ДЗЫК

С

Сборник сте-рео

-трических задач.

... не заявив...
при ... порчѣ ...
во... ...таковой
пр... ...и упла-
чивает... ...поврежде-
нія по оцѣнкѣ библіотекаря

П. Г. ДЗЫКЪ

СБОРНИКЪ

СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ

НА КОМБИНАЦІИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ТѢЛЪ

Подъ редакціей привать-доцента СПБ. Университета

Я. В. УСПЕНСКАГО

MATHESIS ОДЕССА 1914

ОДЕССА.
Типографія „**Техникъ**“, Екатерининская, 58.
1914.

СОДЕРЖАНІЕ (1 — 320).

I. Комбинаціи многогранниковъ (1 — 69).

II. Комбинаціи шаровъ съ прямыми, плоскостями и многогранниками (70 — 151).

III. Комбинаціи цилиндра съ прямыми, плоскостями, многогранниками и шарами (152—246).

IV. Комбинаціи конуса съ прямыми, плоскостями, многогранниками и шарами (247—320).

I. КОМБИНАЦІИ МНОГОГРАННИКОВЪ (1-69).

1. Сѣченія многогранниковъ плоскостью (1—35).

1. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно къ плоскости ея основанія. Вычислить площадь сѣченія пирамиды плоскостью, проходящей черезъ A, параллельной BC и перпендикулярной къ грани SBC, если

$$SA=1,\ AB=\frac{13}{16},\ AC=\frac{15}{16},\ BC=\frac{7}{8}.$$

2. Площадь боковой грани правильной 3-угольной пирамиды $=S$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго параллельно боковой грани черезъ 1) центръ основанія, 2) средину высоты.

3. Сторона основанія правильной 3-угольной пирамиды $=a$, боковое ребро $=l$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго параллельно двумъ непересѣкающимся ребрамъ пирамиды черезъ 1) центръ основанія, 2) средину высоты.

4. Сторона основанія правильной 3-угольной пирамиды $=a$, боковое ребро $=l$. Найти сторону квадратнаго сѣченія, проведеннаго параллельно двумъ непересѣкающимся ребрамъ пирамиды.

5. Площадь сѣченія правильной 4-угольной пирамиды, перпендикулярнаго къ сторонѣ основанія въ ея srединѣ, $=S$. Найти площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ сторонѣ основанія и дѣлящаго её въ отношеніи $1:5$.

6. Площадь сѣченія правильной 3-угольной пирамиды, проходящаго черезъ вершину и перпендикулярнаго къ медіанѣ основанія, $=S$. Найти площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ медіанѣ основанія и дѣлящаго её въ отношеніи 1) $1:1$, 2) $1:2$, 3) $1:5$.

7. Площадь сѣченія, проходящаго черезъ высоту правильной 6-угольной пирамиды и большую діагональ ея основанія, $=S$. Найти площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ апоѳемѣ основанія въ ея срединѣ.

8. Площадь боковой грани правильной 4-угольной пирамиды $= S$. Найти площадь сѣченія, параллельнаго боковой грани и дѣлящаго площадь основанія въ отношеніи 1) $1:1$, 2) $1:3$.

9. Площадь сѣченія, проведеннаго черезъ меньшую діагональ основанія правильной 6-угольной пирамиды параллельно ея высотѣ, $= S$. Найти площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ сторонѣ основанія и дѣлящаго её въ отношеніи $1:3$.

10. Площадь сѣченія, проведеннаго черезъ діагональ основанія правильной 4-угольной пирамиды параллельно невстрѣчающемуся съ ней боковому ребру, $= S$. Найти площадь сѣченія, проходящаго черезъ средины двухъ смежныхъ сторонъ основанія и средину высоты.

11. Сторона основанія правильной 3-угольной призмы

$$ABCA_1B_1C_1$$

$= 1$; высота призмы = радіусу круга, вписаннаго въ основаніе. Найти площадь сѣченія, проходящаго черезъ средины реберъ AA_1, A_1B_1 и AC.

12. Каждое ребро правильной 6-угольной призмы $= 1$. Найти площадь сѣченія, проходящаго черезъ сторону основанія и бо̀льшую діагональ призмы.

13. Сторона основанія правильной 4-угольной призмы $= 2$, высота призмы $= 4$. Найти площадь сѣченія, проходящаго черезъ средины двухъ смежныхъ сторонъ основанія и средину оси.

14. Основаніемъ прямой призмы служитъ ромбъ съ діагоналями 6 и 15; высота призмы $= 8$. Найти площади сѣченій, проходящихъ черезъ діагонали призмы параллельно діагоналямъ ея основаній.

15. Въ правильной 4-угольной призмѣ проведены два параллельныхъ сѣченія: одно проходитъ черезъ діагональ основанія призмы параллельно ея діагонали, другое дѣлитъ ось призмы въ отношеніи $1:3$. Зная, что площадь перваго $= S$, найти площадь второго.

16. Въ правильной 4-угольной призмѣ проведены два параллельныхъ сѣченія: одно проходитъ черезъ средины двухъ смежныхъ сторонъ основанія и средину оси, другое дѣлитъ ось въ отношеніи $1:3$. Зная, что площадь перваго $= S$, найти площадь второго.

17. Въ правильной 6-угольной призмѣ проведены два параллельныхъ сѣченія: одно проходитъ черезъ сторону основанія призмы и ея бо̀льшую діагональ, другое дѣлитъ ось призмы въ отношеніи $1:3$. Зная, что площадь перваго $= S$, найти площадь второго.

18. Въ правильной 6-угольной призмѣ проведены два параллельныхъ сѣченія: одно проходитъ черезъ средины двухъ несмежныхъ и непараллельныхъ сторонъ основанія и средину оси призмы, другое дѣлитъ ось въ отношеніи 1 : 3. Зная, что площадь перваго $= S$, найти площадь второго.

19. Діагонали основаній правильной усѣченной 4-угольной пирамиды равны d и $3d$, діагональ пирамиды $= D$. Найти площади двухъ параллельныхъ сѣченій, одно изъ которыхъ проходитъ черезъ діагональ пирамиды параллельно діагонали ея основанія, а другое черезъ средину оси.

20. Стороны основаній правильной 6-угольной усѣченной пирамиды равны a и $3a$; разстояніе между двумя параллельными ребрами, лежащими въ плоскостяхъ различныхъ основаній и различныхъ боковыхъ граней, $= k$. Въ пирамидѣ проведены два параллельныхъ сѣченія: одно проходитъ черезъ упомянутыя ребра, другое черезъ средину оси. Найти площадь сѣченій.

21. Площадь боковой грани правильной 6-угольной пирамиды $= S$. Найти площадь сѣченія, параллельнаго боковой грани и проходящаго черезъ 1) центръ основанія, 2) средину высоты.

22. Меньшія діагонали основаній правильной 6-угольной усѣченной пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$ равны d и $2d$; бо́льшая діагональ пирамиды $= D$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ $A_1 B_4$ параллельно $A_2 A_6$.

23. Бо́льшая діагональ правильной 6-угольной призмы

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$$

$= D$, меньшая діагональ ея основанія $= d$. Найти площадь сѣченія, параллельнаго $A_2 A_6$ и $A_1 B_4$, если отношеніе $A_1 M : MA_4$, въ которомъ сѣкущая плоскость дѣлитъ $A_1 A_4$, равно

1) 3 : 1, 2) 1 : 1, 3) 1 : 3, 4) 1 : 7, 5) 0.

24. Боковое ребро правильной 6-угольной пирамиды

$$SA_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$$

равно l, меньшая діагональ основанія $= d$. Найти площадь сѣченія, параллельнаго SA_1 и $A_2 A_6$, если отношеніе $A_1 M : MA_4$, въ которомъ сѣкущая плоскость дѣлитъ $A_1 A_4$, равно

1) 3 : 1, 2) 1 : 1, 3) 1 : 3, 4) 1 : 7.

25. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ концы трехъ реберъ, выходящихъ изъ одной и той же вершины прямоугольнаго параллелепипеда, если эти ребра равны 2, 4 и 6.

26. Основаніемъ пирамиды съ равными боковыми ребрами служитъ параллелограммъ, стороны котораго равны 6 и 8; высота пирамиды $= 2$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ діагональ основанія параллельно боковому ребру.

27. Стороны основанія прямоугольнаго параллелепипеда равны 4 и 3, его высота $= 2$. Черезъ діагональ параллелепипеда проведена плоскость, параллельная діагонали его основанія; найти площадь сѣченія.

28. Измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда суть a, b и c. Найти площадь сѣченія, проходящаго черезъ средины шести его реберъ $(a = b = c)$.

29. Основаніемъ пирамиды съ равными боковыми ребрами служитъ прямоугольный треугольникъ, катеты котораго равны 5 и 12; высота пирамиды $= \frac{80}{13}$. Найти площадь сѣченія, параллельнаго гипотенузѣ основанія и невстрѣчающемуся съ ней боковому ребру, если сѣкущая плоскость дѣлитъ катеты основанія въ отношеніи 4 : 1, считая отъ вершины прямого угла.

30. Основаніемъ пирамиды $SABCD$ служитъ параллелограммъ, въ которомъ $AB = 13$, $AD = 15$, $BD = 4$; высота пирамиды $= 16$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ средины AB и AD параллельно SA.

31. Основаніемъ пирамиды $SABCD$ служитъ параллелограммъ со сторонами $AB = 17$ и $AC = 10$ и діагональю $BD = 9$; высота пирамиды проходитъ черезъ точку O пересѣченія діагоналей основанія и равна 30. Черезъ A проведена параллельно BD плоскость, дѣлящая высоту въ отношеніи 4 : 1, считая отъ вершины пирамиды; найти площадь сѣченія.

32. Основаніемъ пирамиды $SABCD$ служитъ параллелограммъ со сторонами $AB = 15$ и $AD = 13$ и діагональю $BD = 14$; ребро SA перпендикулярно къ плоскости основанія и $= 48$. Черезъ A проведена плоскость, параллельная BD и дѣлящая SC въ отношеніи $SM : MC = 3 : 2$; найти площадь сѣченія.

33. Ребро правильнаго тетраэдра $= a$; найти стороны, периметръ и площадь сѣченія, параллельнаго двумъ непересѣкающимся ребрамъ тетраэдра и отстоящаго отъ его центра на $p \left(0 \leqslant p \leqslant \frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$.

34. Ребро правильнаго октаэдра $= a$; найти стороны, периметръ и площадь сѣченія, параллельнаго грани октаэдра и отстоящаго отъ его центра на $p \left(0 \leqslant p \leqslant \frac{a\sqrt{6}}{6}\right)$.

35. Ребро куба $= a$; найти стороны, периметръ и площадь сѣченія, перпендикулярнаго къ діагонали куба и отстоящаго отъ его центра на p, гдѣ $0 \leqslant p \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

2. Пересѣченіе многогранниковъ (36—48).

36. Каждое изъ основаній правильной призмы служитъ основаніемъ пирамиды, вершина которой находится въ центрѣ другого основанія призмы. Какъ относится объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми гранями пирамидъ, къ объему призмы?

37. Вершины двухъ равныхъ правильныхъ 3-угольныхъ пирамидъ, объемъ каждой изъ которыхъ $= V$, находятся въ различныхъ концахъ ихъ общей высоты, при чемъ боковыя ребра одной пересѣкаютъ апоѳемы другой. Найти объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми гранями пирамидъ.

38. Объемъ правильной пирамиды $= V$. Въ 6-угольникѣ, служащемъ ея основаніемъ, проведены діагонали, не проходящія черезъ центръ; два полученныхъ треугольника служатъ перпендикулярными сѣченіями призматическихъ поверхностей. Найти объемъ части пирамиды, заключенной внутри призматическихъ поверхностей.

39—41. *Правильный многогранникъ, объемъ котораго $= V$, пересѣченъ плоскостью, проходящей черезъ его центръ; полученный многоугольникъ служитъ перпендикулярнымъ сѣченіемъ призматической поверхности. Найти объемъ части многогранника, заключенной внутри призматической поверхности, если сѣкущая плоскость*

39. параллельна двумъ непересѣкающимся ребрамъ тетраэдра.

40. параллельна грани октаэдра.

41. перпендикулярна къ діагонали куба.

42. Оси двухъ призматическихъ поверхностей, перпендикулярныя сѣченія которыхъ равные квадраты со стороной a, взаимно перпердикулярны, а двѣ діагональныя плоскости ихъ совпадаютъ. Найти объемъ тѣла, ограниченнаго призматическими поверхностями.

43. Перпендикулярныя сѣченія двухъ призматическихъ поверхностей суть равные правильные треугольники со стороной a. Найти объемъ тѣла, ограниченнаго призматическими поверхностями, если

1) оси поверхностей пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, а плоскости двухъ граней совпадаютъ;

2) одно изъ реберъ каждой поверхности пересѣкаетъ два ребра другой поверхности подъ прямымъ угломъ.

44. Оси двухъ призматическихъ поверхностей, перпендикулярныя сѣченія которыхъ суть равные правильные шестиугольники со стороной a, пересѣкаются подъ прямымъ угломъ. Найти объемъ тѣла, ограниченнаго призматическими поверхностями, если у нихъ совпадаютъ

1) двѣ діагональныхъ плоскости, проходящія черезъ оси;

2) двѣ діагональныхъ плоскости, не проходящія черезъ оси.

45. Ребро куба $= a$. Въ кубъ вписаны три правильныхъ 4-угольныхъ призмы, вершины угловъ которыхъ дѣлятъ ребра куба пополамъ; найти объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми гранями призмъ.

46. Ребро правильнаго октаэдра $= a$. Въ октаэдръ вписано восемь правильныхъ 3-угольныхъ призмъ, вершины угловъ которыхъ дѣлятъ ребра октаэдра въ отношеніи $1:2$; найти объемъ тѣла, ограниченнаго боковыми гранями призмъ.

47. Та же задача для четырехъ правильныхъ 6-угольныхъ призмъ.

48. Найти объемъ 48-гранника, плоскость каждой грани котораго отсѣкаетъ на трехъ взаимно-перпендикулярныхъ пересѣкающихся въ точкѣ O прямыхъ отрѣзки OX, OY, OZ, одинъ изъ которыхъ (любой) $= m$, другой $= n$, третій $= p$ $(m \leqslant n \leqslant p)$. Полученную формулу примѣнить къ кубу, октаэдру и многогранникамъ, полученнымъ въ трехъ предыдущихъ задачахъ.

3. Вписанные многогранники* (49—69).

49—52. *Найти отношеніе объемовъ призмы и бипирамиды, если*

---

* Если одинъ многогранникъ „вписанъ" въ другой, то всѣ вершины перваго лежатъ на поверхности второго.

49. центры основаній и средины боковыхъ реберъ правильной призмы служатъ вершинами угловъ бипирамиды.

50. средины боковыхъ реберъ правильной бипирамиды служатъ вершинами угловъ призмы.

51. центры основаній и центры тяжести боковыхъ граней правильной призмы 1) 3-уг., 2) 4-уг., 3) 6-уг. служатъ вершинами угловъ бипирамиды.

52. центры тяжести граней правильной 1) 3-уг., 2) 4-уг., 3) 6-уг. бипирамиды служатъ вершинами угловъ призмы.

53. Стороны основаній правильной 1) 3-уг., 2) 4-уг., 3) 6-уг. усѣченной пирамиды относятся какъ 1 : 2. Найти отношеніе объема усѣченной пирамиды къ объему бипирамиды, вершинами угловъ которой служатъ центры основаній и точки пересѣченія діагоналей боковыхъ граней усѣченной пирамиды.

54—56. *Правильная K-угольная бипирамида пересѣчена двумя плоскостями, перпендикулярными къ ея оси и дѣлящими её въ одномъ и томъ же отношеніи; стороны сѣченій раздѣлены послѣдовательно въ отношеніи $m:n$. Зная, что точки дѣленія служатъ вершинами угловъ равнореберной призмы, найти ея ребро, если*

54. $K=4$, сторона основанія бипирамиды $=6$, ея ось $=10$, $m:n=3:4$.

55. $K=3$, ось бипирамиды $=$ діаметру круга, описаннаго около основанія $=3$, $m:n=1:2$.

56. $K=6$, сторона основанія бипирамиды $=6$, ея ось $=7$, $m:n=3:5$.

57. Основаніемъ пирамиды служитъ прямоугольный треугольникъ съ катетами 6 и 8; вершина пирамиды удалена отъ плоскости основанія на 24 и проэктируется на эту плоскость въ точку, находящуюся внутри основанія. Плоскости основаній пирамиды и вписаннаго въ нее куба совпадаютъ; найти ребро куба, если его боковыя грани параллельны катетамъ основанія пирамиды.

58. Въ пирамидѣ $SABC$ дано: $AB=13$, $AC=14$, $BC=15$; вершина пирамиды удалена отъ плоскости основанія на 18 и проэктируется на эту плоскость въ точку, находящуюся внутри основанія. Плоскости основаній пирамиды и вписаннаго въ нее прямоугольнаго параллелепипеда совпадаютъ; стороны основанія и высота параллелепипеда относятся какъ 7 : 2 : 6, при чемъ большая его боковая грань параллельна AC. Найти объемъ параллелепипеда.

59. Ребра AB и CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярны другъ къ другу и къ прямой MN, соединяющей ихъ средины; MN служитъ осью вписанной въ тетраэдръ правильной 4-угольной призмы. Найти ея объемъ, если

1) $AB = CD = 8$, $MN = 4$, высота призмы относится къ сторонѣ основанія какъ $3 : 1$;

2) $AB = 2$, $CD = MN = 4$, высота призмы = сторонѣ основанія.

60. Плоскости основаній правильнаго октаэдра и вписанной въ него правильной 6-угольной призмы совпадаютъ. Найти отношеніе объема призмы къ объему октаэдра.

61. Ребро куба $= 1$. Діагональ SS_1 куба служитъ осью вписанной въ кубъ правильной 6-угольной призмы; найти объемъ призмы, если ея высота втрое меньше діагонали куба.

62. Ребро правильнаго октаэдра $= a$. Прямая, соединяющая центры основаній октаэдра, служитъ осью вписанной въ него правильной 6-угольной призмы, высота которой относится къ высотѣ октаэдра, какъ $l : 1$. Найти сторону основанія призмы.

63. Ребро куба $= a$. Діагональ куба служитъ осью вписанной въ кубъ правильной 6-угольной призмы, высота которой относится къ діагонали куба, какъ $l : 1$. Найти сторону основанія призмы.

64. Прямая, соединяющая центры основаній правильнаго октаэдра, служитъ осью вписанной въ него правильной 3-угольной призмы. Найти отношеніе объема призмы къ объему октаэдра, если плоскость одного основанія призмы совпадаетъ съ плоскостью основанія октаэдра, а плоскость другого ея основанія проходитъ черезъ его центръ.

65. Ребро куба $= 1$. Діагональ SS_1 куба служитъ осью вписанной въ него правильной 3-угольной призмы. Найти объемъ призмы, если плоскости ея основаній дѣлятъ SS_1 въ отношеніи $1 : 1$ и $1 : 2$.

66. Объемъ правильнаго октаэдра $= V$. Найти объемъ вписанной въ октаэдръ правильной 3-угольной призмы, осью которой служитъ прямая MN, соединяющая центры его основаній, если центры основаній призмы дѣлятъ MN въ отношеніи $1 : 2$ и $1 : 5$. (Два случая, въ зависимости отъ того, лежатъ ли эти центры 1) по разныя стороны или 2) по одну сторону отъ центра октаэдра).

67. Ребро куба $= 1$. Діагональ SS_1 куба служитъ осью вписанной въ кубъ правильной 3-угольной призмы. Найти объемъ призмы, если плоскости ея основаній дѣлятъ SS_1 въ отношеніи 11 : 25 и 4 : 5. (Два случая... см. пред. зад.).

68. Ребро куба = 1. Изъ всѣхъ вписанныхъ въ кубъ правильныхъ 3-угольныхъ призмъ, осью которыхъ служитъ діагональ куба, и плоскость одного основанія которыхъ дѣлитъ эту діагональ въ отношеніи 1) 1 : 2, 2) 1 : 1, 3) 4 : 5, найти объемъ той, высота которой наибольшая.

69. Ребро куба = 1. Діагональ SS_1 куба служитъ осью вписаннаго въ кубъ прямоугольнаго параллелепипеда, діагональ котораго $= \frac{\sqrt{14}}{3}$; найти его объемъ.

II. КОМБИНАЦІИ ШАРОВЪ СЪ ПРЯМЫМИ, ПЛОСКОСТЯМИ И МНОГОГРАННИКАМИ (70 — 151).*

4. Шаръ, описанный около многогранниковъ (70 — 80).

70 — 76. *Найти радіусъ шара, описаннаго около*

70. правильной 6-угольной призмы, сторона основанія которой = 3, а высота = 8.

71. прямоугольнаго параллелепипеда, ребра котораго равны 4, 6 и 12.

72. прямой призмы, основаніемъ которой служитъ равнобедренный треугольникъ со стороной основанія, равной 6 и высотой, равной 1; высота призмы = 24.

73. пирамиды, въ основаніи которой находится правильный 6-угольникъ со стороной, равной 4; одно изъ реберъ пирамиды перпендикулярно къ плоскости основанія и равно 6.

74. 3-угольной пирамиды, боковыя ребра которой взаимно-перпендикулярны и равны 6, 8 и 24.

75. пирамиды $SABC$, если $AB = AC = 30$, $BC = 48$, SA перпендикулярно къ плоскости основанія и равно 120.

76. правильной пирамиды, боковое ребро которой $= l$, а высота $= h$.

* Подъ словами „n шаровъ радіуса r“ будемъ разумѣть n шаровъ радіусъ каждаго изъ которыхъ $= r$; слова „радіуса r“ заключены въ скобки когда r не дано.

77. Въ шаръ, радіусъ котораго $= 5$, вписана правильная 6-угольная пирамида, сторона основанія которой $= 3$; найти высоту пирамиды.

78. Найти радіусъ шара, описаннаго около 3-угольной пирамиды, стороны основанія которой равны 13, 14 и 15, а боковыя ребра наклонены къ плоскости основанія подъ углами въ 15^0.

79. Прямая, соединяющая центры двухъ правильныхъ 6-угольниковъ, стороны которыхъ равны 5 и 12, перпендикулярна къ ихъ сторонамъ и равна 17. Найти радіусъ шара, проходящаго черезъ вершины 6-угольниковъ.

80. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 6$, $CD = 8$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= \sqrt{74}$. Найти радіусъ описаннаго шара.

5. Хорды шара; прямыя и плоскости, касательныя къ шару (81—90).

81. Ребро куба $= a$. Найти радіусъ шара, касающагося прямыхъ, соединяющихъ средины непараллельныхъ и непересѣкающихся реберъ куба.

82. Та же задача для правильнаго октаэдра.

83. Ребро куба $= a$. Найти длину заключеннаго внутри вписаннаго въ кубъ шара отрѣзка прямой, соединяющей средины непараллельныхъ и непересѣкающихся реберъ куба.

84. Та же задача для правильнаго октаэдра.

85. Сторона основанія правильной 6-угольной пирамиды $= 4$, высота пирамиды $= 3$. Найти радіусъ шара, касающагося всѣхъ реберъ пирамиды (или ихъ продолженій).

86. Ребро куба $= a$. Найти радіусъ сферы, проходящей черезъ вершины нижняго основанія куба и касающейся реберъ верхняго его основанія.

87. Ребро куба $= a$. Найти радіусъ сферы, касающейся реберъ одного изъ двухъ тѣлесныхъ угловъ S и S_1 куба (SS_1 — его діагональ) и граней другого.

88. Та же задача для правильнаго октаэдра.

89. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1 = a$. Найти радіусъ сферы, проходящей черезъ концы ребра AA_1 и касающейся граней двуграннаго угла CC_1.

90. Каждое ребро прямой 4-угольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1 = a$, двугранный уголъ $AA_1 = 60^0$. Найти радіусъ сферы, проходящей черезъ концы ребра AA_1 и касающейся реберъ, выходящихъ изъ концовъ ребра CC_1 (или продолженій этихъ реберъ).

6. Часть поверхности многогранника, заключенная внутри шара (91—102).

91. Шаръ, поверхность котораго $= S$, касается реберъ призматической поверхности, перпендикулярное сѣченіе которой правильный 6-угольникъ. Найти величину части призматической поверхности, заключенной внутри шара.

92—101. *Въ этихъ задачахъ требуется найти величину части поверхности многогранника, заключенной внутри шара, если*

92. шаръ касается основанія и боковыхъ реберъ правильной 4-угольной пирамиды, сторона основанія которой $= 1$, а боковое ребро $=$ діагонали основанія.

93. центръ правильнаго тетраэдра съ ребромъ a служитъ центромъ шара, радіусъ котораго $= \frac{a\sqrt{22}}{12}$.

94. центръ правильнаго октаэдра съ ребромъ a служитъ центромъ шара, радіусъ котораго $= \frac{a\sqrt{10}}{6}$.

95. шаръ проходитъ черезъ вершины основанія правильнаго тетраэдра съ ребромъ a, при чемъ разстояніе центра шара отъ вершины тетраэдра относится къ его высотѣ, какъ $9:8$.

96. центромъ шара, радіусъ котораго $= \frac{a\sqrt{7}}{6}$, служитъ средина прямой, соединяющей центры основаній правильной 3-угольной призмы, сторона основанія которой $= a$, а высота $=$ діаметру круга, вписаннаго въ основаніе.

97. діаметромъ шара служитъ прямая, соединяющая центры основаній правильной 3-угольной призмы, сторона основанія которой $= a$, а высота $= \frac{a\sqrt{21}}{3}$.

98. діаметромъ шара служитъ прямая, соединяющая центры тяжести основаній прямоугольнаго параллелепипеда, стороны основаній котораго равны 6 и 2, а высота $= \sqrt{52}$.

99. шаръ проходитъ черезъ вершины нижняго основанія правильной 4-угольной призмы, сторона основанія которой $= 2a$, а высота $= a\ (\sqrt{3}+1)$, и касается плоскости верхняго ея основанія.

100. діаметромъ шара служитъ высота правильной 4-угольной пирамиды $SABCD$, каждое ребро которой $= a$.

101. діаметромъ шара служитъ высота правильнаго тетраэдра $SABC$, ребро котораго $= a$.

102. Черезъ три вершины грани ABC правильнаго октаэдра $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1 и CC_1 — его діагонали), ребро котораго $= a$, проходитъ сфера, касательная къ грани $A_1B_1C_1$. Опредѣлить величину части поверхности трехъ граней октаэдра, имѣющихъ по общему ребру съ гранью $A_1B_1C_1$, заключенной внутри сферы.

7. Часть поверхности шара, заключенная внутри многогранника (103—105).

103. Сферическая поверхность, величина которой $= S$, касается реберъ призматической поверхности, перпендикулярное сѣченіе которой правильный треугольникъ; найти величину каждой изъ двухъ частей, на которыя заключенная внутри призматической поверхности часть сферы дѣлится точками касанія.

104. Сферическая поверхность, величина которой $= S$, касается реберъ прямого трегранняго угла; найти величину каждой изъ двухъ частей, на которыя заключенная внутри угла часть сферы дѣлится точками касанія.

105. Высота правильнаго тетраэдра служитъ діаметромъ сферической поверхности, величина которой $= S$; найти величину ея части, заключенной внутри тетраэдра.

8. Шаръ, вписанный въ многогранники (106 — 116).

106. Сторона основанія описанной около шара правильной призмы $= a$; найти ея объемъ, если призма 1) 3-уг., 2) 6-уг.

107. Высота правильной пирамиды $= h$, а отношеніе апоѳемы пирамиды къ апоѳемѣ ея основанія $= n$. Найти радіусъ шара, касающагося плоскости основанія пирамиды и плоскостей ея боковыхъ граней.

108. Около шара описана правильная 4-угольная усѣченная пирамида, стороны основаній которой относятся, какъ $m : n$ $(m > n)$.

Найти уголъ наклона къ плоскости нижняго основанія 1) боковой грани, 2) бокового ребра.

109. Основаніями октаэдра, описаннаго около шара, служатъ равные правильные треугольники со стороной a. Найти длину бокового ребра октаэдра, если всѣ его боковыя ребра равны между собой.

110 — 116. *Найти радіусъ шара, вписаннаго въ*

110. пирамиду, основаніемъ которой служитъ ромбъ съ діагоналями 6 и 8; высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія и равна 1.

111. пирамиду, основаніемъ которой служитъ треугольникъ со сторонами 13, 14 и 15; вершина пирамиды удалена отъ каждой стороны основанія на 5.

112. правильную 4-угольную бипирамиду, сторона основанія которой $= 6$, а высота $= 8$.

113. выпуклый октаэдръ, составленный изъ двухъ правильныхъ 4-угольныхъ пирамидъ, сторона общаго основанія которыхъ $= 24$, а высоты равны 5 и 9.

114. тетраэдръ $ABCD$, если $AB = CD = 6$, а каждое изъ остальныхъ реберъ $= \sqrt{34}$.

115. тетраэдръ $ABCD$, если $AB = 10$, $CD = 18$, а каждое изъ остальныхъ реберъ $= 5\sqrt{10}$.

116. пирамиду $ABCD$, если $BD = BC = 15$, $CD = 18$, AB перпендикулярно къ плоскости BCD и равно 16.

9. Шары, вписанные въ многогранные углы (117 — 128).

117. Каждый плоскій уголъ при вершинѣ трегранняго угла $= 60^0$; въ трегранный уголъ вписаны два касательныхъ другъ къ другу шара. Найти отношеніе ихъ радіусовъ.

118. Радіусы вписаннаго въ правильный многогранникъ и описаннаго около него шаровъ соотвѣтственно равны r и R; въ одинъ изъ тѣлесныхъ угловъ многогранника вписанъ шаръ радіуса P. Найти разстояніе центра шара отъ вершины этого угла.

119. Въ правильный многогранникъ вписанъ шаръ; въ каждый изъ тѣлесныхъ угловъ многогранника вписано по шару, касательному къ данному и непересѣкающему поверхности многогранника. Найти радіусы этихъ шаровъ, если радіусъ шара, вписаннаго въ многогранникъ, $= r$, радіусъ описаннаго около многогранника шара $= R$.

120. 1) Въ пирамидѣ $SABC$ дано: $AB = AC = 5$, $BC = 6$; высота пирамиды проходитъ черезъ средину BC и равна 1. Найти радіусъ шара, вписаннаго въ пирамиду.

2) Рѣшить ту же задачу, если $BC = 8$.

121. Основаніемъ пирамиды $SABCD$ служитъ ромбъ съ діагоналями $AC = 8$ и $BD = 6$; высота пирамиды $H = 2$. Найти радіусъ вписаннаго въ пирамиду шара, если H совпадаетъ 1) съ SA, 2) съ SB.

122. Въ тѣлесный уголъ S правильной 4-угольной бипирамиды $SABCDS_1$ вписанъ шаръ, радіусъ котораго $= 1$; найти радіусы вписанныхъ въ тѣлесный уголъ S_1 шаровъ, которые касаются даннаго, если

1) сторона квадрата $ABCD$ равна 6, $SS_1 = 8$;

2) сторона квадрата $ABCD$ равна 8, $SS_1 = 6$.

123. Въ каждый изъ тѣлесныхъ угловъ правильнаго многогранника вписано по равному не пересѣкающему поверхности многогранника шару такъ, что каждый шаръ касается сосѣднихъ*. Выразить радіусы этихъ шаровъ черезъ a и r (a — ребро многогранника, r — радіусъ вписаннаго въ него шара).

124. Сторона основанія правильной n-угольной пирамиды $= a$, радіусъ вписаннаго въ неё шара $= r$; n шаровъ (радіуса x_1) расположены такъ, что каждый касается двухъ сосѣднихъ, плоскости основанія пирамиды и плоскостей двухъ смежныхъ ея граней, при чемъ центры шаровъ находятся на прямыхъ, проходящихъ черезъ вершины угловъ основанія пирамиды и центръ вписаннаго въ нее шара; такъ же расположены n другихъ шаровъ (радіуса x_2). Найти x_1 и x_2.

125 — 127. *Комбинація задачи 124-ой. Обозначая черезъ k отношеніе стороны основанія пирамиды къ ея высотѣ, найти отношеніе объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры $2n$ шаровъ, къ объему пирамиды, если*

125. $n = 4$, $k = 3:2$.

126. $n = 3$, $k = 2:1$.

127. $n = 6$, $k = 1:6$.

128. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ съ діагоналями 6 и 8; высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія и равна 1. Въ каждый изъ трегранныхъ угловъ

---

* напр., шаръ, вписанный въ тѣлесный уголъ A, касается шаровъ, вписанныхъ въ тѣлесные углы, вершинами которыхъ служатъ концы реберъ многогранника, выходящихъ изъ A.

при основанiи пирамиды вписано по равному шару такъ, что каждый шаръ касается двухъ сосѣднихъ; найти радiусы шаровъ.

10. Шары, вписанные въ двугранные углы (129—140).

129. Шаръ радiуса r касается граней двуграннаго угла въ 60^0; найти радiусы наибольшаго и наименьшаго шаровъ, касающихся граней угла и даннаго шара.

130. Шаръ радiуса r вписанъ въ двугранный уголъ, равный 60^0; найти радiусъ шара, касающагося граней угла и даннаго шара, если прямая, проходящая черезъ центры шаровъ, пересѣкаетъ ребро двуграннаго угла подъ угломъ L ($0^0 \leqslant L \leqslant 90^0$).

131. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 12$, $CD = 30$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= 5\sqrt{13}$. Центры двухъ равныхъ касательныхъ другъ къ другу шаровъ находятся на прямой, соединяющей средины AB и CD, при чемъ одинъ шаръ касается граней двуграннаго угла AB, а другой граней двуграннаго угла CD. Найти радiусы шаровъ.

132. Въ двугранный уголъ, равный 60^0, вписаны два касательныхъ другъ къ другу шара радiуса r. Найти радiусъ шара, касающагося граней угла и данныхъ шаровъ.

133. Въ двугранный уголъ, равный 120^0, вписаны два касательныхъ другъ къ другу шара радiуса r. Каждый изъ двухъ шаровъ (радiуса x) касается другого, одной грани двуграннаго угла и обоихъ шаровъ радiуса r. Найти x.

134. Въ двугранный уголъ, равный 120^0, вписанъ шаръ радiуса r. Четыре шара (радiуса x) расположены такъ, что центры ихъ служатъ вершинами угловъ квадрата со стороной $2x$, при чемъ каждый шаръ касается одной грани угла и шара радiуса r. Найти x.

135. Длина прямой, соединяющей средины смежныхъ сторонъ основанiя правильной n-угольной пирамиды, $= k$, а радiусъ вписаннаго въ пирамиду шара $= r$; n шаровъ (радiуса r_1) расположены такъ, что каждый шаръ касается двухъ сосѣднихъ, плоскости основанiя пирамиды и плоскости боковой ея грани, при чемъ центры шаровъ находятся на прямыхъ, проходящихъ черезъ средины сторонъ основанiя пирамиды и центръ вписаннаго въ нее шара; n другихъ шаровъ (радiуса r_2) расположены такъ же. Найти r_1 и r_2.

136. Та же задача для правильной 4-угольной пирамиды, высота которой = дiагонали основанiя = 1.

137—139. *Комбинація задачи 135-ой. Найти отношеніе объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры $2n$ шаровъ, къ объему пирамиды, если*

137. $n=3$; двугранный уголъ при основаніи пирамиды $=60^0$.

138. $n=6$; высота пирамиды относится къ меньшей діагонали ея основанія, какъ $4:15$.

139. $n=4$; высота пирамиды относится къ діагонали ея основанія, какъ $6:1$.

140. Въ основаніи пирамиды съ равными боковыми ребрами находится параллелограммъ, стороны котораго равны 30 и 12; высота пирамиды $=8$. Въ каждый изъ двугранныхъ угловъ при основаніи пирамиды вписано по равному шару такъ, что каждый шаръ касается двухъ сосѣднихъ, и точки касанія шаровъ къ плоскости основанія лежатъ на прямыхъ, проходящихъ черезъ средины параллельныхъ его сторонъ. Найти радіусы шаровъ.

11. Шары, имѣющіе общую касательную плоскость (141—144).

141. Два шара радіуса r касаются другъ друга и плоскости P; найти радіусъ наименьшаго шара, касающагося данныхъ шаровъ и плоскости P.

142. Центры n шаровъ радіуса r, имѣющихъ общую касательную плоскость P, служатъ вершинами угловъ правильнаго n-угольника со стороной $2r$. Найти радіусъ шара, касающагося данныхъ шаровъ и плоскости P.

143. Два шара (радіуса r_1) и два шара (радіуса r_2) расположены такъ, что каждый шаръ касается трехъ другихъ и плоскости P. Найти $\frac{r_1}{r_2}$.

144. Три шара (радіуса r_1) и три шара (радіуса r_2) расположены такъ, что каждый шаръ касается двухъ шаровъ радіуса r_1, двухъ шаровъ радіуса r_2 и плоскости P. Найти $\frac{r_1}{r_2}$.

12. Шары въ пространствѣ (145—151).

145. n шаровъ (радіуса r), центры которыхъ служатъ вершинами угловъ правильнаго n-угольника со стороной $2r$, касаются выпуклой поверхности шара радіуса R, при чемъ центры всѣхъ шаровъ находятся въ плоскости P. Найти радіусъ шара, касающагося всѣхъ упомянутыхъ шаровъ.

146. Шесть шаровъ (радіуса r), центры которыхъ служатъ вершинами угловъ правильнаго 6-угольника со стороной $2r$, касаются вогнутой поверхности шара радіуса R, при чемъ центры всѣхъ шаровъ находятся въ плоскости P. Найти радіусъ шара, касающагося всѣхъ упомянутыхъ шаровъ.

147. Два шара радіуса r касаются другъ друга; n шаровъ (радіуса x), центры которыхъ служатъ вершинами угловъ правильнаго n-угольника со стороной $2x$, касаются обоихъ шаровъ радіуса r. Найти x.

148. Три шара (радіуса r_1) и три шара (радіуса r_2) расположены такъ, что каждый шаръ касается двухъ шаровъ радіуса r_1 и двухъ шаровъ радіуса r_2. Найти $\frac{r_1}{r_2}$, если центры всѣхъ шаровъ находятся въ плоскости P.

149. Комбинація предыдущей задачи; найти радіусы шаровъ, если радіусъ касательнаго къ нимъ шара $= p$.

150. Центры m шаровъ (радіуса r) служатъ вершинами угловъ правильнаго многогранника съ ребромъ $2r$; двѣ концентрическихъ сферическихъ поверхности касаются шаровъ. Обозначая черезъ k отношеніе радіуса шара, описаннаго около многогранника, къ его ребру, выразить черезъ m и k отношеніе суммы объемовъ равныхъ шаровъ къ объему части пространства, заключенной между упомянутыми сферическими поверхностями. Полученную общую формулу примѣнить къ кубу, тетраэдру и октаэдру.

151. Четыре шара (радіуса r_1) и четыре шара (радіуса r_2) расположены такъ, что каждый касается трехъ шаровъ радіуса r_1 и трехъ шаровъ радіуса r_2. Найти $\frac{r_1}{r_2}$.

III. КОМБИНАЦІИ ЦИЛИНДРА* СЪ ПРЯМЫМИ, ПЛОСКОСТЯМИ, МНОГОГРАННИКАМИ И ШАРАМИ (152 — 246).

13. Прямыя, касательныя къ цилиндрической поверхности (152 — 172).

152. Основанія равнобочной трапеціи равны a и b, ея высота $= h$; цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ па-

* Подъ словами „цилиндрическая поверхность" будемъ разумѣть цилиндрическую поверхность вращенія, подъ словомъ „цилиндръ" — прямой круговой цилиндръ, подъ словами „радіусъ цилиндра" — радіусъ его сѣченія, перпендикулярнаго къ образующимъ.

раллельнымъ сторонамъ трапеціи, касается всѣхъ ея сторонъ. Найти уголъ, который образуетъ ось цилиндрической поверхности съ плоскостью трапеціи.

153. Стороны прямоугольника относятся, какъ $m : n$ $(m > n)$; цилиндрическая поверхность съ образующими, перпендикулярными къ сторонѣ прямоугольника, касается всѣхъ его сторонъ. Найти уголъ наклона оси цилиндрической поверхности къ плоскости прямоугольника.

154. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ діагонали квадрата и образуетъ съ его плоскостью уголъ d, касается всѣхъ сторонъ квадрата; зная, что сторона квадрата $= a$, найти радіусъ цилиндрической поверхности.

155. Основаніе равнобедреннаго треугольника $= 6$, высота треугольника $= 8$. Цилиндрическая поверхность съ образующими, перпендикулярными къ основанію треугольника, касается всѣхъ его сторонъ; зная, что ось цилиндрической поверхности образуетъ съ плоскостью треугольника уголъ въ 60^0, найти радіусъ цилиндрической поверхности.

156. Діагонали 4-угольника взаимно-перпендикулярны и равны 24 и 28; въ точкѣ пересѣченія меньшая діагональ дѣлится пополамъ, а бóльшая въ отношеніи 5 : 9. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ меньшей діагонали 4-угольника, касается всѣхъ его сторонъ; зная, что ось цилиндрической поверхности образуетъ съ плоскостью 4-угольника уголъ въ 60^0, найти радіусъ цилиндрической поверхности.

157. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 10$, $CD = 18$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= 5\sqrt{10}$; найти радіусъ цилиндрической поверхности, касающейся пяти реберъ тетраэдра, если ея ось параллельна 1) CD, 2) AB.

158. Ребро куба $= a$; діагональ куба служитъ осью цилиндрической поверхности, касающейся 1) ребра куба, 2) діагонали грани куба. Найти радіусъ цилиндрической поверхности.

159. Ребро правильнаго октаэдра $= a$; прямая, проходящая черезъ центры основаній октаэдра, служитъ осью цилиндрической поверхности, касательной къ ребру октаэдра. Найти радіусъ цилиндрической поверхности.

160 — 161. *Въ этихъ задачахъ прямая, соединяющая центры основаній куба* $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$, *ребро котораго* $= 1$, *служитъ осью цилиндра, боковая поверхность котораго касается указан-*

ной въ задачѣ прямой. Найти радіусъ r цилиндра и отношеніе l ($l < 1$), въ которомъ дѣлится въ точкѣ касанія образующая, проходящая черезъ эту точку, если цилиндръ касается прямой, проходящей черезъ средины (средину).

160. 1) AD и D_1C_1; 2) DA_1 и D_1C_1.

161. 1) AD и C_1; 2) AD и CC_1; 3) DA_1 и C.

162 — 172. *Въ этихъ задачахъ прямая, соединяющая средины параллельныхъ реберъ AA_1 и DD_1 правильной 6-угольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ служитъ осью цилиндра, боковая поверхность котораго касается указанной въ задачѣ прямой. Зная, что боковое ребро призмы = меньшей діагонали ея основанія = 1, найти радіусъ r цилиндра и отношеніе l ($l < 1$), въ которомъ дѣлится въ точкѣ касанія образующая, проходящая черезъ эту точку, если цилиндръ касается прямой, проходящей черезъ*

		Отвѣты:	
162.		$r = \frac{1}{2}$	$l =$
	1) F и B,		1 : 3,
	2) F и сред. BC,		3 : 5,
	3) F и C,		1 : 1,
	Средины		
	4) FA и AB,		1 : 7,
	5) FA и AC,		1 : 3,
	6) FA и DB,		3 : 5,
	7) FA и DC,		1 : 1,
	8) AE и AC,		3 : 5,
	9) AE и DB,		1 : 1,
	10) AE и DC,		3 : 5,
	11) F и сред. AB,		1 : 5,
	12) F и сред. AC,		1 : 2,
	13) F и сред. DB,		1 : 1,
	14) F и сред. DC,		1 : 2,
	15) Средины FE и AB,		1 : 3,
	16) Средины FE и AC.		5 : 7.
163.	Сред.	$r = \frac{\sqrt{2}}{4}$	$l =$
	1) BB_1 и A,		1 : 7,
	2) BB_1 и FB,		1 : 3,

3) BB_1 и EB, 3 : 5,
4) BB_1 и EC, 1 : 1,
5) BB_1 и D, 3 : 5,
6) CB_1 и A, 1 : 3,
7) CB_1 и FB. 3 : 5.

164. Сред. $r=\frac{\sqrt{2}}{8}$ $l=$

1) AF и AB_1, 1 : 7,
2) AF и AC_1, 5 : 11,
3) AF и DB_1, 1 : 1,
4) AF и DC_1, 5 : 11,
5) AE и AB_1, 3 : 13,
6) AE и AC_1, 3 : 5,
7) AE и DB_1, 7 : 9,
8) AE и DC_1. 1 : 3.

165. $r=\frac{\sqrt{5}}{10}$ $l=$

1) Сред. BC и FF_1, 7 : 13,
2) B и сред. FE_1, 2 : 3,
3) B и сред. EE_1. 9 : 11.

166. Сред. $r=\frac{\sqrt{13}}{13}$ $l=$

1) AF и BB_1, 5 : 21,
2) AF и BC_1, 17 : 35,
3) AF и CC_1, 6 : 7,
4) AE и BB_1, 4 : 9,
5) AE и BC_1, 23 : 29,
6) AE и CC_1. 11 : 15.

167. Сред. $r=\frac{\sqrt{13}}{26}$ $l=$

1) AB_1 и F, 2 : 11,
2) AB_1 и FE, 11 : 41,
3) AB_1 и E, 7 : 19,
4) AC_1 и F, 9 : 17,
5) AC_1 и FE, 21 : 31,
6) AC_1 и E. 6 : 7.

Отвѣты:

168. Сред. $r = \frac{3\sqrt{17}}{34}$ $l =$

1) AF и F_1, — $3 : 14$,
2) AF и F_1E_1, — $19 : 49$,
3) AF и E_1, — $13 : 21$,
4) AE и F_1, — $11 : 23$,
5) AE и F_1E_1, — $29 : 39$,
6) AE и E_1. — $8 : 9$.

169. Сред. $r = \frac{\sqrt{17}}{34}$ $l =$

1) A_1F_1 и A, — $1 : 16$,
2) A_1F_1 и FB, — $13 : 55$,
3) A_1F_1 и FC, — $11 : 23$,
4) A_1F_1 и EC, — $31 : 37$,
5) A_1F_1 и D, — $7 : 10$,
6) A_1E_1 и A, — $3 : 14$,
7) A_1E_1 и FB, — $21 : 47$,
8) A_1E_1 и FC, — $15 : 19$,
9) A_1E_1 и EC, — $29 : 39$,
10) A_1E_1 и D. — $5 : 12$.

170. Сред. $r = \frac{1}{10}$ $l =$

1) AB и F_1, — $9 : 41$,
2) AB и F_1E_1, — $29 : 71$,
3) AB и E_1, — $2 : 3$,
4) AC и F_1, — $8 : 17$,
5) AC и F_1E_1, — $43 : 57$,
6) AC и E_1. — $23 : 27$.

171. Сред. $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $l =$

1) AB и BB_1, — $1 : 4$,
2) AB и BC_1, — $7 : 13$,
3) AB и CC_1, — $1 : 1$,
4) AC и BB_1, — $3 : 7$,
5) AC и BC_1, — $9 : 11$,
6) AC и CC_1. — $2 : 3$.

		Отвѣты:
172.		$r=\frac{\sqrt{5}}{10}$ $l=$
	1) F и A_1,	1 : 9,
	2) F и сред. F_1B_1,	1 : 3,
	3) F и сред. F_1C_1,	2 : 3,
	4) F и сред. E_1C_1,	9 : 11,
	5) F и D_1,	3 : 7,
	Сред.	
	6) FE и A_1,	1 : 4,
	7) FE и F_1B_1,	7 : 13,
	8) AF_1 и FE,	1 : 19,
	9) AF_1 и E,	0,
	10) AF_1 и F_1B_1,	3 : 17,
	11) AF_1 и F_1C_1,	1 : 4,
	12) AF_1 и E_1C_1,	1 : 3,
	13) AF_1 и D_1,	3 : 7,
	14) AE_1 и E_1C_1,	9 : 11,
	15) AE_1 и D_1.	1 : 1.

14. Касаніе цилиндрическихъ поверхностей (173—176).

173—175. *Въ этихъ задачахъ требуется найти радіусы двухъ равныхъ касательныхъ другъ къ другу цилиндрическихъ поверхностей, осями которыхъ служатъ*

173. невстрѣчающіяся ребра правильнаго тетраэдра, ребро котораго $= a$.

174. невстрѣчающіяся діагонали смежныхъ граней куба, ребро котораго $= a$.

175. непараллельныя и непересѣкающіяся ребра правильнаго октаэдра, ребро котораго $= a$.

176. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 12$, $CD = 30$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= 5\sqrt{13}$. Двѣ равныхъ цилиндрическихъ поверхности касаются другъ друга, при чемъ одна изъ нихъ касается граней двуграннаго угла AB, а другая граней двуграннаго угла CD; найти радіусы цилиндрической поверхности.

15. Вложенный въ многогранники цилиндръ, вписанная окружность (177—199)*.

177. Діагональ правильнаго октаэдра служитъ осью цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго касается четырехъ граней октаэдра въ ихъ центрахъ. Найти отношеніе объема цилиндра къ объему октаэдра.

178. Прямая, соединяющая средины невстрѣчающихся реберъ правильнаго тетраэдра, служитъ осью цилиндра, окружности основаній котораго касаются граней тетраэдра въ ихъ центрахъ. Найти отношеніе объема цилиндра къ объему тетраэдра.

179. Ребро правильнаго тетраэдра $= 1$; высота тетраэдра служитъ осью цилиндра, окружность нижняго основанія котораго лежитъ въ плоскости основанія тетраэдра, а окружность верхняго основанія касается боковыхъ его граней. Найти объемъ цилиндра, если эта окружность пересѣкаетъ

1) остальныя высоты тетраэдра;

2) прямыя, соединяющія средины непересѣкающихся реберъ тетраэдра.

180. Ребро правильнаго октаэдра $= 1$; прямая MN, соединяющая центры его основаній, служитъ осью непересѣкающаго октаэдра цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго касается трехъ граней октаэдра. Найти объемъ цилиндра, если

1) высота цилиндра $= MN$;

2) окружности основаній цилиндра касаются граней октаэдра въ ихъ центрахъ;

3) окружности основаній цилиндра пересѣкаютъ діагонали октаэдра;

4) точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней октаэдра, лежатъ на поверхности сферы.

181. Ребро куба $= 1$. Діагональ SS_1 куба служитъ осью непересѣкающаго куба цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго касается трехъ граней куба. Найти объемъ цилиндра, если

---

* Если цилиндръ „вписанъ" въ многогранникъ, то окружность каждаго основанія цилиндра вписана въ фигуру сѣченія многогранника плоскостью этого основанія, т. е. касается всѣхъ сторонъ фигуры.

1) окружности основаній цилиндра пересѣкаютъ прямыя, соединяющія средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ различныхъ концовъ SS_1;

2) окружности основаній цилиндра касаются граней куба въ ихъ центрахъ;

3) окружности основаній цилиндра пересѣкаютъ остальныя діагонали куба;

4) точки пересѣченія діагоналей куба съ поверхностью цилиндра лежатъ на поверхности сферы.

182. Въ правильную 4-угольную пирамиду вписанъ равносторонній цилиндръ, ось котораго параллельна діагонали основанія пирамиды. Найти радіусъ цилиндра, если

1) боковое ребро пирамиды $= 5$, а ея высота $= 4$;

2) боковое ребро $= 5$, высота $= 3$.

183. Основаніемъ пирамиды служитъ ромбъ съ діагоналями 10 и 18; высота пирамиды проходитъ черезъ точку пересѣченія діагоналей основанія и равна 12. Найти радіусы вписанныхъ въ пирамиду равностороннихъ цилиндровъ, оси которыхъ параллельны діагоналямъ ромба.

184 — 188. *Въ этихъ задачахъ въ пирамиду $SABC$ вписанъ цилиндръ, ось котораго параллельна BC. Найти радіусъ цилиндра, если онъ относится къ высотѣ цилиндра*

184. какъ $1:8$; $AB = AC = 10$, $BC = 16$; $SA \perp$ плоскости ABC и равно 8.

185. какъ $1:6$; $AB = AC = 10$, $BC = 12$; $SA \perp$ плоскости ABC и равно 6.

186. какъ $2:5$; $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$; $SA \perp$ плоскости ABC и равно 1.

187. какъ $4:21$; $AB = 10$, $AC = 17$, $BC = 21$, $SA = 5$; проэкція вершины S на плоскость основанія совпадаетъ съ срединой его высоты AD.

188. какъ $1:8$; $AB = AC = 50$, $BC = 96$, $SC = SB$; вершина S пирамиды удалена отъ A на 15, отъ BC на 13.

189. Въ пирамидѣ $SABC$ дано: $AB = AC = 10$, $BC = 12$; высота пирамиды проходитъ черезъ средину высоты AD основанія и равна 4. Въ пирамиду вложенъ равносторонній цилиндръ, одна изъ окружностей основаній котораго касается граней двуграннаго угла BC, а другая граней трегранняго угла A, при чемъ ось цилиндра параллельна AD. Найти радіусъ цилиндра.

190. Основаніемъ прямой призмы служитъ равнобочная трапеція, параллельныя стороны которой равны 18 и 8, а боковая сторона $= 12$. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ сторону основанія и двѣ діагонали призмы, зная, что въ сѣченіе можно вписать кругъ.

191. Найти площадь сѣченія, проведеннаго черезъ средины реберъ A_1B_1, B_1B и BC правильной 3-угольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, зная, что въ сѣченіе можно вписать кругъ діаметра d.

192. Въ пирамидѣ $SABC$ дано: $AB = AC$, $BC = 56$, высота AD треугольника ABC равна 14; вершина S пирамиды удалена отъ плоскости основанія на 16 и проэктируется на эту плоскость въ точку, дѣлящую AD въ отношеніи $AO : OD = 3 : 4$. Пирамида пересѣчена плоскостью, перпендикулярной къ AD, такъ, что въ сѣченіи получилась трапеція, въ которую можно вписать кругъ. Найти площадь трапеціи.

193. Въ правильную 4-угольную пирамиду вписанъ цилиндръ, ось котораго параллельна сторонѣ основанія пирамиды. Найти объемъ цилиндра, если

1) апоѳема пирамиды $=$ сторонѣ основанія $= 1$;

2) высота пирамиды $= 4$, сторона основанія $= 6$;

3) высота пирамиды $= 3$, сторона основанія $= 8$.

194. Въ 4-угольную пирамиду съ равными боковыми ребрами, основаніемъ которой служитъ параллелограммъ, вписанъ цилиндръ, ось котораго параллельна сторонѣ основанія пирамиды. Найти объемъ цилиндра, если

1) стороны параллелограмма равны 12 и 30, высота пирамиды $= 8$;

2) стороны параллелограмма равны 10 и 18, высота пирамиды $= 12$.

195. Въ 6-угольную пирамиду $SABCDEF$, высота которой проходитъ черезъ средину діагонали AD основанія, вписанъ цилиндръ, ось котораго параллельна AD, а каждая изъ окружностей основаній касается основанія пирамиды и четырехъ ея боковыхъ граней. Найти объемъ цилиндра, если 6-угольникъ $ABCDEF$ симметриченъ относительно AD и прямой, проходящей черезъ средины BC и EF, и если

1) высота пирамиды $= 36$; BF равно 30 и дѣлитъ AD на отрѣзки 15 и 39;

2) высота пирамиды $= 8$; BF равно 12 и дѣлитъ AD на отрѣзки 6 и 24.

196. Въ 6-угольную пирамиду $SABCDEF$, высота которой проходитъ черезъ средину діагонали AD основанія и равна 4, вписанъ цилиндръ, ось котораго перпендикулярна къ AD. Найти объемъ цилиндра, если 6-угольникъ $ABCDEF$ симметриченъ относительно AD и прямой, проходящей черезъ средины BC и FE, и если CE равно H и дѣлитъ AD на отрѣзки 2 и 4.

197. Основаніемъ пирамиды служитъ 8-угольникъ

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8,$$

симметричный относительно діагоналей $A_1A_5 = 24$ и $A_3A_7 = 30$; A_2A_4 дѣлитъ A_3A_7 въ отношеніи $11:19$, A_2A_8 дѣлитъ A_1A_5 въ отношеніи $1:23$; высота пирамиды проходитъ черезъ средину A_1A_5 и равна 36. Найти объемъ вписаннаго въ пирамиду цилиндра, ось котораго параллельна A_1A_5, а каждая изъ окружностей основаній касается основанія пирамиды и четырехъ ея боковыхъ граней.

198. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ, діагональ котораго $= 8$; одно изъ боковыхъ реберъ перпендикулярно къ плоскости основанія и равно 6. Пирамида пересѣчена плоскостью, перпендикулярной къ діагонали основанія, такъ, что въ сѣченіи получился 5-угольникъ, въ который можно вписать кругъ. Найти площадь сѣченія.

199. Боковое ребро правильной 4-угольной пирамиды $= 8$, діагональ ея основанія $= 6$. Пирамида пересѣчена плоскостью, параллельной боковому ребру и невстрѣчающейся съ нимъ діагонали основанія, такъ, что въ сѣченіи получился 5-угольникъ, въ который можно вписать кругъ. Найти площадь сѣченія.

16. Хорды цилиндра, пересѣкающія ось; многогранники, вписанные въ цилиндръ (200 — 217).

200. Объемъ правильнаго тетраэдра $= 1$. Прямая MN, соединяющая средины двухъ его непересѣкающихся реберъ, служитъ осью непересѣкающаго тетраэдра цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго касается двухъ граней тетраэдра. Найти объемъ цилиндра, если отрѣзокъ одной изъ высотъ тетраэдра, заключенный внутри цилиндра, составляетъ $\frac{1}{4}$ этой высоты.

201. Комбинація предыдущей задачи. Обозначая черезъ h отношеніе высоты цилиндра къ MN, найти отношеніе t къ объему цилиндра объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія высотъ тетраэдра съ поверхностью цилиндра. Найти h, если $t = 1 : 2\pi$.

202. Объемъ правильнаго октаэдра $= 1$; его діагональ служитъ осью вписаннаго цилиндра. Найти объемъ цилиндра, если заключенный внутри него отрѣзокъ одной изъ прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней октаэдра, вдвое короче этой прямой.

203. Комбинація предыдущей задачи. Обозначая черезъ h отношеніе высоты цилиндра къ діагонали октаэдра, найти отношеніе t къ объему цилиндра объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней октаэдра. Найти h, если $t = 1 : 8\pi$.

204. Объемъ правильнаго октаэдра $= 1$; его діагональ SS_1 служитъ осью цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго пересѣкаетъ четыре ребра октаэдра. Найти объемъ цилиндра, если заключенный внутри него отрѣзокъ одной изъ прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ октаэдра, выходящихъ изъ S и S_1, вдвое короче этой прямой.

205. Комбинація предыдущей задачи. Обозначая черезъ h отношеніе высоты цилиндра къ діагонали октаэдра, найти отношеніе t къ объему цилиндра объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ октаэдра, выходящихъ изъ S и S_1. Найти h, если $t = 1 : 2\pi$.

206 — 208. *Ребро куба $= 1$; его діагональ SS_1 служитъ осью непересѣкающаго куба цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго касается трехъ граней куба. Найти объемъ цилиндра, если длина заключеннаго внутри него отрѣзка одной изъ*

206. другихъ діагоналей куба $= \frac{1}{3}$ этой діагонали.

207. прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба, $= \frac{1}{2}$ этой прямой.

208. прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1, $=\frac{1}{3}$ этой прямой.

209—211. *Комбинація задачъ 206—208. Обозначая черезъ h отношеніе высоты цилиндра къ діагонали куба, найти отношеніе t къ объему цилиндра объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра*

209. остальныхъ діагоналей куба.

210. прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба

211. прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1.

Найти (въ зад. 209—211) h, если $t=\sqrt{3}:4\pi$.

212. Комбинація задачъ 206—208. Найти отношеніе объемовъ трехъ многогранниковъ, вершинами угловъ которыхъ служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра—перваго: остальныхъ діагоналей куба; —второго: прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба; —третьяго: прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1, если

1) всѣ упомянутыя прямыя пересѣкаютъ боковую поверхность цилиндра;

2) всѣ упомянутыя прямыя пересѣкаютъ основанія цилиндра;

3) окружности основаній цилиндра касаются граней куба въ ихъ центрахъ.

213—215. *Комбинація задачъ 206—208. Обозначая черезъ h отношеніе высоты цилиндра къ діагонали куба, найти отношеніе n объемовъ двухъ многогранниковъ, вершинами угловъ которыхъ служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра*

213. —перваго: прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба; —второго: прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1. Найти k*, если $n=32:27$.

214. —перваго: остальныхъ діагоналей куба; —второго: прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1. Найти k*, если $n=2$.

---

* k — отношеніе объема цилиндра къ объему куба.

215. — перваго: остальныхъ діагоналей куба; — второго: прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба. Найти k*, если $n = 27 : 16$.

216 — 217. *Объемъ правильнаго тетраэдра $= 1$; высота тетраэдра служитъ осью цилиндра, одна изъ окружностей основаній котораго лежитъ въ плоскости основанія тетраэдра, а другая касается боковыхъ его граней. Найти объемъ многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью цилиндра*

216. остальныхъ высотъ тетраэдра, если высота цилиндра относится къ высотѣ тетраэдра, какъ

1) $2 : 3$, 2) $1 : 3$, 3) $3 : 10$, 4) $1 : 4$, 5) $1 : 6$.

217. прямыхъ, соединяющихъ средины невстрѣчающихся реберъ тетраэдра, если высота цилиндра относится къ высотѣ тетраэдра, какъ

1) $1 : 2$, 2) $2 : 5$, 3) $3 : 10$, 4) $1 : 4$, 5) $1 : 6$.

17. Описанный около многогранниковъ цилиндръ; описанная окружность (218 — 239).

218. Діагональ основанія правильной 4-угольной пирамиды $SABCD$ равна 48, высота пирамиды $= 8$. Ось равносторонняго цилиндра параллельна AC, а окружности его основаній пересѣкаютъ: одна — ребра трегранногo угла A, другая — ребра трегранного угла C; найти радіусъ цилиндра.

219. Основаніемъ пирамиды съ равными двугранными углами при основаніи служитъ параллелограммъ, діагонали котораго равны 6 и 4; высота пирамиды равна 1. Найти радіусъ равносторонняго цилиндра, ось котораго параллельна діагонали параллелограмма, а окружности основаній пересѣкаютъ ребра трегранныхъ угловъ, вершинами которыхъ служатъ концы этой діагонали.

220 — 223. *Найти радіусъ r цилиндра, ось котораго параллельна ребру BC пирамиды $SABC$, а окружности основаній пересѣкаютъ ребра трегранныхъ угловъ B и C, если (h — высота цилиндра)*

220. $AB = AC$, $BC = 12$, $\angle BAC = 90^0$, $SA \perp$ пл. ABC и равно 8, $h : r = 3 : 5$.

---

* k — отношеніе объема цилиндра къ объему куба.

221. $AB = 10$, $AC = 17$, $BC = 21$, $SA \perp$ пл. ABC и равно 6, $h : r = 14 : 5$.

222. $AB = AC$, $BC = 4$, высота AD основанія равна 10, высота пирамиды проходитъ черезъ средину AD и равна 1, $h : r = 9 : 13$.

223. $AB = 13$, $AC = 15$, $BC = 14$, высота пирамиды проходитъ черезъ средину высоты AD основанія и равна 12, $h : r = 7 : 15$.

224. Ребро правильнаго тетраэдра $ABCD$ равно 1; прямая, соединяющая средины AB и CD, служитъ осью цилиндра, каждая изъ окружностей основаній котораго пересѣкаетъ остальныя ребра тетраэдра. Найти высоту цилиндра, если она относится къ его радіусу какъ $2 : 3$.

225. Ребро правильнаго октаэдра $= 1$; прямая, соединяющая центры его основаній, служитъ осью равносторонняго цилиндра, окружности основаній котораго пересѣкаютъ боковыя ребра октаэдра. Найти высоту цилиндра.

226. Основаніемъ пирамиды служитъ квадратъ, діагональ котораго $= 20$; одно изъ боковыхъ реберъ пирамиды перпендикулярно къ плоскости основанія и равно 10. Пирамида пересѣчена плоскостью, перпендикулярной къ діагонали квадрата, такъ, что въ сѣченіи получился 5-угольникъ, около котораго можно описать кругъ. Найти радіусъ круга и площадь сѣченія.

227. Діагональ основанія правильной 4-угольной пирамиды $= 6$, ея боковое ребро $= 4$. Пирамида пересѣчена плоскостью, параллельной боковому ребру и невстрѣчающейся съ нимъ діагонали основанія, такъ, что въ сѣченіи получился 5-угольникъ, около котораго можно описать кругъ. Найти радіусъ круга.

228. Перпендикулярное сѣченіе призматической поверхности представляетъ 4-угольникъ, діагонали котораго взаимно перпендикулярны и въ точкѣ пересѣченія дѣлятся на отрѣзки: одна a и a, другая b и c. Призматическая поверхность пересѣчена плоскостью, параллельной діагонали перпендикулярнаго сѣченія, такъ, что около полученнаго 4 угольника можно описать кругъ. Какой уголъ образуетъ проведенная плоскость съ плоскостью перпендикулярнаго сѣченія?

229. Боковое ребро правильной 4-угольной пирамиды $SABCD$ относится къ діагонали ея основанія, какъ $k : 1$. Пирамида пересѣчена плоскостью, параллельной SA и BD, такъ, что въ сѣченіи получился 5-угольникъ. Найти отношеніе, въ которомъ (считая отъ вершины S) сѣкущая плоскость дѣлитъ высоту пирамиды, если около 4-угольника, вершинами котораго служатъ точки пересѣченія сѣкущей плоскости съ SB, SC, SD и AC, можно описать кругъ.

230. Правильная 3-угольная призма $ABCA_1B_1C_1$ пересѣчена плоскостью, проходящей черезъ средину BB_1 и черезъ точки M и N, дѣлящія B_1A_1 и BC въ отношеніи $\frac{B_1M}{MA_1} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$; найти площадь сѣченія, зная, что около него можно описать кругъ радіуса R.

231. Всѣ вершины прямоугольника, стороны котораго равны 6 и 16, лежатъ на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ меньшей сторонѣ прямоугольника и образуетъ съ его плоскостью уголъ въ 60^0. Найти радіусъ цилиндрической поверхности.

232. Всѣ вершины равнобедреннаго треугольника, основаніе котораго $= 6$, а высота $= 2$, лежатъ на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ основанію треугольника и образуетъ съ его плоскостью уголъ въ 60^0. Найти радіусъ цилиндрической поверхности.

233. Всѣ вершины квадрата, сторона котораго $= 1$, лежатъ на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ сторонѣ квадрата и образуетъ съ его плоскостью уголъ d. Найти радіусъ цилиндрической поверхности.

234. Ребро правильнаго октаэдра $= 1$; цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ грани октаэдра, проходитъ черезъ всѣ его вершины. Найти ея радіусъ.

235. Ребро куба $= 1$. Найти радіусъ цилиндрической поверхности, проходящей черезъ шесть вершинъ куба, если ея ось параллельна 1) діагонали куба, 2) діагонали его грани.

236. Основаніемъ пирамиды съ равными двугранными углами при основаніи служитъ параллелограммъ, діагонали котораго равны 30 и 24. Цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна одному изъ боковыхъ реберъ пирамиды, проходитъ черезъ всѣ ея вершины. Найти длину упомянутаго ребра.

237. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 2a$, $CD = 2b$ $(b > a)$, остальныя ребра равны между собой; прямая, соединяющая средины AB и CD, равна h. Всѣ вершины тетраэдра лежатъ на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ AB; какой уголъ образуетъ эта ось съ CD?

238. Двугранный уголъ при основанiи правильной 4-угольной пирамиды $= \alpha$. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ сторонѣ основанiя пирамиды, проходитъ черезъ всѣ ея вершины. Найти уголъ между осями пирамиды и цилиндрической поверхности.

239. Ребро правильнаго тетраэдра $ABCD = 1$. Всѣ вершины тетраэдра лежатъ на цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ прямой, соединяющей средины AB и CD, и образуетъ съ однимъ изъ этихъ реберъ уголъ α. Найти радiусъ цилиндрической поверхности.

18. Цилиндрическая поверхность, касательная къ шарамъ (240 — 243).

240. Центры четырехъ шаровъ радiуса r служатъ вершинами угловъ квадрата со стороной $2r$. Найти радiусъ касательной къ шарамъ цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ сторонѣ квадрата и образуетъ съ его плоскостью уголъ α.

241. Аналогичная задача для трехъ шаровъ.

242. Центры четырехъ шаровъ радiуса r служатъ вершинами угловъ правильнаго тетраэдра съ ребромъ $2r$. Найти радiусъ касательной къ шарамъ цилиндрической поверхности, ось которой перпендикулярна къ прямой, соединяющей средины непересѣкающихся реберъ тетраэдра и образуетъ съ однимъ изъ этихъ реберъ уголъ α.

243. Центры пяти шаровъ радiуса r служатъ вершинами угловъ правильной равнореберной 4-угольной пирамиды съ ребромъ $2r$. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна къ сторонѣ основанiя пирамиды, касается шаровъ. Найти 1) уголъ между осями пирамиды и цилиндрической поверхности, 2) радiусъ цилиндрической поверхности.

19. Комбинацiи цилиндра съ многогранниками и шарами (244 — 246).

244. Ось SS_1 правильной 4-угольной бипирамиды $=$ сторонѣ ея основанiя $ABCD = 1$. Въ каждый изъ трегранныхъ угловъ

A, B, C и D вписано по равному шару; SS_1 служитъ осью касательнаго къ шарамъ цилиндра, окружности основанiй котораго пересѣкаютъ ребра бипирамиды, выходящiя изъ S и S_1. Зная, что радiусъ цилиндра = радiусу одного изъ шаровъ, найти объемъ цилиндра.

245. Прямая, соединяющая центры параллельныхъ граней правильнаго октаэдра, служитъ осью непересѣкающаго октаэдра цилиндра, каждая изъ окружностей основанiй котораго касается трехъ граней октаэдра; въ каждый изъ его трегранныхъ угловъ вписано по равному шару. Зная, что шары касаются плоскостей основанiй цилиндра въ точкахъ, лежащихъ на окружностяхъ основанiй, найти

1) отношенiе объема цилиндра къ суммѣ объемовъ шаровъ;

2) отношенiе объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры шаровъ, къ объему многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки касанiя шаровъ къ поверхности цилиндра.

246. Радiусъ круга, описаннаго около основанiя правильной 3-угольной призмы, = ея высотѣ = 18; въ каждый изъ трегранныхъ угловъ призмы вписано по шару радiуса 5. Найти радiусъ равносторонняго цилиндра, осью котораго служитъ прямая, проходящая черезъ центры основанiй призмы, а каждая изъ окружностей основанiй имѣетъ по одной общей точкѣ съ тремя изъ упомянутыхъ шаровъ.

IV. КОМБИНАЦIИ КОНУСА СЪ ПРЯМЫМИ, ПЛОСКОСТЯМИ, МНОГОГРАННИКАМИ И ШАРАМИ (247—320)*.

20. Прямыя, касательныя къ конической поверхности (247—260).

247—258. *Въ этихъ задачахъ прямая, соединяющая центры основанiй куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, служитъ высотой конуса, боковая поверхность котораго касается указанной въ задачѣ прямой. Зная, что ребро куба = 1, найти радiусъ r основанiя конуса и отношенiе l, въ которомъ дѣлится въ точкѣ касанiя,*

* Подъ словами „коническая поверхность“ будемъ разумѣть коническую поверхность вращенiя, подъ словомъ „конусъ“ — прямой круговой конусъ.

считая отъ вершины конуса, его образующая, проходящая черезъ эту точку, если касательная къ конусу прямая проходитъ черезъ

247. средину DC и B_1.
248. B и средину D_1C_1.
249. средины DC и BB_1.
250. средину DC_1 и B.
251. средину DC_1 и B_1.
252. средины BB_1 и D_1C_1.
253. средины AD и A_1B_1.
254. средины AD и BA_1.
255. средины AD_1 и A_1B_1.
256. вершины D и C_1.
257. C и средину DD_1.
258. C_1 и средину DD_1.

259 — 260. *Ребро куба* $= a$. *(Радіусъ круга, описаннаго около грани правильнаго октаэдра,* $= R$*). Вершина конической поверхности находится на діагонали (медіанѣ) верхняго его основанія, а ось ея перпендикулярна къ плоскости этого основанія. Найти радіусъ сѣченія конической поверхности плоскостью нижняго основанія, если поверхность касается двухъ діагоналей куба* (октаэдра) и двухъ смежныхъ сторонъ этого основанія*.*

21. Касаніе коническихъ поверхностей (261 — 264).

261 — 264. *Въ этихъ задачахъ двѣ равныхъ коническихъ поверхности касаются другъ друга, при чемъ вершины поверхностей совпадаютъ съ концами прямыхъ, служащихъ ихъ осями. Найти радіусы сѣченій коническихъ поверхностей плоскостями, перпендикулярными къ ихъ осямъ и проходящими черезъ точку касанія, если осями поверхностей служатъ*

261. невстрѣчающіяся ребра правильнаго тетраэдра, ребро котораго $= a$.

262. взаимно-перпендикулярныя діагонали параллельныхъ граней куба, ребро котораго $= a$.

263. ребра SA и S_1D правильнаго октаэдра $SABCDS_1$ (SS_1 — діагональ октаэдра), ребро котораго $= a$, при чемъ вершины поверхностей совпадаютъ съ 1) S и S_1, 2) A и D.

264. діагонали AD_1 и DC_1 граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро котораго $= a$, при чемъ вершины поверхностей совпадаютъ съ 1) D и D_1, 2) A и C_1, 3) C_1 и D_1.

---

* Или ихъ продолженій.

22. Вложенный въ многогранники конусъ (265—272).

265. Діагональ правильнаго октаэдра служитъ осью конуса, вершина котораго совпадаетъ съ ея концомъ, а окружность основанія касается четырехъ граней октаэдра въ ихъ центрахъ. Найти отношеніе объема конуса къ объему октаэдра.

266. Прямая, соединяющая средины реберъ AB и CD правильнаго тетраэдра $ABCD$, служитъ осью конуса, вершина котораго совпадаетъ съ ея концомъ. Найти отношеніе объема конуса къ объему тетраэдра, если окружность основанія конуса касается

1) двухъ граней тетраэдра въ ихъ центрахъ,

2) четырехъ граней тетраэдра.

267. Ребро правильнаго тетраэдра $=1$; высота тетраэдра служитъ осью конуса, вершина котораго совпадаетъ съ вершиной тетраэдра, а окружность основанія касается его боковыхъ граней. Найти объемъ конуса, если эта окружность пересѣкаетъ

1) остальныя высоты тетраэдра,

2) прямыя, соединяющія средины непересѣкающихся реберъ тетраэдра.

268. Ребро правильнаго октаэдра $=1$; прямая, соединяющая центры его основаній, служитъ осью конуса, вершина котораго совпадаетъ съ ея концомъ. Найти объемъ конуса, если окружность его основанія

1) касается трехъ граней октаэдра въ ихъ центрахъ,

2) касается шести граней октаэдра,

3) пересѣкаетъ діагонали октаэдра и касается трехъ его граней, не пересѣкая при этомъ остальныхъ граней.

269. Ребро куба $=1$; его діагональ SS_1 служитъ осью непересѣкающаго куба конуса, вершина котораго находится въ S_1, а окружность основанія касается трехъ граней куба. Найти объемъ конуса, если окружность его основанія

1) пересѣкаетъ прямыя, соединяющія средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1;

2) касается трехъ граней куба въ ихъ центрахъ;

3) касается всѣхъ граней куба;

4) пересѣкаетъ остальныя діагонали куба.

270. Діагональ CA_1 правильной 4-угольной призмы

$$ABCDA_1B_1C_1D_1,$$

сторона основанія которой $= a$, служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ A_1, а окружность основанія касается трехъ граней угла C, при чемъ грани $ABCD$ въ ея центрѣ. Найти объемъ конуса.

271. Въ правильной 4-угольной усѣченной пирамидѣ

$$ABCDA_1B_1C_1D_1$$

дано: $AB = 2$, $\angle A_1AC = 45^0$; діагональ A_1C пирамиды служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ A_1, а окружность основанія касается трехъ граней угла C, при чемъ грани $ABCD$ въ ея центрѣ. Найти радіусъ r основанія конуса.

272. Въ правильной 4-угольной усѣченной пирамидѣ

$$ABCDA_1B_1C_1D_1$$

дано: $AB = 1$, $A_1B_1 = \frac{1}{4}$, $\angle A_1AC = 45^0$. Найти радіусъ основанія конуса, вершина котораго находится въ A_1, а окружность основанія касается трехъ граней угла C_1, при чемъ грани $ABCD$ въ точкѣ K, дѣлящей AC въ отношеніи $AK : KC = 3 : 1$.

23. Группы конусовъ (273 — 283).

273. Шесть равныхъ конусовъ имѣютъ общую вершину, при чемъ каждый конусъ имѣетъ съ четырьмя изъ остальныхъ конусовъ по одной общей образующей. Найти отношеніе суммы объемовъ конусовъ къ объему шара, касающагося плоскостей ихъ основаній.

274. Восемь равныхъ конусовъ имѣютъ общую вершину, при чемъ каждый конусъ имѣетъ съ тремя изъ остальныхъ конусовъ по одной общей образующей. Найти отношеніе суммы объемовъ конусовъ къ объему шара, касающагося плоскостей ихъ основаній.

275. Та же задача для четырехъ равныхъ конусовъ.

276. Прямыя, соединяющія центръ O куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ съ его вершинами, служатъ осями равныхъ конусовъ, вершины которыхъ совпадаютъ съ вершинами куба; окружность основанія каждаго конуса касается граней одного изъ тѣлесныхъ угловъ куба и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній сосѣднихъ* конусовъ. Найти отношеніе суммы объемовъ конусовъ къ объему шара, касающагося плоскостей ихъ основаній.

---

* Напр., окружность основанія конуса, осью котораго служитъ OA, касается граней треграннаго угла A и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній конусовъ, осями которыхъ служатъ прямыя, соединяющія O съ концами реберъ, выходящихъ изъ A (т.-е. съ A_1, B и D).

277. Та же задача для правильнаго октаэдра.

278. Та же задача для правильнаго тетраэдра.

279. Прямыя, соединяющія центръ O куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ съ его вершинами, служатъ осями равныхъ конусовъ, имѣющихъ общую вершину въ его центрѣ; окружность основанія каждаго конуса касается граней одного изъ тѣлесныхъ угловъ куба и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній сосѣднихъ* конусовъ. Зная, что ребро куба $= 1$, найти радіусы основаній конусовъ.

280. Та же задача для правильнаго октаэдра.

281. Та же задача для правильнаго тетраэдра.

282. Три равностороннихъ конуса, радіусъ основанія каждаго изъ которыхъ $= r$, расположены такъ, что каждые два имѣютъ по одной общей образующей. Найти 1) объемъ пирамиды, вершинами угловъ которой служатъ общая вершина и центры основаній конусовъ; 2) радіусъ основанія конуса, имѣющаго съ каждымъ изъ нихъ по одной общей образующей.

283. На плоскости вокругъ общей вершины лежатъ шесть равныхъ послѣдовательно касающихся другъ друга конусовъ; на конусахъ лежитъ шаръ, касаясь ихъ боковыхъ поверхностей въ точкахъ, находящихся на окружностяхъ основаній. Найти отношеніе объема шара къ суммѣ объемовъ конусовъ.

24. Хорды конуса, пересѣкающія ось; многогранники, вписанные въ конусъ (284 — 295).

284. Прямая, соединяющая центры основаній куба, служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ ея концѣ, а окружность основанія пересѣкаетъ боковыя ребра куба. Зная, что длина діагонали куба $= 1$, найти длину ея отрѣзка, заключеннаго внутри конуса, если высота конуса относится къ ребру куба, какъ

1) $1 : 1$, 2) $3 : 4$, 3) $1 : 2$, 4) $1 : 4$, 5) $2 : 3$, 6) $1 : 3$.

285. Прямая, соединяющая центры основаній куба, служитъ высотой конуса. Зная, что длина діагонали куба $= 1$, найти длину ея отрѣзка, заключеннаго внутри конуса, если діаметръ его основанія относится къ діагонали грани куба, какъ

---

* Напр., окружность основанія конуса, осью котораго служитъ OA, касается граней треграннаго угла A и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній конусовъ, осями которыхъ служатъ прямыя, соединяющія O съ концами реберъ, выходящихъ изъ A (т.-е. съ A_1, B, D).

1) 1 : 2, 2) 3 : 4, 3) 1 : 4, 4) 2 : 3, 5) 1 : 3.

286. Діагональ SS_1 правильнаго октаэдра служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ S_1, а окружность основанія пересѣкаетъ ребра октаэдра, выходящія изъ S_1. Зная, что длина прямой, соединяющей средины параллельныхъ реберъ октаэдра, выходящихъ изъ S и S_1, равна 1, найти длину ея отрѣзка, заключеннаго внутри конуса, если высота конуса относится къ діагонали октаэдра, какъ

1) 3 : 4, 2) 7 : 8, 3) 5 : 8, 4) 5 : 6, 5) 2 : 3.

287. Діагональ SS_1 правильнаго октаэдра служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ S, а окружность основанія касается четырехъ граней угла S_1. Зная, что длина прямой, соединяющей центры параллельныхъ граней октаэдра, $= 1$, найти длину ея отрѣзка, заключеннаго внутри конуса, если его высота относится къ діагонали октаэдра, какъ

1) 2 : 3, 2) 7 : 12, 3) 3 : 4, 4) 5 : 6, 5) 11 : 12.

288. Прямая, соединяющая средины реберъ AB и CD правильнаго тетраэдра $ABCD$, служитъ осью конуса, вершина котораго совпадаетъ съ срединой AB, а окружность основанія касается граней двуграннаго угла CD. Зная, что высота тетраэдра $= 1$, найти длину ея отрѣзка, заключеннаго внутри конуса, если его высота относится къ упомянутой прямой, какъ

1) 2 : 3, 2) 5 : 6, 3) 7 : 12, 4) 1 : 2, 5) 1 : 3, 6) 1 : 6.

289. Ребро куба $= 1$; діагональ его SS_1 служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ S, а окружность основанія касается трехъ граней угла S_1. Найти длину заключеннаго внутри конуса отрѣзка одной изъ прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ граней куба, если высота конуса относится къ діагонали куба, какъ

1) 11 : 12, 2) 5 : 6, 3) 3 : 4, 4) 7 : 12.

290 — 292. *Комбинація задачи 289-ой. Найти объемъ многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью конуса*

290. прямыхъ, проходящихъ черезъ центры параллельныхъ граней куба, если высота конуса относится къ діагонали куба, какъ

1) 2 : 3, 2) 1 : 1, 3) 1 : 3.

291. прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ реберъ куба, выходящихъ изъ S и S_1, если высота конуса относится къ діагонали куба, какъ

1) 5 : 6, 2) 3 : 4, 3) 2 : 3, 4) 1 : 1, 5) 1 : 3.

292. остальныхъ діагоналей куба, если высота конуса относится къ діагонали куба, какъ

1) 2 : 3, 2) 5 : 9, 3) 1 : 1, 4) 5 : 12.

293 — 295. *Объемъ правильнаго октаэдра = 1; прямая MN, соединяющая центры его основаній, служитъ осью непересѣкающаго октаэдра конуса, вершина котораго совпадаетъ съ M, а окружность основанія касается трехъ граней октаэдра. Найти объемъ многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія съ поверхностью конуса*

293. прямыхъ, соединяющихъ средины параллельныхъ сторонъ основаній октаэдра, если высота конуса относится къ MN, какъ

1) 1 : 1, 2) 2 : 3, 3) 1 : 2, 4) 1 : 3.

294. діагоналей октаэдра, если высота конуса $= MN$.

295. прямыхъ, соединяющихъ центры параллельныхъ боковыхъ граней октаэдра, если высота конуса относится къ MN, какъ 2 : 3.

25. Коническая поверхность, описанная около многогранниковъ * (296 — 301).

296. Плоскіе углы при вершинѣ правильной n-угольной пирамиды равны α. Найти уголъ между образующей и осью описанной около пирамиды конической поверхности, вершина которой совпадаетъ съ вершиной пирамиды.

297. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = 6$, $CD = 4$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= 7$. Найти уголъ между образующей и осью описанной около тетраэдра конической поверхности, вершина которой находится на прямой, проходящей черезъ средины AB и CD.

298. Основаніями октаэдра служатъ правильные треугольники, стороны которыхъ соотвѣтственно равны 7 и 2; каждое боковое ребро октаэдра $= 5$. Найти уголъ между образующей и осью описанной около октаэдра конической поверхности, вершина которой находится на прямой, проходящей черезъ центры его основаній.

---

* Если коническая поверхность „описана“ около многогранника, то она проходитъ черезъ всѣ его вершины.

299. Въ тетраэдрѣ $ABCD$ дано: $AB = CD = 4$, каждое изъ остальныхъ реберъ $= 3$. Найти уголъ между образующей и осью описанной около тетраэдра конической поверхности, вершина которой совпадаетъ съ A.

300. Около правильнаго тетраэдра $ABCD$, ребро котораго $= a$, описана коническая поверхность, уголъ между образующей и осью которой $= 45^0$; вершины A и B тетраэдра лежатъ на одной и той же ея образующей. Найти разстояніе ребра CD отъ вершины конической поверхности.

301. Около правильной 3-угольной пирамиды $SABC$ описана коническая поверхность, вершина которой совпадаетъ съ A. Найти уголъ между образующей и осью конической поверхности, если

1) уголъ наклона бокового ребра пирамиды къ плоскости ея основанія ABC равенъ 30^0;

2) боковое ребро пирамиды относится къ сторонѣ ея основанія, какъ $4 : 3$.

26. Коническая поверхность, касательная къ шарамъ (302—306).

302. 1) На плоскости P стоитъ равносторонній конусъ, высота котораго $= h$; каждый изъ трехъ равныхъ шаровъ касается двухъ другихъ, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найти радіусы шаровъ.

2) Та же комбинація; найти высоту конуса, если радіусы шаровъ равны r.

303. 1) На плоскости P стоитъ конусъ, радіусъ основанія котораго $= 3$, а высота $= 4$. Шесть равныхъ шаровъ расположены такъ, что каждый касается двухъ сосѣднихъ, плоскости P и боковой поверхности конуса. Найти радіусы шаровъ.

2) Рѣшить ту же задачу, если радіусъ основанія конуса $= 4$, а его высота $= 3$.

304. Комбинація предыдущей задачи. Найти радіусъ основанія конуса, если его высота $=$ діаметру одного изъ шаровъ $= 2r$.

305. Около двухъ касательныхъ другъ къ другу шаровъ, радіусы которыхъ относятся, какъ $m : n$, описана коническая поверхность; найти уголъ между ея образующей и осью.

306. Два шара радіуса r_1 и два шара радіуса r_2 расположены такъ, что каждый касается трехъ другихъ. Найти уголъ между образующей и осью касательной къ шарамъ конической поверхности, ось которой проходитъ черезъ точки касанія равныхъ шаровъ другъ къ другу.

27. Комбинаціи конуса съ многогранниками и шарами (307—320).

307. Прямыя, соединяющія центръ O куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ съ его вершинами, служатъ осями равныхъ конусовъ, общая вершина которыхъ совпадаетъ съ O; окружность основанія каждаго конуса касается трехъ граней куба и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній трехъ сосѣднихъ конусовъ*. Въ кубъ вложено шесть равныхъ шаровъ, каждый изъ которыхъ касается грани куба и боковыхъ поверхностей четырехъ конусовъ, осями которыхъ служатъ прямыя, соединяющія O съ вершинами этой грани. Найти отношеніе объема многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры основаній конусовъ, къ объему многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры шаровъ.

308. Въ каждый изъ тѣлесныхъ угловъ при нижнемъ основаніи куба (правильнаго октаэдра) вписано по шару радіуса $\frac{1}{6}$; центръ верхняго основанія куба (октаэдра) служитъ вершиной двухъ касательныхъ къ шарамъ конусовъ, общая высота которыхъ соединяетъ центры его основаній и равна 1. Найти 1) радіусы основаній конусовъ; 2) въ многогранникѣ, вершинами угловъ котораго служатъ точки касанія шаровъ къ конусамъ,—высоту и радіусы описанныхъ около основаній круговъ.

309. Діагональ основанія $ABCD$ правильной 4-угольной бипирамиды $SABCDS_1$ равна 1; ось SS_1 бипирамиды $=$ сторонѣ ея основанія. SS_1 служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ S, а окружность основанія пересѣкаетъ ребра бипирамиды, выходящей изъ S_1; въ каждый изъ ея трегранныхъ угловъ A, B, C и D вписано по касательному къ боковой поверхности конуса шару. Найти радіусы шаровъ, если радіусъ основанія конуса $= \frac{4}{11}$.

---

* Напр., окружность основанія конуса, осью котораго служитъ OA, касается трехъ граней угла A и имѣетъ по одной общей точкѣ съ окружностями основаній конусовъ, осями которыхъ служатъ OA_1, OB и OD.

310. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1 = 1$; его діагональ AC_1 служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ C_1, а окружность основанія пересѣкаетъ ребра куба, выходящія изъ A; въ каждый изъ его трегранныхъ угловъ A_1, B и D вписано по шару, касательному къ боковой поверхности конуса. Найти радіусы шаровъ, если высота конуса относится къ діагонали куба, какъ $46 : 51$.

311. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1 = 1$; его діагональ AC_1 служитъ осью конуса, вершина котораго находится въ A, а окружность основанія касается трехъ граней угла C_1; высота конуса относится къ діагонали куба, какъ $1 : 2$. Въ каждый изъ его трегранныхъ угловъ A_1, B и D вписано по касательному къ боковой поверхности конуса шару; найти объемъ многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ центры шаровъ и точки ихъ касанія къ конусу.

312. Объемъ правильнаго октаэдра $= 1$; кругъ, вписанный въ нижнее его основаніе, служитъ основаніемъ конуса, вершина котораго находится въ центрѣ верхняго основанія октаэдра. Въ каждый изъ его тѣлесныхъ угловъ вписано по касательному къ боковой поверхности конуса шару; найти объемъ многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ 1) центры шаровъ, 2) точки касанія шаровъ къ конусу.

313 — 317. *Прямая, соединяющая центры основаній правильной n-угольной призмы (въ зад. 317-ой — прав. усѣч. пир.), служитъ осью конуса (въ зад. 317-ой — усѣч. кон.); въ каждый изъ ея тѣлесныхъ угловъ вписано по шару, касательному къ боковой поверхности конуса. Найти радіусы шаровъ, а также стороны основаній и высоту многогранника, вершинами угловъ котораго служатъ 1) центры шаровъ, 2) точки касанія шаровъ къ конусу, если*

313. призма — кубъ, ребро котораго $= 1$; діаметръ основанія конуса вдвое меньше діагонали грани куба.

314. призма — кубъ, ребро котораго $= 1$; радіусъ основанія конуса относится къ діагонали грани куба, какъ $7 : 8$.

315. $n = 6$; высота призмы $=$ діаметру круга, вписаннаго въ основаніе; діаметръ основанія конуса вдвое меньше стороны основанія призмы, равной 1.

316. $n = 3$; высота призмы $=$ діаметру круга, вписаннаго въ основаніе, $= 1$; діаметръ основанія конуса $=$ медіанѣ основанія призмы.

317. основаніями усѣченнаго конуса служатъ круги, вписанные въ основанія усѣченной пирамиды, вершины угловъ которой совпадаютъ съ вершинами основанія и срединами боковыхъ реберъ правильнаго тетраэдра съ ребромъ 1.

318. Около конуса, высота котораго $= 1$, описана пирамида, основаніемъ которой служитъ ромбъ съ діагоналями 6 и 8. Найти радіусы касательныхъ къ боковой поверхности конуса шаровъ, вписанныхъ въ трегранные углы при основаніи пирамиды.

319. Основаніемъ прямой призмы служитъ ромбъ съ діагоналями 6 и 8; высота призмы $= 1$. Точка пересѣченія діагоналей верхняго ея основанія служитъ вершиной конической поверхности, направляющая которой — окружность, вписанная въ нижнее основаніе; въ каждый изъ трегранныхъ угловъ призмы вписано по шару, касательному къ конической поверхности. Найти радіусы шаровъ.

320. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1 = 1$. Вершина конуса, діаметръ основанія котораго вдвое меньше діагонали грани куба, находится на A_1C_1; высотой конуса служитъ перпендикуляръ, опущенный на нижнее основаніе. Въ каждый изъ трегранныхъ угловъ 1) A_1, B и D, 2) A, B_1 и D_1 куба вписано по равному касательному къ боковой поверхности конуса шару (радіуса r); найти r, а также отношеніе l, въ которомъ вершина конуса дѣлитъ A_1C_1.

ОТВѢТЫ.

1 — 35. *Для построенія фигуры, получаемой въ сѣченіи многогранника плоскостью, приходится находить точки и линіи пересѣченія сѣкущей плоскости съ вспомогательными прямыми и плоскостями, пользуясь теоремами о прямыхъ и плоскостяхъ, излагаемыми въ началѣ курса стереометріи. Вспомогательными прямыми въ призмахъ и пирамидахъ обыкновенно служатъ ихъ оси, діагонали основаній и т. п.; вспомогательными плоскостями—діагональныя плоскости. Для опредѣленія линейныхъ элементовъ и площадей фигуръ сѣченія въ большинствѣ задачъ слѣдуетъ пользоваться подобіемъ треугольниковъ.*

1. $\frac{21}{125}$.

2. 1) $\frac{4}{9}S$; 2) $\frac{25}{36}S$.

3. 1) $\frac{2}{9}al$; 2) $\frac{2}{9}al$.

4. $\frac{al}{a+l}$.

5. $\frac{5}{9}S$.

6. 1) $\frac{9}{16}S$; 2) $\frac{1}{4}S$ или S; 3) $\frac{1}{16}S$ или S.

7. $\frac{1}{2}S$.

8. 1) $\frac{3}{4}S$; 2) $\frac{15}{16}S$ или $\frac{7}{16}S$.

9. $\frac{7}{4}S$.

10. $\frac{5}{4}S$.

11. $\frac{3}{8}$.

12. 3.

13. 9.

14. 51 и 75.

15. $\frac{7}{4}S$.

16. $\frac{11}{12}S$.

17. $\frac{19}{24}S$.

18. $\frac{27}{28}S$.

19. $\frac{3}{4}Dd$ и $\frac{13}{12}Dd$.

20. $\frac{11}{4}ak$ и $\frac{26}{9}ak$.

21. 1) $\frac{5}{4}S$; 2) $\frac{25}{16}S$.

22. $\frac{36}{35}Dd$.

23. 1) $\frac{1}{8}Dd$; 2) $\frac{3}{8}Dd$; 3) $\frac{5}{8}Dd$; 4) $\frac{23}{32}Dd$; 5) $\frac{3}{4}Dd$.

24. 1) $\frac{1}{8}dl$; 2) $\frac{1}{3}dl$; 3) $\frac{33}{72}dl$; 4) $\frac{35}{96}dl$.

25 — 32. *Въ этихъ задачахъ при опредѣленіи высотъ многоугольниковъ сѣченія, приходит-*

ся находить длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки (A), находящейся на одной изъ граней двуграннаго угла (въ большинствѣ случаевъ прямого), на прямую (BC), лежащую въ плоскости другой его грани. Для нахожденія длины этого перпендикуляра нужно построить его, для чего поступаемъ такъ: изъ A опускаемъ $\perp$-ръ AM на ребро двуграннаго угла и изъ M $\perp$-ръ MN на BC; тогда прямая AN, на основаніи теоремы о трехъ перпендикулярахъ, будетъ перпендикулярна къ BC. Если двугранный уголъ = 90°, то MN опредѣлимъ, какъ гипотенузу прямоугольнаго треугольника AMN.

25. 14.

26. 13.

27. 13.

28. $\frac{3}{4}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}$; $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\right)$.

29. 16.

30. 25.

31. 60. *Указаніе*. Пусть сѣкущая плоскость пересѣкаетъ ребра SB, SC, SD и высоту SO пирамиды соотвѣтственно въ точкахъ B_1, C_1, D_1 и O_1; продолживъ SO на длину $OS_1 = SO$, найдемъ:

$$\frac{\text{пл. } A_1D_1B_1}{\text{пл. } D_1C_1B_1} = \frac{AO_1}{O_1C_1} = \frac{S_1O_1}{SO_1} = \frac{3}{2},$$

$$\text{отк.} \frac{\text{пл. } AD_1C_1B_1}{\text{пл. } AD_1B_1} = \frac{5}{3}.$$

32. 126. См. указ. къ предыдущ. зад.

33. $a\frac{1}{2} \pm p\sqrt{2}$; $2a$; $\frac{1}{4}(^2a - - 8p^2)$. *Указаніе*. Проведемъ прямую, соединяющую средины непересѣкающихся реберъ тетраэдра $\left(\text{длина этой прямой} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$; сѣкущая плоскость будетъ перпендикулярна къ проведенной прямой. При $p=0$ въ сѣченіи получимъ квадратъ со стороной $\frac{a}{2}$; при $p = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, сѣченіе обращается въ отрѣзокъ прямой; при $0 < p < \frac{a\sqrt{2}}{4}$, сѣченіе — прямоугольникъ. Для опредѣленія его сторонъ найдемъ сперва длину y части ребра тетраэдра, заключенной между плоскостью квадрата и плоскостью прямоугольника; на основаніи теоремы: „три параллельныхъ плоскости разсѣкаютъ двѣ прямыя на части пропорціональныя“, найдемъ: $y = p\sqrt{2}$ $\left(\text{при } p = \frac{a\sqrt{2}}{4},\ y = \frac{a}{2}\right)$; $x = \frac{1}{2}a \pm y$.

34. $\frac{1}{2}a \pm \frac{p\sqrt{6}}{2}$; $3a$; $\frac{3\sqrt{3}}{8}(a^2 - 2p^2)$. *Рѣшеніе*. Въ сѣченіи получаемъ, вообще говоря, равноугольный 6-угольникъ (его углы равны 120^0), каждыя три несмежныя стороны котораго равны между собой; обозначимъ ихъ черезъ x_1 и x_2 ($x_1 > x_2$); x_1 и x_2 опредѣлимъ способомъ, указаннымъ въ предыдущей задачѣ. Для опредѣленія площади 6-угольника продолжимъ три его равныхъ стороны, напримѣръ три бо́льшихъ стороны, до взаимнаго пересѣченія; тогда искомую площадь S найдемъ, какъ разность между площадью треугольника со стороной $x_1 + 2x_2$ и утроенной площадью треугольника со стороной x_2.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x_1 + 2x_2)^2 - 3{x_2}^2\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}({x_1}^2 + {x_2}^2 + 4x_1 x_2) =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2\right] =$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[a^2 + 2\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{6}{4}p^2\right)\right] =$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}(a^2 - 2p^2).$$

35. $\frac{1}{2}a\sqrt{2} \pm p\sqrt{6}$; $3a\sqrt{2}$; $\frac{3\sqrt{3}}{4}(a^2 - 4p^2)$. *Указаніе.* Плоскость, проходящая черезъ концы трехъ реберъ, выходящихъ изъ одной и той же вершины куба, перпендикулярна къ его діагонали, выходящей изъ этой вершины, и дѣлитъ эту діагональ въ отношеніи 1 : 2. Далѣе см. указ. къ предыд. зад.

36. 1 : 12.

37. $\frac{2}{9}$ V. *Указаніе.* Искомый многогранникъ ограниченъ шестью равными ромбами. Объемъ многогранника легко опредѣлимъ, разсматривая его, какъ сумму объемовъ двухъ тетраэдровъ и октаэдра; высота каждаго изъ этихъ тѣлъ втрое меньше высоты упомянутыхъ въ задачѣ 3-угольныхъ пирамидъ.

38. $\frac{11}{18}$ V. *Указаніе.* Пусть V_1 — объемъ 3-угольной пирамиды, отсѣкаемой отъ данной пирамиды гранью призмы, а V_2 — объемъ общей части двухъ такихъ пересѣкающихся пирамидъ; тогда искомый объемъ $= V - 6V_1 + 6V_2$.

39—41. *Воспользоваться теоремой объ отношеніи объемовъ двухъ 3-угольныхъ пирамидъ, имѣющихъ по равному трегранному углу.*

39. $\frac{3}{4}$ V.

40. $\frac{11}{12}$ V.

41. $\frac{15}{16}$ V.

42. $\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$. *Указаніе.* Искомый объемъ найдемъ, какъ сумму объемовъ двухъ равныхъ правильныхъ 4-угольныхъ пирамидъ.

43. 1) $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

Указаніе (для 2-го случая). Для нахожденія объема тетраэдра $ABCD$, ребра AB и CD котораго равны b и перпендикулярны другъ къ другу и къ прямой $MN = h$, соединяющей ихъ средины, опускаемъ изъ C $\perp$-ръ CO на плоскость ABD; тогда

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \,.\, MD \,.\, CO$, но $MD \,.\, CO = CD \,.\, MN$, слѣд. $V = \frac{1}{6} AB \,.\, CD \,.\, MN = \frac{1}{6} b^2 h$. Къ тому же результату придемъ, разсматривая тетраэдръ, какъ многогранникъ, вершинами угловъ котораго служатъ концы двухъ взаимно-перпендикулярныхъ діагоналей верхняго и нижняго основаній правильной 4-угольной призмы съ діагональю b основанія и высотой h.

44. 1) $\frac{7\sqrt{3}}{3} a^3$; 2) $4a^3$. *Указаніе.* 1) Искомый объемъ найдемъ, какъ сумму объемовъ двухъ равныхъ правильныхъ 4-угольныхъ усѣченныхъ пирамидъ. 2) Искомый объемъ найдемъ, какъ сумму объемовъ правильной 4-угольной призмы и двухъ равныхъ правильныхъ 4-угольныхъ пирамидъ.

45—48. *Полученные многогранники симметричны относительно трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей, при чемъ линіи* пересѣченія этихъ плоскостей совпадаютъ въ задачѣ 45-ой съ прямыми, проходящими черезъ центры параллельныхъ граней куба, въ задачахъ 46 и 47-ой—съ діагоналями октаэдра, въ задачѣ 48-ой—съ прямыми OX, OY, OZ. Пользуясь этимъ, находимъ объемъ V_1 части каждаго изъ этихъ многогранниковъ, заключенной внутри одного изъ 8-ми трегранныхъ угловъ, образуемыхъ тремя упомянутыми плоскостями. Тогда искомый объемъ $V = 8V_1$; V_1 найдемъ, какъ сумму объемовъ равныхъ 3-угольныхъ пирамидъ, за вершину каждой изъ которыхъ принимаемъ общую ихъ вершину, не совпадающую съ O. Всѣ многогранники ограничены равными гранями; плоскость каждой грани отсѣкаетъ на упомянутыхъ линіяхъ отрѣзки (считая отъ точки O_1): въ задачѣ 45-ой $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, ∞; въ задачѣ 46-ой $\frac{a\sqrt{2}}{6}$, $\frac{a\sqrt{2}}{6}$, ∞; въ зада 47-ой $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; въ задачѣ 48-ой m, n, p.*

45. $\frac{1}{4} a^3$.

46. $\frac{\sqrt{2}}{54} a^3$.

47. $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$.

48. $\frac{8 m^3 n^2 p}{(m+n)(mn+mp+np)}$.

49. 3 : 1.

50. 3 : 8.

* Обозначимъ черезъ O_1 точку пересѣченія этихъ линій.

51. 1) 12 : 1, 2) 6 : 1, 3) 4 : 1.

52. 1) 1 : 9, 2) 2 : 9, 3) 1 : 3.

53. 1) 63 : 4, 2) 63 : 8, 3) 21 : 4.

54—58. См. рѣшеніе задачи 54-ой.

54. 3. *Рѣшеніе.* Обозначимъ ребро куба черезъ x, а разстояніе плоскости его основанія отъ ближайшей къ ней вершины бипирамиды черезъ h; тогда $x + 2h = 10$ ($\times$). Для того, чтобы выразить h черезъ x, найдемъ сторону Z вписаннаго въ основаніе бипирамиды квадрата, вершины котораго дѣлятъ стороны основанія послѣдовательно въ отношеніи $3 : 4$; $Z^2 = \left(\frac{6 \,.\, 3}{7}\right)^2 + \left(\frac{6 \,.\, 4}{7}\right)^2 = \left(\frac{6 \,.\, 5}{7}\right)^2$, $Z = \frac{30}{7}$. Теперь, на основаніи того, что въ подобныхъ многогранникахъ отношеніе сходственныхъ элементовъ одно и то же, можемъ написать, что $h : x = 5 : \frac{30}{7}$, отк. $h = \frac{7}{6}x$. Подставляя найденное значеніе h въ ур-іе ($\times$), получимъ:

$$x + \frac{7}{3}x = 10, \text{ отк. } x = 3.$$

55. 1.

56. 3.

57. 3.

58. 84. *Указаніе.* Стороны основанія и высоту параллелепипеда обозначимъ соотвѣтственно черезъ $7x$, $2x$ и $6x$.

59—69. *Для опредѣленія сторонъ основаній призмы пересѣкаемъ многогранникъ, въ который она вписана, плоскостями ея основаній, и полученныя фигуры сѣченія проэктируемъ на плоскость, перпендикулярную къ оси призмы. Точки пересѣченія этихъ проэкцій будутъ совпадать съ проэкціями на ту же плоскость вершинъ многоугольниковъ, служащихъ основаніями призмы.*

59. 1) 3; 2) 1.

60. 1 : 2.

61. 1 : 3. *Указанія. 1-ое.* Поступая согласно общему указанію къ задачамъ 59-69, увидимъ, что плоскости основаній призмы равно удалены отъ центра куба, ибо только въ этомъ случаѣ точки пересѣченія проэкцій многоугольниковъ, получаемыхъ въ сѣченіи куба плоскостями основаній призмы, на плоскость, перпендикулярную къ SS_1, служатъ вершинами угловъ правильнаго 6-угольника. *2-ое.* Проводимъ двѣ плоскости, одна изъ которыхъ проходитъ черезъ концы трехъ реберъ, выходящихъ изъ S, другая черезъ концы трехъ реберъ выходящихъ изъ S_1; заключенная между плоскостями часть куба представляетъ октаэдръ, объемъ котораго $= \frac{2}{3}$ объема куба. Тогда, на основаніи предыдущей задачи, объемъ призмы относится къ объему октаэдра, какъ 1 : 2 (результатъ этотъ не зависитъ, какъ нетрудно видѣть, отъ соотношенія между стороной основанія октаэдра и его высотой).

62. $x = \frac{3-l}{6} a$. Изслѣдовать полученную формулу. *Указаніе.* Проэкціи 6-угольниковъ, получаемыхъ въ сѣченіи октаэдра плоскостями основаній призмы (эти плоскости равноудалены отъ центра октаэдра — см. указаніе 1-ое къ предыдущей задачѣ), на плоскость, перпендикулярную къ высотѣ октаэдра, суть равные имъ 6-угольники со сторонами

$$y_1 = a\,\frac{1-l}{2} \text{ и } y_2 = a\,\frac{1+l}{2}$$

(сравни № 34). Продолжая до взаимнаго пересѣченія тѣ стороны каждаго 6-угольника, которыя пересѣкаютъ стороны другого 6-угольника, получимъ два равныхъ правильныхъ треугольника со стороной $y = y_2 + 2y_1$; $x = \frac{1}{3} y$.

63. $\frac{1-l}{2} a \sqrt{2}$. Изслѣдовать полученную формулу. См. указаніе къ предыдущей задачѣ.

64. $\frac{7}{32}$. *Указаніе.* Поступая какъ въ задачѣ 62-ой, получимъ два правильныхъ треугольника со сторонами 1 и $\frac{3}{2}$ (ребро октаэдра $= 1$). Обозначая черезъ x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$) стороны 6-угольника, вершинами угловъ котораго служатъ точки пересѣченія сторонъ этихъ треугольниковъ, черезъ z сторону основанія призмы, найдемъ:

$$x_1 + 2\,x_2 = \frac{3}{2},\ x_2 + 2\,x_1 = 1,$$

$$z^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_1\,x_2.$$

65. $\frac{7}{48}$. *Указаніе.* Результатъ получимъ на основаніи предыдущей задачи $\left(\frac{7}{48} = \frac{7}{32} \cdot \frac{2}{3};\right.$ см. указаніе 2-ое къ задачѣ 61-ой).

66 — 67. *См. указаніе къ задачѣ 64-ой.*

66. 1) $\frac{19}{96} V$; 2) $\frac{237}{2592} V$.

67. 1) $\frac{67}{384}$; 2) $\frac{1505}{10368}$.

68. 1) $\frac{3}{16}$; 2) $\frac{27}{128}$; 3) $\frac{2}{9}$. *Указаніе.* Наибольшую высоту будетъ имѣть та призма, основаніе которой наименьшее; сторона этого основанія $=$ длинѣ отрѣзка, соединяющаго средины двухъ большихъ равныхъ сторонъ 6-угольника (двухъ сторонъ треугольника), получаемаго въ сѣченіи куба плоскостью общаго основанія призмъ.

69. $\frac{1}{9}$ или $\frac{169}{1125}$. *Указаніе.* Обозначая черезъ k разстояніе плоскости основанія параллелепипеда отъ ближайшаго къ ней конца SS_1 и полагая ребро куба равнымъ 1, найдемъ, что высота параллелепипеда $= \sqrt{3-2k}$, а стороны его основанія равны $\frac{k\sqrt{6}}{3}$ и $k\sqrt{2}$. Далѣе пользуемся теоремой: „квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его измѣреній“.

70. 5.

71. 7.

72. 13.

73. 5. Сравни № 70.

74. 13.

75. 65.

76. $\frac{l^2}{2h}$. *Указаніе:* Продолжить высоту пирамиды до пересѣченія съ поверхностью шара.

77. 1 или 9.

78. $\frac{65}{4}$.

79. 13. *Указаніе.* Составляемъ ур-іе: сумма разстояній центра шара отъ плоскостей 6-угольниковъ = разстоянію между этими плоскостями.

80. 5. Рѣшается аналогично предыдущей.

81 — 84. *Разсмотрѣть сѣченіе куба (октаэдра) и шара плоскостью, проходящей черезъ центръ шара и одну изъ прямыхъ.*

81. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

82. $\frac{a}{4}$.

83. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

84. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

85. 4 или $\frac{28}{3}$. *Указаніе.* Составляемъ ур-іе: сумма (или разность) разстояній центра шара отъ вершины пирамиды и плоскости ея основанія = высотѣ пирамиды.

86. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$. См. указ. къ задачѣ 79-ой.

87. $a\,(2-\sqrt{2})$.

88. $a\,(\sqrt{6}-2)$.

89 — 90. *Составляемъ ур-іе: сумма или разность разстояній центра шара отъ* CC_1 *и* AA_1 *равна* AC.

89. $\frac{a}{2}\left(4 \pm \sqrt{7}\right)$.

90. $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ или $\frac{a\sqrt{21}}{6}$.

91. $\frac{3}{8}S$.

92. $\frac{2}{7}\pi$. *Указаніе.* Сначала опредѣлимъ радіусъ ρ шара, равный радіусу круга, вписаннаго въ діагональное сѣченіе пирамиды; зная ρ, найдемъ длину перпендикуляра d, опущеннаго изъ центра шара на боковую грань пирамиды. Радіусъ сѣченія шара плоскостью ея боковой грани$=\rho^2-d^2$.

93 — 101. *Сначала опредѣляемъ длину* k *заключенныхъ внутри шара отрѣзковъ реберъ многогранника; далѣе разсматриваемъ сѣченіе грани многогранника поверхностью шара.*

93 — 98. Если r—радіусъ шара, d—разстояніе его центра отъ ребра многогранника, то $\frac{k^2}{4}$ (обозн. см. 93—101) $= r^2 - d^2$.

93. $\frac{a^2}{9}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

94. $\frac{2a^2}{9}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

95. $\frac{a^2}{8}\left(\pi+5\sqrt{3}\right)$.

96. $\frac{a^2}{3}\left(\pi+\sqrt{3}\right)$.

97. $\frac{3a^2}{4}\left(\pi+2\right)$.

98. $\frac{8}{3}\left(7\pi+6\sqrt{3}\right)$.

99. $2a^2\left(\pi+8\right)$. *Указаніе*. Для опредѣленія k (обознач. см. 93-101) разсѣкаемъ шаръ и призму плоскостью, проходящей черезъ ея боковое ребро и пользуемся теоремой: „произведеніе сѣкущей на ея внѣшнюю часть = квадрату касательной".

100 — 101. Пусть O центръ основанія пирамиды, а N точка пересѣченія шара съ SA; тогда k (обозн. см. 93-101) опредѣлимъ изъ подобія треугольниковъ SOA и SON.

100. $\frac{a^2}{18}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

101. $\frac{2a^2}{27}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$.

102. $\frac{2a^2}{27}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)$. *Указаніе*. Разсѣкая октаэдръ и шаръ плоскостью, перпендикулярной къ A_1B_1, опредѣлимъ радіусъ сѣченія шара плоскостью грани октаэдра, пользуясь теоремой: „произведеніе сѣкущей на ея внѣшнюю часть = квадрату касательной".

103. $\frac{S}{8}$.

104. $\frac{S}{16}\left(3\sqrt{2}-4\right)$, $\frac{S}{16}\left(9\sqrt{2}-4\right)$. *Указаніе*. Пусть S_1—величина кривой поверхности сферическаго сегмента, отсѣкаемаго гранью угла, T_1 и T_2—искомыя поверхности ($T_1 > T_2$). Построивъ кубъ, однимъ изъ трегранныхъ угловъ котораго служитъ данный уголъ, и ребра котораго касаются сферы, найдемъ: $T_2 = \frac{1}{8}(S-6S_1)$, $T_1 = S-3S_1 - T_2 = \frac{1}{8}(7S-18S_1)$.

105. $\frac{S}{6}$. *Рѣшеніе*. Проведя черезъ точки пересѣченія сферы съ боковыми ребрами тетраэдра плоскость, отсѣчемъ отъ него тетраэдръ (также правильный), по отношенію къ которому сфера будетъ описанной. Теперь задача свелась къ такой: поверхность шара, описаннаго около правильнаго тетраэдра, $= S$; найти величину ея части, заключенной внутри трегранного угла, образуемаго плоскостями трехъ граней тетраэдра. Для рѣшенія этой задачи продолжимъ всѣ грани тетраэдра до пересѣченія со сферой; тогда сфера раздѣлится на десять частей; обозначая величину каждой изъ четырехъ бóльшихъ черезъ x, величину каждой изъ шести меньшихъ черезъ y, найдемъ $4x+6y=$ $=S$ (1), $x+3y=S_1$ (2), гдѣ S_1 (величина кривой поверхности сферическаго сегмента, отсѣкаемаго гранью тетраэдра) $=\frac{S}{3}$. Изъ (1) и (2) найдемъ: $x=\frac{S}{6}$.

106. 1) $\frac{a^3}{4}$; 2) $\frac{9}{2}a^3$.

107. $\frac{h}{n\pm 1}$.

108. 1) $\cos\alpha=\frac{m-n}{m+n}$; 2) $\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{2mn}}{m-n}$. Изсл. пол. форм.

109. a.

110 — 116. *При опредѣленіи радіуса r вписаннаго въ многогранникъ шара можно пользоваться формулой $r=\frac{3V}{P}$, гдѣ V—объемъ многогранника, а P—его поверхность.*

110. $\frac{12}{25}$.

111. $\frac{4}{3}$.

112. $\frac{12}{5}$.

113. 6. *Указаніе.* Разсѣкаемъ октаэдръ и шаръ плоскостью, проходящей черезъ его центръ и перпендикулярной къ сторонѣ общаго основанія пирамидъ. *1-ый способъ.* Составляемъ ур-іе: сумма разстояній центра шара отъ вершинъ пирамидъ = суммѣ ихъ высотъ. *2-ой способъ.* Пользуемся двоякимъ выраженіемъ площади полученнаго сѣченія.

114. $\frac{6}{5}$. *Указаніе.* Центръ шара совпадаетъ съ срединой прямой, соединяющей средины AB и CD.

115. $x=\frac{45}{16}$. *Указаніе.* Составляемъ ур-іе: сумма разстояній d_1 и d_2 центра шара отъ AB и CD равна разстоянію между этими ребрами; для того, чтобы выразить d_1 и d_2 черезъ x, разсѣкаемъ тетраэдръ и шаръ двумя проходящими черезъ центръ шара плоскостями, одна изъ которыхъ перпендикулярна къ AB, а другая къ CD.

116. $x=\frac{36}{11}$. *Указаніе.* Составляемъ ур-іе: сумма разстояній d_1 и d_2 проэкціи центра шара на плоскость DBC отъ B и DC равна высотѣ треугольника DBC, опущенной на DC. Далѣе поступаемъ, какъ въ предыдущей задачѣ.

117. 1 : 2.

118. $\rho.\ \frac{R}{r}$.

119. $r.\ \frac{R-r}{R+r}$.

120. 1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{12}{29}$. *Указаніе.* *1-ый способъ.* См. указаніе къ зад. 110-116. *2-ой способъ.* Задача сводится къ опредѣленію радіуса шара, вписаннаго въ трегранный уголъ пирамиды задачи 110-ой и касающагося діагональной плоскости пирамиды.

121. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{2}{5}$. Рѣшается аналогично предыдущей. При всякихъ ли числовыхъ значеніяхъ AC, BD и H въ 1-омъ и во 2-омъ случаяхъ получились бы одинаковые отвѣты?

122. 1) 2; 8; $\frac{11}{4}$; 11. 2) $\frac{5}{3}$; 15; $\frac{23}{9}$; 23. *Указаніе.* Проведемъ двѣ плоскости, касательныя къ упомянутому въ задачѣ шару и перпендикулярныя къ SS_1. Пусть одна изъ нихъ пересѣчетъ ребра тѣлеснаго угла S_1 соотвѣтственно въ точкахъ A_1, B_1, C_1, D_1, а другая въ точкахъ A_2, B_2, C_2, D_2; тогда искомые шары будутъ вписаны и внѣвписаны* въ пирамиды $S_1A_1B_1C_1D_1$ и $S_1A_2B_2C_2D_2$. Опредѣливъ высоты этихъ пирамидъ, найдемъ искомые радіусы, пользуясь формулой $r = \frac{h}{n \pm 1}$ (см. зад. 107).

123. $x = \frac{ar}{a+2r}$. *Рѣшеніе.* Центры шаровъ служатъ вершинами угловъ правильнаго многогранника, подобнаго данному, со стороной, равной діаметру $2x$ одного изъ шаровъ; радіусъ шара, вписаннаго въ этотъ многогранникъ, $= 2x \cdot \frac{r}{a}$. Далѣе имѣемъ $2x \cdot \frac{r}{a} + x = r$, отк. $x = \frac{ar}{a+2r}$.

124—128. *См. рѣшеніе задачи 124-ой.*

124. $x_{1,2} = \left|\frac{ar}{a \pm 2r}\right|$. *Рѣшеніе.* Для опредѣленія x пользуемся подобіемъ двухъ пирамидъ, общая вершина которыхъ совпадаетъ съ центромъ шара, вписаннаго въ данную пирамиду, а вершинами основаній служатъ: одной пирамиды — центры шаровъ, другой — вершины основанія данной пирамиды. Далѣе слѣдуетъ различать три случая. *1-ый случай.* Шары вписаны въ трегранные углы пирамиды, при чемъ $x < r$; тогда $\frac{r-x}{2x} = \frac{r}{a}$, отк. $x = \frac{ar}{a+2r}$ (I). *2-ой случай.* Шары вписаны въ трегранные углы пирамиды, при чемъ $x > r$; тогда $\frac{x-r}{2x} = \frac{r}{a}$, отк. $x = \frac{ar}{a-2r}$ (II); усл. возм. $a > 2r$. *3-ій случай.* Шары вписаны въ трегранные углы, симметричные

---

* Шаромъ, „внѣвписаннымъ“ въ пирамиду, назовемъ (по аналогіи съ кругомъ, внѣвписаннымъ въ треугольникъ) шаръ, касающійся основанія пирамиды и продолженій ея боковыхъ граней.

по отношенію къ треграннымъ угламъ пирамиды; тогда $\frac{x+r}{2x} = \frac{r}{a}$, отк. $x = \frac{ar}{2r-a}$ (III); усл. возм. $2r > a$. Выяснить геометрическій смыслъ условій возможности $a \gtreqless 2r$, которыя показываютъ, что изъ (I), (II) и (III) случаевъ одновременно могутъ имѣть мѣсто только два, и при томъ (I) и (II) или (I) и (III), но не (II) и (III). Такимъ образомъ x получаетъ значенія, опредѣляемыя формулой $x_{1,2} = \left|\frac{ar}{a \pm 2r}\right|$ (при $2r = a$, x_2 обращается въ ∞).

125. 13 : 18.

126. 9 : 64. *Указаніе*. Для опредѣленія объема V октаэдра, основаніями котораго служатъ правильные треугольники со сторонами a и b ($a > b$), а боковыя ребра равны между собой, разсматриваемъ октаэдръ, какъ многогранникъ, вершинами угловъ котораго служатъ средины сторонъ нижняго основанія и вершины угловъ верхняго основанія правильной усѣченной 3-угольной пирамиды, стороны нижняго и верхняго основаній которой соотвѣтственно равны $2a$ и b, а высота=высотѣ h октаэдра; V найдемъ, какъ разность между объемомъ усѣченной пирамиды и суммой объемовъ трехъ пирамидъ, отсѣкаемыхъ отъ нея гранями октаэдра. $V = \frac{\sqrt{3}}{12}(a+b)^2 h$.

127. 837 : 250.

128. $\frac{60}{149}$ или $\frac{60}{101}$.

129. $3r$; $\frac{r}{3}$.

130. $r \cdot \frac{2 \pm \sin\alpha}{2 \mp \sin\alpha}$ (одновр. верхн. или нижн. знаки). Изслѣдовать полученную формулу.

131. $\frac{5}{3}$ или 10. См. указ. къ зад. 115-ой.

132. $x = \frac{r}{5}\left(5 \pm \sqrt{13}\right)$.

Указаніе. Пусть O — центръ шара радіуса x, а O_1 и O_2 — центры шаровъ радіуса r; составляемъ ур-іе: разность разстояній точки O и прямой $O_1 O_2$ (прямой $O_1 O_2$ и точки O) отъ ребра двуграннаго угла = разстоянію между O и $O_1 O_2$.

133—134. *Рѣшаются аналогично зад. 132-ой.*

133. $\frac{r}{3}\left(3 \pm \sqrt{5}\right)$.

134. $\frac{r}{12}\left(9 \pm \sqrt{69}\right)$.

135—139. *См. рѣшеніе зад. 124-ой.*

135. $\left|\frac{kr}{k \pm 2r}\right|$.

136. $r_1 = \frac{1}{8}$; $r_2 = \infty$.

137. 144 : 125. См. указ. къ зад. 126-ой.

138. 65 : 96.

139. 608 : 343.

140. $x = \frac{3}{4}\left(6 \pm \sqrt{7}\right)$. *Указаніе*. Пусть O_1 и O_2 будутъ проэкціи на плоскость основанія пирамиды центровъ двухъ смежныхъ шаровъ. O — центръ этого основанія; выразивъ стороны треугольника $O\,O_1\,O_2$ черезъ x, примѣняемъ къ нему теорему Пиѳагора.

141. $\frac{r}{4}$.

142. $\frac{r}{4\sin^2\frac{180^0}{n}}$.

143. $2\pm\sqrt{3}$. *Указаніе.* Составляемъ ур-іе: разность разстояній отъ плоскости P точекъ касанія равныхъ шаровъ другъ къ другу = разстоянію между этими точками.

144. $2\pm\sqrt{3}$. *Указаніе.* Пусть O_1 и O_2 будутъ проэкціи на плоскость P центровъ двухъ шаровъ радіуса r_1, а O — проэкція на ту же плоскость касательнаго къ нимъ шара радіуса r_2. Пользуемся двоякимъ выраженіемъ разстоянія точки O отъ прямой O_1O_2.

145. $\left|\frac{R}{4\cos\left(15^0+\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(15^0-\frac{\varphi}{2}\right)}\right|$, гдѣ $\varphi=\frac{180^0}{n}$.

146. $\frac{5}{7}R$.

147. $2r\,\mathrm{tg}^2\frac{180^0}{n}$.

148. $r_1{}^2-10r_1r_2+r_2{}^2=0$, отк. $\frac{r_1}{r_2}=5\pm\sqrt{24}$. Рѣшается аналогично зад. 144-ой.

149. $r_{1,2}=\rho\,(3\pm\sqrt{6})$. *Рѣшеніе.* Въ предыдущей задачѣ было найдено: $r_1{}^2-10r_1r_2+r_2{}^2=0$ (1); далѣе имѣемъ $(\rho+r_1)^2-\frac{4}{3}r_1{}^2=(\rho+r_2)^2-\frac{4}{3}r_2{}^2$; отк. $r_1+r_2=6\rho$ (I), $r_1{}^2+2r_1r_2+r_2{}^2=36\rho^2$ (2). Изъ (1) и (2) получимъ $12r_1r_2=36\rho^2$, $r_1r_2=3\rho^2$ (II). На основаніи (I) и (II), r_1 и r_2 опредѣлимъ, какъ корни ур-ія $x^2-6\rho x+3\rho^2=0$, отк. $r_{1,2}=\rho\,(3\pm\sqrt{6})$.

150. $\frac{m}{2(12k^2+1)}$; $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{3}{7}$.

151. $3\pm\sqrt{8}$. *Указаніе.* Центры шаровъ радіуса r_1 служатъ вершинами угловъ правильнаго тетраэдра $ABCD$ съ ребромъ $2r_1$, центры шаровъ радіуса r_2 — вершинами угловъ правильнаго тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ съ ребромъ $2r_2$ (AOA_1 — гдѣ O общій центръ тетраэдровъ — прямая). Пользуемся двоякимъ выраженіемъ высоты пирамиды $AB_1C_1D_1$, опущенной изъ вершины A на грань $B_1C_1D_1$.

152 — 157. *Въ этихъ задачахъ проэктируемъ многоугольникъ, стороны котораго касаются цилиндрической поверхности, на плоскость, перпендикулярную къ ея оси; радіусъ цилиндрической поверхности = радіусу круга, вписаннаго въ эту проэкцію.*

152. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{ab}}{h}$, усл. возм.?

153. $\cos\alpha = \frac{n}{m}$; усл. возм.?

154. $\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}}$; изслѣдовать получ. форм.

155. $\frac{3}{2}$.

156. 6.

157. 1) $\frac{10}{3}$; 2) $\frac{9}{2}$.

158—172. *Если цилиндрическая поверхность касается прямой MN, то радіусъ цил. пов. = длинѣ k кратчайшаго разстоянія между ея осью O_1O_2 и MN. Пусть плоскость P, перпендикулярная къ O_1O_2, пересѣкаетъ O_1O_2 въ точкѣ O; тогда k = разстоянію точки O отъ проэкціи прямой MN на плоскость P.*

158. 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

159. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ или $\frac{a}{2}$.

160. $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$. 1) $l = 1:1$; 2) $l = 1:3$.

161. $r = \frac{\sqrt{5}}{10}$. 1) $l = 2:3$; 2) $l = 1:4$; 3) $l = 3:7$.

162—172. *Отвѣты смотри въ условіяхъ.*

173—176. *Кратчайшее разстояніе между осями двухъ касающихся другъ друга цилиндрическихъ поверхностей = суммѣ ихъ радіусовъ.*

173. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

174. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

175. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

176. $\frac{5}{3}$ или 10. Сравни № 131.

177—181. *Принимая во вниманіе, какіе многоугольники получаются въ сѣченіи многогранника плоскостями основаній цилиндра, и какихъ сторонъ этихъ многоугольниковъ касаются окружности его основаній, увидимъ, что геометрическими мѣстами точекъ касанія окружностей основаній цилиндра къ гранямъ многогранника, при перемѣнной высотѣ цилиндра, будутъ отрѣзки прямыхъ. Далѣе разсматриваемъ сѣченіе многогранника и цилиндра плоскостью, проходящей черезъ одинъ изъ этихъ отрѣзковъ и ось цилиндра.*

177. $\pi : 9$.

178. $\pi : 18$.

179. 1) $\frac{\pi\sqrt{6}}{243}$ или $\frac{\pi\sqrt{6}}{343}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{6}}{250}$.

180. 1) $\frac{\pi\sqrt{6}}{36}$; 2) $\frac{4\sqrt{6}\pi}{243}$; 3) $\frac{3\sqrt{6}\pi}{125}$; 4) $\frac{36\sqrt{6}\pi}{1331}$.

181. 1) $\frac{3\sqrt{3}\pi}{64}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$; 3) $\frac{6\sqrt{3}\pi}{125}$; 4) $\frac{18\sqrt{3}\pi}{343}$.

182—189. *См. рѣшеніе задачи 182-ой.*

182. 1) 1; 2) 1. *Рѣшеніе* (для 1-го случая). Пусть въ правильную 4-угольную пирамиду $SABCD$ вписанъ равносторонній цилиндръ, ось котораго параллельна діагонали AC основанія пирамиды. Обозначимъ черезъ x радіусъ цилиндра, черезъ h его высоту и черезъ k разстояніе плоскости основанія цилиндра отъ ближайшаго къ ней конца AC; имѣемъ зависимость: $2k + h = AC = 6$ ($\times$). Далѣе $h = 2x$ (1), по условію; для опредѣленія k въ зависимости отъ x найдемъ радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ SBD; этотъ радіусъ $= \frac{3}{2}$. Пользуясь тѣмъ, что 3-угольная пирамида, отсѣкаемая отъ данной плоскостью основанія цилиндра, подобна пирамидѣ $SABD$ ($SCBD$), и что въ подобныхъ многогранникахъ отношеніе сходственныхъ элементовъ одно и то же, найдемъ $k : x = \frac{AC}{2} : \frac{3}{2} = 3 : \frac{3}{2} = 2$, отк. $k = 2x$ (2). Подставляя найденныя значенія h и k въ зависимости отъ x изъ (1) и (2) въ ($\times$), получимъ

$$2x + 2x + 2x = 6,\ x = 1.$$

Сравни рѣшеніе задачи 54-ой.

183. $\frac{90}{37}$ и $\frac{45}{19}$.

184. 1.

185. 1.

186. $\frac{1}{3}$.

187. 1.

188. 3.

189. $\frac{6}{5}$.

190. 156. *Указаніе*. Пользуемся теоремой: „во всякомъ описанномъ четыреугольникѣ суммы противоположныхъ сторонъ равны между собою“.

191. d^2.

192—199. *См. указаніе къ задачѣ 192-ой.*

192. 245. *Указаніе*. Геометрическое мѣсто центровъ окружностей, лежащихъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ AD и касающихся граней трегграннаго угла A, есть прямая, проходящая черезъ A и центръ окружности, вписанной въ треугольникъ, получаемый въ сѣченіи пирамиды плоскостью, перпендикулярной къ AD и проходящей черезъ S; геометрическое мѣсто центровъ окружностей, лежащихъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ AD и касающихся граней двуграннаго угла BC, есть плоскость, проходящая черезъ BC и средину высоты пирамиды. Точка пересѣченія этой плоскости съ упомянутой прямой будетъ центромъ окружности, вписанной въ трапецію. Далѣе пользуемся подобіемъ треугольниковъ.

193—194. Въ этихъ задачахъ, найдя предварительно радіусъ r цилиндра, можно затѣмъ опредѣлить высоту его h, не пользуясь построеніемъ, указаннымъ въ задачѣ 192-ой. Для этого разсѣкаемъ пирамиду и вписанный въ нее цилиндръ плоскостью, проходящей черезъ высоту пирамиды и ось цилиндра; въ сѣченіи получимъ треугольникъ со вписаннымъ въ него прямоугольникомъ; изъ этого сѣченія легко опредѣлимъ h, пользуясь подобіемъ треугольниковъ. Составить ур-іе для опредѣленія h какъ тѣмъ, такъ и другимъ способомъ.

193. 1) $\frac{\pi}{36}$; 2) $\frac{27\pi}{8}$; 3) $\frac{128\pi}{81}$.

194. 1) $\frac{135\pi}{2}$ или $\frac{675\pi}{64}$; 2) $\frac{405\pi}{32}$ или $\frac{800\pi}{9}$.

195. 1) 1400π; 2) 54π.

196. 2π.

197. 288π.

198. 15.

199. 16.

200 — 217. *См. указ. къ зад. 177—181.*

200. $\frac{25\pi}{576}$ или $\frac{\pi}{36}$.

201. При $1 > h \geqslant \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{h} - 1\right)$; при $\frac{1}{3} \geqslant h > 0$, $t = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h} - 1\right)^2}$; при $h = \frac{1}{3}$, $t_{max} = \frac{2}{\pi}$. При $t = \frac{1}{2\pi}$, h равно $\frac{2}{3}$ или $\frac{1}{5}$.

202. $\frac{25\pi}{288}$ или $\frac{\pi}{18}$.

203. Тѣ же отвѣты, какъ и въ задачѣ 201-ой. При $t = \frac{1}{8\pi}$, h равно $\frac{8}{9}$ или $\frac{1}{9}$.

204. $\frac{27\pi}{128}$ или $\frac{9\pi}{128}$.

205. При $1 > h \geqslant \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{h} - 1\right)$; при $\frac{1}{2} \geqslant h > 0$, $t = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{h} - 1\right)^2}$; при $h = \frac{1}{2}$, $t_{max} = \frac{2}{\pi}$; при $t = \frac{1}{2\pi}$, h равно $\frac{4}{5}$ или $\frac{1}{3}$.

206 — 215. Для опредѣленія объема V октаэдра, основаніями котораго служатъ равные правильные треугольники со стороной a, а всѣ боковыя ребра равны между собой, замѣтимъ, что октаэдръ можно разсматривать, какъ многогранникъ, вершинами угловъ котораго служатъ или средины реберъ правильной 3-угольной пирамиды со стороной $2a$ основанія и высотой $2h$ (h — высота октаэдра), или вершины A_1, A_3, A_5, B_2, B_4 и B_6 правильной 6-угольной призмы

$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$$

со стороной $\frac{a}{\sqrt{3}}$ основанія и высотою h; $V=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2h$ (при $h=\frac{a\sqrt{6}}{3}$) получаемъ формулу объема правильнаго октаэдра $V=\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$). Къ тому же результату придемъ, полагая въ формулѣ, приведенной въ указаніи къ задачѣ 126-ой, $a=b$.

206. $\frac{10\sqrt{3}\pi}{243}$ или $\frac{8\sqrt{3}\pi}{243}$.

207. $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ или $\frac{25\sqrt{3}\pi}{576}$.

208. $\frac{7\sqrt{3}\pi}{486}$ или $\frac{49\sqrt{3}\pi}{972}$.

209. При $1>h\geqslant\frac{1}{5}$, $t=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\left(\frac{1}{h}-1\right)$; при $\frac{1}{5}\geqslant h>0$, $t=\frac{16\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{h}-1\right)^2}$; при $h=\frac{1}{5}$, $t_{max}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$. При $t=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, h равно $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{9}$.

210. При $1>h\geqslant\frac{1}{3}$, $t=\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\left(\frac{1}{h}-1\right)$; при $\frac{1}{3}\geqslant h>0$, $t=\frac{4\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{h}-1\right)^2}$; при $h=\frac{1}{3}$, $t_{max}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$. При $t=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, h равно $\frac{2}{3}$ или $\frac{1}{5}$.

211. При $1>h\geqslant\frac{1}{2}$, $t=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{h}-1\right)$; при $\frac{1}{2}\geqslant h>0$, $t=\frac{\sqrt{3}}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{h}-1\right)^2}$; при $h=\frac{1}{2}$, $t_{max}=\frac{\sqrt{3}}{\pi}$. При $t=\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$, h равно $\frac{4}{5}$ или $\frac{1}{3}$.

212. 1) $1:2:4$, 2) $16:4:1$, 3) $2:4:1$.

213. При $1>h\geqslant\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$; при $\frac{1}{2}\geqslant h\geqslant\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}-1\right)^3$; при $\frac{1}{3}\geqslant h>0$, $n=4$. При $n=\frac{32}{27}$, $k=\frac{18\sqrt{3}\pi}{343}$.

214. При $1>h\geqslant\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$; при $\frac{1}{2}\geqslant h\geqslant\frac{1}{5}$, $n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{h}-1\right)^3$; при $\frac{1}{5}\geqslant h>0$, $n=16$. При $n=2$, $k=\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

215. При $1>h\geqslant\frac{1}{3}$, $n=\frac{1}{2}$; при $\frac{1}{3}\geqslant h\geqslant\frac{1}{5}$, $n=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{h}-1\right)^3$; при $\frac{1}{5}\geqslant h>0$, $n=4$. При $n=\frac{27}{16}$, $k=\frac{27\sqrt{3}\pi}{512}$.

216—217. См. указ. къ зад. 126-ой.

216. 1) $\frac{1}{108}$; 2) $\frac{2}{27}$; 3) $\frac{1331}{32000}$; 4) $\frac{27}{2048}$; 5) $\frac{61}{6912}$.

217. 1) $\frac{1}{16}$; 2) $\frac{27}{250}$; 3) $\frac{729}{16000}$; 4) $\frac{27}{1024}$; 5) $\frac{13}{384}$.

218 — 223. *Эти задачи рѣшаются аналогично задачѣ 182.*

218. 15.

219. $\frac{15}{11}$ или $\frac{10}{7}$.

220. 4.

221. 3.

222. 4.

223. 6.

224. $\frac{1}{4}$. *Указаніе.* Обозначимъ высоту цилиндра черезъ $2h$, тогда стороны сѣченія тетраэдра плоскостью основанія цилиндра равны $\frac{1}{2} \pm h\sqrt{2}$ (см. задачу 33-ью).

225. $\sqrt{2}$. См. указ. къ предыд. зад.

226 — 227. *Эти задачи рѣшаются аналогично задачѣ 192.*

226. 5; 56.

227. 2.

228. $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{bc}}$, если $a^2 \leqslant bc$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{bc}}{a}$, если $a^2 \geqslant bc$.

229. $2k^2 : 1$.

230. $\frac{56}{25} R^2$.

231—239. *Пользуемся тѣмъ, что проэкціи находящихся на цилиндрической поверхности вершинъ многоугольниковъ и многогранниковъ на плоскость, перпендикулярную къ ея оси, лежатъ на окружности, получаемой въ сѣченіи цилиндрической поверхности этой плоскостью.*

231. 5.

232. 5.

233. $\frac{1}{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$; изслѣд. получ. формулу.

234. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

235. 1) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

236. 25.

237. $\cos\alpha = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+h^2}}$; усл. возм.?

238. $\sin x = \sqrt{2}\cos\alpha$; усл. возм.?

239. $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{9-\sin^2 2\alpha}{2}}$; изслѣд. получ. форм.

240 — 243. *Въ этихъ задачахъ слѣдуетъ найти радіусъ y цилиндрической поверхности, проходящей черезъ центры шаровъ; тогда радіусъ упомянутой въ задачахъ цилиндрической поверхности* $= y \pm r$.

240. $r\left(\sqrt{1+\sin^2\alpha} \pm 1\right)$; изсл получ. форм.

241. $r\,\frac{(\sqrt{3}\sin\alpha \pm 1)^2}{2\sqrt{3}\sin\alpha}$; изслѣд. получ. форм.

242. $r\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9-\sin^2 2\alpha}{2}} \pm 1\right)$; ср. зад. 239-ую.

243. 1) На основаніи задачи 238-ой имѣемъ $\sin x = \sqrt{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; 2) $r\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \pm 1\right)$.

Указаніе. $\operatorname{Sin} x = \sin \alpha$, слѣдовательно ось цилиндрической поверхности перпендикулярна къ боковой грани пирамиды.

244. $\frac{3\pi}{128}$.

245. 1) $2:1$, 2) $2:1$; см. указ. къ зад. 206 — 215.

246. 11 или 4.

247 — 258. *Пусть S и O будутъ вершина и центръ основанія конуса, P_1 — плоскость, проходящая черезъ S и перпендикулярная къ высотѣ конуса, P_2 — плоскость его основанія, M_1M_2 — прямая, касательная къ конусу (M_1 — точка пересѣченія этой прямой съ плоскостью P_1, M_2 — съ плоскостью P_2). Соединяемъ M_1 съ S, проводимъ черезъ M_2 прямую параллельно M_1S и опускаемъ на эту прямую перпендикуляръ ON, который и будетъ искомымъ радіусомъ основанія конуса. Если проэкція отрѣзка M_1S на плоскость P_2 и отрѣзокъ M_2N лежатъ по разныя стороны отъ ON (случая, когда они лежатъ по одну сторону отъ ON, мы здѣсь не разсматриваемъ), то искомое отношеніе $l = \frac{SM_1}{M_2N}$.*

247. $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $l = 2:1$.

248. $r = \frac{1}{2}$; $l = 1:1$.

249. $r = \frac{\sqrt{13}}{13}$; $l = 13:3$.

250. $r = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $l = 5:2$.

251. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $l = 1:2$.

252. $r = 1$; $l = 1:3$.

253. $r = \frac{1}{2}$; $l = \infty$.

254. $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $l = 5:1$.

255. $r = 1$; $l = 1:1$.

256. $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $l = \infty$.

257. $r = \frac{\sqrt{10}}{5}$; $l = 5:1$.

258. $r = \sqrt{2}$; $l = 1:1$.

259. $r_1 = a$; $r_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$; $r_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a$. *Рѣшеніе.* Пусть коническая поверхность касается діагоналей DB_1 и D_1B куба

$$ABCDA_1B_1C_1D_1$$

и сторонъ AD и AB нижняго его основанія (DB_1, D_1B, AD и AB — безконечныя прямыя); плоскость, касательная къ конической поверхности и проходящая черезъ діагональ DB_1 куба, пересѣчетъ плоскость нижняго его основанія по прямой, проходящей черезъ D и касательной въ точкѣ N къ окружности, получаемой въ сѣченіи конической поверхности плоскостью этого основанія (центръ этой окружности обозначимъ черезъ S_1), а плоскость верхняго основанія по прямой, проходящей черезъ вершину S конической поверхности и вершину B_1

куба, при чемъ $S_1B \parallel DN$. Такимъ образомъ, данная стереометрическая задача сводится къ такой планиметрической: окружность касается безконечныхъ прямыхъ AB и CD, при чемъ касательная къ окружности, проходящая черезъ D, параллельна прямой, соединяющей центръ окружности съ B; найти ея радіусъ.—Предполагая, что S_1 находится на AC съ той стороны отъ A, съ которой находится центръ O нижняго основанія куба, и пользуясь двоякимъ выраженіемъ площади прямоугольнаго треугольника BOS_1, найдемъ: $\pm\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}-r\sqrt{2}\right)=$
$=\frac{r}{2}\sqrt{(a-r)^2+r^2}$ (знакъ „$+$" вначалѣ соотвѣтствуетъ тому случаю, когда S_1 находится между A и O, знакъ, „$-$", когда O находится между A и S_1). Послѣ преобразованія получимъ: $2r^4-2ar^3-3a^2r^2+4a^3r-a^4=$
$=(r-a)^2\ (2r^2+2ar-a^2)=0$, что даетъ три различныхъ значенія r, а именно $r_1=a$, $r_2=$
$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\,a$, $r_3=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\,a$.

Центръ окружности радіуса r_3 находится на AC по другую сторону отъ A, чѣмъ O; составивъ ур-іе для этого случая, мы получили бы для r значенія тѣ же по абсолютной величинѣ, но обратныя по знаку. Провѣрить это.

260. $r_1=R$; $r_2=\frac{\sqrt{21}-3}{4}R$; $r_3=\frac{\sqrt{21}+3}{4}R$. Рѣшается аналогично предыдущей.

261—264. *Двѣ касательныя другъ къ другу коническія поверхности имѣютъ общую касательную плоскость, проходящую черезъ ихъ пересѣкающіяся образующія и, слѣдовательно, черезъ прямую, соединяющую ихъ вершины. Если коническія поверхности равны, то эта плоскость образуетъ равные углы съ ихъ осями. Проведемъ указанную плоскость; далѣе опустимъ на нее перпендикуляры изъ произвольныхъ точекъ на осяхъ поверхностей (удобнѣе—изъ точекъ, совпадающихъ съ вершинами многогранниковъ); соединивъ основанія перпендикуляровъ съ вершинами коническихъ поверхностей, получимъ ихъ пересѣкающіяся образующія. Искомые радіусы равны перпендикулярамъ, опущеннымъ изъ точки пересѣченія этихъ образующихъ на оси коническихъ поверхностей.*

261. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

262. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. Сравни задачу 261-ую.

263. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{a}{2}$.

264. 1) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; 2) $\frac{a\sqrt{22}}{16}$; 3) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$ и $\frac{3a\sqrt{2}}{10}$.

265—269. *См. указ. къ зад. 177—181.*

265. $\frac{\pi}{27}$ или $\frac{2\pi}{27}$.

266. 1) $\frac{\pi}{54}$ или $\frac{\pi}{27}$; 2) $\frac{\pi}{16}$.

267. 1) $\frac{2\sqrt{6}\pi}{729}$ или $\frac{2\sqrt{6}\pi}{343}$; 2) $\frac{\sqrt{6}\pi}{108}$ или $\frac{\sqrt{6}\pi}{500}$.

268. 1) $\frac{4\sqrt{6}\pi}{729}$ или $\frac{8\sqrt{6}\pi}{729}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{6}}{96}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{6}}{375}$ или $\frac{4\sqrt{6}\pi}{375}$.

269. 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{128}$ или $\frac{3\sqrt{3}\pi}{128}$; 2) $\frac{\sqrt{3}\pi}{54}$ или $\frac{\sqrt{3}\pi}{27}$; 3) $\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$; 4) $\frac{4\sqrt{3}\pi}{125}$ или $\frac{6\sqrt{3}\pi}{125}$.

270. $\frac{\pi\sqrt{3}}{27}a^3$. *Указанiе.* Плоскость основанiя конуса даетъ въ сѣченiи съ призмой равнобедренный треугольникъ и отсѣкаетъ отъ нея 3-угольную пирамиду съ прямыми плоскими углами при вершинѣ. По условiю задачи, центръ круга, вписаннаго въ основанiе пирамиды, совпадаетъ съ проэкцiей ея вершины на плоскость основанiя; но этой проэкцiей служитъ ортоцентръ основанiя (доказать это); слѣдовательно, въ полученномъ равнобедренномъ треугольникѣ ортоцентръ и центръ вписаннаго круга совпадаютъ, а потому этотъ треугольникъ равносторонній.

271. $r=\sqrt{\frac{10-\sqrt{48}}{12}}$. *Рѣшенiе.* Введемъ слѣдующiя обозначенiя: O—центръ нижняго основанiя усѣченной пирамиды, O_1 и C_2 — точки пересѣченiя плоскости основанiя конуса соотвѣтственно съ A_1C и CC_1 (или продолженiемъ CC_1), g — проэкцiя C_2 на AC; OC_2 обозначимъ черезъ h, og — черезъ y, gc — черезъ x (замѣтимъ еще, что $OC_2 \perp A_1C$ и что $OO_1=r$); тогда $x+y=\sqrt{2}$ (1); $x^2+y^2=h^2$ (2); $\frac{h}{y}=\frac{\sqrt{2}}{r}$ (3). Исключая изъ (1), (2) и (3) неизвѣстныя x и y, получимъ:

$$h^2r^2-2hr-h^2+2=0 \text{ (I)}.$$

Съ другой стороны изъ треугольника DC_2B найдемъ $h=\frac{4r}{2-r^2}$ . . . (II) *. Подставляя значенiя h изъ (II) въ (I), получимъ

$$\frac{13r^4-20r^2+4}{(2-r^2)^2}=0;$$

задачѣ удовлетворяетъ только одинъ корень этого ур-iя, именно $r=\sqrt{\frac{10-\sqrt{48}}{13}}$.

---

* Пусть основанiе равнобедр. тр-ка $=2a$, его высота $=h$, рад. впис. круга $=r$; тогда $\frac{h-r}{r}=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{a}$; $\frac{h^2-2hr+r^2}{r^2}=\frac{a^2+h^2}{a^2}$; $\frac{h^2-2hr}{r^2}=\frac{h^2}{a^2}$; отк. $h=\frac{2a^2r}{a^2-r^2}$.

272. $\frac{1}{20}\left(\sqrt{60}-\sqrt{30}\right)$. Рѣшается аналогично предыдущей.

273—283. *Если два конуса имѣютъ общую образующую, то плоскость, проходящая черезъ ихъ оси, пройдетъ и черезъ эту образующую.*

273. $3:2$. *Указанiе*. Представимъ себѣ шесть конусовъ, общей вершиной которыхъ служитъ центръ куба, а основанiями — круги, вписанные въ его грани; тогда каждый изъ шести конусовъ будетъ имѣть съ четырьмя изъ остальныхъ пяти по одной общей образующей.

274 — 275. Рѣшаются аналогично зад. 273-ей.

274. $1:1$.

275. $2:1$.

276. $1:1$.

277. $3:\sqrt{2}$.

278. $8:1$.

279. $\frac{a\sqrt{6}}{18}$.

280. $\frac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)$.

281. $\frac{a\sqrt{3}}{10}$.

282. 1) $\frac{r^3\sqrt{6}}{4}$; полученная пирамида — правильный тетраэдръ. 2) $\frac{r}{3}\left(3\pm\sqrt{6}\right)$.

283. $45\sqrt{5}:64$. *Указанiе*. Проэктируя центры основанiй конусовъ на плоскость, получимъ шесть точекъ, служащихъ вершинами угловъ правильнаго 6-угольника. Разсѣкая два сосѣднихъ конуса плоскостью, проходящей черезъ ихъ высоты SM и SN, получимъ въ сѣченiи два равныхъ равнобедренныхъ треугольника ASB и BSC, имѣющихъ общую сторону SB. Пусть MN пересѣкаетъ SB въ точкѣ K. Тогда сторона 6-угольника $= MN$, а радiусъ описаннаго около него круга $= SK$; сл. $SK = MN = 2MK$, отк. $\frac{SK}{MK}=\frac{SM}{MB}=\frac{h}{r}=2$.

284—295. *См. указ. къ зад. 177—181.*

284. 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{9}{20}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $\frac{8}{21}$; 6) $\frac{2}{15}$.

285. 1) $\frac{4}{15}$; 2) $\frac{24}{55}$; 3) $\frac{8}{63}$; 4) $\frac{3}{8}$; 5) $\frac{6}{35}$.

286. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{7}{24}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{5}{12}$; 5) $\frac{2}{3}$.

287. 1) $\frac{4}{5}$; 2) $\frac{49}{76}$; 3) $\frac{18}{35}$; 4) $\frac{10}{33}$; 5) $\frac{22}{161}$.

288. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{5}{33}$; 3) $\frac{49}{152}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{2}{8}$; 6) $\frac{1}{28}$.

289. 1) $\frac{22}{161}$; 2) $\frac{10}{33}$; 3) $\frac{18}{35}$; 4) $\frac{49}{76}$. Ср. зад. 287-ую.

290. 1) $\frac{32}{375}$; 2) $\frac{1}{48}$; 3) $\frac{13}{384}$.

291. 1) $\frac{125}{12288}$; 2) $\frac{243}{4096}$; 3) $\frac{1}{24}$; 4) $\frac{9}{512}$; 5) $\frac{7}{192}$.

292. 1) $\frac{1024}{27783}$; 2) $\frac{125}{2592}$; 3) $\frac{9}{500}$; 4) $\frac{19}{54}$.

293. 1) $\frac{2}{27}$; 2) $\frac{125}{6912}$; 3) $\frac{27}{4000}$; 4) $\frac{7}{864}$.

294. $\frac{64}{3375}$.

295. $\frac{256}{3375}$.

296. $\sin x = \dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{180^0}{n}}$.

297. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{6}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{5}{6}$.

298. $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{5}{6}$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{3}{2}$.

299. $\alpha = 45^0$. *Указаніе.* Провести прямую, соединяющую средины AB и CD (эта прямая перпендикулярна къ AB и CD), и черезъ CD плоскость, перпендикулярную къ оси конической поверхности.

300. $\frac{a\sqrt{34}}{8}$. См. указ. къ пред. зад.

301. 1) $\alpha = 30^0$; 2) $\sin\alpha = \frac{5}{8}$.

302. 1) $\frac{h}{5}$ или h; 2) r или $5r$.

303. 1) 2 или $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{12}{5}$ или $\frac{4}{5}$.

304. $\frac{3}{2}r$.

305. $\sin\alpha = \frac{m-n}{m+n}$ $(m > n)$; изслѣд. получ. форм.

306. $tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{n-1}{\sqrt{2n}}$ гдѣ $n = \frac{r_1}{r_2} > 1$; изслѣд. получ. форм.

307. 16 : 9.

308. 1) $\frac{7\sqrt{2}}{12}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{16}{99}$, $\frac{14\sqrt{2}}{33}$, $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.

309. $\frac{3}{46}$.

310. $\frac{1}{4}$.

311. $\frac{91}{3072}$.

312. 1) $\frac{343}{1728}$; 2) $\frac{605}{11664}$. См. ук. къ зад. 126-ой.

313. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$; 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12}$; 2) $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$.

314. $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{6}$; 1) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{11}{24}$; 2) $\frac{7}{12}$, $\frac{14}{27}$, $\frac{1}{27}$.

315. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$, $\frac{3}{14}\sqrt{3}$; 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{15}{28}\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{14}$, $\frac{10}{49}$, $\frac{26}{49}\sqrt{3}$.

316. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$; 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{4\sqrt{3}}{5}$, $\frac{13}{20}$; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$, $\frac{18\sqrt{3}}{25}$, $\frac{14}{25}$.

317. $\frac{\sqrt{6}}{30}$, $\frac{\sqrt{6}}{48}$; 1) $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{9\sqrt{6}}{80}$, 2) $\frac{7}{15}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{7\sqrt{6}}{60}$.

318. $r_1 = \frac{3}{16}$, $r_2 = \frac{4}{43}$.

319. Радіусы шаровъ, вписанныхъ въ трегранные углы при нижнемъ основаніи призмы, суть $r_1 = \frac{12}{29}$ и $r_2 = \frac{6}{7}$; —въ трегранные углы при верхнемъ основаніи: $r_3 = \frac{12}{25}$ и $r_4 = \frac{3}{5}$.

320. 1) $r_1 = \frac{1}{2}$, $l_1 = 0$, $r_2 = \frac{7}{38}$, $l_2 = 7 : 12$.

2) $r_1 = \frac{1}{2}$, $l_1 = 0$, $r_2 = \frac{5}{18}$, $l_2 = 1 : 2$.

Указаніе. 1) Пусть O_1—проэкція на плоскость нижняго основанія куба центра шара, вписаннаго въ трегранный уголъ B или D при этомъ основаніи, O_2—проэкція на ту же плоскость центра шара, вписаннаго въ трегранный уголъ A_1 при верхнемъ основаніи, S—центръ нижняго основанія куба. Опредѣлимъ сначала SO_1 и SO_2 въ зависимости отъ r; $SO_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}(2r+1)$ ...(1), $SO_2 = r\sqrt{2}$ (2). Далѣе, пользуясь равенствами (1) и (2), легко выразимъ черезъ r стороны прямоугольнаго треугольника O_1SO; примѣняя къ этому треугольнику теорему Пиѳагора, опредѣлимъ r.

2) Рѣшается аналогично первому случаю.

MATHESIS

ЧИСТАЯ и ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АДЛЕРЪ, А. **Теорія геометрическихъ построеній.** Переводъ съ нѣмецкаго подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* XXIV+325 стр. 8°. Съ 177 рис. **1910.** Ц. 2 р. 25 к.

Предлагаемая вниманію читателей книга А. Адлера представляетъ крупнѣйшій интересъ во многихъ отношеніяхъ... *Педагогическій Сборникъ.*

АППЕЛЬ, П. проф. и ДОТЕВИЛЛЬ, С. проф. **Курсъ теоретической механики.** Введеніе въ изученіе физики и прикладной механики. Пер. съ фр. І. Левинтова подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.*

Вып. I (механика точки и геометрія массъ). XV+385 стр. 8°. Съ 136 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Вып. II (механика системы). XV+359 стр. 8°. Съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Книга по содержащемуся въ ней матеріалу соотвѣтствуетъ университетскому курсу теоретической механики и представляетъ собой сокращенную переработку обширнаго трехтомнаго трактата *П. Аппеля* по теоретической механикѣ.

АРХИМЕДЪ, ГЮЙГЕНСЪ, ЛЕЖАНДРЪ, ЛАМБЕРТЪ. **О квадратурѣ круга.** Съ приложеніемъ исторіи вопроса, составл. проф. Ф. РУДІО. (*Библ. класс.*). Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. Бернштейна.* VIII+155 стр. 8° Съ 21 черт. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

... является едва ли не единственной, столь полно разсматривающей задачу о квадратурѣ круга. *Природа и Люди.*

БОЛЬЦАНО, Б. **Парадоксы безконечнаго.** (*Библ клас.*). Перев. съ нѣм. подъ ред. проф. *И. В. Слешинскаго.* VIII+120 стр. 8°. Съ 12 черт. 1911. Ц. 80 к.

... представляетъ собой одну изъ первыхъ попытокъ строго математическаго обоснованія понятія о безконечности и его разновидностяхъ. *Педагогическій Сборникъ.*

БОРЕЛЬ, Э. проф. **Элементарная математика.** Въ обработкѣ проф. *В. Штеккеля.* Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополненіями прив.-доц. *В. Ф. Кагана.*

Ч. I. Ариѳметика и Алгебра. LXIV+434 стр. 8°. 1911. Ц. 3 р.

Ч. II. Геометрія. VIII+332 стр. 8°. Съ 403 черт. 1912. Ц. 2 р.

Переводъ сочиненія Бореля является весьма цѣннымъ вкладомъ въ нашу элементарную математическую литературу. *Педагогическій Сборникъ.*

WEBER H., проф. и WELLSTEIN J., проф. **Энциклопедія элементарной математики.** Руководство для преподающихъ и изучающихъ элементарную математику. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *В. Кагана.*

Томъ I. Элементарная алгебра и анализъ,* обраб. проф. *Веберомъ* XXIV+666 стр. больш. 8°. Съ 38 черт. *2-е изд.* 1911 г. Ц. 4 р.

Вы все время видите передъ собой мастера своего дѣла, который съ любовью показываетъ великія творенія человѣческой мысли, извѣстныя ему до тончайшихъ подробностей. *Педагогическій Сборникъ.*

Томъ II. Элементарная геометрія, составленная *Веберомъ, Вельштейномъ и Якобсталемъ.*

Книга I. **Основанія геометріи.*** Состав. *І. Вельштейнъ.* XII+360, стр. больш. 8°. Съ 142 черт. и 5 рис. *Изд. 2-е.* 1913. Ц. 3 р.

Особый интересъ представляетъ въ книгѣ г. Вельштейна своеобразное изложеніе не-эвклидовой геометріи, а также изложеніе проективной геометріи. *Жур. Мин. Н. Пр.*

---

*) *Изданія, отмѣченныя звѣздочкой, признаны Учен. Ком. Мин. Нар. Просв. подлежащими внесенію въ списокъ книгъ, заслуживающихъ вниманія при пополненіи ученическихъ библіотекъ средн. учебн. заведеній.*

Книга II и III. Тригонометрія, аналитическая геометрія и стереометрія. Составили *Г. Веберъ и В. Якобсталь.* VIII+321 стр. больш. 8⁰. Съ 109 черт. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

ГЕЙБЕРГЪ, I. проф. **Новое сочиненіе** Архимеда*. Посланіе Архимеда къ Эратосѳену о нѣкоторыхъ вопросахъ механики. *(Библ. класс.).* Перев. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *И. Ю Тимченко.* XV+27 стр. 8⁰. Съ 15 рис. 1909. Ц. 40 к.

Математикамъ... будетъ весьма интересно познакомиться съ новой драгоцѣнной научной находкой... *Образованіе.*

ДЕДЕКИНДЪ, Р. проф. **Непрерывность и ирраціональныя числа.*** *(Библ. класс.).* Пер. съ нѣм. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго,* съ присоед. его статьи: „Доказательство существованія трансцендентныхъ чиселъ“. *2-е изд.* 40 стр. 8⁰. 1909. Ц. 40 к.

Небольшой по объему, но, такъ сказать, законодательный по содержанію трудъ... *Русская Школа.*

ДЗІОБЕКЪ, О. проф. **Курсъ аналитической геометріи.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ примѣч. проф. СПБ. высш. женск. курсовъ *Вѣры Шиффъ.*

Часть I. Аналитическая геометрія на плоскости. VIII+390 стр. 8⁰. Съ 87 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Часть II. Аналитическая **геометрія въ пространствѣ.** VIII+356 стр. 8⁰. 36 черт. 1912. Ц. 2 р. 50 к.

Много задачъ, много упражненій, бездна матеріала и—научность изложенія. *Технич. и Коммерч. Образованіе.*

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Задача обоснованія геометріи въ современной постановкѣ.** Рѣчь, произнесенная при защитѣ диссертаціи на степень магистра чистой математики. 35 стр. 8⁰. Съ 11 черт. 1908. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **О преобразованіи многогранниковъ.** Докладъ, прочитанный въ Общемъ Собраніи Перваго Всероссійскаго Съѣзда преподавателей математики. 27 стр. 8⁰. Съ 10 фиг. 1913. Ц. 35 к.

КАГАНЪ, В. прив.-доц. **Что такое алгебра?*** 72 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

Книжка написана яснымъ простымъ языкомъ и, несомнѣнно, вызоветъ къ себѣ интересъ. *Русская Мысль.*

КЛЕЙНЪ, Ф. проф. **Вопросы элементарной и высшей математики.** Лекціи, читанныя для учителей. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. прив.-доц. *В. Ф. Кагана.* VIII+480 стр. 8⁰. 1912. Ц. 3 р.

Книги, подобныя труду Клейна, должны быть настольными: онѣ появляются рѣдко. *Технич. и Коммерч. Образованіе.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Введеніе въ исчисленіе безконечно-малыхъ.*** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив. доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+140 стр. 8⁰. Съ 18 черт. 1909. Ц. 1 р.

Книга проф. Ковалевскаго, несомнѣнно, прекрасное введеніе въ высшій анализъ. *Русская Школа.*

КОВАЛЕВСКІЙ, Г. проф. **Основы дифференціальнаго и интегральнаго исчисленій.** Пер. съ нѣм. подъ ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+496 стр. 8⁰. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Курсъ профессора боннскаго университета, несомнѣнно, является однимъ изъ лучшихъ по ясности и чрезвычайной строгости обоснованія одного изъ могущественныхъ методовъ современнаго анализа. *Современный Міръ.*

КУТЮРА, Л. **Алгебра логики.** Пер. съ фр. съ прибавленіями проф. *И. Слешинскаго.* IV+107+XIII стр. 8⁰. 1909. Ц. 90 к.

КЭДЖОРИ, Ф. проф. **Исторія элементарной математики** (съ указаніями на методы преподаванія)*. Пер. съ англ. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *И. Ю. Тимченко.* VIII+368 стр. 8⁰. Съ рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Книга читается съ большимъ интересомъ и весьма полезна.. Мы настоятельно рекомендуемъ „Исторію элем. мат.“ Кэджори. *Вѣстникъ Воспитанія.*

ЛИТЦМАННЪ, В. **Теорема Пиѳагора** съ приложеніемъ нѣкоторыхъ свѣдѣній о теоремѣ Ферма. *(Библ. элем. мат. I).* Пер. съ нѣм. подъ общей ред. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* IV+80 стр. 16⁰. Съ 44 рис. 1912. Ц. 40 к.

МАРКОВЪ, А. акад. **Исчисленіе конечныхъ разностей.** Въ 2 частяхъ. Изданіе 2-е, исправленное и дополненное. VIII+274 стр. 8⁰. 1911. Ц. 2 р. 25 к.

НЕТТО, Е. проф. **Начала теоріи опредѣлителей.** Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ прим. прив.-доц. *С. О. Шатуновскаго.* VIII+156 стр. 8⁰. 1912. Ц. 1 р. 20 к.

ПУАНКАРЕ, Г. проф. **Наука и методъ.** Пер. съ франц. *И. Брусиловскаго* подъ ред. прив.-доц. *В. Кагана.* VIII+384 стр. 16⁰. 1910. Ц. 1 р. 50 к.

... книгу Пуанкаре можно рекомендовать особому вниманію преподавателей математики и естествознанія. *Вѣстникъ Воспитанія.*

РОУ, С. **Геометрическія упражненія съ кускомъ бумаги.** Пер. съ англ. XVI+173 стр. 16⁰. Съ 87 рис. 1910. Ц. 90 к.

Производитъ впечатлѣніе гармоничнаго цѣлаго и читается съ большимъ интересомъ. *Русская Школа.*

Русская математическая библіографія. Списокъ сочиненій по чистой и прикладн. математикѣ, напечатанныхъ въ Россіи. Подъ ред. проф. *Д. М. Синцова.*
Вып. I. За 1908 годъ. 76 стр. 8⁰. Ц. 60 коп.
Вып. II. За 1909 годъ. XVI+92 стр. 8⁰. Ц. 75 к.

ФИЛИППОВЪ, А .О. **Четыре ариѳметическія дѣйствія.** Числа натуральныя. VIII+88 стр. 8⁰. 1912. Ц. 70 к.

ФУРРЕ, Е. **Очеркъ исторіи элементарной геометріи.** (*Библ. элем мат II*). Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 52 стр. 16⁰. Съ 5 рис. 1912. Ц. 30 к.

ФУРРЕ, Е. **Геометрическіе головоломки и паралогизмы.** (*Библ. элем. мат.* III). Пер. съ фр. подъ ред. прив.-доц. *С. Шатуновскаго.* 52 стр. 16⁰. Съ 83 рис. 1912. Ц. 30 к.

ЦИММЕРМАНЪ, В. проф. **Объемъ шара, шарового сегмента и шарового слоя.** 34 стр. 16⁰. Съ 6 черт. 1908. Ц. 25 к.

Распространеніе подобнаго рода элементарныхъ монографій среди учащихся весьма желательно. *Русская Школа.*

ЧЕЗАРО, Э. **Элементарный учебникъ алгебраическаго анализа и исчисленія безконечно малыхъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. С.-П. Б. универс. *К. А. Поссе.* Ч. I. XVIII+632 стр. 8⁰. Съ 26 черт. 1913. Ц. 5 р.

ШУБЕРТЪ, Г. проф. **Математическія развлеченія и игры.** Пер. съ нѣм. *I. Левинтова,* подъ ред., съ прим. и доб. „*В. О. Ф. и Эл. Мат.*“ XIV+358 стр. 16⁰. Со мног. табл. 1911. Ц. 1 р. 40 к.

Неутомимая идейная издательская фирма „Матезисъ“... выпустила въ свѣтъ превосходный переводъ превосходной книги... *Русская Школа.*

ФИЗИКА

АВРАГАМЪ, Г. проф. **Сборникъ элементарныхъ опытовъ по физикѣ.** *
Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга.*
Часть I: XVI+272 стр. 8⁰. Свыше 300 рис. *2-е изд.* 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Систематически составленный сводъ наиболѣе удачныхъ, типичныхъ и поучительныхъ опытовъ. *Вѣстникъ и Библіотека Самообразованія*

Часть II: 434+LXXV стр. 8⁰. Свыше 400 рис. *2-е изд.* 1910 г. Ц. 2 р. 75 к.

Мы надѣемся, что разбираемый трудъ станетъ настольной книгой каждой физической лабораторіи въ Россіи. *Русская Мысль.*

АУЭРБАХЪ, Ф. проф. **Царица міра и ея тѣнь.** * Общедост. изложеніе основ. ученія объ **энергіи и энтропіи.** Пер. съ нѣм. VIII+50 стр. 8⁰. *6-е изд.* 1913. Ц. 40 к.

Слѣдуетъ признать брошюру Ауэрбаха чрезвычайно интересной. *Ж. М. Н. Пр.*

БРАУНЪ, Ф. проф. **Мои работы по безпроволочной телеграфіи и по электрооптикѣ.** Рѣчь, произн. по случаю полученія Нобелевской преміи, съ дополн. автора. Пер. съ рукоп. *Л. Мандельштама* и *Н. Папалекси,* со вступительной статьей переводч. XIV+92 стр. 16⁰. Съ 25 рис. и портр. авт. 1911. Ц. 70 к.

Проф. Браунъ излагаетъ свои работы, заключающіяся въ изобрѣтеніи и усовершенствованіи очень важныхъ для телеграфіи приборовъ... *Естествозн. и Географія.*

БРУНИ, К. проф. **Твердые растворы***. Пер. съ итал. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."* 37 стр. 16⁰. 1909. Ц. 25 к.
Изъ брошюры К. Бруни читатель выноситъ много цѣнныхъ свѣдѣній въ сферѣ затронутыхъ вопросовъ. *Физикъ-Любитель*

ВЕТГЭМЪ, В. проф. **Современное развитіе физики***. Пер. съ англ. подъ ред. проф. *Б. П. Вейнберга* и прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго*. Съ Прилож. рѣчи *А. Бальфура*. **Нѣсколько мыслей о новой теоріи вещества.** VIII+277 стр. 8⁰. Съ 5 порт. и 39 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 2 р.
...рисуетъ читателю дѣйствительно захватывающую картину грандіозныхъ завоеваній человѣческаго генія. *Современный Міръ.*

ВЕЙНБЕРГЪ, Б. П. проф. **Снѣгъ, иней, градъ, ледъ и ледники***. IV+127 стр. 8⁰. Съ 137 рис. и 2 фототип. таб. 1909. Ц. 1 р.
„Mathesis" можетъ гордиться этимъ изданіемъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ВИНЕРЪ, О. проф. **О цвѣтной фотографіи и родственныхъ ей естественно-научныхъ вопросахъ***. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *Н. П. Кастерина*. VI+69 стр. 8⁰. Съ 3 цвѣт. табл. 1911. Ц. 60 к.
Все это дѣлаетъ книгу интересной какъ для лицъ, желающихъ только ознакомиться съ явленіями цвѣтной фотографіи, такъ и для лицъ, серьезно заинтересованныхъ этимъ вопросомъ. *Естествознаніе и География.*

ГЕРНЕТЪ, В. А. **Объ единствѣ вещества.** 46 стр. 16⁰. Ц. 25 к.

ЗЕЕМАНЪ, П. проф. **Происхожденіе цвѣтовъ спектра** Съ прил. статьи *В. Ритца* „Линейные спектры и строеніе атомовъ". Пер. съ нѣм. 50 стр. 16⁰. Ц. 30 к.
... Книжка, принадлежащая перу одного изъ извѣстныхъ ученыхъ нашей эпохи... *Русская Мысль.*

КАЙЗЕРЪ Г. проф. **Развитіе современной спектроскопіи***. Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Ф. и Эл. М."* 45 стр. 16⁰. 1910. Ц. 25 к.
Одинъ изъ лучшихъ обзоровъ... Онъ содержитъ, въ сжатомъ видѣ, исторію открытія спектральнаго анализа и дальнѣйшаго ея развитія до нашихъ дней. *Журн. Мин. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. заслуж. проф. **Основы метеорологіи.*** XVI+527 стр. больш. 8⁰. Съ 199 рис., 2 цвѣтн. и 3 черн. табл. 1910. Ц. 4 р.
Честь и слава „Mathesis" за изданіе этой прекрасной книги, которою можетъ гордиться русская наука. *Ж. М. Н. Пр.*

КЛОССОВСКІЙ, А. заслуж. проф. **Современное состояніе вопроса о предсказаніи погоды.** 52 стр. 8⁰. Съ 4 черт. 1913. Ц. 40 к.

КЛОССОВСКІЙ А. заслуж. проф. **Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній.*** 46 стр. 8⁰. 2-е изданіе, испр. и дополн. 1908. Ц. 40 к.
Рѣдко можно встрѣтить изложеніе, въ которомъ въ такой степени соединялась бы высокая научная эрудиція съ картинностью и увлекательностью рѣчи. *Педагогическій Сборникъ.*

КОНЪ, Э. проф. и **ПУАНКАРЕ**, Г., акад. **Пространство и время съ точки зрѣнія физики.** Пер. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат."*. 81 стр. 16⁰. Съ 11 рис. 1912. Ц. 40 к.
Авторы сдѣлали все возможное, чтобы разъяснить не спеціалисту сущность принципа относительности и новой механики. *Природа.*

ЛАКУРЪ П. и **АППЕЛЬ** Я. **Историческая физика.*** Пер. съ нѣм. подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физики и Эл. Мат."*. Въ 2-хъ томахъ больш. формата 892 стр. Съ 799 рис. и 6 отд. цвѣтн. табл. 1908. Ц. 7 р. 50 к.
Нельзя не привѣтствовать этого интереснаго изданія... Книга читается легко; содержитъ весьма удачно подобранный матеріалъ и обильно снабжена хорошо выполненными рисунками. Переводъ никакихъ замѣчаній не вызываетъ. *Ж. М. Н. Пр.*

ЛИНДЕМАНЪ, Ф. проф. **Спектръ и форма атомовъ.** Рѣчь ректора Мюнхенскаго университета 23 стр. 16⁰. *2-е изд.* Ц. 15 к.

ЛОДЖЪ О., проф. **Міровой эѳиръ.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Д. Хмырова*. IV+216 стр. 16⁰. Съ 12 рис. 1911. Ц. 80 к.
Въ этой, чрезвычайно интересной книжкѣ, проводится мысль, что „міровой эѳиръ есть непрерывное, несжимаемое, недвижимое основное вещество или совершенная жидкость..." *Природа.*

ЛОРЕНЦЪ, Г. проф. **Курсъ физики.*** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. ***Н. П. Кастерина.*** Съ добавленіями автора къ русскому изданію.
Т. I. VIII+356 стр. бол. 8⁰. Съ 236 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 2 р. 75 к.
Т. II. VIII+466 стр. больш. 8⁰. Съ 257 рис. 1910. Ц. 3 р. 75 к.

Съ появленіемъ этого перевода русская литература обогатилась превосходнымъ курсомъ физики. *Ж. М. Н. Пр.*

МАЙКЕЛЬСОНЪ, А. проф. **Свѣтовыя волны и ихъ примѣненія.** Перевела съ англ. *В. О. Хвольсонъ* подъ ред. заслуж. проф. *О. Д. Хвольсона* съ дополн. статьями и примѣч. редактора. VIII+192 стр. Съ 108 рис. и 3 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

Завлекательна простота и конкретность мысли и живость изложенія. *Журн. Р. Ф.-Х. О-ва.*

МИ, Г. проф. **Курсъ электричества и магнитизма.** Пер. съ нѣм. подъ ред. засл. проф. *О. Д. Хвольсона.* Въ 2-хъ частяхъ. Около 50 печ. листовъ. Со многими рис. Выходитъ въ свѣтъ выпусками. Цѣна по подпискѣ 5 р.

МОРЕНЪ, Ш. **Физическія состоянія вещества.** Пер. съ франц. подъ ред. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* VIII+224 стр. 8⁰. Съ 21 рис. 1912. Ц. 1 р. 40 к.

ПЕРРИ, Дж. проф. **Вращающійся волчокъ***. Публ. лекція. Съ добавл. статьи проф. *Б. Доната*: „Волчекъ и его будущее въ техникѣ“. Пер. съ англ. и нѣм. VIII+116 стр. 8⁰. Съ 73 рис. *3-е изданіе.* 1912. Ц. 60 к.

Книжка, воочію показывающая, какъ люди истиннаго знанія, не цеховой только науки, умѣютъ распоряжаться научнымъ матеріаломъ при его популяризаціи. *Русская Школа.*

ПЛАНКЪ, М. проф. **Отношеніе новѣйшей физики къ механистическому міровоззрѣнію.** Пер. съ нѣм. *I Левинтова,* подъ ред. ***„Вѣст. Оп. Ф. и Эл. М.“*** 42 стр. 16⁰. 1911. Ц. 25 к.

... Планкъ разъясняетъ теорію относительности, указываетъ, что ея методы удобны и универсальны... *Естествознаніе и Географія*

ПОЙНТИНГЪ, Дж. проф. **Давленіе свѣта.** Пер. съ англ. подъ ред. ***„Вѣстн. Оп. Физ. и Эл. Мат“.*** 128+II стр. 16⁰. Съ 42 рис. 1912. Ц. 50 к.

Наглядность изложенія теоретической стороны вопроса, иллюстрація его чертежами, аналогіями и сравненіями изъ повседневной жизни не оставляетъ желать большаго. *Природа.*

РАМЗАЙ, В. проф. **Благородные и радіоактивные газы.** Пер. подъ ред. ***„Вѣстн. О. Ф. и Э. М.“.*** 37 стр. 16⁰. Съ 16 рис. 1909. Ц. 25 к.

РИГИ, А. проф. **Современная теорія физическихъ явленій***. (Іоны, электроны, радіоактивность). Пер. съ 3-го итальян. изданія. VIII+146 стр. 8⁰. Съ 21 рис. 1910. *2-е изд.* Ц. 90 к.

Книгу Риги можно смѣло рекомендовать образованному человѣку, какъ лучшее имѣющееся у насъ изложеніе новѣйшихъ взглядовъ на обширную область физическихъ явленій. *Педагогическій Сборникъ.*

РИГИ, А. проф. **Электрическая природа матеріи.*** Вступительная лекція. Пер. съ итальян. подъ ред. ***„Вѣст. Оп. Ф. и Эл. Мат.“.*** 28 стр. 8⁰. *2-е изд.* 1911. Ц. 30 к.

Эта прекрасная рѣчь обладаетъ всѣми преимуществами многочисленныхъ популярныхъ сочиненій знаменитаго профессора Болоньскаго университета. *Ж. М. Н. Пр.*

СЛАБИ, А. проф. **Безпроволочный телефонъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. ***„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“.*** 28 стр. 8⁰. Съ 23 рис. 1909. Ц. 30 к.

СЛАБИ, А. проф. **Резонансъ и затуханіе электрическихъ волнъ.** Пер. съ нѣм. подъ ред. ***„Вѣст. Оп. Физ. и Эл. Мат.“.*** 41 стр. 8⁰. Съ 36 рис. Ц. 40 к.

Обѣ брошюры принадлежатъ перу большого знатока предмета и выдающагося самостоятельнаго работника въ области практическаго примѣненія электрическихъ волнъ. *Педагогическій Сборникъ.*

СОДДИ, Ф. проф. **Радій и его разгадка.*** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *Д. Хмырова.* XVI+185 стр. 8⁰. Съ 31 рис. 1910. Ц. 1 р. 25 к.

... авторъ въ увлекательномъ изложеніи вводитъ читателя въ необыкновенно заманчивую область... *Педагогическій Сборникъ.*

ТОМСОНЪ Дж. Дж. проф. **Корпускулярная теорія вещества.** Пер. съ англ. *I. Левинтова,* подъ ред. ***„Вѣст. О. Ф. и Э. М.“.*** VIII+162 стр. 8⁰. Съ 29 рис. 1910. Ц. 1 р. 20 к.

Вся книга, а въ особенности части, содержащія личныя изслѣдованія втора, читаются съ неослабѣвающимъ интересомъ. *Физическое Обозрѣніе.*

ТОМПСОНЪ, СИЛЬВАНУСЪ, проф. **Добываніе свѣта** *. Общедоступная лекція для рабочихъ, прочитанная на собраніи Британской Ассоціаціи 1906. Пер. съ англ. VIII+88 стр. 16⁰. Съ 28 рис. 1909. Ц. 50 к.

Въ этой весьма интересно составленной рѣчи собранъ богатый матеріалъ по вопросу добыванія свѣта. *Ж. М. Н. Пр.*

ФУРНЬЕ ДАЛЬБЪ. **Два новыхъ міра.** 1 Инфра міръ. 2. Супра-міръ. Пер. съ англ. VIII+119 стр. 8⁰. Съ 1 рис. и 1 табл. 1911. Ц. 80 к.

.. содержаніемъ своимъ она способна увлечь мыслящаго человѣка. *Прав. Вѣстн.*

УСПѢХИ ФИЗИКИ. Сборникъ статей подъ ред. *„Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики"*.

Выпускъ I. * VIII+148 стр. 8⁰. Съ 41 рис. и 2 табл. *3-е изд.* 1909. Ц. 75 к.

Изящно изданный и недорогой сборникъ прочтется каждымъ интересующимся съ большимъ интересомъ. *Вѣстникъ Знанія.*

Выпускъ II. IV+204 стр. съ 50 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Второй выпускъ сборника обладаетъ тѣми же положительными сторонами, что и первый: т. е. содержательностью, ясностью изложенія и полной научностью статей. *Природа*

ХИМІЯ.

ГРОТЪ, П. проф. **Введеніе въ химическую кристаллографію.** Пер. съ нѣм. I. Левинтова подъ ред. проф. *М. Д. Сидоренко.* VIII+104 стр. 8⁰. Съ 6 черт. 1912. Ц. 80 к.

МАМЛОКЪ, Л. д-ръ. **Стереохимія.** (Ученіе о пространственномъ расположеніи атомовъ въ молекулѣ). Пер. съ нѣмецк. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+164 стр. 8⁰. Съ 58 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Въ книгѣ описывается стереохимія углерода, азота, сѣры, селена, олова и неорганическихъ соединеній. *Естествознаніе и Географія.*

ПЁШЛЬ, В. проф. **Введеніе въ коллоидную химію.** Очеркъ коллоидной химіи для учителей, врачей и студентовъ. Пер. съ нѣмецкаго *А. С. Комаровскаго.* Съ пред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+86 стр. 8⁰ 1912. Ц. 75 к.

РАМЗАЙ, В. проф. **Введеніе въ изученіе физической химіи.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* VIII+76 стр. 16⁰. 1910. Ц. 40 к.

Главный интересъ обзора конечно въ томъ, что онъ сдѣланъ крупнымъ самостоятельнымъ изслѣдователемъ въ этой области. *Педагогическій Сборникъ.*

СМИТЪ, А. проф. **Введеніе въ неорганическую химію.** Пер. съ англ. подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* XVI+840 стр. 8⁰. Съ 107 рис. 1911. Ц. 3 р. 50 к.

Такіе первоклассные ученые, какъ Лёбъ, Оствальдъ и др. признали, что „Введеніе въ неорганическую химію" Смита обогащаетъ учебную литературу и въ ряду многочисленныхъ руководствъ по химіи должно занять особое значительное мѣсто. *Рѣчь.*

Успѣхи химіи. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени въ общедоступномъ изложеніи подъ ред. *„Вѣстн. Оп. Физ. и Элем Мат."*. Вып. I. VIII+240 стр. 8⁰. Съ 83 рис. 1912 г. Ц. 1 р. 50 к.

ЦЕНТНЕРШВЕРЪ, М. Г. **Очерки по исторіи химіи.** Популярно-научныя лекціи. XVI+318 стр. 8⁰. Съ 83 рис. 1912 г. Ц. 2 р. 20 к.

ШТОКЪ, А. проф. и ШТЕЛЕРЪ, прив.-доц. **Практическое руководство по количественному анализу.** Пер. съ нѣм. лабор. Новор. Унив. *А. I. Коншина* подъ ред. проф. *П. Г. Меликова.* Пер. съ нѣм. VIII+172 стр. 8⁰. Съ 37 рис. 1911. Ц. 1 р. 20 к.

Руководство написано ясно и понятно и можетъ быть очень полезно при самостоятельномъ прохожденіи анализа. *Естествознаніе и Географія.*

АСТРОНОМІЯ

АРРЕНІУСЪ, Св. проф. **Образованіе міровъ** *. Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *К. Д. Покровскаго.* VIII+200 стр. 8⁰. Съ 60 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 1 р. 75 к.

Книга чрезвычайно интересна и богата содержаніемъ. *Педагогическій Сборникъ*

БОЛЛЪ, Р. С. проф. **Вѣка и приливы.** Пер. съ англ. подъ ред. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* IV+104 стр. 8⁰. Съ 4 рис. и 1 табл. Ц. 75 к.

... настоящее изданіе „Mathesis" слѣдуетъ привѣтствовать наравнѣ съ прочими, какъ почтенный, заслуживающій распространенія и серьезнаго вниманія, вкладъ въ русскую науку. *Русская Школа.*

ВИХЕРТЪ, Э. проф. **Введеніе въ геодезію** * Пер. съ нѣм. IV+95 стр. 16⁰. Съ 41 рис. *2-е изд.* 1912. Ц. 35 к.

Излагаетъ основы низшей геодезіи, имѣя въ виду пользованіе ею въ школѣ въ качествѣ практическаго пособія... Изложеніе очень сжато, но полно и послѣдовательно. *Вопросы Физики.*

ГРАФФЪ, К. **Комета Галлея** *. Пер. съ нѣм. X+71 стр. 16⁰. Съ 13 рис. и 2 отд. табл. Изд. второе испр. и доп. 1910. Ц. 30 к.

Брошюра Граффа хорошо выполняетъ свое назначеніе. *Педагогическій Сборникъ.*

Галлеева комета въ 1910 году. *Общедоступное изданіе.* Содержаніе: О вселенной—О кометахъ—О кометѣ Галлея. 32 стр. 8⁰. Съ 12 иллюстраціями. 1910. Ц. 12 к.

КЛАРКЪ, А. **Исторія астрономіи XIX столѣтія.** Пер. съ англ. прив.-доц. СПБ. университета *В. В. Серафимова.* VIII+648 стр. 8⁰. Съ рис. 1913. Ц. 4 р.

ЛОВЕЛЛЪ, П. проф. **Марсъ и жизнь на немъ.** Пер. съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XXI+272 стр. 8⁰. Со многими рис. и 1 цвѣтн. табл. 1912. Ц. 2 р.

Книгу эту можно рекомендовать всякому, кто хочетъ знать состояніе науки о Марсѣ въ настоящее время; читается она легко и вполнѣ доступна для средняго, знакомаго съ астрономіей, читателя. *Извѣстія Р. О-ва Любителей Міровѣдѣнія.*

НЬЮКОМЪ, С. проф. **Астрономія для всѣхъ** *. Пер. съ англ. подъ ред. и съ предисл. прив.-доц. *А. Р. Орбинскаго.* XX+288 стр. 8⁰. Съ порт. автора, 64 рис. и 1 табл. *2-е изд.* 1911. Ц. 1 р. 50 к.

Вполнѣ научно, и совершенно доступно, и изящно написанная книга... переведена и издана очень хорошо. *Вѣстникъ Воспитанія.*

БІОЛОГІЯ.

ВЕРИГО, Б. проф. Единство жизненныхъ явленій. (*Основы общей біологіи I.*). VIII+276 стр. 8⁰. Съ 81 рис. 1912. Ц. 2 р.

... книгу нельзя не признать очень интересной и заслуживающей полнаго вниманія. Она написана просто и потому доступна большому кругу читателей. *Русская Школа.*

ВЕРИГО, Б. проф. **Біологія клѣтки, какъ основа ученій о зародышевомъ развитіи и размноженіи.** (*Основы общ. біологіи II*) IV+336 стр. 8⁰. Съ 60 рис. 1913. Ц. 2 р. 50 к.

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Динамика живого вещества.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+352 стр. 8⁰. Съ 64 рис. 1910. Ц. 2 р. 50 к.

Классическая книга Лёба, отъ чтенія которой трудно оторваться, устанавливаетъ вѣхи достигнутаго въ познаніи динамики живого вещества. *Русское Богатство.*

ЛЁБЪ, Ж. проф. **Жизнь.** Пер. съ нѣм. 30 стр. 8⁰. 1912. Ц. 30 к.

Докладъ этотъ прекрасно резюмируетъ взгляды Лёба и его школы на сущность жизненыхъ явленій и потому является въ высшей степени интереснымъ. *Русская Школа.*

УШИНСКІЙ, Н. проф. **Лекціи по бактеріологіи** VIII+135 стр. 8⁰. Съ 34 черн. и цвѣтн. рис. на отдѣльн. табл. 1908. Ц. 1 р. 50 к.

Успѣхи біологіи. Сборникъ статей о важнѣйшихъ изслѣдованіяхъ послѣдняго времени. Вып. I. Подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* IV+244 стр. 8⁰, Съ 24 рис. Ц. 1 р. 50 к.

VARIA.

ГАМПСОНЪ-ШЕФЕРЪ. **Парадоксы природы.** *. Книга для юношества объясняющая явленія, которыя находятся въ противорѣчіи съ повседневнымъ опытомъ. Пер. съ нѣм. VIII+193 стр. 8⁰. Съ 67 рис. Ц. 1 р. 20 к.

Матеріалъ подобранъ интересный. *Жур. Мин. Н. Пр.*

ГАССЕРТЪ, К. проф. **Изслѣдованіе полярныхъ странъ.*** Исторія путешествій къ сѣверному и южному полюсамъ съ древнѣйшихъ временъ до настоящаго времени. Пер. съ нѣм. подъ ред. и съ дополн. проф. *Г. И. Танфильева.* XII+216 стр. 8⁰. Съ двумя цвѣтн. картами. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

...видно, какъ широко охваченъ въ книгѣ предметъ и какъ много даетъ она для интересующихся полярными изслѣдованіями. *Естествознаніе и Географія.*

ДАННЕМАННЪ, Ф. **Исторія естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. засл. проф. СПБ. унив. *И. И. Боргмана.* IV+486 стр. 8⁰. Съ 87 рис. и портр. Галилея. 1913. Ц. 3 р.

НИМФЮРЪ, Р. **Воздухоплаваніе.** * Научныя основы и техническое развитіе. Пер. съ нѣм. VIII+161 стр. 8⁰. Съ 52 рис. 1910. Ц. 90 к.

Въ книгѣ собранъ весьма обширный описательный матеріалъ. *Ж. М. Н. Пр.*

СНАЙДЕРЪ, К. проф. **Картина міра въ свѣтѣ современнаго естествознанія.** Пер. съ нѣм. подъ ред. проф. *В. В. Завьялова.* VIII+193 стр. 8⁰. Съ 16 отд. порт. 1909. Ц. 1 р. 50 к.

Книга касается интереснѣйшихъ вопросовъ о природѣ. *Педагогическій Сборникъ.*

ТРЁЛЬС-ЛУНДЪ, проф. **Небо и міровоззрѣніе въ круговоротѣ временъ.** Пер. съ нѣм. IV+233 стр. 8⁰. 1912. Ц. 1 р. 50 к.

... астрологія и астрономія, богословскія и этическія системы и спекуляціи разсмотрѣны (въ сжатомъ, но увлекательномъ изложеніи) на протяженіи трехъ съ половиною тысячелѣтій... *Русская Мысль.*

ТРОМГОЛЬТЪ, С. **Игры со спичками.** Задачи и развлеченія. Пер. съ нѣм. 146 стр. 16⁰. Свыше 250 рис. и черт. *2-е изд.* 1912. Ц. 50 к.

ШМИДЪ, Б. проф. **Философская хрестоматія.** Пер. съ нѣм. *Ю. А. Говсѣева,* под. ред. и съ пред. проф. *Н. Н. Ланге.* VIII+172 стр. 8⁰. 1907. Ц. 1 р.

... Для человѣка, занятаго самообразованіемъ и немного знакомаго съ философіей и наукой, она (книга) даетъ разнообразный и интересный матеріалъ. *Вопросы философіи и психологіи.*

ЩУКАРЕВЪ, А. проф. **Проблемы теоріи познанія** въ ихъ приложеніяхъ къ вопросамъ естествознанія и въ разработкѣ его методами. IV+137 стр. 8⁰ Ц. 1 р.

Имѣется на складѣ:

БИЛЬТЦЪ, Г. и В. **Упражненія по неорганической химіи.** Пер. съ нѣм. *А. С. Комаровскаго,* съ предисл. проф. *Л. В. Писаржевскаго.* XVI+272 стр. 8⁰. Съ 24 рис. Ц. 1 р. 60 к.

СЪ ТРЕБОВАНІЯМИ ОБРАЩАТЬСЯ

ВЪ ГЛАВНЫЙ СКЛАДЪ ИЗДАНІЙ „МАТЕЗИСЪ".

Одесса, Стурдзовскій пер., д. № 3 а.

ПОДРОБНЫЙ КАТАЛОГЪ ИЗДАНІЙ ПО ТРЕБОВАНІЮ.

Выписывающіе изъ главнаго склада „МАТЕЗИСЪ" на сумму 5 р. и болѣе за пересылку не платятъ.

Отдѣленія главнаго склада изданій „МАТЕЗИСЪ".

Въ **Москвѣ**—Книжный магазинъ ***„Образованіе"*** (Кузнецкій мостъ, 11); въ **Кіевѣ**—Книжный магазинъ ***В. А. Просяниченко*** (Фундуклеевская). Складъ изданій „МАТЕЗИСЪ" въ С.-Петербургѣ — Книжный магазинъ *Г. С. Цукермана* (Александровская площадь, 5).