чёрч А.* Введение в математическую логику. Т. 1 /Пер. с англ. – М.: Изд. иностр. лит., 1960.
6. *Шрейдер Ю. А.* Равенство, сходство, порядок. – М.: Наука, 1971.

[8] Про принцип вибору — у наст. публікаціях.