Б31
Б 90

Г. О. БУГАЄНКО

Курс теоретичної механіки

Г. О. БУГАЄНКО

КУРС ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Допущено Міністерством освіти УРСР як підручник для фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів УРСР

Державне учбово-педагогічне видавництво «Радянська школа»
Київ — 1959

Зміст цього курсу теоретичної механіки відповідає першій частині курсу теоретичної фізики в обсязі програми педагогічних інститутів.

Через увесь курс автор провів ідею про незнищуваність руху в природі, що дало можливість глибше розкрити фізичний зміст основних понять, законів, принципів і теорем механіки. З цього погляду виявлено, зокрема, і причину того, що якраз закони Ньютона правильно з'ясовують механічний рух.

Велику увагу приділено методологічним питанням механіки, чим цей курс і відрізняється від багатьох інших.

В світі нема нічого, крім рухомої матерії, і рухома матерія не може рухатись інакше, як в просторі і в часі.

В. І. ЛЕНІН

ПЕРЕДМОВА

Курс теоретичної механіки для педагогічного інституту повинен відрізнятись від курсу механіки технічного вузу не тільки змістом і обсягом окремих його частин — кінематики, статики, динаміки, але й характером побудови. Особливо це стосується методів побудови динаміки й статики.

Найважливішою частиною курсу механіки для майбутнього учителя є динаміка. Кінематика відіграє допоміжну роль, а статику можна розглядати як окремий випадок динаміки.

Цей останній погляд на статику методологічно більш обгрунтований, бо спокій є окремим випадком руху. Ми не відкидаємо, звичайно, ролі незалежної побудови статики для студента технічного вузу. У технічному вузі статику треба будувати цілком самостійно, бо вона знаходить численні застосування в практичній діяльності інженера і використовується як теоретична основа в багатьох науках інженерного циклу.

Учитель фізики повинен знати значно глибше, порівняно з інженером, фізичний зміст усіх тих понять і величин, які вивчаються в механіці. Науково правильне діалектико-матеріалістичне розуміння основних понять і законів механіки для педагога абсолютно необхідне.

У цій книжці зроблено спробу хоча б і не в повній мірі розкрити фізичний зміст основних понять і законів механіки. Трактування основних понять і законів механіки в цьому курсі логічно випливає з фізичної теорії міри руху, яка дає змогу викрити з усією глибиною причину того, що саме закони Ньютона правильно з'ясовують механічний рух. Разом з тим теорія міри руху приводить до висновку, що фізичний зміст другого закону Ньютона перший правильно зрозумів і розкрив Ф. Енгельс — факт, який залишався непоміченим, бо ще до останнього часу точились суперечки про пізнавальну суть другого закону Ньютона.

Структура цього курсу механіки така. У вступі подано основні положення про матерію й рух, простір і час. Там же знаходимо означення деяких основних понять механіки.

Першою частиною курсу є кінематика, побудована на основі векторного числення, елементи якого повинні бути відомі кожному, хто приступає до вивчення механіки.

Другою частиною курсу є динаміка матеріальної точки. Перший розділ цієї частини відповідає методу Ньютона побудови динаміки. Другий розділ ознайомлює студента з сучасним методом побудови основ динаміки. У цьому розділі читач знайде розгляд багатьох методологічних питань.

Третьою частиною курсу є динаміка матеріальної системи й статика. Останню подано як окремий випадок динаміки. При цьому, як виявляється, теорія значно спрощується. Наприклад, до розгляду теорем про пари сил, теорії зведення просторової системи сил до даного центра й ін. застосований один і той самий метод; кількість теорем, які треба доводити, значно зменшується, а метод доведення скрізь один і той самий і зовсім простий.

У заключній частині курсу звернуто увагу на роль і значення теоретичної механіки для теоретичної фізики.

Автор висловлює щиру подяку Г. Г. Велигоцькому за цінні поради і велику допомогу при написанні книжки.

Рукопис уважно прорецензували доц. М. М. Сідляр і доц. В. П. Шестопалов. Цінні критичні зауваження рецензентів були враховані під час дороблювання рукопису і сприяли значному поліпшенню книжки. Відповідальний редактор доц. М. І. Бовда зробив багато цінних методичних вказівок. Усім їм, а також доц. В. М. Коновалову і Г. Г. Кордуну, які прочитали рукопис до його переробки і зробили ряд зауважень, висловлюю щиру подяку.

Критичні зауваження і побажання, спрямовані на поліпшення книжки, прошу надсилати на адресу: м. Київ, Ново-Павлівська, 5, видавництво «Радянська школа». Усі ці зауваження я прийму з щирою подякою.

Автор.

ВСТУП

§ 1. МАТЕРІЯ І РУХ

1. *Світ за своєю природою матеріальний і розвивається за законами руху матерії.* Матерія постійно розвивається, змінюється, або, як кажуть, перебуває в русі, і в цьому нескінченному процесі руху матерії й виникає вся різноманітність її конкретних форм.

Матерія є єдине джерело і першопричина всіх процесів у природі, бо все складається з матерії і породжене нею.

В. І. Ленін дав вичерпне формулювання, що таке матерія: «об'єктивна реальність, що існує незалежно від людської свідомості і нею відображається» *.

Тут підкреслена первинність і об'єктивна реальність матерії; це ленінське формулювання охоплює всі відомі й невідомі ще форми існування матерії.

Згідно з сучасними фізичними уявленнями, матерія існує в природі в двох якісно своєрідних формах: як речовина і як поле. Між речовиною і полем є нерозривний зв'язок. Цей зв'язок настільки глибокий, що речовина, як виявляється, може перетворюватись у поле, і навпаки. Зіткнення електрона з позитроном при певних умовах приводить до їх спільного перетворення у фотон, тобто в елементарну порцію електромагнітного поля. Навпаки, фотон при певних умовах може перетворюватись в електрон і позитрон. Відкриття антипротонів, антинейтронів та інших частинок і вивчення їх властивостей довели, що не менш глибоких перетворень зазнають і всі важкі частинки.

Природа існує в неперервному круговороті перетворень матерії. Але при всіх можливих перетвореннях матерії, штучних і природних, ніколи й ніде не було, щоб матерія безслідно зникла або з'явилася з нічого. Матерія вічна і безконечна, нестворима і незнищима; вона не створюється заново і не зникає, а тільки змінює свої форми.

Видатним досягненням людської думки є узагальнюючий висновок про *незнищуваність і нестворимість матерії при всіх її перетвореннях*, сформульований філософією діалектичного матеріалізму. До цього висновку люди прийшли через тривалий процес вивчення природи.

Одним з природничо-наукових підтверджень основного положення матеріалістичної філософії про вічність, нестворимість і

* В. І. Ленін, Твори, т. 14, стор. 238.

маса

незнищуваність матерії є фізичний закон збереження маси. Цей закон має довгу історію становлення. Його відкрив основоположник вітчизняної фізики М. В. Ломоносов (1711—1765). У XX ст. наше розуміння цього закону поглибилось у зв'язку з тим, що було виявлено тісний взаємозв'язок маси та енергії, відкрито залежність маси від швидкості руху і те, що електромагнітне поле також має масу.

2. *Матерія перебуває у вічному русі.* Рух — найістотніша і невід'ємна властивість матерії. Де є матерія, там є й рух. Де є рух, там є й матерія. Матерія без руху так само немислима, як і рух без матерії. Рух є спосіб, форма існування матерії. Світ є рухома матерія.

Діалектичний матеріалізм називає рухом не тільки переміщення в просторі, а всяку зміну взагалі, яку ми спостерігаємо в природі і суспільстві. Рух «обіймає собою всі зміни й процеси, що відбуваються у всесвіті, починаючи від простого переміщення і кінчаючи мисленням» *.

Джерело руху міститься в самій матерії, тобто рух виступає як саморух; тому для пояснення руху непотрібно притягати первісний поштовх чи надприродні сили.

Фізика вивчає механічний, тепловий, електромагнітний та інші фізичні види руху матерії. *Усі фізичні види руху здатні без обмеження перетворюватись один в один.* У взаємному перетворенні різних видів руху виявляється єдність якісно різних його видів. Ця єдність не означає, що різні види руху зводяться до якого-небудь одного виду, що суттю, наприклад, електромагнітних процесів є механічне переміщення. Проте в початковий період розвитку науки був час, коли вважали, що всі фізичні процеси — теплові, електричні, світлові тощо — мають суто механічну природу. Сучасна фізика зовсім відкидає цей механістичний погляд на природу різних фізичних видів руху.

При всіх взаємних перетвореннях різних видів руху, що відбуваються в природі і здійснюються в техніці, ніколи й ніде не було, щоб рух зник безслідно або виник з нічого. Рух, як і матерія, є вічний, нестворимий і незнищуваний.

Другим видатним досягненням людської думки є узагальнюючий висновок про *нестворимість і незнищуваність руху при всіх його перетвореннях*, що чітко сформульований філософією діалектичного матеріалізму. Діалектико-матеріалістичне вчення про вічність, нестворимість і незнищуваність руху спирається на ряд фізичних законів збереження — енергії, імпульса (кількості руху), момента кількості руху та ін.

Отже, *подібно до того, як матерія, перебуваючи в процесі різноманітних змін і перетворень, не знищується і не створюється знову, так і рух, проходячи різні перетворення, зберігається.*

* Ф. Енгельс, Діалектика природи, Держполітвидав УРСР, 1953, стор. 41.

3. *Діалектичний матеріалізм вчить, що зв'язок між матерією і рухом нерозривний, що рух від матерії невіддільний.*

У фізиці глибокий зв'язок між матерією і рухом був виявлений не відразу. Процес установлення законів збереження у фізиці відбувався по двох паралельних і, як здавалось, не зв'язаних між собою напрямах, один з яких стосувався матерії, а другий — руху. Відкритий М. В. Ломоносовим закон збереження маси довгий час здавався зовсім не зв'язаним із законом збереження енергії та імпульса. Лише згодом виявилось, що закон збереження енергії водночас є й законом збереження маси. Цей факт обумовлений існуванням нерозривного зв'язку між масою й енергією, їх пропорціональністю, що можна виразити рівнянням $\Delta E = c^2 \Delta m$.

Аж до початку XX ст. вважали, що коли поняття енергії стосується всіх фізичних видів руху, то поняття імпульса стосується лише механічного його виду. Але досліди П. М. Лебедєва щодо тиску світла (1899) і створена в 1905 р. А. Ейнштейном теорія відносності та дальший розвиток фізики показали, що імпульс, як і енергія, властивий усім без винятку фізичним видам руху і що закон збереження імпульса так само загальний, як і закон збереження енергії.

Сучасна фізика не знає жодного фізичного явища незалежно від його просторово-часових масштабів, в якому порушувався б закон збереження маси або енергії, або імпульса, або момента імпульса. Це справді універсальні закони природи.

Закони збереження підтверджуються в усіх нововідкриваних явищах атомної фізики, а наше розуміння цих законів поглиблюється в міру того, як ми просуваємось уперед у пізнанні властивостей матерії і руху, а також простору і часу.

§ 2. ПРОСТІР І ЧАС

1. Діалектичний матеріалізм учить, що *простір і час є об'єктивні форми існування матерії*. Простір і час невіддільні від рухомої матерії, як і матерія невіддільна від своїх форм існування.

Однак у фізиці з часів Ньютона аж до початку XX ст. існувало уявлення про простір і час як про деякі самостійні сутності. Це уявлення підкріплювалось повсякденним досвідом, в якому люди не виявляли впливу рухомої матерії на час і простір. Коли з кімнати винести всі речі, то, як нам здається, залишається простір, який не залежить від того, що було в кімнаті. Складається уявлення про простір як про просте вмістилище речей, безвідносне до того, що в ньому знаходиться чи рухається.

Аналогічним був погляд на поняття часу. До початку XX ст. фізика користувалась уявленням про час як про самостійну сутність, не зв'язану з простором і відірвану від матерії.

2. Розглянемо докладніше ті уявлення про простір і час, які лежать в основі класичної фізики. Реальний простір тривимірний:

існує тільки три незалежних між собою переміщення точки з даного її положення в просторі. Усяке переміщення точки з даного положення може бути здійснене як сукупність трьох незалежних переміщень.

Досвід показує, що простір однорідний, тобто однаковий всюди, й ізотропний — однаковий за своїми властивостями у всіх напрямах; метричні властивості простору не залежать від матерії, що рухається в ньому. Ці уявлення про однорідність, ізотропність і метричні властивості простору, здобуті людством у процесі багатовікової практичної діяльності, стверджуються з дуже великою точністю.

Уявлення про час, які лежать в основі класичної фізики, такі. Час протікає в одному напрямі неперервно й рівномірно; він безвідносний до будь-чого зовнішнього, до матерії. Існує безліч подій, що відбуваються в даний момент; усі ці події одночасні, причому властивість одночасності є універсальною і ніяк не зв'язана з рухом тіл.

Класична механіка грунтується на описаних вище уявленнях про простір і час, в її основу покладені закони Ньютона. Аналіз змісту законів Ньютона доводить, що всі вони є частковим виявленням принципу незнищуваності руху. Слабкою стороною уявлень про простір і час, що лежать в основі ньютонівської механіки, є відрив простору від часу, а простору і часу — від рухомої матерії. Тому зрозуміло, що сучасна фізика змушена була критично поставитись до історично обмежених уявлень класичної фізики про простір і час, зберігши принцип незнищуваності руху. Спеціальна теорія відносності відбиває властивості об'єктивно реальних простору і часу повніше й глибше, ніж ньютонівська механіка. Ще повніше й глибше відбиваються властивості реального простору і часу в загальній теорії відносності. У загальній теорії відносності — сучасній теорії тяжіння — розкривається неевклідовість реального простору і взаємозв'язок між реальним простором, часом і матерією.

З розвитком природознавства наші уявлення про простір і час змінюються, розвиваються, дедалі повніше й глибше відбиваючи властивості об'єктивно реальних простору і часу: «Людські уявлення про простір і час відносні, але з цих відносних уявлень складається абсолютна істина, ці відносні уявлення, розвиваючись, ідуть по лінії абсолютної істини, наближаються до неї» *.

Видатну роль у розвитку фізичної теорії простору відіграли ідеї М. І. Лобачевського (1792—1856), які рішуче відкинули марновірний погляд про те, що єдино можливою геометрією реального простору повинна бути тільки геометрія Евкліда.

* В. І. Ленін, Твори, т. 14, стор. 156.

§ 3. ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК У ПРИРОДІ. ЗАКОНИ ПРИРОДИ. ПРЕДМЕТ МЕХАНІКИ

Природа — не випадкове нагромадження предметів і явищ; явища й предмети природи взаємозв'язані, взаємообумовлені. Природа — зв'язне, єдине ціле. Зв'язки і взаємозалежності явищ природи зумовлюють їх закономірний розвиток. *Світ є закономірний рух матерії, і наше пізнання, що є найвищим продуктом природи, спроможне тільки відображати цю об'єктивну закономірність.*

Закони природи виявляють внутрішні істотні зв'язки, які властиві самим явищам природи і визначають їх необхідний, незалежний від людської свідомості розвиток.

Кожний фізичний закон відбиває загальний необхідний зв'язок деяких сторін або характеристик певного класу фізичних явищ.

Найпростішим видом руху матерії є *механічний рух* — переміщення тіл одного відносно одного або взаємне переміщення частинок тіла.

Закони механічного руху вивчає теоретична механіка.

Усякий рух, зокрема й механічний, відбувається в просторі і в часі. Теоретична механіка запозичила в математики геометрію Евкліда, аксіоми і теореми якої з дуже великою точністю відображають метричні властивості реального простору. Простір з евклідовою геометрією називається евклідовим. Разом з тривимірним евклідовим простором механіка користується часом, який протікає рівномірно.

Поняття про механічний рух відносне в самій своїй суті: твердження про те, що тіло рухається, означає, що змінюється його положення відносно іншого тіла — так званого *тіла відліку*. Без задання тіла відліку твердження про рух даного тіла беззмістовне.

Спокій є окремим випадком руху, коли положення даного тіла відносно тіла відліку не змінюється.

§ 4. ДЕЯКІ ОСНОВНІ АБСТРАКЦІЇ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ

Теоретична механіка користується рядом наукових абстракцій. До них належать: *матеріальна точка*, *система матеріальних точок*, *абсолютно тверде тіло* та ін. З'ясуємо необхідність і зміст згаданих абстракцій.

Приступаючи до вивчення механічного руху тіл, ми повинні відокремити і взяти до уваги лише ті їх властивості й характеристики, які є істотними в поставленій задачі. Безліч інших (неістотних у даній задачі) властивостей і характеристик тіл треба просто відкинути: у певних межах вони практичного значення не мають.

У багатьох випадках при попередньому вивченні рухів виявляється можливим нехтувати розмірами рухомого тіла. Це буває, наприклад, тоді, коли розміри траєкторій руху або віддалей до тіл великі порівняно з розмірами самого тіла (політ штучного супутника навколо Землі, рух планети навколо Сонця, політ снаряда, рух корабля на морі, положення зірки на небесній сфері і т. ін.).

Якщо розміри тіла при механічному русі виступають часто як неістотна його характеристика, то цього не можна сказати про масу тіла. Маса тіла, як виявляється, завжди є істотною характеристикою механічного руху.

Матеріальною точкою називають тіло, розмірами якого можна нехтувати в даній конкретній задачі механіки.

Отже, матеріальна точка є абстрактний образ тіла, яке складається, як правило, з величезного числа атомів; тому матеріальну точку не слід плутати з геометричною.

Природним узагальненням поняття про матеріальну точку є поняття про систему матеріальних точок.

Системою називається така сукупність матеріальних точок, рух і положення яких взаємозв'язані.

Кожне фізичне тіло є системою матеріальних точок.

Атомістичної будови речовин у механіці до уваги не беруть, і фізичні тіла розглядають як суцільні.

Абстрагуючись від можливих невеликих відносних переміщень частинок твердого тіла, приходимо до поняття про абсолютно тверде тіло.

Абсолютно тверде тіло є система матеріальних точок, які суцільно заповнюють певну частину простору і взаємне розміщення яких протягом часу не змінюється.

Поняття абсолютно твердого тіла, як і поняття матеріальної точки, слід віднести до крайніх фізичних абстракцій. У природі не існує точної фізичної моделі абсолютно твердого тіла або матеріальної точки. Але це зовсім не означає, що введені абстракції є пустими, що вони позбавлені зв'язку з об'єктивним світом.

Метод абстракцій дає змогу побудувати фізику, яка в процесі свого розвитку здатна з вичерпною повнотою і глибиною розкрити закономірності реального світу.

§ 5. КОРОТКА ІСТОРИЧНА ДОВІДКА ПРО ВКЛАД ВІТЧИЗНЯНИХ УЧЕНИХ У МЕХАНІКУ

Учені нашої країни внесли значний вклад у теоретичну механіку.

Російська Академія наук була відкрита за указом Петра I в 1724 р.

Першим російським академіком був геніальний М. В. Ломоносов — засновник Московського університету. М. В. Ломоносов був переконаним матеріалістом свого часу. Він вважав, що матерія і її рух не можуть ні зникнути, ні з'явитися з нічого. М. В. Ломоносов поставив принципові питання про природу сил тяжіння, про пропорціональність інертної маси вазі, дав матеріалістичне трактування процесу взаємодії тіл, сформулював основні положення кінетичної теорії газів. Він правильно вважав, що коли одне тіло надає іншому тілу прискорення, то воно передає йому частину свого руху і при цьому само втрачає точно таку саму кількість руху. М. В. Ломоносов експериментально відкрив закон збереження речовини; він сформулював один з основних законів фізики, який академік С. І. Вавілов назвав законом Ломоносова: «... все перемены, в натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому, так ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте ... Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения; ибо тело, движущее своею силою другое, столько же оныя у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает» (1748).

Михайло Васильович Ломоносов (1711—1765).

Геніальний російський учений, перший російський академік. Праці Ломоносова стосуються багатьох галузей науки і глибиною ідей значно випередили час, в який були написані. Йому належить відкриття універсального закону збереження руху.

Для М. В. Ломоносова теоретична механіка була наукою фізичною, а не формально математичною.

Одночасно з М. В. Ломоносовим у Петербурзькій Академії наук протягом 35 років працював видатний математик і механік Леонард Ейлер (1707—1783), який був запрошений у Росію разом з Д. Бернуллі (1700—1782); останній став також відомим математиком і механіком. Л. Ейлеру належить понад 850 оригінальних наукових праць; вклад Л. Ейлера в теоретичну механіку величезний. Він розвинув аналітичні методи дослідження руху матеріальної точки, вільних матеріальних систем, заклав основи динаміки твердого тіла і основи гідромеханіки.

Для XIX ст. характерним є швидкий розвиток техніки: поширюється застосування парових машин, будуються мости, залізниці, тунелі, кораблі і т. д. Усе це сприяє швидкому розвитку теоретичної механіки.

Видатними російськими механіками XIX ст. були М. В. Остроградський (1801—1861) і П. Л. Чебишов (1821—1894).

М. В. Остроградський — основоположник російської школи механіків-аналітиків; йому належать дуже важливі дослідження в галузі аналітичної механіки. Один з учнів Остроградського писав у 1838 р.: «Центром усієї математичної діяльності в Росії напевне можна назвати Остроградського. Його наукові праці, його лекції, його поради, можливо, служать основою всього, що в галузі математичних наук робиться в нас хоч скільки-небудь видатного».

П. Л. Чебишов — один з найвидатніших математиків і механіків світу. Його роботи мали великий вплив на розвиток математики й механіки як у Росії, так і за кордоном. П. Л. Чебишов — основоположник російської школи теорії механізмів і машин.

Геніальний учень П. Л. Чебишова О. М. Ляпунов (1857—1918) створив надзвичайно важливу теорію стійкості руху і теорію фігур рівноваги рідини, яка рівномірно обертається. Дослідження Ляпунова набагато перевершили відповідні дослідження всіх відомих учених за кордоном.

Однією з класичних задач теоретичної механіки є задача про рух твердого тіла навколо нерухомої точки. Після перших успіхів Ейлера і Лагранжа нікому більше не вдавалось просунути вперед розв'язок цієї задачі. Тому в 1888 р. Паризька Академія наук оголосила конкурс на краще теоретичне дослідження руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Премію одержала Софія Василівна Ковалевська (1850—1891). Праця С. В. Ковалевської дала їй світову славу.

М. Є. Жуковський (1847—1921) — основоположник аеродинаміки. Він є також автором багатьох праць з теоретичної механіки. М. Є. Жуковський створив численну і загальновизнану школу російських гідро- і аеродинаміків. Він знайшов формулу для визначення підіймальної сили крила літака. М. Є. Жуковський багато зробив в справі застосування теорії в практику вітчизняного літакобудування, що сприяло швидкому розвитку нашої авіації.

Талановитий учень і сподвижник М. Є. Жуковського С. О. Чаплигін (1869—1942) зробив цінний вклад у гідро- і аеродинаміку, а також у теоретичну механіку. С. О. Чаплигін є основоположником сучасної газової динаміки — аеродинаміки великих швидкостей.

Засновник російської школи кораблебудівної механіки О. М. Крилов (1863—1945) дав ряд глибоких досліджень з теорії коливань і динаміки твердих тіл.

У нашій країні було покладено початок розвитку динаміки тіл змінної маси і ракетоплавання. Відповідні праці К. Е. Ціолковського (1857—1935) і І. В. Мещерського (1859—1935) тепер стали широко відомими.

Характерною особливістю вітчизняної механіки є тісне поєднання теорії з практикою. Праці таких корифеїв науки, як

П. Л. Чебишова, М. Є. Жуковського, С. О. Чаплигіна і інших, переконливо це доводять.

Інтенсивний розвиток механіки в нашій країні почався після Великої Жовтневої соціалістичної революції. Швидке зростання продуктивних сил, електрифікація і індустріалізація країни, колективізація і створення високомеханізованого сільського господарства, запровадження автоматики й телемеханіки, освоєння космічного простору ставили й ставлять перед радянською механікою дедалі нові завдання.

Теорія стійкості руху Ляпунова розвинулась далі, і праці радянських учених у цій галузі забезпечують нам першість у світовій науці (М. Г. Четаєв, В. В. Степанов та багато інших). Ця теорія має дуже важливі застосування в задачах про стійкість літаків, артилерійських снарядів, автоматичних регуляторів, гіроскопів і т. д.

Радянська наука пишається працями наших учених з теорії нелінійних коливань, що забезпечували й забезпечують СРСР провідну роль у цій галузі (Л. І. Мандельштам і М. Д. Папалексі з своєю школою, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, Б. В. Булгаков).

Радянська наука досягла видатних успіхів також у галузі прикладної теорії гіроскопів, динаміки тіл змінної маси, теорії механізмів, теорії пружності, теорії пластичності (О. А. Ільюшин), гідро- і аеродинаміки та в багатьох прикладних технічних науках. З вкладом вітчизняних вчених у механіку можна ознайомитись докладніше з спеціальної літератури.

ЧАСТИНА ПЕРША

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Розділ I

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Вступні зауваження. *Кінематика* — це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух тіл без врахування причин, що цей рух зумовлюють.

Кінематика розглядає загальні внутрішні зв'язки між просторово-часовими характеристиками механічного руху. Тому її називають геометрією руху.

Спочатку вивчимо кінематику найпростішого об'єкта — матеріальної точки, а потім — твердого тіла.

З усіх фізичних властивостей реальних твердих тіл для геометрії руху істотне значення мають лише геометрична форма тіл і їх непроникність. Тому в кінематиці тіла вважаються абсолютно твердими.

Введемо тепер поняття про систему відліку. Рух точки розглядатимемо відносно деякого тіла, яке умовно вважаємо нерухомим і називаємо *тілом відліку*. Провівши в якій-небудь точці тіла відліку три взаємно перпендикулярні прямі і закріпивши їх у тілі, дістанемо «нерухому» систему декартових координат, яка разом з твердим лінійним масштабом і загальноприйнятим способом вимірювання часу утворює найпростішу *систему відліку*, що звичайно й використовується в кінематиці. Вибір початку координат і орієнтація осей у просторі для кінематики неістотні тому, що простір однорідний і ізотропний. Неістотний і вибір початку відліку часу, бо протікання часу монотонне і однакове завжди.

Рух твердого тіла в просторі будемо відносити до *правої* системи координат $Oxyz$, тобто до такої системи, в якій поворот додатної частини осі Ox до додатної частини осі Oy на прямий кут відбувається проти годинникової стрілки, коли дивитись з боку додатної частини осі Oz.

Віддалі можна вимірювати за допомогою якого-небудь лінійного масштабу, виготовленого з твердого матеріалу. *Довжина відрізка є міра його протяжності в просторі;* щоб знайти довжину відрізка, треба порівняти його протяжність з протяжністю масштабу. За одиницю довжини беруть один сантиметр, тобто

одну соту частину довжини того еталона метра, який був виготовлений наприкінці XVIII ст. і зберігається в Севрі біля Парижа.

Нехай вибрані тіло відліку, зв'язана з ним система декартових координат і одиниця довжини (масштаб). Положення будь-якої точки M у просторі відносно взятої системи координат може бути схарактеризоване трьома декартовими координатами x, y, z, що записуватимемо так: $M(x, y, z)$. Відстань між двома точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Проміжок часу є міра тривалості процесу. Вимірювання проміжків часу вимагає порівняння тривалості двох процесів, подібно до того, як вимірювання довжин вимагає порівняння протяжності вимірюваного відрізка і масштабу. Прийнято порівнювати тривалість процесу, що вивчається, з тривалістю повного оберту Землі навколо своєї осі відносно Сонця, тобто з проміжком часу між двома послідовними проходженнями Сонця через площину якого-небудь меридіана.

Якщо час, протягом якого Земля обертається навколо своєї осі відносно Сонця, поділити на 86 400 рівних частин, то дістанемо одиницю часу, так звану *секунду*. Установлена так одиниця часу не залишається незмінною, бо тривалість оберту Землі навколо своєї осі відносно Сонця змінюється протягом року. А тому *в механіці одиницею часу є середня річна сонячна секунда, тобто $^1/_{86400}$ частина середньої за рік сонячної доби.*

Якщо певний момент часу брати за початковий, $t = 0$, то всякий інший момент часу визначається цілком однозначно числом t секунд, які пройшли від початкового момента до розглядуваного. Число t буде додатним, якщо розглядуваний момент іде за початковим, і від'ємним, якщо він передує початковому.

§ 1. ТРИ ФОРМИ РІВНЯНЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Рух точки в просторі можна задати рівняннями в трьох формах: координатній, натуральній і векторній. Розглянемо їх.

1. Координатна форма рівнянь руху. Нехай точка $M(x, y, z)$ рухається в просторі відносно нерухомої системи відліку $Oxyz$ (рис. 1). Оскільки положення точки в просторі з часом змінюється, то координати x, y, z цієї точки будуть функціями часу, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1.1}$$

де t — час. Ці функції повинні бути неперервними функціями часу, що відповідає природі руху: точка не може зникнути в одному місці, щоб з'явитись в іншому, її рух неперервний. Ми вимагатимемо (нижче буде сказано чому — див. § 7), щоб функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ не лише були неперервними, але й мали похідні не нижче другого порядку.

Коли функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ відомі, то говорять, що відомий *закон руху точки* M у просторі, бо в цьому випадку можна визначити положення точки M у кожний момент часу t. Три рівності (1.1) називаються *рівняннями руху в координатній формі.*

Геометричне місце послідовних положень точки, яка рухається в просторі (в розглядуваній системі відліку), *називається траєкторією.*

Траєкторія є неперервна лінія, яка може бути замкнутою або розімкнутою, прямою або кривою. Рівняння руху (1.1) можна розглядати як рівняння траєкторії в параметричній формі, де параметром є час t. Коли виключити з цих рівнянь t, то дістанемо рівняння траєкторії в координатах x, y, z.

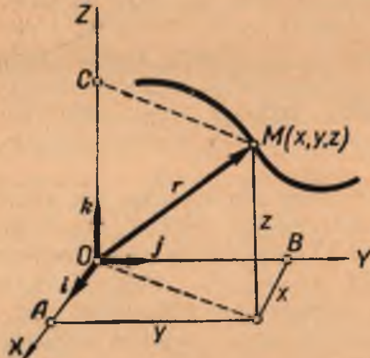

Рис. 1.

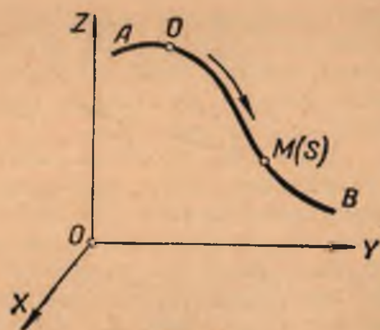

Рис. 2.

Координатна форма рівнянь руху допускає використання не лише декартових, а й інших систем координат (полярних, циліндричних, сферичних і взагалі криволінійних).

2. Натуральна форма рівнянь руху. Нехай крива AB є відома нам траєкторія точки. Вибираємо на траєкторії будь-яку фіксовану точку O за початок для відліку дугової координати і один з двох напрямів від точки O вздовж траєкторії за додатний напрям (рис. 2). Положення рухомої точки M на траєкторії визначається дуговою координатою s, тобто віддаллю MO, виміряною вздовж дуги траєкторії і взятою з відповідним знаком (із знаком плюс, коли точка M лежить на додатній частині траєкторії, і навпаки).

Коли точка M рухається по траєкторії, віддаль s (дугова координата) змінюється з часом, тобто

$$s = s(t). \tag{1.2}$$

Ця рівність називається *натуральним рівнянням руху точки.* Звернемо увагу на те, що s визначає саме *відстань* (додатну чи від'ємну), а не пройдений точкою шлях. Натуральне рівняння руху точки (1.2) визначає *закон руху точки по траєкторії*, або *закон віддалей.*

Натуральний метод вивчення руху точки можна застосовувати в тих випадках, коли наперед відома траєкторія руху, яка може бути задана не лише за допомогою рівнянь.

Функція $s = s(t)$, що визначає закон руху точки по траєкторії, є однозначною, неперервною і взагалі має похідні не нижче другого порядку.

3. Векторна форма рівнянь руху. Рівняння руху можна подати ще в третій формі — векторній.

Положення точки M характеризується радіус-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$, що виходить з початку координат O і напрямлений до точки M. Кожна з трьох координат точки M дорівнює проекції радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ цієї точки на відповідну координатну вісь (рис. 1). Якщо від початку координат відкласти в додатному напрямі координатних осей одиничні вектори $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, то вектори $\boldsymbol{OA} = x \cdot \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{OB} = y \cdot \boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{OC} = z \cdot \boldsymbol{k}$ будуть складовими векторами (компонентами) для радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ і буде справедлива рівність

$$\boldsymbol{r} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k}. \tag{1.3}$$

Формула (1.3) зображає розклад радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ на три просторові компоненти по осях прямокутної системи координат. Зауважимо, що цей розклад завжди єдиний.

Коли точка M рухається в просторі, її радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ змінюється за величиною і напрямом, тому він є функцією часу. Якщо радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ відомий як функція часу, то рівність

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{1.4}$$

визначатиме закон руху точки в просторі; (1.4) називають *рівнянням руху точки у векторній формі.*

Векторна форма рівнянь руху має ряд істотних переваг порівняно з іншими формами. Зв'язки між фізичними (зокрема, кінематичними) величинами, якщо вони встановлені у векторній формі, глибше відбивають внутрішні властивості руху і справедливі для будь-якої системи координат.

Крім того, векторний метод має й методичні переваги: картина руху стає більш наочною, а саме дослідження потребує менше обчислень.

§ 2. ШВИДКІСТЬ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Спостереження за рухами тіл у природі приводять до висновку, що рухи бувають повільнішими і швидшими. З цього боку рух характеризується певною фізичною величиною — швидкістю, поняття якої ми маємо тепер увести.

1. Швидкість рівномірного прямолінійного руху. Уведемо поняття швидкості спочатку для найпростішого випадку рівномірного прямолінійного руху точки. Пряму, уздовж якої рухається точка, виберемо за вісь Ox. Точка може рухатись у двох напрямах: так, що абсциса x зростає, $\Delta x > 0$, і так, що вона зменшується, $\Delta x < 0$.

Рух точки називається рівномірним, якщо за довільні рівні між собою проміжки часу точка проходить рівні віддалі.

З означення випливає, що за подвійні, потрійні і т. д. проміжки часу точка проходить, відповідно, подвійні, потрійні і т. д. віддалі. Тому, якщо Δt є проміжок часу, а Δx, відповідно, пройдена точкою віддаль, то для даного рівномірного руху відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ буде одним і тим самим числом незалежно від того, за який — більший чи менший — проміжок часу воно визначене:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{const} = v,$$

звідки

$$\Delta x = v \cdot \Delta t, \tag{1.5}$$

де v — стала.

Порівняємо тепер між собою різні рівномірні рухи. Аналізуючи формулу (1.5), приходимо до висновку: точка проходить більшу віддаль за одиницю часу в тому з двох рівномірних рухів, для якого стала v більша. Отже, стале для рівномірного руху відношення $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ є характеристикою бистроти руху. Фізична величина, що характеризує рух з цього боку, називається *швидкістю.*

Ми прийшли до висновку: *швидкість є міра бистроти руху; швидкість рівномірного руху вимірюється відношенням пройденої точкою віддалі до відповідного проміжку часу: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Величина швидкості рівномірного руху і величина віддалі, яку точка проходить за одиницю часу, однакові.*

Якщо точка рухається в напрямі зменшення координати x, то приріст віддалі Δx, а разом з ним і швидкість $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ буде числом від'ємним.

Викладена теорія справедлива і для випадку руху точки по будь-якій кривій у просторі. Справді, вище ми ніде не скористались прямолінійністю траєкторії, і можна уявити собі, що пряма без видовження і вкорочення деформована в криву. Віддаль x треба тоді розуміти як дугову координату s при натуральному методі дослідження.

Уведення поняття швидкості рівномірного руху грунтується на порівнюванні між собою різних рівномірних рухів. Зауважимо, що поняття швидкості саме тому й виникло в науці, що існувала практична потреба порівнювати різні за бистротою рухи.

Хоч швидкість чисельно й дорівнює віддалі, яку точка проходить за одиницю часу, але ототожнювати швидкість з від-

даллю не слід. На відміну від віддалі, що є *просторовою* характеристикою, швидкість є *просторово-часовою* характеристикою руху. Отже, швидкість — це кінематична величина нового типу.

2. Швидкість нерівномірного руху. Розглянемо тепер випадок нерівномірного руху точки по довільній (прямолінійній чи криволінійній) траєкторії.

Закон руху точки буде

$$x = x(t), \tag{1.6}$$

де x — дугова координата (у випадку прямолінійної траєкторії x — абсциса точки, у випадку криволінійної траєкторії x є дугова віддаль s), а $x(t)$ — функція часу.

На відміну від випадку рівномірного руху, тепер за довільні рівні між собою проміжки часу точка проходить взагалі нерівні віддалі.

З (1.6) випливає, що за проміжок часу Δt, від момента t до момента $t + \Delta t$, віддаль змінюється на величину

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Відношення приросту віддалі Δx до відповідного проміжку часу Δt дорівнює

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

і є функцією двох змінних: t і Δt.

Це відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ можна трактувати як швидкість руху уявлюваної точки, яка, на відміну від основної точки, рухається *рівномірно* і в моменти t та $t + \Delta t$ займає на траєкторії ті самі положення, що й основна точка. У процесі руху основна точка може то випереджати уявлювану, то відставати від неї.

Середньою швидкістю основної точки (в проміжку часу від момента t до момента $t + \Delta t$) називають швидкість уведеного тут уявлюваного рівномірного руху:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Інакше: *середня швидкість нерівномірного руху є швидкість такого рівномірного руху, при якому точка пройшла б дану віддаль за той самий проміжок часу, що й при нерівномірному русі.*

При даному значенні t візьмемо тепер проміжок часу Δt меншим і знову порівняємо дійсний нерівномірний рух точки з уявлюваним рівномірним рухом. Як і раніше, положення основної і уявлюваної точок збігаються в початковий і кінцевий моменти розглядуваного проміжку часу Δt. Зрозуміло, що нові порівнювані рухи — дійсний і уявлюваний — відрізнятимуться один від одного вже менше, ніж у випадку більшого Δt. Чим меншим вибрано проміжок часу Δt, тим менше дійсний нерівномірний рух відрізняється від уявлюваного рівномірного в цьому проміжку часу. Беручи тепер, що проміжок часу Δt, послідовно зменшуючись, прямує до нуля, ми приходимо до цілком природного означення:

Границя, до якої наближається середня швидкість $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, *коли проміжок часу* Δt *наближається до нуля, називається швидкістю точки в даний* (довільний) *момент часу* t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Але права частина в (1.7) визначає, як відомо, похідну. Отже: *швидкість точки, яка рухається по траєкторії за законом* $x = x(t)$, *у довільний момент часу* t *дорівнює похідній від віддалі по часу:*

$$v = \frac{dx}{dt}. \tag{1.8}$$

Швидкість v нерівномірного руху є функцією часу: $v = v(t)$.

Як і раніше, знак швидкості v вказує на напрям руху точки по траєкторії. Щоб підкреслити це, v іноді називають *алгебраїчним значенням швидкості*.

3. Вектор швидкості. Уведене нами поняття швидкості характеризує бистроту руху точки *по заданій траєкторії*, але зовсім не характеризує *напряму руху* точки в просторі відносно вибраної системи відліку. Узагальнимо тепер поняття швидкості так, щоб мати вичерпну характеристику бистроти руху точки.

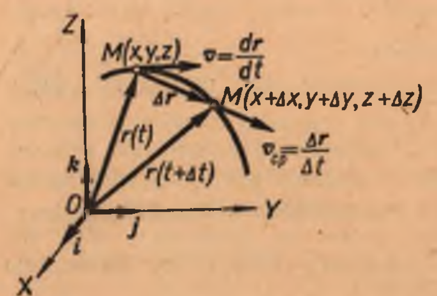

Рис. 3.

Нехай рухома точка в момент t пройшла положення M (x, y, z), що визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{OM}$, а в момент $t + \Delta t$ — положення M' ($x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$), що визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}(t + \Delta t) = \boldsymbol{OM'}$. Вектор $\Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{MM'}$, що характеризує зміну положення точки в просторі, називається *переміщенням точки* за проміжок часу Δt від момента t до момента $t + \Delta t$ (рис. 3).

Відношення вектора переміщення $\Delta \boldsymbol{r}$ до відповідного проміжку часу Δt дорівнює

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}.$$

Вектор $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ можна розглядати як такий, величина і напрям якого характеризують швидкість руху уявлюваної точки, що рухається *рівномірно* по хорді $\boldsymbol{MM'}$ і в моменти t та $t + \Delta t$ займає ті самі положення в просторі, що й основна точка. *Середньою швидкістю* основної точки за розглядуваний проміжок часу називають швидкість згаданого уявлюваного рівномірного руху:

$$\boldsymbol{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}.$$

Середня швидкість $\boldsymbol{v}_{\text{ср}}$ *нерівномірного криволінійного руху є швидкість такого рівномірного прямолінійного руху, в якому за проміжок часу* Δt (від момента t до момента $t + \Delta t$) *точка здійснює те саме переміщення* $\Delta \boldsymbol{r}$, *що й у нерівномірному криволінійному русі.*

Припускаючи, що Δt, послідовно зменшуючись, прямує до нуля при фіксованому t, ми приходимо до цілком природного означення:

Границя, до якої наближається середня швидкість $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$, *коли проміжок часу* Δt *наближається до нуля, називається швидкістю точки в даний* (довільний) *момент часу* t:

$$\boldsymbol{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}}.^{*} \tag{1.9}$$

Отже, за означенням, *швидкість дорівнює першій похідній по часу від радіус-вектора точки.*

Швидкість $\boldsymbol{v}$ точки є, очевидно, *вектор, який розміщений уздовж дотичної до траєкторії, напрямлений у сторону руху і за величиною дорівнює абсолютній величині алгебраїчного значення швидкості.* Величину швидкості позначатимемо буквою V, тобто

$$V = |\boldsymbol{v}|.$$

§ 3. ШВИДКІСТЬ ТОЧКИ В ПРЯМОКУТНИХ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Розклавши вектор швидкості $\boldsymbol{v}$ на три складові вектори, які паралельні осям координат, дістанемо

$$\boldsymbol{v} = v_x \cdot \boldsymbol{i} + v_y \cdot \boldsymbol{j} + v_z \cdot \boldsymbol{k}, \tag{1.10}$$

де v_x, v_y, v_z — проекції вектора $\boldsymbol{v}$ на осі.

Візьмемо похідну по часу від радіус-вектора $\boldsymbol{r}(t)$:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$

Тому що вектори $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ незмінні за величиною і напрямом, то похідні від них дорівнюють нулю, і після диференціювання дістанемо

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{k} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{1.11}$$

---

* Тут і далі диференціювання по часу t позначатимемо крапкою над буквою.

Оскільки розклад вектора на компоненти єдиний, з порівняння формул (1.10) і (1.11) випливає:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}, \qquad (1.12)$$

тобто *проекція вектора швидкості на кожну координатну вісь прямокутної системи дорівнює похідній по часу від відповідної координати рухомої точки.*

Абсолютна величина вектора швидкості дорівнює

$$V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (1.13)$$

Напрям вектора швидкості визначається косинусами кутів, що їх утворює цей вектор з осями координат:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, x}) = \frac{v_x}{V},\ \cos(\widehat{\boldsymbol{v}, y}) = \frac{v_y}{V},\ \cos(\widehat{\boldsymbol{v}, z}) = \frac{v_z}{V}. \qquad (1.14)$$

Слід підкреслити важливість внутрішньої властивості швидкості, яка випливає з векторного характеру цієї величини. Якщо повернути систему координат навколо її початку і розглянути швидкість точки відносно нової системи, яка нерухома відносно першої, то абсолютна величина швидкості залишиться незмінною, хоч проекції вектора швидкості на осі координат будуть вже іншими.

§ 4. ШЛЯХ ТОЧКИ

Скористаємось натуральним рівнянням руху точки $s = s(t)$ і обчислимо шлях, який точка пройшла за час від момента t_1 до момента t_2.

Поділимо проміжок часу $t_2 - t_1$ на n проміжків Δt_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, щоб переміщення точки за кожний проміжок Δt_i відбувалось в одному напрямі. Якщо Δs_i є приріст дугової координати, що відповідає проміжку часу Δt_i, то шлях точки дорівнюватиме

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} |\Delta s_i| = \int_{t_1}^{t_2} |ds| = \int_{t_1}^{t_2} V\,dt,$$

де ds — елемент дуги траєкторії.

Пройдений точкою шлях σ є невід'ємна функція, яка монотонно зростає.

Обчислимо ще шлях точки у випадку, коли закон руху точки задано в координатній формі. У декартовій системі координат, коли рівняння руху задано формулами

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

елемент шляху дорівнює

$$d\sigma = |ds| = +\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

звідси маємо

$$\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt. \qquad (1.15)$$

§ 5. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Поняття прискорення увів у механіку Галілей у зв'язку з дослідженням нерівномірних рухів найпростішого типу. Пізніше це поняття узагальнив Ньютон на випадок довільного руху.

1. Прискорення рівнозмінного руху вздовж прямої. З нерівномірних рухів найпростішим є *рівнозмінний рух точки по прямій, коли швидкість точки дістає рівні між собою прирости за будь-які рівні між собою проміжки часу.*

З означення рівнозмінного руху випливає, що за подвійні, потрійні і т. д. проміжки часу швидкість дістане, відповідно, подвійні, потрійні і т. д. прирости. Тому, якщо Δt є проміжок часу, а Δv — відповідний приріст алгебраїчного значення швидкості, для даного рівнозмінного руху відношення $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ буде сталим (додатним або від'ємним числом) незалежно від того, за який — більший чи менший — проміжок часу це відношення визначене:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const} = w,$$

звідки

$$\Delta v = w \cdot \Delta t, \qquad (1.16)$$

де w — стала.

З формули (1.16) випливає, що швидкість дістане більший приріст за одиницю часу в тому з двох рівнозмінних рухів, для якого стала w більша. Отже, стале для рівнозмінного руху відношення $\frac{\Delta v}{\Delta t} = w$ характеризує бистроту зміни швидкості. Фізична величина, що характеризує бистроту зміни швидкості, називається *прискоренням.*

Ми прийшли до висновку:

Прискорення є міра бистроти зміни швидкості; прискорення рівнозмінного руху точки вимірюється відношенням приросту швидкості до відповідного проміжку часу: $w = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. *Величина прискорення рівнозмінного руху і величина приросту швидкості за одиницю часу — однакові.*

Якщо прискорення w є величина додатна, то рух називається *рівноприскореним*, якщо ж від'ємна — *рівносповільненим.*

Усе, що сказано вище в цьому пункті, має силу і у випадку руху точки по будь-якій кривій у просторі. Як видно з методу обчислення, у цьому останньому випадку прискорення w за своїм змістом є прискоренням руху точки *вздовж траєкторії*.

2. Прискорення вздовж траєкторії в загальному випадку руху точки. Розглянемо тепер випадок нерівномірного руху точки по довільній траєкторії.

Нехай алгебраїчна величина швидкості змінюється за довільним законом

$$v = v(t),$$

де $v(t)$ — довільна функція часу.

Відношення приросту швидкості Δv до відповідного проміжку часу Δt дорівнює

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Це відношення $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ можна трактувати як прискорення вздовж траєкторії уявлюваного рівнозмінного руху. За проміжок часу Δt, від момента t до момента $t + \Delta t$, в уявлюваному русі швидкість точки змінюється на ту саму величину Δv, що й у дійсному русі.

Середнім прискоренням (уздовж траєкторії) *нерівномірного руху точки називається прискорення такого рівнозмінного руху, в якому швидкість дістає той самий приріст Δv і за той самий проміжок часу Δt, що й у нерівномірному русі*:

$$w_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Виконавши тепер перехід до границі при $\Delta t \to 0$ (момент t зафіксований), дістанемо *прискорення точки* (вздовж траєкторії) ***в момент** t*:

$$w = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}. \qquad (1.17)$$

Отже, *прискорення* (вздовж траєкторії) *дорівнює першій похідній по часу від алгебраїчного значення швидкості або другій похідній по часу від дугової координати.*

Правило знаків: якщо алгебраїчна величина швидкості v і прискорення w одного знака, то рух точки є прискореним, якщо вони різних знаків — сповільненим.

3. Вектор прискорення. Уведене вище поняття прискорення точки вздовж траєкторії характеризує бистроту зміни швидкості точки при її русі *по траєкторії*, але не характеризує бистроту зміни швидкості за напрямом у просторі.

Узагальнимо поняття прискорення руху так, щоб мати вичерпну характеристику бистроти зміни швидкості.

Нехай точка рухається по довільній кривій у просторі. Нехай M і M' — два положення рухомої точки в просторі, відповідно, в моменти часу t і $t' = t + \Delta t$, а $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t)$ і $\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}(t+\Delta t)$ — значення швидкості точки в положеннях M і M'. Якщо вектор швидкості $\boldsymbol{v}'$ перенести в точку M траєкторії, то вектор $\boldsymbol{MK}$,

що дорівнює геометричній різниці $\Delta\boldsymbol{v}$ швидкостей $\boldsymbol{v}'$ і $\boldsymbol{v}$, характеризуватиме зміну швидкості за проміжок часу Δt (рис. 4). Поділивши вектор $\boldsymbol{MK}$ на Δt, дістанемо *середнє прискорення*

$$\boldsymbol{w}_{\text{ср}} = \frac{\boldsymbol{MK}}{\Delta t} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t},$$

а здійснивши граничний перехід при $\Delta t \to 0$ і фіксованому t, — *прискорення руху точки M* у момент t:

$$\boldsymbol{w} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dot{\boldsymbol{v}}. \qquad (1.18)$$

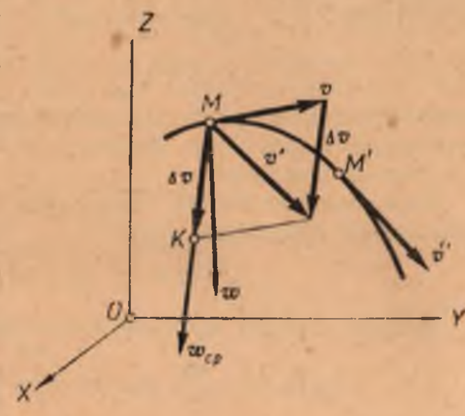

Рис. 4.

Отже, *прискорення руху точки дорівнює першій похідній від вектора швидкості по часу.*

Якщо першу похідну $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ розглядати як відношення нескінченно малого геометричного приросту $d\boldsymbol{v}$ швидкості до відповідного проміжку dt часу, то інтуїтивно відчувається фізичний зміст прискорення $\boldsymbol{w}$, що є характеристикою бистроти зміни швидкості як вектора (рис. 5).

Оскільки, у свою чергу, $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, то

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}, \qquad (1.19)$$

тобто *прискорення дорівнює другій похідній по часу від радіус-вектора рухомої точки і є взагалі функцією часу.*

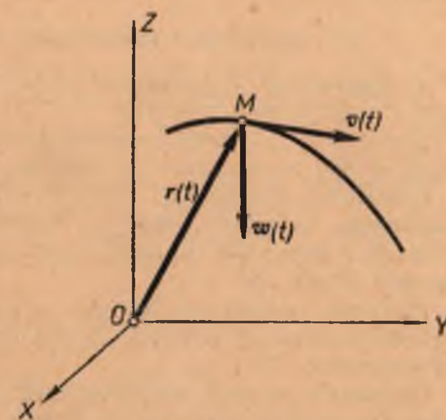

Рис. 5.

§ 6. ПРИСКОРЕННЯ РУХУ ТОЧКИ В ПРЯМОКУТНИХ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

Продиференціювавши рівність

$$\boldsymbol{r} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k}$$

двічі по часу, дістанемо прискорення

$$\boldsymbol{w} = \ddot{x} \cdot \boldsymbol{i} + \ddot{y} \cdot \boldsymbol{j} + \ddot{z} \cdot \boldsymbol{k}. \qquad (1.20)$$

З другого боку, вектор $\boldsymbol{w}$ можна розкласти на три паралельні осям нерухомої декартової системи компоненти, тобто

$$\boldsymbol{w} = w_x \cdot \boldsymbol{i} + w_y \cdot \boldsymbol{j} + w_z \cdot \boldsymbol{k}, \tag{1.21}$$

де w_x, w_y, w_z — проекції вектора $\boldsymbol{w}$ на осі. Оскільки розклад всякого вектора на три компоненти, які паралельні осям, єдиний, то з (1.20) і (1.21) випливає, що

$$w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \tag{1.22}$$

тобто *проекції прискорення на осі нерухомої декартової системи координат дорівнюють другим похідним по часу від відповідних декартових координат.*

Абсолютна величина прискорення визначається за його проекціями на координаті осі:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}. \tag{1.23}$$

Напрям вектора прискорення визначається за формулами

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{w}, x}) = \frac{w_x}{w}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}, y}) = \frac{w_y}{w}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{w}, z}) = \frac{w_z}{w}, \tag{1.24}$$

які цілком аналогічні до відповідних формул для швидкості.

§ 7. ДОТИЧНЕ І НОРМАЛЬНЕ ПРИСКОРЕННЯ ТОЧКИ

1. Допоміжні геометричні поняття. Нагадаємо означення деяких геометричних понять.

Дотичною до кривої в точці M називають граничне положення січної MM', коли точка M' наближається до нерухомої точки M.

Стичною площиною кривої в точці M називають граничне положення площини, що проходить через дотичну до кривої в точці M і точку M' кривої, коли точка M' наближається до нерухомої точки M.

Головною нормаллю кривої в точці M називають пряму, що перетинає дотичну в точці M під прямим кутом і лежить у стичній площині.

Кривизна кривої на невеликій її частині MM' вимірюється кутом повороту дотичної (кутом суміжності $\Delta\theta$), розрахованим на одиницю довжини дуги $\smile MM' = \Delta s$. Відношення $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ називають *середньою кривизною кривої* на дільниці MM':

$$k_{\text{ср}} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Кривизною кривої в даній її точці M називають границю, до якої наближається середня кривизна дуги MM' при умові, що точка M' прямує до M:

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Радіусом кривизни кривої в даній її точці M називають величину, обернену до кривизни:

$$\rho = \frac{1}{k}.$$

2. Розклад прискорення на дотичний і нормальний компоненти. Нехай точка рухається в просторі і M є положення її в довільний момент t. Нехай на траєкторії руху вибрано початкову точку O для відліку дугової координати s і один з двох напрямів від початкової точки O вздовж траєкторії взято за додатний. Відкладемо з точки M уздовж дотичної до траєкторії в додатному напрямі одиничний вектор τ (рис. 6).

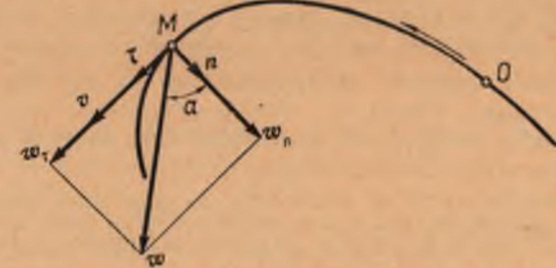

Рис. 6.

Швидкість $\boldsymbol{v}$ в точці M траєкторії можна подати так:

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{\tau}, \tag{1.25}$$

де v — алгебраїчне значення швидкості точки, а $\boldsymbol{\tau}$ — одиничний вектор дотичної, додатно напрямленої до траєкторії в точці M.

Продиференціюємо (1.25) по часу t, вважаючи обидва співмножники (v і τ) змінними:

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt},$$

або

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

Але $\frac{ds}{dt}$ — алгебраїчне значення швидкості v; отже, прискорення $\boldsymbol{w}$ дорівнює

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + v^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}. \tag{1.26}$$

З курсу математичного аналізу відомо, що

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = k \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\rho} \cdot \boldsymbol{n}, \tag{1.27}$$

де ρ — радіус кривизни кривої в точці M, а $\boldsymbol{n}$ — одиничний вектор головної нормалі, напрямлений у бік угнутості траєкторії.

Підставляючи значення $\frac{d\tau}{ds}$ в (1.26), дістанемо остаточно:

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt}\cdot\tau + \frac{v^2}{\rho}\cdot\boldsymbol{n}. \qquad (1.28)$$

Знайдена формула є основною і дає розклад прискорення $\boldsymbol{w}$ на кожний момент руху на два компоненти по взаємно перпендикулярних напрямах $\boldsymbol{\tau}$ і $\boldsymbol{n}$, тобто по напрямах дотичної і головної нормалі. Перший компонент $\frac{dv}{dt}\cdot\tau$ називається *дотичним прискоренням*, а другий $\frac{v^2}{\rho}\cdot\boldsymbol{n}$ — *нормальним прискоренням.*

Вектор «повного» прискорення $\boldsymbol{w}$ лежить у стичній площині, бо вона визначається векторами τ і $\boldsymbol{n}$.

Множники при одиничних векторах у формулі (1.28) мають такий зміст: похідна по часу від алгебраїчного значення швидкості $\frac{dv}{dt}$ дорівнює проекції прискорення $\boldsymbol{w}$ на додатно зорієнтовану дотичну, а $\frac{v^2}{\rho}$ є проекція прискорення $\boldsymbol{w}$ на напрям $\boldsymbol{n}$ головної нормалі.

Перша з цих проекцій w_τ може бути як додатною, так і від'ємною, а друга проекція w_n завжди додатна; величини $\frac{dv}{dt}$ і $\frac{v^2}{\rho}$ інколи теж називають, відповідно, дотичним і нормальним прискореннями.

Фізичний зміст дотичного і нормального прискорень такий: *дотичне прискорення $\frac{dv}{dt}$ є прискоренням руху вздовж траєкторії і характеризує бистроту зміни швидкості за величиною, а нормальне прискорення $\frac{v^2}{\rho}$ характеризує бистроту зміни швидкості за напрямом.*

У випадку прискореного руху точки (v і $\frac{dv}{dt}$ — величини одного знака) дотичне прискорення $\boldsymbol{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\cdot\tau$ напрямлене в бік швидкості $\boldsymbol{v}$. При сповільненому русі (v і $\frac{dv}{dt}$ різних знаків) $\boldsymbol{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\tau$ напрямлене протилежно до $\boldsymbol{v}$.

Абсолютна величина вектора прискорення дорівнює

$$|\boldsymbol{w}| = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \qquad (1.29)$$

Кут, який утворює вектор прискорення з напрямом головної нормалі, визначатиметься формулою

$$\operatorname{tg}(\widehat{\boldsymbol{w}, \boldsymbol{n}}) = \frac{w_\tau}{w_n}. \qquad (1.30)$$

Дотичне і нормальне прискорення можна обчислити й у випадку, коли рівняння руху задані в координатній формі. Наприклад, при використанні декартових координат, коли абсолютна величина швидкості дорівнює

$$V = +\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}, \qquad (1.31)$$

похідна $\frac{dV}{dt}$ буде, очевидно, прискоренням уздовж траєкторії. Якщо $\frac{dV}{dt} > 0$, то рух точки є прискореним, якщо ж $\frac{dV}{dt} < 0$, — сповільненим. Звернемо увагу на те, що тут ми диференціюємо не алгебраїчне значення швидкості, як було раніше, а абсолютну її величину. Нормальне прискорення $w_n = \frac{V^2}{\rho}$.

Розглянемо окремі випадки. Якщо точка рухається по кривій рівномірно, то алгебраїчна величина швидкості не змінюється, а тому $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, $w_n = \frac{v^2}{\rho}$.

Отже, *при рівномірному русі по кривій прискорення точки напрямлене по головній нормалі в бік угнутості траєкторії, а величина його дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії.*

Наявність прискорення точки при рівномірному русі по кривій легко зрозуміти, якщо врахувати зміну напряму руху точки по кривій. Лише при рівномірному русі точки по прямій її прискорення дорівнює нулю.

Компоненти прискорення можуть також дорівнювати нулю і в окремі моменти руху: $w_\tau = 0$, якщо величина швидкості досягає екстремального значення; $w_n = 0$ в точках перегину траєкторії, де $\rho = \infty$.

Нормальне прискорення дорівнює нулю також у ті моменти, коли точка на мить зупиняється; це буває, наприклад, у крайніх положеннях математичного маятника.

Вище ми бачили, що перші й другі похідні по часу від функцій

$$\boldsymbol{r}(t),\ s(t),\ x(t),\ y(t),\ z(t)$$

визначають швидкість і прискорення руху точки. Ось чому перші й другі похідні цих функцій існують і, як правило, неперервні.

§ 8. СЕКТОРНА ШВИДКІСТЬ ТОЧКИ

Радіус-вектор $\boldsymbol{OM}$ точки M, що рухається в площині xOy, описує певну площу S. З часом площа S може змінюватись швидше або повільніше — залежно від характеру руху точки. Характеристикою бистроти зміни в часі площі S буде, за аналогією до попереднього, похідна $\frac{dS}{dt}$. Цю величину називають *секторною швидкістю*. Обчислимо її.

1. Елементарний приріст площі дорівнює сумі площ двох трикутників:

$$\text{пл. } OMM' = \text{пл. } OMN + \text{пл. } MNM',$$

де MN — дуга кола радіуса OM з центром у точці O. Але другий доданок, тобто площа MNM', є малим не нижче другого порядку, тоді як площа OMN — мала першого порядку (рис. 7). З точністю до малих другого порядку, які зникають при переході до границі, маємо:

$$dS = \text{пл. } OMM' = \text{пл. } OMN = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi.$$

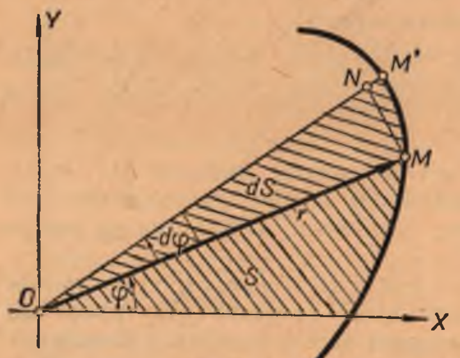

Рис. 7.

Тому секторна швидкість дорівнює

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (1.32)$$

2. Величину секторної швидкості можна подати і в декартових координатах. Оскільки

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi,$$

то

$$dx = dr \cdot \cos\varphi - r \cdot d\varphi \cdot \sin\varphi,$$
$$dy = dr \cdot \sin\varphi + r \cdot d\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Складаємо вираз $x \cdot dy - y \cdot dx$; після обчислень дістанемо, що

$$x \cdot dy - y \cdot dx = r^2 \cdot d\varphi.$$

Отже, секторна швидкість дорівнює

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{dt}$$

і остаточно

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}\right). \qquad (1.33)$$

§ 9. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ В КРИВОЛІНІЙНИХ КООРДИНАТАХ

1. Координати. У фізиці часто використовуються криволінійні системи координат. Окремими випадками цих систем є полярна (на площині), циліндрична і сферична системи координат.

Положення точки в просторі відносно декартової системи координат визначається трьома числами — координатами — x, y, z. Але положення точки M відносно цієї самої системи координат можна визначити не тільки декартовими координатами x, y, z.

Циліндричними координатами точки M називаємо три числа r, φ, z: $r = OM'$ — віддаль точки M від осі Oz; φ — двогранний

кут, утворений площиною, що проходить через вісь Oz і точку M, з площиною xOz; z — віддаль точки M від площини xOy (рис. 8). Межі зміни величин r, φ, z такі:

$$0 \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$$

Декартові і циліндричні координати точки M зв'язані між собою залежностями

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad z = z. \qquad (1.34)$$

Крива, яку описує точка M у просторі, якщо змінювати тільки одну її координату, залишаючи незмінними дві інших, називається *координатною лінією*. Маємо три координатних лінії: r-лінія — півпряма, що перетинає вісь Oz під прямим кутом; φ-лінія — коло, що лежить у площині, перпендикулярній до осі Oz, з центром на цій осі; z-лінія — пряма, паралельна осі Oz.

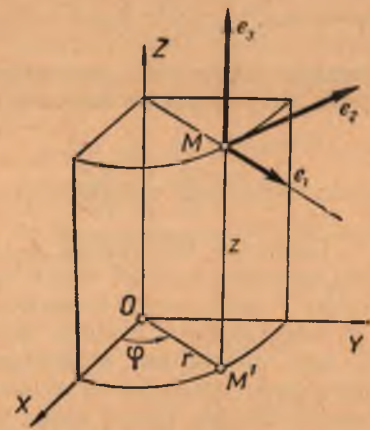

Рис. 8.

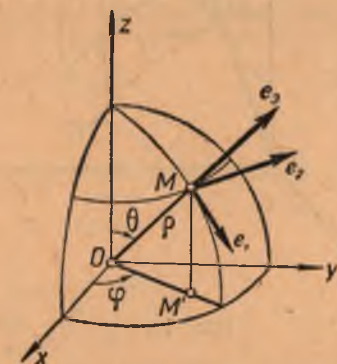

Рис. 9.

Сферичними координатами точки M є широта θ (кут θ відлічують від осі Oz), довгота φ і віддаль ρ точки M від початку координат (рис. 9).

Границі зміни цих координат такі:

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho < \infty.$$

Зв'язок між декартовими і сферичними координатами точки подається формулами

$$x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi, \quad z = \rho \cdot \cos\theta. \qquad (1.35)$$

Координатними лініями тут є: паралель (φ-лінія), меридіан (θ-лінія) і півпряма, що виходить з початку координат (ρ-лінія).

Саме тому, що реальний простір тривимірний, для однозначного визначення положення точки в просторі потрібні три незалежні один від одного параметри. Вище такими параметрами були: x, y, z у декартовій системі координат; r, φ, z у циліндричній; θ, φ, ρ у сферичній.

Взагалі ж цими параметрами можуть бути які завгодно величини q_1, q_2, q_3, але такі, що кожній трійці чисел x, y, z (кожній точці простору) відповідає тільки одна певна трійка чисел q_1, q_2, q_3, і навпаки. Інакше, між системами значень величин x, y, z і системами значень параметрів q_1, q_2, q_3 повинна існувати взаємно однозначна відповідність, тобто система рівнянь

$$q_1 = q_1(x, y, z),$$
$$q_2 = q_2(x, y, z),$$
$$q_3 = q_3(x, y, z) \qquad (1.36)$$

повинна допускати однозначний розв'язок відносно x, y, z:

$$x = x(q_1, q_2, q_3),$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3),$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3). \qquad (1.37)$$

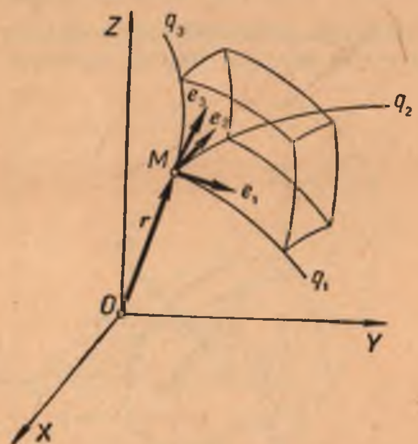

Рис. 10.

Одиничні вектори e_1, e_2, e_3, які виходять з однієї точки простору і напрямлені по дотичних до координатних ліній q_1, q_2, q_3 в бік зростання відповідних координат, утворюють *місцевий координатний базис* (рис. 10).

Радіус-вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z)$ рухомої точки в просторі буде функцією параметрів q_1, q_2, q_3, бо x, y, z є функції цих параметрів; тому маємо

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Обчислимо тепер вектор $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}[\boldsymbol{i} \cdot x(q_1, q_2, q_3) + \boldsymbol{j} \cdot y(q_1, q_2, q_3) + \boldsymbol{k} \cdot z(q_1, q_2, q_3)] \ (i = 1, 2, 3).$$

Його абсолютна величина, яку позначимо через H_i (величини H_i називають *коефіцієнтами Ляме*), дорівнює

$$\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right| = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} = H_i \ (i = 1, 2, 3). \quad (1.38)$$

У кожній точці простору вектор $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ напрямлений, очевидно, по дотичній до координатної лінії, що проходить через цю точку, у той самий бік, що й одиничний вектор e_i*.

* Це випливає з означення похідної $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ як границі відношення вектора $\Delta \boldsymbol{r}$ до скаляра Δq_i.

Отже, маємо:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = H_i \cdot e_i \ (i = 1, 2, 3). \qquad (1.39)$$

2. Швидкість. Щоб визначити швидкість точки, продиференціюємо по часу радіус-вектор $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2} \cdot \dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3} \cdot \dot{q}_3, \qquad (1.40)$$

або, згідно з (1.39),

$$\boldsymbol{v} = H_1 \dot{q}_1 \boldsymbol{e}_1 + H_2 \dot{q}_2 \boldsymbol{e}_2 + H_3 \dot{q}_3 \boldsymbol{e}_3. \qquad (1.41)$$

Знайдена формула дає розклад швидкості на напрями місцевого координатного базису. Множники при одиничних векторах $\boldsymbol{e}_i$ у формулі (1.41) є, як завжди, проекції вектора $\boldsymbol{v}$ на напрями одиничних векторів:

$$v_{q_i} = H_i \cdot \dot{q}_i \ (i = 1, 2, 3). \qquad (1.42)$$

Розглянемо конкретні випадки.

а) Полярні координати. Зв'язок між полярними і декартовими координатами такий:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \qquad y = r \cdot \sin\varphi.$$

Маємо:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \cos\varphi.$$

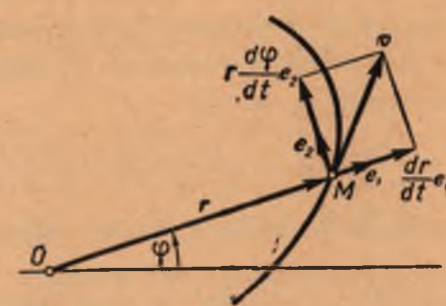

Рис. 11.

Коефіцієнти Ляме, згідно з (1.38), дорівнюють

$$H_r = 1, \qquad H_\varphi = r.$$

На підставі (1.42) проекції швидкості будуть

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Знайдені величини v_r і v_φ називають, відповідно, *радіальною* і *трансверсальною* швидкостями (рис. 11).

б) Циліндричні координати. За формулами (1.34) знаходимо:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\varphi,\qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi}=-r\cdot\sin\varphi,\qquad \frac{\partial x}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial r}=\sin\varphi,\qquad \frac{\partial y}{\partial \varphi}=r\cdot\cos\varphi,\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial r}=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,\qquad \frac{\partial z}{\partial z}=1.$$

Коефіцієнти Ляме, згідно з (1.38), дорівнюють

$$H_r=1,\quad H_\varphi=r,\quad H_z=1.$$

Проекції швидкості знайдемо за формулою (1.42):

$$v_r=\dot r,\quad v_\varphi=r\cdot\dot\varphi,\quad v_z=\dot z. \tag{1.43}$$

в) Сферичні координати. Аналогічно до попереднього маємо:

$$v_\rho=\dot\rho,\quad v_\varphi=\rho\cdot\dot\varphi\cdot\sin\theta,\quad v_\theta=\rho\cdot\dot\theta.$$

3. Прискорення. Щоб обчислити проекції *прискорення*, нам треба встановити два допоміжних співвідношення, а саме:

$$\frac{\partial \boldsymbol v}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i} \tag{1.44}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \boldsymbol v}{\partial q_i} \tag{1.45}$$
$$(i=1,\ 2,\ 3).$$

Перша тотожність випливає безпосередньо з формули (1.40), бо множники $\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}$ не залежать від $\dot q_i$.

Для доведення другої тотожності (1.45) зауважимо, що ліва її частина дорівнює (диференційовна функція $\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}$ залежить від t через криволінійні координати $q_1,\ q_2,\ q_3$):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_i\,\partial q_1}\cdot\dot q_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_i\,\partial q_2}\cdot\dot q_2+\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_i\,\partial q_3}\cdot\dot q_3. \tag{1.46}$$

Але, диференціюючи функцію $\boldsymbol v$, подану формулою (1.40), по q_i, дістанемо

$$\frac{\partial \boldsymbol v}{\partial q_i}=\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_1\,\partial q_i}\cdot\dot q_1+\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_2\,\partial q_i}\cdot\dot q_2+\frac{\partial^2 \boldsymbol r}{\partial q_3\,\partial q_i}\cdot\dot q_3. \tag{1.47}$$

Праві частини виразів (1.46) і (1.47) однакові, отже, тотожність (1.45) доведено.

Розглянемо тепер обчислення проекцій прискорення на напрями $\boldsymbol e_1,\ \boldsymbol e_2,\ \boldsymbol e_3$ місцевого координатного базису. За означенням скалярного добутку і з допомогою (1.39) маємо:

$$w_{q_i}=\boldsymbol w\cdot\boldsymbol e_i=\dot{\boldsymbol v}\cdot\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i},$$

звідки

$$H_i w_{q_i}=\dot{\boldsymbol v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol v\cdot\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}\right)-\boldsymbol v\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}\right). \tag{1.48}$$

Ми застосували тут формулу похідної від добутку двох функцій: $\boldsymbol v$ і $\frac{\partial \boldsymbol r}{\partial q_i}$.

Користуючись допоміжними співвідношеннями (1.44) і (1.45), перепишемо (1.48) так:

$$H_i w_{q_i}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol v\cdot\frac{\partial \boldsymbol v}{\partial \dot q_i}\right)-\boldsymbol v\cdot\frac{\partial \boldsymbol v}{\partial q_i},$$

або

$$H_i w_{q_i}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{\boldsymbol v\cdot\boldsymbol v}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\boldsymbol v\cdot\boldsymbol v}{2}\right),$$

або

$$H_i w_{q_i}=\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{V^2}{2}\right).$$

Звідси

$$w_{q_i}=\frac{1}{H_i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial \dot q_i}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial q_i}\right], \tag{1.49}$$

де $\tau=\frac{V^2}{2}$.

Формула (1.49) і визначає проекції прискорення на напрями місцевого координатного базису в криволінійній системі координат.

Застосуємо знайдені загальні формули до конкретних систем координат

а) Полярні координати. Маємо:

$$\tau=\frac{1}{2}V^2=\frac{1}{2}\left(v_r^2+v_\varphi^2\right)=\frac{1}{2}\left(\dot r^2+r^2\cdot\dot\varphi^2\right).$$

Отже,

$$w_r=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot r}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial r}=\ddot r-r\dot\varphi^2,$$
$$w_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right]=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\cdot\dot\varphi\right).$$

б) Циліндричні координати. Оскільки циліндрична система координат ортогональна (напрями $\boldsymbol e_1,\ \boldsymbol e_2,\ \boldsymbol e_3$ взаємно перпендикулярні), маємо:

$$\tau=\frac{1}{2}V^2=\frac{1}{2}\left(v_r^2+v_\varphi^2+v_z^2\right)=\frac{1}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\varphi^2+\dot z^2\right),$$

звідки

$$w_r=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot r}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial r}=\ddot r-r\dot\varphi^2,$$
$$w_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot\varphi}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial\varphi}\right]=\frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(r^2\dot\varphi\right),$$
$$w_z=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\dot z}\right)-\frac{\partial\tau}{\partial z}=\ddot z.$$

в) **Сферичні координати.** Маємо:

$$\tau = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2);$$

проекції прискорення дорівнюють:

$$w_\rho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - \rho\dot{\theta}^2,$$

$$w_\varphi = \frac{1}{\rho \sin \theta}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial \tau}{\partial \varphi}\right] = \frac{1}{\rho \sin \theta} \cdot \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi} \sin^2\theta),$$

$$w_\theta = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \tau}{\partial \theta}\right] = \frac{1}{\rho}\left[\frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\theta}) - \rho \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \theta \cos \theta\right].$$

Розділ II

НАЙПРОСТІШІ ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 1. ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Найпростішим рухом твердого тіла є його поступальний рух.

Рух тіла, при якому відрізок прямої, що сполучає будь-які дві його точки, переміщається паралельно самому собі, називається поступальним.

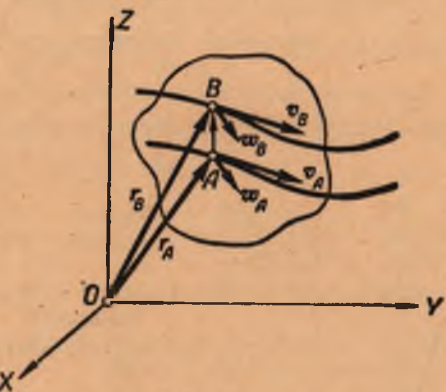

Рис. 12.

Прикладом поступального руху твердого тіла є рух ящика стола вздовж напрямних пазів, рух спарника паровоза на прямолінійній ділянці шляху, рух поршня в циліндрі і т. д.

Доведемо три теореми, які цілком характеризують поступальний рух тіла.

Теорема 1. *При поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії.*

Виберемо дві довільні точки A і B твердого тіла. З рисунка видно, що $\boldsymbol{r}_B(t) = \boldsymbol{r}_A(t) + \boldsymbol{AB}$, де вектор $\boldsymbol{AB}$ сталий за величиною і напрямом, бо рух твердого тіла, за умовою, поступальний. Отже, радіуси-вектори $\boldsymbol{r}_B(t)$ і $\boldsymbol{r}_A(t)$ точок B і A твердого тіла відрізняються лише на сталий у часі вектор $\boldsymbol{AB}$, так що траєкторія точки A збігається з траєкторією точки B при зміщенні її (траєкторії точки A) в просторі, як незмінної, на вектор $\boldsymbol{AB}$. Такі траєкторії називаються *конгруентними* (рис. 12).

Теорема 2. *Якщо рух твердого тіла поступальний, то вектори швидкостей всіх його точок рівні між собою в кожний даний момент часу.*

Розглянемо рух двох довільно взятих у тілі точок A і B. Їх радіуси-вектори зв'язані співвідношеннями

$$\boldsymbol{r}_B(t) = \boldsymbol{r}_A(t) + \boldsymbol{AB},$$

де $\boldsymbol{AB} = \text{const}$. Диференціюючи це співвідношення по t, маємо:

$$\frac{d\boldsymbol{r}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt},$$

або

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A,$$

що й треба було довести.

Вектор швидкості, спільний для всіх точок твердого тіла, називається *швидкістю поступального руху* твердого тіла.

Теорема 3. *Якщо рух твердого тіла поступальний, то вектори прискорень усіх його точок рівні між собою в кожний даний момент часу.*

Якщо A і B — дві довільні точки твердого тіла, то протягом усього часу руху $\boldsymbol{v}_B(t) = \boldsymbol{v}_A(t)$. Продиференціювавши це співвідношення по часу, матимемо:

$$\frac{d\boldsymbol{v}_B}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt},$$

або

$$\boldsymbol{w}_B(t) = \boldsymbol{w}_A(t),$$

що й треба було довести.

Отже, *при поступальному русі твердого тіла всі його точки описують однакові траєкторії, а вектори швидкостей і вектори прискорень всіх його точок, відповідно, рівні між собою в кожний момент часу.*

Тому поступальний рух твердого тіла цілком характеризується рухом однієї будь-якої точки цього тіла. Поступальний рух є *прямолінійним* або *криволінійним* залежно від того, прямими чи кривими лініями є траєкторії точок тіла.

2. Усе сказане приводить нас до висновку, що *рівняння поступального руху* тіла в координатній формі мають вигляд:

$$x = x_p(t), \quad y = y_p(t), \quad z = z_p(t), \tag{1.50}$$

де x_p, y_p, z_p — координати довільно вибраної в тілі точки (її називають *полюсом*).

§ 2. ОБЕРТАННЯ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

Другим простим видом руху твердого тіла є обертання тіла навколо нерухомої осі. Такий рух тіла називається *обертальним*.

Якщо закріпити нерухомо в просторі дві точки A і B твердого тіла, то тіло зможе обертатись лише навколо прямої AB, що проходить через дві закріплені точки. Точки тіла, які лежать на прямій AB, залишаються, очевидно, нерухомими в просторі. Тому можна дати таке означення:

Рух твердого тіла називається обертальним, якщо в цьому тілі є пряма, всі точки якої залишаються нерухомими в просторі.

Ця пряма називається *віссю обертання.*

Кожна точка, яка не лежить на осі обертання, рухається по колу, площина якого перпендикулярна до цієї осі, а центр лежить на ній.

1. Рівняння руху. Щоб визначити положення твердого тіла в просторі, виконаємо такі побудови. Через вісь обертання тіла, яку беремо за вісь Oz, проведемо півплощину, нерухому в просторі, і ще одну півплощину, жорстко скріплену з твердим тілом. Ця друга півплощина буде рухомою відносно простору, бо вона обертається разом з твердим тілом. Двогранний кут між півплощинами, відлічений від нерухомої півплощини до рухомої, називатимемо *кутом повороту* твердого тіла. Відповідно до *правої* системи декартових координат *ми вважаємо кут повороту* φ *додатним, якщо він відлічений проти ходу стрілки годинника, коли дивитись з боку додатного напряму осі* Oz. *Напрям обертання тіла вважаємо додатним, якщо кут повороту* φ *зростає, і від'ємним у випадку, коли* φ *зменшується.*

Оскільки тверде тіло являє собою незмінювану систему, то, за попередньою умовою, кут повороту рухомої півплощини однозначно визначає і поворот твердого тіла навколо нерухомої осі, і, очевидно, положення тіла в просторі.

Кожному моменту часу відповідає цілком певне значення кута повороту φ. Це означає, що кут повороту є функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{1.51}$$

Функціональну залежність (1.51) називають *рівнянням руху тіла навколо нерухомої осі*, або *рівнянням обертального руху*. Коли функція $\varphi(t)$ відома, то говорять, що відомий *закон обертання* твердого тіла, і тоді ми можемо визначити положення тіла в будь-який момент часу.

Функція $\varphi(t)$ неперервна за природою самого механічного руху; вважатимемо також, що існують похідні від функції $\varphi(t)$ по часу не нижче другого порядку.

2. Кутова швидкість тіла у випадку рівномірного обертання. Обертальні рухи бувають повільнішими і швидшими. Бистрота обертального руху характеризується новою фізичною величиною — *кутовою швидкістю* обертання тіла. Введемо поняття кутової швидкості спочатку в найпростішому випадку рівномірного обертання тіла.

Обертальний рух тіла називається рівномірним, якщо довільним рівним між собою проміжкам часу відповідають рівні прирости кута повороту.

Тому для даного рівномірного обертального руху відношення $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ приросту кута повороту тіла до відповідного проміжку часу є сталим. Числове значення цієї величини не залежить від того, за який — більший чи менший — проміжок часу її визначають:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{const} = \omega,$$

звідки

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t. \tag{1.52}$$

Буквою ω тут позначено сталу, яка виступає як характеристика бистроти обертального руху тіла і називається *кутовою швидкістю*.

Ми прийшли до такого висновку:

Кутова швидкість є міра бистроти обертального руху; кутова швидкість рівномірного обертального руху вимірюється відношенням приросту кута повороту тіла до відповідного проміжку часу: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. *Величина кутової швидкості рівномірного обертального руху і величина кута повороту тіла за одиницю часу однакові.*

Якщо тіло обертається у від'ємному напрямі, то приріст кута повороту $\Delta\varphi$ є величина від'ємна; у цьому випадку і кутова швидкість обертання тіла $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ буде числом від'ємним.

Хоч кутова швидкість і дорівнює чисельно приросту кута повороту тіла за одиницю часу, але ототожнювати кутову швидкість з кутом повороту тіла аж ніяк не слід. На відміну від кута повороту, кутова швидкість є *просторово-часовою* характеристикою обертального руху. Отже, кутова швидкість є кінематичною величиною нового типу.

3. Кутова швидкість тіла у випадку нерівномірного обертання. Тепер розглянемо означення кутової швидкості в загальному випадку *нерівномірного* обертального руху. Рівняння руху тіла навколо нерухомої осі буде

$$\varphi = \varphi(t).$$

На відміну від випадку рівномірного обертального руху, при нерівномірному обертанні прирости кута повороту тіла за рівні проміжки часу взагалі вже не будуть рівні між собою.

Відношення приросту кута повороту $\Delta\varphi$ до відповідного проміжку часу Δt дорівнює

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$$

і є *середньою кутовою швидкістю* дійсного обертального руху в проміжку часу від момента t до момента $t + \Delta t$.

Границя, до якої наближається середня кутова швидкість $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, *коли проміжок часу* Δt *прямує до нуля, називається кутовою швидкістю в даний* (довільний) *момент часу* t:

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \qquad (1.53)$$

Отже, *кутова швидкість дорівнює першій похідній по часу від кута повороту.*

Знак кутової швидкості ω вказує на додатний чи від'ємний напрям обертання тіла.

4. Кутове прискорення тіла у випадку рівнозмінного обертання. Другою основною кінематичною величиною, що характеризує обертальний рух, є кутове прискорення — бистрота зміни кутової швидкості.

З нерівномірних обертальних рухів найпростішим є рівнозмінний обертальний рух, коли кутова швидкість тіла дістає рівні між собою прирости за будь-які рівні проміжки часу.

Тепер треба провести міркування, цілком аналогічні до наведених у розділі I (§ 5, п. 1). Тому нижче ми обмежуємось лише короткими зауваженнями.

Для даного рівнозмінного обертального руху відношення $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ є сталим $\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta t}\right.$ не залежить від того, за який проміжок часу Δt це відношення обчислюють $\Big)$. Отже, маємо:

$$\Delta\omega = \varepsilon \cdot \Delta t,$$

де ε — стала.

Фізична величина, що характеризує бистроту зміни кутової швидкості, називається *кутовим прискоренням* тіла.

Ми прийшли до висновку:

Кутове прискорення є міра бистроти зміни кутової швидкості; кутове прискорення рівнозмінного обертального руху тіла вимірюється відношенням приросту кутової швидкості до відповідного проміжку часу: $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. *Величина кутового прискорення рівнозмінного обертального руху і величина приросту кутової швидкості за одиницю часу однакові.*

Якщо абсолютна величина кутової швидкості зростає, то обертальний рух називають *рівноприскореним*, якщо ж спадає — *рівносповільненим*.

5. Кутове прискорення тіла в загальному випадку. Розглянемо тепер загальний випадок нерівномірного обертального руху.

Нехай кутова швидкість змінюється з часом за законом

$$\omega = \omega(t).$$

Відношення приросту кутової швидкості $\Delta\omega$ до відповідного проміжку часу Δt дорівнює

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(t)}{\Delta t}.$$

Відношення $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ можна розглядати як кутове прискорення рівнозмінного обертального руху, в якому за проміжок часу Δt кутова швидкість дістає приріст $\Delta\omega$.

Середнім кутовим прискоренням нерівномірного обертального руху називається кутове прискорення такого рівнозмінного обертального руху, в якому кутова швидкість дістає той самий приріст $\Delta\omega$ *і за той самий проміжок часу* Δt, *що й у нерівномірному обертальному русі:* $\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Виконавши тепер перехід до границі при $\Delta t \to 0$, дістанемо кутове прискорення тіла. Маємо:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (1.54)$$

На підставі (1.53) цю формулу можна переписати так:

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \qquad (1.55)$$

Кутове прискорення дорівнює першій похідній по часу від кутової швидкості, $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, *або другій похідній по часу від кута повороту,* $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Приклад 1. **Рівномірний обертальний рух.** Із означення рівномірного обертального руху випливає, що

$$d\varphi = \omega dt \quad (\omega = \text{const}),$$

звідки

$$\varphi - \varphi_0 = \omega(t - t_0),$$

або

$$\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0), \qquad (1.56)$$

де φ_0 — значення кута повороту в момент t_0. Це є рівняння рівномірного обертального руху.

Приклад 2. **Рівнозмінний обертальний рух.** Із означення рівнозмінного обертального руху випливає, що

$$d\omega = \varepsilon dt \quad (\varepsilon = \text{const}),$$

звідки

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0). \qquad (1.57)$$

На підставі (1.53) і (1.57) можна написати:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0),$$

звідки

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \varepsilon \cdot \frac{(t - t_0)^2}{2}, \qquad (1.58)$$

де φ_0 і ω_0 — значення кута повороту і кутової швидкості в момент t_0.

Функціональна залежність (1.58) є рівняння рівнозмінного обертального руху.

Приклад 3. **Швидкість і прискорення довільної точки тіла при його обертальному русі.** Траєкторія довільної точки M тіла є коло, радіус якого позначимо через h. Виберемо на траєкторії початкову точку M_0 для відліку дугової координати s. Відлічуватимемо кут повороту φ від півплощини, що проходить через вісь обертання і точку M_0 тіла. Рівняння руху точки в натуральній формі буде

$$s = h\varphi(t).$$

Алгебраїчна величина швидкості дорівнює

$$v = h\frac{d\varphi}{dt},$$

або

$$v = \omega h. \tag{1.59}$$

Абсолютна величина швидкості дорівнює

$$V = |v| = |\omega| \cdot h.$$

Дотичне і нормальне прискорення точки M визначається за формулами

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot h = \varepsilon h,$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{h} = \omega^2 h. \tag{1.60}$$

Величина прискорення точки M тіла дорівнює

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кут α між вектором прискорення w і радіусом обертання визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Цей кут α однаковий для всіх точок тіла у даний момент часу.

6. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення. Обертальний рух тіла навколо осі характеризується (визначається) трьома елементами: а) положенням осі обертання тіла в просторі; б) величиною кутової швидкості обертання і в) напрямом обертання, який може бути як додатним, так і від'ємним.

У заданому масштабі відкладемо вздовж осі обертання від довільної її точки O вектор $\boldsymbol{OC}$ так, щоб обертання тіла відбувалось проти годинникової стрілки, якщо дивитись у напрямі від кінця вектора $\boldsymbol{OC}$ до його початку. Нагадуємо, що таке погодження напряму вектора з напрямом обертання вважається додатним у правій системі координат, яку ми й беремо. Уведений тут вектор $\boldsymbol{OC}$ характеризує одночасно всі три елементи обертання тіла і називається *вектором кутової швидкості* обертання ω* (рис. 13).

---

* Те, що кутова швидкість є дійсно величиною векторною, випливає з теореми про додавання обертань (див. розд. VI).

Кутове прискорення є вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, *який характеризує бистроту зміни в часі вектора кутової швидкості* $\boldsymbol{i}$, отже, дорівнює

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \tag{1.61}$$

При обертанні тіла навколо нерухомої осі вектор $\boldsymbol{\omega}$ і його приріст $d\boldsymbol{\omega}$ можуть бути напрямлені тільки вздовж осі обертання. Отже, і вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, що дорівнює відношенню вектора $d\boldsymbol{\omega}$ до додатного скаляра dt, напрямлений уздовж нерухомої осі обертання.

Якщо обертання прискорене, то абсолютна величина кутової швидкості зростає, і тоді вектори кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ й кутового прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ напрямлені в одну і ту саму сторону, а коли

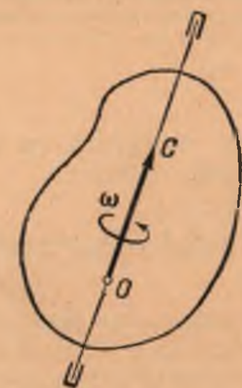

Рис. 13.

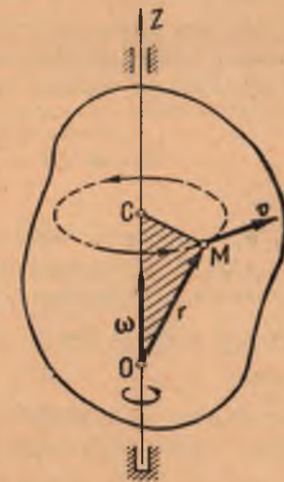

Рис. 14.

обертання сповільнене, то абсолютна величина кутової швидкості зменшується і вектори кутової швидкості й кутового прискорення напрямлені в протилежні сторони.

7. Формула Ейлера. Розглянемо швидкість точки M твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі Oz.

Швидкість $\boldsymbol{v}$ точки M за величиною дорівнює добутку віддалі MC точки M від осі обертання на величину кутової швидкості ω, а за напрямом перпендикулярна до площини, що проходить через вісь і точку M.

Вектор $\boldsymbol{v}$ можна обчислити так. Нехай $\boldsymbol{\omega}$ — вектор кутової швидкості обертання тіла, а $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точки M (на рис. 14 ці обидва вектори відкладені від початку координат O).

Згадавши з курсу математики означення векторного добутку, маємо:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}, \tag{1.62}$$

бо величина векторного добутку $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ дорівнює

$$|\boldsymbol{\omega}| \cdot r \cdot \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega r}}) = |\boldsymbol{\omega}| \cdot CM = V,$$

а напрям його збігається з напрямом $\boldsymbol{v}$.

Отже, *вектор швидкості будь-якої точки твердого тіла в обертальному русі дорівнює векторному добутку кутової швидкості і радіус-вектора точки.* Формула (1.62) є однією з найважливіших у кінематиці і називається *формулою Ейлера.*

На підставі (1.9) формулу Ейлера можна подати ще в такому вигляді:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{1.63}$$

Користуючись формулою Ейлера, знайдемо проекції швидкості $\boldsymbol{v}$ довільної точки M тіла на декартові осі.

Формулу Ейлера можна переписати у вигляді детермінанта:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

де ω_x, ω_y, ω_z — проекції вектора кутової швидкості на координатні осі, а x, y, z — координати точки M.

Розкриваючи детермінант, дістанемо

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(\omega_y z - \omega_z y) + \boldsymbol{j}(\omega_z x - \omega_x z) + \boldsymbol{k}(\omega_x y - \omega_y x).$$

Отже, маємо:

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned}\right\} \tag{1.64}$$

Якщо вісь обертання беремо за вісь Oz, матимемо

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega,$$

і формули (1.64) набирають такого вигляду:

$$v_x = -\omega y,$$
$$v_y = \omega x,$$
$$v_z = 0.$$

8. **Класифікація векторів.** 1. Вектори поділяються на *вільні, ковзні* і *зв'язані.* Властивості даної фізичної величини визначають і тип відповідного вектора.

Швидкість поступального руху тіла є вектор вільний, бо цей вектор фізично відповідає всякій точці тіла. Взагалі *вільний вектор зображає величину, початковий фізичний зміст якої зберігається, коли його віднести до довільної точки простору.* Вільний вектор визначається *трьома* числами, наприклад, проекціями на осі декартової системи.

Вектор кутової швидкості належить до типу ковзних векторів. Ковзний вектор зображає величину, фізичний зміст якої нерозривно зв'язаний з певною прямою в просторі, і визначається *п'ятьма* числами, наприклад, трьома

проекціями на декартові осі і координатами точки перетину прямої з площиною xOy.

Швидкість руху матеріальної точки є вектор, зв'язаний з даною точкою. Взагалі зв'язаний вектор зображає величину, фізичний зміст якої нерозривно зв'язаний з певною точкою простору, і визначається *шістьма* числами: трьома проекціями на осі координат і трьома координатами точки прикладання вектора.

2. Не менш важливою є друга класифікація векторів, яка зв'язана з істотною фізичною різницею між ними.

Одні векторні величини мають цілком певний напрям у просторі (наприклад, швидкість, сила), тоді як для інших векторних величин він у просторі фізично не визначений, і ми самі умовно приписуємо їм певний напрям (нагадаємо, що саме так ми зробили, коли вводили поняття про вектор кутової швидкості). Вектори першого типу називаються *полярними*, а другого — *аксіальними* (або *псевдовекторами*)

Вибір напряму аксіального вектора залежить від вибору правої чи лівої системи координат. Ми завжди користуватимемось правою системою декартових координат; для цього випадку вибір напряму аксіального вектора вже був з'ясований на прикладі вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ в п. 6, § 2.

Якщо замість правої системи координат використати ліву, то це не вплине на орієнтацію в просторі полярних векторів, але змінить орієнтацію всіх аксіальних векторів (псевдовекторів) на протилежну.

Розділ III

ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА (ГЕОМЕТРИЧНА ТЕОРІЯ)

§ 1. РУХ ТІЛА, ЯКИЙ ПАРАЛЕЛЬНИЙ НЕРУХОМІЙ ПЛОЩИНІ (ПЛОСКИЙ РУХ)

1. **Вступні зауваження.** *Рух твердого тіла називається плоским, якщо всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних певній нерухомій площині.*

Складові частини більшості механізмів, які зустрічаються в практиці машинобудування, здійснюють плоский рух (наприклад, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму).

При плоскому русі тіла його точки залишаються на незмінній віддалі від нерухомої площини. Ті *точки тіла, які лежать на заданій віддалі від нерухомої площини, утворюють так звану «плоску фігуру», що рухається, очевидно, в своїй площині.*

Коли закріпити одну точку плоскої фігури нерухомо в її площині, то фігура зможе тільки обертатись у своїй площині навколо нерухомої точки. Якщо закріпити ще й другу точку фігури, то нерухомими будуть і всі інші точки фігури. Звідси випливає, що положення плоскої фігури в її площині визначається положенням двох її точок, і тому вивчення плоского руху зводиться до вивчення руху двох точок плоскої фігури або руху відрізка, що сполучає дві довільні точки плоскої фігури.

У цьому параграфі ми розглянемо два способи дослідження руху плоскої фігури. Кожний з них спирається на відповідну теорему про довільне переміщення плоскої фігури в її площині. У першому способі неперервний рух плоскої фігури розглядають як сукупність тільки обертань, а в другому — плоский рух розкладають на поступальний і обертальний рухи.

2. Перша теорема про довільне переміщення плоскої фігури в її площині (теорема Ейлера — Шаля). Доведемо теорему:

Довільне переміщення плоскої фігури в її площині можна здійснити за допомогою повороту навколо певної нерухомої точки — центра обертання.

Нехай початкове положення плоскої фігури визначається положенням тих матеріальних її точок, які розташовані вздовж відрізка AB прямої. Кінцеве положення цього відрізка нехай буде $A'B'$.

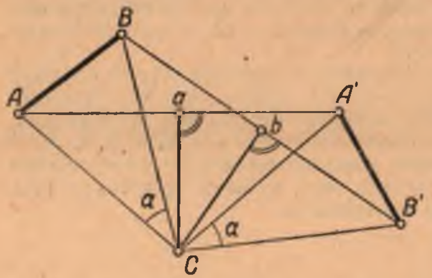

Рис. 15

Припустимо, що центр обертання існує, і знайдено його положення. Шуканий центр повинен бути рівновіддалений від точок A і A' та B і B', а тому він лежить у точці C перетину перпендикулярів aC і bC, проведених через середини відрізків AA' і BB' (рис. 15).

Із рівності трикутників CAB і $CA'B'$ (AB і $A'B'$ — одна й та сама незмінна система матеріальних точок, що суцільно заповнює відрізок; інші відповідні сторони трикутників рівні за побудовою) випливає, що відповідні кути трикутників рівні між собою. Маємо:

$$\angle ACB = \angle A'CB' = \alpha.$$

Якщо пряму CA повернути в площині фігури навколо точки C так, щоб точки A і A' сумістились, то при цьому точки B і B' також сумістяться. Це випливає з рівності кутів, $\angle BCB' = \angle ACA'$, кожний з яких дорівнює сумі кутів α і $\angle BCA'$. Теорему доведено.

Для повноти доведення залишається розглянути окремий випадок, коли виконана вище побудова неможлива, тобто коли відрізок AA' паралельний BB'. У цьому випадку перпендикуляри aC і bC збігаються або паралельні *.

У першому випадку центром обертання буде, очевидно, точка C перетину прямих AB і $A'B'$.

У другому випадку відрізок AB можна перемістити поступально. Цей останній випадок можна трактувати також як граничний для множини випадків, коли напрями AB і $A'B'$ дедалі менше відрізняються один від одного. Отже, поступальний рух плоскої фігури можна розглядати як обертальний навколо нескінченно віддаленого центра обертання.

Теорему доведено повністю.

* Пропонуємо читачеві самостійно виконати відповідні рисунки.

3. Неперервний рух плоскої фігури. Теорема Ейлера — Шаля дає змогу побудувати теорію неперервного руху плоскої фігури.

Розкладемо проміжок часу $(0, t)$, протягом якого вивчається рух, на n елементарних проміжків з допомогою деякої послідовності моментів часу:

$$0 = t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n = t.$$

Нехай $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ — положення фігури, відповідно, в моменти $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Застосувавши теорему Ейлера — Шаля n раз до переміщень фігури з положень A_i в положення A_{i+1}, $i = 0, 1, 2, \ldots (n-1)$, знайдемо n центрів обертання $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Разом з дійсним рухом фігури розглянемо її уявлюваний рух — послідовність рівномірних обертань навколо центрів C_i; у моменти часу $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ положення точок фігури в її дійсному і уявлюваному рухах однакові.

Нехай тепер число n елементарних проміжків часу прямує до нескінченності, а протяжність кожного з них — до нуля. Тоді ми приходимо до висновку, що рух плоскої фігури в кожний момент часу зводиться до миттєвого обертального руху навколо певної точки, яка називається *миттєвим центром обертання*. З'ясуємо це докладніше.

Нехай фігура в момент t буде в положенні A, а в момент $t + \Delta t$ — в положенні B. Нехай точка C' є центр обертання для розглядуваних положень A і B, а $\Delta\varphi$ — кут, на який слід повернути фігуру навколо точки C', щоб вона перемістилась з положення A в положення B. Зафіксуємо момент t і зменшуватимемо Δt.

Границя, до якої наближається середня кутова швидкість $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, *коли* $\Delta t \to 0$, *називається миттєвою кутовою швидкістю фігури:*

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

У процесі переходу до границі точки C', змінюючи своє положення, наближаються до певного граничного положення C. Ця точка C і є миттєвим центром обертання фігури.

Швидкість (але не прискорення) довільної точки M фігури є такою, як і при обертанні навколо нерухомого центра; отже, за формулою Ейлера

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості, а $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точки M (вектори $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{r}$ виходять з точки C — миттєвого центра обертання — і йдуть: $\boldsymbol{r}$ — до точки M, $\boldsymbol{\omega}$ — по перпендикуляру до площини фігури вздовж миттєвої осі обертання).

Геометричне місце миттєвих центрів обертання на нерухомій площині є крива, яку називають *нерухомою центроїдою;* геометричне місце миттєвих центрів обертання на рухомій площині, незмінно зв'язаній з рухомою плоскою фігурою, є *рухома центроїда.*

Центроїду можна розглядати як неперервну криву, в яку перетворюється ламана лінія в процесі граничного переходу (лінія $C_1, C_2, \ldots, C_n$ при $n \to \infty$).

Рухома і нерухома центроїди дотикаються одна одної в кожний момент у миттєвому центрі обертання. Якщо при неперервному русі плоскої фігури швидкості точок цієї фігури не однакові між собою в будь-який момент часу і якщо рух фігури не зводиться до обертання навколо нерухомого центра, то центроїди завжди існують і відбувається кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій. За однакові проміжки часу миттєвий центр обертання описує дуги однакової довжини на обох центроїдах.

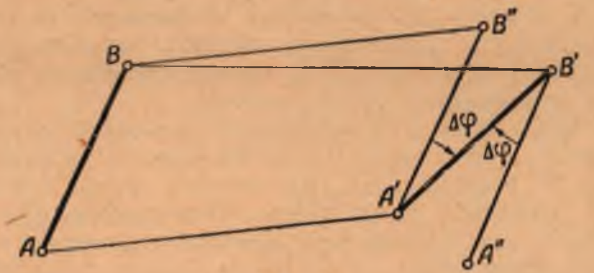

Рис. 16.

Усі твердження, що зв'язані з описаним вище процесом переходу до границі, інтуїтивно здаються очевидними. Можна дати строго логічне обгрунтування всіх цих фактів аналітичним методом.

У випадку кочення круглого диска по прямій миттєвим центром обертання є точка дотику диска; нерухомою центроїдою — пряма, по якій котиться диск; рухомою центроїдою — обвід диска.

4. Друга теорема про довільне переміщення плоскої фігури в її площині. Доведемо теорему:

Довільно перемістити плоску фігуру в її площині можна за допомогою поступального переміщення разом з довільною точкою (полюсом) *і повороту навколо полюса.*

Плоску фігуру S можна перемістити з початкового положення AB в кінцеве положення $A'B'$ так (рис. 16). Вибираємо одну з точок фігури, наприклад, точку A, за основну (полюс) і надаємо фігурі поступального переміщення на вектор $\mathbf{AA'}$. В результаті поступального переміщення точка A суміститься з точкою A', а точка B перейде в проміжне положення B''. Тепер залишається повернути фігуру на кут $\Delta\varphi = \angle B''A'B'$ навколо точки A', і тоді точка B'' суміститься з B'. Теорему доведено.

Якщо за полюс взяти іншу точку, наприклад, точку B, то фігуру можна так само перемістити з положення AB в положення $A'B'$ за допомогою поступального переміщення $\mathbf{BB'}$ разом з новим полюсом B і повороту навколо точки B' на той самий кут $\Delta\varphi$ і в тому самому напрямі (за годинниковою стрілкою), що й у першому випадку, коли полюсом була точка A.

Отже, вектор, що визначає поступальне переміщення фігури, залежить від вибору полюса, тоді як величина кута і напрям повороту від вибору полюса не залежать.

Якщо за полюс обрати центр обертання, то поступальна частина переміщення зникає, і ми приходимо до теореми Ейлера—Шаля, яку розглядали вище.

5. Неперервний рух плоскої фігури за другим поданням. Розглянемо знову послідовність близьких положень фігури $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Перемістити фігуру з положення A_i в положення A_{i+1} $[i = 0, 1, 2, \ldots (n-1)]$ можна за допомогою поступального переміщення разом з полюсом і обертального переміщення навколо полюса.

Тому й кожне нескінченно мале переміщення фігури є сукупністю нескінченно малого поступального її переміщення разом з полюсом і повороту на нескінченно малий кут навколо полюса. Отже, *неперервний рух фігури можна розглядати ще як сукупність поступального руху разом з фіксованою точкою плоскої фігури — полюсом — і обертального руху навколо полюса. Кутова швидкість обертального руху не залежить від вибору полюса, бо кут $\Delta\varphi$ повороту фігури, як було доведено, не залежить від вибору полюса.*

§ 2. РУХ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

1. Вступні зауваження. У техніці часто бувають випадки такого руху твердого тіла, при якому одна його точка залишається нерухомою; прикладами такого руху є рух конічних коліс, універсального шарніра Кардана, обертання гіроскопа в кардановому підвісі тощо.

Нехай, за умовою, нерухомою буде точка O тіла. Якщо закріпити ще одну точку A тіла нерухомо в просторі, то тверде тіло зможе тільки обертатись навколо осі OA. Якщо закріпити нерухомо ще й третю точку B, що не лежить на лінії OA, то нерухомими будуть і всі інші точки твердого тіла. Звідси випливає, що положення в просторі твердого тіла з нерухомою точкою O визначається цілком і однозначно положенням двох інших його довільних точок, які не лежать на одній і тій самій прямій, що проходить через нерухому точку O тіла. Нехай точки A і B тіла вибрано на рівних віддалях від нерухомої точки O, тобто $OA = OB$.

2. Теорема Ейлера—Даламбера. Дослідження руху тіла навколо нерухомої точки спирається на теорему Ейлера—Даламбера:

Довільно перемістити тверде тіло навколо нерухомої точки можна одним поворотом навколо певним способом вибраної осі обертання.

Ця теорема цілком аналогічна до теореми Ейлера — Шаля для випадку руху плоскої фігури; способи доведення обох теорем теж аналогічні.

Опишемо навколо нерухомої точки O сферу радіуса $r = OA = OB$. Сполучимо точки A і B на сфері дугою AB великого кола, що є, очевидно, лінією перетину сфери з площиною, яка проходить через три точки: O, A і B (рис. 17).

Нехай кінцеве положення дуги AB є $A'B'$. Сполучимо точки A і A', а також B і B' дугами великих кіл. З середини a і b дуг AA' і BB' проведемо дуги великих кіл aC і bC, які ортогональні до дуг AA' і BB'. Нехай дуги aC і bC перетинаються в точці C. Точка C, очевидно, рівновіддалена від точок A і A', B і B'. З рівності сферичних трикутників ABC і $A'B'C$ (відповідні сторони рівні за побудовою) випливає, що коли повернути дугу AB навколо осі OC на кут ACA', то дуга AB суміститься з дугою $A'B'$, і теорему доведено.

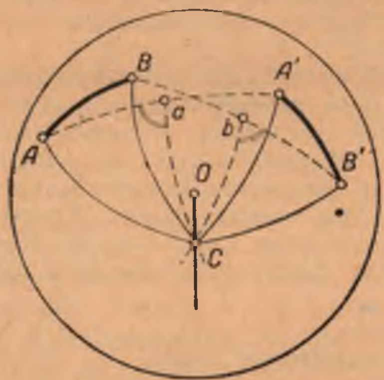

Рис. 17.

Якщо дуги aC і bC зливаються, то віссю обертання є лінія, що сполучає нерухому точку O з точкою перетину дуг AB і $A'B'$. Це — виняток, аналогічний до розглянутого вище для плоского руху.

Теорема Ейлера — Даламбера дає змогу дати наочну інтерпретацію руху твердого тіла навколо нерухомої точки. Тут можна повторити міркування попереднього параграфа.

Нехай тіло в момент t буде в положенні A, а в момент $t + \Delta t$ — в положенні B. Нехай OC' є вісь обертання для розглядуваних положень A і B, а $\Delta\varphi$ — той кут, на який треба повернути тіло навколо осі OC', щоб воно перемістилось з положення A в положення B.

Зафіксуємо момент t і зменшуватимемо Δt. *Границя, до якої наближається середня кутова швидкість* $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, *коли* $\Delta t \to 0$, *називається миттєвою кутовою швидкістю тіла:*

$$\omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Середній кутовій швидкості $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ відповідає вектор середньої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_{cp}$, який напрямлений по осі обертання OC'.

У процесі переходу до границі, $\Delta t \to 0$, напрям осі OC' в просторі змінюється; нехай OC є граничне положення осі обертання OC'. Вісь OC називається *миттєвою віссю обертання* тіла. Миттєвій кутовій швидкості $\omega(t)$ відповідає *вектор миттєвої кутової швидкості* $\boldsymbol{\omega}(t)$, який напрямлений по миттєвій осі обертання тіла.

Швидкість (але не прискорення) будь-якої точки M тіла така, як в обертальному русі навколо миттєвої осі; отже, за формулою Ейлера маємо:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор $\boldsymbol{OM}$, а $\boldsymbol{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості.

Геометричне місце миттєвих осей обертання відносно нерухомого простору називається *нерухомим аксоїдом*, а відносно простору, незмінно зв'язаного з рухомим тілом, — *рухомим аксоїдом*. Обидва аксоїди є конуси, які дотикаються один одного в кожний момент уздовж миттєвої осі обертання. При русі тіла навколо нерухомої точки рухомий аксоїд котиться без ковзання по нерухомому аксоїду.

У випадку кочення колового конуса по горизонтальній площині (конічні колеса) миттєвою віссю обертання є лінія дотику конуса й площини, нерухомим аксоїдом — сама площина, а рухомим аксоїдом — поверхня конуса.

Ми знову посилаємось тут на інтуїцію; строго логічне доведення тверджень, які зв'язані з переходом до границі, можна дати аналітичним способом.

§ 3. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Перша теорема про довільне переміщення твердого тіла в просторі. Доведемо теорему:

Довільно перемістити тверде тіло в просторі можна за допомогою поступального переміщення разом з довільною точкою (полюсом) *і повороту навколо певним способом вибраної осі, що проходить через полюс.*

Нехай початкове положення тіла задане положеннями трьох точок O, A і B (рис. 18), перша з яких вибрана в тілі довільно, а друга і третя — рівновіддалені від першої: $OA = OB = r$. Після деякого переміщення тіла точки O, A і B займуть вже нові положення в просторі: O', A', B'.

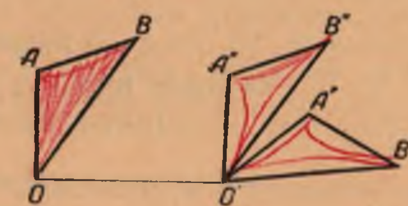

Рис. 18.

Якщо змістити тіло поступально на вектор $\boldsymbol{OO'}$, то точка O суміститься з точкою O', а точки A, B займуть положення A'', B'' на поверхні сфери радіуса r з центром у точці O'. Точки A', B' лежать також на поверхні цієї сфери. За теоремою Ейлера—Даламбера тіло можна перемістити з проміжного положення $O'A''B''$

в кінцеве положення $O'A'B'$ за допомогою одного повороту навколо осі обертання, що проходить через полюс O'. Теорему доведено.

2. **Друга теорема про довільне переміщення твердого тіла в просторі — теорема Шаля.** Доведемо тепер, що поступальне переміщення і обертання завжди можна вибрати так, що перше здійснюється вздовж осі другого; така сукупність поступального і обертального переміщень тіла називається *гвинтовим переміщенням*.

Нехай вектор $\mathbf{OO'}$ характеризує поступальне переміщення тіла, а вісь $O'C$ є вісь обертання. Існує сім'я площин, які незмінно зв'язані з тілом і залишаються паралельними своїм початковим положенням; це, очевидно, сім'я площин, перпендикулярних до осі обертання $O'C$. Нехай S і S' — довільна плоска фігура на одній з цих площин у початковому й кінцевому положеннях. Поступальне переміщення фігури S паралельно осі обертання переведе фігуру S у площину фігури S' — у положення S''. За теоремою Ейлера — Шаля S'' можна сумістити з S' за допомогою одного повороту навколо певної точки (тобто навколо осі, що проходить через цю точку паралельно осі $O'C$).

Отже, маємо теорему Шаля:

Довільно перемістити тверде тіло в просторі можна за допомогою гвинтового руху твердого тіла з певним способом вибраною гвинтовою віссю.

Тому найбільш загальне нескінченно мале переміщення тіла є гвинтовим. Вісь, навколо якої здійснюється нескінченно малий гвинтовий рух, називається *миттєвою гвинтовою віссю*.

Миттєва гвинтова вісь описує відносно нерухомого простору деяку лінійчасту поверхню — *нерухомий аксоїд*, а відносно рухомого тіла — *рухомий аксоїд*. Аксоїдами можуть бути, зокрема, однопорожнинні гіперболоїди. При русі тіла в просторі рухомий аксоїд миттєвих гвинтових осей не тільки котиться по нерухомому, а й ковзає вздовж спільної твірної — миттєвої гвинтової осі.

Розділ IV

ОСНОВНІ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА (АНАЛІТИЧНА ТЕОРІЯ)

§ 1. ЧИСЛО СТУПЕНІВ ВІЛЬНОСТІ РУХУ

*Число незалежних один від одного параметрів, які визначають положення матеріального об'єкта в просторі, називається числом ступенів вільності руху цього об'єкта**.

Матеріальна точка, яка може переміщатись тільки вздовж заданої прямої або кривої лінії, має один ступінь вільності руху: положення такої точки визначається тільки одним параметром — дуговою віддаллю s; точка, яка може переміщатись тільки по заданій поверхні, має два ступені вільності руху: положення такої точки на поверхні визначається двома параметрами — криволінійними координатами цієї точки на поверхні; точка, яка вільно рухається в просторі, має три ступені вільності: її положення в просторі визначається трьома параметрами: декартовими, циліндричними, сферичними або іншими криволінійними координатами; дві точки, сполучені твердим стержнем, мають п'ять ступенів вільності руху: одну точку можна вважати вільною (це дає три ступені вільності), але друга точка повинна бути на поверхні сфери з центром у першій точці і з радіусом, що дорівнює довжині стержня (це дає ще два ступені вільності); три матеріальні точки, сполучені трьома твердими стержнями, мають шість ступенів вільності руху: першу точку можна вважати вільною, друга повинна бути (відносно першої точки) на поверхні сфери, третя (відносно перших двох точок) — на колі, площина якого перпендикулярна до осі, що сполучає дві перші точки, а центр лежить на цій осі. Вільне тверде тіло в просторі має шість ступенів вільності руху, бо положення трьох точок тіла, які не лежать на одній прямій, однозначно визначає положення в просторі і всіх інших точок цього тіла. Якщо одну точку закріпити, то тіло матиме три ступені вільності.

Дослідження кінематики руху починається, як правило, з визначення числа ступенів вільності руху розглядуваного матеріального об'єкта. Вдалий вибір параметрів (узагальнених координат), що визначають положення об'єкта в просторі, завжди буває причиною простоти і чіткості аналізу руху. Тому *питання про визначення числа ступенів вільності руху і про вибір узагальнених координат, що визначають положення матеріального об'єкта в просторі, належать до головних питань кінематики*.

В аналітичній теорії руху ми вивчатимемо також важливе питання про *розподіл швидкостей і прискорень у твердому тілі*. Тут ми дістаємо строго логічне обгрунтування тих висновків, які в геометричній теорії здаються інтуїтивно очевидними (висновків, що зв'язані з процесом граничного переходу від сукупності дискретних переміщень тіла до неперервного його руху).

§ 2. РУХ ТІЛА, ЯКИЙ ПАРАЛЕЛЬНИЙ НЕРУХОМІЙ ПЛОЩИНІ (ПЛОСКИЙ РУХ)

1. **Число ступенів вільності руху плоскої фігури.** *Плоска фігура має три ступені вільності руху в своїй площині.* Справді, положення фігури визначається положенням двох точок (розд. III, § 1); одну з цих точок можна вважати вільною (на площині це дає два ступені вільності), але друга точка повинна бути на колі з центром у першій точці і з радіусом, що дорівнює віддалі між точками (це дає ще один ступінь вільності).

* Це означення стосується лише *голономних* матеріальних систем. Узагальнення цього поняття дано в динаміці.

2. Рівняння руху плоскої фігури. Нехай плоска фігура S рухається в площині рисунка, в якій вибрана нерухома система координат $O\xi\eta$. Зв'яжемо незмінно з рухомою фігурою систему координат Pxy з початком координат у будь-якій фіксованій точці P цієї фігури (цю точку P називатимемо *полюсом*), і нехай φ є кут між осями Px і $O\xi$. За параметри, що визначають положення фігури, виберемо три величини: дві координати ξ_P, η_P полюса P і кут φ (рис. 19).

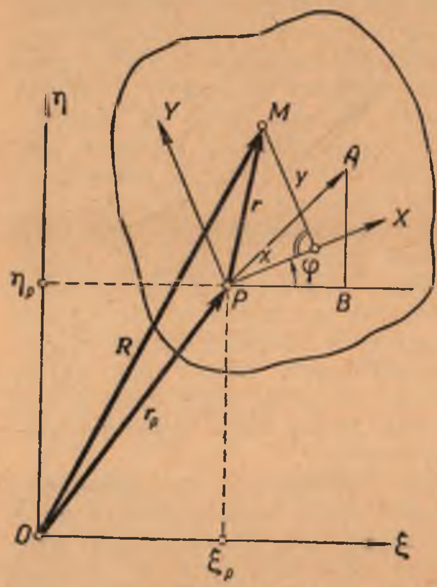

Рис. 19.

Три рівняння

$$\xi_P = \xi_P(t), \quad \eta_P = \eta_P(t), \quad \varphi = \varphi(t) \tag{1.65}$$

визначають закон руху фігури відносно системи координат $O\xi\eta$ і називаються *рівняннями плоского руху*.

Координати ξ, η будь-якої точки M плоскої фігури зв'язані з координатами x, y тієї самої точки M відомими з аналітичної геометрії формулами перетворення:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_P + x\cos\varphi - y\sin\varphi, \\ \eta &= \eta_P + x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Звернемо увагу на те, що при русі фігури координати x і y точки M залишаються сталими. Рівняння (1.66) разом з (1.65) визначають закон руху точки M на площині $O\xi\eta$. Отже, якщо з рівнянь (1.66) виключити час t, то дістанемо рівняння траєкторії точки $M(x, y)$ на нерухомій площині $O\xi\eta$.

3. Розподіл швидкостей і прискорень. Диференціюючи формули (1.66) по часу, знайдемо проекції швидкості довільної точки M на нерухомі осі координат:

$$\begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi_P}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\cdot(x\sin\varphi + y\cos\varphi), \\ v_\eta &= \frac{d\eta_P}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}\cdot(x\cos\varphi - y\sin\varphi). \end{aligned} \tag{1.67}$$

Замінивши тут вирази в дужках вихідними рівностями (1.66), дістанемо

$$\begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi_P}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}(\eta - \eta_P), \\ v_\eta &= \frac{d\eta_P}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}(\xi - \xi_P). \end{aligned} \tag{1.68}$$

Формули (1.68) визначають швидкість будь-якої точки M плоскої фігури в кожний даний момент часу; тому кажуть, що ці формули визначають розподіл швидкостей у плоскій фігурі.

Диференціюючи тепер формулу (1.67) по часу, знайдемо проекції прискорення довільної точки M на нерухомі осі координат:

$$\begin{aligned} w_\xi &= \frac{d^2\xi_P}{dt^2} - \frac{d^2\varphi}{dt^2}(x\sin\varphi + y\cos\varphi) - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cdot(x\cos\varphi - y\sin\varphi), \\ w_\eta &= \frac{d^2\eta_P}{dt^2} + \frac{d^2\varphi}{dt^2}(x\cos\varphi - y\sin\varphi) - \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\cdot(x\sin\varphi + y\cos\varphi), \end{aligned} \tag{1.69}$$

або

$$\begin{aligned} w_\xi &= \ddot{\xi}_P - \ddot{\varphi}(\eta - \eta_P) - \dot{\varphi}^2(\xi - \xi_P), \\ w_\eta &= \ddot{\eta}_P + \ddot{\varphi}(\xi - \xi_P) - \dot{\varphi}^2(\eta - \eta_P). \end{aligned} \tag{1.70}$$

Ці формули визначають *розподіл прискорень* у довільний момент часу для точок плоскої фігури.

Щоб з'ясувати механічний смисл знайдених формул, розглянемо ще векторний спосіб їх запису.

З рис. 19 бачимо, що

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r}. \tag{1.71}$$

Ця рівність еквівалентна двом скалярним формулам (1.66).

Знаходимо швидкість точки M:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_P}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{1.72}$$

Похідна $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ визначає бистроту зміни вектора $\boldsymbol{r}$ відносно нерухомої системи координат або відносно системи координат, осі якої залишаються паралельними осям нерухомої системи, а початок буде в рухомому полюсі (поступальне зміщення системи координат не змінює вектора $\boldsymbol{r}$). Помічаючи, що зміна вектора $\boldsymbol{r}$ відносно рухомої системи координат є наслідком його обертального руху навколо полюса, і застосовуючи формулу Ейлера (1.63), знайдемо

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{1.73}$$

де $\boldsymbol{\omega}$ — кутова швидкість обертання плоскої фігури навколо полюса.

Формулу (1.72) тепер можна переписати так:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{1.74}$$

Ця формула еквівалентна скалярним формулам (1.68) і виражає теорему:

Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса і швидкості обертального руху навколо полюса.

З порівняння формул (1.74) і (1.68) випливає, що проекції на нерухомі осі вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ дорівнюють, відповідно, 0, 0, $\frac{d\varphi}{dt}$. Кутова швидкість ω від вибору полюса не залежить. Нижче у § 4 це доведено для найзагальнішого випадку руху тіла.

Знаходимо тепер прискорення точки M:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

або, на підставі (1.73),

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ (проекції вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ на нерухомі осі, отже, дорівнюють 0, 0, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$), а $\frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt} = \boldsymbol{w}_P$ — прискорення полюса.

На підставі однієї з формул векторної алгебри маємо:

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}) = -\omega^2 \boldsymbol{r},$$

оскільки вектори $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{r}$ перпендикулярні один до одного.

Отже, остаточно знаходимо:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}. \tag{1.75}$$

Формула (1.75) еквівалентна двом скалярним формулам (1.70).

Щоб з'ясувати механічний смисл знайденої формули, обчислимо вектор прискорення точки, яка обертається навколо полюса P, як нерухомої точки, з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$. Швидкість такої точки визначається за формулою Ейлера, і тому маємо:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}.\end{aligned} \tag{1.76}$$

Тут $-\omega^2 \boldsymbol{r}$ — вектор, так званого доцентрового, а $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}$ — обертального прискорення (див. розд. II, приклад 3).

Отже, приходимо до висновку:

Прискорення кожної точки плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення полюса, обертального прискорення навколо полюса і доцентрового прискорення.

Двом доведеним тут теоремам про розподіл швидкостей і прискорень у плоскій фігурі в геометричному методі дослідження відповідає теорема про розкладання довільного переміщення фігури на два складових переміщення: поступальне і обертальне. Розглянемо тепер ту аналітичну теорію неперервного руху плоскої фігури, яка зв'язана з теоремою Ейлера — Шаля в геометричному методі дослідження.

4. Миттєвий центр швидкостей. Якщо в даний момент часу $\frac{d\varphi}{dt}$ не дорівнює нулю, то серед точок плоскої фігури є така

точка C, швидкість якої дорівнює нулю. Координати цієї точки знайдемо, прирівнявши нулю обидві проекції її швидкості (1.68):

$$v_\xi = \dot{\xi}_P - \dot{\varphi}(\eta_C - \eta_P) = 0,$$
$$v_\eta = \dot{\eta}_P + \dot{\varphi}(\xi_C - \xi_P) = 0,$$

звідки

$$\xi_C = \xi_P - \frac{\dot{\eta}_P}{\dot{\varphi}}, \qquad \eta_C = \eta_P + \frac{\dot{\xi}_P}{\dot{\varphi}}. \tag{1.77}$$

Точка $C(\xi_C, \eta_C)$, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю, називається *миттєвим центром швидкостей* (у геометричній теорії їй відповідає миттєвий центр обертання фігури).

Якщо взяти миттєвий центр швидкостей за полюс, то, на підставі (1.74), дістанемо

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{1.78}$$

Ця формула формою не відрізняється від формули (1.62) Ейлера, яка визначає швидкості точок тіла в обертальному русі.

Отже, *швидкість кожної точки плоскої фігури можна розглядати як швидкість обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей.*

5. Миттєвий центр прискорень. Якщо праві частини формули (1.70) прирівняти нулю, то дістанемо систему двох рівнянь відносно ξ, η для визначення положення тієї точки плоскої фігури, прискорення якої дорівнює в *даний момент* нулю. Якщо $\dot{\varphi} \neq 0$, то детермінант цієї системи $\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4$ відмінний від нуля, і неоднорідна система лінійних рівнянь (1.70) допускає єдиний скінченний розв'язок.

Отже, на кожний момент часу, в який рух плоскої фігури є обертальним, існує одна і тільки одна точка фігури, прискорення якої дорівнює нулю. Ця точка називається *миттєвим центром прискорень* плоскої фігури.

Якщо взяти миттєвий центр прискорень за полюс, то, на підставі (1.75), дістанемо

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \cdot \boldsymbol{r}. \tag{1.79}$$

Ця формула формою не відрізняється від формули (1.76), яка визначає прискорення точки в обертальному русі.

Отже, *прискорення кожної точки плоскої фігури можна розглядати як прискорення обертального руху навколо миттєвого центра прискорень.*

Приклад. У випадку рівномірного кочення круглого диска по прямій миттєвим центром швидкостей є точка дотику диска до прямої, а миттєвим центром прискорень — центр диска, бо саме ця точка — центр диска — рухається рівномірно по прямій. Отже, миттєвий центр прискорень і миттєвий центр швидкостей — це взагалі різні точки фігури.

6. Центроїди. Якщо $\dot{\varphi}$ не дорівнює нулю в жодний з моментів деякого проміжку часу, то рівняння (1.77), праві частини яких є функції часу, визначають закон руху миттєвого центра швидкостей по нерухомій площині $O\xi\eta$. Якщо з цих рівнянь виключити час, то матимемо рівняння

$$f(\xi_C, \eta_C) = 0,$$

яке є рівнянням геометричного місця миттєвих центрів швидкостей на нерухомій площині $O\xi\eta$. Ця крива називається *нерухомою центроїдою*.

Знайдемо тепер координати миттєвого центра швидкостей на рухомій площині Pxy. Оскільки в довільний момент часу координати кожної точки в нерухомій і рухомій системах зв'язані співвідношеннями (1.66), то, щоб визначити координати точки C в рухомій системі Pxy, треба замість ξ, η підставити в рівняння (1.66) значення ξ_C і η_C, згідно з формулами (1.77), а замість x, y написати x_C, y_C. Дістанемо

$$-\frac{\dot{\eta}_P}{\omega} = x_C \cos\varphi - y_C \sin\varphi,$$

$$\frac{\dot{\xi}}{\omega} = x_C \sin\varphi + y_C \cos\varphi,$$

де $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

З цих рівнянь знаходимо

$$x_C = -\frac{\dot{\eta}_P \cos\varphi - \dot{\xi}_P \sin\varphi}{\omega},$$
$$y_C = \frac{\dot{\eta}_C \sin\varphi + \dot{\xi}_P \cos\varphi}{\omega}. \qquad (1.80)$$

Якщо з рівнянь (1.80) виключити час t, то дістанемо рівняння геометричного місця центрів швидкостей на рухомій площині — *рухому центроїду*:

$$\Phi(x_C, y_C) = 0.$$

Звернемо увагу на те, що чисельники в формулах (1.80) дорівнюють проекціям швидкості полюса P на рухомі осі. У цьому легко впевнитись, спроектувавши вектор швидкості точки P, тобто вектор $\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{PA} = \boldsymbol{PB} + \boldsymbol{BA}$, на напрям осей Px і Py (рис. 19). Маємо, наприклад,

$$\text{пр}_x \boldsymbol{PA} = \text{пр}_x \boldsymbol{PB} + \text{пр}_x \boldsymbol{BA},$$

або

$$v_{Px} = PB\cos\varphi + BA\sin\varphi,$$

або

$$v_{Px} = \frac{d\xi_P}{dt}\cos\varphi + \frac{d\eta_P}{dt}\sin\varphi.$$

Аналогічно дістанемо:

$$v_{Py} = -\frac{d\xi_P}{dt}\sin\varphi + \frac{d\eta_P}{dt}\cos\varphi.$$

Отже, формули (1.80) можна переписати так:

$$x_C = -\frac{v_{Py}}{\omega},$$
$$y_C = +\frac{v_{Px}}{\omega}. \qquad (1.81)$$

Теорія плоского руху твердого тіла має велике практичне значення, бо вона широко застосовується при конструюванні і вивченні руху багатьох механізмів і машин. Значний вклад у теорію механізмів і машин зробив великий російський математик і механік П. Л. Чебишов *. Проблема побудови механізму з наперед визначеним рухом привела його до важливої проблеми про апроксимацію (найкраще наближення) заданої функції. Розв'язавши проблему апроксимації, П. Л. Чебишов побудував теоретичну основу точного приладобудування. Дослідження П. Л. Чебишова в теорії механізмів і машин продовжили російські і радянські вчені: Д. К. Бобильов, М. Є. Жуковський, І. І. Артоболевський та ін. Своїми працями П. Л. Чебишов поклав основу трьом напрямам наукових досліджень, що в радянський час посіли перше місце в світовій математичній науці (теорія чисел, теорія імовірностей, конструктивна теорія функцій).

§ 3. РУХ ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

1. Кути Ейлера. Рівняння руху тіла навколо нерухомої точки. Тверде тіло з однією нерухомою точкою має три ступені вільності, як це встановлено в § 1. Розглянемо питання про вибір параметрів, що визначають положення в просторі тіла з нерухомою точкою.

Нехай $Oxyz$ є рухома декартова система координат, яка незмінно зв'язана з тілом, а $O\xi\eta\zeta$ — нерухома в просторі система координат. Положення твердого тіла в просторі визначатиметься положенням рухомої системи координат відносно нерухомої. Ейлер запропонував зручний метод визначення положення тіла з нерухомою точкою, використавши певні кути.

Щоб запровадити кути Ейлера, розглянемо перетин площин xOy і $\xi O\eta$. Лінія перетину цих площин, яка називається *лінією*

* Великий російський математик Пафнутій Львович Чебишов народився в 1821 р. в с. Окатові, Калузької губернії. Шістнадцятирічним хлопцем він вступив до Московського університету, через рік вже був нагороджений срібною медаллю за роботу з алгебри «Обчислення коренів рівнянь». У 1841 р. він закінчив університет і в 1846 р. захистив магістерську, а в 1849 р.— докторську дисертації. З 1847 по 1882 р. П. Л. Чебишов викладав у Петербурзькому університеті. Його учнями були видатні вчені—академіки А. А. Марков і О. М. Ляпунов, а також ряд видатних математиків.

Дослідження П. Л. Чебишова стосуються різноманітних розділів математики й механіки: теорії чисел, теорії імовірностей, теорії наближення функцій, конструктивної теорії функцій, балістики і теорії стрільби, теорії механізмів і машин та ін.

П. Л. Чебишов помер 8 грудня 1894 р.

вузлів, перпендикулярна до осей $O\zeta$ і Oz, а отже, перпендикулярна і до площини ζOz. За додатний напрям лінії вузлів візьмемо напрям ON у той бік, з якого перехід за допомогою повороту від нерухомої осі $O\zeta$ до осі Oz рухомої системи на менший кут відбувається проти годинникової стрілки. Якщо, наприклад, осі $O\zeta$ і Oz лежать у площині рисунка (рис. 20), то додатний напрям лінії вузлів ON є напрям до глядача від точки O по перпендикуляру до площини рисунка. Кути Ейлера такі:

1) *кут власного обертання*

$$\varphi = \angle NOx,$$

2) *кут прецесії*

$$\psi = \angle \xi ON,$$

3) *кут нутації*

$$\theta = \angle \zeta Oz.$$

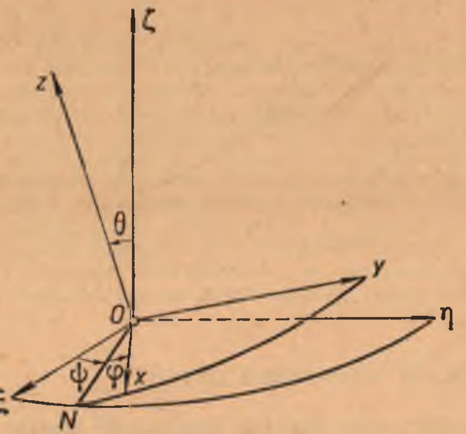

Рис. 20.

Власним обертанням твердого тіла називається такий його рух, при якому змінюється лише один кут φ, віссю власного обертання є вісь Oz. *Прецесією* називається такий рух тіла, при якому змінюється лише кут ψ; віссю прецесії є пряма $O\zeta$. *Нутацією* називається рух тіла, обумовлений зміною тільки кута θ; віссю нутації є лінія вузлів. Кожний з трьох кутів Ейлера відлічується проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напряму відповідної осі обертання. Так, кут прецесії ψ відлічується від осі $O\xi$ до лінії вузлів проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатної частини осі $O\zeta$; кут власного обертання φ відлічується від лінії вузлів ON до осі Ox проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатної частини осі Oz; кут нутації відлічується від осі $O\zeta$ до осі Oz в напрямі проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатної частини лінії вузлів.

Тверде тіло з нерухомою точкою можна довільно перемістити за допомогою трьох послідовних поворотів тіла, у кожному з яких змінюється лише один з кутів Ейлера.

При русі твердого тіла кути Ейлера змінюються, і тому вони є функціями часу:

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t). \tag{1.82}$$

Якщо кути φ, ψ, θ відомі як функції часу, то закон руху твердого тіла навколо нерухомої точки вважається відомим. Рівності (1.82) називаються *рівняннями руху твердого тіла навколо нерухомої точки*.

2. Розподіл швидкостей. Нехай початок рухомої системи координат, яка незмінно зв'язана з твердим тілом, вміщено в нерухому його точку O. У даний момент часу радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ точки M тіла можна записати так:

$$\boldsymbol{r} = x \cdot \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{k}, \tag{1.83}$$

де $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — одиничні вектори рухомих осей. З бігом часу вектори $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ змінюються неперервно за напрямом, тоді як координати x, y, z точки тіла залишаються незмінними. Диференціюючи рівність (1.83) по часу, знайдемо швидкість цієї точки:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}.$$

Помноживши скалярно вектор швидкості $\boldsymbol{v}$ на одиничні вектори $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, знайдемо проекції $\boldsymbol{v}$ на рухомі осі координат:

$$\begin{aligned} v_x &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i} = x\cdot\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} + y\cdot\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} + z\cdot\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{i},\\ v_y &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j} = x\cdot\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} + y\cdot\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} + z\cdot\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{j},\\ v_z &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k} = x\cdot\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{k} + y\cdot\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{k} + z\cdot\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{1.84}$$

Спростимо ці формули. Оскільки $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} = 1$, то $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} = 0$; аналогічно дістанемо ще дві рівності: $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} = 0$ і $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{k} = 0$. Крім того, оскільки $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j} = 0$, то $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} + \frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} = 0$, звідки $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} = -\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j}$; так само знаходимо рівності $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{k}$, $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{k} = -\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{i}$.

За допомогою всіх цих рівностей основні формули (1.84) для швидкості можна записати так:

$$\begin{aligned} v_x &= z\cdot\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{i} - y\cdot\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j},\\ v_y &= x\cdot\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j} - z\cdot\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{k},\\ v_z &= y\cdot\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{k} - x\cdot\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{i}. \end{aligned} \tag{1.85}$$

Зауважимо, що формули для v_y і v_z дістаємо з формули для v_x циклічною перестановкою координат, одиничних векторів і їх похідних. Таким чином, щоб дістати, наприклад, другу формулу з першої, треба в ній замінити x на y, y на z, а z на x, а також $\boldsymbol{i}$ на $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{j}$ на $\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{k}$ на $\boldsymbol{i}$. Зробивши те саме в другій формулі, дістанемо третю формулу.

Якщо тепер увести позначення $\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\cdot\boldsymbol{k}=\omega_x$, $\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\cdot\boldsymbol{i}=\omega_y$, $\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}\cdot\boldsymbol{j}=\omega_z$, то формули проекцій швидкостей на рухомі осі координат можна записати так:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y\cdot z-\omega_z\cdot y,\\ v_y &= \omega_z\cdot x-\omega_x\cdot z,\\ v_z &= \omega_x\cdot y-\omega_y\cdot x. \end{aligned} \tag{1.86}$$

Можна довести*, що в тривимірному просторі три величини ω_x, ω_y і ω_z є складовими частинами (проекціями) одного вектора $\boldsymbol{\omega}$; цей вектор дорівнює: $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{i}\omega_x+\boldsymbol{j}\omega_y+\boldsymbol{k}\omega_z$. При доведенні треба було б лише впевнитись, що при виборі замість системи $Oxyz$ іншої системи координат (при повороті осей) величини ω_x, ω_y, ω_z перетворюються за тим самим законом, що й координати. Ми не наводимо це доведення. Три скалярні формули для проекції швидкостей (1.86) можна записати за допомогою одного векторного рівняння так:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}. \tag{1.87}$$

Ця формула не відрізняється від формули Ейлера для обертального руху.

Отже, *у тілі, що рухається навколо нерухомої точки, розподіл швидкостей у кожний момент такий, як при обертальному русі тіла навколо певної осі, що проходить через нерухому точку.*

Тому розглядуваний рух тіла називають *миттєвим обертанням*, а вектор $\boldsymbol{\omega}$ — *миттєвою кутовою швидкістю*. Ці терміни вживають, щоб схарактеризувати розподіл швидкостей у тілі *на даний момент.*

3. Формули Пуассона. Формулу (1.87) можна переписати так:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}.$$

Якщо покласти $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}$, то дістанемо

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$$

і, аналогічно,

$$\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}, \tag{1.88}$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}$$

Ми дістали важливі формули Пуассона, які часто використовуються в механіці.

4. Миттєва вісь обертання тіла. Якщо всі три величини ω_x, ω_y, ω_z дорівнюють нулю, то дорівнює нулю і швидкість будь-

* М. О. Кільчевський, Курс теоретичної механіки, т. I, 1955, стор. 101—102.

якої точки твердого тіла, тобто тіло перебуває в спокої. Виключимо цей випадок з розгляду й припустимо, що величини ω_x, ω_y і ω_z нулю одночасно не дорівнюють. Знайдемо геометричне місце точок тіла, швидкості яких у даний момент дорівнюють нулю. Прирівнюючи до нуля всі три проекції швидкості v_x, v_y, v_z, згідно з формулами (1.86), дістанемо

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}. \tag{1.89}$$

Отже, точки тіла, швидкості яких у даний момент дорівнюють нулю, розташовані вздовж прямої, що проходить через нерухому точку твердого тіла. Ця пряма називається *миттєвою віссю обертання*. Вектор миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ напрямлений по миттєвій осі обертання твердого тіла.

5. Аксоїди. *Нерухомим аксоїдом* називають геометричне місце миттєвих осей відносно нерухомої системи координат $O\xi\eta\zeta$. Геометричне місце миттєвих осей відносно рухомої системи координат $Oxyz$ є *рухомий аксоїд.*

Якщо в рівнянні миттєвої осі (1.89)

$$\frac{x}{\omega_x}=\frac{y}{\omega_y}=\frac{z}{\omega_z}$$

величини ω_x, ω_y і ω_z розглядати як функції часу, то це рівняння і буде параметричним рівнянням рухомого аксоїда. Перепишемо це рівняння так:

$$\frac{x}{y}=\frac{\omega_x(t)}{\omega_y(t)},\quad \frac{z}{y}=\frac{\omega_z(t)}{\omega_y(t)}$$

і виключимо параметр t. Дістанемо рівняння рухомого аксоїда у формі

$$f\left(\frac{x}{y},\ \frac{z}{y}\right)=0,$$

що визначає конічну поверхню з вершиною в нерухомій точці твердого тіла.

Щоб знайти рівняння нерухомого аксоїда, спроектуємо вектор швидкості $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$ на нерухомі осі координат $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, початок системи яких помістимо в нерухому точку твердого тіла. Дістанемо

$$\frac{\xi}{\omega_\xi}=\frac{\eta}{\omega_\eta}=\frac{\zeta}{\omega_\zeta}. \tag{1.90}$$

Розглядаючи ω_ξ, ω_η, ω_ζ як функції часу і виключаючи t, знайдемо рівняння нерухомого аксоїда у формі

$$F\left(\frac{\xi}{\eta},\ \frac{\zeta}{\eta}\right)=0.$$

6. Розподіл прискорень. Прискорення довільної точки тіла знайдемо, диференціюючи вектор $\boldsymbol{v}$ швидкості (1.87) по часу:

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \qquad (1.91)$$

Вектор $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ позначають через $\boldsymbol{\varepsilon}$ і називають *вектором кутового прискорення твердого тіла*. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ може змінювати свій напрям у просторі. Тому вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, який ми умовимось відкладати від нерухомої точки твердого тіла, в загальному випадку руху тіла не напрямлений уздовж миттєвої осі обертання, як вектор $\boldsymbol{\omega}$, а утворює з нею деякий змінний у часі кут. Замінюючи в (1.91) $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ на $\boldsymbol{\varepsilon}$, а $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ на $\boldsymbol{v}$, дістанемо для прискорення $\boldsymbol{w}$ формулу

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}.$$

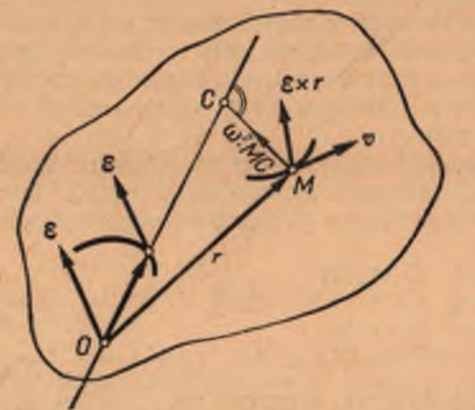

Рис. 21.

Знайдемо величину і напрям вектора $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$. За означенням векторного добутку, цей вектор $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ напрямлений, очевидно, від розглядуваної точки M по перпендикуляру до осі обертання (рис. 21). Величина цього вектора дорівнює

$$|\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}|=\omega\cdot V\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\omega\cdot V=\omega\cdot\omega\,MC=\omega^2\cdot MC;$$

маємо:

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}=\omega^2\cdot\boldsymbol{MC}$$

і

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}+\omega^2\cdot\boldsymbol{MC}. \qquad (1.92)$$

Отже, *прискорення будь-якої точки твердого тіла, одна точка якого нерухома, складається з двох частин: «обертального» прискорення* $\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}$ *і «доосьового» прискорення* $\omega^2\cdot\boldsymbol{MC}$. Вектор обертального прискорення напрямлений по перпендикуляру до векторів $\boldsymbol{\varepsilon}$ і $\boldsymbol{r}$; за величиною він дорівнює $\varepsilon\cdot r\cdot\sin(\boldsymbol{\varepsilon r})$. Звернемо увагу на те, що вектор обертального прискорення точки M у загальному випадку руху твердого тіла не збігається з напрямом вектора швидкості $\boldsymbol{v}$ в даний момент, як це було б при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Тому термін «обертальне» прискорення тут не зовсім вдалий.

На закінчення зауважимо, що коли у формулі $\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ розглядати як радіус-вектор точки, яка є кінцем цього вектора $\boldsymbol{\omega}$, то $\boldsymbol{\varepsilon}$ буде вектором швидкості цієї точки. Це просте зауваження дає змогу в деяких конкретних випадках легко визначати вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$.

1. Рівняння руху вільного тіла. Виберемо параметри (узагальнені координати), які визначатимуть положення в просторі вільного твердого тіла, що має шість ступенів вільності. Довільну точку P тіла візьмемо за початок рухомої системи координат $Px_1y_1z_1$, осі якої нехай переміщуються паралельно самим собі. Положення точки P (полюса) в просторі однозначно визначається трьома координатами ξ_P, η_P, ζ_P, а положення тіла відносно осей $Px_1y_1z_1$ — трьома кутами Ейлера φ, ψ, θ (рис. 22). Отже, положення вільного твердого тіла в просторі в загальному випадку руху тіла можна визначити за допомогою шести параметрів, які змінюються з часом:

$$\xi_P=\xi_P(t),\quad \varphi=\varphi(t),$$
$$\eta_P=\eta_P(t),\quad \psi=\psi(t),$$
$$\zeta_P=\zeta_P(t),\quad \theta=\theta(t). \qquad (1.93)$$

В окремих видах руху деякі з цих шести параметрів можуть залишатись сталими. Так, при поступальному русі твердого тіла три кути Ейлера φ, ψ, θ не змінюватимуться; у випадку обертання тіла навколо нерухомої точки сталими будуть координати нерухомої точки, яку можна взяти за полюс.

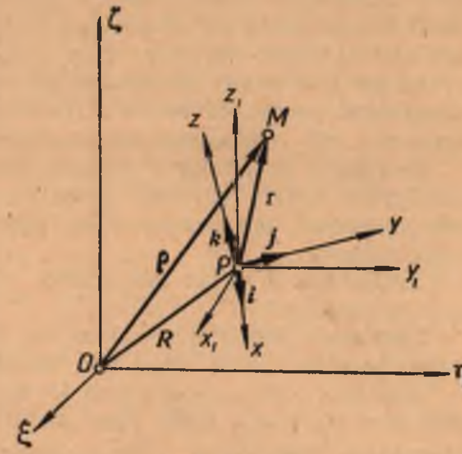

Рис. 22.

Шість рівностей (1.93) називаються *рівняннями руху вільного твердого тіла*.

2. Розподіл швидкостей. Вивчимо тепер розподіл швидкостей у вільному твердому тілі, що рухається в просторі. Нехай $Pxyz$ — рухома система координат, яка незмінно зв'язана з твердим тілом; одиничні вектори цієї системи є $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Для довільної точки M твердого тіла маємо:

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PM},$$

або

$$\rho=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r},$$

або

$$\rho=\boldsymbol{R}+x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}. \qquad (1.94)$$

Диференціюючи останню рівність по часу і враховуючи, що x, y, z при русі тіла залишаються незмінними, дістанемо для вектора швидкості точки M таке значення:

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}. \qquad (1.95)$$

Замінивши похідні одиничних векторів їх значеннями за формулами Пуассона (1.88), знайдемо

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + x \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k},$$

або

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}), \tag{1.96}$$

або

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}. \tag{1.97}$$

Ми бачимо, що *швидкість довільної точки M вільного твердого тіла складається геометрично з двох швидкостей: швидкості полюса P і швидкості від обертання навколо полюса.* Звідси виходить, що рух вільного твердого тіла в загальному випадку розкладається на два рухи: поступальний рух з швидкістю, що дорівнює швидкості довільної точки P (полюса), і миттєве обертання навколо осі, що проходить через полюс P.

Оскільки за полюс P можна брати будь-яку точку твердого тіла, то є безліч способів розкладання руху твердого тіла на поступальний, що визначається рухом полюса, і обертальний навколо полюса.

Теорема. *Кутова швидкість обертання $\boldsymbol{\omega}$ не залежить від вибору полюса.*

Спочатку доведемо, що $\boldsymbol{\omega}$ не зміниться, якщо змінити напрям рухомих осей $Pxyz$ при незмінному полюсі P.

Швидкість будь-якої точки M тіла за формулою (1.97) дорівнює $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PM}$. Але якщо позначити через $\boldsymbol{\omega}_1$ кутову швидкість обертання тіла і користуватись зміненим напрямом осей, то швидкість тієї самої точки M можна записати так:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{PM}.$$

Отже, маємо:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{PM},$$

звідки

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{PM},$$

або

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \times \boldsymbol{PM} = 0.$$

Оскільки ця рівність повинна бути правильною для будь-якого вектора $\boldsymbol{PM}$, то звідси випливає, що

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}.$$

Залишається довести, що вектор $\boldsymbol{\omega}$ не зміниться і при паралельному перенесенні рухомих осей координат, що означає зміну положення полюса P в твердому тілі. Але це безпосередньо випливає з формули для компонентів вектора $\boldsymbol{\omega}$

$$\omega_x = \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} \cdot \boldsymbol{k}, \quad \omega_y = \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} \cdot \boldsymbol{i}, \quad \omega_z = \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} \cdot \boldsymbol{j}$$

і з того, що одиничні вектори не змінюються при паралельному перенесенні.

3. **Розподіл прискорень.** Прискорення довільної точки M вільного твердого тіла знайдемо, диференціюючи формулу для швидкості (1.97). Маємо:

$$\boldsymbol{w} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{1.98}$$

Тут $\frac{d\boldsymbol{v}_P}{dt}$ — прискорення $\boldsymbol{w}_P$ полюса P.

Похідні $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ і $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ визначають бистроту зміни векторів $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{r}$ відносно нерухомої системи відліку $O\xi\eta\zeta$ або відносно системи відліку $Px_1y_1z_1$, у якої осі залишаються паралельними осям нерухомої системи, а початок координат міститься в рухомому полюсі P (поступальне зміщення системи координат не надає векторам $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{r}$ ніякої зміни). Тому смисл похідних $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ і $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ тут той самий, що й у випадку руху тіла навколо нерухомої точки: $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$ — миттєве кутове прискорення тіла в його русі навколо полюса, а $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ — швидкість руху точки M тіла в тому самому його русі відносно системи координат $Px_1y_1z_1$.

Тепер у виразі (1.98) можна зробити перетворення, аналогічні до тих, що приводять від формули (1.91) до формули (1.92). Тоді (1.98) буде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_P + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \omega^2 \cdot \boldsymbol{MC}. \tag{1.99}$$

Ця формула показує, що *в загальному випадку руху вільного твердого тіла прискорення довільної точки тіла дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: прискорення полюса, обертального прискорення і доосьового прискорення.* Два останні прискорення такі самі, що й при обертанні твердого тіла навколо точки P як нерухомої.

Розділ V

КІНЕМАТИКА ВІДНОСНОГО РУХУ ТОЧКИ

§ 1. ТЕОРЕМА ПРО ДОДАВАННЯ ШВИДКОСТЕЙ

Розглянемо один з основних законів ньютонівської механіки — закон додавання швидкостей. Цей закон є безпосереднім логічним наслідком прийнятих у ньютонівській механіці властивостей простору і часу.

З рухомим тілом B зв'яжемо незмінно систему координат $Pxyz$. Рух точки M відносно нерухомої системи відліку $O\xi\eta\zeta$ називається *абсолютним*, а відносно рухомої системи $Pxyz$ — *відносним;* рух самої системи $Pxyz$ називається *переносним.*

Нагадаємо, що поняття спокою, як і руху, у механіці відносне самою своєю суттю; тому «нерухомими» можна тут вважати яке завгодно тіло A і зв'язану з ним систему координат $O\xi\eta\zeta$.

У відповідності з раніше введеними основними поняттями кінематики ми відрізнятимемо й інші відносні та абсолютні кінематичні елементи: радіуси-вектори, траєкторії, швидкості, прискорення тощо.

З рис. 23 бачимо, що

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_P + \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{r}_P$ — абсолютні радіуси-вектори точок M і P, відповідно, а $\boldsymbol{r}$ — відносний радіус-вектор точки M.

Якщо x, y, z — відносні координати точки M, а $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — одиничні вектори координатного базису рухомої системи координат, то маємо:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_P + x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{1.100}$$

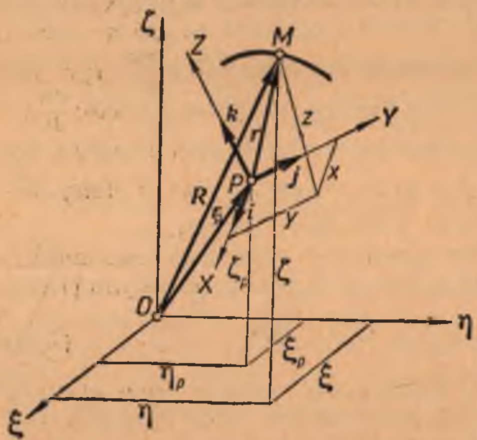

Рис. 23.

Тому приріст вектора $\boldsymbol{R}$ за проміжок часу Δt, від моменту t до моменту $t + \Delta t$, дорівнює

$$\Delta \boldsymbol{R} = \Delta \boldsymbol{r}_P + x \cdot \Delta \boldsymbol{i} + y \cdot \Delta \boldsymbol{j} + z \cdot \Delta \boldsymbol{k} + \Delta x \cdot \boldsymbol{i} + \Delta y \cdot \boldsymbol{j} + \Delta z \cdot \boldsymbol{k}. \tag{1.101}$$

Вектор $\Delta \boldsymbol{R}$ є абсолютне переміщення точки M.

Перші чотири доданки цієї формули характеризують переносне переміщення точки. Справді, за цією самою формулою (1.101) сума згаданих чотирьох доданків є переміщення точки у випадку, коли відносне переміщення відсутнє (тобто, коли $\Delta x = 0$, $\Delta y = 0$, $\Delta z = 0$); тому згадану суму чотирьох доданків можна розглядати як переміщення тієї точки, яка незмінно зв'язана з системою $Pxyz$ і з якою зливалась точка M у момент t.

Останні три доданки формули (1.101) характеризують, очевидно, відносне переміщення точки M.

Отже, формула (1.101) виражає теорему: *абсолютне переміщення точки дорівнює геометричній сумі відносного і переносного переміщень.*

Поділивши (1.101) на проміжок часу Δt, протягом якого здійснювався рух точки, і перейшовши до границі при $\Delta t \to 0$, знаходимо, що

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_P}{dt} + x \cdot \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} + \frac{dx}{dt} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \boldsymbol{k}, \tag{1.102}$$

і водночас приходимо до висновку: *абсолютна швидкість руху точки $\boldsymbol{v}_a$ дорівнює геометричній сумі відносної швидкості $\boldsymbol{v}_r$ і переносної швидкості $\boldsymbol{v}_e$:*

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e, \tag{1.103}$$

де

$$\boldsymbol{v}_r = \frac{dx}{dt} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \boldsymbol{k}, \tag{1.104}$$

$$\boldsymbol{v}_e = \frac{d\boldsymbol{r}_P}{dt} + x \cdot \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y \cdot \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z \cdot \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}. \tag{1.105}$$

Формула (1.103) і виражає теорему про додавання швидкостей.

Використавши формули Пуассона (1.88), переносну швидкість можна подати так:

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{v}_P + x \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} + y \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j} + z \cdot \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.$$

Отже, *переносна швидкість $\boldsymbol{v}_e$ точки M дорівнює швидкості тієї точки рухомої системи $Pxyz$, з якою в даний момент зливається точка M.*

Закон додавання швидкостей (1.103) випливає з основних властивостей простору і часу.

На початку XX ст., коли з появою теорії відносності були уточнені наші знання про простір і час, зразу ж був виявлений і наближений характер рівності (1.103). Виявилось, що закон додавання швидкостей (1.103) ньютонівської механіки можна застосувати тільки до таких рухів, які є повільними порівняно з швидкістю світла. Для швидких рухів закон додавання швидкостей має бути приведений у відповідність з фактом існування в природі граничної фізичної швидкості, що дорівнює швидкості світла. Як доводить теорія відносності, сума двох швидкостей V_1 і V_2, напрямлених у протилежні боки, не дорівнює сумі $V_1 + V_2$, як це твердить ньютонівська механіка, а визначається за формулою

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 \cdot V_2}{c^2}},$$

де c — швидкість світла.

§ 2. ТЕОРЕМА КОРІОЛІСА ПРО ДОДАВАННЯ ПРИСКОРЕНЬ. ФІЗИЧНИЙ СМИСЛ ПОВОРОТНОГО ПРИСКОРЕННЯ

У цьому параграфі розв'яжемо задачу про визначення абсолютного прискорення точки.

1. Абсолютне прискорення точки знаходимо як похідну по часу від абсолютної швидкості (1.102):

$$\boldsymbol{w}_a = \frac{d\boldsymbol{v}_a}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_P}{dt^2} + x\frac{d^2\boldsymbol{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\boldsymbol{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\boldsymbol{k}}{dt^2} + \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \boldsymbol{k} + 2\left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right). \tag{1.106}$$

В окремому випадку відносного спокою, коли $\frac{dx}{dt}=0$, $\frac{dy}{dt}=0$, $\frac{dz}{dt}=0$, прискорення точки визначається тільки першими чотирма доданками формули (1.106).

Тому перші чотири доданки формули (1.106) характеризують прискорення переносного руху точки M, тобто її руху разом з системою $Pxyz$. *Переносне прискорення* $\boldsymbol{w}_e$ *точки* M *дорівнює прискоренню тієї точки рухомої системи* $Pxyz$, *з якою в даний момент збігається точка* M. Наступні три доданки формули (1.106) визначають, очевидно, прискорення точки M відносно рухомої системи відліку $Pxyz$; цю складову частину абсолютного прискорення точки M називатимемо *відносним* прискоренням і позначатимемо через $\boldsymbol{w}_r$:

$$\boldsymbol{w}_r=\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\cdot\boldsymbol{k}. \tag{1.107}$$

Решта доданків формули (1.107) визначає ту частину прискорення точки M, яка залежить як від відносного, так і від переносного рухів; цей компонент прискорення називають *поворотним* і позначають через $\boldsymbol{w}_c$.

Отже, формулу (1.106) можна переписати так:

$$\boldsymbol{w}_a=\boldsymbol{w}_r+\boldsymbol{w}_e+\boldsymbol{w}_c. \tag{1.108}$$

Ця формула і виражає теорему Коріоліса:

У кожний момент часу абсолютне прискорення рухомої точки M дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і поворотного прискорень.

Перетворимо вираз для поворотного прискорення за допомогою формул Пуассона. На підставі (1.88) маємо:

$$\boldsymbol{w}_c=2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}\right)=$$
$$=2\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{dx}{dt}\cdot\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\cdot\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\cdot\boldsymbol{k}\right)=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r, \tag{1.109}$$

де $\boldsymbol{\omega}$ — *вектор кутової швидкості вибраної нами рухомої системи координат, тобто вектор кутової швидкості переносного руху.*

Цей простий вираз для поворотного прискорення звичайно і використовують при обчисленнях.

Розглянемо випадки, коли поворотне прискорення дорівнює нулю. Векторний добуток $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$ дорівнює нулю в трьох випадках:

$$\boldsymbol{w}_c=2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r=0\ \begin{cases}1)\ \text{якщо}\ \boldsymbol{\omega}=0,\\ 2)\ \text{якщо}\ \boldsymbol{v}_r=0,\\ 3)\ \text{якщо}\ \boldsymbol{v}_r\parallel\boldsymbol{\omega}.\end{cases}$$

У першому випадку рухома система координат рухається поступально; у другому — точка перебуває у відносному спокої;

у третьому — вектор відносної швидкості $\boldsymbol{v}_r$ паралельний вектору кутової швидкості обертання рухомої системи координат.

2. Формула для абсолютного прискорення точки (1.108) виявилась складнішою, ніж формула (1.103) для абсолютної швидкості. Щоб з'ясувати фізичну причину цього, розглянемо ще одне доведення теореми Коріоліса.

Нехай, як і раніше, точка M рухається в просторі як відносно нерухомої системи відліку $O\xi\eta\zeta$, так і відносно рухомої системи $Pxyz$. На підставі теореми про додавання швидкостей маємо:

$$\Delta\boldsymbol{v}_a=\Delta\boldsymbol{v}_r+\Delta\boldsymbol{v}_e, \tag{1.110}$$

тобто приріст абсолютної швидкості точки дорівнює геометричній сумі приростів (відносно нерухомої системи $O\xi\eta\zeta$) відносної і переносної швидкостей.

Щоб обчислити абсолютне прискорення, слід розділити ліву і праву частини формули (1.110) на Δt і перейти до границі при $\Delta t\to 0$:

$$\boldsymbol{w}_a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_a}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_r}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_e}{\Delta t}. \tag{1.111}$$

Але було б помилкою вважати, що два доданки правої частини формули (1.111) завжди матимуть своєю границею відносне $\boldsymbol{w}_r$ і переносне $\boldsymbol{w}_e$ прискорення точки.

Справді, приріст $\Delta\boldsymbol{v}_r$ вектора $\boldsymbol{v}_r$ відносної швидкості є геометричною сумою двох приростів: приросту $\Delta'\boldsymbol{v}_r$ вектора $\boldsymbol{v}_r$ відносно рухомої системи координат і того приросту $\Delta''\boldsymbol{v}_r$, який обумовлений поворотом рухомої системи:

$$\Delta\boldsymbol{v}_r=\Delta'\boldsymbol{v}_r+\Delta''\boldsymbol{v}_r. \tag{1.112}$$

Очевидно, поступальний рух системи координат $Pxyz$ не надає вектору $\boldsymbol{v}_r$ додаткових змін як відносно неї, так і відносно нерухомої системи $O\xi\eta\zeta$.

Приріст $\Delta''\boldsymbol{v}_r$ можна обчислити як переміщення за проміжок часу Δt кінця вектора $\boldsymbol{v}_r$, яке обумовлене поворотом рухомої системи координат. На підставі формули Ейлера маємо:

$$\Delta''\boldsymbol{v}_r=(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r)\cdot\Delta t, \tag{1.113}$$

де $\boldsymbol{\omega}$ — миттєва кутова швидкість обертання рухомої системи відліку (за полюс беремо ту точку рухомої системи, в якій у момент t була точка M).

Підставивши значення (1.113) у рівність (1.112) і поділивши на Δt ліву і праву частини цієї рівності, знайдемо

$$\frac{\Delta\boldsymbol{v}_r}{\Delta t}=\frac{\Delta'\boldsymbol{v}_r}{\Delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r.$$

Після переходу до границі при $\Delta t\to 0$ дістанемо

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}_r}{\Delta t}=\boldsymbol{w}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r, \tag{1.114}$$

бо за фізичним смислом першого доданка $\frac{\Delta' v_r}{\Delta t}$ його границею є відносне прискорення w_r.

Аналогічно і приріст Δv_e вектора v_e переносної швидкості є геометричною сумою двох приростів: $\Delta' v_e$ вектора v_e, який був би і у випадку відносного спокою точки M, і $\Delta'' v_e$, який обумовлений переходом точки M у нове положення M' відносно рухомої системи відліку:

$$\Delta v_e = \Delta' v_e + \Delta'' v_e. \tag{1.115}$$

Поступальний рух системи координат $Pxyz$ значення не має.

Приріст $\Delta'' v_e$ обчислюємо так. За час Δt точка M здійснить відносне переміщення на вектор $MM' = v_r \cdot \Delta t$ і перейде в положення M'; переносні швидкості точок M' і M рухомої системи відліку відрізняються на вектор, який за формулою Ейлера дорівнює

$$\Delta'' v_e = \omega \times MM',$$

або

$$\Delta'' v_e = (\omega \times v_r) \cdot \Delta t. \tag{1.116}$$

Підставивши значення (1.116) у рівність (1.115) і поділивши на Δt ліву й праву частини цієї рівності, знайдемо

$$\frac{\Delta v_e}{\Delta t} = \frac{\Delta' v_e}{\Delta t} + \omega \times v_r.$$

Після переходу до границі при $\Delta t \to 0$ дістанемо

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_e}{\Delta t} = w_e + \omega \times v_r, \tag{1.117}$$

бо границею першого доданка $\frac{\Delta' v_e}{\Delta t}$ є переносне прискорення w_e.

Отже, на підставі формул (1.117), (1.114) і (1.111) маємо:

$$w_a = w_r + w_e + 2(\omega \times v_r), \tag{1.118}$$

тобто ми знову прийшли до теореми Коріоліса.

Це друге доведення теореми Коріоліса розкриває фізичну причину появи поворотного прискорення. Абсолютний приріст вектора v_r не вичерпується його відносним приростом, а відрізняється від нього на вектор $(\omega \times v_r) \cdot \Delta t$. Приріст вектора v_e не вичерпується тим приростом, який має фіксована точка рухомої системи координат. Відносне переміщення точки M при наявності в рухомої системи координат обертання обумовлює додатковий приріст вектора v_e на $(\omega \times v_r) \cdot \Delta t$.

Розділ VI

СИНТЕЗ РУХІВ

Вступні зауваження. У III і IV розділах було показано, що рух вільного тіла в просторі розкладається на поступальний рух разом з полюсом і обертальний рух навколо полюса. Це приклад аналізу складного руху.

У цьому розділі буде розглянуто обернену задачу про утворення руху складнішого з рухів простіших.

Загальна задача, яку тут можна поставити, полягає у визначенні абсолютного руху тіла C, якщо відомі його відносний і переносний рухи. Зокрема, ми можемо розглядати розподіл у тілі C абсолютних швидкостей у даний момент, якщо відомий розподіл відносних і переносних швидкостей у той самий момент часу. Саме цю задачу і розв'язуємо нижче в ряді практично важливих випадків.

Може трапитись, що швидкості v всіх точок твердого тіла рівні між собою за величинами і напрямом не протягом деякого проміжку часу, як це буває при поступальному русі, а тільки в деякий момент t. Тоді кажуть, що тіло здійснює *миттєвий поступальний рух*. Треба твердо пам'ятати, що термін миттєвий поступальний рух — умовний: він вживається для характеристики стану швидкостей точок тіла в даний момент t, а не дійсного руху цього тіла.

Аналогічно, якщо в момент t швидкості точок тіла такі, які бувають при його обертанні навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω, то говорять, що тіло здійснює *миттєве обертання* і що ω є *миттєва кутова швидкість*. Цей термін вживається для характеристики стану швидкостей точок тіла в даний момент t, а не дійсного обертання тіла навколо нерухомої осі. Нагадаємо, що термін миттєва кутова швидкість ми вже використовували у випадку плоского руху тіла і у випадку руху тіла навколо нерухомого центра.

Розглянемо тепер окремі задачі.

§ 1. СКЛАДНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Додавання двох миттєвих поступальних рухів тіла.

Теорема. *Сукупність двох миттєвих поступальних рухів зводиться до миттєвого поступального руху. Швидкість останнього дорівнює геометричній сумі швидкостей рухів, які додаються.*

Нехай у даний момент часу відносні швидкості v_r точок тіла C, а також і переносні швидкості v_e всіх точок тіла C рівні між собою. Треба визначити характер розподілу абсолютних швидкостей у тілі C в даний момент часу.

За теоремою про додавання швидкостей абсолютна швидкість будь-якої точки M тіла C дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e.$$

Очевидно, вектор $\boldsymbol{v}$, як і його геометричні складові $\boldsymbol{v}_r$ і $\boldsymbol{v}_e$, буде однаковий для всіх точок тіла в розглядуваний момент часу. Теорему доведено.

Прикладом, що ілюструє доведену теорему, може бути рух крюка мостового крана. Тут ми маємо неперервні в часі поступальні (відносний і переносний) рухи, які, поєднуючись, дають теж неперервний абсолютний поступальний рух.

2. Додавання двох миттєвих обертань навколо осей, що перетинаються.

Теорема. *Сукупність двох миттєвих обертань — відносного і переносного — навколо осей, що перетинаються, зводиться до абсолютного миттєвого обертання, вісь якого проходить через точку перетину осей відносного і переносного обертань. Миттєва кутова швидкість складного руху тіла дорівнює векторній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.*

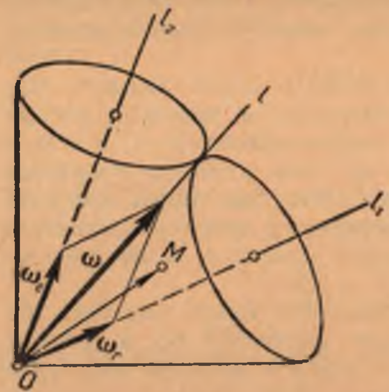

Рис. 24.

Нехай у даний момент часу розподіл відносних швидкостей у тілі C відповідає обертанню цього тіла навколо деякої осі l_1 з кутовою швидкістю ω_r, а розподіл переносних швидкостей відповідає обертанню тіла навколо осі l_2 з кутовою швидкістю ω_e. За умовою осі l_1 і l_2 перетинаються в точці O. Треба визначити характер розподілу абсолютних швидкостей у тілі C в даний момент часу (рис. 24).

Обчислимо абсолютну швидкість будь-якої точки M тіла C, положення якої визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$. Оскільки як відносну, так і переносну швидкості точки M можна подати за формулою Ейлера у вигляді

$$\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{r}$$

і

$$\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{r},$$

то за теоремою про додавання швидкостей абсолютна швидкість точки M дорівнює

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{\omega}_r \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega}_e \times \boldsymbol{r} = (\boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e) \times \boldsymbol{r}.$$

Знайдена формула і характеризує розподіл абсолютних швидкостей у тілі C в даний момент. Оскільки цей розподіл знову подається за формулою Ейлера

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$, то він відповідає стану обертання тіла C з абсолютною кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, яка дорівнює геометричній сумі кутових швидкостей відносного і переносного обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання проходить через точку O і розташована вздовж вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Розглянуту тут теорему про додавання швидкостей можна довести, не користуючись формулою Ейлера, тобто наперед не припускаючи, що кутова швидкість є вектор. Тоді те, що кутові швидкості додаються геометрично, виявляє векторний характер цієї фізичної величини.

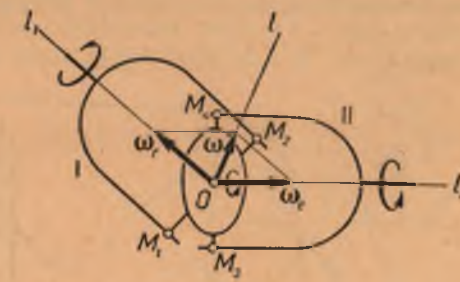

Рис. 25

Приклад. Розглянемо рух хрестовини $M_1M_2M_3M_4$ універсального шарніра Кардана — Гука (рис. 25). Нехай разом з першою вилкою I хрестовина обертається навколо осі l_1 з кутовою швидкістю ω_r (відносний рух), а разом з другою вилкою II — навколо осі l_2 з кутовою швидкістю ω_e (переносний рух). В абсолютному русі швидкості точок хрестовини в кожний момент такі, ніби вона обертається навколо осі l, що проходить через точку перетину осей l_1 і l_2, з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_r + \boldsymbol{\omega}_e$.

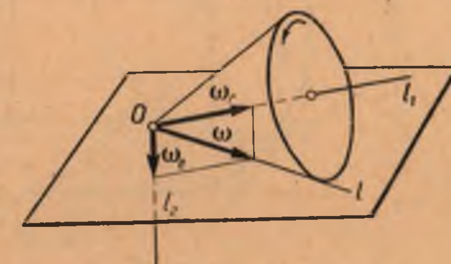

Рис. 26.

У випадку, коли кутові швидкості $\boldsymbol{\omega}_r$ і $\boldsymbol{\omega}_e$ сталі за величиною і напрямом, абсолютний рух становить собою обертання хрестовини навколо нерухомої в просторі осі l і величина кутової швидкості обертання буде сталою.

Якщо ж вектори $\boldsymbol{\omega}_r$ і $\boldsymbol{\omega}_e$ змінюються з часом, то напрям осі l і величина кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$ змінюються так, що в загальному випадку хрестовина здійснює складний рух, який є *обертанням навколо нерухомої точки.*

Другим прикладом, що ілюструє теорему, може бути кочення без ковзання колового конуса з віссю Ol_1 навколо другого нерухомого конуса з віссю Ol_2. Кочення конуса по площині також можна розглядати як результат додавання двох обертань: обертання навколо нерухомої осі Ol_2, перпендикулярної до площини, і обертання навколо осі Ol_1 конуса (рис. 26).

3. Додавання двох миттєвих обертань навколо паралельних осей.

Теорема. *Сукупність двох миттєвих обертань — відносного і переносного — навколо паралельних осей зводиться до миттєвого обертання навколо осі, паралельної осям відносного і переносного обертань. Миттєва вісь абсолютного обертання поділяє віддаль між осями відносного і переносного обертань у відношенні, обернено пропорціональному величинам миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань. Абсолютна миттєва ку-*

това швидкість дорівнює алгебраїчній сумі миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Ми доведемо цю теорему для двох випадків: А) переносне і відносне обертання відбуваються в одному напрямі і В) переносне і відносне обертання відбуваються в протилежних напрямах.

А) Нехай у даний момент часу t розподіл відносних швидкостей у тілі C відповідає його обертанню з кутовою швидкістю ω_r навколо осі l_1, а розподіл переносних швидкостей відповідає обертанню з кутовою швидкістю ω_e навколо осі l_2 (рис. 27). За умовою осі l_1 і l_2 паралельні одна одній, а напрями обертань

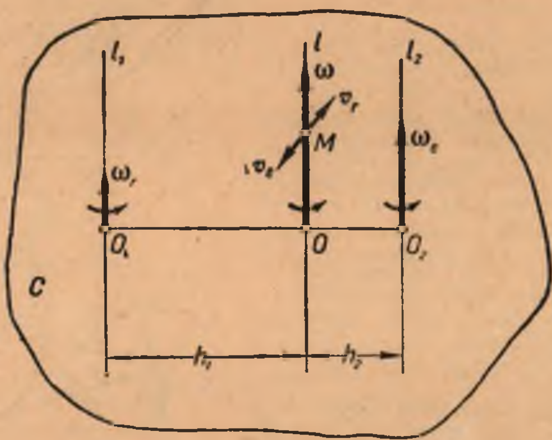

Рис. 27.

однакові. Треба визначити характер розподілу абсолютних швидкостей у тілі C в даний момент часу.

Розглянемо швидкість точки M тіла C, яка лежить у даний момент у площині осей відносного l_1 і переносного l_2 миттєвих обертань. Відносна швидкість точки M дорівнює $\omega_r \cdot h_1$, а переносна швидкість буде $\omega_e \cdot h_2$, де h_1 і h_2 — віддалі точки M до осей відносного і переносного миттєвих обертань.

Виберемо тепер положення точки M між осями l_1 і l_2 так, щоб справджувалась рівність

$$\omega_r \cdot h_1 = \omega_e \cdot h_2. \tag{1.119}$$

Абсолютна швидкість точки M у момент t (а значить, і всіх інших точок тіла C, що лежать на прямій l, яка проходить через точку M і паралельна осям l_1 та l_2) дорівнюватиме нулю. Дійсно, відносна і переносна швидкості точки M за величиною рівні, а напрямлені протилежно.

Отже, у даний момент в тілі C є пряма l така, що абсолютні швидкості всіх тих точок тіла C, які лежать на цій прямій,

дорівнюють нулю. Отже, розподіл абсолютних швидкостей у тілі C в даний момент відповідає обертанню цього тіла навколо осі l. На підставі (1.119) миттєва вісь абсолютного обертання поділяє віддаль між осями відносного і переносного обертань у відношенні, обернено пропорціональному величинам миттєвих кутових швидкостей відносного і переносного обертань.

Залишається визначити кутову швидкість ω абсолютного обертання. Для цього знайдемо швидкість будь-якої точки, яка лежить у даний момент t на прямій l_1. Як швидкість переносного обертання швидкість такої точки дорівнює $\omega_e \cdot (h_1 + h_2)$, а як швидкість абсолютного обертання вона дорівнює $\omega \cdot h_1$.

Маємо:

$$\omega h_1 = \omega_e \cdot (h_1 + h_2),$$

звідки

$$\omega = \omega_e \cdot \frac{h_1 + h_2}{h_1} = \omega_e \times \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) = \omega_e \cdot \left(1 + \frac{\omega_r}{\omega_e}\right) = \omega_e + \omega_r. \tag{1.120}$$

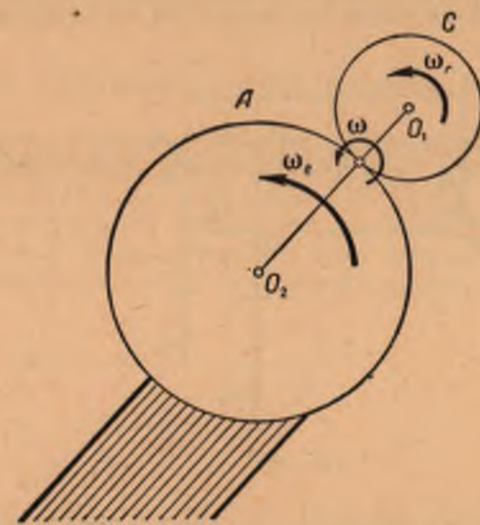

Рис. 28.

Цей результат відповідає правилу додавання паралельних векторів.

Доведена теорема (як і всі теореми цього параграфа) стосується лише розподілу швидкостей точок тіла, але не розподілу прискорень. Це зв'язане з тим, що вісь миттєвого абсолютного обертання тіла може переміщатись у просторі (і відносно твердого тіла).

П р и к л а д. Розглянемо кочення без ковзання диска C по нерухомому диску A. Це кочення малого диска можна здійснити, обертаючи рукоятку O_2O_1. Кочення можна уявляти як результат двох одночасних обертань малого диска C навколо своєї осі O_1 і навколо осі O_2 нерухомого диска (рис. 28).

В) Розглянемо випадок протилежних за напрямом миттєвих обертань; для конкретності вважатимемо, що $\omega_e > \omega_r$.

Розглянемо швидкість точки M, яка лежить у даний момент у площині осей l_1 і l_2 відносного й переносного обертань. Відносна швидкість точки M дорівнює $\omega_r \cdot h_1$, а переносна швидкість буде $\omega_e \cdot h_2$, де h_1 і h_2 — віддалі точки M до осей l_1 і l_2, відповідно. Виберемо положення точки M так, щоб справджувалась рівність

$$\omega_r \cdot h_1 = \omega_e \cdot h_2 \tag{1.121}$$

і щоб відносна й переносна швидкості точки M були напрямлені прямо протилежно. Абсолютна швидкість точки M (а значить, і всіх точок тіла C, що лежать у даний момент на прямій l, яка проходить через точку M і паралельна осям l_1 та l_2) дорівнює нулю, бо відносна й переносна швидкості точки M за величиною рівні, а напрямлені протилежно.

Отже, у даний момент часу в тілі C є пряма l така, що абсолютні швидкості тих точок тіла, які розташовані на цій прямій, дорівнюють нулю.

Визначимо кутову швидкість абсолютного обертання. Швидкість точки O_2, взятої на осі l_2; дорівнює $\omega_r \cdot (h_1 - h_2)$, як швид-

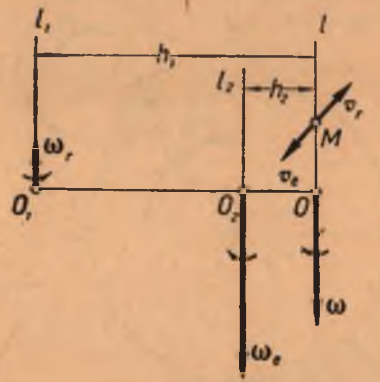

Рис. 29.

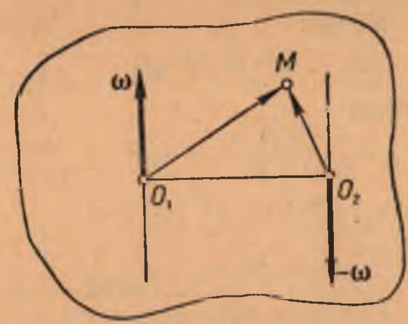

Рис. 30.

кість відносного миттєвого обертання, і водночас вона дорівнює $\omega \cdot h_2$, як швидкість абсолютного миттєвого обертання (рис. 29). Маємо:

$$\omega \cdot h_2 = \omega_r \cdot (h_1 - h_2),$$

або

$$\omega = \omega_r \left(\frac{h_1 - h_2}{h_2}\right) = \omega_r \cdot \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) = \omega_r \left(\frac{\omega_e}{\omega_r} - 1\right) = \omega_e - \omega_r. \quad (1.122)$$

Отже, результуючий рух у даний момент є обертання навколо миттєвої осі l з кутовою швидкістю $\omega = \omega_e - \omega_r$ (якщо $\omega_e > \omega_r$); вектор $\boldsymbol{\omega}$ розташований, очевидно, в площині векторів кутових швидкостей $\boldsymbol{\omega}_r$, $\boldsymbol{\omega}_e$ складових рухів, паралельний їм, напрямлений у бік більшого за величиною вектора, а миттєва вісь результуючого обертання, згідно з (1.121), ділить зовнішнім способом віддаль між осями відносного й переносного обертань на частини, обернено пропорціональні величинам заданих кутових швидкостей.

Як приклад можна розглянути внутрішнє кочення по нерухомій шестірні другої шестірні, яку приводить у рух кривошип.

4. Пара обертань. Розглянемо випадок, коли два миттєві обертання рівні за величиною, але протилежні за напрямом і не відбуваються навколо однієї осі (рис. 30).

Сукупність двох таких миттєвих обертань називається *парою миттєвих обертань*. Абсолютна швидкість будь-якої точки тіла дорівнює

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O_1M} + (-\boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{O_2M}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{O_1M} - \boldsymbol{O_2M}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O_1O_2}.$$

Ми бачимо, що швидкість $\boldsymbol{v}$ точки M не залежить від її положення в тілі. Отже, швидкості всіх точок тіла в даний момент часу рівні.

Ми довели теорему:

Пара миттєвих обертань надає тілу миттєвої поступальної швидкості.

Якщо відносне й переносне обертання утворюють пару обертань протягом деякого проміжку часу, то абсолютний рух тіла протягом цього проміжку часу буде поступальним.

Прикладом може бути поступальний рух педалі велосипеда; цей рух утворюється внаслідок протилежних обертань навколо двох паралельних осей: власної осі педалі і осі ведучої шестірні.

ЧАСТИНА ДРУГА

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Розділ I

КЛАСИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ДИНАМІКИ НЬЮТОНА. ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИНАМІКИ. ЗАКОНИ НЬЮТОНА

Коротка історична довідка. Розвиток механіки нерозривно зв'язаний з історією розвитку суспільства, його продуктивних сил.

Найраніше зародилась статика, яка розвивалась у тісному зв'язку з розвитком будівництва в античному світі. На початку IV ст. до н. е. вже були відомі найпростіші закони додавання і зрівноваження сил, прикладених до однієї точки тіла вздовж однієї прямої. У III ст. до н. е. було побудовано математично струнку теорію важеля і відкрито гідростатичний закон (Архімед, 287—212 до н. е.).

З розвитком ремесел, торгівлі, мореплавства, військової справи і зв'язаного з цим нагромадженням нових знань в епоху Відродження починають бурно розвиватись наука й мистецтво.

У цей час здійснюється переворот в уявленнях людей про будову Всесвіту (Миколай Коперник, 1473—1543). На зміну освяченого церквою твердження Птоломея, що Земля є центром Всесвіту, приходить нове вчення Коперніка: Сонце є центром всієї сонячної системи, і навколо нього як звичайна планета обертається Земля.

Учення Коперніка про *геліоцентричну* систему світу розвивається в жорстокій боротьбі із всесильною тоді церквою. Джордано Бруно твердить про існування нескінченної кількості світів, що обертаються навколо своїх Сонць-зірок; він поплатився за це своїм життям на вогнищі інквізиції (1600).

Уявлення про геліоцентричну систему світу створює передумови для відкриття законів руху планет навколо Сонця; ці закони відкрив Кеплер: перші два — в 1609 р., третій — у 1619 р.

Дальший розвиток ремесел, торгівлі, мореплавства і військової справи потребує знання багатьох нових законів: руху снарядів, міцності великих кораблів, коливання маятників, удару тіл та ін. У цей час і закладаються основи динаміки: Галілей (1564—1642) відкриває закон інерції, механічний принцип відносності, закон незалежності дії сил, закони падіння тіл на землю, закони коливання математичного маятника; Гюйгенс (1629—1695) розробляє теорію фізичного та циклоїдального маятників, установлює закон відцентрової сили, досліджує явище удару.

Усе це створює передумови для формулювання основних законів динаміки. Рівень продуктивних сил дає змогу Ньютону дати правильне узагальнення поняття про силу і ввести нове поняття маси. На базі віками нагромадженого людством досвіду І. Ньютон формулює (в 1687 р.) в своїй безсмертній праці «Математичні начала натуральної філософії»* основні закони динаміки. Це привело всі набуті людством у галузі механіки знання в єдину струнку логічну систему і накреслило шляхи дальшого її розвитку. Формулюванням основних законів динаміки завершується перший етап у розвитку механіки; наступний етап зв'язаний вже з розвитком методів механіки і з відгалуженням великої кількості прикладних її розділів.

Ісаак Ньютон (1642—1727).

Геніальний англійський механік і математик. У своїй фундаментальній праці «Математичні начала натуральної філософії» він сформулював основні поняття й принципи класичної механіки і застосував їх до теорії руху тіл під дією центральних сил. Там же І. Ньютон виклав учення про всесвітнє тяжіння, на підставі якого він розробив теорію руху планет, супутників і комет. Ньютон пояснив найважливіші особливості руху Місяця, дав теорію припливів і відпливів, теорію фігури Землі, розглянув ряд задач теорії притягання суцільних мас і вивчив багато інших питань.

Оцінюючи заслуги засновника динаміки, відомий фізик XX ст. А. Ейнштейн писав, звертаючись до ім'я Ньютона: «... ти знайшов єдиний шлях, можливий у твої часи для людини найвидатнішої наукової творчої здібності і сили мислі»**.

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИНАМІКИ В КЛАСИЧНОМУ ТРАКТУВАННІ

Метод побудови динаміки, який належить Ньютону, відкриває найбільш природний і простий шлях її вивчення.

Успіх Ньютона зв'язаний з тим, що *замість ваги він увів до розгляду новий основний параметр тіла — масу, зв'язав інертність тіл з масою, вибрав добуток маси на швидкість за міру механічного руху і узагальнив поняття сили, а потім, указавши на*

* Нижче цей твір називаємо скорочено: «Начала».
** А. Эйнштейн, Творческая автобиография, УФН, вып. 1, т. LIX, 1956.

незалежні один від одного способи вимірювання маси, сили й прискорення, сформулював три закони руху, які є основними для всієї динаміки.

Розглянемо коротко шлях, по якому йшов Ньютон.

Побудову механіки Ньютон починає введенням поняття маси. До Ньютона поняття маси в механіці не було, розглядали лише вагу тіла. Припускали, що вага даного тіла завжди і всюди незмінна, стала. Але в зв'язку з винайденням маятникового годинника було виявлено (1672) залежність ваги одного й того самого тіла (маятника годинника) від географічної широти місця на землі. Зваживши на це, Ньютон увів до розгляду нову фізичну величину — масу — як основний сталий параметр даного тіла, що *вимірюється порівнюванням ваги тіл на вáгах з коромислом* (*терезах*). Нижче буде з'ясовано, чому саме цей спосіб вимірювання мас вибрав Ньютон.

*З поняттям маси Ньютон зв'язує властивість інертності тіл**. Чітке уявлення про властивість інертності було вихідним пунктом усієї механіки Ньютона. Він пише про природжену властивість матерії до опору, за якою: 1) кожне окремо взяте тіло** при відсутності зовнішнього впливу зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху; 2) прагнучи зберегти свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, тіло чинить опір усякій спробі змінити цей стан.

Інертність може проявлятись в опорі тіла, коли йому намагаються надати прискорення, або в натиску, коли рухоме тіло намагаються зупинити. Цей опір або цей натиск у різних тіл різний: при однакових прискореннях у вагона з вантажем натиск виявляється сильнішим, ніж у вагона без вантажу.

Зв'язок між властивістю інертності тіл і масою полягає в тому, що згадані вище *«інерційні» опір і натиск тіла виявляються завжди пропорціональними його масі*. Наприклад, при однакових за величиною прискореннях двох вагонів «інерційна» сила натиску буде більшою у вагона з вантажем у стільки разів, у скільки разів більша його маса.

Тепер легко зрозуміти і ньютонівський спосіб вимірювання маси — цієї характеристики властивої всім тілам інертності. Справді, прискорене падіння тіл на землю обумовлене їх притяганням до Землі, вагою тіл. Здавалося б, що тіло з більшою вагою повинно падати швидше, тобто з більшим прискоренням. Але досліди, які провів ще Галілей, показали, що всі тіла падають на землю разом, якщо їх разом пустити без початкової швидкості (швидкість падіння рівномірно зростає в міру наближення тіла до поверхні землі: за кожну секунду на 9,81 *м/сек*; мова йде, звичайно, про рух тіл без опору середовища, наприклад, у циліндрі з відкачаним повітрям). Виходить, що

* Дуже поширений погляд ніби Ньютон розумів масу як міру кількості речовини в тілі. Але старанно проведений останнім часом аналіз оригіналу «Начал» показав, що Ньютон не давав такого означення маси і що воно зустрічається тільки в перекладі «Начал» (див. «Успехи физических наук», т. LXI, вып. 3, 1957).

**Тут і нижче під тілом розуміємо матеріальну точку.

хоч Земля і притягає важче тіло сильніше, та воно чинить пропорціонально більший опір намаганню прискорювати його рух, і тому *величина прискорення у всіх тіл однакова.*

З дослідів Галілея і з своїх власних дослідів над вивченням коливань маятників* Ньютон зробив висновок, що *вага, яка є причиною прискореного падіння тіл на землю, і маса, що обумовлює здатність тіл до опору при наданні їм прискорення, пропорціональні одне одному.* Цей експериментально встановлений факт і використав Ньютон при виборі способу вимірювання маси тіл. За Ньютоном, маса тіл вимірюється порівнянням їх ваги. При цьому слід користуватись вáгами з коромислом (терезами), а не пружинними вáгами, бо показання останніх залежать від географічної широти місця і віддалі до центра Землі.

Після введення поняття маси Ньютон проводить свій *вибір міри кількості механічного руху.* Він вважає, що *«кількість руху» тіла пропорціональна його швидкості й масі, тобто вимірюється добутком маси на швидкість.* Ньютон розуміє кількість руху як величину напрямлену, тобто як *вектор.*

Досліди з ударами куль дійсно підтверджують, що здібність одного тіла передавати свій рух іншим тілам пропорціональна добутку маси тіла на його швидкість. При подвоєній швидкості тіла, що ударяє, тілу, що перебуває в спокої, надається в два рази більша швидкість; те саме відбувається і при незмінній швидкості, але при подвійній масі тіла, яке ударяє.

Добуток маси m матеріальної точки на її швидкість $\boldsymbol{v}$, тобто вектор $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, називається *імпульсом*, або (менш вдало) *кількістю руху*, матеріальної точки.

Запровадивши поняття маси, зв'язавши його з властивістю інертності і вибравши міру руху, *Ньютон узагальнює потім поняття сили, розуміючи під прикладеною силою всяку дію, що чиниться над тілом, щоб змінити його стан спокою або рівномірного прямолінійного руху.* Фізична природа прикладеної сили для протікання механічного руху неістотна. Після припинення дії сили тіло продовжує потім перебувати в своєму новому стані руху внаслідок тільки однієї інерції. Отже, інерція виступає як властивість, притаманна всім тілам.

§ 2. ЗАКОНИ ДИНАМІКИ (ЗАКОНИ НЬЮТОНА)

Серед багатьох законів механіки, що були відомі попередникам Ньютона, можна назвати й ті, які тепер прийнято називати аксіомами, або законами, Ньютона. Так, вже Галілей користувався першими двома аксіомами при вивченні падіння тіл на землю, а Гюйгенс користувався всіма трьома аксіомами при виведенні законів удару тіл. Але ніхто з попередників Ньютона не розумів, що саме ці три закони й є основними в механіці і що їх можна покласти як аксіоми в основу при побудові всієї динаміки, а не тільки при вивченні деяких окремих її питань.

* Ньютон виявив, що в даному місці Землі коливання маятників, які відрізняються лише вагою, абсолютно однакові.

Лише Ньютон зрозумів, що всю динаміку з її численними прикладаннями можна побудувати на цих аксіомах як струнку науку. Слід також пам'ятати, що до Ньютона не було ні поняття маси, ні достатньо загального поняття сили; без цих понять аксіоми динаміки ще не мали в попередників Ньютона ні тієї загальності, ні тієї глибини, яку він надав їм уперше.

Розглянемо тепер аксіоми динаміки.

1. Перший закон динаміки — закон інерції. Закон інерції, що є вихідним пунктом ньютонівської механіки, формулюється так:

*Усяке тіло продовжує зберігати свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки й оскільки його не спонукають змінювати цей стан прикладені сили**.

Тут термін «усяке тіло» треба розуміти як матеріальну точку.

Перший закон Ньютона стверджує рівноправність стану спокою і рівномірного прямолінійного руху і показує, що матеріальна точка не може змінити свій рух без зовнішнього впливу. Ці два стани—спокою і рівномірного прямолінійного руху—Ньютон розглядає як природні стани всякого тіла. Здатність тіл перебувати в цих природних станах і є те, що називають інерцією тіл.

Зауважимо, що закон інерції має довготривалу історію становлення, з якою зв'язані імена багатьох учених — від Арістотеля до Ньютона.

2. Другий (основний) закон динаміки. Основний закон динаміки є законом руху матеріальної точки під дією будь-якої, за своїм фізичним походженням і величиною сили:

Зміна кількості руху матеріальної точки пропорціональна прикладеній рушійній силі і відбувається в напрямі тієї прямої, по якій ця сила діє.

Математично другий закон динаміки можна записати так:

$$\frac{d}{dt}(mv) = f. \qquad (2.1)$$

де f — сила, яку прикладено до точки.

У випадку, коли величина маси є стала, цей закон можна записати ще так:

$$m \cdot w = f, \qquad (2.2)$$

де w — прискорення матеріальної точки.

Рівність (2.2) означає:

У кожний момент часу добуток маси матеріальної точки на її прискорення дорівнює рушійній силі, а напрям вектора прискорення збігається з напрямом вектора сили.

3. Третій закон динаміки — закон рівності дії і протидії. Цей закон стосується випадку взаємодії двох матеріальних

* И. Ньютон, Начала, М. — Л., 1936, стор. 39.

точок. Характер і фізична природа взаємодії можуть бути якими завгодно.

У всіх випадках справджується закон:

Дії завжди відповідає рівна їй і протилежно напрямлена протидія, інакше — сили взаємодії двох матеріальних точок завжди між собою рівні і напрямлені в протилежні сторони.

Третій закон Ньютона стверджує, що односторонніх дій у природі немає: не буває таких випадків, щоб тіло тільки діяло, але само не зазнавало протидії, або таких, коли б тіло зазнавало дії, а само не протидіяло. Усяка дія завжди виступає *одночасно* з своїм «антиподом» — протидією. Іншими словами, у природі існує тільки взаємодія тіл, причому дія і протидія за величиною рівні, а за напрямом протилежні. Це справедливо у випадку спокою і у випадку руху тіл.

Микола Єгорович Жуковський (1847—1921).

Великий російський учений, основоположник аеродинаміки, «батько російської авіації» (В. І. Ленін). Єдність теорії й практики була найхарактернішою рисою в діяльності великого вченого. Йому належить класична теорема про підіймальну силу крила літака.

Наведемо приклад. Щодо взаємодії, величезна Земля і крихітний камінь, що падає на неї, є цілком рівноправними тілами: сила притягання каменя до Землі дорівнює силі притягання Землі до каменя. З цього і з співвідношень

$$f_{21} = m \cdot w_1 \text{ і } f_{12} = M \cdot w_2$$

випливає, що прискорення взаємодіючих тіл — Землі і каменя — обернено пропорціональні їх масам:

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{M}{m}.$$

Поділ сил взаємодії на «діючі» і «протидіючі» суто умовний. Якщо сила притягання Землі до Сонця є «дія», то сила притягання Сонця до Землі, що дорівнює їй за величиною, але протилежна за напрямом, і є «протидія». Терміни «дія» і «протидія» можна тут, як і всюди, поміняти місцями.

4. Закон незалежності дії сил. Видатний російський механік М. Є. Жуковський дав таке формулювання закону незалежності дії сил:

Якщо на матеріальну точку діє кілька сил одночасно, то вони надають точці такого складного руху, що складається кінематично з рухів, які кожна сила окремо надає точці без початкової швидкості; якщо при цьому точка вже має швидкість і на неї ще діє сила, то рух точки складається кінематично з руху за інерцією і руху від дії сили.

Принцип незалежності дії сил математично можна подати так: *При одночасній дії на матеріальну точку сил f_1 і f_2 прискорення точки дорівнюватиме геометричній сумі тих прискорень, які були б при роздільній дії сил:*

$$w = \frac{f_1}{m} + \frac{f_2}{m},$$

звідки

$$m w = f_1 + f_2. \tag{2.3}$$

Геометрична сума діючих сил називається *рівнодійною* і позначається $\boldsymbol{R}$:

$$f_1 + f_2 = \boldsymbol{R}.$$

Якщо на точку діють одночасно декілька сил, то другий закон Ньютона можна записати у вигляді

$$mw = \boldsymbol{R}, \tag{2.4}$$

де $\boldsymbol{R}$ — рівнодійна всіх прикладених до точки сил.

5. Система координат ньютонівської динаміки. Тілом відліку, від якого обчислювали всі рухи, здавна була Земля, і основні закони динаміки були відкриті з використанням саме цього тіла відліку. Але з часом виявилось, що при вивченні рухів за допомогою законів Ньютона слід користуватись іншою системою відліку — *геліоцентричною*. Осі цієї системи напрямлені на нерухомі зірки, а початок знаходиться в центрі мас сонячної системи (що приблизно збігається з центром Сонця). Відповідно до цього, *в динаміці звичайно припускають, що всякий рух досліджують відносно геліоцентричної системи відліку.*

§ 3. МАСА.

Маса як міра інертності. Другий і третій закони Ньютона дають змогу встановити два різних експериментальних способи вимірювання маси тіл і одночасно усвідомити, що маса дійсно характеризує інертність тіл. Розглянемо послідовно ці два способи визначення маси.

Перший спосіб грунтується на використанні другого закону Ньютона, з якого випливає, що $m = \frac{f}{w}$. Вибираємо який-небудь певний фізичний спосіб дії і яку-небудь певної величини силу (наприклад, діятимемо на тіла $A_1, A_2, \ldots, A_n$ за допомогою пружини, розтягнутої на певну величину).

Діючи на тіла $A_1, A_2, \ldots, A_n$ вибраною силою, визначаємо прискорення цих тіл, і тоді з відношення сили до прискорення матимемо числові значення маси тіл:

$$\frac{f}{w_1} = m_1\,, \quad \frac{f}{w_2} = m_2, \; \ldots, \; \frac{f}{w_n} = m_n\,.$$

Використання другого закону динаміки для визначення величини маси тіл не перетворює цей закон, як може здатись, у просте означення типу: «Масою називається відношення сили до прискорення». Справді, досліди повинні ще підтвердити або ж спростувати другий закон динаміки $mw = f$ для дій різної фізичної природи і різної величини. І досліди дійсно підтверджують залежність між силою, масою і прискоренням, яка визначається рівнянням $mw = f$, як фундаментальний закон природи, який справедливий незалежно від природи дії (пружна, гравітаційна, електрична, магнітна і т. ін.) для всіх тіл і для будь-яких за величиною сил. Зокрема, при подвійній масі і тій самій величині діючої сили прискорення тіла виявляється в два рази меншим, при потроєній масі — в три рази меншим і т. д. Отже, маса дійсно характеризує здатність тіл до опору при спробі надати їм будь-яким способом прискорення, тобто вона *є мірою інертності тіл.*

Рис. 31.

Другий спосіб визначення маси тіл грунтується на використанні третього закону Ньютона, з якого виходить, що $\frac{m_2}{m_1} = \frac{w_1}{w_2}$.

Вибираємо певний спосіб взаємодії тіл з тілом-еталоном E (рис. 31) і вимірюємо прискорення, яких набувають тіла. Якщо при взаємодії тіла A_i з тілом-еталоном E у взаємодіючих тіл виявились прискорення, які, відповідно, дорівнюють w_i і w, то обернене відношення цих прискорень, тобто величина $\frac{w}{w_i}$, і дає числове значення маси тіла m_i (масу тіла-еталона E беремо за одиницю):

$$m_i = \frac{w}{w_i}\,,$$

Використання третього закону Ньютона для визначення маси не перетворює цей закон природи в просте означення типу: «Масою тіла називається обернене значення відношення прискорень взаємодіючого тіла і тіла-еталона». Справді, досліди повинні ще підтвердити або спростувати взаємозв'язок між масами і прискореннями взаємодіючих тіл, тобто взаємозв'язок, визначений рівнянням

$$-m_1 w_1 = m_2 w_2 \tag{2.5}$$

для всіх видів фізичної взаємодії і всіх можливих комбінацій взаємодіючих тіл. Досліди дійсно підтверджують закон (2.5) для всіх можливих способів фізичної взаємодії (пружного, електричного, гравітаційного, магнітного та ін.) і будь-яких комбінацій взаємодіючих тіл. Зокрема, якщо подвоїти масу першого з двох взаємодіючих тіл, то прискорення першого тіла виявиться в два рази меншим, якщо потроїти — в три рази меншим і т. д. (дослід можна здійснити за допомогою вагонеток, на одній з яких поставлений електромотор, що змотує трос, закріплений на другій вагонетці,—рис. 31.). Ми знову впевнились у тому, що маса є міра інертності тіла.

Тому маса, що фігурує в законах Ньютона, називається *інертною.* Ми знаємо вже *три* способи визначення маси: ньютонівський (за допомогою терезів) і два динамічних, що грунтуються на використанні законів Ньютона.

Ньютонівський спосіб визначення інертної маси тіл через їх зважування важливий для механіки, бо доводить існування способу вимірювання маси, незалежного від другого і третього законів динаміки. Справа в тому, що закони Ньютона можна розглядати як дійсні закони природи лише при умові, що існують незалежні від цих законів і один від одного способи вимірювання маси, сили і прискорення. Такі способи справді існують: масу вимірюють зважуванням тіл, силу — за деформацією пружини, що зрівноважує дану силу, а прискорення є величиною чисто кінематичною, для визначення якої досить уміти вимірювати проміжки часу й віддалі.

Ньютонівська механіка розглядає масу як незмінну. Практика приводить до висновку, що маса не змінюється лише при повільних (порівняно з швидкістю світла) рухах тіл; тому ньютонівська механіка, яка побудована на класичних уявленнях про простір і час, виявилась наукою, що правильно відображає закономірності саме таких (повільних порівняно із швидкістю світла) рухів.

Зробимо деякі узагальнення з цього параграфа.

Як бачимо, інертна маса є міра здатності тіла чинити опір будь-якій спробі змінювати швидкість: при заданій рушійній силі прискорення тіла обернено пропорціональне інертній масі.

Відомо, що матеріальні тіла мають властивість створювати поля тяжіння і зазнавати дії цих полів. *Фізичну величину, яка є мірою здатності тіла створювати поле тяжіння і зазнавати дію цього поля, називають вагомою масою, або масою тяжіння.* Якщо два різних тіла A і B поставити послідовно в однакові умови притягання до третього тіла C (віддалі AC і BC рівні), то вважають, що відношення вагомих мас цих тіл дорівнюють (за означенням) відношенню сил притягання до тіла C. Вибравши яке-небудь тіло C за еталон, дістанемо можливість порівнювати вагомі маси всіх тіл з вагомою масою еталона. Беручи умовно вагому масу еталона за одиницю, встановлюємо принциповий спосіб вимірювання вагомої маси всіх тіл.

Із сказаного легко встановити зв'язок між інертною масою тіл і їх вагою. Якщо за одиничний еталон вагомої маси взяти те саме тіло, яке вибране і за одиничний еталон інертної маси, то дістаємо, що *інертна і вагома маси рівні.*

Тому *поле тяжіння має такі властивості, які відрізняють його від усіх інших, відомих у фізиці, полів*, а саме: *при однакових початкових умовах* (положенні й швидкості) *всі вільні матеріальні точки, незалежно від їх маси, рухаються в полі тяжіння однаково.* Дійсно, якщо змінити інертну масу тіла, яка обумовлює його здатність до опору, то пропорціонально зміниться і вагома маса, а значить, і вага (сила, що рухає), так що сам рух тіла не зміниться. Закон Галілея, за яким усі тіла при відсутності опору падають на Землю з однаковим прискоренням, є окремим випадком сформульованого тут більш загального закону для будь-яких (а не тільки однорідних) полів тяжіння.

На закінчення зазначимо, що питання про масу не зводиться до встановлення тільки способів її вимірювання або до усвідомлення того, що маса є мірою інертності тіла і мірою його гравітаційних властивостей. Треба ще фізично пояснити інертність, гравітацію і т. д. Це дуже складне й важке завдання, яке не можна розв'язати в рамках самої тільки механіки; це завдання стоїть на порядку дня всієї сучасної фізики. В електродинаміці вже встановлено, що інерція електрона має частково польове походження: при прискоренні електрона навколо нього утворюється магнітне поле, що є причиною інерції електрона. У загальній теорії відносності виявлено тісний зв'язок між властивостями простору і гравітаційними властивостями тіл.

Усі ці питання виходять за рамки класичної ньютонівської механіки, і ми їх не розглядатимемо. Зауважимо тільки, що *рівність інертної і вагомої мас у ньютонівській механіці стоїть зовсім осторонь від кістяка цієї теорії і виступає як своєрідний несподіваний факт, виявлений експериментально і використаний для встановлення способу вимірювання мас.* Це, звичайно, недоліки теорії. Тільки в загальній теорії відносності, яку створив А. Ейнштейн, рівність важкої й інертної мас не виступає як щось випадкове, а покладена в фундамент самої теорії як один з основних законів природи.

Розділ II

ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ДЕЯКИХ ОСНОВНИХ ПОНЯТЬ І ЗАКОНІВ НЬЮТОНІВСЬКОЇ МЕХАНІКИ

§ 1. ІНЕРЦІАЛЬНА СИСТЕМА ВІДЛІКУ. ЗАКОН ІНЕРЦІЇ І ПРИНЦИП ВІДНОСНОСТІ ГАЛІЛЕЯ

1. Вступні зауваження. Механіка Ньютона не тільки відкрила широкі можливості дослідження механічного руху матерії, але також дала змогу вивчати немеханічні процеси — теплові, електромагнітні, а потім і світлові, внутріатомні та ін.

Водночас успішний розвиток фізики мав зворотний вплив на механіку. Ряд закономірностей механічного руху був по-справжньому усвідомлений тільки в зв'язку з загальними успіхами фізики. Це стосується й закономірностей, що становлять основи ньютонівської механіки.

Слід пам'ятати, що *в природі не існує чисто механічних явищ: механічний рух завжди зв'язаний і переплетений з немеханічними процесами.* Зв'язок механічного руху з іншими, немеханічними, процесами має якось відбиватись і в основних поняттях механіки, в її законах.

Єдино правильне трактування основ механіки було накреслене Ф. Енгельсом у 80-х роках XIX ст. Ідучи за Ф. Енгельсом, поняття механіки слід вивчати з погляду єдності різних видів руху, враховувати нерозривний зв'язок механічного руху з різними немеханічними процесами, що його обумовлюють.

Одним з важливіших підсумків усього розвитку природознавства є встановлення принципу збереження і перетворення руху:

Усяка фізична система, в якій відбуваються різноманітні процеси, має, як переконливо доводить досвід, певну міру властивого системі руху. Кожного разу, коли якась система вступає у взаємодію з другою фізичною системою і передає їй або дістає від неї рух, міра її руху, як і міра руху системи, що з нею взаємодіє, змінюється, але загальна міра руху обох систем залишається незмінною; зменшення руху в одній системі дорівнює приросту руху в другій.

Це твердження відоме під назвою принципу збереження і перетворення енергії, причому тут термін «енергія» вживається за традицією замість терміну «рух»*.

2. Інерціальна система відліку. Самою своєю суттю механічний рух є рухом відносно інших тіл. Тому вивченню рухів повинен передувати вибір системи координат, тобто тіла, відносно якого досліджують механічні рухи.

Система координат, в якій справджуються закони Ньютона, називається *інерціальною*.

З'ясуємо, які умови повинна задовольняти інерціальна система відліку. Якщо тіло, з яким незмінно зв'язана система відліку, само бере участь у фізичних процесах перетворення і передачі руху, то відбувається штучне переплетіння досліджуваного руху з сторонніми рухами, і тоді буває важко виділити основний рух і встановити його головні (загальні, істотні) закономірності.

Це видно з такого простого прикладу. Нехай на підлозі вагона, який рухається рівномірно на прямолінійному відрізку шляху, стоїть невеликий візок; відносно поверхні землі візок рухається разом з вагоном. При гальмуванні вагона рух візка відносно землі не зміниться і залишиться рівномірним і прямолінійним, тоді як рух його відносно вагона буде прискореним у напрямі руху самого вагона.

Гальмування вагона пов'язане з процесом перетворення механічного руху вагона в невидимий («тепловий») рух атомів у гальмівних колодках; хоч цей процес і не має прямого відношення до руху візка, але він дуже ускладнює характер руху цього візка відносно вагона.

Звідси випливає, що для встановлення основних закономірностей механічного руху систему координат треба зв'язувати, по можливості, з такими тілами, які не взаємодіють ні між собою, ні з матеріальним об'єктом, рух якого досліджують, ні з будь-якими зовнішніми тілами. *Якщо ми хочемо відокремити істотне в зв'язках між тілами природи, ми повинні спочатку абстрагуватись від будь-яких зв'язків.*

* Термін «енергія» використовується в фізиці ще й у вузькофізичному розумінні однієї з мір руху — скалярної.

Якщо на матеріальну точку ніякі зовнішні тіла не діють, то точка називається *ізольованою;* усяка матеріальна точка є практично ізольованою, якщо вона достатньо віддалена від усіх навколишніх тіл.

Уявимо собі тепер чотири ізольованих точки, *відстані між якими залишаються незмінними*, і зв'яжемо з ними декартову систему координат, вибравши початок координат в одній з них і напрямивши осі координат на три інших точки (вважаємо, що чотири ізольовані матеріальні точки не лежать в одній площині). Ця побудова цілком аналогічна до тієї, яку виконують при введенні геліоцентричної системи координат, коли за початок декартової системи координат вибирають центр Сонця, а осі координат напрямляють на три зірки.

Система координат, побудована на чотирьох ізольованих матеріальних точках, відстані між якими залишаються незмінними, називається інерціальною.

Інерціальна система відліку — це не тільки інерціальна система координат, але й певний *спосіб вимірювання часу, певна шкала часу.*

Інерціальною шкалою часу називається така шкала, при використанні якої виявляється, що ізольована матеріальна точка за довільні рівні проміжки часу проходить рівні віддалі (відносно інерціальної системи координат).

Введення інерціальної шкали часу спирається на досвід; експериментально підтверджується, що інерціальна шкала, введена з використанням якоїсь певної ізольованої матеріальної точки, залишається інерціальною при перевірці на будь-якій іншій ізольованій матеріальній точці.

Слід звернути увагу на те, що поняття інерціальної системи відліку не елементарне; воно являє собою глибоку наукову абстракцію.

Введення поняття інерціальної системи відліку цілком природне і необхідне в науці. Саме тоді, коли рухи відносять до інерціальної системи відліку, основні закони механіки виступають у найпростішій і незавуальованій формі — у формі трьох відомих законів Ньютона.

Зауважимо, що всі рухи, які зустрічаються в інженерній практиці, і рухи багатьох космічних тіл можна вивчати теоретично за допомогою законів Ньютона, якщо віднести їх до *геліоцентричної* системи координат і використати прийняту в астрономії шкалу часу. У ряді задач техніки можна користуватись навіть системою координат, зв'язаною з Землею *(геоцентричною системою)*. Але це не дає права ототожнювати інерціальну систему координат з геліоцентричною системою чи з геоцентричною, а інерціальну шкалу часу — з астрономічною.

3. Закон інерції і принцип відносності Галілея. Перший закон динаміки — закон інерції — твердить: усяка ізольована матеріальна точка (тобто точка, яка достатньо віддалена від інших тіл) перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху відносно *інерціальної* системи відліку.

З означення інерціальної системи відліку і з закону інерції логічно випливає, що існує не одна, а безліч інерціальних систем відліку і жодна з них не має ніякої переваги перед іншими.

Механічний рух матеріальної точки може виникати за рахунок немеханічних рухів інших фізичних систем, але основні закономірності цих процесів не залежатимуть від вибору тієї чи іншої інерціальної системи координат, бо *опорні точки будь-якої інерціальної системи координат не беруть участі в фізичних процесах перенесення руху, а залишаються осторонь від них.*

Ми прийшли до важливого висновку, відомого як *принцип відносності Галілея:*

*Рівномірний і прямолінійний рух тіла відліку відносно інерціальної системи координат не впливає на хід механічних процесів**.

Перевірити принцип відносності Галілея дослідом можна так.

Зв'яжемо систему координат незмінно з нерухомою на Землі лабораторією і розглянемо такі механічні рухи, для яких нашу систему відліку можна вважати інерціальною з достатнім ступенем точності. Ми можемо вивчати, наприклад, удари куль, коливання маятників (з невеликою довжиною нитки), рух тіл, кинутих під кутом до горизонту, і т. д. Такі рухи можна вивчати і в лабораторії, обладнаній на кораблі. Якщо корабель рухається точно прямолінійно і рівномірно, без поштовхів і коливань, то, як показує дослід, усі рухи відбуватимуться на кораблі так само, як і в нерухомій лабораторії на Землі.

Після розгляду принципу відносності стає зрозумілим, чому система відліку, яка зв'язана з Землею, часто виступає як практично інерціальна. Це обумовлено малістю кутової швидкості добового обертання Землі відносно зірок і незалежністю законів механічного руху від рівномірного поступального переміщення системи як цілого: рух Землі навколо Сонця за невеликий проміжок часу можна розглядати практично як поступальний, який відбувається прямолінійно відносно геліоцентричної системи координат.

§ 2. МІРА РУХУ

1. Вступні зауваження. Основний закон динаміки можна сформулювати лише після того, коли вже яким-небудь способом знайдено міру механічного руху. Ньютон просто взяв за міру руху добуток маси на швидкість і тільки після цього сформулював основний закон динаміки. Але при такому способі побудови механіки залишається незрозумілим, чому *саме цю* фізичну величину вибирають за міру руху. Це питання виникає ще й тому, що вже за часів Ньютона було відомо про існування *двох* мір руху: mv і $\frac{mv^2}{2}$.

* У сучасній фізиці принцип відносності узагальнений на електромагнітні і всі інші фізичні процеси. Разом з принципом сталості швидкості світла він лежить в основі спеціальної теорії відносності Ейнштейна.

Принцип відносності не випадково має важливе значення в сучасній фізиці — він внутрішньо зв'язаний з принципом незнищуваності руху.

У зв'язку з цим виникає ще ряд додаткових питань: Скільки взагалі основних мір, властивих рухові? Якщо їх тільки дві, то чому? Чому одна з основних мір є векторною, а друга скалярною? Чому структура міри руху є саме такою, а не іншою? Чи немає внутрішнього зв'язку між основними мірами руху? Чи не можна побудувати механіку на основі скалярної міри руху $\frac{mv^2}{2}$?

Усі ці питання мають першорядне значення для теоретичної механіки, бо їх розв'язання дає можливість глибоко розкрити фізичний зміст законів Ньютона і багатьох теорем та принципів динаміки.

2. Коротка історична довідка. Векторну міру руху mv відкрив і поставив на належне їй місце в механіці І. Ньютон, хоч про неї і були певні догадки ще в Галілея, а також у Декарта. Скалярна міра руху в формі $\frac{mv^2}{2}$ закріпилась у механіці значно пізніше — в середині XIX ст. — у зв'язку з роботами Гельмгольца і відкриттям закону збереження й перетворення енергії; але першим, хто відкрив існування скалярної міри руху, був попередник Ньютона — Гюйгенс.

Ще до появи «Начал» Ньютона були відомі такі досліди, що підтверджують векторну міру руху (удар куль), і такі, які підтверджують скалярну міру руху (за такий дослід можна взяти, наприклад, стискання рухомою кулею пружин, поставлених паралельно одна біля одної: при подвоєній швидкості та сама куля спроможна викликати одночасно таке саме стискання в чотирьох однакових пружин, а не в двох).

Те, що рух має двоякого роду міру, привернуло увагу вчених ще в першій половині XVIII ст. У ті часи здавалось несумісним існування двох мір руху: пропорціональної першому і другому степеням швидкості. Одні вчені (Лейбніц і його прихильники) вважали, що міра руху пропорціональна квадрату швидкості, а інші (картезіанці — прихильники філософії Декарта) — що вона пропорціональна першому степеню швидкості.

Розгорілась відома полеміка, яку розпочав Лейбніц проти картезіанців. Незважаючи на те, що в цій полеміці в різні періоди брали участь видатні мислителі свого часу — Лейбніц, Кант, Даламбер, Гельмгольц та ін., питання так і не було розв'язано. Кожна з сторін, що виступали в полеміці, виявилась неспроможною спростувати своїх противників, а практика ігнорувала їх полеміку, і обидві міри застосовувались і утверджувались у фізиці як рівноправні.

Ф. Енгельс присвятив проблемі міри руху цілий розділ у своїй відомій праці «Діалектика природи». Лише недостатній рівень розвитку фізики не дав йому змоги остаточно розв'язати цю проблему. Її було розв'язано тільки в XX ст. у зв'язку з створенням теорії відносності, яка є новою фізичною теорією простору і часу. Виявилось, що *існування двох мір руху внутрішньо обумовлене* *тим, що всякий матеріальний рух відбувається в просторі і в часі. Просторово-часовий характер руху матерії накладає свій відбиток на рух і обумовлює векторно-скалярну структуру міри руху.*

Спираючись на прийняті в ньютонівській механіці властивості простору і часу та на властивість незнищуваності руху можна довести строго математично, що кількість руху матеріальної точки вимірюється не однією, а двома мірами, одна з яких є скаляром, а друга — вектором, і що закон обчислення цих кількостей руху такий:

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_0, \quad \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v},$$

де m і E_0 — сталі. Скалярну міру руху E називають *енергією*, а векторну $\boldsymbol{P}$ — *імпульсом*.

Фізичний зміст сталих m і E_0 такий. Стала E_0 є, очевидно, скалярною мірою руху (енергією) матеріальної точки при $\boldsymbol{v} = 0$, тобто тоді, коли точка перебуває в спокої. Це є міра всіх внутрішніх видів руху, зв'язаних з рухом молекул, атомів і т. д.

Якщо матеріальна точка не руйнується і її атомна структура не змінюється, то E_0 залишається сталою. У таких випадках цю сталу частину повної енергії матеріальної точки можна просто не розглядати і цікавитись лише надвишком енергії над її значенням у стані спокою точки. Цей надвишок енергії дорівнює $T = \frac{mv^2}{2}$ і називається *кінетичною енергією* рухомої матеріальної точки.

Фізичний зміст параметра m, що називається *масою*, тут очевидний: за формулами стала m є кількісною характеристикою властивості матеріальної точки мати при даній швидкості певну — більшу чи меншу — «кількість руху», вимірюваного імпульсом і енергією *.

Числове значення сталої m можна визначити для будь-якого тіла, спираючись на властивість збереження руху при ударянні тіл: як відношення швидкості еталона, набутої ним внаслідок удару, до швидкості, утраченої тілом, що ударяє (до удару еталон нерухомий і його маса дорівнює 1). Досліджуючи удари різних тіл, можна також виявити фізичний зміст сталої m як міри інертності. Зазначений тут спосіб вимірювання маси не має практичної цінності, але він спирається на принцип незнищуваності руху і тому важливий принципово при аналізі основ динаміки.

Прості досліди — підвішування тіл на пружинних терезах — показують, що розтяг пружини прямо пропорціональний інертній

* А. Д. Александров, Про суть теорії відносності, Досягнення сучасної фізики, вип. IV, «Радянська школа», 1955, стор. 17.

масі m тіла; це означає, що інертні маси тіл пропорціональні їх вазі.

Отже, грунтуючись на вченні про міру руху, ми знову приходимо, хоч і іншим шляхом, до висновку, що маса є мірою інертності та мірою гравітаційних властивостей тіл і водночас характеризує при даній швидкості запас руху в тілі.

На закінчення зауважимо, що незалежність маси від швидкості (тобто той факт, що в формулах для мір руху множник m є сталим) логічно випливає з прийнятих у ньютонівській механіці властивостей простору і часу, а не є, як часто вважають, додатковим постулатом.

Доведення всіх перелічених висновків і розгляд багатьох інших цікавих питань можна знайти в спеціальній літературі *.

§ 3. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ЗАКОНІВ НЬЮТОНА

1. Вступні зауваження. На базі вчення про міру руху відкривається можливість глибше розкрити внутрішній зміст не лише законів Ньютона, але й інших законів, принципів і теорем механіки.

Встановлення і обгрунтування міри механічного руху ставить усю механіку, як науку, на міцну основу. Після встановлення міри механічного руху залишається тільки з'ясувати, як змінюється ця міра під дією матеріальних тіл, що оточують точку.

2. Перший закон Ньютона. Цей закон, як відомо, стверджує: *Усяка матеріальна точка, яка достатньо віддалена від інших, перебуває в стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху відносно інерціальної системи відліку.*

Зміст першого закону Ньютона можна збагнути лише в зв'язку з розкриттям фізичного змісту поняття інерціальної системи відліку.

Якщо взяти до уваги фізичний смисл інерціальної системи відліку і вчення про міру руху, то дійдемо висновку, що *змістом першого закону динаміки є твердження про незнищуваність* (збереження) *руху в тому найпростішому випадку, коли матеріальний об'єкт представлений однією матеріальною точкою, дія навколишніх тіл цілком усунена, а рух розглядається відносно системи нерухомих і ізольованих від зовнішнього впливу матеріальних точок.*

Отже, те, що Ньютон поклав в основу всієї механіки закон інерції, об'єктивно означає, що в основу науки про рух було покладено стверджений досвідом закон незнищуваності руху.

Першим, хто розгадав істинний фізичний смисл закону інерції, був Ф. Енгельс. Він писав: «Механіка: відправною точкою

* Див. В. С. Сорокин, Закон сохранения движения и мера движения в физике, УФН, т. LIX, вып. 2, июнь 1956.

для неї була інерція, яка є лише негативним виявом незнищимості руху»*.

3. **Другий закон Ньютона. Сила.** Фізичний смисл одного з найважливіших понять механіки — поняття сили — можна розкрити тільки при умові, що буде враховано внутрішній зв'язок між механічним рухом і рухами немеханічної природи, які його обумовлюють.

Якщо в явищі пружного удару механічний рух тільки *переходить* з одного тіла на інше без зміни виду руху, то при коливаннях вагона на ресорах відбувається складний процес *перетворення* механічного руху вагона в прихований для безпосереднього сприйняття людиною форму руху частинок (атомів), з яких складається ресора. Ще складніший процес перетворення рухів буде у випадку, коли заряд прискорюється полем: механічний рух заряду виникає за рахунок властивого полю електромагнітного виду руху.

Фізика ще дуже мало знає про механізм перетворення і перенесення різних видів руху. Але, абстрагуючись від *механізму* перенесення руху, механіка не може ігнорувати повністю весь процес перенесення руху, бо всяка зміна запасу механічного руху точки обумовлена еквівалентною зміною взагалі немеханічних видів руху в навколишніх тілах (принцип незнищуваності руху).

Ньютонівська механіка вводить ряд характеристик процесу передачі руху; з них на перше місце слід поставити ту характеристику, яка визначає бистроту перенесення руху (імпульса); ця характеристика зв'язана з поняттям сили.

Зміст поняття сили вперше розкрив Ф. Енгельс. Серед інших глибоких думок про силу ми знаходимо в творі «Анти-Дюрінг» таку:

«...рух не може бути створений, він може бути тільки перенесений. Коли рух переноситься з одного тіла на інше, то, оскільки рух переходить, оскільки він активний, його можна розглядати як причину переносимого руху, оскільки цей останній є перенесеним, пасивним. Цей активний рух ми називаємо *силою*, а пасивний же — *проявом сили*. Звідси ясно як день, що сила має ту саму величину, як і її прояв, бо в них обох відбувається *один і той самий* рух»**.

Дії на дану точку матеріальних об'єктів, що її оточують, можуть мати найрізноманітнішу фізичну природу — пружну, гравітаційну, електромагнітну і т. д. Хоч яка була б дія за своєю фізичною природою, вона завжди означає складний процес перетворення руху. *Якщо заключним актом цього перетворення є поява* (зміна) *механічного руху даної точки, то говорять про механічну дію на точку*. Поняття механічної сили не має смислу у випадках, коли в ланцюгу перетворень руху немає механічної

---

* Ф. Енгельс, Діалектика природи, Держполітвидав УРСР, 1953. стор. 3.

** Ф. Енгельс, Анти-Дюрінг, Держполітвидав УРСР, 1953, стор. 53.

ланки (наприклад, у випадку перетворення енергії світла безпосередньо в теплову енергію). Тому говорять, що *сила є мірою механічної дії на матеріальну точку з боку інших матеріальних об'єктів* (тіл або полів).

Важливо звернути увагу на те, що поняття сили має дві різні сторони: перша стосується *походження* сили, а друга — її *прояву*. Щодо походження, то сила визначається зовнішньою фізичною обстановкою — розташуванням тіл у просторі, фізичним станом тіл (або полів), швидкостями руху тощо, тоді як проявляється сила в перенесенні руху (імпульса) на матеріальну точку, у зміні швидкості і прискоренні тієї точки, на яку сила діє.

Багатовікові спостереження за явищами природи, технічний і науковий досвід переконують нас у тому, що обидві сторони поняття сили нерозривно зв'язані між собою і що реальна основа цього зв'язку — незнищуваність руху.

Другий закон Ньютона стверджує, що

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}. \tag{2.6}$$

У правій частині основного рівняння динаміки (2.6) подано силу, тоді як у лівій частині цього рівняння подано прояв сили, тобто саму зміну імпульса $\boldsymbol{p}$ даної точки. Рівність цих двох величин означає: імпульс, що залишає зовнішні матеріальні об'єкти, переходить до нашої матеріальної точки. Отже, другий закон Ньютона відбиває найістотнішу властивість руху — його незнищуваність при перенесенні на матеріальну точку з інших об'єктів.

Другий закон Ньютона є точним у рамках установлених у механіці уявлень про властивості простору і часу. Щождо закладеної в другому законі Ньютона ідеї незнищуваності руху, то вона всесильна. З новими відкриттями ця ідея дедалі більше зміцнюється й утверджується у фізиці. *Другий закон динаміки є в повному розумінні законом природи, який відображає фундаментальну властивість матеріального руху — властивість його незнищуваності*.

Хоч Ф. Енгельс і не пише прямо про те, що він має намір дати аналіз змісту основного закону динаміки (другого закону Ньютона), та фактично він його дав. Справді, висловивши в «Діалектиці природи» думку, аналогічну до процитованої вище з «Анти-Дюрінга», Ф. Енгельс закінчує так:

«Згідно з законом незнищимості руху, звідси само собою випливає, що сила точно дорівнює своєму прояву, бо в обох-таки випадках — це *один і той самий рух*»*.

---

* Ф. Енгельс, Діалектика природи, Держполітвидав УРСР, 1953, стор. 209.

Ця остання фраза була написана Ф. Енгельсом майже 80 років тому, але ніколи не була, як нам здається, належно оцінена в літературі: дискусії про пізнавальну суть і фізичний зміст основного закону динаміки точились багато десятків років аж до нашого часу — до побудови фізичної теорії міри руху, яка підтвердила геніальний аналіз Ф. Енгельса.

Зробимо ще одне зауваження. При пізнаванні сил нам часто доводиться використовувати другий закон Ньютона як означення сили; цей спосіб зводиться до знаходження сил шляхом визначення прискорень. Ефективність цього способу показав ще сам Ньютон: користуючись цим методом, він знайшов силу притягання планет до Сонця і обгрунтував відомий закон всесвітнього тяжіння. З допомогою кінематичних законів Кеплера Ньютон знайшов, що прискорення планети обернено пропорціональне квадрату віддалі від планети до Сонця, і, скориставшись другим законом динаміки, прийшов до висновку, що й сила притягання планети до Сонця обернено пропорціональна квадрату віддалі між ними. Потім Ньютон узагальнив цей результат на випадок взаємодії будь-яких двох матеріальних тіл. Так був установлений закон всесвітнього тяжіння*.

Знайдений Ньютоном метод визначення сили всесвітнього тяжіння є загальним і характерним для фізики; його часто використовують при визначенні сил залежно від параметрів руху. Те, що в цьому методі для визначення сили завжди використовується другий закон Ньютона, породило в частини фізиків переконання, ніби другий закон Ньютона є лише означенням нового поняття сили: силою називається добуток маси на прискорення. У кращому випадку ці фізики твердять, що рівність $mw=f$ не слід все ж таки розглядати як просту тотожність, що ця рівність визначає форму взаємодії між тілами (бо в цю рівність входить саме перша похідна від імпульса, а не похідна другого чи третього порядків). Про необгрунтованість і шкідливість такого погляду буде сказано нижче.

4. Третій закон Ньютона. Якщо перший закон динаміки припускає матеріальну точку ізольованою, а другий закон вважає її такою, на яку діють які завгодно фізичні системи (тіла або поля), то третій закон стосується випадку, коли взаємодіють тільки дві матеріальні точки. Третій закон доповнює перші два настільки, що всі три закони в своїй сукупності вже достатні для вивчення руху як завгодно складних систем матеріальних точок.

Отже, нехай дві матеріальні точки взаємодіють між собою. За фізичною природою взаємодія точок може бути будь-якою: електричною, магнітною, пружною, гравітаційною і т. д. Третій закон динаміки стверджує, що сили дії і протидії завжди рівні

* И. Ньютон, Начала, М. — Л., 1936, стор. 3.

і прямо протилежні. Але рівність сил на підставі другого закону означає, що

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{dp_2}{dt},$$

звідки

$$dp_1 = -dp_2,$$

тобто приріст імпульса однієї точки означає таке саме зменшення його для другої точки. Отже, третій закон динаміки є законом про незнищуваність механічного імпульса, тобто законом про незнищуваність векторної міри руху двох взаємодіючих матеріальних точок. *Третій закон Ньютона є тією ланкою в науці про механічний рух, яка дає змогу побудувати динаміку складних систем матеріальних точок на основі динаміки однієї матеріальної точки.*

У своїй сукупності всі три закони Ньютона дають вичерпно повно сформульований за допомогою поняття сили закон незнищуваності руху для того класу фізичних явищ, до якого можна застосувати поняття сили.

§ 4. БОРОТЬБА В МЕХАНІЦІ ПРОТИ ІДЕАЛІСТИЧНИХ ПЕРЕКРУЧЕНЬ ЗМІСТУ ЗАКОНІВ НЬЮТОНА

Механіка була й залишається ареною жорстокої ідеологічної боротьби між матеріалізмом і ідеалізмом.

У своїх марних атаках на матеріалізм ідеалісти перекручують і спотворюють зміст основних понять і законів механіки. Головна ідеалістична течія в механіці веде свій початок від фізика-ідеаліста Ернста Маха.

Почнемо з розгляду питання про інерціальну систему відліку й закон інерції.

У класичних лекціях видатного фізика А. Ейнштейна з теорії відносності читаємо: «Вразливим пунктом принципу інерції була та обставина, що він містив логічне коло: маса рухається без прискорення, якщо вона достатньо віддалена від інших тіл; але ми знаємо про її достатню віддаленість від інших тіл лише з її руху без прискорення».

Думку Ейнштейна, на жаль, поділяє багато фізиків за кордоном. А. Зоммерфельд, видатний фізик сучасності, висловлює в своїй книзі «Механіка» твердження, повне ідеалістичного песимізму *.

Він ставить питання: «Які взагалі вимоги треба ставити до ідеальної системи відліку механіки?»

* А. Зоммерфельд, Механика, 1947, стор. 16—17.

І відповідає: «З теоретичного погляду ми, на жаль, маємо тавтологію: вірною є та система відліку, в якій закон інерції Галілея виявляється в достатній мірі вірним для достатньо вільного тіла. Отже, закон інерції зводиться до чисто формального означення».

Треба завжди пам'ятати, що всі подібні твердження видатних фізиків грунтуються не на фізичних міркуваннях, а виключно на філософських поглядах.

Зробимо спочатку одне зауваження щодо історії питання про інерціальну систему відліку.

Ньютон вважав, що закони динаміки — це закони руху тіл відносно абсолютного простору (на практиці використовувалась, як відомо, геліоцентрична система відліку або навіть система, скріплена з землею).

Тому для Ньютона закон інерції не зводився до тавтології або до означення, що містить логічне коло. За Ньютоном, тіло, яке достатньо віддалене від інших, перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху в абсолютному просторі.

Але поняття про абсолютний простір не витримало фізичної критики, і його відкинули. Після цього й склалось скрутне становище: фізики знали закон інерції та інші закони механіки, але не знали того тіла відліку, до якого слід відносити рухи.

І ось, замість того щоб розкрити справжній фізичний смисл поняття інерціальної системи відліку й закону інерції, ті фізики, які свідомо ігнорують філософію діалектичного матеріалізму, змушені визнати свою повну безсилість і заявляють, що фундаментальні поняття механіки зводяться нібито до формальних означень, які містять у собі логічне коло, тобто до тавтології.

Але тим фізикам, які не визнають діалектичного матеріалізму, ніколи не ухилитись від відповіді на пряме питання: «Чому ж ці «формальні означення» різних понять, які до того ж й «містять» ще в собі логічні кола, є такими могутніми засобами пізнання реальних явищ і процесів об'єктивного світу?»

Поняття інерціальної системи відліку — наукова абстракція. Якщо ігнорувати цей факт, то можна дійти й до безглуздого висновку про наявність у законі інерції і в понятті інерціальної системи відліку логічного кола, звести їх до тавтології.

Спочатку свідомо вводять певну наукову абстракцію, а потім з безмірною наївністю намагаються знайти в природі конкретний і неодмінно абсолютно тотожний її фізичний прообраз і, не знайшовши його, заявляють, що саме наукове поняття зводиться до тавтології. Незаконний характер таких висновків очевидний.

Отже, насправді *в законі інерції і в понятті інерціальної системи відліку ніякого логічного кола немає. Саме за допомогою цієї наукової абстракції — інерціальної системи відліку — стає можливим відкрити в механіці найістотніші закономірності руху в їх чистому вигляді.*

Розглянемо ще питання про перекручення змісту другого закону Ньютона. З погляду Маха і його прихильників, другий закон Ньютона є не основним законом природи, а лише означенням поняття сили. Тому, на їх думку, цей закон слід формулювати так: силою називається добуток маси на прискорення. Так, проф. Уіттекер у своїй «Аналітичній динаміці» вважає другий закон Ньютона означенням сили, а основним законом механіки вважає третій закон, який інтерпретується з вузько вимірювальної точки зору як закон, який стверджує, що відношення прискорень двох взаємодіючих точок стале і не залежить від фізичного способу взаємодії. За Уіттекером, маса вимірюється на основі того ж таки третього закону: вибираючи яке-небудь тіло за еталон і який-небудь спосіб взаємодії (наприклад, відштовхування стиснутою пружиною) за основний, можна визначити відношення мас тіл як величину, обернену відношенню прискорень. Цим і вичерпується, за Уіттекером, увесь зміст основних законів механіки.

Таким чином, якщо від другого закону Ньютона не залишається нічого, крім означення поняття сили, то й третій закон лише частково виступає як твердження, яке підлягає дослідній перевірці, що при *будь-яких способах* взаємодії *яких завгодно* двох тіл прискорення їх обернені величині мас і напрямлені протилежно (незалежність маси від порядку і способів взаємодії).

Відомий сучасний фізик Зоммерфельд у своїй книжці «Механіка» критикує Кірхгофа за те, що він хотів звести поняття сили до простого означення, але сам Зоммерфельд стає на шлях зведення другого закону Ньютона до простого означення поняття маси і відстоює операціоналістський погляд, твердячи, що весь зміст фізичних понять вичерпується лише вказівкою на спосіб вимірювання величин. Тому й означення поняття сили Зоммерфельд бачить у вказівці на спосіб її вимірювання. Крім означення поняття маси, другий закон динаміки, за Зоммерфельдом, підкреслює, що силою визначається саме перша похідна від імпульса $\frac{dp}{dt}$, а не самий імпульс p або, наприклад, $\frac{d^3p}{dt^3}$.

Перший, хто рішуче виступив проти перекручень Маха в механіці, був видатний російський механік проф. М. Є. Жуковський. У 1887 р. відзначалось 200-річчя з дня виходу в світ геніального творіння І. Ньютона «Начала». У своєму виступі на засіданні Московського математичного товариства всього лише через чотири роки після того, як Мах написав свою «Механіку», М. Є. Жуковський* говорив: «...слід ще згадати про спроби змінити означення механічних величин і разом з цим по-новому формулювати основні закони механіки... всяка така спроба закінчувалась повною невдачею. Так, наприклад, у критиці механічних

* Н. Е. Жуковский, Полное собрание сочинений, т. IX, 1937, стор. 267.

принципів Маха, що недавно вийшла, автор вважає раціональним зробити такі зміни у викладі Ньютона. Третій закон він відносить до означення маси, зазначаючи, що відношення мас двох взаємодіючих тіл дорівнює оберненому відношенню знайдених прискорень; так що від закону залишається тільки твердження, що прискорення взаємодіючих тіл протилежні і що відношення мас двох тіл не залежить від їх фізичного стану і від того, чи визначене воно безпосередньо, чи за допомогою проміжного тіла. Перший і другий закони Ньютона він опускає, оскільки вони, на його думку, містяться в означенні сили, величину якої Мах визначає приростом (геометричним) кількості руху тіла, що рухається. Після цього до рештки від третього закону він додає принцип незалежності дії сили від дії другої сили. На нашу думку, у такому викладі насамперед є неправильною думка вважати силу і масу поняттями похідними». Так переконливо М. Є. Жуковський засудив махізм у механіці, як антинаукову течію, ще в 1887 р.

Проти ідеалістичних перекручень у фізиці виступали видатні вчені, які стояли на позиціях матеріалістичного світогляду: Жуковський, Тімірязєв, Больцман, Ланжевен, Умов, Столєтов, Планк та ін. Але махістський вплив на механіку й фізику охоче підтримали деякі зарубіжні вчені, і це значно загальмувало розвиток цих наук.

Треба було не просто дати критику окремих перекручень махістів у механіці,а завдати їм нищівного удару по всій їх філософії і відстояти для природознавства філософію діалектичного матеріалізму. Це завдання виконав В. І. Ленін у своїй знаменитій праці «Матеріалізм і емпіріокритицизм». У цій книзі В. І. Ленін геніально узагальнив усе істотне з набутого наукою, і насамперед природознавством, за весь історичний період після смерті Ф. Енгельса. В. І. Ленін осмислив і узагальнив новітні відкриття фізики (радіоактивності, залежності маси від швидкості, складного характеру побудови атома, рентгенівських променів і т. д.), розкрив суть кризи природознавства (яка виникла у зв'язку з тим, що новітні відкриття фізики не вкладались у рамки старих понять, і тому фізики, що стихійно стояли на матеріалістичних позиціях, взяли під сумнів матеріалізм, завагались, а частина з них хотіла знайти вихід у махізмі), указав шлях виходу з кризи в природознавстві (який зводиться до свідомого переходу природодослідників на позиції матеріалістичної діалектики), показав перспективи дальшого розвитку фізики й природознавства взагалі.

Дальший розвиток фізики повністю підтвердив весь геніальний аналіз В. І. Леніна. Сучасна фізика зробила ряд нових надзвичайно важливих відкриттів (відкриття ядерної фізики і квантової механіки), які можна зрозуміти лише в світлі ленінських ідей, розвинутих у книзі «Матеріалізм і емпіріокритицизм».

Сучасні фізичні ідеалісти значно запекліше, ніж колишні махісти, ведуть атаку на матеріалізм у фізиці. Тому книга В. І. Леніна «Матеріалізм і емпіріокритицизм» озброює всіх прогресивних фізиків нашого часу для боротьби проти сучасного ідеалістичного мракобісся в фізичній науці.

Розділ III

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ ВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Предмет динаміки. *Динаміка є розділ теоретичної механіки, в якому викладено найбільш загальні внутрішні зв'язки між просторово-часовими* (кінематичними) *характеристиками механічних рухів і силами, що зумовлюють ці рухи.*

Рух однієї матеріальної точки і рух системи матеріальних точок розглядають окремо; це полегшує вивчення динаміки.

Якщо рух матеріальної точки, що відбувається під дією заданих сил, не обмежено ніякими наперед заданими умовами, то точку називають *вільною*. Прикладами вільних точок будуть: штучний супутник Землі, елементарна частинка в прискорювачі, куля в польоті, планета в русі навколо Сонця, електрон у русі навколо ядра атома та ін.

У найближчих п'яти розділах викладено рух вільної матеріальної точки під дією заданих сил.

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

З кінематики відомо, що рівняння руху матеріальної точки можна задати в трьох формах: координатній, натуральній і векторній. Тому існує також три форми диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

1. **Векторна форма.** Основне рівняння динаміки

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} \tag{2.7}$$

можна переписати так:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{f}, \tag{2.8}$$

де m — маса точки, $\boldsymbol{w} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ — її прискорення, $\boldsymbol{f}$ — рівнодійна сил, прикладених до точки. Найчастіше трапляються випадки, коли сила $\boldsymbol{f}$ залежить від часу t, від положення точки, яке визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$, і від швидкості руху $\boldsymbol{v}$:

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}).$$

Рівність (2.8) називається *диференціальним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.*

2. Координатна форма. Проектуючи рівняння (2.7) на осі прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, дістанемо диференціальні рівняння руху матеріальної точки в *координатній формі*:

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z. \tag{2.9}$$

Якщо точка рухається в площині, то цю площину можна взяти за координатну, і тоді рівнянь руху буде тільки два.

У загальному випадку криволінійних координат, на підставі (1.49), дістанемо

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = H_i \cdot f_{q_i} \; (i = 1, 2, 3), \tag{2.10}$$

де $T = \frac{mv^2}{2}$ — кінетична енергія точки, а f_{q_i} — проекція на відповідну координатну вісь q_i рівнодійної $\boldsymbol{f}$ сил, що діють на точку. Зауважимо, що праву частину рівняння (2.10) можна подати, на підставі (1.39), у вигляді скалярного добутку:

$$H_i \cdot f_{q_i} = H_i \cdot \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{f} \; (i = 1, 2, 3); \tag{2.11}$$

зокрема, рівняння руху точки в циліндричних координатах буде (див. стор. 35)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f_r,$$
$$\frac{m}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2 \cdot \dot{\varphi}) = f_\varphi,$$
$$m \cdot \ddot{z} = f_z,$$

де f_r, f_φ, f_z — проекції рівнодійної прикладених до точки сил на осі місцевого координатного базису.

3. Натуральна форма. Перепишемо основне рівняння (2.7), враховуючи (1.28). Маємо:

$$m\left(\frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \boldsymbol{n}\right) = \boldsymbol{f}. \tag{2.12}$$

Помноживши ліву і праву частини цього рівняння скалярно спочатку на $\boldsymbol{\tau}$, а потім на $\boldsymbol{n}$, дістанемо два рівняння:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = f_\tau, \qquad m \cdot \frac{v^2}{\rho} = f_n, \tag{2.13}$$

де f_τ і f_n — проекції на додатно зорієнтовані дотичну і головну нормаль рівнодійної $\boldsymbol{f}$ сил, що діють на точку.

З рівняння (2.12) видно, що сила $\boldsymbol{f}$, як і прискорення $\boldsymbol{w}$, точки завжди лежить у стичній площині, орієнтація якої в просторі визначається одиничними векторами $\boldsymbol{\tau}$ і $\boldsymbol{n}$.

§ 2. ДВІ ОСНОВНІ ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ ТОЧКИ

У динаміці точки можна ставити і розв'язувати задачі двох основних типів.

1. Перша основна задача. За відомим законом руху

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \tag{2.14}$$

треба визначити рівнодійну $\boldsymbol{f}$ сил, що зумовили заданий рух точки; маса точки відома. Спосіб розв'язування цієї задачі простий: диференціюємо двічі (2.14) і знаходимо прискорення $\boldsymbol{w}$ або його проекції, якщо рівняння руху точки задані в одній з координатних форм, а потім за диференціальним рівнянням руху, узятим у відповідній формі, знаходимо силу $\boldsymbol{f}$ або її проекції.

2. Друга основна задача (обернена). Заданими є сила $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v})$ і «*початкові умови*», тобто радіус-вектор $\boldsymbol{r}_0$ і швидкість $\boldsymbol{v}_0$ точки в певний момент часу t_0, а також маса точки. Треба знайти закон руху $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ точки в просторі. Цю задачу розв'язують за допомогою інтегрування диференціальних рівнянь руху, отже, вона незрівнянно складніша, ніж перша.

Момент часу t_0 називається *початковим*; положення точки та її швидкість у початковий момент часу називаються, відповідно, *початковим положенням* і *початковою швидкістю*.

У скалярній формі сила задається через її проекції в певній системі координат як функція своїх аргументів: часу t, координат q_i і їх перших похідних $\dot{q}_i$ по часу; початкове положення точки задається її координатами q_i^0 в початковий момент t_0 часу, а початкова швидкість — першими похідними $\dot{q}_i^0$ від координат по часу для момента t_0.

§ 3. ПЕРШІ І ДРУГІ ІНТЕГРАЛИ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ РУХУ ТОЧКИ

Запишемо диференціальні рівняння руху точки у вигляді:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{y} &= Y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m\ddot{z} &= Z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Загальні аналітичні методи розв'язування системи диференціальних рівнянь (2.15) при довільних функціях X, Y, Z у математиці ще не розроблені. Але деякі способи побудови розв'язків системи (2.15) можна назвати.

Нехай після перетворень систему (2.15) зведено до еквівалентної їй системи (дві системи еквівалентні, якщо кожна з них є висновком другої):

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\Phi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0.$$

Ця система, в свою чергу, еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_1, \\ \Phi_2(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_2, \\ \Phi_3(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) &= C_3, \end{aligned} \tag{2.16}$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

Усяке співвідношення типу

$$\Phi(t,\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) = C,$$

що містить час, координати, перші похідні від координат по часу і довільну сталу, де функції x, y, z ті самі, що в системі (2.15), називається *першим інтегралом рівнянь руху* (2.15). Вище ми дістали три перших інтеграли (2.16) системи (2.15).

Нехай далі систему (2.16) ми перетворили до еквівалентної їй системи трьох рівнянь:

$$\frac{d}{dt}F_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}F_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}F_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) = 0.$$

Ця система, в свою чергу, еквівалентна такій:

$$\begin{aligned} F_1(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_4, \\ F_2(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_5, \\ F_3(t,\ x,\ y,\ z,\ C_1,\ C_2,\ C_3) &= C_6. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Усяке співвідношення типу

$$F(t,\ x,\ y,\ z,\ a,\ b,\ c) = d,$$

що містить час, координати і довільні сталі, де функції x, y, z ті самі, що в системі (2.15), називається *другим інтегралом рівнянь руху* (2.15). Вище ми дістали три других інтеграли (2.17) рівнянь руху (2.15). Вони (другі інтеграли) визначають три функції x, y, z, що залежать від часу і шести незалежних довільних сталих:

$$\begin{aligned} x &= x(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ y &= y(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6), \\ z &= z(t,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ця система функцій називається *загальним розв'язком* системи диференціальних рівнянь (2.15).

Отже, при заданій силі диференціальні рівняння руху, згідно з рівняннями (2.18), визначають цілий клас рухів. Щоб знайти закон руху, який відповідає заданим початковим умовам, треба визначити сталі C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Якщо в початковий момент t_0 положення точки в просторі визначається координатами x_0, y_0, z_0, а швидкість — проекціями $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, то, на підставі

формул (2.18), відповідні значення сталих C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 визначаються як розв'язки рівнянь

$$\begin{gathered} x_0 = x(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),\quad y_0 = y(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6), \\ z_0 = z(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6), \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6),\quad \dot{y}_0 = \dot{y}(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6), \\ \dot{z}_0 = \dot{z}(t_0,\ C_1,\ \ldots,\ C_6). \end{gathered}$$

Знайдені з цих рівнянь сталі значення C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 підставляємо в рівняння (2.18) і дістаємо закон руху точки в явній формі:

$$\begin{aligned} x &= x(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ y &= y(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0), \\ z &= z(t,\ t_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0). \end{aligned}$$

У дальших розділах ми матимемо приклади застосування викладеної теорії.

Розділ IV

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Вступні зауваження. Коливні процеси дуже поширені в явищах навколишнього світу і можуть бути різної фізичної природи: механічні, електричні, світлові та ін. Маятник годинника, вагон на ресорах, навантажена балка, корабель на воді і т. д. можуть здійснювати механічні коливання. З механічними коливаннями зв'язані теплові рухи молекул і атомів тіл, звукові й ультразвукові явища, поширення пружних хвиль. На використанні електричних коливних процесів створена вся електротехнічна й радіотехнічна промисловості. Поширення електромагнітних хвиль невіддільне від коливних процесів в електромагнітних полях.

Вивчення коливних процесів показує, що існує багато спільних рис у коливаннях найрізноманітнішої фізичної природи. Коливання якісно різних матеріальних об'єктів часто підлягають одним і тим самим основним законам.

Розрізняють такі основні види коливань: 1) власні, 2) вимушені, 3) параметричні і 4) автоколивання.

Коливання, які відбуваються в ізольованій від зовнішніх впливів матеріальній системі, називаються *власними*. Вони бувають, як відомо з дослідів, *затухаючими*. Найпростішими прикладами є коливання тягаря, підвішеного на нитці, або електричні коливання в коливному контурі; перші затухають через наявність опору повітря, другі — через наявність електричного опору провідників. Затухання коливань означає, що відбувається перетворення енергії даного коливального руху в енергію інших видів (кінетична енергія маятника перетворюється в енергію механічного руху повітря; енергія електричного струму перетворюється в енергію коливань атомів кристалічної гратки цього провідника — провідник нагрівається). Власні коливання були б незатухаючими лише в ідеальному випадку, якби енергія даного коливального руху зберігалася сталою; наприклад, коливання маятника були б незатухаючими, якби механічна енергія маятника не передавалась навколишньому середовищу і не перетворювалась в інші, немеханічні, форми. Власні незатухаючі коливання належать області наукової абстракції, але їх вивчення допомагає глибше зрозуміти закономірності коливань, які відбуваються в дійсності.

Коливання називаються *вимушеними*, якщо вони відбуваються під дією заданих зовнішніх періодичних сил, які діють незалежно від коливань у системі. Якщо для збудження власних коливань треба лише вивести систему з стану спокою, то для збудження вимушених коливань потрібна періодична зовнішня дія. Вимушені коливання можна спостерігати на прикладі коливань балки на двох опорах з установленим на ній електромотором; обертовий ротор електромотора повинен бути незрівноваженим.

Коливання матеріальних систем можна підтримувати не тільки за допомогою зовнішньої збурюючої сили, але й іншими способами. Один із способів полягає в зміні фізичних параметрів системи; відповідні коливання називаються *параметричними*. Найпростішим прикладом параметричного способу збудження коливань є приведення в рух гойдалки таким способом, коли двоє людей, які стоять у її човні, присідаючи по черзі, розгойдують її. У цьому прикладі від присідань змінюється положення центра ваги системи (двічі за період).

Нарешті, існує багато матеріальних систем, при коливанні яких джерело енергії, яке покриває втрати енергії, являє собою невід'ємну частину самої системи. Прикладом може бути годинник. Такі системи називаються *автоколивними*.

§ 1. ВЛАСНІ НЕЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Нехай на пружині з вертикальною віссю підвішено тягар. У стані спокою вага тягаря зрівноважена силою натягу деформованої пружини, так що справджується рівність

$$mg = k\Delta l,$$

де m — маса тягаря, k — коефіцієнт жорсткості пружини, Δl — деформація пружини.

Якщо тягар змістити по вертикалі від положення рівноваги і відпустити, то почнуться коливання тягаря, який рухатиметься по черзі вгору і вниз, то стискуючи, то розтягуючи пружину; з бігом часу ці коливання затухають. Аналогічні коливання здійснює вагон на ресорах, корабель на спокійній воді, навантажена посередині легка пружна балка, важкий шків на валу трансмісії і т. д.

При зміщенні матеріальної точки з положення рівноваги виникає сила, яка намагається повернути її в це положення. Ця сила пропорціональна зміщенню і називається *квазіпружною*. Вивчимо рух матеріальної точки під дією квазіпружної сили, якщо в початковий момент точка відхилена від положення рівноваги і може мати швидкість, вектор якої напрямлений уздовж прямої, що проходить через положення рівноваги і початкове положення точки.

Оскільки рух матеріальної точки відбуватиметься весь час по лінії, яка проходить через положення рівноваги нашої точки і її початкове положення (бо початкова швидкість точки і квазіпружна сила напрямлені по цій лінії; інших сил, які могли б відхилити точку від цієї лінії, немає), то для вивчення руху досить ввести тільки одну координатну вісь, наприклад, Ox, уздовж якої цей рух відбувається. Початок координат нехай збігається з положенням рівноваги матеріальної точки. Тоді на неї діє квазіпружна сила $-kx$, де k — коефіцієнт пружності. За другим законом Ньютона диференціальне рівняння руху матеріальної точки буде

$$m\ddot{x} = -kx. \qquad (2.19)$$

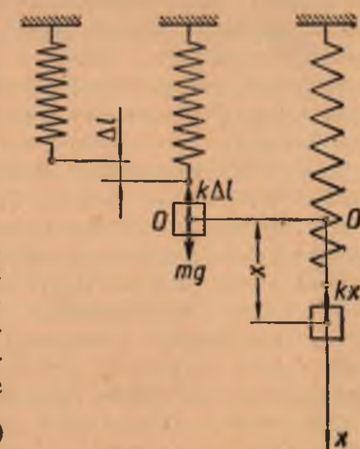

Рис. 32.

Наприклад, для випадку, коли розглядаються вертикальні коливання тягаря на пружині, на тягар діє вниз сила ваги mg, а в напрямі до точки рівноваги — сила $k(x + \Delta l)$, обумовлена розтягом пружини (рис. 32). Проекція цих сил на напрям осі Ox дорівнює $mg - k(x + \Delta l)$. Але відомо, що $mg = k\Delta l$. Отже, рівнодійна сил, які прикладені до тягаря, дорівнює $-kx$ і напрямлена до точки рівноваги, так що закон руху тягаря дійсно має вигляд (2.19). Роль квазіпружної сили тут відіграє згадана вище рівнодійна сили ваги і пружної сили.

Частинними розв'язками диференціального рівняння (2.19) є функції $\cos \omega t$ і $\sin \omega t$, а загальний розв'язок буде

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \qquad (2.20)$$

де A, B — сталі, які визначаються з початкових умов руху матеріальної точки, і $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Загальному розв'язку рівняння можна надати іншого вигляду. Для цього зробимо таке перетворення:

$$x(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega t\right).$$

Тоді величини $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ і $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ можна взяти за синус і косинус деякого кута α, причому кут α визначається однозначно, коли покласти, що $0 \leqslant \alpha < 2\pi$. Після цього загальний розв'язок рівняння руху матеріальної точки під дією пружної сили матиме вигляд

$$x(t) = C\sin(\omega t + \alpha). \qquad (2.21)$$

Аналіз цієї формули показує, що з часом матеріальна точка «коливається» вздовж лінії дії квазіпружної сили навколо положення рівноваги, причому найбільша віддаль, на яку може відхилитися матеріальна точка від положення своєї рівноваги, дорівнює C і називається *амплітудою* коливань. Координата коливної точки змінюється з часом за законом синуса (чи косинуса). Такі коливання відбуваються з незмінною амплітудою і тому називаються *незатухаючими*.

Величина α називається *початковою фазою* коливань, а величина $\omega t + \alpha$ — *миттєвою фазою*.

Періодом гармонічних коливань називається проміжок часу між двома послідовними проходженнями матеріальної точки через положення рівноваги в одному й тому самому напрямі. Час, який потрібний для проходження матеріальною точкою відстані між кінцевими положеннями, є лише половина періоду. Отже, період гармонічних коливань є водночас і періодом функції $x(t) = C\sin(\omega t + \alpha)$ і дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Величина $n = \frac{1}{T}$ показує число коливань за одну секунду і називається *частотою* коливань матеріальної точки. Оскільки $\omega = 2\pi n$, то ω дорівнює числу коливань за 2π секунд і називається *циклічною частотою*.

Ми бачимо, що частота власних коливань залежить лише від маси матеріальної точки і коефіцієнта пружності k. Початкові умови руху визначають лише амплітуду і початкову фазу коливань. Дійсно, нехай у початковий момент $t = 0$ буде $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0$. На підставі (2.20) маємо:

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$
$$\dot{x} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t.$$

Використовуючи початкові умови, дістанемо

$$x_0 = A,$$
$$\dot{x}_0 = B\omega.$$

Визначивши з цих рівнянь сталі інтегрування A і B і підставивши їх у загальний розв'язок (2.20), знайдемо

$$x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Звівши цю функцію до вигляду (2.21), дістанемо, що амплітуда коливань і початкова фаза будуть

$$C = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0\omega}{\dot{x}_0}.$$

Ці формули й показують, що початкові умови руху впливають лише на амплітуду і початкову фазу коливань.

§ 2. ВЛАСНІ ЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

У попередньому параграфі ми вважали, що коливання матеріальної точки відбуваються при відсутності опору середовища її руху. Вивчимо тепер рух матеріальної точки під дією квазіпружної сили і сили опору середовища, в якому відбувається рух точки.

Досліди показують, що при невеликих швидкостях сила опору середовища прямо пропорціональна значенню швидкості і напрямлена протилежно їй: $f_{\text{тр}} = -\lambda\dot{x}$.

Рівняння руху матеріальної точки буде

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x};$$

поділивши рівняння на m і позначивши $\frac{k}{m} = \omega^2$, $\frac{\lambda}{m} = 2\mu$, можна записати так:

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (2.22)$$

Підстановкою $x = e^{-\mu t}\cdot y$ зводимо це рівняння до вигляду

$$\ddot{y} + (\omega^2 - \mu^2)\,y = 0.$$

Покладемо, що $\omega^2 - \mu^2 > 0$. Тоді загальним розв'язком останнього диференціального рівняння буде

$$y = A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t,$$

а тому загальним розв'язком рівняння (2.22) буде

$$x(t) = e^{-\mu t}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t), \qquad (2.23)$$

де $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$.

Цей загальний розв'язок можна записати ще так:

$$x(t) = Ce^{-\mu t}\cdot\sin(\omega_1 t + \alpha), \qquad (2.24)$$

де α і C — нові сталі $\left(\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{A}{B}, C = \sqrt{A^2+B^2}\right)$, які визначаються з початкових умов руху матеріальної точки.

Ми бачимо, що координата $x(t)$ матеріальної точки є добуток двох множників, а саме: $Ce^{-\mu t}$ і $\sin(\omega_1 t + \alpha)$. Перший множник відіграє роль амплітуди коливань. При зростанні часу t цей множник монотонно зменшується і прямує до нуля. Тому відхилення $x(t)$ матеріальної точки від положення рівноваги теж зменшується, прямуючи до нуля (але не монотонно, а «коливаючись», бо знак другого множника $\sin(\omega_1 t + \alpha)$ змінюється при зростанні часу t). Рух точки, що визначається формулою (2.24), називається *затухаючим коливанням*. Швидкість затухання визначається коефіцієнтом μ, який характеризує опір середовища руху точки. Саме рівняння (2.22) називають *рівнянням затухаючих коливань матеріальної точки*.

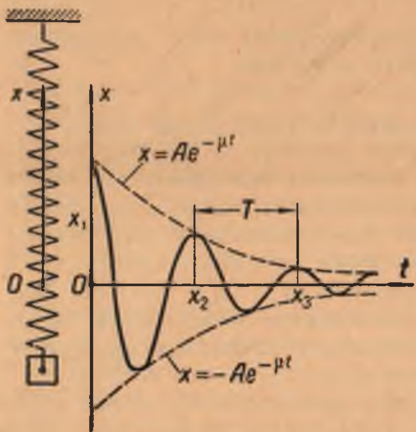

Рис. 33.

Характеристичним проміжком часу для затухаючих коливань є проміжок часу між двома будь-якими послідовними проходженнями матеріальної точки через положення рівноваги в одному й тому самому напрямі; цей проміжок часу один і той самий для будь-яких двох послідовно взятих проходжень точки. Умовно цей характеристичний проміжок часу називають *періодом затухаючих коливань* (рис. 33). Період затухаючих коливань є періодом синуса і дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}.$$

Другою характеристикою затухаючих коливань є відношення будь-яких двох послідовно визначуваних максимальних відхилень точки в одному напрямі від положення рівноваги. Нехай $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ є такі послідовно взяті максимальні відхилення точки. Оскільки всі ці відхилення настають одне за другим через один і той самий проміжок часу, що дорівнює періоду T, то для будь-якого номера n маємо:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{Ce^{-\mu t}\sin(\omega_1 t + \alpha)}{Ce^{-\mu(t+T)}\sin[\omega_1(t+T)+\alpha]} = e^{\mu T} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Величина $\Delta = e^{\mu T}$ називається *декрементом затухання*, а її логарифм, тобто $\ln\Delta = \mu T$, — *логарифмічним декрементом затухання*. Величина логарифмічного декремента затухання дорівнює

$$\ln\Delta = \mu T = \frac{2\pi\mu}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}}$$

і при заданому ω залежить від коефіцієнта тертя μ. Декремент затухання характеризує швидкість затухання розмахів коливання.

На використанні закономірностей затухаючих коливань працюють демпфери, що бувають різних систем і відіграють роль глушителів шкідливих механічних і електричних коливань.

§ 3. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПРИ НАЯВНОСТІ ЗОВНІШНЬОЇ ЗБУРЮЮЧОЇ СИЛИ (ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ)

1. Рівняння вимушених коливань. У попередніх двох параграфах ми вивчали власні коливання матеріальної точки.

Зовсім інший характер мають коливання в тому випадку, коли коливна система зазнає ще додаткової дії зовнішньої сили. У техніці і в природі зовнішні впливи зустрічаються в найрізноманітніших формах. Прикладами коливань при наявності зовнішньої дії можуть бути: механічні коливання, обумовлені обертанням незрівноваженого ротора турбіни; електричні коливання в коливальному контурі, що обумовлені змінною електрорушійною силою (е. р. с.), та ін.

Однією з найпростіших моделей, яка б здійснювала коливання тягаря при наявності зовнішніх сил, може бути така*.

Нехай тягар підвішено на вертикальній пружині, коефіцієнт жорсткості якої є k_1. Прикріпимо до тягаря знизу пружину з коефіцієнтом жорсткості k_2 так, що її нижній кінець A особливим пристроєм можна переміщати по вертикалі. Переміщення нижнього кінця другої пружини відлічуємо від його положення рівноваги в недеформованому стані пружини. Нехай у момент t зміщення кінця A буде $u(t)$. Якщо $x(t)$ є відхилення тягаря з масою m від положення його рівноваги, то рівняння руху тягаря вздовж вертикалі буде

$$m\ddot{x} = -k_1 x - \lambda\dot{x} + k_2(u - x),$$

або

$$m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + \lambda\dot{x} + k_2 u(t),$$

де λ, як і раніше,— коефіцієнт, що характеризує опір середовища, в якому рухається тягар.

У більш загальному випадку до матеріальної точки може бути прикладена будь-яка зовнішня сила, яка є функцією часу.

Нехай на матеріальну точку діють: 1) квазіпружна сила, 2) сила опору середовища, яка пропорціональна швидкості точки і напрямлена протилежно їй, і 3) збурююча сила, величина якої змінюється з часом за гармонічним законом $N\sin pt$. Тоді рівняння руху матеріальної точки буде

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x} + N\sin pt,$$

або

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = H\sin pt, \qquad (2.25)$$

* Див. С. П. Стрелков, Введение в теорию колебаний, ГИТТЛ, М., 1950, стор. 57.

де

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \mu = \frac{\lambda}{2m}, \quad H = \frac{N}{m}.$$

2. **Інтегрування рівняння вимушених коливань для випадку гармонічної збурюючої сили.** Проінтегруємо рівняння

$$\ddot{x} + 2\mu\dot{x} + \omega^2 x = H\sin pt.$$

Загальний розв'язок такого рівняння складається з суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння. Оскільки загальний розв'язок однорідного рівняння був знайдений у попередньому параграфі (ми знову вважаємо, що $\omega^2 - \mu^2 > 0$), тут визначимо лише частинний розв'язок, який шукатимемо у формі

$$x(t) = D\sin(pt - \delta), \tag{2.26}$$

звідки

$$\dot{x} = Dp\cdot\cos(pt - \delta),$$
$$\ddot{x} = -Dp^2\cdot\sin(pt - \delta).$$

Підставляючи ці значення в диференціальне рівняння і вводячи позначення $pt - \delta = \theta$, дістаємо

$$-Dp^2\sin\theta + 2\mu Dp\cos\theta + \omega^2 D\sin\theta = H\sin(\theta + \delta).$$

Дорівнюючи коефіцієнти при $\sin\theta$ і $\cos\theta$, знайдемо

$$(\omega^2 - p^2)D = H\cos\delta,$$
$$2\mu pD = H\sin\delta.$$

Невідомі D і δ визначаються з цієї системи рівнянь однозначно, якщо умовимось вважати, що $D > 0$ і $0 \leqslant \delta < \pi$; отже, амплітуда D і початкова фаза δ будуть:

$$D = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\mu^2p^2}}; \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{2\mu p}{\omega^2 - p^2}. \tag{2.27}$$

Загальним розв'язком буде функція

$$x(t) = Ce^{-\mu t}\sin\left(\sqrt{\omega^2 - \mu^2}\cdot t + \alpha\right) + \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\mu^2p^2}}\sin(pt - \delta). \tag{2.28}$$

Це й є закон коливань матеріальної точки при наявності зовнішньої збурюючої гармонічної сили.

Перший доданок у цій формулі описує власні затухаючі коливання, які докладно вивчені в попередньому параграфі. Цією складовою частиною коливань можна знехтувати через достатньо великий проміжок часу.

Другий доданок правої частини формули (2.28) характеризує так звані *вимушені коливання.*

З формули (2.28) випливає: 1) вимушені коливання не затухають і при наявності тертя, 2) збуджувані гармонічною силою вимушені коливання мають теж гармонічний характер, 3) частота

вимушених коливань дорівнює частоті гармонічної збурюючої сили, 4) фаза вимушених коливань відстає від фази збурюючої сили на δ. Як видно з (2.27), $\operatorname{tg}\delta$ буде додатним, а δ меншою від $\frac{\pi}{2}$, якщо $p < \omega$, тобто якщо частота збурюючої сили менша від частоти власних незатухаючих коливань. Якщо ж $p > \omega$, то $\operatorname{tg}\delta < 0$ і $\delta > \frac{\pi}{2}$.

3. **Вплив частоти збурюючої сили на амплітуду вимушених коливань.** Вивчимо залежність амплітуди вимушених коливань від частоти збурюючої сили. Амплітуда D вимушених коливань визначається формулою

$$D = \frac{H}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\mu^2p^2}}.$$

У виразі для амплітуди D всі величини, крім p, вважатимемо сталими; величині p надаватимемо різноманітні значення від 0 до ∞.

Поділимо чисельник і знаменник формули для амплітуди на ω^2; дістанемо

$$D = \frac{\frac{H}{\omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + 4\frac{\mu^2}{\omega^2}\cdot\frac{p^2}{\omega^2}}}.$$

Введемо такі позначення:

$$\frac{p}{\omega} = z, \qquad \frac{\mu}{\omega} = b, \qquad \frac{H}{\omega^2} = D_0;$$

тоді

$$D = \frac{D_0}{\sqrt{(1 - z^2)^2 + 4b^2z^2}}.$$

Дослідимо хід кривої $D(z)$, коли z змінюється від 0 до ∞. При $z = 0$ маємо $D(0) = D_0$. Отже, D_0 є амплітуда, яка відповідає випадку $z = 0$ (умова $p = 0$ означає, що зовнішня збурююча сила стала). Функція, яка стоїть під знаком радикала у виразі $D(z)$,

$$f(z) = (1 - z^2)^2 + 4b^2z^2$$

має максимум при $z = 0$ і мінімум при $z = \sqrt{1 - 2b^2}$, бо в цих точках $f'(z) = 0$, а знаки других похідних такі: $f''(0) < 0$, $f''(\sqrt{1 - 2b^2}) > 0$ (якщо вважати, що сила опору середовища досить мала: $2b^2 < 1$). Отже, амплітуда $D = \frac{D_0}{\sqrt{f(z)}}$ матиме мінімум при $z = 0$ і максимум при $z = \sqrt{1 - 2b^2}$. Максимальне значення амплітуди дорівнює

$$D_{\max} = (D)_{z = \sqrt{1 - 2b^2}} = \frac{D_0}{2b\sqrt{1 - b^2}}. \tag{2.29}$$

Назвемо *резонансним значенням амплітуди вимушених коливань* те її значення, яке відповідає випадку, коли частота p збурюючої сили дорівнює ω (величина ω була б частотою власних коливань, якби не було опору середовища, тобто при $\mu = 0$).

Отже,

$$D_{рез} = (D)_{p=\omega} = (D)_{z=1} = \frac{D_0}{2b}. \qquad (2.30)$$

На рис. 34 зображено криву залежності амплітуди вимушених коливань від частоти збурюючої сили. Координати будь-якої точки M цієї кривої мають такий фізичний смисл: абсциса точки M є частота p зовнішньої збурюючої сили, а ордината D точки M є амплітуда тих вимушених коливань, які встановлюються при частоті p. Сукупність усіх точок цієї кривої визначає амплітуди вимушених коливань при найрізноманітніших частотах p збурюючої сили. Характерних значень амплітуди набирають при цілком певних частотах збурюючої сили: амплітуда D_{max} настає при частоті $p = \omega\sqrt{1-2b^2}$; а амплітуда $D_{рез}$ — при частоті $p = \omega$.

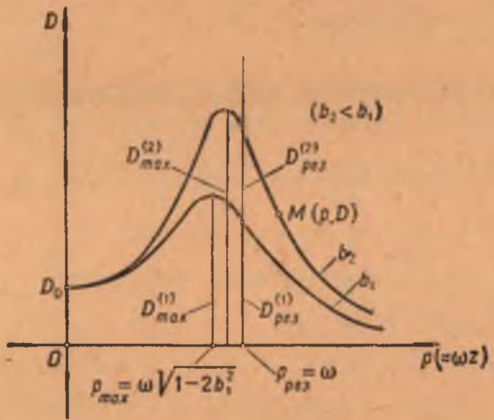

Рис. 34.

Слід звернути увагу на те, що одна з цих частот залежить від коефіцієнта b, який характеризує опір середовища. Розглянемо вимушені коливання точки при двох різних опорах середовища: коли коефіцієнт опору b має значення b_1 і $b_2 < b_1$. Нехай відповідні характерні значення амплітуд будуть $D^{(1)}_{max}$, $D^{(1)}_{рез}$ і $D^{(2)}_{max}$, $D^{(2)}_{рез}$. Легко бачити, що

$$D^{(2)}_{рез} > D^{(1)}_{рез}, \quad D^{(2)}_{max} > D^{(1)}_{max}.$$

Перша нерівність очевидна. Щоб упевнитись у справедливості другої нерівності, обчислимо диференціал

$$dD_{max} = \frac{D_0}{2b^2} \cdot \frac{2b^2 - 1}{(1 - b^2)^{3/2}} \cdot db.$$

Множник при db від'ємний, бо, за умовою, $2b^2 < 1$. Отже, із зменшенням b величини D_{max}, $D_{рез}$ дійсно збільшуються. При дуже малому значенні коефіцієнта b крива має характерний вузький «пік», і значення частоти збурюючої сили, яка здатна спричинити вимушені коливання з амплітудою D_{max}, буде дуже близьким до ω. Коротко це можна висловити так: при зменшенні опору середовища параметр b зменшується, так що D_{max} і $D_{рез}$ зростають (необмежено), причому частота збурюючої сили, при якій амплітуда вимушених коливань є максимальною, наближається до ω (на графіку точка p_{max} зміщується вправо до точки $p = \omega$).

4. Вплив частоти збурюючої сили на відставання вимушених коливань по фазі від збурюючої сили. Вимушені коливання відстають по фазі від гармонійної збурюючої сили на величину δ, яка визначається за формулою

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\mu p}{\omega^2 - p^2},$$

звідки

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\frac{\mu}{\omega}\cdot\frac{p}{\omega}}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}},$$

або

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{2bz}{1 - z^2} \quad \left(z = \frac{p}{\omega}\right).$$

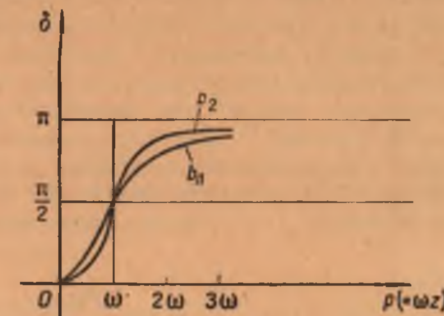

Рис. 35.

Диференціюючи δ по z, знайдемо

$$\frac{d\delta}{dz} = \frac{2b(1+z^2)}{(1-z^2)^2 + 4b^2z^2} = 2b\left(\frac{D}{D_0}\right)^2 \cdot (1 + z^2).$$

Ця похідна додатна при будь-яких z і b; тому δ монотонно зростає (рис. 35):

а) δ — від 0 до $\frac{\pi}{2}$, коли z змінюється від 0 до 1,

б) δ — від $\frac{\pi}{2}$ до π, коли z змінюється від 1 до ∞.

Цей простий результат приводить до цікавих висновків. Нехай точка O підвісу математичного маятника здійснює коливання навколо нерухомого центра вздовж горизонтальної прямої; нехай частота p цих коливань значно менша від частоти власних коливань маятника ω (дослід можна здійснити без усяких пристосувань, рухаючи руку, в якій просто держимо нитку з прив'язаним до неї тягарем). Тягар здійснюватиме вимушені коливання, частота яких дорівнюватиме p. При цьому δ близька до нуля, і тому тягар рухається майже протягом періоду в ту саму сторону, куди рухається рука.

Зовсім інакше буде, якщо $p \gg \omega$, тобто якщо частота збурень значно більша від частоти власних коливань. У цьому випадку $\delta = \pi$, і тому тягар протягом значної частини періоду рухається в сторону, протилежну тій, куди рухається рука. Отже, якщо при малій частоті збурюючої сили вимушені коливання мають переважно *синфазний* (відносно збурюючої сили) характер, то при великих частотах збурюючої сили вони стають переважно *протифазними*.

З цим явищем зв'язана поведінка корабля на хвилях. З практики мореплавства вже давно було відомо, що корабель в одних випадках поводиться на хвилях «спокійно», тобто гойдається на хвилі, розміщуючись вздовж її профілю, тоді як в інших випадках «занурюється» в воду то носом, то кормою, оголюючи гвинти і раптово змінюючи навантаження машини*. Причина цього явища та, що в першому випадку вимушені коливання корабля є синфазними, тоді як у другому випадку — протифазними. У першому випадку хвилі набігають на корабель з частотою p, яка значно менша від частоти ω власних коливань корабля на спокійній воді, а в другому випадку — з частотою p, яка значно більша від частоти ω власних коливань корабля. Наведене тут просте пояснення описаного явища дав видатний російський вчений академік О. М. Крилов**. Для усунення шкідливих для роботи машин корабля протифазних коливань досить зменшити швидкість корабля, бо це викличе зменшення частоти хвиль, які набігають на корабель і відіграють роль збурюючої сили.

Розділ V

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ. РОБОТА. СИЛОВЕ ПОЛЕ

Розглянемо основні теореми динаміки матеріальної точки: 1) *про зміну кількості руху*, 2) *про зміну кінетичної енергії* і 3) *про зміну момента кількості руху*. Ці теореми встановлюють *фундаментальні співвідношення між основними мірами руху матеріальної точки і динамічними характеристиками процесу передавання руху точці. Усі ці теореми є наслідком основного рівняння динаміки і прийнятих у механіці уявлень про властивості простору й часу.*

Установлюючи зв'язки між зазначеними вище характеристиками руху, основні теореми допомагають глибше розкрити природу механічного руху.

---

* С. М. Ритов, Современное учение о колебаниях и волнах, 1951.

** Крилов Олексій Миколайович (1863—1945) — видатний російський учений—математик, механік і кораблебудівник, Герой Соціалістичної Праці (з 1943 р.), академік (з 1916 р.). Народився в м. Алатирі, Ульяновської області.

У 1888 р. О. М. Крилов поступив на кораблебудівний відділ Морської академії, пройшовши спочатку річний стаж практичної роботи на суднобудівному заводі. Після закінчення в 1890 р. Морської академії він залишився в ній викладачем.

Праці О. М. Крилова з теорії кораблебудування принесли йому світову славу і сприяли встановленню пріоритету і ведучої ролі російської науки в цій галузі знань. Вони охоплюють багато розділів прикладної математики, механіки, аеродинаміки, геофізики і різноманітні питання техніки. У своїх працях з балістики, теорії компасів, будівельної механіки він завжди поєднував строгий науковий підхід до розв'язування конкретних технічних проблем з надзвичайною простотою і ясністю викладу.

§ 1. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ (ІМПУЛЬСА) МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

З другого закону Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}$$

випливає, що

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f}\cdot dt. \qquad (2.31)$$

Ліва частина цього рівняння є геометрична зміна імпульса $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ рухомої матеріальної точки за нескінченно малий проміжок часу dt. У правій частині — добуток діючої сили на нескінченно малий проміжок часу дії.

Тому величина $\boldsymbol{f}\cdot dt$ характеризує імпульс, який від навколишніх тіл передається точці за елементарний час dt. Ця міра, що виражається добутком сили на елементарний час дії, $\boldsymbol{f}\cdot dt$, називається *елементарним імпульсом сили.*

Рівняння (2.31) виражає теорему:

Геометрична зміна кількості руху (імпульса) *рухомої матеріальної точки за нескінченно малий проміжок часу дорівнює елементарному імпульсу прикладеної сили за цей самий проміжок часу.*

Інтегруючи рівняння (2.31) по часу від початкового момента до кінцевого, дістанемо

$$\int_{(0)}^{(1)} d\,m\boldsymbol{v} = \int_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f}dt,$$

або

$$m\boldsymbol{v}_1 - m\boldsymbol{v}_0 = \int_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f}\cdot dt. \qquad (2.32)$$

Тут інтегрування проводиться по відповідній змінній від початкового положення точки, яке позначено значком (0), до кінцевого положення (1).

Права частина (2.32) називається *імпульсом сили за даний скінченний проміжок часу.*

Рівняння (2.32) виражає теорему:

Геометричний приріст кількості руху (імпульса) *рухомої матеріальної точки за скінченний проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної сили за той самий проміжок часу.*

У проекціях на осі декартової системи координат рівняння (2.32) запишеться так:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \int_{(0)}^{(1)} X\cdot dt,$$

$$m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 = \int_{(0)}^{(1)} Y\cdot dt,$$

$$m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 = \int_{(0)}^{(1)} Z\cdot dt.$$

Це означає, що *приріст проекції вектора кількості руху* (імпульса) *на кожну нерухому координатну вісь дорівнює проекції на ту саму вісь імпульса діючої сили.*

Доведена тут теорема про зміну імпульса є одним з виразів закону незнищуваності руху, і в цьому її фізичний смисл.

§ 2. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Розглянемо знову рух матеріальної точки в просторі під дією заданих сил.

Помноживши рівняння (2.31) скалярно на швидкість $\boldsymbol{v}$, дістанемо

$$\boldsymbol{v} \cdot d(m \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \cdot dt,$$

звідки

$$d\left(\frac{m \cdot \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2}\right) = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r},$$

або

$$d\frac{mv^2}{2} = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}, \tag{2.33}$$

де $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$ — елементарне переміщення точки.

Це й є основне рівняння, що виражає теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Величина $\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$ називається *елементарною роботою* і визначається скалярним добутком сили на переміщення матеріальної точки.

З рівняння (2.33) випливає теорема:

Приріст кінетичної енергії рухомої матеріальної точки на будь-якому нескінченно малому її переміщенні дорівнює елементарній роботі прикладеної сили на тому самому переміщенні.

Рівняння (2.33) справедливе для всякого елементарного переміщення $d\boldsymbol{r}$. Якщо проінтегруємо рівняння (2.33) від початкового положення точки до кінцевого, то дістанемо

$$\int_{(0)}^{(1)} d\frac{mv^2}{2} = \int_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r},$$

звідки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{2.34}$$

Права частина цієї рівності визначає *роботу сили* на даному відрізку шляху.

З рівняння (2.34) випливає теорема:

Приріст кінетичної енергії рухомої матеріальної точки дорівнює роботі прикладеної сили на даному відрізку шляху.

На закінчення уточнимо фізичний зміст двох щойно доведених теорем — про зміну імпульса точки і про зміну кінетичної енергії точки. Оскільки рух має двоякого роду міру — енергію та імпульс,— то *теорему про передавання імпульса і теорему про передавання енергії вірніше розглядати як дві сторони однієї загальної теореми, що визначає закон збереження векторно-скалярної міри руху.*

Вперше фізичний зміст поняття роботи розкрив Ф. Енгельс, який писав у книзі «Діалектика природи»: «...робота — це зміна форми руху, яка розглядається з її кількісного боку» *. Учення про міру руху приводить до висновку, що векторно-скалярна структура міри обумовлена просторово-часовим характером всякого матеріального руху. Наслідком цього є також двояка, векторно-скалярна, структура всіх механічних величин, які так чи інакше вимірюють рух. Різні фізичні характеристики руху і їх взаємне співвідношення видно з поданої нижче таблиці.

№ п/п	Що вимірюється	Міра: скалярна	Міра: векторна
1	Запас механічного руху точки (T, $\boldsymbol{p}$)	Кінетична енергія $T = \frac{mv^2}{2}$	Імпульс (кількість руху) $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$
2	Зміна запасу руху (перенесений рух) (dT, $d\boldsymbol{p}$)	Робота $dT = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$	Імпульс сили $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} \cdot dt$
3	Швидкість передавання руху $\left(\frac{dT}{dt}, \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\right)$	Потужність $\frac{dT}{dt} = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$	Сила $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f}$

З таблиці видно, що запас руху вимірюється двояко — енергією й імпульсом; кількість переданого руху вимірюється роботою та імпульсом сили. Швидкість передавання руху вимірюється потужністю (бистрота передавання енергії) і силою (бистрота передавання імпульса); про потужність можна сказати також, що вона характеризує бистроту, з якою виконується робота тією силою, що прикладена до матеріальної точки. Потужність і сила доповнюють одне одного, повністю характеризуючи бистроту перенесення руху, який двояко вимірюється скалярною і векторною мірами. Це цілком аналогічне до того, як доповнюють одне одного робота сили та її імпульс.

За допомогою поняття сили можна подати всі інші міри руху: імпульс сили $\boldsymbol{f} \cdot dt$, роботу сили $\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r}$, потужність $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}$ та ін. У цьому розумінні сила є універсальною і найзручнішою мірою руху, яка дає змогу досить просто знаходити всі інші характеристики великого практичного значення.

---

* Ф. Енгельс, Діалектика природи, Держполітвидав УРСР, 1953, стор. 64.

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ РОБОТИ В ДЕЯКИХ ОКРЕМИХ ВИПАДКАХ

Застосування теореми про приріст кінетичної енергії вимагає вміння обчислювати роботу. Елементарна робота, яку ми позначатимемо через $d'A$, дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення:

$$d'A = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r},$$

або, за властивістю скалярного добутку:

$$d'A = Xdx + Ydy + Zdz,$$

де X, Y, Z — проекції сили $\boldsymbol{f}$, а dx, dy, dz — проекції переміщення $d\boldsymbol{r}$. Елементарна робота не є взагалі диференціалом функції координат точки простору; щоб підкреслити цей факт, позначаємо елементарну роботу символом $d'A$ — з штрихом.

Розглянемо тепер кілька прикладів на виконання роботи.

1. **Робота сили тяжіння**. Робота сили тяжіння на елементарному переміщенні $d\boldsymbol{r}$ дорівнює

$$d'A = m\boldsymbol{g} \cdot d\boldsymbol{r} = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Якщо вісь Oz напрямити вертикально вгору, а осі Ox і Oy розмістити в горизонтальній площині, то проекції ваги $m\boldsymbol{g}$ на координатні осі будуть

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = -mg,$$

і тоді дістанемо

$$d'A = -mgdz = d(-mgz).$$

Отже, елементарна робота $d'A$ визначається повним диференціалом, і можна записати так:

$$A = -mg\int_{(0)}^{(1)} dz.$$

Після інтегрування дістанемо

$$A = mg(z_0 - z_1),$$

тобто *робота сили тяжіння дорівнює добутку ваги матеріальної точки на різницю рівнів початкового і кінцевого положення цієї точки*. Звідси бачимо, що *робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії* рухомої матеріальної точки.

2. **Робота центральної сили тяжіння**. Нехай на матеріальну точку, що рухається в просторі, діє *центральна сила*, тобто така, лінія дії якої весь час проходить через одну і ту саму нерухому точку простору — так званий *центр сил*. Прикладами центральної сили можуть бути: сила притягання планети до Сонця, кулонівська сила притягання електрона до нерухомого

ядра атома і т. д. Обчислимо роботу сили всесвітнього тяжіння, тобто роботу сили

$$\boldsymbol{f} = \gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).$$

У цій формулі $\gamma\frac{mM}{r^2}$ — величина сили, $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор, проведений з центра сил O до планети, а $\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ — одиничний вектор, що показує напрям вектора сили тяжіння (рис. 36). Елементарна робота сили тяжіння дорівнюватиме

$$d'A = \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = -\gamma\frac{mM}{r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot d\boldsymbol{r}.$$

Але

$$\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}d(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = d\frac{r^2}{2},$$

тому

$$d'A = -\gamma\frac{mM}{r^2}dr = d\left(\gamma\frac{mM}{r}\right).$$

Робота сили тяжіння на скінченному шляху дорівнює

$$A = \int_{(0)}^{(1)} d\left(\gamma\frac{mM}{r}\right) = \left(\gamma\frac{mM}{r}\right)_{(0)}^{(1)} = \gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right),$$

або

$$A = \gamma\cdot mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right). \quad (2.35)$$

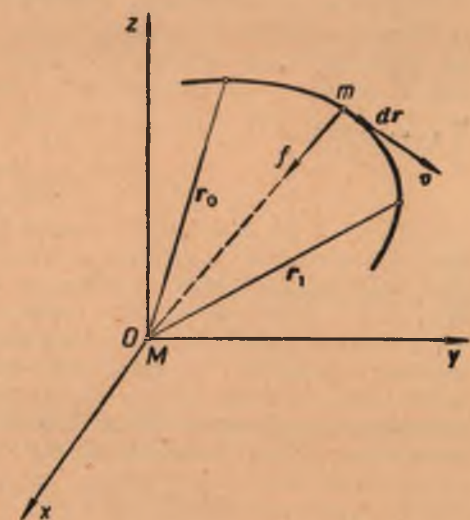

Рис. 36.

Знайдена формула доводить, що робота сили всесвітнього тяжіння не залежить від форми траєкторії руху між двома заданими положеннями. Це справедливо для всякої центральної сили, яка залежить тільки від віддалі.

У невеликих областях простору поблизу Землі сила тяжіння звичайно вважається сталою за величиною і напрямом, хоч справді вона є центральною. Тому природно знайти роботу сили ваги як окремий випадок роботи центральної сили тяжіння. Для цього розглянемо формулу роботи центральної сили (2.35)

$$A = \gamma mM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) = \gamma mM\frac{r_0 - r_1}{r_0\cdot r_1}$$

і покладемо в ній $r_0 - r_1 = h$, де h — висота підняття тіла, а r_1 і r_0 — величини порядку радіуса Землі. За законом всесвітнього тяжіння, величину $\gamma m M \frac{1}{r_0 \cdot r_1}$ замінимо величиною сили притягання тіла до Землі, тобто вагою тіла

$$\gamma m M \frac{1}{r_0 \cdot r_1} \approx mg.$$

В результаті цієї заміни матимемо, що робота сили ваги при переміщенні тіла поблизу поверхні Землі дорівнює

$$A = \gamma m M \frac{r_0 - r_1}{r_0 \cdot r_1} \approx mgh.$$

Ця формула збігається з результатом попереднього параграфа.

3. **Робота пружної сили.** Жорсткість кожної пружини характеризується величиною пружної сили, яка виникає при деформації, що дорівнює 1 *см*. Якщо коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює k *кг/см*, то це означає, що пружна сила пружини дорівнює k *кг* при деформації цієї пружини на 1 *см*. Досліди показують, що в певних межах пружна сила пропорціональна деформації x (закон Гука):

$$f = kx,$$

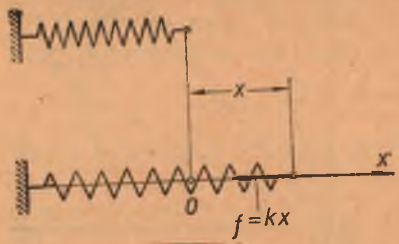

Рис. 37.

де k — коефіцієнт жорсткості. При повільному і рівномірному розтягуванні пружини сила її протидії за величиною дорівнює kx і напрямлена протилежно тій зовнішній силі, яка спричинює деформацію (рис. 37). Елементарна робота пружної сили дорівнює

$$d'A = -f \cdot dx = -kx\,dx.$$

Робота ж пружної сили на скінченному видовженні буде

$$A = k\int_0^h x\,dx = -\frac{kh^2}{2},$$

де h — повне видовження пружини. Робота пружної сили від'ємна і при розтягуванні, і при стисканні пружини, бо пружна сила завжди протидіє деформації.

4. **Робота пружної сили при крученні.** Щоб закрутити вал на кут у φ радіанів, треба прикласти пару сил з деяким моментом, що дорівнює M*. Дослід показує, що кут закручування пружного вала пропорціональний величині прикладеного обертального моменту, тобто що

$$M = k\varphi.$$

* Нагадаємо, що дія пари визначається її моментом, який дорівнює добутку величини однієї з сил пари на її плече, тобто на відстань між лініями дії сил (див. ч. III, розд. I, § 3).

Числове значення коефіцієнта k залежить від пружних властивостей матеріалу і геометричних параметрів вала.

Елементарна робота, виконана при закручуванні вала на кут $d\varphi$, дорівнює

$$d'A = M d\varphi = k\varphi\,d\varphi.$$

Повна робота при закручуванні вала на кут α буде

$$A_{\text{мом}} = \int_0^\alpha k\varphi\,d\varphi = \frac{k\alpha^2}{2}.$$

Це — робота зовнішнього обертального моменту. Робота пружних сил, які протидіють крученню, відрізняється від роботи зовнішніх сил лише знаком:

$$A_{\text{пр}} = -\frac{k\alpha^2}{2}. \qquad (2.36)$$

Ця формула цілком аналогічна до формули для роботи розтягування пружини.

§ 4. СИЛОВІ ПОЛЯ

1. **Вступні зауваження.** Сили, що діють на матеріальну точку, яка рухається в просторі, можуть залежати від багатьох причин і, в першу чергу, від положення точки в просторі та її швидкості. Але є істотна відміна між випадками, коли сили залежать тільки від координат (положення) точки, і випадками, коли вони залежать ще й від швидкості. У першому випадку ми знаємо силу наперед у будь-якій точці простору, незалежно від того, з якою швидкістю матеріальна точка пройде через цю точку простору. У другому випадку сила наперед не відома: вона залежить від того, з якою швидкістю рухома матеріальна точка пройде через дану точку простору. Прикладами сил першого роду є: а) сила всесвітнього тяжіння, б) сила кулонівської взаємодії електричних зарядів, в) вага (окремий випадок сили всесвітнього тяжіння), г) пружна сила розтягнутої або стиснутої пружини, д) сили, які виникають у довільній пружній конструкції, що складається з стержнів, пружин, ресор, плит тощо (залізничний міст, підвісна канатна дорога, машина на пружному фундаменті, будівлі, підйомні крани і т. д.). Прикладами сил другого роду (які залежать від швидкості) будуть: а) сили опору середовищ при русі тіла в повітрі, у воді, в маслі і т. ін., б) сила, з якою електромагнітне поле діє на електричний заряд, що рухається в ньому (сила Лоренца).

Частина простору, в кожній точці якого на матеріальну точку діє певна сила, що є однозначною функцією координат точки і, можливо, часу, але не залежить від швидкості руху точки, називається силовим полем.

Силове поле, сили якого не залежать від часу, називається *стаціонарним*.

При переміщенні матеріальної точки в силовому полі сили його можуть виконувати роботу.

Стаціонарне силове поле, в якому робота сили поля, прикладеної до матеріальної точки, що рухається в ньому, однозначно залежить від початкового і кінцевого положень цієї точки, називається *потенціальним*.

Прикладами потенціальних силових полів є: а) поле тяжіння поблизу поверхні Землі, б) гравітаційне поле (поле сил всесвітнього тяжіння), в) електростатичне поле, г) поле пружних сил, д) магнітне поле (поле постійних струмів) в однозв'язній області простору, всередині якої немає струмів, та ін.

2. Силова функція потенціального поля. Нехай дано потенціальне силове поле. У ньому на матеріальну точку діє сила f, яка залежить тільки від положення цієї матеріальної точки в просторі, тобто

$$f = f(x, y, z),$$

і робота сили f при переміщенні матеріальної точки однозначно залежить лише від початкового $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і кінцевого $M(x, y, z)$ положень точки. Виберемо за початкову точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ будь-яку фіксовану точку простору. Тоді робота сили поля по переміщенню матеріальної точки з початкового положення $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в положення $M(x, y, z)$ буде однозначною і визначеною функцією координат точки $M(x, y, z)$:

$$A_{M_0M} = U(x, y, z). \qquad (2.37)$$

Кожній точці $M(x, y, z)$ простору відповідає певне значення роботи, що виконується силами поля при переміщенні матеріальної точки з початкової точки M_0 в дану точку $M(x, y, z)$; числове значення цієї роботи і визначає функцію U в точці $M(x, y, z)$.

Доведемо, що *робота сил потенціального силового поля при переміщенні матеріальної точки між двома довільними в просторі положеннями $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$ дорівнює відповідному приросту функції U:*

$$A_{M_1M_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Дійсно, за рівністю (2.37) маємо

$$A_{M_0M_2} = U(x_2, y_2, z_2)$$

і, очевидно,

$$A_{M_1M_0} = -A_{M_0M_1} = -U(x_1, y_1, z_1).$$

Користуючись тим, що робота сил потенціального поля від форми траєкторії не залежить, дістанемо

$$A_{M_1M_2} = A_{M_1M_0} + A_{M_0M_2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1).$$

Звідси видно, що *для кожного потенціального силового поля існує така однозначна функція $U(x, y, z)$, що робота сил поля по переміщенню матеріальної точки між будь-якими двома положеннями в полі характеризується відповідним приростом цієї функції.* Ця функція називається *силовою функцією* потенціального силового поля.

З'ясуємо фізичний зміст силової функції $U(x, y, z)$.

Розглянемо випадок електричного поля. Коли електричне поле, діючи на заряд, приводить його в рух і збільшує швидкість, то кінетична енергія заряду зростає за рахунок енергії поля. Робота сил електричного поля чисельно дорівнює зменшенню енергії поля і водночас дорівнює приросту кінетичної енергії рухомого заряду. Але зміна силової функції дорівнює роботі сил поля.

Отже, приріст значення силової функції, тобто різниця $U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$, характеризує з кількісного боку перетворення енергії електричного поля в кінетичну енергію заряду, що, рухаючись під дією сил поля, переходить з положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

У випадку поля пружних сил фізичний зміст силової функції той самий: різниця значень силової функції $U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)$ кількісно характеризує перетворення енергії пружної конструкції в кінетичну енергію матеріальної точки, що, рухаючись під дією пружних сил, переходить з положення M_1 у положення M_2.

Ми бачимо, що фізичний зміст силової функції тісно зв'язаний з принципом незнищуваності руху.

Упевнимось тепер у тому, що силова функція є вичерпною характеристикою силового поля, а саме: доведемо, що задавання силової функції достатньо не лише для визначення роботи сил поля, а й для визначення величини й напряму сили, з якою поле діє на матеріальну точку, що рухається в ньому.

З основної властивості силової функції виходить, що повний диференціал цієї функції дорівнює елементарній роботі сил поля. Дійсно, якщо матеріальна точка перемістилась з положення $M(x, y, z)$ в положення $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$, то робота сил потенціального поля дорівнює

$$d'A = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz,$$

що можна записати у вигляді

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Ця рівність справедлива для будь-яких переміщень MM_1 у просторі, тобто при будь-яких dx, dy, dz. Зокрема, якщо переміщення вибране так, що $dy = dz = 0$, а $dx \neq 0$, то маємо

$$Xdx = \frac{\partial U}{\partial x}dx,$$

звідки

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (2.38)$$

і, аналогічно,

Три співвідношення (2.38) визначають проекції сил потенціального поля на напрям координатних осей; ці проекції в кожній точці простору дорівнюють частинним похідним від силової функції поля по відповідних координатах.

Поверхнею рівня (або еквіпотенціальною поверхнею) *силової функції називається геометричне місце точок, в яких силова функція має одне й те саме стале значення.* Рівняння сімейства поверхень рівня таке:

$$U(x, y, z) = \text{const},$$

де константа може набувати будь-яких значень. Оскільки функція $U(x, y, z)$ однозначна, то через кожну точку простору проходить тільки одна поверхня рівня. Так, через точку $A(a, b, c)$ проходить поверхня рівня з рівнянням

$$U(x, y, z) = U(a, b, c).$$

Теорема 1. *У кожній точці простору сила потенціального поля* $\boldsymbol{f}$ *напрямлена по нормалі до поверхні рівня, що проходить через дану точку.*

Фізично це очевидне і випливає з того, що при довільному переміщенні матеріальної точки по поверхні рівня робота сил поля дорівнює нулю (як різниця значень силової функції в двох точках, що лежать на одній і тій самій поверхні рівня), що можливо лише тоді, коли сила перпендикулярна кожному елементарному переміщенню.

Теорема 2. *Сила потенціального поля напрямлена по нормалі до поверхні рівня в бік зростання* (а не спадання) *силової функції* $U(x, y, z)$.

Дійсно, нехай $d\boldsymbol{r}$ є елементарне переміщення точки, напрямлене по нормалі до поверхні рівня в бік сили. Робота сили поля на такому переміщенні $d\boldsymbol{r}$ буде завідомо додатна. Але ця робота дорівнює диференціалу силової функції dU, який, як видно, буде теж додатним: $dU > 0$. Це й доводить теорему.

Теорема 3. *Проекція діючої на матеріальну точку сили потенціального силового поля на будь-який напрям у просторі дорівнює похідній силової функції, взятій по цьому напряму.*

Це випливає з двох фактів: 1) проекція сили на будь-який напрям чисельно дорівнює роботі сили, обчисленій на одиниці елементарного переміщення в даному напрямі, 2) робота дорівнює приросту силової функції.

Зробимо ще кілька зауважень. При обчисленні силової функції можна виходити з того, що в потенціальному силовому полі елементарна робота дорівнює повному диференціалу силової функції: $d'A = dU$. Так, у випадку однорідного поля сили тяжіння маємо $dU = -mgdz$, звідки $U = -mgz + \text{const}$. У випадку поля центральної сили тяжіння $dU = -\gamma \frac{mM}{r^2} dr$, звідки $U = \gamma \frac{mM}{r} + \text{const}$. Силові функції визначені з точністю до адитивної сталої. Ця обставина зв'язана з тим, що фізичний зміст має *зміна* силової функції, а не її абсолютне числове значення. Весь простір, де існує потенціальне поле, можна заповнити поверхнями рівня $U(x, y, z) = \text{const}$, відповідно до всіляких значень константи. Ці поверхні рівня не перетинаються між собою, бо функція $U(x, y, z)$ однозначна. При переміщенні матеріальної точки з довільного положення A на поверхні рівня $U = C_1$ в будь-яке положення B на іншій поверхні рівня $U = C_2$ поле вивільнює енергію, що дорівнює приросту силової функції $U(B) - U(A)$. Ця енергія і перетворюється в енергію якого-небудь іншого виду. Якщо матеріальна точка здійснює переміщення по замкнутому контуру, то при однозначній силовій функції робота сил поля дорівнює нулю:

$$\oint \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \oint dU = 0,$$

бо при поверненні по замкнутому контуру в початкову точку однозначна силова функція набуває початкового значення і її повна зміна дорівнює нулю. Те, що робота сил поля при переміщенні матеріальної точки по замкнутому контуру дорівнює нулю, є основною властивістю потенціального силового поля. Рівність

$$\oint \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

виражає тут фізичний принцип незнищуваності і нестворюваності руху. Коли б робота сил потенціального поля при переміщенні матеріальної точки по замкнутому контурі не дорівнювала нулю, то таким способом можна було б добувати енергію без зміни фізичного стану самого поля і тіл, що оточують матеріальну точку, а це означало б здійснення вічного двигуна — створення енергії з нічого.

На закінчення зауважимо, що критерієм існування силової функції є виконання рівностей

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}. \qquad (2.39)$$

У математичному аналізі доводиться, що коли область простору, в якій виконані умови (2.39), є однозв'язною, то існує однозначна силова функція $U(x, y, z)$, і, отже силове поле буде потенціальним. Якщо ж область простору, в якій виконані умови (2.39), є багатозв'язною, то силова функція може виявитись неоднозначною, і тоді робота сил поля залежатиме від вибору траєкторії.

§ 5. Закон збереження механічної енергії при русі матеріальної точки в потенціальному силовому полі

1. Розглянемо матеріальну точку, яка рухається в потенціальному силовому полі. За теоремою про приріст кінетичної енергії, зміна кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює роботі сили, яка діє на точку:

$$d\frac{mv^2}{2} = \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{2.40}$$

Але в потенціальному силовому полі елементарна робота сили дорівнює повному диференціалу силової функції $\boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} = dU$. Тому рівняння (2.40) можна записати так:

$$d\frac{mv^2}{2} = dU.$$

Якщо диференціали двох функцій рівні, то самі функції можуть відрізнятись лише на адитивну сталу h, тому

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h, \tag{2.41}$$

де $V(x, y, z) = -U(x, y, z)$.

Функцію V називають *потенціальною енергією*.

Функція V є енергетичною характеристикою потенціального силового поля, під дією сил якого відбувається рух матеріальної точки. Ця функція характеризує здатність поля активно вивільнювати енергію, змінюючи при цьому кінетичну енергію матеріальної точки.

Суму кінетичної і потенціальної енергій $\frac{mv^2}{2} + V$ рухомої матеріальної точки називають *повною механічною енергією* і позначають через E.

Перепишемо рівняння (2.41) так:

$$E = \frac{mv^2}{2} + V = h. \tag{2.42}$$

Це рівняння визначає так званий *закон збереження механічної енергії* для однієї матеріальної точки.

При русі точки в потенціальному силовому полі повна механічна енергія матеріальної точки зберігає сталу величину.

Цей закон є одним з частинних проявів загального закону збереження і перетворення руху.

Співвідношення (2.42) є одним з перших інтегралів диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (див. розд. III, § 3); цей інтеграл називається *інтегралом енергії*.

2. Якщо рух матеріальної точки відбувається в середовищі з опором, то її повна механічна енергія не зберігатиметься, бо відбувається перетворення кінетичної енергії точки в енергію руху середовища, в теплоту та ін.

У багатьох випадках сила опору середовища пропорціональна вектору швидкості

$$\boldsymbol{F} = -\alpha\boldsymbol{v},$$

так що робота цієї сили дорівнює

$$d'A = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\alpha\cdot\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -\alpha\cdot\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\cdot dt = -\alpha v^2\cdot dt.$$

За теоремою про приріст кінетичної енергії точки дістанемо

$$d\frac{mv^2}{2} = -dV + \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

звідки

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + V\right) = -\alpha\cdot v^2. \tag{2.43}$$

Величина $R = \frac{1}{2}\alpha v^2$ називається *функцією розсіювання* енергії. Рівність (2.43) показує, що подвоєна функція розсіювання характеризує швидкість зменшення повної механічної енергії рухомої матеріальної точки (іншими словами — швидкість перетворення повної механічної енергії в енергію руху середовища з опором, у теплоту і т. д.).

Приклад 1. Обчислимо потенціальну енергію електрона в електричному полі нерухомого ядра атома. Сила взаємодії електрона з ядром за законом Кулона дорівнює

$$f = \frac{\lambda}{r^2};$$

тут $\lambda = e_1\cdot e_2$ (e_1 — заряд електрона, що дорівнює $-e$; e_2 — заряд ядра атома, що дорівнює $+eZ$, де Z — порядковий номер хімічного елемента)*.

Якщо електрон переміститься по радіусу в напрямі від ядра, то робота сили притягання буде від'ємною і дорівнюватиме добутку f на dr:

$$d'A = f\cdot dr = \frac{\lambda}{r^2}\cdot dr.$$

Переміщення електрона по дузі кола з центром в ядрі не зв'язане з виконанням роботи, бо в цьому випадку сила перпендикулярна переміщенню. Отже, знайдена для роботи формула справедлива і для елементарного переміщення електрона не лише по радіусу, але й у будь-якому іншому напрямі**.

Диференціал потенціальної енергії дорівнює

$$dV = -d'A = -\frac{\lambda}{r^2}\cdot dr,$$

звідки

$$V = \frac{\lambda}{r}.$$

Сталу інтегрування покладено такою, що дорівнює нулю; це означає, що потенціальна енергія умовно дорівнює нулю, коли $r = \infty$.

Потенціальна енергія V виявилась від'ємною при всіх r аж до $r = \infty$ саме тому, що найбільше значення потенціальної енергії, яке відповідає значенню $r = \infty$, умовно покладено таким, що дорівнює нулю. Коли рухомий електрон віддаляється на своїй орбіті від ядра, то швидкість електрона

* Умовились силу відштовхування вважати додатною, а силу притягання — від'ємною. Тут маємо $\lambda = -e^2Z < 0$.

** Довільне елементарне переміщення можна розкласти на сукупність двох переміщень згаданого типу: по радіусу і дузі кола.

9*

зменшується завдяки притяганню його до ядра, а убуваюча кінетична енергія електрона при цьому перетворюється в енергію електричного поля. Цю останню енергію часто умовно приписують електрону під назвою його «потенціальної» енергії. Закон збереження енергії тут має вигляд

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\lambda}{r} = h. \tag{2.44}$$

При русі електрона в полі ядра відбувається «переливання» між кінетичною і потенціальною енергіями, але їх алгебраїчна сума залишається незмінною і може бути як додатною, так і від'ємною або дорівнювати нулю. Знак h визначає, як буде показано нижче, вид траєкторії вільного заряду (якщо $h > 0$ — то траєкторією є гіпербола, якщо $h < 0$ — то еліпс, а коли $h = 0$ — то парабола).

П р и к л а д 2. Силу всесвітнього тяжіння можна подати в такому вигляді:

$$f = \frac{\lambda}{r^2},$$

де $\lambda = -\gamma m M$ (m — маса рухомої планети, M — маса Сонця, γ — універсальна стала тяжіння).

Оскільки математична структура закону всесвітнього тяжіння виявляється ідентичною з структурою закону Кулона, то висновки в попередньому прикладі залишаються правильними і для сили тяжіння. Зокрема, при русі планети навколо Сонця її потенціальна енергія дорівнює

$$V = \frac{\lambda}{r}, \tag{2.45}$$

а закон збереження енергії запишеться, як і раніше, у вигляді рівності

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{\lambda}{r} = h. \tag{2.46}$$

Застосуємо рівняння (2.46) для випадку, коли точка рухається поблизу поверхні Землі або іншого масивного центрального тіла (Сонця, Місяця, планети і т. д.) У цьому випадку $r = R + h$, де R — радіус Землі, а h — висота підняття тіла над поверхнею Землі. Розкладаючи $\frac{1}{r}$ у ряд і обмежуючись членами першого порядку малості відносно $\frac{h}{R}$, дістанемо

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{h}{R} + \ldots\right) \approx \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}.$$

Заміна величини $\frac{1}{r}$ її наближеним значенням у (2.46) дає

$$\frac{mv^2}{2} + \gamma m M \frac{h}{R^2} = \text{const}.$$

Але $\frac{\gamma m M}{R^2}$ є сила притягання тіла до Землі біля її поверхні і може бути наближено * замінена вагою тіла mg, так що в цьому випадку формула (2.46) остаточно запишеться так:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const}.$$

Ми прийшли до добре відомого з шкільного курсу механіки закону збереження механічної енергії для матеріальних точок, які рухаються поблизу поверхні Землі (при відсутності тертя та опору середовища).

* Не враховується обертання Землі.

§ 6. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТА КІЛЬКОСТІ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1. Поняття момента вектора. Нагадаємо два означення, відомі з курсу аналітичної геометрії.

Моментом вектора $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{AB}$ відносно точки O називається векторний добуток $\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{AB}$:

$$\text{mom}_O \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{a}, \tag{2.47}$$

де $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OA}$ — радіус-вектор точки A (початку вектора $\boldsymbol{a}$).

Момент вектора $\boldsymbol{AB}$ відносно осі, тобто відносно напрямленої прямої, є додатне або від'ємне число, що дорівнює проекції на цю вісь момента вектора $\boldsymbol{AB}$ відносно довільної точки цієї осі.

Момент вектора відносно осі є скаляр, а відносно точки — вектор.

Момент вектора відносно осі дорівнює нулю в двох випадках: 1) коли вектор $\boldsymbol{AB}$ паралельний осі l і 2) коли вектор $\boldsymbol{AB}$ перетинає вісь l (тобто лінія, уздовж якої розміщений вектор, при продовженні перетинає вісь l).

Моменти вектора $\boldsymbol{a}$ відносно осей декартової системи координат дорівнюють:

$$\left.\begin{aligned} \text{mom}_x \boldsymbol{a} &= y a_z - z a_y \\ \text{mom}_y \boldsymbol{a} &= z a_x - x a_z \\ \text{mom}_z \boldsymbol{a} &= x a_y - y a_x \end{aligned}\right\}, \tag{2.48}$$

де a_x, a_y, a_z — проекції вектора $\boldsymbol{a}$, а x, y, z — координати точки, що зливається з початком вектора $\boldsymbol{a}$.

2. *Теорема.* *Похідна по часу від момента кількості руху матеріальної точки, взятого відносно нерухомої точки простору, дорівнює моменту діючої сили відносно тієї самої точки простору.*

Дійсно, при русі матеріальної точки для кожного момента часу можна застосувати рівність (другий закон Ньютона)

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{f} \qquad (\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}),$$

яка після векторного множення на радіус-вектор $\boldsymbol{r}$, що виходить з початку координат O до точки m, набирає такого вигляду:

$$\boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}.$$

Доповнимо ліву частину цієї рівності до повної похідної по часу від векторного добутку $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, тобто додамо до лівої частини величину $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p}$. Оскільки цей доданок сам по собі дорівнює нулю (як добуток паралельних векторів), то остання рівність матиме такий вигляд:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}. \tag{2.49}$$

Це співвідношення і визначає сформульовану вище теорему про зміну момента кількості руху (момента імпульса) матеріальної точки. Проектуючи цю векторну рівність на осі координат, дістаємо

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(yp_z - zp_y) &= yZ - zY\\ \frac{d}{dt}(zp_x - xp_z) &= zX - xZ\\ \frac{d}{dt}(xp_y - yp_x) &= xY - yX\end{aligned}\right\}, \qquad (2.50)$$

тобто *похідна по часу від момента кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту сили, що діє на точку відносно цієї осі*. Зауважимо, що $p_x = m\dot{x}$, $p_y = m\dot{y}$, $p_z = m\dot{z}$.

Розділ VI

РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ. ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ

§ 1. ЗАГАЛЬНІ ЗАКОНИ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Силове поле називається *центральним*, якщо лінія дії сили, прикладеної до матеріальної точки, постійно проходить через одну й ту саму нерухому точку простору. Ця точка простору називається *центром сил*.

Прикладом руху матеріальної точки в центральному силовому полі може бути рух планети навколо Сонця, рух електрона навколо ядра атома і т. д. Фізична природа центральної сили та її величина можуть бути різноманітними.

Доведемо кілька загальних теорем, справедливих при русі матеріальної точки в центральному силовому полі довільної фізичної природи при будь-якому законі, що визначає величину сили.

1. ***Теорема 1.*** *У центральному силовому полі матеріальна точка описує плоску траєкторію, яка лежить у площині, що проходить через центр сил.*

За теоремою про зміну момента кількості руху маємо:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}.$$

Але права частина цієї рівності дорівнює нулю, бо вектор центральної сили $\boldsymbol{f}$ постійно проходить через центр силового поля —

через точку O, яку можна вибрати за початок координат (рис. 38). Отже, і ліва частина рівності дорівнює нулю:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}) = 0,$$

звідки

$$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{const} = \boldsymbol{A}. \qquad (2.51)$$

Помноживши цю рівність скалярно на $\boldsymbol{r}$, дістанемо в лівій її частині нуль (за означенням мішаного добутку векторів). Маємо:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = 0,$$

або

$$A_x \cdot x + A_y \cdot y + A_z \cdot z = 0, \qquad (2.52)$$

де A_x, A_y, A_z — сталі проекції вектора $\boldsymbol{A}$.

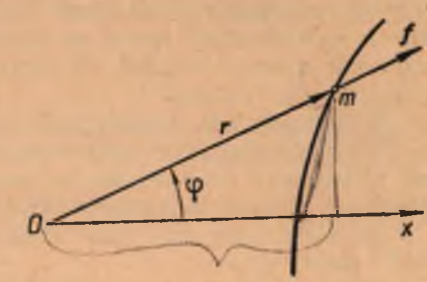

Рис. 38.

Отже, координати x, y, z рухомої точки задовольняють рівняння площини, що проходить через початок координат — центр сил, що й треба було довести.

Розглянуту теорему можна довести коротше так: у центральному силовому полі немає сил, які спричинювали б відхилення рухомої точки від площини, що проходить через вектор початкової швидкості $\boldsymbol{v}_0$ і нерухомий центр поля — через точку O, бо центральна сила постійно лежить у цій площині.

2. ***Теорема 2.*** *При русі матеріальної точки в центральному силовому полі справджується закон площ.*

Дійсно, з (2.51), тобто з рівняння

$$\boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} = \text{const},$$

після домноження його на $\frac{1}{m}dt$ і заміни $\boldsymbol{v}dt$ на $d\boldsymbol{r}$ дістаємо

$$\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = \frac{\text{const}}{m}dt,$$

або

$$\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} \cdot dt, \qquad (2.53)$$

де $\boldsymbol{c}$ — стала величина.

Абсолютна величина обох частин цієї рівності буде

$$2dS = cdt, \qquad (2.54)$$

де dS — площа елементарного трикутника, побудованого на векторах $\boldsymbol{r}$ і $d\boldsymbol{r}$.

Інтегруючи рівність (2.54), знайдемо

$$S = \frac{c}{2} \cdot t, \qquad (2.55)$$

тобто *площа, яка описується радіусом-вектором точки, зростає прямо пропорціонально часу.*

На підставі формули кінематики (1.32) для секторної швидкості закон площ (2.54) набирає вигляду:

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{2.56}$$

У цій формі закон площ найчастіше й використовують.

Стала c, що називається *сталою площ*, згідно з (2.55), дорівнює подвоєному значенню тієї площі, яку описує радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ матеріальної точки за одиницю часу. Сталу c можна обчислити також за (2.53) як величину моменту швидкості точки відносно центра сил.

3. **Формула для швидкості.** З доведеної вище теореми площ можна зробити такий висновок: якщо відома траєкторія точки і зазначено положення центра сил, то наявність закону площ однозначно визначає швидкість точки в будь-якому місці траєкторії і силу.

До виведення цих двох формул для швидкості й сили ми тепер і переходимо.

При русі під дією центральної сили траєкторія точки є плоскою, а тому квадрат швидкості в полярній системі координат визначається за формулою

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2. \tag{2.57}$$

Знайшовши час dt з формули (2.56) закону площ і підставивши його значення в формулу (2.57) для швидкості, дістанемо

$$v^2 = \frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}. \tag{2.58}$$

Це й є перша шукана формула для швидкості. Цій формулі надають іншого вигляду, вводячи величину, обернену віддалі від точки до центра сил, тобто величину

$$u = \frac{1}{r};$$

тоді $r = \frac{1}{u}$, $dr = -\frac{du}{u^2}$, і ми дістаємо остаточно

$$v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{2.59}$$

Таким чином, якщо вказано положення центра сил, задане рівняння траєкторії в формі $u = u(\varphi)$ і відома стала площ c (або, що рівнозначно, початкова швидкість точки), то з останньої формули можна обчислити швидкість у будь-якій точці траєкторії.

4. **Формула для сили.** Формулу для сили можна вивести з теореми про кінетичну енергію:

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = d\frac{mv^2}{2}.$$

Умовимось центральну силу $\boldsymbol{f}$ вважати додатною, якщо вона є силою відштовхування, і від'ємною, якщо це є сила притягання. Тоді вектор сили $\boldsymbol{f}$ в обох випадках можна записати так:

$$\boldsymbol{f} = f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{2.60}$$

де $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ — одиничний вектор, що йде від центра сил O до рухомої точки.

Елементарна робота центральної сили в обох випадках дорівнює

$$\boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot d\boldsymbol{r} = f\frac{rdr}{r} = fdr.$$

Тут ми скористались тотожністю $\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r} = rdr$, яку дістають диференціюванням тотожності $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2$. Отже, теорему про зміну кінетичної енергії запишемо так:

$$f \cdot dr = d\frac{mv^2}{2}.$$

Якщо покласти $r = \frac{1}{u}$, $dr = -\frac{du}{u^2}$,

то її можна записати так:

$$-f \cdot \frac{du}{u^2} = d\frac{mv^2}{2}.$$

Замінюючи тут v^2 за формулою (2.59), знайдемо

$$-f \cdot \frac{du}{u^2} = d\left\{\frac{m}{2}c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]\right\}.$$

Продиференціюємо праву частину цієї формули по φ; тоді дістанемо

$$-f \cdot \frac{du}{u^2} = \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right] \cdot d\varphi,$$

або

$$-f \cdot \frac{du}{u^2} = mc^2\left[u\frac{du}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right] \cdot d\varphi,$$

звідки

$$f = -mc^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right). \tag{2.61}$$

Знайдена формула (2.61) визначає центральну силу, яка здійснює рух точки по наперед заданій траєкторії. Ця формула називається *формулою Біне*. Якщо при обчисленні сили за формулою Біне виявиться, що $f > 0$, то це означає, що досліджувана сила є силою відштовхування; якщо ж виявиться, що $f < 0$, то маємо випадок сили притягання.

Зробимо два висновки з формули (2.61).

1) У заданому центральному силовому полі вільна точка не може рухатись по якій завгодно траєкторії; існує клас можливих траєкторій. Дійсно, якщо центральну силу f задано як функцію полярних координат, $f = f(u, \varphi)$, то співвідношення (2.61)

слід розглядати як диференціальне рівняння для функції $u(\varphi)$; загальний розв'язок цього рівняння і визначає клас тих траєкторій, по яких може відбуватись рух вільної точки у заданому центральному силовому полі.

2) Нехай дано центральне силове поле. Рух матеріальної точки по одній якій-небудь траєкторії з класу можливих може відбуватись лише при деякій цілком певній секторній швидкості. Це випливає з формули Біне: при заданій центральній силі $f(u, \varphi)$ і заданому рівнянні траєкторії $u = u(\varphi)$ стала площ c визначається однозначно.

Звідси випливає, зокрема, що не можна запустити двох штучних супутників Землі, які б рухались по одній траєкторії і проходили одні й ті самі точки з різними швидкостями.

Приклад. Знайдемо закон сили для центрального силового поля, що здійснює рух матеріальної точки по колу, якщо центр поля знаходиться в центрі кола.

За умовою, точка рухається по колу, рівняння якого

$$u = \frac{1}{R},$$

де R — радіус кола. За формулою Біне, для сили маємо:

$$f = -\frac{mc^2}{R^2}\left(\frac{1}{R} + 0\right) = -\frac{mc^2}{R^3}.$$

Стала площ $c = r^2\dot{\varphi}$, а в нашому випадку $c = R^2\omega$, де ω — кутова швидкість обертання радіуса-вектора точки.

Маємо:

$$f = -\frac{mR^4\omega^2}{R^3},$$

або

$$f = -m\omega^2 R. \tag{2.62}$$

Знак мінус показує, що знайдена центральна сила є силою притягання, а не відштовхування.

Рух по даному колу можливий з різними кутовими швидкостями ω, але, як показує формула (2.62), збільшення кутової швидкості в n раз приводить до збільшення величини центральної сили в n^2 раз.

§ 2. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА — НЬЮТОНА

1. Загальна теорія. Розглянемо задачу Кеплера — Ньютона: *визначити рух матеріальної точки в центральному полі, величина сили якого обернено пропорціональна квадрату віддалі від точки до нерухомого центра сил.*

Прикладом таких рухів у природі є рух планет у гравітаційному полі Сонця і рух електронів в електричному полі ядра атома. Оскільки розглядуваний рух відбувається в полі центральної сили, то це дає змогу скористатись формулою (2.59) для швидкості:

$$v^2 = c^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right]. \tag{2.63}$$

Але за законом збереження енергії (2.44) або (2.46) маємо:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{\lambda}{r} + h. \tag{2.64}$$

Сталій λ тут слід надати те чи інше значення залежно від роду задачі. Якщо розглядається рух планети в гравітаційному полі Сонця, то треба покласти $\lambda = -\gamma mM$, де M — маса Сонця, m — маса планети, а γ — стала тяжіння (для руху штучного супутника Землі M — маса Землі, а m — маса супутника); для руху електрона в полі ядра $\lambda = -e^2Z$, де e — величина заряду електрона, а Z — порядковий номер хімічного елемента.

Знайдемо $\frac{du}{d\varphi}$ з формули (2.63), виключаючи v^2 за формулою (2.64); матимемо

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - \left(u + \frac{\lambda}{mc^2}\right)^2, \tag{2.65}$$

де

$$A = \frac{\lambda}{mc^2}\sqrt{1 + \frac{2mc^2h}{\lambda^2}}.$$

Зробимо в рівності (2.65) заміну змінних, вважаючи, що

$$u + \frac{\lambda}{mc^2} = x, \quad du = dx.$$

Дістанемо

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 = A^2 - x^2,$$

звідки

$$\frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = d\varphi,$$

а після інтегрування

$$-\arccos\left(\frac{x}{A}\right) = \varphi - \beta,$$

або

$$x = A\cos(\varphi - \beta),$$

де β — стала інтегрування, яка визначає напрям полярної осі.

Повернемось до початкової змінної. Замінимо x на $u + \frac{\lambda}{mc^2}$ і дістанемо

$$u = \frac{-\lambda}{mc^2} + A\cos(\varphi - \beta), \tag{2.66}$$

звідки після заміни $u = \frac{1}{r}$ буде

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \beta)}, \tag{2.67}$$

де

$$\frac{mc^2}{-\lambda} = p, \quad \frac{mc^2}{\lambda}\cdot A = \varepsilon.$$

Отже, планета рухається навколо Сонця (електрон навколо ядра) по траєкторії, згідно з рівнянням (2.67), що визначає конічний переріз, який може бути еліпсом, параболою або гіперболою, залежно від значення ексцентриситета:

якщо $\varepsilon > 1$ — гіпербола,
якщо $\varepsilon = 1$ — парабола,
якщо $\varepsilon < 1$ — еліпс.

Значення ексцентриситета визначають за відповідними формулами:

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{-\lambda}, \quad A = \sqrt{1 + \frac{2\,mc^2h}{\lambda^2}}.$$

Тут під радикалом до одиниці додається величина, знак якої визначається знаком величини h, тобто знаком повної початкової енергії рухомої точки. Тому траєкторія визначається знаком h і буде:

при $h > 0$ — гіперболою ($\varepsilon > 1$),
при $h = 0$ — параболою ($\varepsilon = 1$),
при $h < 0$ — еліпсом ($\varepsilon < 1$).

Отже, електрон у полі ядра або тіло (матеріальна точка) в центральному гравітаційному полі можуть рухатись тільки по конічних перерізах. Вид конічного перерізу залежить від знака повної механічної енергії, з якою відбувається рух.

Умова, що повна механічна енергія від'ємна, додатна або дорівнює нулю, означає, що

$$h = \frac{mv^2}{2} + \frac{\lambda}{r} \lesseqgtr 0,$$

або після підставлення значення $\lambda = -\gamma mM$

$$\frac{mv^2}{2} \lesseqgtr \gamma \frac{mM}{r},$$

або ж остаточно

$$v^2 \lesseqgtr 2\frac{\gamma M}{r}.$$

Якщо $v < \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$, то точка m рухається по еліпсу, якщо $v = \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$, — по параболі, а коли $v > \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$, — по гіперболі (рис. 39). Рух по колу буде тоді, коли $\frac{mv^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2}$, тобто при $v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}}$.

Умова $v < \sqrt{2\gamma \frac{M}{r}}$ справджується для швидкостей усіх планет, а тому планети й рухаються по еліпсах. Еліпси розташовані так, що мають один фокус спільний, і в цьому фокусі знаходиться Сонце.

Оскільки планета рухається під дією центральної сили притягання до Сонця, то, за теоремою 2, справджується закон площ.

Ми прийшли до законів, які відкрив Кеплер ще в 1609 р. в результаті обробки матеріалів спостережень за рухом планети Марс. Сформулюємо ці закони.

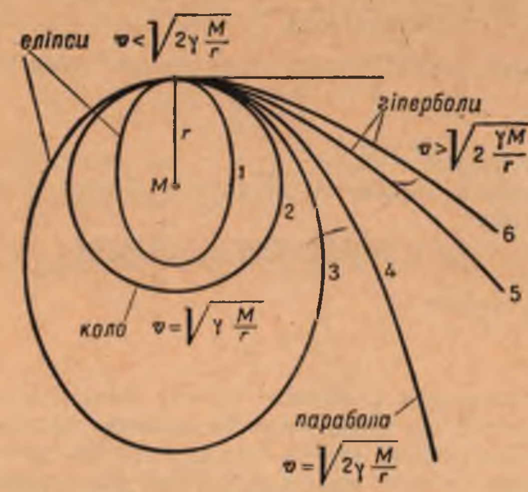

Рис. 39.

1. **Перший закон Кеплера:** *планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.*

2. **Другий закон Кеплера:** *радіус-вектор планети описує площу, величина якої зростає з часом рівномірно.*

3. **Третій закон Кеплера:** *квадрати часу обертання планет навколо Сонця відносяться як куби великих півосей відповідних еліпсів.*

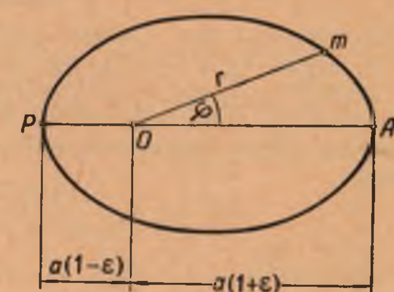

Рис. 40.

Нам залишається довести третій закон Кеплера, який був відкритий у 1619 р.

Для доведення розглянемо полярні координати найближчої до Сонця точки P еліпса (перигелій) і найдальшої точки A (апогелій). Координати дорівнюють (рис. 40):

для точки A: $\varphi = 0$, $\quad r = a(1+\varepsilon)$,
для точки P: $\varphi = \pi$, $\quad r = a(1-\varepsilon)$,

де ε — ексцентриситет еліпса. Підставляючи потім координати точок A і P в рівняння еліпса (2.66) при $\beta = 0$, дістанемо:

для апогелія: $\dfrac{1}{a(1+\varepsilon)} = \dfrac{-\lambda}{mc^2} + A,$

для перигелія: $\dfrac{1}{a(1-\varepsilon)} = \dfrac{-\lambda}{mc^2} - A.$

Додаючи ці рівності, знаходимо

$$\frac{1}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{-\lambda}{mc^2}. \tag{2.68}$$

Але сталу площ можна подати через період T обертання планети:

$$c = \frac{2S}{T},$$

де $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$.

Тут S — площа еліпса. Підставляючи тепер у рівність (2.68) значення сталих

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1-\varepsilon^2)}{T^2}, \quad \lambda = -\gamma m M,$$

остаточно дістанемо

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}. \tag{2.69}$$

Це співвідношення і виражає третій закон Кеплера.

Рух у полі, що відштовхує за законом Кулона. Розсіяння α-частинок. Розглянемо задачу про рух альфа-частинки (скорочено α-частинки) в полі нерухомого ядра. Ця задача є окремим випадком задачі Кеплера — Ньютона, коли в центральному силовому полі діє сила відштовхування, що дорівнює

$$f = \frac{\lambda}{r^2}, \tag{2.70}$$

де

$$\lambda = +2e^2 Z.$$

Таке значення для λ маємо тому, що заряд α-частинки дорівнює $+2e$, заряд ядра $+eZ$, де Z — порядковий номер елемента. Повна енергія рухомої α-частинки завжди додатна; тому $h > 0$ і рух α-частинки в полі нерухомого ядра може відбуватись лише по гіперболі. Рівняння траєкторії, згідно з формулою (2.66), має вигляд

$$u = \frac{-\lambda}{mc^2} + A\cos(\varphi - \beta).$$

Замінивши $\lambda = +2e^2 Z$ і розкривши $\cos(\varphi - \beta)$, подамо це рівняння у формі

$$u = B + B_1 \cos\varphi + B_2 \sin\varphi, \tag{2.71}$$

де

$$B = -\frac{2e^2 Z}{mc^2}. \tag{2.72}$$

Визначимо сталі B_1 і B_2. Оскільки при $\varphi = \pi$ $u = \dfrac{1}{r} = 0$, то підставляння цих значень у рівність (2.71) приводить до такого результату: $B_1 = B$.

Потім, якщо рівняння траєкторії (2.71) α-частинки подати у вигляді

$$\frac{u}{\sin\varphi} = B\,\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} + B_2 \tag{2.73}$$

і врахувати, що при $\varphi = \pi$ ліва частина рівняння (2.73) наближається до $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{u}{\sin\varphi} = \dfrac{1}{r\cdot\sin\varphi} \to \dfrac{1}{p}$, де p—«прицільна» віддаль, і що

$$\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \to 0,$$

то з (2.73) матимемо, що $B_2 = \dfrac{1}{p}$, і рівняння гіперболи (2.71) набере такого остаточного вигляду:

$$u = B(1+\cos\varphi) + \frac{1}{p}\sin\varphi. \tag{2.74}$$

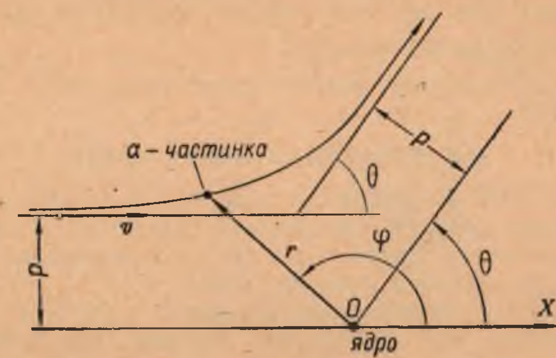

Рис. 41.

Важливе теоретичне значення має кут θ відхилення α-частинки, який є кутом між асимптотами гіперболи (рис. 41). Одна з нескінченно віддалених точок гіперболи має координати $\varphi = \theta$, $u = \dfrac{1}{r} = 0$. Підставляючи в рівняння гіперболи (2.74) координати цієї точки, дістанемо рівність

$$0 = B(1+\cos\theta) + \frac{1}{p}\sin\theta,$$

звідки

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = -\frac{1}{Bp},$$

або

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mc^2}{2e^2 Zp}.$$

Стала площ c дорівнює абсолютній величині момента початкової швидкості α-частинки відносно точки O, в якій знаходиться ядро:

$$c = v \cdot p,$$

тому остаточно

$$\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \frac{mv^2 p}{2e^2 Z}. \qquad (2.75)$$

Розсіювання паралельного потоку α-частинок при проходженні їх через металеву пластинку (фольгу) можна спостерігати на флуоресціюючому екрані з сірчастого цинку. Кожна α-частинка при ударі об екран дає спалах, який можна спостерігати оком. Кількість спалахів і їх розподіл по площі, як показують досліди, відповідають знайденому тут закону відхилення.

Із знайденої формули видно, що кут відхилення θ тим більший, чим менша «прицільна» віддаль p. При малих p кут $\theta > \frac{\pi}{2}$, тобто α-частинка, пролітаючи біля ядра атома, може бути відкинута назад.

Розглянута задача про відхилення α-частинок дуже важлива для атомної фізики. Пряме підтвердження ядерної моделі атома було добуте вперше в результаті спостережень англійського фізика Резерфорда над розсіянням α-частинок і порівняння цих спостережень з підрахунками, які проводяться на основі знайденої формули для $\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

Остаточне підтвердження ядерна модель атома дістала в результаті вивчення спектрів.

§ 3. ШТУЧНИЙ СУПУТНИК ЗЕМЛІ

4 жовтня 1957 р. почалась нова ера в історії опанування природою — ера освоєння космічного простору. У цей день у нас, в Радянському Союзі, був успішно запущений перший в історії людства штучний супутник Землі.

2 січня 1959 р. була вперше запущена у Всесвіт радянська космічна ракета, яка, пройшовши поблизу від Місяця, стала супутником Сонця.

12 вересня 1959 р. здійснено пуск другої радянської космічної ракети до Місяця, яка 14 вересня досягла його поверхні. Так уперше в історії здійснено космічний політ з Землі на інше небесне тіло.

Повна теорія руху супутника досить складна. Уявлення про рух супутника за невеликий проміжок часу дає рух матеріальної точки в центральному полі тяжіння. У першому наближенні покладемо, що поле тяжіння Землі є строго центральним і центр сил знаходиться в нерухомому центрі Землі, а супутник розглядатимемо як матеріальну точку. При таких припущеннях рух супутника відбуватиметься по еліпсу, площина якого нерухома відносно інерціальної системи координат, тобто відносно зірок. Однак дійсний рух супутника значно відрізняється від руху матеріальної точки в центральному полі тяжіння, бо: 1) поле тяжіння Землі не є строго центральним; 2) рух супутника відбувається не в безповітряному просторі, і, отже, повітря чинить опір (до того ж атмосфера обертається разом з Землею, що створює додаткове бічне «обдування» супутника); 3) Земля не є нерухомою, а рухається навколо Сонця і т. д.

З'ясуємо тепер, при якій швидкості v супутник рухатиметься навколо Землі по коловій орбіті з радіусом R. Величина сили притягання дорівнює

$$f = \frac{k}{R^2}.$$

Сталу k знайдемо за цією ж самою формулою з умови, що коли тіло знаходиться на поверхні Землі, то

$$mg = \frac{k}{r_з^2},$$

звідки

$$k = mgr_з^2,$$

де $r_з$ — радіус Землі (рис. 42). Таким чином, на супутник діє сила

$$f = mg\left(\frac{r_з}{R}\right)^2. \qquad (2.76)$$

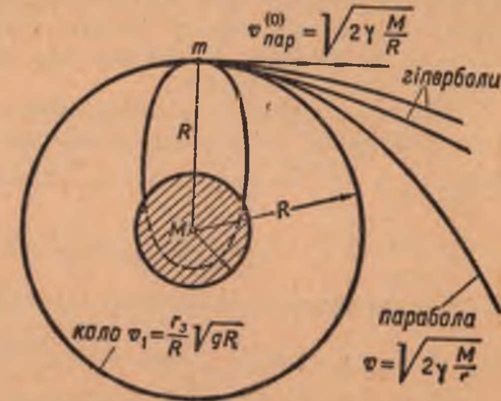

Рис. 42.

За другим законом Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = mg\left(\frac{r_з}{R}\right)^2,$$

а звідси

$$v = \frac{r_з}{R}\sqrt{gR}. \qquad (2.77)$$

Зробимо приблизний підрахунок. Якщо супутник обертається навколо Землі на висоті 630 *км* від поверхні, то, вважаючи, що

$$R = 7000\ км,\quad r_з = 6370\ км,\quad g = 0{,}0098\ км/сек^2,$$

знайдемо

$$v = \frac{637}{700}\sqrt{7000 \cdot 0{,}0098} = 7{,}55\ км/сек.$$

Якщо надати супутнику швидкість більшу, ніж та, яка потрібна для руху по колу, то супутник рухатиметься по еліптичній траєкторії.

Перший, другий і третій радянські штучні супутники Землі мали початкові швидкості на орбіті понад 8 *км/сек*. Ці швидкості більші від колової, і супутники рухались по еліптичних траєкторіях, причому апогей першого супутника був на відстані 900 *км* від поверхні Землі, другого — 1700 *км*, третього — 1880 *км*.

Обчислимо ще *параболічну швидкість*, яку треба надати тілу, щоб воно могло подолати земне притягання і вийти в міжпланетний простір.

Параболічну швидкість знайдемо з умови, що повна енергія h матеріальної точки дорівнює нулю:

$$h = \frac{mv^2}{2} + \frac{\lambda}{r} = 0, \qquad (2.78)$$

де $\lambda = -\gamma mM$. Тут M — маса Землі, m — маса тіла, що рухається по параболічній орбіті, r — відстань від тіла до центра Землі (ця відстань змінюється, збільшуючись з часом).

З рівняння (2.78) знайдемо

$$v = \sqrt{2\frac{\gamma M}{r}}. \qquad (2.79)$$

Аналізуючи цю формулу, приходимо до висновку: параболічна швидкість тіла обернено пропорціональна квадратному кореню з відстані від цього тіла до центра Землі. Коли відстань між запущеним у Космос тілом і центром Землі збільшиться, наприклад, у дев'ять раз, то швидкість цього тіла стане в три рази меншою.

Початкову параболічну швидкість тіла (тобто швидкість виходу ракети на орбіту) знайдемо, замінивши у (2.79) r на радіус Землі $r_З$, а $\frac{\gamma Mm}{r_З^2}$ на вагу тіла mg. Дістанемо

$$v^{(0)}_{\text{пар}} = \sqrt{2\gamma\frac{M}{r_З}} = \sqrt{2gr_З}. \qquad (2.80)$$

Підставляючи тут $r_З = 6370$ *км*, $g = 9{,}80$ *м/сек*^{2}, матимемо

$$v^{(0)}_{\text{пар}} = 11{,}2 \text{ км/сек}.$$

Швидкість $v = \frac{r_З}{R}\sqrt{gR}$ називається *першою космічною швидкістю;* її треба надати тілу, щоб воно стало супутником Землі і рухалось по коловій орбіті. Коли орбіта близька до поверхні Землі, то $R = r_З$ і $v = \sqrt{gr_З} \approx 8$ *км/сек*. Швидкість $v^{(0)}_{\text{пар}} = \sqrt{2gr_З}$ називається *другою космічною швидкістю;* цю швидкість, що дорівнює 11,2 *км/сек*, треба надати тілу для того, щоб воно подолало земне тяжіння. Першій радянській космічній ракеті було надано швидкість, більшу за другу космічну.

§ 4. ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ

Розглядаючи задачу Кеплера — Ньютона, ми вважали, що центральне тіло (Сонце, Земля, ядро атома) залишається нерухомим.

Однак обидва взаємодіючі тіла (планета і Сонце, штучний супутник і Земля, електрон і ядро) цілком рівноправні, тому й рух їх повинен бути взаємним. Нехтувати рухом центрального тіла можна лише тоді, коли можна нехтувати масою m точки порівняно з масою M центрального тіла. Розглянемо рух точок

з масами m і M, які взаємодіють за законом $f = \frac{\lambda}{r^2}$, де r—відстань між точками, λ — стала, що дорівнює — γmM у випадку сили тяжіння або e_1e_2 у випадку кулонівської сили електричної взаємодії. Нехай точки рухаються в площині xOy (для цього, очевидно, достатньо, щоб вектори початкової швидкості точок m і M містились у площині xOy). Положення точок відносно нерухомого початку визначається радіусами-векторами $\boldsymbol{r}_1$ і $\boldsymbol{r}_2$, а відносне їх положення — їх різницею (рис. 43)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2.$$

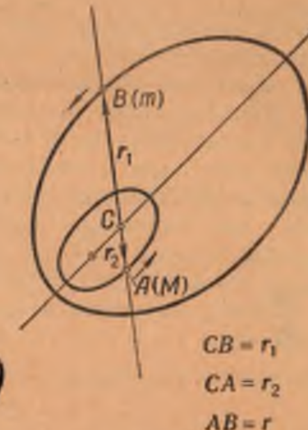

Рис. 43.

Рівняння руху точок мають вигляд:

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{f}_{21},$$

$$\frac{d}{dt}(M\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{f}_{12},$$

де, наприклад, $\boldsymbol{f}_{21}$ — сила, з якою друга точка з масою M діє на першу точку з масою m. Додаючи рівняння руху обох точок, дістанемо

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2) = 0, \qquad (2.81)$$

бо за третім законом Ньютона між силами взаємодії справджується співвідношення $\boldsymbol{f}_{21} = -\boldsymbol{f}_{12}$. З рівності (2.81) робимо висновок, що

$$m\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2 = \mathrm{const}, \qquad (2.82)$$

тобто геометрична сума імпульсів (кількостей руху) обох точок залишається сталою.

Ми дістали закон збереження імпульса для матеріальної системи, що складається з двох точок. Щоб надати цьому закону простішої форми, введемо поняття про центр інерції (центр мас) системи двох точок.

Центром інерції двох матеріальних точок називається геометрична точка C, положення якої в просторі визначається радіусом-вектором

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2}{M + m}. \qquad (2.83)$$

Центр інерції ділить відрізок AB між матеріальними точками на частини, які обернено пропорціональні масам. Дійсно, з формули (2.83) виходить, що

$$M(\boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_2) = m(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_C),$$

або

$$\cancel{M \cdot AC = m \cdot CB}.$$

Звідси робимо висновок: 1) точка C лежить на відрізку AB, бо $AC \parallel CB$; 2) точка C ділить відрізок AB на частини, величини яких обернено пропорціональні до мас матеріальних точок $AC : CB = m : M$.

З допомогою поняття центра інерції теорема (2.82) про збереження імпульса набере такого вигляду (диференціюємо по часу рівність (2.83), що визначає радіус-вектор $\boldsymbol{r}_C$):

$$m\boldsymbol{v}_1 + M\boldsymbol{v}_2 = (M + m)\,\boldsymbol{v}_C = \mathrm{const},$$

тобто *центр інерції двох взаємодіючих матеріальних точок, які не зазнають впливу навколишніх тіл, рухається рівномірно і прямолінійно або перебуває в спокої.*

Уведемо тепер систему координат з початком у центрі інерції і покажемо, що в цій системі відліку траєкторії Сонця і планети (або ядра і електрона) є подібними еліпсами, лінійні розміри яких обернено пропорціональні їх масам. Рух відбувається так, що планета і Сонце розміщені з протилежних боків від початку координат на одній прямій, яка обертається і проходить завжди через нерухомий початок координат — центр інерції.

Щоб упевнитись в цьому, запишемо рівняння руху точок m і M так:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_1 = +f(r)\cdot\boldsymbol{r}^0,$$
$$M\ddot{\boldsymbol{r}}_2 = -f(r)\cdot\boldsymbol{r}^0,$$

де $\boldsymbol{r}^0$ — одиничний вектор, напрямлений від точки C до точки m, а $f(r) = \frac{\lambda}{r^2}$. Для планети, що рухається навколо Сонця, $\lambda = -\gamma mM$, а для електричних зарядів $\lambda = e_1 \cdot e_2$. Домножимо перше рівняння на $-M$, друге на $+m$ і додамо їх; дістанемо

$$mM(\ddot{\boldsymbol{r}}_2 - \ddot{\boldsymbol{r}}_1) = -(m + M)\,f(r)\cdot\boldsymbol{r}^0,$$

або

$$\frac{mM}{m+M}\ddot{\boldsymbol{r}} = f(r)\cdot\boldsymbol{r}^0, \qquad (2.84)$$

де $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ — вектор, що сполучає точку M з точкою m.

Якщо проаналізувати знайдене рівняння (2.84) само по собі, незалежно від викладеної вище теорії, то треба визнати, що за своєю математичною будовою воно є рівнянням типу «маса $\times$ $\times$ прискорення = сила», тобто рівнянням абсолютного руху уявлюваної матеріальної точки, положення якої визначається радіусом-вектором $\boldsymbol{r}$, яка має так звану «зведену масу»

$$\mu = \frac{mM}{m+M} = \frac{m}{\frac{m}{M}+1} \qquad (2.85)$$

і на яку діє центральна сила $f(r)$, напрямлена до нерухомого центра. Але сила $f(r)$, за умовою, обернено пропорціональна квадрату віддалі до цього центра. У такому разі, як доведено

в § 2, для цієї уявлюваної точки справджуються всі три закони Кеплера. Якщо мати на увазі рух планет навколо Сонця, то треба покласти $f(r) = -\gamma\frac{mM}{r^2}$; матимемо рівняння

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma\frac{m+M}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}^0, \qquad (2.86)$$

тоді як при нерухомому Сонці рівняння було б таким:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\gamma\frac{M}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}^0. \qquad (2.87)$$

Порівнюючи між собою рівняння (2.86) і (2.87), помічаємо, що третій закон Кеплера, який ми записували у формі (2.69), $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M}$, точніше можна подати рівнянням

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma(m+M)}. \qquad (2.88)$$

Для різних планет відношення $\frac{T^2}{a^3}$ трохи різняться між собою, бо в знаменник (2.88) входить доданок $m + M$.

Радіуси-вектори $\boldsymbol{r}_1$ і $\boldsymbol{r}_2$ відрізняються від $\boldsymbol{r}$ тільки сталими множниками. Дійсно, з рівняння

$$m\boldsymbol{r}_1 + M\boldsymbol{r}_2 = 0,$$

з якого видно, що центр інерції знаходиться в початку координат, і з рівняння

$$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}$$

випливає, що

$$\boldsymbol{r}_1 = \frac{M}{m+M}\cdot\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}_2 = -\frac{m}{m+M}\cdot\boldsymbol{r}.$$

Оскільки $\boldsymbol{r}_1$ і $\boldsymbol{r}_2$ відрізняються від $\boldsymbol{r}$ тільки сталими множниками, то все, що справедливе для руху уявлюваної точки, справедливе і для руху точок m та M. Отже, і для точок m та M в їх русі відносно системи відліку з початком у центрі інерції справджуються закони Кеплера.

Вважати, що центральне тіло нерухоме, це те саме, що ототожнювати зведену масу μ з масою точки m. Це припустимо лише тоді, коли в (2.85) у знаменнику можна нехтувати величиною відношення $\frac{m}{M}$ порівняно з одиницею.

Точність спектроскопічних вимірювань така висока, що дає змогу виявити похибку від нехтування відношенням мас електрона і ядра атома.

Щоб мати уявлення про відношення $\frac{m}{M}$ для планет сонячної системи, наведемо цифрові дані про масу Сонця і планет, беручи умовно масу Землі за одиницю: Сонце — 332 000; Меркурій—0,036; Венера—0,85; Земля—1; Марс—0,106; Юпітер—314; Сатурн—94; Уран — 14,4; Нептун — 17; Плутон — 0,94.

Розділ VII

ДИНАМІКА НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1. Вступні зауваження. Матеріальна точка називається *невільною*, коли її рух обмежений деякими наперед заданими умовами. Можна, наприклад, поставити попередню вимогу, щоб рух точки відбувався по заданій поверхні або заданій кривій. Прикладами невільних точок будуть: палець і повзун кривошипа в кривошипно-шатунному механізмі (перший рухається по дузі кола, другий — по прямій); тягарі регулятора Уатта (рухаються по поверхні сфери); тягар, що коливається, як маятник, підвішений на нитці, та ін.

Обмеження руху матеріальної точки називається *в'яззю*. В'язь зумовлюється фізичною взаємодією даної точки з певними тілами. Нерідко термін «в'язь» застосовують до самих цих тіл. Сила, з якою тіло-в'язь діє на рухому матеріальну точку, називається *реакцією в'язі*. Реакції в'язей називають ще *пасивними* силами, на відміну від *заданих* сил, *активних*; у цій термінології підкреслено пасивний характер реакцій в'язей, що є фактично силами пасивної протидії.

В основі динаміки невільної матеріальної точки лежить аксіома про звільнення від в'язей:

Рух матеріальної точки не зміниться, коли звільнити її від в'язі, приклавши до точки силу, що дорівнює реакції в'язі.

Отже, *кожну невільну точку можна формально розглядати як вільну, якщо до неї прикласти реакцію в'язі.*

Нехай точка рухається по поверхні, що визначається рівнянням

$$\Phi(x, y, z, t) = 0. \tag{2.89}$$

Це рівняння називається *рівнянням в'язі*. Доки точка залишається на поверхні, її координати повинні задовольняти рівняння (2.89).

В'язь називається *нестаціонарною*, коли час t входить явно до рівняння, яким її задано. Коли час t явно до рівняння не входить, в'язь називається *стаціонарною*.

Силу, з якою поверхня діє на матеріальну точку, яка рухається по поверхні, розкладемо на дві складові: нормальну до поверхні і дотичну (силу тертя). Дотичну складову прийнято відносити до активних сил. Тому за реакцію в'язі приймають нормальну складову силу дії поверхні на точку.

2. Рух точки по гладенькій поверхні. Розглянемо рух невільної точки у випадку, коли стаціонарна в'язь здійснена гладенькою поверхнею, тобто коли сила тертя дорівнює нулю. Нехай рівняння поверхні буде $\Phi(x, y, z) = 0$. Застосовуючи аксіому про звільнення від в'язі, прикладемо до точки силу, що дорівнює нормальній реакції $\boldsymbol{N}$ в'язі. За другим законом Ньютона рівняння руху точки буде

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N}, \tag{2.90}$$

де $\boldsymbol{f}$ — рівнодійна заданих активних сил, а $\boldsymbol{N}$ — реакція в'язі.

Слід звернути увагу на те, що застосування аксіоми про звільнення від в'язі вносить глибокі зміни в постановку задачі. Справді, у початковій постановці задачі треба було знайти закон руху точки під дією заданої сили $\boldsymbol{f}$, коли наперед відомо, що траєкторія точки лежить на поверхні $\Phi(x, y, z) = 0$. Але після застосування аксіоми та сама задача формулюється інакше: знайти закон руху вільної точки під дією заданої активної сили $\boldsymbol{f}$ і додаткової (пасивної) сили $\boldsymbol{N}$, напрям якої відомий (сила $\boldsymbol{N}$ нормальна до поверхні $\Phi(x, y, z) = 0$), а величину треба знайти в процесі розв'язання задачі.

Звертаємо увагу також і на те, що задача про рух невільної матеріальної точки виявилась складнішою, ніж задача про рух вільної точки, коли закон руху шукають просто по заданій силі, без ускладнюючих додаткових умов.

Проектуючи ліву і праву частини рівняння (2.90) на нерухомі осі декартової системи координат, дістанемо

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + N_x, \\ m\ddot{y} &= Y + N_y, \\ m\ddot{z} &= Z + N_z, \end{aligned} \tag{2.91}$$

де X, Y, Z — проекції активної сили $\boldsymbol{f}$, а N_x, N_y, N_z — проекції нормальної реакції $\boldsymbol{N}$ поверхні, що дорівнюють

$$N_x = N\cos(\widehat{\boldsymbol{N}, x}),\quad N_y = N\cos(\widehat{\boldsymbol{N}, y}),\quad N_z = N\cos(\widehat{\boldsymbol{N}, z}).$$

Як відомо з курсу математики, напрямні косинуси нормалі до поверхні, що задана рівнянням $\Phi(x, y, z) = 0$, такі:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{N}, x}) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\Delta\Phi},\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{N}, y}) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\Delta\Phi},\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{N}, z}) = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\Delta\Phi}, \tag{2.92}$$

де $\Delta\Phi = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}$ — так званий перший диференціальний параметр функції $\Phi(x, y, z)$.

Підставивши значення напрямних косинусів нормалі (2.92) в диференціальні рівняння руху (2.91), надамо останнім такого вигляду:

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad m\ddot{z} = Z + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \tag{2.93}$$

де

$$\lambda = \frac{N}{\Delta\Phi}.$$

Це — диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки *у формі рівнянь Лагранжа першого роду.* З цих трьох рівнянь і з рівняння в'язі $\Phi(x, y, z) = 0$ можна визначити всі чотири невідомі: координати x, y, z рухомої точки і множник Лагранжа λ як функції часу t; після цього можна знайти і реакцію поверхні: $N = \lambda\Delta\Phi$.

3. Рух точки по гладенькій кривій. Розглянемо рух точки по нерухомій плоскій кривій, нехтуючи тертям (прикладом може бути рух тягаря, через який продіто дротину). Нехай в'язь задано рівнянням $\Phi(x, y) = 0$ і активна сила $\boldsymbol{f}$ лежить у площині xOy.

Диференціальні рівняння руху точки дістанемо тим самим методом, що й раніше:

$$m\ddot{x} = X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}.$$

Розв'язуючи ці рівняння разом з рівнянням $\Phi(x, y) = 0$, знайдемо всі невідомі x, y, λ як функції часу t, а потім і реакцію в'язі:

$$N = \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2}.$$

У розглядуваному випадку дуже зручно застосувати також диференціальні рівняння руху в натуральній формі (розд. III). Маємо:

$$m\frac{dv}{dt} = f_\tau, \quad m\frac{v^2}{\rho} = f_n + N_n, \tag{2.94}$$

де N_n — проекція реакції в'язі на напрям додатно зорієнтованої нормалі. Нагадаємо, що за додатний напрям нормалі вибирають напрям до центра кривизни траєкторії, а за додатний напрям дотичної — напрям у бік зростання дугової координати.

4. Рух точки по поверхні при наявності тертя. У цьому випадку в правих частинах диференціальних рівнянь руху точки будуть подані і проекції сили тертя $\boldsymbol{T}$:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x} + T_x \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y} + T_y \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z} + T_z \end{aligned}\right\} \tag{2.95}$$

Але сила тертя $\boldsymbol{T}$ напрямлена прямо протилежно вектору $\boldsymbol{v}$ швидкості, і тому проекції T_x, T_y, T_z можна подати так:

$$T_x = T\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{T}, x}) = -T\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{v}, x}) = -T\cdot\frac{v_x}{v} = -\frac{T}{v}\cdot\frac{dx}{dt},$$

і, аналогічно,

$$T_y = -\frac{T}{v}\cdot\frac{dy}{dt}, \quad T_z = -\frac{T}{v}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

Підставивши величини T_x, T_y, T_x в рівняння (2.95) і замінивши в останніх множник λ його значенням, дістанемо

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \frac{N}{\Delta\Phi}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{T}{v}\cdot\frac{dx}{dt} \\ m\ddot{y} &= Y + \frac{N}{\Delta\Phi}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{T}{v}\cdot\frac{dy}{dt} \\ m\ddot{z} &= Z + \frac{N}{\Delta\Phi}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{T}{v}\cdot\frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{2.96}$$

Приєднуючи до цих трьох рівнянь ще рівняння в'язі $\Phi(x, y, z) = 0$ і рівняння $T = kN$, що виражає відомий з фізики закон тертя (k — коефіцієнт тертя), можна знайти всі п'ять невідомих функцій часу: x, y, z, N і T.

§ 2. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ НЕВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Усі основні теореми динаміки точки можна застосувати і до вивчення руху невільної точки, якщо використати аксіому про звільнення від в'язей. Покажемо це на прикладі теореми про зміну кінетичної енергії у випадку, коли матеріальна точка рухається по гладенькій поверхні або по кривій, яка нерухома в просторі.

За теоремою про приріст кінетичної енергії для звільненої від в'язей точки маємо:

$$d\frac{mv^2}{2} = \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r}, \tag{2.97}$$

де $\boldsymbol{f}$ — рівнодійна активних сил.

Але

$$\boldsymbol{N}\cdot d\boldsymbol{r} = 0,$$

бо реакція $\boldsymbol{N}$ нерухомої поверхні або кривої перпендикулярна до елементарного переміщення $d\boldsymbol{r}$ точки. Тому рівняння (2.97) перепишеться так:

$$d\frac{mv^2}{2} = \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{r}. \tag{2.98}$$

Отже, *у випадку стаціонарної в'язі теорема про зміну кінетичної енергії для невільної матеріальної точки формально збігається з цією теоремою для вільної точки: приріст кінетичної енергії невільної матеріальної точки на нескінченно малому її переміщенні дорівнює елементарній роботі рівнодійної активних сил на тому самому переміщенні.*

Приклад 1. Прикріплений до нитки тягар коливається у вертикальній площині по дузі кола, обертаючись навколо закріпленого кінця нитки. Знайти натяг нитки N в найнижчому положенні тягаря на траєкторії, якщо амплітуда коливань дорівнює φ_0 радіанів. Тертям знехтувати.

За другим законом Ньютона маємо:

$$m\frac{v^2}{l} = N - mg, \tag{2.99}$$

де m — маса тягаря, $\frac{v^2}{l}$ — його прискорення (v — швидкість тягаря, l — довжина нитки), N — напрямлена вгору реакція нитки, mg — вага тягаря.

За доведеною тільки що теоремою приріст кінетичної енергії матеріальної точки при переміщенні з вищого її положення до найнижчого дорівнює відповідній роботі сили тяжіння:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\,(1 - \cos\varphi_0). \tag{2.100}$$

Виключаючи з цих двох рівнянь v^2, дістанемо

$$N = mg\left(1 + 4\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{2.101}$$

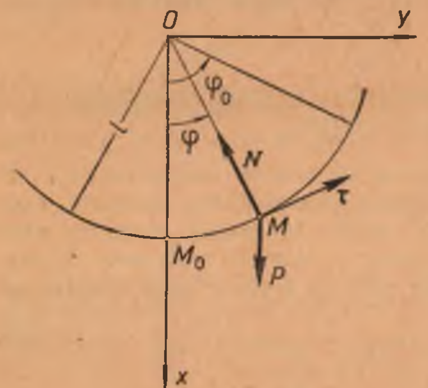

Рис. 44.

Якщо $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, то $N = 3mg$, тобто при коливаннях тягаря з амплітудою $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ найбільший натяг нитки дорівнює потрійній вазі тягаря.

Приклад 2. Розглянемо одне з застосувань теореми про зміну момента кількості руху до невільної матеріальної точки: знайдемо рівняння руху математичного маятника.

Математичним маятником називається матеріальна точка, прикріплена до абсолютно твердого невагомого стержня, який обертається у вертикальній площині в однорідному полі тяжіння навколо горизонтальної осі, що проходить через нерухомий кінець стержня. У попередньому прикладі фактично розглядався теж математичний маятник.

Положення маятника M нехай визначається кутом φ відхилення стержня OM маятника від вертикалі OM_0; напрям відліку кута φ відповідає правій системі координат (рис. 44). Проекція вектора швидкості маятника M на напрям додатно зорієнтованої дотичної τ до траєкторії дорівнює

$$v_\tau = l\dot{\varphi},$$

а момент кількості руху маятника відносно осі Oz буде

$$mv_\tau \cdot l = ml^2\dot{\varphi}.$$

Моменти прикладених до маятника сил такі:
$\mathrm{mom}_z\, N = 0$ (бо лінія дії сили N перетинає вісь Oz),

$$\mathrm{mom}_z\, p = -pl\sin\varphi = -mgl\sin\varphi.$$

За теоремою про зміну момента кількості руху відносно осі Oz напишемо рівність

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl\sin\varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Це й є диференціальне рівняння руху математичного маятника.

У випадку малих коливань, коли кут відхилення маятника від вертикалі настільки малий, що в межах допустимої похибки можна покласти

$$\sin\varphi \approx \varphi,$$

рівняння руху буде

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Загальний інтеграл цього рівняння має, як відомо, вигляд

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \alpha\right),$$

де φ_0 — амплітуда кута відхилення стержня маятника. Отже, при малих відхиленнях стержня від положення рівноваги маятник здійснює прості гармонічні коливання. Період цих коливань буде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 3. ПРИНЦИП ГЕРМАНА — ЕЙЛЕРА — ДАЛАМБЕРА

1. Сила інерції матеріальної точки. Прагнучи зберегти свій стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху, матеріальна точка за властивістю інерції чинить опір усякій спробі змінити цей стан. Інертність проявляється або в опорі точки, коли їй намагаються надати прискорення, або в натиску, коли її намагаються зупинити.

Цей опір або цей натиск прикладені до того тіла, яке своєю дією спричинює прискорення даної точки. Наприклад, дія причепа на автомашину прикладена до автомашини і проявляється як опір цього причепа при збільшенні швидкості і як натиск при зменшенні її. При русі вагона на закругленні вагон тисне на зовнішню рейку, яка своєю дією відхиляє вагон від неприскореного рівномірного руху по прямій.

У складніших випадках вже не одне, а декілька тіл виступають у ролі тих, що спричинюють прискорення матеріальної точки, і ця дія може здійснюватись на віддалі. Кожне з тіл діє на матеріальну точку — прискорює її, а ця точка за третім законом Ньютона протидіє тілам з рівними і протилежно напрямленими силами.

За другим законом Ньютона рівнодійна сил, прикладених до точки, дорівнює

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{w},$$

де m — маса точки, $\boldsymbol{w}$ — її прискорення.

Очевидно, якщо в довільній точці простору побудувати вектори, що дорівнюють силам протидії, прикладеним до тих тіл, які своїми діями спричинюють прискорення матеріальної точки, і додати ці вектори геометрично, то знайдений «головний» вектор сил протидії за третім законом Ньютона дорівнюватиме $-\boldsymbol{f}$, або $-m\boldsymbol{w}$.

У зв'язку з цим дамо таке означення: *силою інерції матеріальної точки називається сила* $\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{w}$, *яка за величиною дорівнює добутку маси точки на її прискорення, а напрямлена протилежно прискоренню точки.*

Леонард Ейлер (*1707—1783*).

За виразом Лапласа, Ейлер був загальним учителем усіх математиків другої половини XVIII ст. Його наукова спадщина— понад 850 праць — це найважливіші в свій час дослідження з математики, механіки, теорії пружности, математичної фізики, оптики, балістики, теорії машин, гідромеханіки, астрономії і т. д. Ейлер дуже довго жив і працював у Росії як академік Петербурзької Академії наук.

Сила інерції матеріальної точки є головний вектор сил протидії, прикладених до тіл, які своїми діями спричинюють прискорення точки. У цьому можна бачити фізичний смисл введеного поняття.

Поняття сили інерції для вільної і невільної точок ідентичні, бо в'язі виступають як тіла, які рівноправні з іншими тілами, що своїми діями зумовлюють прискорення матеріальної точки.

Користуючись поняттям сили інерції, розглянемо тепер принцип, який дуже часто застосовується в механіці.

2. Принцип Германа — Ейлера — Даламбера для матеріальної точки. Рух невільної матеріальної точки зручно вивчати за допомогою принципу Германа— Ейлера— Даламбера: *якщо точку, яка перебуває в русі, зупинити в який-небудь момент часу і додати до рушійних активних сил силу інерції, то точка залишиться в рівновазі, а реакція в'язі при цьому виявиться такою самою, як у розглядуваному положенні при русі точки.*

Інакше кажучи, реакція, яку розвиває в'язь, коли точка рухається під дією активної сили $\boldsymbol{f}$, дорівнює тій реакції в'язі, яка розвивалася б у випадку спокою точки під дією активної сили і сили інерції.

Справедливість принципу випливає безпосередньо з означення поняття сили інерції, а формально в правильності висловленого твердження можна ще впевнитись так. Якщо на невільну

матеріальну точку з масою m діє активна сила $\boldsymbol{f}$, то, застосовуючи аксіому про звільнення від в'язей і другий закон Ньютона, дістанемо

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N},$$

або

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{I} = 0, \tag{2.102}$$

де $\boldsymbol{I} = -m\boldsymbol{w}$.

Отже, геометрична сума активної сили $\boldsymbol{f}$, пасивної сили $\boldsymbol{N}$ і сили інерції $\boldsymbol{I}$ дорівнює нулю.

Приклад 1. Нехай масивний візок скочується вниз по похилій площині; масою коліс і тертям знехтуємо. Рух візка відбувається під дією активної сили ваги $\boldsymbol{p}$. Якщо візок зупинити і прикласти до рушійної сили $\boldsymbol{p}$ ще силу його інерції, то візок залишиться у спокої, а реакція похилої площини виявиться такою самою, як і при русі візка. Прикладена до візка після його зупинки сила інерції дорівнює добутку маси візка на його прискорення і напрямлена *протилежно прискоренню* візка (тобто паралельно похилій площині вгору).

Інакше, при русі візка під дією активної сили ваги розвивається така реакція $\boldsymbol{N}$ похилої площини, яка була б і при спокої візка, якби до нього, крім ваги, була прикладена додатково сила, що дорівнює силі його інерції.

Приклад 2. Розглянемо рух прив'язаної до мотузки гирі, яка обертається по колу у вертикальній площині. На гирю діє вертикально вниз активна сила ваги $\boldsymbol{p}$ (опором повітря нехтуємо). У момент, коли гиря проходить через верхню точку кола, прискорення гирі дорівнює $\frac{v^2}{r}$ і напрямлене вниз, так що сила інерції гирі у верхньому положенні дорівнює $\frac{mv^2}{r}$ і напрямлена вгору (*протилежно прискоренню* гирі).

Якщо гирю зупинити у верхньому положенні і прикласти вгору силу, що дорівнює силі інерції $\frac{mv^2}{r}$, то гиря залишиться в спокої, а реакція мотузки буде такою самою, як і при русі гирі.

Інакше, при русі гирі під дією активної сили ваги $\boldsymbol{p}$ розвивається така реакція мотузки, яка була б при спокої гирі, якби до неї, крім ваги, була прикладена додатково сила, що дорівнює силі інерції гирі. При цій рівновазі гирі сили, що діють униз (вага p і реакція мотузки N), зрівноважені прикладеною силою, що напрямлена вгору:

$$p + N = m\frac{v^2}{r},$$

звідки

$$N = \frac{mv^2}{r} - p.$$

Розділ VIII

ВІДНОСНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Вступні зауваження. У всіх попередніх розділах динаміки ми вивчали механічний рух відносно інерціальної системи відліку. У динаміці такий рух називають *абсолютним*. Основними законами абсолютного руху є закони Ньютона.

Усяка система відліку, рух якої не є поступальним рівномірним і прямолінійним відносно інерціальної системи, називається *неінерціальною*. Механічний рух відносно неінерціальної системи відліку в динаміці називають *відносним*.

Система координат, що зв'язана з будь-яким тілом природи (з Землею, Сонцем і т. д), завжди є неінерціальною, і тому вивчати механічні рухи з допомогою законів Ньютона, які самі по собі є точними, можна тільки наближено. Ступінь наближення може бути кращим або гіршим залежно від характеру досліджуваного відносного руху.

Практика показує, що для рухів, віднесених до геліоцентричної системи відліку, закони Ньютона виконуються майже завжди з надзвичайною точністю. Це означає, що геліоцентричну систему відліку можна вважати практично інерціальною, а рухи, віднесені до цієї системи, — практично абсолютними.

Але рухи тіл відносно Землі не завжди проявляють себе як практично абсолютні, тобто вони не завжди збігаються з рухами, теоретично обчисленими на основі законів Ньютона. Так, рух штучного супутника Землі виявляється практично абсолютним відносно зірок (відносно геліоцентричної системи відліку), але не відносно Землі; те саме можна сказати й про політ балістичного чи космічного снаряда або про коливання тягаря, прикріпленого до дротини (маятник Фуко).

Тому виникає потреба знайти основний закон руху матеріальної точки відносно неінерціальної системи відліку, тобто поряд з динамікою абсолютних рухів побудувати ще динаміку відносних рухів.

§ 1. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ ВІДНОСНОГО РУХУ

Нехай рух неінерціальної системи відліку S' відносно інерціальної системи S є відомим. Знайдемо закон відносного руху матеріальної точки, на яку діє активна сила $\boldsymbol{f}$ і пасивна сила $\boldsymbol{N}$.

За другим законом Ньютона для руху точки відносно інерціальної системи відліку маємо:

$$m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N}, \qquad (2.103)$$

де $\boldsymbol{f}$ — прикладена до точки активна сила, а $\boldsymbol{N}$ — реакція в'язі. Абсолютне прискорення точки за теоремою Коріоліса рівне

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_c. \qquad (2.104)$$

Підставляючи це значення прискорення у формулу (2.103), одержимо

$$m(\boldsymbol{w}_r + \boldsymbol{w}_e + \boldsymbol{w}_c) = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N},$$

звідки

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N} - m\boldsymbol{w}_e - m\boldsymbol{w}_c. \qquad (2.105)$$

Це і є *основне рівняння відносного руху* матеріальної точки. Через те що рух неінерціальної системи відліку відносно інерціальної вважається відомим, то переносне прискорення матеріальної точки $\boldsymbol{w}_e$ завжди можна знайти. Поворотне прискорення за теоремою Коріоліса з кінематики дорівнює

$$\boldsymbol{w}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r,$$

де $\boldsymbol{\omega}$ — миттєва кутова швидкість неінерціальної системи відліку, а $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість матеріальної точки.

Вивчення питань відносного руху матеріальної точки зводиться до застосування рівняння (2.105).

Рівняння (2.105) можна переписати так:

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{I}_e + \boldsymbol{I}_c, \qquad (2.106)$$

де

$$\boldsymbol{I}_e = -m\boldsymbol{w}_e, \quad \boldsymbol{I}_c = -m\boldsymbol{w}_c. \qquad (2.107)$$

Вектор $\boldsymbol{I}_e$ називається *силою інерції переносного руху;* вектор $\boldsymbol{I}_c$ — *силою інерції Коріоліса.*

Отже, в основному рівнянні (2.106) відносного руху до активних і пасивних сил, що діють на точку, додаються геометрично ще так звані сили інерції: $\boldsymbol{I}_e$ — сила інерції переносного руху і $\boldsymbol{I}_c$ — сила інерції Коріоліса.

Звернемо увагу на якісну відмінність між активними і пасивними силами, що діють на точку, і силами інерції. Сили інерції не належать до класу тих, які розглядаються в ньютонівській механіці абсолютного руху. Справді, вони не змінюють кількості руху матеріальної точки, виміряного відносно інерціальної системи відліку.

Але сили інерції можна формально розглядати як причину того, що відносне прискорення точки (або відносний рух) відрізняється від абсолютного; тоді зв'язану з цим фактом появу деяких додаткових механічних ефектів, що супроводжують відносний рух (ці ефекти відсутні в русі абсолютному при тих самих силах $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{N}$ і тих самих початкових умовах), можна пояснювати «дією на точку сил інерції» — переносної і коріолісової. Приклади згаданих тут ефектів розглянуто нижче в ряді випадків.

Запровадження сил інерції — це фактично тільки своєрідний спосіб врахування властивості інертності тіл. Отже, врешті решт це є своєрідний спосіб врахування властивості незнищуваності руху, пристосований до спеціального випадку, коли використовують неінерціальну систему координат.

Глибокий фізичний зміст сил інерції розкривається в загальній теорії відносності Ейнштейна*.

* Макс Борн, Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы, ОНТИ, 1938, гл. VII (популярний нарис).

§ 2. ВІДНОСНИЙ СПОКІЙ ТІЛА ПОБЛИЗУ ПОВЕРХНІ ЗЕМЛІ

На підвішений до нитки тягар діють дві сили: сила притягання тіла Землею f і сила натягу нитки N. Якщо Землю вважати однорідною кулею (або кулею з радіальним законом розподілу густини), то сила f буде напрямлена по радіусу до центра земної кулі. Величину цієї сили можна визначити за законом всесвітнього тяжіння: $f = \gamma \frac{mM}{r^2}$. Сила N натягу нитки не дорівнює і не протилежна силі f. Справді, завдяки добовому обертанню Землі підвішений до нитки тягар перебуває в рівномірному русі по колу радіуса $r = R \cos \varphi$ і, отже, на тягар діє доцентрова сила $m\omega^2 r$, яка напрямлена до центра C кола добового обертання. У даному випадку доцентрова сила $m\omega^2 r$ є геометричною сумою сил f і N, що діють на тягар.

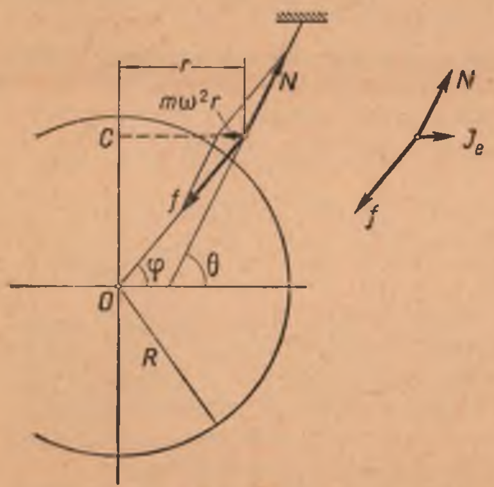

Рис. 45.

Лінія, уздовж якої розміщується висок (нитка з тягарем), називається *вертикаллю.* Вертикаль не розміщується по радіусу Землі, а утворює з площиною екватора кут θ, який називається *географічною широтою* того місця, де підвішений тягар (рис. 45).

Основне рівняння відносного спокою можна дістати з рівняння відносного руху (2.106), якщо в ньому покласти

$$\boldsymbol{v}_r = 0, \ \boldsymbol{w}_r = 0, \ \boldsymbol{I}_c = -2m\boldsymbol{w}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r = 0,$$

що дає

$$\boldsymbol{f} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{I}_e = 0. \qquad (2.108)$$

Абсолютний спокій точки під дією двох сил можливий лише тоді, коли ці сили рівні між собою за величиною і прямо протилежні за напрямом (про такі сили говорять, що вони взаємно зрівноважені). Але *відносний* спокій тягаря на Землі буває, як видно з попереднього, тоді, коли прикладені до тягаря сили $\boldsymbol{f}$ і $\boldsymbol{N}$ не зрівноважені.

Згідно з рівнянням (2.108) і викладеною раніше теорією, ми можемо розглядати відносний спокій як такий, в якому прикладені до тягаря активна сила притягання до Землі $\boldsymbol{f}$ і пасивна сила натягу нитки $\boldsymbol{N}$ «зрівноважені» дією сили інерції $\boldsymbol{I}_e$ переносного руху тягаря.

Отже, *у випадку відносного спокою матеріальної точки геометрична сума трьох сил — активної, пасивної і переносної сили інерції — дорівнює нулю.*

На Землі переносна сила інерції виступає як відцентрова, бо рух Землі можна розглядати як рівномірне обертання навколо нерухомої осі.

§ 3. ВАГА ТІЛА. ФОРМУЛА $p = mg$

Вагу тіла можна виміряти на пружинних вагах. Це вимірювання визначає, однак, не силу $\boldsymbol{f}$ притягання тіла до Землі, а лише ту частину $\boldsymbol{p}$ цієї сили $\boldsymbol{f}$, яка проявляється статично, бо зважування на вагах не дає змоги виявити другу частину сили $\boldsymbol{f}$, яка проявляється в переносному (доцентровому) прискоренні $\omega^2 r$ тіла, обумовленому добовим обертанням тіла разом з Землею. Таким чином, під вагою тіла слід розуміти ту складову сили притягання тіла до Землі, яка може проявлятись статично, обумовлюючи натяг нитки, на якій це тіло підвішене, або тиск на підставку, на якій тіло перебуває в спокої. Отже, вага тіла, згідно з її означенням, дорівнює (рис. 46)

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f} - m\boldsymbol{w}_e.$$

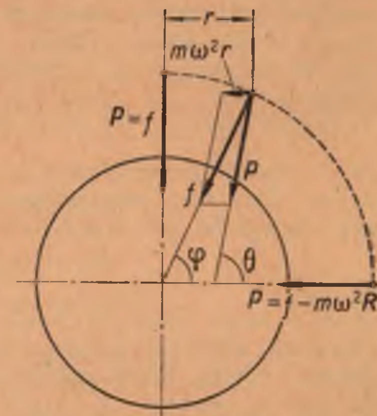

Рис. 46.

На екваторі сила $\boldsymbol{f}$ і її дві складові — вага $\boldsymbol{p}$ і доцентрова сила $m\boldsymbol{w}_e$ — напрямлені в один бік до центра Землі. При цьому доцентрова сила, що дорівнює $m\omega^2 r$, на екваторі досягає разом з r найбільшого значення, що дорівнює $m\omega^2 R$. Отже, вага тіла на екваторі виявляється найменшою і дорівнює $p = f - m\omega^2 R$. На полюсі доцентрова сила дорівнює нулю (радіус кола добового обертання дорівнює нулю), і сила притягання f проявляється повністю як вага, тобто $p = f$.

Перейдемо тепер до розгляду формули $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{g}$, яка постійно використовується в механіці. Відмінна властивість поля тяжіння, якої не має ніяке інше з відомих у фізиці силових полів, полягає в тому, що в заданому полі тяжіння сила, якої зазнає тіло, пропорціональна його інертній масі. Звідси і, на підставі другого закону Ньютона, робимо висновок, що при однакових початкових умовах (положенні і швидкості) усі вільні матеріальні точки, незалежно від їх маси, рухаються в даному полі тяжіння абсолютно однаково. Дійсно, якщо рівняння руху двох точок з різними масами, тобто рівняння

$$m_1 \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{f}_1, \quad m_2 \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{f}_2,$$

переписати у вигляді

$$w_1 = \frac{f_1}{m_1}, \quad w_2 = \frac{f_2}{m_2}$$

і скористатись пропорціональністю сили гравітаційного поля та інертної маси, то матимемо

$$w_1 = w_2.$$

Але якщо прискорення від маси не залежить, то рухи різних точок будуть, очевидно, тотожними, коли початкові умови рухів однакові. При застосуванні до поля тяжіння Землі, яке на віддалях у кілька кілометрів можна вважати однорідним, це означає, що всі тіла, незалежно від їх маси, падають на Землю з одним і тим самим сталим прискоренням g_0; через це для всіх тіл, що падають біля поверхні Землі у вакуумі, буде справедлива рівність

$$f = mg_0,$$

де f — сила притягання тіла до Землі, а g_0 — абсолютне прискорення. Величину абсолютного прискорення можна знайти з закону всесвітнього тяжіння

$$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2},$$

де M — маса Землі, R — віддаль між падаючим тілом і центром тяжіння. Абсолютне прискорення не залежить від географічної широти місця, воно зменшується лише при збільшенні віддалі до центра Землі.

Доведемо тепер, що не тільки сила притягання тіла до Землі, але й його вага пропорціональна інертній масі. Дійсно, за означенням ваги тіла

$$p = f - mw_e,$$

звідки

$$p = m(g_0 - w_e). \tag{2.109}$$

Цю рівність можна записати так:

$$p = mg,$$

якщо ввести позначення

$$g = g_0 - w_e. \tag{2.110}$$

Останній вираз тільки відсутністю множника m відрізняється від формули (2.109), яка означає вагу. З формули (2.110) ми бачимо, що прискорення g є лише складовою частиною абсолютного прискорення g_0 тіла, яке падає на Землю: g дорівнює абсолютному прискоренню g_0, зменшеному на доцентрове прискорення w_e тіла.

З'ясуємо тепер, від чого залежить величина прискорення g. Якщо ліву й праву частини співвідношення (2.110) помножити скалярно саме на себе, то дістанемо

$$g \cdot g = (g_0 - w_e)(g_0 - w_e),$$

або

$$g^2 = g_0^2 - 2g_0 w_e + w^2_e. \tag{2.111}$$

Підставляючи в (2.111) значення

$$w_e = \omega^2 R \cos\varphi,$$

матимемо

$$g = \sqrt{g_0^2 - 2g_0\omega^2 R\cos^2\varphi + \omega^4 R^2 \cos^2\varphi}.$$

Ця формула доводить, що g, на відміну від g_0, залежить від широти φ місця. Нехтуючи під радикалом останнім доданком, що має множником ω^4, і добуваючи наближено квадратний корінь, матимемо

$$g = g_0 - \omega^2 R \cos^2\varphi. \tag{2.112}$$

На полюсі, де $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $g = g_0 = 983$ *см/сек*², а тому формулу (2.112) можна записати так:

$$g = (983 - 3\cos^2\varphi)\ см/сек^2.$$

Однак справжні вимірювання показують, що

$$g = (983 - 5{,}2\ \cos^2\varphi)\ см/сек^2. \tag{2.113}$$

На практиці користуються середнім значенням g, яке дорівнює 981 *см/сек*². Але слід пам'ятати, що внаслідок зміни прискорення g годинник з маятником на екваторі відстає від точно такого годинника на полюсі на дві хвилини за добу (в цьому можна впевнитись, обчислюючи період коливання маятника за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$).

Отже, у гравітаційному полі Землі справедливі *два* співвідношення: $f = mg_0$ і $p = mg$. У першій з цих формул g_0 є незалежне від географічної широти місця абсолютне прискорення тіла, що падає на Землю (прискорення відносно геліоцентричної системи відліку). У другій формулі g, строго кажучи, не є прискоренням тіла відносно Землі, як часто називають цю величину; вектор g дорівнює вектору абсолютного прискорення g_0, геометрично зменшеному на вектор доцентрового прискорення w_e, або геометричній сумі відносного і поворотного прискорень

$$g = g_0 - w_e = w_r + w_c.$$

На відміну від вектора g_0, вектор g залежить від широти місця і зменшується при переміщенні до екватора (як і вага тіла). У наближених обчисленнях g_0 і g можна кількісно не розрізняти, покладаючи їх спільне значення таким, що дорівнює, наприклад, 981 *см/сек*². Але слід завжди пам'ятати про якісну відмінність цих величин.

§ 4. РІВНЯННЯ РУХУ ВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ВІДНОСНО ЗЕМЛІ

Запишемо рівняння руху матеріальної точки відносно Землі, користуючись поняттям ваги. Згідно з (2.105) маємо:

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{f} - m\boldsymbol{w}_e - 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r,$$

або, оскільки $\boldsymbol{f} - m\boldsymbol{w}_e = \boldsymbol{p}$, дістанемо

$$m\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{p} - 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r.$$

Заміняючи тут вагу $\boldsymbol{p}$ через $m\boldsymbol{g}$ і скорочуючи на m, запишемо остаточно:

$$\boldsymbol{w}_r = \boldsymbol{g} - 2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_r. \tag{2.114}$$

§ 5. ВІДХИЛЕННЯ ВІЛЬНО ПАДАЮЧОГО ТІЛА НА СХІД

Застосуємо рівняння (2.114) до вивчення падіння на Землю вільної матеріальної точки.

Систему відліку вибираємо так: вісь Oz напрямляємо вертикально вгору, вісь Oy — по дотичній до земної паралелі на схід і вісь Ox — перпендикулярно до площини yOz у площині меридіана. Початок координат O міститься на поверхні Землі (рис. 47).

Вивчимо рух матеріальної точки, яка падає на Землю з висоти h без початкової швидкості:

$$\text{при} \quad t = 0 \begin{cases} x(0) = y(0) = 0, & z(0) = h, \\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Випишемо проекції векторів, що входять до рівняння (2.114):

проекції	вектора	$\boldsymbol{v}$:	$\dot{x}$,	$\dot{y}$,	$\dot{z}$;
»	»	$\boldsymbol{w}$:	$\ddot{x}$,	$\ddot{y}$,	$\ddot{z}$;
»	»	$\boldsymbol{g}$:	0,	0,	$-g$;
»	»	$\boldsymbol{\omega}$:	$-\omega\cos\theta$,	0,	$\omega\sin\theta$;
»	»	$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$:	$-\dot{y}\omega\sin\theta$,	$\omega\dot{x}\sin\theta + \omega\dot{z}\cos\theta$,	$-\omega\dot{y}\cos\theta$.

Тут x, y, z — координати точки, що падає.

Рівняння руху матеріальної точки (2.114) в координатній формі запишуться так:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\theta \\ \ddot{y} &= -2\omega\,\dot{x}\sin\theta - 2\omega\dot{z}\cos\theta \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{2.115}$$

Інтегруючи перше і третє рівняння цієї системи і враховуючи початкові умови руху, знайдемо

$$\dot{x} = 2\omega y\sin\theta, \quad \dot{z} = -gt + 2\omega y\cos\theta. \tag{2.116}$$

Друге рівняння системи (2.115) за допомогою (2.116) запишеться так:

$$\ddot{y} + 4\omega^2 y = C \cdot t,$$

де

$$C = 2\omega g\cos\theta.$$

Розв'язок цього неоднорідного рівняння дорівнює сумі якого-небудь частинного його розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння, тобто

$$y(t) = \frac{C}{4\omega^2}t + A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t. \tag{2.117}$$

Сталі інтегрування A, B визначаються за початковими умовами $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. Маємо:

$$B = 0, \quad A = -\frac{C}{8\omega^3}. \tag{2.118}$$

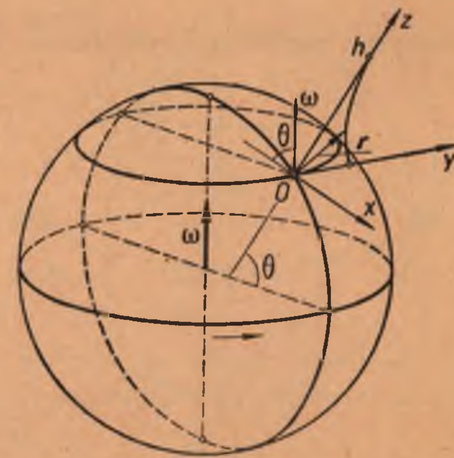

Рис. 47.

Підставляючи значення сталих A, B, згідно з (2.118), у (2.117), знайдемо остаточно

$$y(t) = \frac{C}{4\omega^2}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right). \tag{2.119}$$

У формулі (2.119) вираз у дужках додатний (це легко бачити з графіків функцій $y_1 = t$ і $y_2 = \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}$), а це й означає, що падаюча точка відхиляється на схід.

Для оцінки порядку величини відхилення y розкладемо функцію $\sin 2\omega t$ в ряд за степенями малої величини ωt (за своїм порядком величина $\omega t = 2\pi\frac{t}{T}$ збігається з відношенням проміжку часу t падіння точки до тривалості доби T; якщо, наприклад, час падіння тіла є величина порядку десяти секунд, то ωt буде величиною, порядок якої є 10^{-3}). З точністю до малих величин другого порядку з (2.119) матимемо:

$$y = \left(\frac{gt^2}{3}\cos\theta\right) \cdot \omega t. \tag{2.120}$$

Знайдене відхилення падаючого тіла на схід можна пояснити «дією сили Коріоліса». Наприкінці цього розділу ми ще повернемось до розгляду питання про фізичну причину відхилення на схід.

§ 6. МАЯТНИК ФУКО

Добове обертання Землі навколо своєї осі можна виявити, спостерігаючи за коливанням важкого тягаря, підвішеного на достатньо довгій нитці. Такий дослід було проароблено вперше в 1851 р. французьким фізиком Фуко, який підвісив під куполом будівлі пантеону в Парижі маятник довжиною 67 *м* з тягарем на кінці нитки, який важив 30 *кГ**. Довжина дуги, яку описував тягар, була 6 *м*, а тривалість коливання 16 сек. Вже через кілька хвилин після пуску маятника площина його коливань помітно відхилялась убік, протилежний напряму обертання Землі (за годинниковою стрілкою, якщо дивитись зверху).

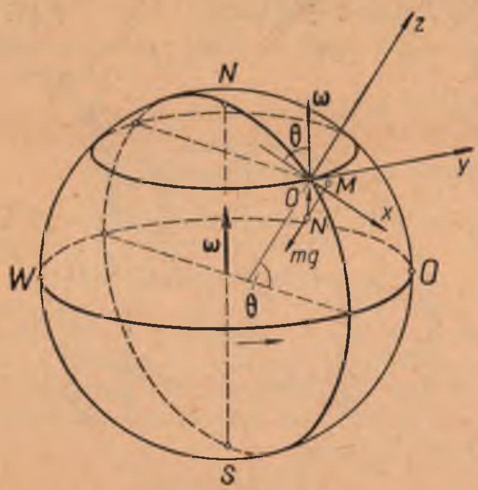

Рис. 48.

Розглянемо математичну теорію маятника. Систему відліку вибираємо так, як і в попередньому параграфі: вісь Oz напрямляємо вертикально вгору, вісь Oy — по дотичній до паралелі на схід і вісь Ox — перпендикулярно до площини yOz у площині меридіана. Початок координат O збігається з точкою підвісу маятника.

На підвішений тягар діють ті самі сили, що й на вільне тіло, а, крім того, сила реакції $\mathbf{N}$, яка напрямлена до початку координат O (рис. 48). Реакцію $\mathbf{N}$ нитки можна подати у вигляді

$$\mathbf{N} = N\left(-\frac{\mathbf{r}}{l}\right),$$

де $\mathbf{r}$ — радіус-вектор тягаря маятника, а l — довжина нитки $\left(-\frac{\mathbf{r}}{l}\right.$ — одиничний вектор, що визначає напрям реакції нитки).

Рівняння руху маятника відрізняються від рівнянь вільного падіння точки (2.115) лише тим, що в правих частинах цих рівнянь додається реакція нитки:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\theta - \frac{N}{m}\cdot\frac{x}{l} \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\theta - 2\omega\dot{z}\cos\theta - \frac{N}{m}\cdot\frac{y}{l} \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{y}\cos\theta - \frac{N}{m}\cdot\frac{z}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (2.121)$$

* В Ленінграді до купола Ісаакіївського собору підвішений маятник довжиною 98 *м*, який має період коливання 20 сек.

Вивчимо малі коливання маятника, вважаючи $\frac{x}{l}$ і $\frac{y}{l}$ та їх похідні по часу величинами першого порядку малості. Оскільки координати коливної точки (тягаря) задовольняють рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

то

$$\frac{z}{l} = -\left(1 - \frac{x^2+y^2}{l^2}\right)^{1/2} = -\left(1 - \frac{x^2+y^2}{2l^2} + \ldots\right) \approx -1,$$

тобто z дорівнює $-l$ з точністю до величин другого порядку малості. Тому, розглядаючи малі коливання, можемо вважати, що z дорівнює $-l$, а величинами $\frac{dz}{dt}$ і $\frac{d^2z}{dt^2}$ можна нехтувати як величинами другого порядку малості.

Після такого спрощення рівняння руху тягаря маятника можна переписати так:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\theta - \frac{N}{m}\cdot\frac{x}{l} \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\theta - \frac{N}{m}\cdot\frac{y}{l} \\ 0 &= -g + 2\omega\dot{y}\cos\theta + \frac{N}{m} \end{aligned}\right\} \qquad (2.122)$$

З третього рівняння цієї системи знайдемо

$$N = mg - 2m\omega\dot{y}\cdot\cos\theta.$$

Але другим доданком правої частини тут можна знехтувати порівняно з першим доданком, бо величина $\frac{\dot{y}}{l}$, за умовою, є малою першого порядку. Отже, маємо

$$N \approx mg. \qquad (2.123)$$

Це означає, що натяг нитки маятника залишається приблизно сталим і дорівнює вазі тягаря, який коливається.

Якщо взяти до уваги рівність (2.123), то перші два рівняння системи (2.122) наберуть такого вигляду:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\theta - \frac{g}{l}x \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\theta - \frac{g}{l}y \end{aligned}\right\} \qquad (2.124)$$

Цю систему рівнянь найкраще проінтегрувати так. Помножимо друге рівняння на $i = \sqrt{-1}$ і додамо до першого рівняння; для комплексної змінної $x + iy$, яку позначимо через u, дістанемо лінійне рівняння

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\omega_1 i\frac{du}{dt} + n^2u = 0, \qquad (2.125)$$

де

$$n^2 = \frac{g}{l}, \quad \omega\sin\theta = \omega_1.$$

Шукаємо розв'язок рівняння (2.125) у формі

$$u = e^{\lambda t}.$$

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2\omega_1 i\lambda + n^2 = 0;$$

його корені такі:

$$\lambda_1 = \left(-\omega_1 + \sqrt{\omega_1^2 + n^2}\right) i,$$

$$\lambda_2 = \left(-\omega_1 - \sqrt{\omega_1^2 + n^2}\right) i.$$

Якщо для скорочення запису позначити $\sqrt{\omega_1^2 + n^2}$ через Ω, то загальний інтеграл буде

$$u = x + iy = C_1 e^{(-\omega_1 + \Omega)\, it} + C_2 e^{(-\omega_1 - \Omega)\, it}, \qquad (2.126)$$

де C_1 і C_2 — довільні (взагалі комплексні) сталі.

Якщо відокремити дійсну і уявну частини в загальному інтегралі, то дістанемо рівняння руху тягаря маятника.

Загальний інтеграл (2.126) містить чотири сталих інтегрування (дві комплексні сталі C_1 і C_2), отже, щоб остаточно визначити рух тягаря маятника, треба задати його початкове положення за допомогою двох координат x_0, y_0 і його початкову швидкість за допомогою двох проекцій $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ — всього треба задати чотири числа.

Розглянемо такий рух маятника, при якому сталі C_1 і C_2 дійсні і відмінні тільки знаком:

$$C_1 = -C_2 = C.$$

Тоді маємо:

$$x + iy = C\left[e^{(-\omega_1+\Omega)\, it} - e^{(-\omega_1-\Omega)\, it}\right] = Ce^{-\omega_1 it}\left(e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}\right) =$$

$$= 2iCe^{-i\omega_1 t} \cdot \sin\Omega t = 2C\sin\Omega t e^{i\left(-\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Абсолютна величина цієї комплексної функції дорівнює

$$|x + iy| = 2C\sin\Omega t, \qquad (2.127)$$

а аргумент

$$\alpha = \arg(x + iy) = \frac{\pi}{2} - \omega_1 t. \qquad (2.128)$$

Знайдені формули (2.127) і (2.128) доводять, що точка M (проекція тягаря маятника на горизонтальну площину xOy) коливається гармонічно вздовж прямої, яка проходить через початок координат, а ця пряма рівномірно обертається з кутовою швидкістю

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\omega_1 = -\omega\sin\theta.$$

Знак **мінус** тут означає, що обертання відбувається за годинниковою стрілкою (із сходу через південь на захід), якщо дивитись зверху (рис. 49).

Неважко встановити, які початкові умови відповідають розглянутому руху. Знайдемо похідну по часу від величини u:

$$u = x + iy = 2C\sin\Omega t e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right)},$$

$$\dot{u} = \dot{x} + i\dot{y} = \left[2C\Omega\cos\Omega t + 2C\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) i\sin\Omega t\right] \cdot e^{\left(\frac{\pi}{2} - \omega_1 t\right) i}.$$

Покладаючи в цих формулах $t = 0$, знайдемо

$$x_0 + iy_0 = 0,$$

$$\dot{x}_0 + i\dot{y}_0 = 2C\Omega e^{i\frac{\pi}{2}} = 2iC\Omega,$$

звідки

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \dot{x}_0 = 0,$$
$$\dot{y}_0 = 2C\Omega \neq 0.$$

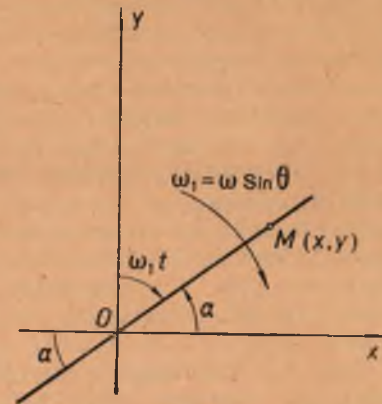

Рис. 49.

Ці початкові умови показують, що маятник у початковий момент дістав удар у положенні рівноваги в напрямі на схід (або на захід).

Таким чином, якщо маятнику надати поштовх у стані рівноваги в напрямі на схід (або на захід), то він гармонічно коливатиметься по відрізку прямої, яка проходить через положення рівноваги маятника, причому ця пряма обертатиметься рівномірно навколо вертикалі з кутовою швидкістю $\omega_1 = \omega\sin\theta$. Останнє і є доказом обертання Землі.

Можна було б розглянути інші рухи маятника. Так, коли припустити, що сталі C_1 і C_2 в рівності (2.126) дійсні і $C_1 \neq C_2$ (це означає, що в початковий момент маятник відхилений на схід або на захід і пущений з початковою швидкістю, напрямленою на південь або на північ), то маятник рухається по еліпсу з півосями $C_2 + C_1$ і $C_2 - C_1$, причому сам еліпс обертається навколо вертикалі з сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = \omega \cdot \sin\theta$ (в північній півкулі — за годинниковою стрілкою, а в південній — проти годинникової стрілки, якщо дивитись зверху)*.

§ 7. ПРО ФІЗИЧНУ ПРИЧИНУ ЯВИЩ, ЯКІ ОБУМОВЛЕНІ ОБЕРТАННЯМ ЗЕМЛІ

На прикладах вільного падіння тіла на Землю і коливання маятника вище подано спосіб математичного дослідження відносного руху матеріальної точки. Досліджені відносні рухи виявились складнішими за абсолютні рухи (абсолютне падіння

* Акад. О. М. Крилов виявив наявність додаткового обертання еліпса, незалежного від обертання Землі, кутова швидкість якого пропорціональна площі еліпса. Це додаткове обертання може відбуватися як за рухом годинникової стрілки, так і проти нього: воно того ж напряму, що й рух тягарця по еліпсу.

точки відбувалося б строго по вертикалі, а абсолютне коливання маятника — без додаткового його обертання). Виникає питання про фізичну причину додаткових ефектів, які спостерігаються у відносному русі,— відхилення точки на схід, обертання площини коливань маятника і т. д.

Фізичною причиною цих двох і багатьох інших явищ є властивість інертності тіл.

Як пояснити відхилення тіл, що падають, на схід?

Стан спокою тіла відносно Землі означає наявність у тіла переносної швидкості завдяки добовому обертанню Землі (обертання Землі навколо Сонця відбувається з кутовою швидкістю, яка в 365 раз менша від кутової швидкості добового обертання, так що рух Землі по своїй орбіті за малий проміжок часу є практично поступальним і за принципом відносності Галілея не впливає на механічні явища). Окружна швидкість тіла напрямлена на схід і дорівнює добутку кутової швидкості обертання Землі на віддаль до тіла від осі її обертання, а тому швидкість тіла в початковому верхньому положенні дещо відрізняється від швидкості точок земної поверхні під падаючим тілом.

Але за властивістю інерції падаюче тіло зберігає саме ту швидкість, яку воно мало у верхньому положенні і яка більша від швидкості точок Землі під ним. Внаслідок наявності різниці окружних швидкостей і відбувається відхилення падаючого тіла на схід. Рух тіла складатиметься з прискореного падіння вниз і рівномірного інерційного переміщення на схід, так що падаюче тіло опише не вертикальну пряму, а дугу параболи.

На Землі, яка обертається, виявляється ціла низка явищ, яких не було б у тому випадку, коли б Земля не оберталась. Так, у нашій північній півкулі спостерігається підмивання правих берегів річок (закон російського вченого К. М. Бера), швидше спрацьовуються праві рейки кожної колії двоколійних залізниць, спостерігається відхилення морської течії Гольфстріму вправо, тобто в бік Скандінавії і Кольського півострова, утворюються гігантські вихори (циклони) при втіканні атмосферного повітря в області зниженого тиску, спостерігається відхилення повітряних потоків вправо (гаряче повітря тропіків піднімається вгору, а холодне, важче повітря північних широт опускається вниз і тече на південь; внаслідок цього утворюється потужний кругооборот, а відхилення потоку повітря вправо перетворює його в північно-східний пасат).

Усі ці явища являють собою прямий наслідок властивості інерції тіл і обумовлені обертанням Землі. Розглянемо, наприклад, течію води в річці вздовж меридіана на північ. Абсолютна швидкість частинки води в річці складається з двох компонентів: відносної швидкості течії, напрямленої на північ, і переносної швидкості, обумовленої обертанням Землі. Переносна обертальна швидкість напрямлена на схід, і її величина залежить від віддалі до осі обертання Землі, тобто від географічної широти місця. Якщо річка тече вздовж меридіана на північ, то вода несе з собою надлишок переносної швидкості, напрямленої на схід (при переміщенні води по меридіану на північ віддаль до осі обертання Землі зменшується, і тому переносна швидкість частинок води буде більша за переносну швидкість частинок берега). Завдяки властивості інерції надлишок переносної швидкості частинок води проявляється у вигляді тиску води на східний берег річки, тобто на її правий берег.

Коли річка тече на південь, вода приходить з недостачею переносної швидкості, і західний берег річки ніби набігає на воду, яка не встигає відійти на схід. В результаті підмивається західний берег, тобто знову правий берег річки.

Зауважимо, що в наведеному поясненні властивість інерції частинок води врахована не цілком, бо ми розглянули лише переносну швидкість, але залишили поза увагою відносну швидкість. Властивість інерції, яка зв'язана з наявністю відносної швидкості, обумовлює такий самий ефект.

На закінчення розглянемо рух штучного супутника Землі. Внаслідок інертності супутник рухається в нерухомій відносно зірок площині. На супутник діє сила гравітаційного тяжіння до центра Землі, і він описує еліпс, в якому, як у кільці, і обертається Земля. Тому рух супутника відносно Землі виявляється складним — по спіралі.

ЧАСТИНА ТРЕТЯ

ДИНАМІКА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ

Розділ I

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ

§ 1. ДЕЯКІ ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ

1. Система матеріальних точок. В'язі. *Системою матеріальних точок називається така їх сукупність, в якій рух і положення кожної точки залежать від рухів і положення інших точок, що входять у систему.*

Система матеріальних точок називається *вільною*, якщо рухи точок цієї системи не обмежені ніякими наперед заданими умовами. У противному разі система називається *невільною*.

Рух кожної точки вільної системи зв'язаний з рухами інших точок цієї системи тільки тим, що між ними існує взаємодія. Так, у випадку сонячної системи рух кожної планети зв'язаний з рухами інших планет і Сонця тільки тим, що на дану планету діють сили притягання всіх інших планет і Сонця (за законом всесвітнього тяжіння). Сонячна система є класичним прикладом вільної системи.

Рухи матеріальних точок невільної системи обмежені певними наперед заданими *геометричними* або *кінематичними* умовами.

Прикладом геометричного обмеження руху є таке обмеження, яке вносить твердий стержень, коли ним скріплюють дві матеріальні точки: в процесі руху відстань між точками залишається незмінною.

Прикладом кінематичного обмеження рухів є таке обмеження, яке вносить шорстка поверхня, коли по ній котиться (без ковзання) куля. Умова шорсткості означає, що швидкості точок кулі в кожний момент повинні бути такими, як у випадку обертання кулі навколо деякої осі, що проходить через точку дотику кулі з поверхнею.

Геометричні й кінематичні обмеження рухів точок системи зумовлюються наявністю певних тіл, які й здійснюють фізично ці обмеження.

Поняття про в'язь і реакцію в'язі для системи матеріальних точок такі самі, як і для однієї матеріальної точки. Аксіома про звільнення від в'язей поширюється і на випадок системи.

У випадку системи матеріальних точок ця аксіома формулюється так: *механічний стан руху системи не зміниться, якщо звільнити її від в'язі, приклавши до точок системи сили, що дорівнюють реакціям в'язі.*

Практично в'язі здійснюються за допомогою ниток, стержнів, осей, валів, підп'ятників, підшипників, канатів, рейок, стволів, пазів, муфт тощо.

В'язі можна задати аналітично. У випадку двох матеріальних точок $m_1(x_1, y_1, z_1)$ і $m_2(x_2, y_2, z_2)$, сполучених абсолютно твердим невагомим стержнем, рівняння в'язі виражає незмінність віддалі між точками і має вигляд

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0, \qquad (3.1)$$

де l — довжина стержня.

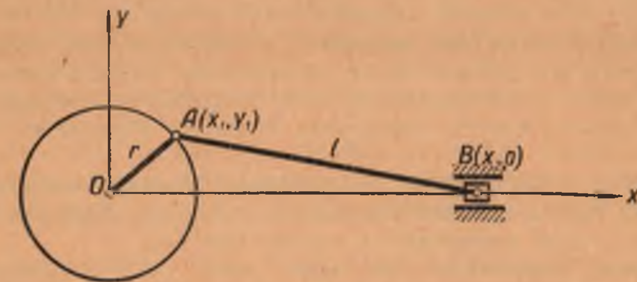

Рис. 50.

У випадку кривошипно-шатунного механізму (рис. 50) маємо три рівняння, що їх задовольняють дві координати пальця A кривошипа і дві координати повзуна B:

$$x_1^2+y_1^2-r^2=0,$$
$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2-l^2=0,$$
$$y_2=0.$$

У більш загальних випадках в'язі можна вважати заданими аналітично з допомогою рівнянь у вигляді

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, z_\nu; t)=0 \quad (i=1, 2, \ldots, r), \qquad (3.2)$$

де t — час, ν — кількість матеріальних точок системи, $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, z_\nu$ — їх координати, r — кількість в'язей ($r \leq 3\nu$).

В'язь типу (3.2) називається *геометричною*, або *голономною*. *Кінематичні* (неголономні) в'язі в цьому курсі механіки не розглядаються.

В'язь типу (3.1) є голономною і стаціонарною (час t не входить явно до рівняння).

2. Можливе (віртуальне) переміщення системи. Кількість ступенів вільності руху. Наявність в'язей робить неможливими деякі переміщення системи. Наприклад, шатун кривошипно-шатунного механізму не може здійснити переміщення, при якому віддаль між пальцем кривошипа і повзуном стала б більшою за довжину шатуна. Таке переміщення є несумісним з в'язями системи і спричинило б поломку механізму.

Можливим переміщенням матеріальної системи називається таке елементарне переміщення її точок, яке сумісне (узгоджене) *з в'язями в даний момент часу.*

При наданні точкам системи можливого переміщення нестаціонарні в'язі повинні «зупинятись». Ця вимога входить в означення можливого переміщення.

Нехай, наприклад, кільце рухається по стержню, який у цей час обертається в горизонтальній площині. Елементарне переміщення кільця з положення, яке це кільце займало в момент t, уздовж прямої, по якій стержень був розміщений у той самий момент t, і є можливим переміщенням кільця.

Вводячи поняття про можливе переміщення, ми цікавимось лише тими геометричними переміщеннями матеріальних точок системи, які не порушують в'язей (у випадку нестаціонарних в'язей — не порушують стану цих в'язей у фіксований момент часу).

Можливі переміщення точок системи позначатимемо $\delta \boldsymbol{r}_k$, щоб відрізнити їх від дійсних переміщень $d\boldsymbol{r}_k$, які відбуваються насправді під дією прикладених до системи сил.

Знайдемо обмеження, які в'язі типу (3.2) накладають на можливі переміщення точок системи.

Надамо точкам системи можливих переміщень. Нехай координати точок системи змінились при цьому на δx_k, δy_k, δz_k ($k = 1, 2, \ldots, \nu$). Ці величини називаються *варіаціями координат*; їх можна розглядати як проекції векторів $\delta \boldsymbol{r}_k$. За рівняннями в'язей (3.2) маємо:

$$f_i(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1, \ldots,\ x_\nu + \delta x_\nu,\ y_\nu + \delta y_\nu,\\ z_\nu + \delta z_\nu;\ t) = 0,$$

або, якщо розкласти функції f_i в ряди, відкинути малі величини другого й вищого порядків і скористатись (3.2),

$$\sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \cdot \delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \delta y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k} \cdot \delta z_k \right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (3.3)$$

Ці рівняння аналітично і визначають шукані обмеження. Для даного положення системи і зазначеного моменту часу коефіцієнти $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z_k}$ є певні сталі величини, а рівняння (3.3) слід розглядати відносно варіацій координат, кількість яких більша, ніж кількість рівнянь.

Кількістю ступенів вільності руху системи називається кількість незалежних можливих переміщень, що їх у певний фіксований момент часу можна надати матеріальним точкам системи.

Очевидно, кількість ступенів вільності руху системи дорівнює кількості незалежних варіацій координат.

Зауважимо, що у випадку голономних в'язей кількість ступенів вільності руху системи дорівнює кількості незалежних координат. Дійсно, 3ν координат точок системи зв'язані r залежностями (3.2), так що кількість незалежних координат системи дорівнює $3\nu - r = n$. Нагадаємо, що в кінематиці поняття кількості ступенів вільності руху матеріального об'єкта зв'язувалось саме з кількістю незалежних параметрів, які визначають положення цього об'єкта в просторі. Але наведене тут нове означення поняття кількості ступенів руху є більш загальним, справедливим також і у випадку неголономних систем.

3. Класифікація сил, що діють на систему. Розглянемо невільну систему матеріальних точок. Усі сили, що діють на точки системи, можна поділити на два класи: 1) *задані сили* і 2) *реакції в'язей*. Задані сили інколи називають ще *активними*, а реакції в'язей — *пасивними*.

Реакції в'язей наперед не відомі, їх можна знайти лише в процесі дослідження руху системи. Активні сили задають наперед, як певні функції часу, координат і швидкостей точок системи.

При дослідженні руху матеріальних систем нерідко буває зручнішим поділяти прикладені сили за іншою ознакою, а саме: на внутрішні і зовнішні.

Внутрішніми силами називаються сили взаємодії між точками даної системи.

Зовнішніми силами називаються сили, з якими на точки даної системи діють тіла, що не належать до цієї системи.

Рівнодійну всіх внутрішніх сил, прикладених до точки m_k (тобто до точки з масою m_k), позначатимемо $\boldsymbol{f}_k^{(i)}$, а її проекції на осі декартової системи — $X_k^{(i)}$, $Y_k^{(i)}$, $Z_k^{(i)}$; рівнодійну всіх зовнішніх сил, прикладених до точки m_k, позначимо $\boldsymbol{f}_k^{(e)}$, а її проекції — $X_k^{(e)}$, $Y_k^{(e)}$, $Z_k^{(e)}$.

Сила, що діє на точку m_k системи, дорівнює

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{f}_k^{(e)} + \boldsymbol{f}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad (3.4)$$

Доведемо дві теореми, що визначають основні властивості внутрішніх сил системи.

Теорема 1. *Геометрична сума всіх внутрішніх сил системи дорівнює нулю.*

За третім законом Ньютона всі внутрішні сили, прикладені до матеріальних точок системи, можна поділити на «діючі» і «протидіючі». Кожні дві такі сили діють уздовж однієї прямої, рівні за величиною і протилежні за напрямом. Тому, якщо в довільній точці простору (наприклад, у початку координат) побудувати вектори, що дорівнюють внутрішнім силам системи, і додати їх геометрично, то дістанемо нуль:

$$\sum_{k=1}^{v} f_k^{(i)} = 0. \tag{3.5}$$

Цей висновок формулюють ще так: *головний вектор системи всіх внутрішніх сил дорівнює нулю.*

Теорема 2. *Геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил системи відносно довільної нерухомої точки простору дорівнює нулю:*

$$\sum_{k=1}^{v} r_k \times f_k^{(i)} = 0. \tag{3.6}$$

Цю теорему формулюють ще так: *головний момент системи внутрішніх сил відносно довільної нерухомої точки простору дорівнює нулю.*

Щоб довести теорему, досить упевнитись у тому, що рівність (3. 6) справедлива у випадку двох рівних і протилежно напрямлених

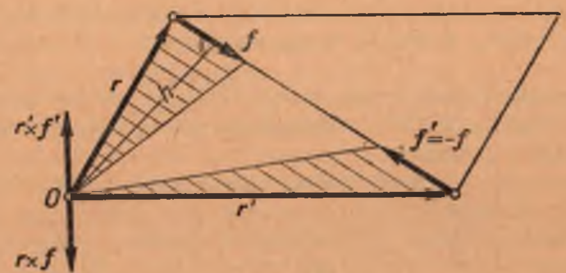

Рис. 51.

сил «дії» і «протидії». Але для двох сил це очевидно: моменти відносно точки O двох сил $\boldsymbol{f}$ і $-\boldsymbol{f}$, які діють по одній прямій у протилежних напрямах, обидва рівні за величиною $f \cdot h$ і напрямлені в протилежні сторони, а геометрична сума їх дорівнює нулю (рис. 51).

4. Ідеальні в'язі. У технічних приладах і машинах в'язі звичайно здійснюються так, що в більшості випадків робота їх реакцій на можливих переміщеннях системи дуже мала, і нею можна нехтувати. Упевнимось у цьому на ряді прикладів.

1. Робота реакцій шарикопідшипників і підп'ятників практично дорівнює нулю, бо в них майже немає тертя.

2. Розглянемо рух колеса вагона, бігунів дробарки і т. п. У таких випадках реакція поверхні в'язі (рейок, площини і т. д.) проходить через миттєву вісь обертання тіла. Тому зміщення точки прикладання реакції в'язі дорівнює нулю (з точністю до величин другого порядку малості, якщо вважати зміщення осі

колеса, осей бігунів і т. п. малою величиною першого порядку). Разом з тим виявляється, що й робота реакції в'язі дорівнює нулю.

3. Нехай в'яззю є абсолютно твердий стержень, що сполучає дві матеріальні точки A і B (рис. 52).

Сили взаємодії точок A і B дорівнюють

$$f_A = f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad f_B = -f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r},$$

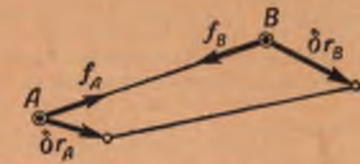

Рис. 52.

де $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{AB}$, а f — величина сили взаємодії (фізичною причиною появи сил взаємодії може бути дуже мале видовження стержня, величиною якого можна нехтувати). Робота δA реакцій в'язі на довільному можливому переміщенні системи дорівнює

$$\delta A = \boldsymbol{f}_A \cdot \delta \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{f}_B \cdot \delta \boldsymbol{r}_B = f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\left(\delta \boldsymbol{r}_A - \delta \boldsymbol{r}_B\right) = f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r}\, \delta\left(\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B\right),$$

де $\delta \boldsymbol{r}_A$ і $\delta \boldsymbol{r}_B$ — можливі переміщення точок A і B системи.

З рисунка видно, що

$$\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{BA} = -\boldsymbol{r},$$

тому маємо:

$$\delta A = -f \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \delta \boldsymbol{r}.$$

Але, диференціюючи тотожність $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2$, знайдемо, що $\boldsymbol{r} \cdot \delta \boldsymbol{r} = r \cdot \delta r$; отже,

$$\delta A = -f \cdot \delta r = 0, \tag{3.7}$$

бо можливе переміщення системи, яке завжди узгоджене з в'яззю, повинно бути тут таким, щоб відстань між двома точками залишилась незмінною: $\delta r = 0$.

Цей результат поширюється і на випадок абсолютно твердого тіла (незмінюваної системи точок): робота внутрішніх сил взаємодії точок твердого тіла дорівнює нулю на довільному його переміщенні.

До того самого висновку приходимо й тоді, коли в'язь здійснена за допомогою рухомого шарніра, що з'єднує два тіла, а також тоді, коли для в'язей використовують нерозтяжні нитки, канати, троси, гладенькі поверхні тощо.

Узагальнюючи властивості розглянутих фізичних в'язей, введемо таке означення:

Якщо сума робіт реакцій в'язей на всіх можливих переміщеннях точок системи дорівнює нулю, то в'язі називаються ідеальними.

Отже, реакції $\boldsymbol{N}_k$ ідеальних в'язей задовольняють умову

$$\delta A = \sum_{k=1}^{v} \boldsymbol{N}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k = 0, \tag{3.8}$$

де $\delta \boldsymbol{r}_k$ — варіації радіус-векторів $\boldsymbol{r}_k$ точок системи.

§ 2. ЗАКОНИ РІВНОВАГИ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ

1. Коротка історична довідка. Перші справжні наукові результати в галузі статики ще в III ст. до н. е. одержав Архімед. Він побудував струнку теорію рівноваги важеля під дією паралельних сил, створив учення про центр ваги, розробив основи гідростатики, відкрив закон гідростатичного тиску рідини на занурене тіло. Архімед у своїх працях з механіки підбив підсумки знанням стародавніх людей у галузі статики і звів ці знання в струнку логічну систему.

В епоху середньовіччя механіка, як і інші науки, майже не розвивалась.

В епоху Відродження статика розвивається паралельно з динамікою.

Сучасник Ньютона французький учений Варіньйон (1654—1722) розробив геометричну теорію рівноваги за допомогою поняття момента сили. У своїй праці Варіньйон дав майже завершену *геометричну* статику твердого тіла.

У XIX ст. цю теорію дещо доповнили праці французьких учених Л. Пуансо, М. Шаля і німецького геометра А. Мебіуса.

Бурхливий розвиток техніки і, зокрема, будівельної механіки привів до створення *графостатики*, яка дає прості й наочні графічні методи розв'язування задач статики, особливо у випадках, коли всі сили розташовані в одній площині.

Аналітичний метод побудови статики, який є результатом узагальнення теорії простих машин, досконало розробив видатний французький учений Лагранж (1736—1813). Важливі дальші узагальнення в аналітичній статиці зробив російський учений М. В. Остроградський (1801—1861).

Аналітична статика набула надзвичайної ваги для сучасних прикладних наук — теорії пружності, теорії опору матеріалів, будівельної механіки, де вона застосовується з великим успіхом.

2. Означення змісту статики. Загальна характеристика різних методів її побудови. *Статика є розділ теоретичної механіки, в якому вивчаються закони рівноваги матеріальної системи під дією прикладених до неї сил і закони перетворення систем сил, що діють на тверді тіла.*

Під рівновагою тіла розуміють його стан спокою відносно певної системи координат. Якщо ця система координат інерціальна, то рівновага називається *абсолютною*, якщо неінерціальна — *відносною*.

Схарактеризуємо коротко два методи побудови статики — геометричний і аналітичний.

В основі геометричної статики лежить система аксіом.

Статика однієї матеріальної точки будується на основі двох аксіом: 1) паралелограма сил: не порушуючи рівноваги матеріальної точки, дві прикладені до неї сили можна замінити однією силою — рівнодійною, яка за величиною і напрямком визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на відрізках прямих, якими зображені сили, що прикладені до точки; 2) зрівноваження сил: сума векторів сил, прикладених до точки, що перебуває в рівновазі, дорівнює нулю; навпаки, прикладання до точки системи сил, сума векторів яких дорівнює нулю, не порушує рівноваги точки.

Побудова статики твердого тіла потребує додаткових аксіом: 1) не порушуючи рівноваги твердого тіла, до нього можна прикласти або від нього можна відкинути дві сили, які рівні за величиною, напрямлені протилежно і мають спільну лінію дії;

2) сили взаємодії двох матеріальних точок рівні і прямо протилежні.

Користуючись цими аксіомами, можна встановити правила додавання прикладених до твердого тіла систем паралельних сил, пар сил і правила еквівалентного перетворення довільної системи сил. Можна також знайти необхідні і достатні умови рівноваги вільного твердого тіла під дією якої завгодно системи сил. Якщо додатково взяти ще аксіому про звільнення від в'язей, то можна знайти необхідні й достатні умови рівноваги і невільного твердого тіла.

Цей аксіоматичний метод побудови статики є цілком самостійним, незалежним від динаміки. Він і дає нам так звану геометричну статику.

Аналітичний метод побудови статики грунтується на використанні тільки одного начала — принципу можливих переміщень; основним поняттям аналітичної статики є поняття роботи.

Щоб зберегти і в статиці застосований у цій книжці метод побудови курсу, дотримуватимемось такого плану. На підставі законів Ньютона доведемо принцип можливих переміщень і з'ясуємо його фізичний зміст. Потім знайдемо умови рівноваги твердого тіла як висновок з принципу можливих переміщень. Нарешті, використавши умови рівноваги твердого тіла, знайдемо закони перетворення різних систем сил.

3. Принцип можливих переміщень. Цей принцип формулюють так:

Для рівноваги системи матеріальних точок з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, щоб елементарна робота всіх активних сил дорівнювала нулю на можливих переміщеннях системи.

Доведемо спочатку необхідність умови. Якщо система перебуває в рівновазі, то кожна точка системи перебуває в спокої. Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, приходимо до висновку, що рівнодійна прикладених до точки m_k активних сил $\boldsymbol{f}_k$ і рівнодійна прикладених до цієї точки пасивних сил — реакцій в'язей $\boldsymbol{N}_k$ — взаємно зрівноважені:

$$\boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{N}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{3.9}$$

Помножимо ці рівняння скалярно на можливі переміщення $\delta\boldsymbol{r}_k$ точок m_k і додамо рівняння для всіх k. Дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{N}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k = 0. \tag{3.10}$$

Але другий доданок цієї суми за (3.8) дорівнює нулю. Тому маємо:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \delta\boldsymbol{r}_k = 0, \tag{3.11}$$

і необхідність умови доведено.

Умова (3.11) також і достатня. Справді, нехай початкові швидкості точок системи дорівнюють нулю і система перебуває під дією активних сил, які задовольняють умову (3.11). Щоб довести, що система весь час перебуватиме в спокої, припустимо супротивне, що система в спокої не залишиться, і тому не для всіх точок системи рівнодійна прикладених до точок сил дорівнює нулю. Точка системи, для якої рівнодійна прикладених сил не дорівнює нулю, почне переміщуватись у напрямі своєї рівнодійної, яка дорівнює

$$\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{N}_k \quad (k = 1,2, \ldots, \nu). \tag{3.12}$$

Виберемо за можливе переміщення системи сукупність елементарних дійсних переміщень точок. Тоді сума робіт сил $\boldsymbol{R}_k$ на вибраному нами можливому переміщенні системи буде, очевидно, додатною, бо кожна точка m_k перемістилась із стану спокою в напрямі рівнодійної сили $\boldsymbol{R}_k$. Маємо:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{R}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k > 0,$$

або, на підставі (3.12),

$$\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{N}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k > 0. \tag{3.13}$$

Використавши умову (3.8), перепишемо нерівність (3.13) так:

$$\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k > 0.$$

Ми прийшли до суперечності з умовою (3.11). Отже, припущення про те, що система вийде з стану спокою, невірне.

4. Загальне рівняння статики. Розглянемо систему матеріальних точок з ідеальними стаціонарними в'язями. Необхідну і достатню умову рівноваги системи (3.11) перепишемо в скалярній формі:

$$\sum_{k=1}^{\nu} (X_k \cdot \delta x_k + Y_k \cdot \delta y_k + Z_k \cdot \delta z_k) = 0, \tag{3.14}$$

де X_k, Y_k, Z_k — проекції активної сили $\boldsymbol{f}_k$, що діє на точку m_k. Рівняння (3.14) називається *загальним рівнянням статики*. Його можна покласти в основу всього вчення про рівновагу матеріальних систем.

5. Фізичний зміст принципу можливих переміщень. Принцип можливих переміщень можна подати загальним рівнянням статики (3.14), фізичний зміст якого можна трактувати так. Щоб нерухома матеріальна система вийшла з стану спокою, необхідно, щоб почався процес перенесення руху. Якщо ж, як це видно з рівняння (3.14), при наданні системі будь-якого можливого переміщення сума робіт активних сил дорівнює нулю, то процес перенесення руху при даних фізичних умовах неможливий, і тому точки системи продовжують перебувати в стані рівноваги*.

П р и к л а д. Однорідний стержень вагою P підвішений на шарнірі (рис. 53). Якою має бути прикладена до нижнього кінця стержня горизонтальна сила Q, щоб стержень у стані рівноваги утворював кут φ з вертикаллю?

Вибираємо систему координат, як показано на рисунку.

Активні сили P і Q прикладені до стержня в точках $C(x_1, y_1)$ і $A(x_2, y_2)$, відповідно.

Можливим переміщенням стержня є його поворот навколо точки O на кут $\delta\varphi$ у вертикальній площині. За принципом можливих переміщень сума робіт активних сил на можливому переміщенні системи дорівнює нулю:

$$(X_1 \cdot \delta x_1 + Y_1 \cdot \delta y_1) + (X_2 \cdot \delta x_2 + Y_2 \cdot \delta y_2) = 0, \tag{3.15}$$

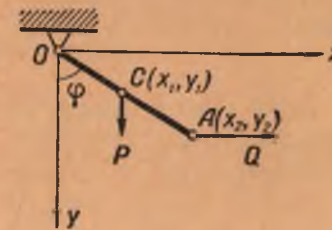

Рис. 53.

де X_1, Y_1 — проекції сили P, а X_2, Y_2 — проекції сили Q. Підставивши в рівняння робіт (3.15) значення проекцій активних сил, а саме:

$$X_1 = 0, \; Y_1 = P; \quad X_2 = Q, \quad Y_2 = 0,$$

дістанемо

$$P \cdot \delta y_1 + Q \cdot \delta x_2 = 0. \tag{3.16}$$

Але координати y_1 і x_2 точок C і A такі:

$$y_1 = a \cos\varphi, \quad x_2 = 2a \sin\varphi,$$

де $a = OC$.

Диференціюючи ці функції, знайдемо варіації координат:

$$\delta y_1 = -a \sin\varphi \cdot \delta\varphi, \; \delta x_2 = 2a \cos\varphi \cdot \delta\varphi.$$

Підставивши ці значення δy_1 і δx_2 в рівняння роботи (3.16), дістанемо

$$-Pa \sin\varphi \cdot \delta\varphi + 2a\, Q \cos\varphi \cdot \delta\varphi = 0,$$

звідки

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

6. Робота сил, прикладених до абсолютно твердого тіла. Для побудови статики твердого тіла треба знайти роботу прикладених до нього сил на довільному його елементарному переміщенні. Ми говоримо, що сила прикладена до твердого тіла, якщо вона прикладена до однієї певної його точки.

Робота сили $\boldsymbol{f}_k$, прикладеної до тіла в точці M_k, дорівнює

$$d'A = \boldsymbol{f}_k \cdot d\boldsymbol{r}_k, \tag{3.17}$$

де $d\boldsymbol{r}_k$ — переміщення точки M_k.

З кінематики відомо, що довільне переміщення тіла в просторі зводиться до сукупності поступального його переміщення

* Нагадаємо, що робота є мірою перетвореної енергії; отже, коли робота дорівнює нулеві на можливих переміщеннях, то процес перенесення енергії — неможливий.

разом з полюсом і повороту навколо осі, що проходить через полюс; тому маємо:

$$d\boldsymbol{r}_k = d\boldsymbol{r}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) \cdot dt, \tag{3.18}$$

де $d\boldsymbol{r}_0$ — переміщення полюса, а $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k) \cdot dt = \boldsymbol{v}_k \cdot dt$ зумовлене поворотом тіла переміщення точки M_k.

На підставі формул (3.17) і (3.18) дістанемо

$$d'A = \boldsymbol{f}_k \cdot d\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{f}_k \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot dt,$$

або

$$d'A = \boldsymbol{f}_k \cdot d\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k) \cdot dt. \tag{3.19}$$

Щоб знайти елементарну роботу всіх сил, прикладених до твердого тіла, виконаємо додавання по всіх точках тіла. Дістанемо

$$d'A = \left(\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k\right) \cdot d\boldsymbol{r}_0 + \left(\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k\right) \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot dt,$$

або

$$d'A = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi}, \tag{3.20}$$

де $\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k$ — головний вектор (геометрична сума) прикладених сил, $\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k$ — головний момент цієї системи сил відносно полюса, а $d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\omega} \cdot dt$ — нескінченно малий вектор, що характеризує кут повороту тіла навколо проведеної через полюс миттєвої осі обертання. Вектор $d\boldsymbol{\varphi}$ домовимось називати «*кутом повороту*» тіла.

Отже, *елементарна робота прикладених до абсолютно твердого тіла сил дорівнює сумі двох скалярних добутків: скалярному добутку головного вектора цієї системи сил на вектор переміщення полюса і добутку головного момента системи сил на кут повороту тіла.*

Зауважимо, що прикладені до тіла зовнішні сили зумовлюють появу внутрішніх сил взаємодії між окремими «матеріальними точками», з яких складається тіло. Але сума робіт цих сил «дії» і «протидії» дорівнює нулю (п. 4, § 1).

7. Умова і рівняння рівноваги вільного твердого тіла. Виходячи з принципу можливих переміщень (3.11), знайдемо умову рівноваги вільного твердого тіла. На підставі формули (3.20) і умови (3.11) маємо:

$$\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{3.21}$$

Зокрема, якщо тілу надається лише поступальних можливих переміщень, то $\delta\boldsymbol{\varphi} = 0$ і рівність (3.21) дає $\boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{r}_0 = 0$, звідки $\boldsymbol{F} = 0$. Але рівняння (3.21) повинно задовольнятись також у випадку, коли можливими переміщеннями є повороти тіла навколо полюса; для таких можливих переміщень тіла дістанемо $\boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0$, звідки $\boldsymbol{M} = 0$.

Отже, *необхідними умовами рівноваги вільного твердого тіла є те, щоб головний вектор і головний момент прикладених сил дорівнювали нулю:*

$$\boldsymbol{F} = 0, \quad \boldsymbol{M} = 0. \tag{3.22}$$

Ці умови водночас є й достатніми, якщо, звичайно, швидкості всіх точок тіла дорівнювали нулю в початковий (після прикладання сил) момент часу.

Умови рівноваги вільного твердого тіла (3.22) приводять до рівнянь рівноваги. Ці останні рівняння дістанемо, спроектувавши векторні рівності (3.22) на осі координат:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\nu} X_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} Y_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} Z_k = 0, \\ &\sum_{k=1}^{\nu} (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} (z_k X_k - x_k Z_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} (x_k Y_k - y_k X_k) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Отже, *для рівноваги вільного тіла під дією довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб сума проекцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю і щоб сума моментів усіх сил відносно кожної з координатних осей дорівнювала нулю.*

8. Умова і рівняння рівноваги твердого тіла, що має одну нерухому точку. Виберемо полюс у тій точці O тіла, яка, за умовою, є нерухомою. Тоді переміщення полюса $\delta\boldsymbol{r}_0$ дорівнює нулю, і рівняння (3.21) запишеться так:

$$\boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0,$$

звідки

$$\boldsymbol{M} = 0.$$

Отже, *для рівноваги твердого тіла з однією закріпленою точкою необхідно і достатньо, щоб головний момент прикладених активних сил відносно нерухомої точки тіла дорівнював нулю і щоб тіло перебувало в спокої в початковий* (після прикладання сил) *момент часу.*

Рівність $\boldsymbol{M} = 0$ визначає *умову* рівноваги твердого тіла, що має одну нерухому точку.

Щоб знайти відповідні цій умові *рівняння* рівноваги, застосуємо аксіому про звільнення від в'язей. Відкинувши в'язь і замінивши її дію реакцією $\boldsymbol{N}$, вважаємо тіло вільним. Тоді, на підставі рівнянь (3.23), маємо:

$$\begin{aligned} &N_x + \sum_{k=1}^{\nu} X_k = 0, \quad N_y + \sum_{k=1}^{\nu} Y_k = 0, \quad N_z + \sum_{k=1}^{\nu} Z_k = 0, \\ &\sum_{k=1}^{\nu} (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} (z_k X_k - x_k Z_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} (x_k Y_k - y_k X_k) = 0, \end{aligned} \tag{3.24}$$

де N_x, N_y, N_z — проекції реакції $\boldsymbol{N}$.

З перших трьох рівнянь цієї системи можна знайти реакцію в'язі, а решта рівнянь визначає в скалярній формі умову рівноваги $\boldsymbol{M} = 0$.

9. Умова і рівняння рівноваги твердого тіла, яке має нерухому вісь. Якщо вибрати полюс на нерухомій осі тіла, то можливе переміщення полюса $\delta \boldsymbol{r}_0$ дорівнюватиме нулю і умова рівноваги (3.21) набуде вигляду

$$\boldsymbol{M} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi} = 0. \tag{3.25}$$

Ця рівність повинна виконуватись тільки для таких векторів $\delta\boldsymbol{\varphi}$, які напрямлені вздовж нерухомої за умовою осі тіла. Тому маємо:

$$\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{s} \cdot \delta\varphi, \tag{3.26}$$

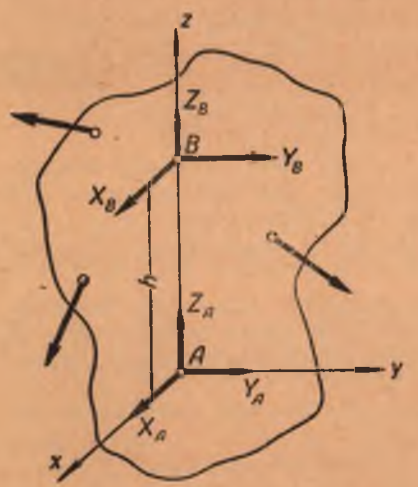

Рис. 54.

де $\boldsymbol{s}$ — одиничний вектор уздовж осі обертання, а $\delta\varphi$ — кут повороту тіла.

Підставивши (3.26) у (3.25), матимемо

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{s} \cdot \delta\varphi = 0,$$

звідки

$$\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{s} = M_s = 0. \tag{3.27}$$

Отже, *для рівноваги тіла з двома закріпленими точками необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума моментів прикладених до тіла активних сил відносно нерухомої осі дорівнювала нулю і щоб тіло було в спокої в початковий* (після прикладання сил) *момент часу*.

Рівняння рівноваги тіла з нерухомою віссю знайдемо вже відомим методом: застосовуємо аксіому про звільнення від в'язей. Маємо:

$$\begin{aligned}
&X_A + X_B + \sum_{k=1}^{n} X_k = 0, \quad -h \cdot Y_B + \sum_{k=1}^{n} (y_k Z_k - z_k Y_k) = 0,\\
&Y_A + Y_B + \sum_{k=1}^{n} Y_k = 0, \quad hX_B + \sum_{k=1}^{n} (z_k X_k - x_k Z_k) = 0,\\
&Z_A + Z_B + \sum_{k=1}^{n} Z_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} (x_k Y_k - y_k X_k) = 0,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

де X_A, Y_A, Z_A і X_B, Y_B, Z_B — проекції реакцій в'язей у точках A і B, X_k, Y_k, Z_k — проекції прикладених до тіла активних сил, x_k, y_k, z_k — координати точок прикладання активних сил, h — віддаль між опорами A і B. Початок системи координат міститься в точці A, а вісь Az напрямлена по AB (рис. 54).

Реакції в'язей визначаються з перших п'яти рівнянь. Останнє, шосте, рівняння визначає умову рівноваги, яку повинні задовольняти активні сили.

§ 3. ЕКВІВАЛЕНТНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СИСТЕМ СИЛ, ПРИКЛАДЕНИХ ДО АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Основні означення. Якщо під дією певної системи сил тверде тіло перебуває в рівновазі, то ця система сил називається *зрівноваженою*.

Систему прикладених до тіла сил позначатимемо $\{\boldsymbol{f}\}$.

Якщо тверде тіло перебуває в рівновазі під одночасною дією двох систем сил — $\{\boldsymbol{f}\}$ і $\{\boldsymbol{F}\}$, то говорять, що ці системи сил *зрівноважують одна одну*.

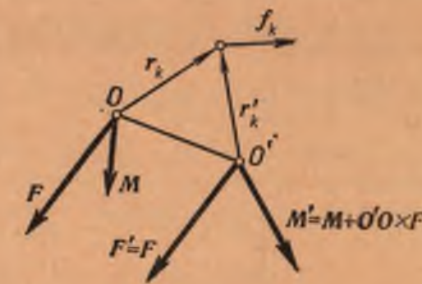

Рис. 55.

Якщо система сил $\{\boldsymbol{f}\}$ зрівноважується однією силою, то цю силу називають *зрівноважуючою* силою заданої системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$.

Якщо дві системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ і $\{\boldsymbol{F}\}$ (кожна окремо) зрівноважують деяку третю систему сил $\{\boldsymbol{\Phi}\}$, то перші дві системи називаються *еквівалентними*.

Одна сила, еквівалентна даній системі сил, називається *рівнодійною* цієї системи сил.

2. Властивості головного вектора і головного момента системи сил, прикладених до вільного твердого тіла. Раніше було знайдено необхідну і достатню умову рівноваги вільного твердого тіла — умову (3.22). При цьому ми користувались довільно вибраним у тілі полюсом. З'ясуємо тепер, як впливає на головний вектор $\boldsymbol{F}$ і головний момент $\boldsymbol{M}$ вибір полюса.

Якщо замість точки O за полюс взяти нову точку O', то головний вектор $\boldsymbol{F}$ сил, очевидно, не зміниться, бо це є геометрична сума тих самих векторів. Отже, маємо:

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}. \tag{3.29}$$

Але зміна полюса може вплинути на величину і напрям вектора головного момента (рис. 55). Дійсно, з рисунка видно, що

$$\boldsymbol{r}'_k = \boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_k,$$

а тому геометрична сума моментів сил відносно нового полюса O' дорівнює

$$\boldsymbol{M}' = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{f}_k = \sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{O'O} + \boldsymbol{r}_k) \times \boldsymbol{f}_k =$$

$$= \boldsymbol{O'O} \times \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f}_k + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k,$$

або

$$M' = M + O'O \times F. \quad (3.30)$$

Отже, *при зміні полюса головний момент* $\boldsymbol{M}$ *довільної системи сил змінюється на вектор* $\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{F}$, *що дорівнює моменту відносно нового полюса* O' *вектора* $\boldsymbol{F}$, *прикладеного до початкового полюса* O.

Оскільки головний вектор $\boldsymbol{F}$ системи сил не залежить від вибору полюса, його називають *першим інваріантом* системи сил. *Другим інваріантом* є проекція головного моменту на напрям головного вектора. Дійсно, оскільки проекція вектора на будь-який напрям дорівнює скалярному добутку цього вектора на одиничний вектор по зазначеному напряму, то маємо:

$$\text{пр}_F \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}' \cdot \frac{\boldsymbol{F}}{F} = (\boldsymbol{M} + \boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{F}) \cdot \frac{\boldsymbol{F}}{F} = \boldsymbol{M} \cdot \frac{\boldsymbol{F}}{F} = \text{пр}_F \boldsymbol{M},$$

бо мішаний добуток $(\boldsymbol{O'O} \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{F}$, у якого два вектори однакові, дорівнює нулю.

З формул (3.29) і (3.30) виводимо таке твердження: *якщо при використанні певної точки O як полюса виявляється, що головний вектор і головний момент даної системи сил дорівнюють нулю, то вони дорівнюватимуть нулю і при виборі будь-якої іншої точки O′ тіла за полюс.* Ми користуватимемось цим висновком нижче.

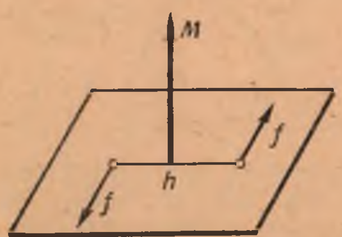

Рис. 56.

3. Пара сил. *Парою сил називається система прикладених до твердого тіла двох сил, які рівні за величиною, діють уздовж паралельних прямих і протилежно напрямлені.* Віддаль між лініями дій сил пари називається *плечем пари* (рис. 56).

З означення випливає, що головний вектор пари сил дорівнює нулю. А тому, як видно з формули (3.30), *головний момент пари сил не залежить від вибору полюса в тілі*, тобто він є вільним вектором. Розглядаючи головний момент пари сил як суму моментів двох сил відносно точки прикладання однієї з них, приходимо до висновку: *головний момент пари сил є вектор, напрямлений перпендикулярно до площини, в якій розміщені сили, що утворюють пару сил, і напрямлений так, що з його кінця напрям обертання пари сил видно проти годинникової стрілки. Абсолютна величина цього вектора дорівнює добутку величини однієї з сил, які утворюють пару, на плече пари сил:* $M = f \cdot h$. Головний момент пари сил нерідко називають *векторним* її моментом.

4. Додавання довільної системи пар сил. Нехай серед сил, які прикладені до тіла і тримають його в рівновазі, є такі, що

утворюють n пар сил, довільно орієнтованих у просторі. Головний вектор тієї частини сил, які утворюють пари, дорівнює, очевидно, нулю; головний момент взагалі не дорівнює нулю, і його позначимо через $\boldsymbol{M}$.

Якщо відкинути всі сили, які утворюють пари, і прикласти до тіла замість них тільки одну пару з векторним моментом $\boldsymbol{M}$, то рівновага тіла не порушиться. Дійсно, ця операція не змінює ні головного вектора, ні головного момента *всієї* системи сил, прикладених до тіла. Ці два вектори і після заміни дорівнюють нулю, а тому необхідна і достатня умова рівноваги (3.22) не порушується.

Отже, *довільна система пар сил за своєю дією на тіло еквівалентна одній парі, векторний момент якої дорівнює геометричній сумі векторних моментів усіх пар даної системи.*

Навпаки, дану пару сил можна розкласти на кілька пар з тим самим головним моментом.

Заміна прикладених до твердого тіла кількох пар сил однією парою сил називається їх *додаванням.*

Окремим випадком доведеної теореми є таке твердження: дві пари сил, векторні моменти яких рівні, еквівалентні за своєю дією на тіло. Отже, дві еквівалентні пари сил можуть все ж відрізнятись одна від одної:

1) величиною плеча пари сил і величиною самих сил,
2) розташуванням сил пари в даній площині,
3) розташуванням у просторі тих паралельних площин, в яких діють еквівалентні пари сил.

5. Еквівалентна заміна довільної просторової системи сил. Почнемо розгляд цього питання з найпростішого випадку. Доведемо таку теорему.

Не порушуючи рівноваги абсолютно твердого тіла, силу можна переносити вздовж її лінії дії в довільну точку тіла.

Справді, перенесення сили вздовж її лінії дії не змінює ні головного вектора, ні головного момента всієї системи прикладених до тіла сил. Теорему доведено.

Отже, сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є *ковзний* вектор.

Перейдемо до розгляду загального випадку. Нехай тіло буде в рівновазі під дією системи сил $\{\boldsymbol{F}\}$ і нехай $\{\boldsymbol{f}\}$ — довільна частина цієї системи.

Теорема 1. *Не порушуючи рівноваги твердого тіла, довільну систему сил* $\{\boldsymbol{f}\}$ *можна замінити сукупністю сили, яка дорівнює головному вектору цієї системи сил і прикладена до наперед заданої точки O тіла, і пари сил, векторний момент якої дорівнює головному моменту системи сил* $\{\boldsymbol{f}\}$ *відносно точки O.*

Теорема справедлива і в тому випадку, коли до системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ входять усі без винятку сили системи $\{\boldsymbol{F}\}$; у цьому окремому випадку смисл теореми зводиться до твердження, що *зрівноважену систему сил можна просто відкинути.*

Справедливість теореми очевидна: рівновага тіла не порушиться, бо заміна системи сил $\{f\}$ на зазначену в умові теореми сукупність сили і пари сил не змінить ні головного вектора, ні головного момента всіх прикладених до тіла сил.

Окремим випадком доведеної теореми є додавання збіжних сил. Система сил, прикладених до твердого тіла, називається *збіжною*, якщо лінії дій усіх сил перетинаються в одній точці. Ця точка називається *центром сил*. Маємо теорему: *систему збіжних сил можна замінити однією силою — рівнодійною, яка прикладена в центрі сил і дорівнює головному вектору збіжної системи сил.*

При використанні декартової системи координат величина рівнодійної збіжної системи сил визначається за формулою

$$R=\sqrt{\Big(\sum_{k=1}^{\nu}X_k\Big)^2+\Big(\sum_{k=1}^{\nu}Y_k\Big)^2+\Big(\sum_{k=1}^{\nu}Z_k\Big)^2},$$

де X_k, Y_k, Z_k — проекції сил збіжної системи; напрям рівнодійної знаходимо за косинусами кутів:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{R}x})=\frac{R_x}{R}=\frac{\sum_{k=1}^{\nu}X_k}{R};\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{R}y})=\frac{\sum_{k=1}^{\nu}Y_k}{R};\quad \cos(\widehat{\boldsymbol{R}z})=\frac{\sum_{k=1}^{\nu}Z_k}{R}.$$

Розглянемо ще питання про те, якою *найпростішою* системою сил можна замінити прикладену до твердого тіла довільну систему сил $\{f\}$. На це питання відповідає така теорема.

Теорема 2. *Не порушуючи рівноваги твердого тіла, довільну систему прикладених до нього сил $\{f\}$ можна замінити в найбільш загальному випадку динамічним гвинтом, тобто сукупністю однієї сили і однієї пари сил, площина дії якої перпендикулярна до сили.*

Пряма лінія, уздовж якої діє динамічний гвинт, тобто вздовж якої діє сила, що входить до складу динамічного гвинта, називається *центральною віссю* заданої системи сил $\{f\}$. У системи сил може бути тільки одна центральна вісь.

Нехай система сил $\{f\}$ еквівалентна сукупності сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної до точки O тіла, і пари сил з моментом $\boldsymbol{M}$, а кут між векторами $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{M}$ дорівнює α.

Якщо $\alpha=0$ або $\alpha=\pi$, то сформульована теорема, очевидно, справедлива.

Доведемо, що теорема справедлива й у випадку, коли кут α відмінний від значень $\alpha=0$ і $\alpha=\pi$. Розкладемо момент пари $\boldsymbol{M}$ на два компоненти: $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2$, перший з яких паралельний вектору $\boldsymbol{F}$, а другий — перпендикулярний до нього. Зауважимо, що розкладання момента пари на два компоненти означає еквівалентну заміну однієї пари сил двома парами сил.

Сукупність сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної в точці O, і пари сил з моментом $\boldsymbol{M}$ еквівалентна сукупності сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної в новій

точці O', і пари сил з моментом $\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{O'O}\times\boldsymbol{F}$. Якщо положення точки O' в тілі вибрати так, щоб другий доданок у правій частині цієї рівності дорівнював вектору $-\boldsymbol{M}_2$, то дістанемо

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{O'O}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}+(-\boldsymbol{M}_2)=(\boldsymbol{M}_1+\boldsymbol{M}_2)+(-\boldsymbol{M}_2)=\boldsymbol{M}_1,$$

і тоді сукупність сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної в точці O', і пари сил з моментом $\boldsymbol{M}_1$ утворюватимуть динамічний гвинт (рис. 57). Отже, положення точки O' знайдемо з умови

$$\boldsymbol{O'O}\times\boldsymbol{F}=-\boldsymbol{M}_2,$$

або

$$\boldsymbol{OO'}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}_2. \qquad (3.31)$$

З рівності (3.31) випливає, що вектор $\boldsymbol{OO'}$ перпендикулярний до площини векторів $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{M}$; абсолютну величину цього вектора знайдемо з тієї самої рівності (3.31):

$$OO'\cdot F=M\sin\alpha,$$

звідки

$$OO'=\frac{M\sin\alpha}{F}=\frac{MF\sin\alpha}{F^2}.$$

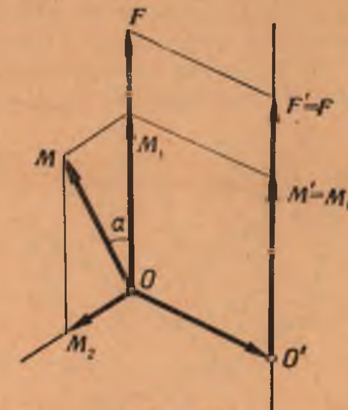

Рис. 57.

Беручи до уваги величину і напрям вектора $\boldsymbol{OO'}$, дістанемо

$$\boldsymbol{OO'}=\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}}{F^2}. \qquad (3.32)$$

Отже, центральна вісь системи сил $\{f\}$ паралельна головному вектору $\boldsymbol{F}$ цієї системи і віддалена від полюса O по перпендикуляру до площини векторів $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{M}$ на вектор $\frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{M}}{F^2}$, де $\boldsymbol{M}$ — головний момент системи сил $\{f\}$ відносно полюса O.

6. Випадки виродження динамічного гвинта. Розглянемо три основні випадки виродження:

1) $\boldsymbol{F}=0$ — головний вектор системи сил $\{f\}$ дорівнює нулю. У цьому випадку система сил $\{f\}$ еквівалентна *парі сил*.

2) $\boldsymbol{F}=0$; $\boldsymbol{M}=0$ — головний вектор і головний момент дорівнюють нулю. Система сил *зрівноважується*.

3) $\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{F}$ — головний момент системи сил $\{f\}$ перпендикулярний до головного вектора цієї системи.

Якщо умова $\boldsymbol{M}\perp\boldsymbol{F}$ виконується для однієї точки простору, то вона справджується і для всіх інших точок, бо проекція головного момента на напрям головного вектора є інваріант.

У цьому випадку, заміняючи систему сил динамічним гвинтом, дістанемо, очевидно, тільки одну силу $\boldsymbol{R}$, бо компонент $\boldsymbol{M}_1$

головного момента дорівнює нулю. Ця сила $\boldsymbol{R}$, яка еквівалентна системі сил $\{\boldsymbol{f}\}$, є *рівнодійною* системи $\{\boldsymbol{f}\}$.

Оскільки еквівалентна заміна однієї системи сил другою системою означає таку заміну, при якій головний момент (і головний вектор) залишаються незмінними, то справедлива така **теорема Варіньйона:**

Якщо система сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної відносно довільної точки простору дорівнює геометричній сумі моментів складових сил відносно тієї самої точки. Момент рівнодійної відносно осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї самої осі.

7. **Рівняння центральної осі.** Нехай головний вектор системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ дорівнює $\boldsymbol{F}$, а її головний момент відносно точки O — початку декартової системи координат — дорівнює $\boldsymbol{M}$. Центральна вісь системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ паралельна вектору $\boldsymbol{F}$ і віддалена від початку координат на вектор $\boldsymbol{OO'} = \frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{M}}{F^2}$. Якщо C — біжуча точка центральної осі, то

$$\boldsymbol{O'C} = \lambda \boldsymbol{F},$$

де λ — параметр, який набирає всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Але вектор $\boldsymbol{O'C}$ дорівнює (рис. 58)

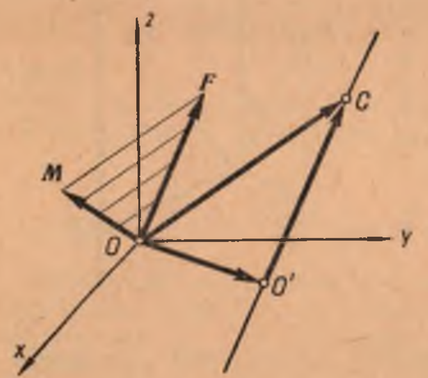

Рис. 58.

$$\boldsymbol{O'C} = \boldsymbol{OC} - \boldsymbol{OO'} = \boldsymbol{OC} - \frac{1}{F^2} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{M}.$$

З двох останніх рівностей дістанемо

$$\boldsymbol{OC} - \frac{1}{F^2} \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{M} = \lambda \boldsymbol{F}.$$

Це й є рівняння центральної осі; щоб подати це рівняння в скалярній формі, запишемо, що проекції векторів, які стоять у лівій і правій частинах рівняння, пропорціональні між собою:

$$\frac{x - \frac{1}{F^2}(YM_z - ZM_y)}{X} = \frac{y - \frac{1}{F^2}(ZM_x - XM_z)}{Y} = \frac{z - \frac{1}{F^2}(XM_y - YM_x)}{Z}. \quad (3.33)$$

Тут x, y, z — біжучі координати точок центральної осі, X, Y, Z — проекції головного вектора $\boldsymbol{F}$ системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$, M_x, M_y, M_z — проекції головного момента тієї самої системи сил, взятого відносно початку координат.

8. **Система паралельних сил. Центр паралельних сил. Центр ваги тіла.** Вивчимо властивості довільної системи паралельних сил $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$, ... , $\boldsymbol{f}_n$, прикладених до твердого тіла в яких зав-

годно точках $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, ... , $\boldsymbol{r}_n$. Ми вважаємо, що тіло перебуває в рівновазі, і тому розглядувана система паралельних сил зрівноважена іншою системою, яка тут нас не цікавить.

Припустимо, що головний вектор системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ відмінний від нуля *, $\boldsymbol{F} \neq 0$, і доведемо таку теорему:

Система паралельних сил має рівнодійну.

Нехай $\boldsymbol{s}$ — одиничний вектор, паралельний прямим, уздовж яких діють сили системи $\{\boldsymbol{f}\}$. Кожну з сил $\boldsymbol{f}_k$ можна подати так: $\boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{s} \cdot f_k$, де f_k — проекція сили $\boldsymbol{f}_k$ на напрям $\boldsymbol{s}$ (рис. 59).

Щоб довести теорему, досить упевнитись, що $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}$, де $\boldsymbol{M}$ — головний момент системи сил $\{\boldsymbol{f}\}$ відносно початку координат, вибір якого довільний.

Але справедливість умови $\boldsymbol{M} \perp \boldsymbol{F}$ очевидна, бо $\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k$, де

$$\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{s} f_k = \boldsymbol{r}_k f_k \times \boldsymbol{s},$$

і ми бачимо, що кожний з векторів $\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k$ перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{s}$, а отже, і до вектора $\boldsymbol{F}$. Теорему доведено.

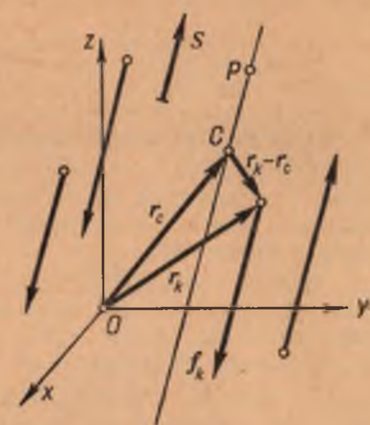

Рис. 59.

Переходимо тепер до вивчення питання про центр паралельних сил. На підставі теореми Варіньйона сума моментів сил $\boldsymbol{f}_k$ відносно довільної точки $\boldsymbol{P}$, що лежить на лінії дії рівнодійної $\boldsymbol{R}$, дорівнює нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{f}_k = 0,$$

де $(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r})$ — вектор, що йде від точки P до точки прикладання сили $\boldsymbol{f}_k$ ($\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор точки P).

Попередню рівність можна подати у вигляді

$$\sum_{k=1}^{n} (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}) \times f_k \cdot \boldsymbol{s} = 0,$$

або

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k f_k - \boldsymbol{r} \sum_{k=1}^{n} f_k\right) \times \boldsymbol{s} = 0. \quad (3.34)$$

Якщо положення точки $P(\boldsymbol{r})$ на лінії дії рівнодійної вибрати тепер так, щоб вираз у дужках у рівності (3.34) перетворився в нуль, то ця рівність задовольнятиметься вже при якому зав-

* Випадок, коли $F = 0$, є випадок виродження: система еквівалентна парі сил або нулю.

годно напрямі вектора s, а отже, і при довільному напрямі системи паралельних сил. Домовимось рівнодійну $\boldsymbol{R}$ прикладати саме в цій точці тіла, яку позначимо $C(\boldsymbol{r}_c)$.

Для визначення положення точки C прикладання рівнодійної маємо рівність:

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k f_k - \boldsymbol{r}_c \sum_{k=1}^{n} f_k = 0,$$

звідки

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k f_k}{\sum_{k=1}^{n} f_k}. \tag{3.35}$$

Положення точки C прикладання рівнодійної довільної системи паралельних сил не залежить від напряму сил у просторі, тобто воно (положення) не змінюється, якщо одночасно повернути всі сили на один і той самий кут, залишивши незмінними точки прикладання сил.

Точка прикладання рівнодійної системи паралельних сил, яка не залежить від напряму сил у просторі, називається *центром паралельних сил.*

Формула (3.35) визначає положення центра паралельних сил.

Уведемо ще поняття *центра ваги тіла.* Тіло можна розглядати як сукупність дуже великого числа N матеріальних точок, наприклад, дуже маленьких кубів, на які можна мислено роздрібнити задане тіло за допомогою площин, які паралельні координатним площинам xOy, xOz, yOz. Вага кожної матеріальної точки є вектор, прикладений до цієї точки. Якщо розміри тіла досить малі порівняно з розмірами Землі, то можна наближено вважати ці вектори паралельними між собою.

Центром ваги тіла називається центр системи сил ваги, прикладених до точок тіла. Рівнодійна системи сил ваги точок тіла називається *вагою тіла.*

З означення випливає, що положення центра ваги тіла визначається за формулою (3.35):

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{r}_k p_k}{P}, \tag{3.36}$$

де p_k — вага k-ої точки тіла ($k = 1, 2, \ldots, N$), а $P = \sum_{k=1}^{N} p_k$ — вага тіла.

Координати центра ваги тіла можна визначити, згідно з (3.36), такими формулами:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k p_k}{P}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} y_k p_k}{P}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{N} z_k p_k}{P}. \tag{3.37}$$

Розділ II

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ

Коротка історична довідка. Ньютон написав свої «Начала», використавши, за традицією стародавніх учених, *геометричний* метод. Цим самим розуміння змісту «Начал» було дуже утруднено.

Видатний математик і механік XVIII ст. Л. Ейлер (1707—1783), творче життя якого проходило в основному в Росії, був першим, хто поклав початок послідовному застосуванню *аналітичного* методу спочатку в динаміці точки, а потім і в динаміці системи.

У післяньютонівський період, як і раніше, механіка розвивається у відповідності з потребами практики.

Проблема руху Землі й Місяця, що була обумовлена потребами мореплавства, сприяла виникненню й розвитку динаміки вільних систем.

Потреби виробництва, особливо необхідність вивчення роботи різних механізмів і машин, приводять до створення основ динаміки невільних систем, зокрема до відкриття основних рівнянь руху твердого тіла (Л. Ейлер) і законів малих коливань складних матеріальних систем (Ж. Лагранж, 1736—1813).

Важливу роль у розвитку механіки невільних систем відіграв принцип, який відкрив петербурзький академік Я. Герман. Цей принцип, який аналітично розробив і узагальнив Л. Ейлер, став широко відомий як «принцип Даламбера» після того, як його в 1743 р. опублікував французький математик і механік Даламбер у книжці «Трактат з динаміки».

Наприкінці XVIII ст. (1788) Ж. Лагранж опублікував видатний твір під назвою «Аналітична механіка». У цьому творі Лагранж завершив аналітичне оформлення динаміки вільної і невільної систем точок і розв'язав багато задач прикладного значення. В основу механіки він поклав принцип можливих переміщень, поєднавши його з принципом Германа — Ейлера — Даламбера. «Аналітична механіка» Лагранжа не тільки підбила підсумки досягнень теоретичної механіки XVIII ст., а й сприяла дальшому її розвитку. Серед основних питань механіки, які вивчались у XIX ст., були такі: 1) обгрунтування варіаційних принципів, 2) розробка методів інтегрування рівнянь динаміки, 3) вивчення невільних матеріальних систем з в'язями нових типів.

Варіаційні принципи динаміки були створені внаслідок зусиль багатьох учених різних країн: Мопертюї, Ейлера, Лагранжа, Якобі, Жуковського, Гамільтона, Остроградського, Герца, Гаусса та ін.

Нові методи інтегрування диференціальних рівнянь динаміки розробили в основному Остроградський, Гамільтон і Якобі.

Невільні матеріальні системи з в'язями нових типів вивчали російські вчені: Остроградський, Брашман, Слудський, Чаплигін, Воронець та ін.

З прискоренням технічного прогресу ускладнюється машинна техніка, з'являються нові машини, нові двигуни, використовуються нові види енергії. Усе це сприяє розвитку багатьох таких спеціальних розділів механіки, як теорія коливань, динаміка твердого тіла, теорія стійкості руху, динаміка тіл змінної маси та ін., а також сприяє виникненню прикладних дисциплін, які обслуговують окремі галузі техніки.

Про вклад російських і радянських учених у розвиток механіки було коротко сказано у вступі.

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

Розглянемо рух вільної системи ν матеріальних точок з масами $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$.

Застосовуючи другий закон Ньютона до окремої точки m_k

системи, напишемо ν рівнянь руху точок системи у векторній формі:

$$m_k \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{f}_k^{(e)} + \boldsymbol{f}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{3.38}$$

де $\boldsymbol{f}_k^{(e)}$ і $\boldsymbol{f}_k^{(i)}$ — рівнодійні зовнішніх і внутрішніх сил, прикладених до точки m_k. Спроектувавши ліві й праві частини цих рівнянь на осі прямокутної декартової системи координат, дістанемо таку систему 3ν рівнянь:

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= X_k^{(e)} + X_k^{(i)} \\ m_k\ddot{y}_k &= Y_k^{(e)} + Y_k^{(i)} \\ m_k\ddot{z}_k &= Z_k^{(e)} + Z_k^{(i)} \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{3.39}$$

Отже, координати матеріальних точок системи x_k, y_k, z_k ($k = 1, 2, \ldots, \nu$) задовольняють систему 3ν звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

У правих частинах рівнянь (3.39) проекції сил є взагалі функціями координат, часу і швидкостей. Проінтегрувати систему (3.39), тобто знайти 3ν координат x_k, y_k, z_k точок системи як функції часу, вдається, на жаль, лише в окремих небагатьох випадках.

Загальний розв'язок системи (3.39) визначається 3ν функціями x_k, y_k, z_k, що залежать від часу, і 6ν незалежних довільних сталих інтегрування. Метод визначення цих сталих був з'ясований у динаміці матеріальної точки (частина II, розд. III).

Ми розглянули диференціальні рівняння руху вільної системи матеріальних точок. Рівняння руху невільної системи наведені в наступному розділі.

На практиці в багатьох випадках немає потреби підшукувати закон руху кожної точки матеріальної системи. Достатньо знати деякі загальні характеристики руху системи як цілого. Ці загальні закономірності руху будь-якої матеріальної системи подано основними теоремами, які є узагальненням відповідних теорем динаміки точки (див. частину II, розд. V).

Основні теореми динаміки системи дають змогу інколи знайти перші інтеграли диференціальних рівнянь руху систем і в окремих випадках — повний розв'язок задачі.

§ 2. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ В АБСОЛЮТНОМУ РУСІ

1. Вступні зауваження. Узагальнимо на випадок руху довільної системи матеріальних точок три основні теореми динаміки точки: 1) про зміну кількості руху (імпульса), 2) про зміну кінетичної енергії і 3) про зміну момента кількості руху.

Першу з цих трьох теорем буде подано ще й у формі теореми про рух центра інерції (центра мас) системи.

Основні теореми динаміки системи встановлюють зв'язки між найбільш важливими і загальними динамічними характеристиками руху матеріальної системи. Звернемо увагу на

виключно важливе значення розглядуваних основних теорем для фізики: усі вони, як і відповідні теореми динаміки точки, виявляються різними сторонами універсального закону природи про незнищуваність руху.

Основні теореми математично можна вивести з другого закону Ньютона.

2. Теорема про зміну кількості руху (імпульса) системи матеріальних точок. Поширимо спочатку поняття кількості руху матеріальної точки на випадок матеріальної системи.

Головний вектор кількостей руху всіх матеріальних точок системи, тобто геометрична сума

$$\boldsymbol{P} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{v}_k, \tag{3.40}$$

називається *кількістю руху*, або *імпульсом матеріальної системи*.

Теорема. *Похідна по часу від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи.*

Відкинемо в'язі і прикладемо до точок системи відповідні їм реакції, а потім розподілимо всі сили, що діють на точки системи, на зовнішні і внутрішні. Закон руху точки m_k, на яку діє зовнішня сила $\boldsymbol{f}_k^{(e)}$ і внутрішня сила $\boldsymbol{f}_k^{(i)}$, можна записати у формі рівності

$$\frac{d}{dt}(m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{f}_k^{(e)} + \boldsymbol{f}_k^{(i)}. \tag{3.41}$$

Додаючи геометрично ліві й праві частини рівностей (3.41) для всіх точок, знайдемо

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(e)}, \tag{3.42}$$

бо за основною властивістю внутрішніх сил, згідно (3.5), їх головний вектор (геометрична сума) дорівнює нулю. Рівність (3.42) перепишемо так:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}, \tag{3.43}$$

де $\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(e)}$ — головний вектор зовнішніх сил системи. Ця рівність і доводить теорему.

Рівність (3.43) узагальнює другий закон динаміки на випадок системи матеріальних точок, і доведену теорему можна сформулювати аналогічно до того, як Ньютон сформулював свій другий закон: *зміна кількості руху системи матеріальних точок пропорціональна головному вектору зовнішніх сил і відбувається в напрямі прямої, паралельної цьому вектору.*

Новому формулюванню теореми імпульсів відповідає така форма запису рівняння (3.43):

$$dP = F^{(e)} \cdot dt, \tag{3.44}$$

або, після інтегрування його в межах від момента t_0 до момента t,

$$P - P_0 = \int_{t_0}^{t} F^{(e)} \cdot dt. \tag{3.45}$$

Отже, *зміна кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, які діють на точки системи протягом того самого проміжку часу.*

Проектуючи ліву й праву сторони рівності (3.45) на координатні осі, знайдемо

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k (\dot{x}_k - \dot{x}_k^0) = \int_{t_0}^{t} X^{(e)} \cdot dt; \ \sum_{k=1}^{\nu} m_k (\dot{y}_k - \dot{y}_k^0) = \int_{t_0}^{t} Y^{(e)} \cdot dt;$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k (\dot{z}_k - \dot{z}_k^0) = \int_{t_0}^{t} Z^{(e)} \cdot dt. \tag{3.46}$$

Треба ще раз підкреслити, що в рівності (3.43) відсутній головний вектор внутрішніх сил. Це означає, що внутрішня взаємодія між точками системи не може змінити загальної кількості руху P системи, але може спричинити перерозподіл кількості руху між окремими її точками.

В окремому випадку, коли матеріальні точки взаємодіють тільки між собою, але не з зовнішніми тілами, тобто коли зовнішні сили дорівнюють нулю, з рівності (3.43) випливає, що

$$\frac{dP}{dt} = 0,$$

звідки

$$P = \sum_{k=1}^{\nu} m_k v_k = \text{const}. \tag{3.47}$$

Ця векторна рівність еквівалентна трьом скалярним:

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \dot{x}_k = c_x; \quad \sum_{k=1}^{\nu} m_k \dot{y}_k = c_y; \quad \sum_{k=1}^{\nu} m_k \dot{z}_k = c_z. \tag{3.48}$$

Рівність (3.47) визначає закон:

Кількість руху матеріальної системи, ізольованої від зовнішніх впливів, залишається сталою. Тому й проекції кількості руху системи на нерухомі осі координат є сталими.

З погляду математики три рівності (3.48) є першими інтегралами диференціальних рівнянь руху матеріальної системи.

У випадку, коли матеріальна система не ізольована, може

виконуватись закон збереження проекції кількості її руху на певну нерухому в просторі вісь. Справді, якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь Ox дорівнює нулю, $X^{(e)} = 0$, то з рівностей (3.46) дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \dot{x}_k = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \dot{x}_k^0. \tag{3.49}$$

Це співвідношення є першим інтегралом диференціальних рівнянь руху матеріальної системи.

Приклад. На одному з двох візків установлено електромотор, який змотує трос, прив'язаний до другого візка. Зовнішні сили — вага і реакція рейок — напрямлені вертикально вгору (тертям нехтуємо). Тому справджується закон (3.49):

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 = \text{const},$$

де m_1 і m_2 — маси візків, а $\dot{x}_1$ і $\dot{x}_2$ — проекції їх швидкостей на горизонтальний напрям рейок.

3. **Теорема про рух центра інерції матеріальної системи.** Доведену теорему про зміну кількості руху матеріальної системи можна подати в іншій формі, використавши поняття центра мас (центра інерції) системи матеріальних точок.

Центром інерції системи матеріальних точок називається точка простору, положення якої визначається радіусом-вектором:

$$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_\nu r_\nu}{m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu},$$

або скорочено

$$r_c = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} m_k r_k}{\sum_{k=1}^{\nu} m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{\nu} m_k r_k}{m}, \tag{3.50}$$

де $m = \sum_{k=1}^{\nu} m_k$ — маса системи.

З означення випливає (див. також частину II, розд. VI), що центр інерції двох матеріальних точок поділяє відрізок між ними на частини, величини яких обернено пропорціональні масам цих точок. Центр інерції трьох матеріальних точок можна знайти так: знаходимо центр інерції C_{12} точок m_1 і m_2, беремо цю точку C_{12} умовно за матеріальну точку з масою $(m_1 + m_2)$ і знаходимо центр інерції точок C_{12} і m_3; в результаті буде знайдено положення центра інерції системи трьох матеріальних точок m_1, m_2 і m_3. Аналогічно можна визначити положення центра інерції будь-якої системи матеріальних точок.

Звернемо увагу ще на те, що, згідно з означенням, центр інерції є геометричною (а не матеріальною) точкою.

Теорема. *Центр інерції матеріальної системи рухається так, як рухалася б матеріальна точка з масою, що дорівнює масі системи, під дією сили, яка дорівнює головному вектору зовнішніх сил системи.*

Для доведення теореми продиференціюємо двічі по часу формулу (3.50), переписану так:

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{r}_k = m\boldsymbol{r}_c.$$

Після першого диференціювання цієї формули дістанемо

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{r}_k = m\,\frac{d\boldsymbol{r}_c}{dt},$$

або

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{v}_k = m \cdot \boldsymbol{v}_c,$$

тобто

$$\boldsymbol{P} = m \cdot \boldsymbol{v}_c. \tag{3.51}$$

Ця проміжна формула доводить, що *кількість руху матеріальної системи дорівнює добутку її маси на швидкість її центра інерції* (центра мас).

Після диференціювання по часу формули (3.51) знайдемо

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = m\boldsymbol{w}_c, \tag{3.52}$$

де $\boldsymbol{w}_c$ — прискорення центра мас.

На підставі (3.43) та (3.52) виходить, що

$$m\boldsymbol{w}_c = \boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{3.53}$$

Ця рівність і доводить теорему про рух центра інерції.

На підставі рівності (3.53) можна зробити висновок про рух центра інерції матеріальної системи, яка ізольована від впливу зовнішніх тіл. Рівність (3.53) при $\boldsymbol{F}^{(e)} = 0$ перепишеться у вигляді $\boldsymbol{w}_c = 0$. Отже, *центр інерції ізольованої матеріальної системи рухається рівномірно й прямолінійно.*

Так, центр мас сонячної системи (він розміщений недалеко від центра Сонця) рухається відносно зірок практично рівномірно і прямолінійно (протягом достатньо малого проміжку часу) з швидкістю $20\,\frac{\text{км}}{\text{сек}}$ у напрямі сузір'я Ліри.

Приклад 1. Центр мас системи Земля — Місяць рухається в центральному полі тяжіння Сонця як матеріальна точка, на яку діє сила, що дорівнює сумі сил притягання Землі і Місяця до Сонця.

Приклад 2. Центр мас спортсмена, що стрибає у воду з трампліна, описує параболу.

Приклад 3. Нехай реактивний апарат перебуває в міжпланетному просторі в стані спокою відносно геліоцентричної системи відліку. При однократному вихлопі газу з сопла апарат почне рухатись рівномірно вперед, а викинута двигуном порція газу — назад, тоді як центр мас усієї системи

(апарат плюс відкинутий назад газ) залишиться нерухомим. Кількість руху апарата за величиною дорівнює кількості руху викинутого ним газу, тобто

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2,$$

а напрями цих кількостей руху — прямо протилежні.

Аналогічно можна розглянути явище віддачі при пострілах.

Приклад 4. При роботі невідцентрованого електромотора центр мас статора намагається зміщуватись протилежно зміщенню центра мас ротора (центр мас усієї системи — нерухомий). Тому виникає трясіння мотора і появляються горизонтальні зусилля змінного напряму, що діють на болти, якими закріплено кожух електромотора на фундаменті.

4. **Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.** Вище ми користувались векторною мірою руху матеріальної системи — кількістю руху $\boldsymbol{P}$. Тепер розглянемо скалярну міру руху системи — її кінетичну енергію T.

Кінетичною енергією матеріальної системи називається сума кінетичних енергій матеріальних точок цієї системи:

$$T = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{m_k v_k^2}{2}. \tag{3.54}$$

Теорема. *При русі матеріальної системи під впливом яких завгодно зовнішніх і внутрішніх сил зміна кінетичної енергії системи на елементарному переміщенні дорівнює роботі, виконуваній на тому самому переміщенні всіма зовнішніми й внутрішніми силами системи.*

Звільнимо систему від в'язей на підставі відповідної аксіоми. За теоремою про приріст кінетичної енергії окремої матеріальної точки можна написати ν рівностей:

$$d\,\frac{m_k v_k^2}{2} = \boldsymbol{f}_k^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{f}_k^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_k \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ \nu). \tag{3.55}$$

Тут у правій частині подано роботу всіх зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи, на елементарному переміщенні $d\boldsymbol{r}_k$.

Додаючи рівності (3.55) для всіх k від 1 до ν, знайдемо

$$dT = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_k + \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_k. \tag{3.56}$$

Ця рівність і доводить теорему.

Рівність (3.56) можна переписати так:

$$dT = d'A^{(e)} + d'A^{(i)}, \tag{3.57}$$

де $d'A^{(e)}$ — сума робіт усіх зовнішніх сил на елементарному переміщенні точок системи, а $d'A^{(i)}$ — елементарна робота всіх внутрішніх сил.

Той факт, що і внутрішні сили можуть виконувати роботу, очевидний. Якщо, наприклад, два заряди, притягуючись, рухаються назустріч один одному, то кожна з двох прикладених до зарядів внутрішніх сил виконує додатну роботу, бо напрям кожної сили збігається з напрямом переміщення відповідного заряду.

Рівність (3.57) визначає з допомогою механічних понять фундаментальний фізичний закон збереження скалярної міри руху (енергії) при його перетвореннях у механічну форму.

Інтегруючи рівність (3.57) у межах від початкового положення системи (0) до кінцевого її положення (1), знайдемо співвідношення, що характеризує теорему про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі:

$$T_1 - T_0 = A^{(e)} + A^{(i)}, \tag{3.58}$$

де $A^{(e)} = \sum\limits_{k=1}^{\nu} \int\limits_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f}_k^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}_k$ — робота зовнішніх сил системи, а $A^{(i)} = \sum\limits_{k=1}^{\nu} \int\limits_{(0)}^{(1)} \boldsymbol{f}_k^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}_k$ — робота внутрішніх сил при переміщенні системи з початкового положення в кінцеве.

Отже, *приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок на певному переміщенні дорівнює роботі всіх прикладених до точок сил на тому самому переміщенні.*

3. Потенціальне силове поле. Закон збереження механічної енергії. Стаціонарне силове поле називається *потенціальним*, якщо робота сил поля, прикладених до точок матеріальної системи, має одне й те саме значення незалежно від того, з якої послідовності нескінченно малих переміщень складається скінченне переміщення між двома заданими положеннями системи, тобто коли робота сил поля залежить тільки від координат початкового і кінцевого положень системи.

Нехай $M_0(x_1^0,\ y_1^0,\ z_1^0, \ldots,\ x_\nu^0,\ y_\nu^0,\ z_\nu^0)$ є початкове (фіксоване) положення матеріальної системи в просторі, а $M(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots, x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu)$ — довільне її положення. Кожному положенню системи M у просторі відповідає певне значення роботи, що виконується силами поля при переміщенні матеріальної системи з початкового положення M_0 в дане положення M. Числове значення цієї роботи визначає певну функцію U, що залежить від координат точки M:

$$U(M) = U(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots, x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu).$$

Функція U називається *силовою функцією поля.* Основну властивість цієї функції формулюють так:

Робота сил потенціального силового поля при переміщенні матеріальної системи між двома її довільними в просторі положеннями M_1 і M_2 дорівнює відповідному приросту силової функції:

$$A_{M_1 M_2} = U(M_2) - U(M_1). \tag{3.59}$$

Доведення цього твердження не відрізняється від доведення аналогічного твердження для однієї матеріальної точки (стор. 126).

З основної властивості силової функції маємо, що елементарна робота сил поля дорівнює повному диференціалу силової функції:

$$d'A = dU, \tag{3.60}$$

або

$$\sum_{k=1}^{\nu} (X_k\,dx_k + Y_k\,dy_k + Z_k\,dz_k) = \sum_{k=1}^{\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial x_k}\,dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k}\,dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k}\,dz_k \right),$$

звідки, через довільність диференціалів координат,

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},\quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k},\quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k}. \tag{3.61}$$

Отже, *проекції сили поля, прикладеної до точки m_k системи, дорівнюють частинним похідним від силової функції по відповідних координатах цієї точки.*

Потенціальною енергією поля називають функцію V, яка відрізняється від силової функції U тільки знаком:

$$V(M) = -U(M),$$

або

$$V(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots, x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu) = -U(x_1,\ y_1,\ z_1, \ldots, x_\nu,\ y_\nu,\ z_\nu).$$

Кожному положенню M матеріальної системи в просторі відповідає певне значення потенціальної енергії, яке дорівнює роботі, що виконується силами поля при переміщенні матеріальної системи з даного положення M у початкове її положення M_0.

Основні рівності (3.59), (3.60) і (3.61) можна переписати за допомогою функції V так:

$$A_{M_1 M_2} = V(M_1) - V(M_2),$$
$$d'A = -dV,$$
$$X_k = -\frac{\partial V}{\partial x_k},\quad Y_k = -\frac{\partial V}{\partial y_k},\quad Z_k = -\frac{\partial V}{\partial z_k}.$$

Розглянемо тепер теорему про зміну кінетичної енергії у випадку, коли матеріальна система рухається в потенціальному силовому полі.

Теорема 7. *Якщо вільна матеріальна система рухається в потенціальному силовому полі, то виконується закон збереження механічної енергії.*

Дійсно, на підставі (3.60) теорема про зміну кінетичної енергії запишеться так:

$$dT = d'A = -dV,$$

де $-dV$ є елементарна робота всіх прикладених до точок системи сил. Проінтегрувавши цю рівність, знайдемо

$$T + V = h, \tag{3.62}$$

де h — стала величина.

Сума кінетичної і потенціальної енергій системи називається *повною механічною енергією* системи. Знайдена рівність (3.62) *виражає закон збереження механічної енергії* матеріальної системи.

З погляду математики рівність (3.62) є *першим інтегралом* диференціальних рівнянь руху матеріальної системи. Цей перший інтеграл називається *інтегралом енергії.*

Теорема 2. *Якщо ідеальні в'язі невільної матеріальної системи є стаціонарними і система рухається в потенціальному силовому полі, то виконується закон збереження механічної енергії.*

Для доведення зауважимо, що сили поля становлять клас активних сил системи, так що теорема про зміну кінетичної енергії тепер запишеться у вигляді

$$dT = -dV + d'A_n. \tag{3.63}$$

Тут у правій частині рівності перший доданок є, згідно з (3.60), робота всіх *активних* сил системи, а другий доданок — робота всіх *пасивних* сил, прикладених до точок системи.

Але у випадку, коли ідеальні в'язі стаціонарні, кожне елементарне дійсне переміщення системи належить, очевидно, до класу можливих переміщень цієї системи, а тому робота реакцій в'язей на підставі (3.8) дорівнює нулю. Отже, маємо

$$d'A_n = 0,$$

і рівність (3.63) приводить, як і у випадку руху вільної системи, до закону збереження механічної енергії.

Слід звернути увагу на те, що умова стаціонарності в'язей тут є необхідною; для системи з нестаціонарними в'язями, що рухається в потенціальному силовому полі, повна механічна енергія не зберігається.

Доведені тут дві теореми є причиною того, що потенціальне силове поле нерідко називають ще *консервативним* силовим полем.

6. Закон збереження механічної енергії для ізольованої системи матеріальних точок, які взаємодіють за законом всесвітнього тяжіння. Обчислимо спочатку роботу сил взаємодії двох точок m_j і m_k, що входять до складу системи. За законом всесвітнього тяжіння сила $\boldsymbol{f}_{jk}$, з якою точка з масою m_k діє на точку з масою m_j, дорівнює

$$\boldsymbol{f}_{jk} = \gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}_{jk}}{r_{jk}}\right), \tag{3.64}$$

де $\boldsymbol{r}_{jk}$ — вектор, що сполучає точки m_j і m_k, а γ — стала тяжіння.

Сила «протидії», тобто сила $\boldsymbol{f}_{kj}$, з якою точка m_j діє на точку m_k, відрізняється від сили $\boldsymbol{f}_{jk}$ тільки напрямом:

$$\boldsymbol{f}_{kj} = -\boldsymbol{f}_{jk}. \tag{3.65}$$

Робота цих двох сил на елементарному переміщенні точок дорівнює

$$d'A_{jk} = \boldsymbol{f}_{jk} d\boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{f}_{kj} d\boldsymbol{r}_k = \gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} \cdot \boldsymbol{r}_{jk}(d\boldsymbol{r}_j - d\boldsymbol{r}_k), \tag{3.66}$$

де $d\boldsymbol{r}_j$ і $d\boldsymbol{r}_k$ — переміщення точок m_j і m_k відповідно.

Тут вираз у дужках можна переписати так:

$$d\boldsymbol{r}_j - d\boldsymbol{r}_k = d(\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_k) = -d\boldsymbol{r}_{jk},$$

а тому маємо:

$$d'A_{jk} = -\gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}^3} \cdot \boldsymbol{r}_{jk} \cdot d\boldsymbol{r}_{jk}. \tag{3.67}$$

Але, диференціюючи тотожність $\boldsymbol{r}_{jk} \cdot \boldsymbol{r}_{jk} = r_{jk}^2$, знайдемо

$$\boldsymbol{r}_{jk} \cdot d\boldsymbol{r}_{jk} = r_{jk} \cdot dr_{jk}. \tag{3.68}$$

Підставивши (3.68) в (3.67), дістанемо

$$d'A_{jk} = -\gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}^2} \cdot dr_{jk},$$

або

$$d'A_{jk} = d\left(\gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}}\right). \tag{3.69}$$

Повна робота внутрішніх сил системи на елементарному її переміщенні дорівнює сумі елементарних робіт, тобто

$$d'A = d\left[\gamma\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \ldots + \ldots + \frac{m_1 m_\nu}{r_{1\nu}} + \right.\right.$$
$$+ \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \ldots + \frac{m_2 m_\nu}{r_{2\nu}} +$$
$$+ \ldots +$$
$$\left.\left. + \frac{m_{\nu-1} m_\nu}{r_{\nu-1,\nu}}\right)\right].$$

Скорочено цю суму запишемо так:

$$d'A = \frac{1}{2} d \sum_{j,k=1}^{\nu} \gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}} \qquad (j \neq k). \tag{3.70}$$

Множник $\frac{1}{2}$ тут необхідний, бо додавання автоматично включає двічі всі складові, наприклад, $\frac{m_1 m_2}{r_{12}}$ і $\frac{m_2 m_1}{r_{21}}$.

На підставі формули (3.70) потенціальна енергія системи точок, що взаємодіють за законом всесвітнього тяжіння, визначається рівністю

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{\nu} \gamma \cdot \frac{m_j m_k}{r_{jk}}. \tag{3.71}$$

Закон збереження механічної енергії ізольованої системи точок, які взаємодіють за законом всесвітнього тяжіння, має вигляд

$$\sum_{i=1}^{\nu} m_i v_i^2 - \sum_{j,k=1}^{\nu} \gamma \frac{m_j m_k}{r_{jk}} = h. \tag{3.72}$$

Якщо в другому доданку цієї рівності замінити $-\gamma m_j m_k$ на $e_j e_k$, то матимемо закон збереження механічної енергії ізольованої системи електричних зарядів $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, які взаємодіють за законом Кулона.

Поширимо цей результат на випадок, коли сили взаємодії між матеріальними точками системи залежать від віддалі між точками за законом

$$\boldsymbol{f}_{jk} = m_j m_k f(r_{jk}) \cdot \frac{\boldsymbol{r}_{jk}}{r_{jk}}, \tag{3.73}$$

де $f(r_{jk})$ — будь-яка функція віддалі, що розглядається як додатна у випадку притягання і як від'ємна у випадку відштовхування. Робота внутрішніх сил запишеться аналогічно до формули (3.70):

$$d'A = -d \sum_{j,k=1}^{\nu} m_j m_k \int f(r_{jk}) dr_{jk} \quad (j \neq k). \tag{3.74}$$

Потенціальна енергія визначається рівністю

$$V = \sum_{j,k=1}^{\nu} m_j m_k \int f(r_{jk})\, dr_{jk} \quad (j \neq k). \tag{3.75}$$

З попереднього випливає, що *закон збереження повної механічної енергії виконується для всякої ізольованої системи матеріальних точок, які взаємодіють за довільним законом, але таким, що сили є функції тільки віддалей.*

Теорема про зміну момента кількості руху матеріальної системи. Поширимо спочатку поняття про момент кількості руху матеріальної точки на випадок системи матеріальних точок.

Моментом кількості руху матеріальної системи відносно точки простору називається геометрична сума моментів кількостей руху матеріальних точок системи відносно тієї самої точки простору:

$$\boldsymbol{K} = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k. \tag{3.76}$$

Теорема. *Похідна по часу від момента кількості руху матеріальної системи відносно нерухомої точки простору дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно тієї самої точки простору.*

Звільнимо систему від в'язей на підставі відповідної аксіоми. За теоремою про зміну момента кількості руху окремої точки напишемо ν рівностей:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k) = \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k^{(e)} + \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k^{(i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Додаючи геометрично ліві й праві сторони цих рівностей для всіх k, на підставі (3.6) дістанемо

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k^{(e)}. \tag{3.77}$$

Цю рівність, згідно з нашими позначеннями, можна записати так:

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M}^{(e)}, \tag{3.78}$$

де $\boldsymbol{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{f}_k^{(e)}$ — головний момент зовнішніх сил. Теорему доведено.

Векторна рівність (3.78) еквівалентна трьом скалярним:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x^{(e)}, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^{(e)}, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^{(e)}, \tag{3.79}$$

тобто *похідна по часу від момента кількості руху матеріальної системи, взятого відносно будь-якої нерухомої в просторі осі, дорівнює сумі моментів зовнішніх сил відносно тієї самої осі.*

В окремому випадку, коли матеріальні точки системи взаємодіють тільки між собою, але не з зовнішніми тілами, тобто коли матеріальна система ізольована від впливу зовнішніх тіл, на підставі рівності (3.78) приходимо до висновку, що $\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = 0$, звідки

$$\boldsymbol{K} = \text{const},$$

або

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = c_x, \quad \sum_{k=1}^{\nu} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k) = c_y,$$

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k) = c_z. \tag{3.80}$$

Отже, *момент кількості руху ізольованої матеріальної системи відносно нерухомої точки* (а тому й відносно будь-якої нерухомої осі) *залишається сталим.* Цей висновок відомий як закон збереження момента кількості руху ізольованої матеріальної системи.

З погляду математики три рівності (3.80) є першими інтегралами диференціальних рівнянь руху матеріальної системи.

У випадку, коли матеріальна система не ізольована, може виконуватись закон збереження момента кількості руху відносно певної осі. Справді, якщо, наприклад, дорівнює нулю сума моментів зовнішніх сил відносно нерухомої осі Ox, $M_x^{(e)} = 0$, то перша з трьох рівностей (3.80) перепишеться так:

$$K_x = \sum_{k=1}^{\nu} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k) = \text{const}.$$

Це є перший інтеграл системи диференціальних рівнянь руху матеріальної системи.

Закон збереження момента кількості руху відносно осі часто зустрічається в задачах техніки, а також у задачах астрономії і теоретичної фізики.

П р и к л а д 1. Нехтуючи дією зірок, сонячну систему можна розглядати як ізольовану. Тому для цієї системи справедливі три основні закони збереження механіки:

$$P = \mathrm{const}, \quad T + V = h, \quad K = \mathrm{const}.$$

Площина, яка перпендикулярна до вектора K і проведена через центр інерції сонячної системи, має незмінну відносно зірок орієнтацію в просторі і називається ***незмінною площиною Лапласа***. Площина Лапласа утворює малий кут з площиною орбіти Землі; це тому, що всі великі планети обертаються навколо Сонця в площинах, які мало відхиляються від площини орбіти Землі.

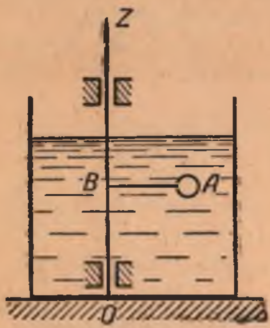

Рис. 60.

П р и к л а д 2*. Кулька A, яка вміщена в посудину з рідиною і прикріплена до кінця стержня AB довжини l, має початкову кутову швидкість ω_0 обертання навколо вертикальної осі. Сила опору рідини пропорціональна кутовій швидкості $\omega(t)$ і дорівнює $R = \alpha m\omega$, де m — маса кульки, α — коефіцієнт пропорціональності (рис. 60).

Визначити, через який проміжок часу кутова швидкість обертання буде вдвоє меншою, ніж початкова, і яку кількість обертів зробить стержень з кулькою за цей проміжок часу. Масу кульки вважати зосередженою в її центрі, масою стержня можна нехтувати.

На кульку діє сила ваги mg паралельно осі обертання Oz вертикально униз, сила опору R, напрямлена протилежно до вектора швидкості кульки, і реакції стержня — вертикально вгору і в напрямі стержня. Момент сил, паралельних осі обертання, і тих, що її перетинають, відносно цієї осі дорівнює нулю. Тому головний момент зовнішніх сил відносно осі обертання Oz дорівнює $- R \cdot l$, або $-\alpha m l\omega$. Момент кількості руху кульки відносно осі обертання дорівнює lmv, або $m\omega l^2$.

На підставі (3.79) маємо рівність:

$$\frac{d}{dt}(m\omega l^2) = -\alpha m l\omega,$$

або

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha}{l}\omega.$$

Інтегруючи це рівняння в межах від ω_0 до ω (по часу від $t = 0$ до t), знайдемо

$$t = \frac{l}{\alpha}\ln\frac{\omega_0}{\omega}, \quad \omega = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}. \tag{а}$$

Відповідь на перше запитання, поставлене в задачі, знайдемо, поклавши в формулі (а) $\omega = \frac{1}{2}\omega_0$; дістанемо $T = \frac{l}{\alpha}\ln 2$.

* Див. М. О. К і л ь ч е в с ь к и й, Курс теоретичної механіки, т. II, «Радянська школа», 1957, стор. 65.

Інтегруючи рівняння (а) і вважаючи $(\varphi)_{t=0} = 0$, знайдемо

$$\varphi = \frac{\omega_0 l}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha t}{l}}\right). \tag{б}$$

Якщо $t = T$, то $\varphi = \frac{\omega_0 l}{2\alpha}$; кількість обертів $n = \frac{\omega_0 l}{4\pi\alpha}$.

П р и к л а д 3. Однорідний диск A, радіус якого дорівнює R, а маса дорівнює M, обертається під дією тягаря $P = mg$, підвішеного на нитці, що намотана на вісь диска. Радіус осі дорівнює r. Знайти кутове прискорення диска, нехтуючи тертям у підшипниках і величиною маси осі (рис. 61).

Диск розглядатимемо як сукупність матеріальних точок з масами Δm.

Момент кількості руху довільної матеріальної точки Δm цієї сукупності відносно осі обертання диска дорівнює

$$\Delta m \cdot \omega\rho^2,$$

де ρ — віддаль точки Δm до осі обертання диска, а ω — кутова швидкість його обертання.

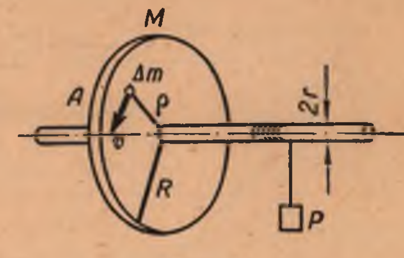

Рис. 61.

Момент кількості руху відносно осі обертання диска всіх матеріальних точок, з яких складається диск, дорівнює сумі моментів кількостей руху окремих точок:

$$K_x = \Sigma\Delta m \cdot \omega \cdot \rho^2 = \omega\,\Sigma\Delta m \cdot \rho^2,$$

де сума поширюється на всі точки диска.

Момент кількості руху тягаря відносно осі обертання дорівнює mvr, або $m\omega r^2$.

Момент сили ваги тягаря відносно осі обертання дорівнює $P \cdot r$, або mgr.

За теоремою про зміну момента кількості руху системи відносно осі маємо:

$$\frac{d\omega}{dt}\Sigma\Delta m \cdot \rho^2 + \frac{d\omega}{dt} \cdot mr^2 = mgr,$$

звідки

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{mgr}{mr^2 + \Sigma\Delta m \cdot \rho^2}. \tag{в}$$

Тут ми вперше зустрілись з величиною $\Sigma\Delta m \cdot \rho^2$, яка відіграє важливу роль у динаміці обертального руху тіла. Величина $I = \Sigma\Delta m \cdot \rho^2$, тобто сума добутків елементів мас тіла на квадрати їх віддалей від осі, називається *моментом інерції тіла відносно осі*. Якщо маса розподілена неперервно в певному обсязі, то суму слід розглядати як інтеграл:

$$I = \int\rho^2\,dm.$$

Обчислення цього інтеграла не становить труднощів у деяких випадках однорідних тіл правильної форми.

Обчислимо момент інерції однорідного циліндра (диска) відносно його осі. Масу циліндричного шара між двома циліндричними поверхнями, які мають спільну вісь і радіусами яких є ρ і $\rho + d\rho$, розглядатимемо як елемент маси dm.

Маємо:

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 H} \cdot 2\pi\rho\,d\rho \cdot H = 2\frac{M}{R^2} \cdot \rho\,d\rho,$$

де $\frac{M}{\pi R^2 H}$ — густина, H — висота циліндра.

Момент інерції циліндра відносно його осі дорівнює

$$I = \int \rho^2\, dm = 2\,\frac{M}{R^2}\int\limits_0^R \rho^3\, d\rho = \frac{MR^2}{2}. \qquad (\text{г})$$

Підставивши значення I у формулу (в), знайдемо остаточно кутове прискорення диска:

$$\varepsilon = \frac{m\,gr}{mr^2 + \dfrac{MR^2}{2}}. \qquad (\text{д})$$

§ 3. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ СИСТЕМИ У ВІДНОСНОМУ РУСІ

Розглянемо теорему про зміну момента кількості руху матеріальної системи і теорему про зміну кінетичної енергії у відносному русі.

Ці дві теореми для відносного руху формулюються так само, як і для абсолютного руху, якщо до сил, які діють на точки системи, додати ще сили інерції Коріоліса і переносні сили інерції. Це твердження випливає з двох інших: 1) розглядувані основні теореми є логічними висновками з другого закону Ньютона для однієї точки; 2) другий закон Ньютона у відносному русі формулюється так само, як і в абсолютному русі, але до діючих сил додаються сили інерції Коріоліса і переносні сили інерції (див. частину II, розд. VIII).

Основні теореми динаміки найчастіше доводиться застосовувати при аналізі руху матеріальної системи відносно центра її інерції. *Рухом матеріальної системи відносно центра інерції називається її рух відносно системи координат з початком у центрі інерції системи і незмінними напрямами координатних осей.* Для руху матеріальної системи відносно центра інерції теорему про зміну момента кількості руху і теорему про зміну кінетичної енергії формулюють так само, як для випадку абсолютного руху. Сформулюємо і доведемо ці дві теореми.

Теорема 1. *Похідна по часу від вектора* $\boldsymbol{K}'$ *момента кількості руху матеріальної системи, взятого в русі відносно центра інерції цієї системи, дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно центра інерції:*

$$\frac{d\boldsymbol{K}'}{dt} = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}'_k \times \boldsymbol{f}_k^{(e)}.$$

Дійсно, нехай $Oxyz$ — інерціальна система координат, а $Cx'y'z'$ — неінерціальна система, яка рухається поступально; початок цієї системи координат, за припущенням, збігається з центром мас матеріальної системи (рис. 62).

Теорему буде доведено, якщо впевнимось, що головний момент сил інерції матеріальної системи відносно центра її мас C дорівнює нулю. Саме цю величину і слід було б враховувати тут додатково у відносному русі.

Але сили інерції Коріоліса тут зовсім відсутні, бо, за умовою, система $Cx'y'z'$ рухається поступально (див. частину II, розд. VIII).

Головний момент переносних сил інерції, що дорівнюють $-m_k\boldsymbol{w}_k$, обчислимо так:

$$\boldsymbol{K}_c^{\text{пер}} = -\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}'_k \times m_k\boldsymbol{w}_k = -\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{r}'_k \times m_k\boldsymbol{w}_c = -\Big(\sum_{k=1}^{\nu} m_k\boldsymbol{r}'_k\Big) \times \boldsymbol{w}_c, \qquad (3.81)$$

де $\boldsymbol{r}'_k$ — відносний радіус-вектор точки m_k, а $\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{w}_c$ — прискорення центра мас системи.

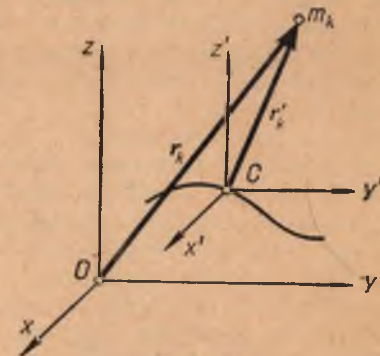

Рис. 62.

За означенням центра мас маємо:

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k\boldsymbol{r}'_k = m\boldsymbol{r}'_c,$$

так що вираз (3.81) можна переписати у вигляді $\boldsymbol{K}_c^{\text{пер}} = -m\boldsymbol{r}'_c \times \boldsymbol{w}_c$. Але цей добуток дорівнює нулю: ми вибрали рухому систему координат так, що центр мас весь час міститься в початку координат, і тому $\boldsymbol{r}'_c = 0$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Зміна кінетичної енергії матеріальної системи в її русі відносно центра інерції дорівнює роботі, виконуваній на відносному переміщенні всіма діючими зовнішніми і внутрішніми силами:*

$$dT' = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(e)} \cdot d\boldsymbol{r}'_k + \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k^{(i)} \cdot d\boldsymbol{r}'_k. \qquad (3.82)$$

Для доведення теореми достатньо впевнитись у тому, що робота переносних сил інерції на довільному відносному переміщенні системи (тобто на переміщенні системи відносно центра інерції) дорівнює нулю. Обчислимо цю роботу:

$$A'_{\text{пер}} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k\boldsymbol{w}_c \cdot d\boldsymbol{r}'_k = \Big(\sum_{k=1}^{\nu} m_k d\boldsymbol{r}'_k\Big) \cdot \boldsymbol{w}_c = d\Big(\sum_{k=1}^{\nu} m_k\boldsymbol{r}'_k\Big) \cdot \boldsymbol{w}_c = d\big(m\boldsymbol{r}'_c\big) \cdot \boldsymbol{w}_c = 0.$$

Тут вираз у дужках, як вже згадувалось, дорівнює нулю. Теорему доведено.

Розділ III

ЕЛЕМЕНТИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ЗМІННОЇ МАСИ

Рух тіл змінної маси дуже поширений у сучасній техніці. Маса тіла може змінюватись внаслідок: 1) відокремлення або приєднання частинок речовини; 2) залежності маси від швидкості руху.

Ми розглядатимемо зміни маси лише внаслідок відокремлення або приєднання до рухомого тіла частинок речовини. Зміни маси в залежності від швидкості руху стають практично помітними тільки при дуже великих швидкостях, близьких до швидкості світла. Залежність маси від швидкості руху має істотне значення при русі елементарних частинок у прискорювачах, які використовує атомна техніка, і в космічному просторі. Ці випадки тут не розглядатимемо.

Можливі три типи задач на визначення руху тіл змінної маси: перший — під час руху відбувається приєднання частинок речовини, другий — відбувається відокремлення частинок речовини і третій — відбувається одночасне приєднання і відокремлення частинок речовини. Прикладами таких типів задач є: намотування ланцюга на барабан, який обертається, намотування нитки на веретено, падіння в атмосфері утворюваної краплини води, яке супроводжується конденсацією пари на ній, піднімання скіпа в шахті з допомогою троса, що намотується на барабан; політ ракети з відкиданням продуктів згоряння палива, політ реактивного літака, розмотування рулону паперу в друкарській машині, розмотування нитки в човнику ткацької машини; політ реактивних літаків з прямоточним повітряно-реактивним або газотурбінним реактивним двигуном (маса реактивного літака збільшується завдяки засмоктуванню повітря в двигун і зменшується завдяки відкиданню продуктів згоряння) тощо.

Основні гіпотези. При виведенні рівняння руху точки змінної маси виходитимемо з таких передумов.

Під точкою розуміємо тіло достатньо малих розмірів, маса якого змінюється протягом часу. Зв'яжемо з цим тілом незмінно систему координат *Oxyz*. Центр мас тіла змінює своє положення відносно цієї системи відліку. Вважатимемо, що зміщення центра мас тіла в системі *Oxyz* настільки мале порівняно з розмірами самого тіла, що цим зміщенням можна знехтувати. Більше того, ми взагалі нехтуватимемо й розмірами тіла, яке розглядатимемо як матеріальну точку змінної маси. Далі, ми виходитимемо з гіпотези близькодії. За цією гіпотезою частинка речовини, яка відокремлюється від основної точки M або приєднується до неї, змінює швидкість точки M тільки в момент відокремлення або приєднання. Саме в момент, коли виникає відносна швидкість частинки речовини відносно основної точки, виникає взаємодія

(за законом рівності дії і протидії) між частинкою речовини і основною точкою. Дія, якої зазнає основна точка M, аналогічна удару або силі «віддачі» при пострілі.

Припускатимемо також, що в процесі руху точки M її маса m змінюється в часі неперервно і похідна $\frac{dm}{dt}$ залишається скінченною.

Нарешті, ми користуватимемось ще законом незалежності дії сил у такій формі: елементарний приріст швидкості матеріальної точки за нескінченно малий проміжок часу під дією кількох сил дорівнює геометричній сумі тих приростів швидкості, яких точка набула б при роздільній дії цих сил.

§ 1. ОСНОВНЕ РІВНЯННЯ РУХУ ТОЧКИ ЗМІННОЇ МАСИ (РІВНЯННЯ МЕЩЕРСЬКОГО)

Виведемо рівняння руху матеріальної точки M відносно інерціальної системи відліку, припускаючи, що від цієї точки відокремлюються частинки речовини, а маса основної точки M і її швидкість змінюються неперервно.

У момент t маса основної точки дорівнює $m(t)$, а в момент $t + dt$ вона дорівнює $m + dm$, де dm — від'ємна величина, тобто $dm < 0$.

Швидкість основної точки в момент t дорівнює $\boldsymbol{v}(t)$, а в момент $t + dt$ дорівнює $\boldsymbol{v}(t) + d\boldsymbol{v}$. Отже, кількість руху основної точки в момент t дорівнює $m\boldsymbol{v}$, а в момент $t + dt$ буде $(m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v})$.

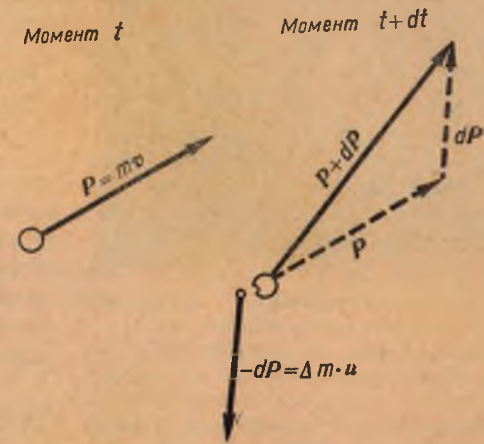

Рис. 63.

Геометричний приріст кількості руху дорівнює (з точністю до малих першого порядку включно)

$$dp = (m + dm)(\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}) - m\boldsymbol{v} = md\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}dm. \qquad (3.83)$$

Ця зміна вектора кількості руху основної точки обумовлена відокремленням частинок речовини. Якщо за час dt від основної точки відокремлюється частинка з масою $\Delta m = -dm$ і абсолютною швидкістю $\boldsymbol{u}$, то частинка, що відокремилась, забирає з собою кількість руху, яка дорівнює $\Delta m \cdot \boldsymbol{u}$ (рис. 63).

За законом збереження руху напишемо:

$$dp = -\Delta m \cdot \boldsymbol{u}, \qquad (3.84)$$

тобто зміна вектора кількості руху основної точки дорівнює за величиною і протилежна за напрямом вектору кількості руху частинки, що відокремилась.

Оскільки маса частинки, яка відокремилась, дорівнює $\Delta m = -dm$, то формулу (3.84) можна записати так:

$$d\boldsymbol{p} = dm \cdot \boldsymbol{u}. \qquad (3.85)$$

Прирівнявши праві частини (3.83) і (3.85), дістанемо:

$$m \cdot d\boldsymbol{v} + dm \cdot \boldsymbol{v} = dm \cdot \boldsymbol{u},$$

звідки

$$d\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{m}. \qquad (3.86)$$

Ми знайшли приріст вектора абсолютної швидкості основної точки, обумовлений відокремленням частинки з масою $\Delta m = -dm$ і абсолютною швидкістю $\boldsymbol{u}$.

Якщо на точку діє зовнішня сила $\boldsymbol{f}$, то, на підставі другого закону Ньютона, приріст швидкості точки буде

$$d\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{f}}{m}dt.$$

Згідно з принципом незалежності дії сил повна зміна швидкості точки змінної маси, яка рухається під дією зовнішньої сили, буде

$$d\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{m} + \frac{\boldsymbol{f}}{m}dt.$$

Іван Всеволодович Мещерський (1859—1935).
Основоположник динаміки тіл змінної маси як теоретичної основи реактивного руху.

Помноживши це рівняння на m і розділивши на dt, дістанемо

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} + (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{dt}. \qquad (3.87)$$

Це й є рівняння руху точки змінної маси — *рівняння Мещерського*, яке він вивів у 1897 р.

Рівняння Мещерського можна написати в інших еквівалентних формах. Другий доданок правої частини рівняння є додаткова (реактивна) сила, обумовлена відокремленням частинок. Оскільки $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ є відносна швидкість відокремлюваних (відносно основної точки) частинок, яку ми позначимо через $\boldsymbol{v}_r$, то реактивна сила $\boldsymbol{\Phi}$ дорівнюватиме

$$\boldsymbol{\Phi} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{v}_r\frac{dm}{dt},$$

а рівняння Мещерського набере такого вигляду:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{\Phi}. \qquad (3.88)$$

При русі матеріальної точки змінної маси добуток маси цієї точки на її прискорення дорівнює геометричній сумі прикладеної до точки зовнішньої сили $\boldsymbol{f}$ *і реактивної сили* $\boldsymbol{\Phi}$.

Рівняння Мещерського можна переписати ще так:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{v}\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt},$$

або

$$\frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} + \boldsymbol{u}\frac{dm}{dt}. \qquad (3.89)$$

Застосування рівняння Мещерського покажемо на найпростіших прикладах, уперше досліджених К. Е. Ціолковським.

§ 2. ПЕРША ЗАДАЧА ЦІОЛКОВСЬКОГО

Реактивний апарат рухається в просторі без впливу зовнішніх сил. Нехай відносна швидкість витікання частинок стала за величиною і має незмінний напрям, протилежний швидкості основної точки, рух якої відбувається в напрямі осі Ox.

Якщо в рівнянні Мещерського

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{f} + \frac{dm}{dt}\cdot\boldsymbol{v}_r$$

Костянтин Едуардович Ціолковський (1857—1935).
Великий вітчизняний учений, основоположник теорії ракетоплавання. Сучасні штучні супутники Землі і перша в світі радянська космічна ракета створені і запущені на основі його теорії ракет і космічних польотів.

покласти $\boldsymbol{f} = 0$, $\boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{c}$ і спроектувати його на вісь Ox, то дістанемо (рис. 64)

$$m\frac{dv}{dt} = -c\frac{dm}{dt},$$

звідки

$$dv = -c\frac{dm}{m},$$

або, після інтегрування,

$$v = v_0 + c\ln\frac{m_0}{m}, \qquad (3.90)$$

де m — маса точки в довільний момент часу.

Зокрема, якщо m_k — маса точки в кінці процесу відокремлення частинок, $m_п$ — відкинута маса (для реактивного апарата $m_п$ — маса пального), а початкова швидкість $v_0 = 0$, то, згідно з формулою (3.90), дістанемо:

$$v = c \ln \frac{m_k + m_п}{m_k},$$

або

$$v = c \ln (1 + Z), \tag{3.91}$$

де $Z = \frac{m_п}{m_k}$ — так зване число Ціолковського.

З цієї формули виходить, що заданому числу Ціолковського відповідає певна кінцева швидкість апарата, яка не залежить від режиму роботи двигуна і швидкості спалювання пального. Це треба розуміти так: якщо перший з двох апаратів спалює пальне в два рази швидше і викидає продукти згоряння через сопло подвоєної площі перерізу з тією самою швидкістю c, що й другий апарат, то, оскільки числа Ціолковського для цих двох апаратів, за умовою, рівні, кінцеві швидкості апаратів — швидкості в кінці активної частини шляху — будуть однаковими.

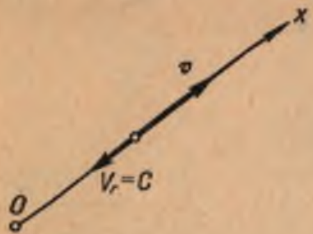

Рис. 64.

Ця формула Ціолковського (3.91) показує також, що для забезпечення великих швидкостей наприкінці активного відрізка шляху доцільно збільшувати відносну швидкість $v_r = c$ відкидання частинок, а не число Z, тобто не відносний запас пального (Z стоїть під знаком логарифма, тоді як c — множник).

Режимом спалювання і викидання пального визначається *закон зміни* швидкості. Справді, припустимо, що маса апарата зменшується рівномірно за законом

$$m(t) = m_0 (1 - \alpha t),$$

де α — коефіцієнт, який характеризує швидкість спалювання пального. Інтегруючи рівняння $dv = -c \frac{dm}{m}$ від початкового моменту $t_0 = 0$ до моменту t, дістанемо

$$v(t) - v_0 = c \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

або

$$v(t) = v_0 + c \ln \frac{1}{1 - \alpha t}.$$

Але якщо маса змінюється за іншим законом, наприклад, за показниковим, $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$, то

$$v(t) = v_0 + c\alpha t,$$

що відповідає рівноприскореному характеру руху апарата.

Отже, *кожному режиму спалювання маси пального відповідає свій закон зміни швидкості, але кінцеві швидкості апаратів наприкінці активного відрізка шляху будуть однаковими, якщо тільки в двох однакових апаратах спалено однакову кількість пального при одній і тій самій постійній швидкості відкидання частинок.*

Пройдений апаратом *шлях* можна обчислити, інтегруючи рівняння для $v(t)$:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = v_0 + c \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

звідки

$$s = v_0 t + c \int_0^t \ln \frac{m_0}{m(t)} dt + \text{const}.$$

Наприклад, якщо маса апарата зменшується за показниковим законом, то

$$s = v_0 t + c \int_0^t \alpha t \, dt + \text{const},$$

звідки

$$s = v_0 t + \frac{c\alpha t^2}{2} + \text{const},$$

тобто апарат рухатиметься рівноприскорено.

Звернемо увагу на те, що *при рівноприскореному русі точки реактивна сила не буде сталою, а змінюється за показниковим законом*, тобто за формулою

$$\Phi_r = -c \frac{dm}{dt} = c\alpha m_0 e^{-\alpha t},$$

де α — константа.

Стала реактивна сила надає точці, маса якої зменшується з часом, прискорення не стале, а таке, що дедалі зростає. Реактивна сила буде сталою в тому разі, коли маса зменшується рівномірно за законом $m = m_0 (1 - \alpha t)$.

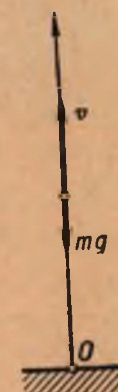

Рис. 65.

§ 3. ДРУГА ЗАДАЧА ЦІОЛКОВСЬКОГО

Вивчимо рух реактивного апарата, який піднімається вертикально вгору в однорідному полі тяжіння, маючи початкову швидкість v_0. Відносна швидкість частинок стала за величиною, напрямлена вертикально вниз і дорівнює $v_r = c$.

Проектуючи рівняння $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \frac{dm}{dt} \cdot \mathbf{v}_r$ на вісь Oz, яка напрямлена вертикально вгору, дістанемо (рис. 65)

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - c \frac{dm}{dt},$$

або

$$dv = -g\,dt - c\frac{dm}{m}.$$

Інтегруючи це рівняння, матимемо

$$v = v_0 - gt + c\ln\frac{m_0}{m}.$$

Якщо, наприклад, $m = m_0 e^{-\alpha t}$, то

$$v = v_0 + (c\alpha - g)\,t.$$

Отже, при показниковому законі зменшення маси рух буде рівноприскореним, якщо $c\alpha > g$.

Повторне інтегрування визначає шлях:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + (c\alpha - g)\,t,$$

звідки

$$s = v_0 t + (c\alpha - g)\frac{t^2}{2} + \mathrm{const}.$$

Розділ IV

ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ І РІВНЯННЯ АНАЛІТИЧНОЇ ДИНАМІКИ

§ 1. ПРИНЦИП ГЕРМАНА — ЕЙЛЕРА — ДАЛАМБЕРА. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА — ЛАГРАНЖА. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ МЕХАНІКИ

1. Принцип Германа — Ейлера — Даламбера для системи. Побудову аналітичної динаміки ми почнемо з узагальнення принципу Германа — Ейлера — Даламбера на випадок довільної матеріальної системи з якими завгодно в'язями, що рухається під дією яких завгодно сил. Для випадку руху однієї точки цей принцип було вже докладно розглянуто (див. частину II, розд. VIII).

Для матеріальної системи принцип Германа — Ейлера — Даламбера формулюється так:

Якщо систему, яка перебуває в русі, зупинити в будь-який момент часу і до кожної точки прикласти її силу інерції, а активні сили взяти відповідними даному моменту, то система перебуватиме в рівновазі і реакції в'язей будуть ті самі, що й у розглядуваному положенні при її русі.

Справедливість сформульованого твердження випливає безпосередньо з принципу Германа — Ейлера — Даламбера, який можна прикласти до кожної точки, що входить у систему.

На підставі принципу Германа — Ейлера — Даламбера напишемо рівності, що стосуються окремих точок системи:

$$\boldsymbol{f}_k + \boldsymbol{N}_k + \boldsymbol{I}_k = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu), \tag{3.92}$$

де $\boldsymbol{I}_k = -m_k\boldsymbol{w}_k$ — сила інерції точки m_k.

Рівності (3.92) в своїй сукупності і визначають принцип Германа — Ейлера — Даламбера для системи.

З цих рівностей легко зробити два висновки, які дуже часто використовуються при розв'язуванні задач.

Додавши всі рівності (3.92) по k від 1 до ν, дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{f}_k + \sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{N}_k + \sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{I}_k = 0. \tag{3.93}$$

Жан Лерон Даламбер (1717—1783).

Французький математик, механік і філософ. Поряд з Л. Ейлером і Д. Бернуллі Даламбер є основоположником математичної фізики. Своїми працями він підготував шлях для розвитку небесної механіки.

Помноживши рівність (3.92) векторно на радіус-вектор $\boldsymbol{r}_k$ точки m_k і додавши по k від 1 до ν, матимемо

$$\sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{f}_k + \sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{N}_k + \sum_{k=1}^{\nu}\boldsymbol{r}_k\times\boldsymbol{I}_k = 0. \tag{3.94}$$

Дві нові рівності — (3.93) і (3.94) — доводять, що *в кожний момент руху матеріальної системи головний вектор і головний момент сукупності всіх активних сил, пасивних сил, що діють на точки системи, і сил інерції дорівнюють нулю.*

Дві векторні рівності (3.93) і (3.94) еквівалентні шести скалярним, які дістаємо з векторних після проектування їх на нерухомі декартові осі. Отже, в будь-який момент руху довільної системи матеріальних точок виконуються такі рівності:

1) *сума проекцій на будь-яку координатну вісь усіх активних сил, пасивних сил і сил інерції всіх точок системи дорівнює нулю;*

2) *сума моментів тих самих сил відносно кожної з координатних осей дорівнює нулю.*

Принцип Германа — Ейлера — Даламбера справедливий і для системи, яку подано неперервно розподіленою масою (наприклад, для твердого тіла). У цьому випадку в рівностях (3.93) і (3.94) додавання слід замінити інтегруванням по об'єму тіла.

Практична цінність принципу Германа — Ейлера — Даламбера полягає, по-перше, в його загальності і, по-друге, в можливості формального використання при розв'язуванні задач про рух тих рівнянь і методів, які були розвинені раніше в статиці.

Приклад. Тонкий прямолінійний однорідний стержень довжиною l і вагою P обертається з сталою кутовою швидкістю ω навколо нерухомої точки O (сферичний шарнір), описуючи конічну поверхню з віссю OA і вершиною в точці O. Визначити кут φ відхилення стержня від вертикального напряму, а також величину R тиску стержня на шарнір O (рис. 66).

Тут зручно застосувати принцип Германа — Ейлера — Даламбера. Тому з'ясуємо спочатку питання про сили інерції всіх елементів $d\xi$, на які можна мислено роздрібнити весь стержень. Тангенціальні складові сил інерції дорівнюють нулю, бо стержень обертається рівномірно. Відцентрова сила інерції елемента стержня $d\xi$ з масою dm дорівнює

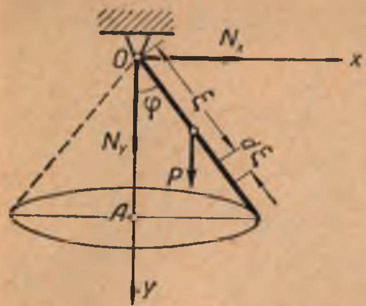

Рис. 66.

$$dI = \omega^2\xi\sin\varphi\cdot dm = \frac{P}{gl}\omega^2\sin\varphi\cdot\xi\,d\xi,$$

де ξ — віддаль елемента $d\xi$ від шарніра O.

Сили інерції всіх елементів $d\xi$ паралельні між собою, і тому їх рівнодійна дорівнює

$$I = \frac{P}{gl}\omega^2\sin\varphi\int\limits_0^l\xi\,d\xi = \frac{P\omega^2 l}{2g}\sin\varphi.$$

На підставі принципу Германа — Ейлера — Даламбера головний вектор і головний момент усіх активних сил, пасивних сил і сил інерції дорівнює нулю.

Умова, що головний вектор дорівнює нулю, означає, що

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{I} = 0,$$

де $\boldsymbol{P}$ — вага стержня, $\boldsymbol{N}$ — реакція шарніра.

У проекціях на осі координат (див. рис. 66) матимемо

$$N_x + I = 0,\quad P + N_y = 0,$$

звідки

$$N_x = -I = -\frac{P\omega^2 l}{2g}\sin\varphi,$$

$$N_y = -P.$$

Прирівняємо тепер нулю суму моментів сил відносно осі Oz:

$$\mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{I} + \mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{P} + \mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{N} = 0.$$

Але маємо:

$$\mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{I} = \int\xi\cdot\cos\varphi\cdot dI = \frac{P}{2gl}\omega^2\sin2\varphi\int\limits_0^l\xi^2\,d\xi = \frac{P\omega^2l^2}{6g}\sin2\varphi,$$

$$\mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{P} = -P\cdot\frac{l}{2}\sin\varphi,$$

$$\mathrm{mom}_z\,\boldsymbol{N} = 0.$$

Тому

$$\frac{P\omega^2l^2}{6g}\sin2\varphi - \frac{Pl}{2}\sin\varphi = 0,$$

звідки

$$\cos\varphi = \frac{3g}{2\omega^2 l}.$$

Тиск стержня на шарнір, який дорівнює реакції шарніра і протилежний їй, знайдемо за формулою

$$R = N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{Pl\omega^2}{2g}\sqrt{1 + \frac{7g^2}{4\omega^4l^2}}.$$

2. Принцип ~~Даламбера~~ — Лагранжа. Загальне рівняння механіки. Поширимо принцип можливих переміщень на випадок руху матеріальної системи. Це можна зробити, використавши принцип Германа — Ейлера — Даламбера. Оскільки сили інерції точок матеріальної системи, згідно з (3.92), «зрівноважують» прикладені до них активні сили і реакції в'язей, то буде справедливим твердження:

Сума робіт активних сил і сил інерції на можливих переміщеннях матеріальної системи з ідеальними стаціонарними в'язями дорівнює нулю.

Це й є принцип Даламбера — Лагранжа. Цей принцип можна подати математично у вигляді так званого *загального рівняння механіки*:

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{f}_k - m_k\boldsymbol{w}_k)\cdot\delta\boldsymbol{r}_k = 0, \tag{3.95}$$

або

$$\sum_{k=1}^{n}[(X_k - m_k\ddot{x}_k)\,\delta x_k + (Y_k - m_k\ddot{y}_k)\,\delta y_k + (Z_k - m_k\ddot{z}_k)\,\delta z_k] = 0, \tag{3.96}$$

де x_k, y_k, z_k — координати точки m_k, δx_k, δy_k, δz_k — варіації цих координат, X_k, Y_k, Z_k — проекції активної сили $\boldsymbol{f}_k$, прикладеної до точки m_k, на осі декартової системи.

Загальне рівняння динаміки можна покласти в основу всієї науки про механічний рух. Його можна безпосередньо використовувати і для розв'язування задач, що нижче показано на прикладі.

Приклад. Через блоки A і B з нерухомими осями перекинуто шнур, який підтримує рухомий блок C; частини шнура, які не лежать на блоках, вертикальні. Блок C навантажено гирею M ваги $P = 2$ *кГ*; до кінців шнура прикріплено тягарі M_1 і M_2 вагою $P_1 = 1$ *кГ* і $P_2 = 1{,}5$ *кГ*. Визначити прискорення всіх трьох тягарів, нехтуючи масами блоків та шнура і тертям на осях (рис. 67).

Система складається з трьох тягарів M, M_1 і M_2, але має лише два ступені вільності, бо між ординатами z (центра блока C), z_1 і z_2 (центрів ваги тягарів M_1 і M_2) існує залежність

$$z_2 + z_1 + 2z = \text{const.} \tag{а}$$

З цієї рівності маємо:

$$\delta z_2 + \delta z_1 + 2\delta z = 0 \tag{б}$$

і

$$\ddot{z}_2 + \ddot{z}_1 + 2\ddot{z} = 0. \tag{в}$$

Запишемо загальне рівняння динаміки у вигляді

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g}\cdot \ddot{z}_1\right)\delta z_1 + \left(P_2 - \frac{P_2}{g}\cdot \ddot{z}_2\right)\delta z_2 + \left(P - \frac{P}{g}\cdot \ddot{z}\right)\delta z = 0, \qquad (г)$$

або, підставивши числові дані,

$$(g - \ddot{z}_1)\cdot \delta z_1 + 1{,}5\,(g - \ddot{z}_2)\cdot \delta z_2 + 2\,(g - \ddot{z})\,\delta z = 0. \qquad (д)$$

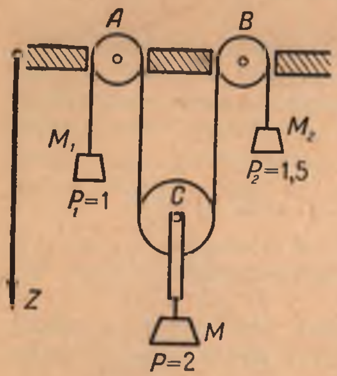

Рис. 67.

Серед можливих переміщень системи є таке, при якому вісь блока C нерухома; для такого переміщення $\delta z = 0$, а $\delta z_2 = -\delta z_1$ [це можна бачити з (б)]. Рівняння (д) для цього переміщення дає

$$(g - \ddot{z}_1) - 1{,}5\,(g - \ddot{z}_2) = 0,$$

або

$$3\ddot{z}_2 - 2\ddot{z}_1 = g. \qquad (е)$$

Для іншого можливого переміщення тягар M_2 нерухомий; маємо $\delta z_2 = 0$, а $\delta z_1 = -2\delta z$. З рівняння (д) тепер знайдемо

$$2\,(g - \ddot{z}_1) - 2\,(g - \ddot{z}) = 0,$$

звідки

$$\ddot{z} = \ddot{z}_1. \qquad (є)$$

Розв'язуючи рівняння (в), (е) і (є), дістанемо

$$\ddot{z} = \ddot{z}_1 = -\frac{1}{11}\,g; \quad \ddot{z}_2 = \frac{3}{11}\,g.$$

Отже, прискорення тягаря M_2 напрямлене протилежно прискоренням тягарів M і M_1.

§ 2. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ПЕРШОГО РОДУ

Знайдемо диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок з ідеальними голономними стаціонарними в'язями, рівняння яких є:

$$f_i\,(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, z_\nu) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (3.97)$$

Якщо в який-небудь момент t систему зупинити і надати їй сумісного з в'язями переміщення, то, оскільки в'язі не порушені, нові координати $x_k + \delta x_k$, $y_k + \delta y_k$, $z_k + \delta z_k$ теж задовольнятимуть рівняння в'язей (3.97), тобто

$$f_i\,(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1,\ z_1 + \delta z_1, \ldots, x_\nu + \delta x_\nu,\ y_\nu + \delta y_\nu,\ z_\nu + \delta z_\nu) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (3.98)$$

Якщо від (3.98) відняти (3.97), то з точністю до величин другого порядку малості дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\cdot \delta x_k + \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\cdot \delta y_k + \frac{\partial f_i}{\partial z_k}\cdot \delta z_k\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \qquad (3.99)$$

У цих рівняннях коефіцієнти $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z_k}$ є певні (для даного положення системи) числа, тоді як варіації δx_k, δy_k, δz_k можна вибирати різні, аби тільки вони відповідали сумісним з в'язями переміщенням системи. Отже, рівняння (3.99) слід розглядати як умови, що накладаються голономними в'язями (3.97) на варіації координат δx_k, δy_k, δz_k.

Помножимо рівняння (3.99) на неозначені поки що множники λ_i (метод множників Лагранжа), додамо ліві частини рівнянь для i від 1 до r; результат додамо до лівої частини загального рівняння динаміки (3.96). Дістанемо

$$\sum_{k=1}^{\nu}\left[\left(X_k - m_k\ddot{x}_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k + \left(Y_k - m_k\ddot{y}_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)\delta y_k + \right.$$
$$\left. + \left(Z_k - m_k\ddot{z}_k + \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial z_k}\right)\delta z_k\right] = 0. \qquad (3.100)$$

Множники λ_i можна підібрати так, що це рівняння розпадеться на 3ν окремих рівнянь. Справді, серед 3ν варіацій координат δx_k, δy_k, δz_k є $3\nu - r$ незалежних і r залежних варіацій. Незалежні варіації координат можна вибирати цілком довільні, а залежні варіації слід визначати через незалежні варіації з рівнянь (3.99). Якщо підібрати величини λ_i так, щоб вирази, які стоять множниками при r залежних варіаціях координат у рівнянні (3.100), перетворилися в нуль, то в рівнянні (3.100) міститимуться тільки незалежні варіації координат, і в силу їх повної довільності всі множники, які стоять у круглих дужках при цих незалежних варіаціях, теж повинні дорівнювати нулю.

В результаті з рівняння (3.100) маємо:

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k &= X_k + \sum_{k=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \\ m_k\ddot{y}_k &= Y_k + \sum_{k=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \\ m_k\ddot{z}_k &= Z_k + \sum_{k=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial f_i}{\partial z_k} \end{aligned}\right| \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad (3.101)$$

Це й є шукані рівняння руху точок m_k матеріальної системи — *рівняння Лагранжа першого роду*. Приєднуючи до цих 3ν рівнянь ще r рівнянь в'язей (3.97), дістанемо повну систему $3\nu + r$ рівнянь для визначення $3\nu + r$ невідомих координат точок системи і множників Лагранжа:

$$x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t),\ \ldots,\ x_\nu(t), y_\nu(t), z_\nu(t);\ \lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_r(t).$$

Знаючи множники Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, можна визначити реакції в'язей. Наприклад, якщо існує тільки одна перша в'язь $f_1 = 0$, то, згідно з (3.101), проекції на осі координат реакції цієї в'язі для точки m_k дорівнюють

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_k}, \quad \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_k}.$$

Рівняння Лагранжа першого роду незручні для практичного застосування, бо із збільшенням числа в'язей системи збільшується й число рівнянь, які до того ще й ускладнюються. Недосконалість цих рівнянь полягає ще й у тому, що вони не розв'язують питання про визначення руху точок системи незалежно від обчислення реакцій в'язей.

За своїм змістом розглянутий тут спосіб вивчення руху довільної матеріальної системи завершує той метод, який будують на основі другого закону Ньютона. Рівняння Лагранжа першого роду є, по суті, такими, що визначають другий закон Ньютона для кожної точки матеріальної системи; ці рівняння використовують тільки одну з двох мір руху — векторну.

Тепер перейдемо до побудови тих методів дослідження руху матеріальних систем, в основі яких лежить використання другої — скалярної — міри руху.

§13. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА ДРУГОГО РОДУ. УЗАГАЛЬНЕНІ СИЛИ. УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ І УЗАГАЛЬНЕНІ ШВИДКОСТІ

1. Узагальнені координати і узагальнені швидкості. У першій частині курсу була побудована кінематика точки в криволінійних координатах. Положення вільної точки в просторі визначалось там системою довільних параметрів q_1, q_2, q_3, які зв'язані взаємно однозначною відповідністю з декартовими координатами x, y, z рухомої точки. Поширимо цей спосіб визначення положення матеріального об'єкта в просторі на випадок довільної системи матеріальних точок. Це дасть змогу побудувати новий метод дослідження руху матеріальних систем.

Параметри $q_1, q_2, \ldots, q_n$, які однозначно визначають положення матеріальної системи в просторі, називаються узагальненими координатами системи.

Якщо на систему накладено r голономних в'язей, то кількість ступенів вільності системи і кількість незалежних координат дорівнюватиме $n = 3\nu - r$ і для визначення положення такої системи в просторі потрібно буде не менш як $3\nu - r$ параметрів. Припустимо, що вибір узагальнених координат здійснюється завжди так, що їх кількість є мінімальною і дорівнюватиме $n = 3\nu - r$, так що всі узагальнені координати $q_1, q_2, \ldots, q_n$ незалежні одна від одної. Незалежними будуть і всі варіації узагальнених координат $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$.

Наведемо приклади узагальнених координат.

Положення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, можна визначити за допомогою однієї узагальненої координати — кута повороту φ тіла. Положення твердого тіла з однією нерухомою точкою можна визначити трьома кутами Ейлера. Положення системи двох матеріальних точок, які незмінно зв'язані між собою за допомогою невагомого стержня, можна визначити за допомогою п'яти параметрів — трьох координат центра мас системи і двох напрямних косинусів осі стержня.

Жозеф Луї Лагранж (1736—1813).

Видатний французький учений, відомий своїми працями в галузі теоретичної механіки й математики. Написав класичний трактат «Аналітична механіка», який відіграв видатну роль у розвитку точних наук.

Оскільки узагальнені координати однозначно визначають положення системи в просторі, радіуси-вектори всіх точок цієї системи є функції узагальнених координат і взагалі часу:

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu), \qquad (3.102)$$

або в скалярній формі

$$\left.\begin{aligned} x_k &= x_k (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ y_k &= y_k (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ z_k &= z_k (t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned}\right\} \quad (3.103)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Співвідношення (3.103) можна розглядати як параметричні рівняння в'язей, бо після виключення з цих рівностей параметрів q_i знайдемо $3\nu - n = 3\nu - (3\nu - r) = r$ рівнянь, що зв'язують координати точок $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, z_\nu$ і час t. Якщо час t в рівняння (3.103) явно не входить, то визначені цими рівняннями в'язі є стаціонарними. Якщо ж в'язі системи нестаціонарні, то час t увійде явно до співвідношень (3.103).

Введемо поняття узагальнених швидкостей. Диференціюючи функцію (3.102) по часу, знайдемо вектор швидкості k-ої точки:

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} \cdot \dot{q}_1 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_n} \cdot \dot{q}_n = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j. \qquad (3.104)$$

Похідні по часу від узагальнених координат, тобто величини $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, називатимемо *узагальненими швидкостями* системи.

Формула (3.104) доводить, що вектор швидкості $\boldsymbol{v}_k$ є лінійною функцією відносно узагальнених швидкостей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ (коефіцієнти $\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}, \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_n}$, згідно з (3.102), залежать тільки від

$q_1, q_2, \ldots, q_n, t$, але не від $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$). Продиференціювавши рівність (3.104) по узагальненій швидкості, знайдемо тотожність

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.105}$$

яку використаємо нижче при виведенні рівнянь Лагранжа другого роду. Там же доведеться використати ще одну тотожність, а саме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.106}$$

У справедливості тотожності (3.106) впевнимось так. Оскільки диференційовна функція $\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}$ залежить від t явно і ще через узагальнені координати $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то за правилом диференціювання складної функції маємо:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i\, \partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i\, \partial q_j} \cdot \dot{q}_j. \tag{3.107}$$

Але, диференціюючи функцію $\boldsymbol{v}_k$, подану формулою (3.104), по q_i, дістанемо

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial t\, \partial q_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j\, \partial q_i} \cdot \dot{q}_j. \tag{3.108}$$

Праві частини виразів (3.107) і (3.108) однакові, отже, тотожність (3.106) доведено.

2. Узагальнені сили. У ньютонівській динаміці сила виступає як характеристика бистроти (в часі) фізичного процесу передавання руху; при цьому рух вимірюється *векторною* його мірою.

При побудові динаміки на основі *скалярної* міри руху також треба ввести фізичні величини, які характеризують процес перенесення руху на досліджувану матеріальну систему. Ці нові динамічні характеристики процесу перенесення руху від навколишніх фізичних систем до розглядуваної і є так звані *узагальнені сили.* Дамо їм математичне означення.

Обчислимо роботу прикладених до точок системи *активних* сил $\boldsymbol{f}_k$ на можливому переміщенні матеріальної системи. Маємо:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \delta \boldsymbol{r}_k. \tag{3.109}$$

Але, диференціюючи рівність (3.102) при фіксованому t, знайдемо

$$\delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i, \tag{3.110}$$

де δ — символ варіації.

На підставі (3.110) формулу (3.109) перепишемо так:

$$\delta A = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} \cdot \delta q_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) \cdot \delta q_i,$$

або

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \delta q_i, \tag{3.111}$$

де

$$Q_i = \sum_{k=1}^{\nu} \boldsymbol{f}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^{\nu}\left(X_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right). \tag{3.112}$$

Формула (3.111) доводить, що робота активних сил на можливому переміщенні будь-якої матеріальної системи є лінійна функція варіацій узагальнених координат.

Величини $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, що є множниками при варіаціях узагальнених координат у формулі (3.111) роботи активних сил на можливому переміщенні матеріальної системи, називаються *узагальненими силами.*

Пригадавши фізичний зміст роботи як міри перетвореної енергії, приходимо до висновку, що узагальнені сили, як і звичайні, дійсно характеризують процес перенесення руху на дану матеріальну систему. Але узагальнені сили характеризують зміну запасу руху системи в зв'язку із зміною узагальнених координат, а не безпосередньо із зміною часу.

Очевидно, добуток $Q_i \delta q_i$ узагальненої сили на приріст відповідної узагальненої координати дорівнює елементарній роботі активних сил на тих переміщеннях точок системи, які обумовлені приростом δq_i відповідної узагальненої координати. Тому, щоб обчислити, наприклад, узагальнену силу Q_1, досить надати малого приросту тільки координаті q_1 і визначити роботу активних сил на тих переміщеннях точок системи, які обумовлені тільки зміною координати q_1.

З означення узагальнених сил випливає твердження: якщо узагальненою координатою є кут, то узагальненою силою буде головний момент системи активних сил відносно відповідної цьому куту осі повороту [див. (3.20)].

3. Узагальнені сили системи у випадку, коли активні сили мають силову функцію. Знайдемо узагальнені сили в тому випадку, коли активні сили, що діють на систему, мають силову функцію, яка може залежати явно і від часу:

$$U = U\,(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_\nu, y_\nu, z_\nu; t). \tag{3.113}$$

Якщо в функції (3.113) усі декартові координати подати через узагальнені за допомогою (3.103), то в результаті цієї операції матимемо нову функцію, яка залежить від узагальнених координат і часу; цю нову функцію знову позначимо символом U:

$$U = U\ (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n;\ t). \tag{3.114}$$

Оскільки за означенням силової функції проекції активних сил, які діють на точки m_k системи, визначаються за допомогою силової функції (3.113) за формулами

$$X_k = \frac{\partial U}{\partial x_k},\quad Y_k = \frac{\partial U}{\partial y_k},\quad Z_k = \frac{\partial U}{\partial z_k},$$

то узагальнені сили за (3.112) дорівнюватимуть

$$Q_i = \sum_{k=1}^{\nu}\left(X_k \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + Y_k \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + Z_k \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{\nu}\left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial U}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Отже, частинні похідні від силової функції (3.114) по узагальнених координатах дорівнюють відповідним узагальненим силам:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}\ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.115}$$

У тому окремому випадку, коли силова функція U залежить тільки від координат, але не залежить явно від часу t, можна користуватись поняттям потенціальної енергії V. При цьому потенціальна енергія дорівнює

$$V\ (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n) = -U\ (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n),$$

і узагальнені сили можна подати так:

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}\ \ (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3.116}$$

Тут величини Q_i вже не залежать явно від часу.

Узагальнені сили на практиці найчастіше визначають, обчислюючи елементарну роботу активних сил на можливому переміщенні системи; формули (3.112) використовують для цієї мети рідко; у випадку, коли активні сили потенціальні, можна користуватись безпосередньо формулами (3.116).

Приклад 1. На тягар, який прикріплений до нитки і коливається по дузі кола у вертикальній площині, діють дві сили: вертикально вниз — вага тягаря mg і в напрямі до точки підвісу — сила натягу нитки (рис. 68). Тільки перша з цих двох сил є активною, тоді як друга сила — реакція в'язі (реакція нитки). Потенціальна енергія, яка відповідає активній силі, дорівнює (відлічуємо потенціальну енергію від її значення для положення тягаря на рівні точки O підвісу):

$$V = -mgl\cos\varphi.$$

Узагальнена сила буде

$$Q = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

Фізичний зміст Q простий: тут Q дорівнює моменту сили тяжіння відносно осі обертання нитки (ця вісь проходить через точку O перпендикулярно до площини рисунка). Якщо узагальнена координата є кут, то роль узагальненої сили відіграє момент сили.

Приклад 2. Розглянемо подвійний математичний маятник, тобто дві кулі, які сполучені ниткою і коливаються у вертикальній площині (див. рис. 69). Активними силами, що діють на кулі, є тільки сили ваги цих куль: m_1g і m_2g. Потенціальну енергію активних сил умовимось відлічувати від того самого рівня, що й у попередньому випадку. Маємо:

$$V = -m_1ga\cos\varphi - m_2g\,(a\cos\varphi + b\cos\psi),$$

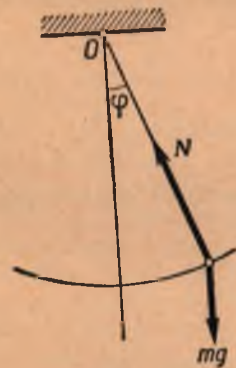

Рис. 68.

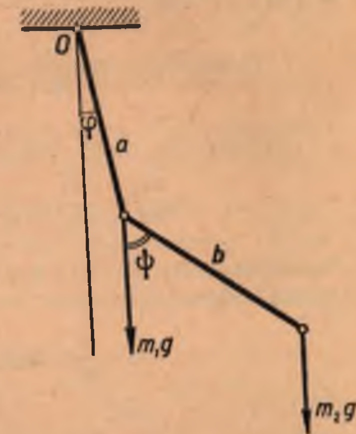

Рис. 69.

де a і b — довжини ниток, m_1 і m_2 — маси куль, φ і ψ — кути між напрямами ниток і вертикаллю. Узагальнені сили, які відповідають узагальненим координатам φ і ψ, дорівнюють

$$Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -m_1ga\sin\varphi - m_2ga\sin\varphi = -(m_1 + m_2)\,ga\sin\varphi,$$

$$Q_\psi = -\frac{\partial V}{\partial \psi} = -m_2gb\sin\psi.$$

4. Рівняння Лагранжа другого роду. За своїм змістом рівняння Лагранжа другого роду являють собою рівняння руху довільної матеріальної системи, записані відносно узагальнених координат. Метод виведення рівнянь Лагранжа полягає в перетворенні загального рівняння динаміки (3.95), тобто рівняння

$$\sum_{k=1}^{\nu} f_k \cdot \delta r_k - \sum_{k=1}^{\nu} m_k w_k \delta r_k = 0 \tag{3.117}$$

до узагальнених координат. У цьому рівнянні перша сума

$$\sum_{k=1}^{\nu} f_k \cdot \delta r_k$$

є роботою активних сил на можливому переміщенні системи. Як було показано вище, ця робота дорівнює

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i. \qquad (3.118)$$

Щоб обчислити другий доданок у рівнянні (3.117), тобто суму

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{w}_k \delta \boldsymbol{r}_k,$$

знайдемо спочатку добуток $m_k \boldsymbol{w}_k \delta \boldsymbol{r}_k$, користуючись формулою (3.110); маємо:

$$m_k \boldsymbol{w}_k \delta \boldsymbol{r}_k = m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)\delta q_i. \qquad (3.119)$$

Розглянемо тепер тотожність

$$m_k \frac{d\boldsymbol{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{v}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) - m_k \boldsymbol{v}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right). \qquad (3.120)$$

За допомогою (3.105) і (3.106) праву частину цієї тотожності можна переписати так:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \boldsymbol{v}_k \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) - m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i},$$

або

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}(m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k)\right] - \frac{1}{2} m_k \cdot \frac{\partial}{\partial q_i}(\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k),$$

або

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right). \qquad (3.121)$$

Звернемо увагу на те, що під знаками частинних похідних стоїть кінетична енергія точки m_k.

Додаючи (3.119) по k від 1 до ν і користуючись (3.121), знайдемо:

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{w}_k \delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\delta q_i, \qquad (3.122)$$

де $T = \sum_{k=1}^{\nu} \frac{m_k v_k^2}{2}$ — кінетична енергія системи. Якщо тепер замінити значення доданків у загальному рівнянні динаміки за допомогою (3.118) і (3.122), то дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}\right]\right\}\delta q_i = 0. \qquad (3.123)$$

Рівняння (3.123) розпадається на n окремих рівнянь, бо при голономних в'язях усі координати q_i незалежні, а їх варіації δq_i можуть набувати довільних значень. Можна покласти, наприклад, $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$. Тоді матимемо, що множник при δq_1 у рівнянні (3.123) дорівнює нулю. Усього таким способом знайдемо n рівнянь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.124)$$

Отже, якщо кінетична енергія матеріальної системи є T, а робота активних сил на можливому переміщенні системи $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ дорівнює $\sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$, де T, як і всі Q_i, відомі як функції від $q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t$ (в силу того, що структура механічної системи відома), то рівняння руху системи мають вигляд (3.124).

Це й є *рівняння Лагранжа другого роду*, або рівняння руху системи матеріальних точок в узагальнених координатах. Кількість рівнянь Лагранжа дорівнює кількості узагальнених координат або (що для системи з голономними в'язями одне й те саме) ступенів вільності руху системи.

Рівняння Лагранжа другого роду являють собою систему звичайних (не в частинних похідних) рівнянь другого порядку з невідомими функціями $q_1, \ldots, q_n$ від часу t. При інтегруванні цієї системи виникне $2n$ незалежних довільних сталих. З введенням рівнянь Лагранжа вивчення руху системи зведено до знаходження узагальнених координат $q_1, \ldots, q_n$ як функцій часу.

Структура рівнянь Лагранжа така: у правих частинах цих рівнянь подано узагальнені сили $Q_1, \ldots, Q_n$, а при записуванні лівої частини використовується значення кінетичної енергії T. Оскільки узагальнені сили системи визначаються при обчисленні роботи активних сил, то пасивні сили виявляються «виключеними». Із структури рівнянь Лагранжа випливає, що дві зовсім різні механічні системи, але з однаковою кінетичною енергією T і узагальненими силами Q_i, динамічно еквівалентні, тобто відповідні узагальнені координати цих систем змінюються за однаковими законами.

У найпростішому випадку однієї матеріальної точки рівняння руху буде одне і запишеться в такому вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q, \qquad (3.125)$$

де T — кінетична енергія точки, Q — узагальнена сила, а q — узагальнена координата.

Рівняння Лагранжа, що є рівняннями руху матеріальної системи, за своїм фізичним змістом є відображенням закону незнищуваності руху, вимірюваного енергією. Існування рівнянь руху, в яких використовується скалярна його міра, можна було б передбачити зразу ж після того, як було встановлено наявність двох рівноправних мір руху — скалярної і векторної.

5. Рівняння Лагранжа у випадку, коли існує силова функція активних сил. Функція Лагранжа. У цьому випадку, згідно (3.115), буде

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

і рівняння Лагранжа можна записати так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Оскільки U від $\dot{q}_i$ не залежить, то $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial (T + U)}{\partial \dot{q}_i}$, і рівняння Лагранжа набирають такої форми:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T + U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T + U)}{\partial q_i} = 0,$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{3.126}$$

де $L = T + U$ — так звана *функція Лагранжа.*

Отже, щоб записати рівняння Лагранжа другого роду, треба тільки обчислити L як функцію від часу, узагальнених координат і узагальнених швидкостей. Функція L є сумою кінетичної енергії системи і силової функції активних сил.

У випадку, коли силова функція U не залежить явно від часу t, $U = U(q_1, \ldots, q_n)$, ми можемо користуватись поняттям потенціальної енергії, яка дорівнює

$$V = -U(q_1, \ldots, q_n).$$

Функція Лагранжа L буде тепер різницею кінетичної і потенціальної енергій:

$$L = T - V. \tag{3.127}$$

Використання рівнянь Лагранжа другого роду в фізиці виходить далеко за межі самої механіки. Ці рівняння з узагальненою функцією L використовуються в різних розділах теоретичної фізики і в ряді прикладних наук (радіотехніці, електротехніці, гідродинаміці, теорії пружності і т. д.). Рівняння Лагранжа другого роду описують, як виявляється, не тільки механічні рухи матеріальних систем, а й рухи немеханічної природи. Про поширення методів механіки на випадок дослідження немеханічних рухів докладніше сказано в останній частині книги.

6. Методика застосувань рівнянь Лагранжа другого роду. Використовуючи рівняння Лагранжа другого роду, рух різноманітних систем вивчають за допомогою єдиного методу, який ми розглянемо по етапах. Ці етапи такі.

1. Визначаємо кількість ступенів вільності руху системи і відповідно до цього вибираємо n узагальнених незалежних одна від одної координат $q_1, \ldots, q_n$. Цей перший етап вимагає аналізу в'язей системи.

2. Обчислюємо узагальнені сили. Якщо кількість ступенів вільності руху системи більша за одиницю, то при обчисленні узагальнених сил можна застосувати такий прийом: змінюємо тільки першу узагальнену координату q_1, зафіксувавши всі інші координати $q_2, \ldots, q_n$, і обчислюємо роботу δA_1 активних сил, прикладених до всіх точок системи, на тому можливому переміщенні всіх точок системи, яке обумовлене зміною тільки q_1 на δq_1. Відношення $\frac{\delta A_1}{\delta q_1}$ дасть узагальнену силу Q_1. Аналогічно визначаються і всі інші узагальнені сили $Q_2, \ldots, Q_n$. Визначаючи узагальнені сили, не слід забувати, що у випадку нестаціонарних в'язей, перш ніж варіювати координати, треба зупинити в'язі.

Якщо активні сили мають силову функцію, то визначення узагальнених сил Q_i зводиться до визначення силової функції U системи як функції узагальнених координат і, можливо, часу та до диференціювання цієї функції по координатах, бо $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$. У складних випадках користуються формулою (3.112).

3. Обчислюємо кінетичну енергію T системи як функцію від узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу:

$$T = T(q_1, q_2, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t).$$

4. Знаючи функцію T і узагальнені сили Q_i, пишемо рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Записуючи ці рівняння, зручно раніше обчислити похідні від кінетичної енергії: $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ і $\frac{\partial T}{\partial q_i}$.

5. Інтегруємо рівняння Лагранжа, тобто знаходимо узагальнені координати $q_1, \ldots, q_n$ як функції часу t і $2n$ довільних сталих, які з'являються при інтегруванні n рівнянь Лагранжа другого порядку:

$$q_i = f_i(t; C_1, C_2, \ldots, C_{2n}) \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.128}$$

6. Визначаємо сталі $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ з початкових умов руху. Початкові умови полягають у тому, що в деякий момент часу задані числові значення координат $q_1^0, \ldots, q_n^0$ і значення узагальнених швидкостей $\dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_n^0$.

Диференціюючи (3.128) по часу, дістанемо

$$\dot{q}_i = f_i'(t;\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{2n})\quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (3.129)$$

Підставляючи в праві частини рівнянь (3.128) і (3.129) замість t значення t_0, а в ліві значення координат $q_1^0, \ldots, q_n^0$ і швидкостей $\dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_n^0$, дістанемо $2n$ рівнянь для визначення $2n$ сталих $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$. Рівняння (3.128) із знайденими числовими значеннями сталих $C_1, \ldots, C_{2n}$ і дають остаточний розв'язок задачі про визначення руху розглядуваної матеріальної системи.

Приклад 1. **Циклоїдальний маятник.** Знайти закон коливань важкої матеріальної точки з масою m у вертикальній площині вздовж циклоїди, нехтуючи силами тертя.

Нагадаємо, що профіль циклоїди викреслює кожна точка обода круглого диска, що котиться вздовж прямої. З математики відомо, що рівняння циклоїди можна записати у вигляді

$$s = 4a \sin \varphi,$$

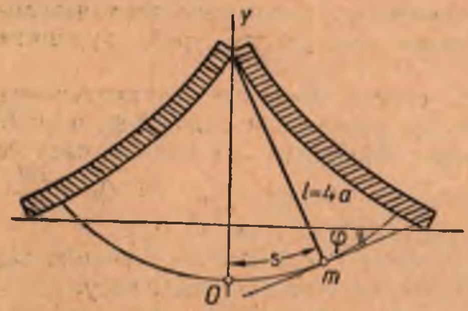

Рис. 70.

де s — довжина дуги, яка відлічується від середньої точки O, φ — кут між напрямною прямою і дотичною до циклоїди в тій її точці, яка визначається дугою s, a — радіус диска, що котиться вздовж горизонтальної напрямної прямої * (рис. 70).

Складаємо функцію Лагранжа

$$L = T - V.$$

Кінетична енергія тягаря, який коливається, дорівнює

$$T = \frac{1}{2} m\dot{s}^2,$$

де дугу s вибрано за узагальнену координату маятника. Потенціальна енергія V тягаря дорівнює

$$V = mgy,$$

де

$$y = \int dy = \int \sin \varphi ds = \int_0^{\varphi} 4a \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 2a \sin^2 \varphi = \frac{1}{8a} s^2.$$

Звідси маємо:

$$V = \frac{mg}{8a} \cdot s^2,$$

і функція Лагранжа буде така:

$$L = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - \frac{mg}{8a} \cdot s^2. \qquad (а)$$

* Гюйгенс винайшов спосіб реалізації циклоїдального маятника. Оскільки еволютою циклоїди є теж циклоїда, однакова з початковою, то достатньо взяти два циклоїдальні шаблони і в точці їх стику закріпити нитку довжиною $l = 4a$ з тягарем на кінці. При коливаннях тягаря частина нитки прилягає до шаблона, а тягар описує циклоїду, однакову з циклоїдою шаблонів.

Рівняння Лагранжа буде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial L}{\partial s} = 0, \qquad (б)$$

де, згідно з (а),

$$\frac{\partial L}{\partial s} = -\frac{mg}{4a} s, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = m\dot{s}. \qquad (в)$$

Підставляючи ці значення в рівняння Лагранжа, дістаємо

$$\frac{d}{dt}(m\dot{s}) + \frac{mg}{4a} \cdot s = 0,$$

або

$$\ddot{s} + \frac{g}{4a} s = 0.$$

Ми дістали диференціальне рівняння другого порядку, розв'язок якого має вигляд

$$s = A \sin (\omega t + \alpha),$$

де

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}.$$

Отже, дуга s циклоїдального маятника змінюється за простим гармонічним законом. Період циклоїдального маятника дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}},$$

тобто

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

де $l = 4a$.

Період коливань циклоїдального маятника не залежить від величини амплітуди: два однакових циклоїдальних маятники коливаються ізохронно, хоч як відрізнялися б їх амплітуди.

Зауважимо, що циклоїді властива така особливість: час руху важкої матеріальної точки у вертикальній площині між двома заданими точками простору по циклоїді є мінімальним. Час руху важкої точки по всякій іншій кривій (зокрема, і по прямій), що сполучає ті самі точки простору, буде більшим, ніж час руху по циклоїді.

Задачу про лінію найшвидшого руху точки — *брахістохрону* — поставив у 1696 р. Й. Бернуллі; її розв'язання першими знайшли Й. Бернуллі, Я. Бернуллі, Ньютон і Лопіталь. Ця задача поклала початок розвитку *варіаційного числення* в математиці.

Приклад 2. Кільце з масою m рухається без тертя по прямолінійному стержню, який обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω в горизонтальній площині. Знайти закон відносного руху кільця по стержню.

Кінетична енергія абсолютного руху кільця дорівнює

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2),$$

де x — віддаль у момент t від кільця до нерухомого центра O обертання стержня. Єдиною активною силою, яка діє на кільце, є його вага. Робота цієї сили на можливому переміщенні кільця (по стержню, який миттєво зупинений) дорівнює нулю, бо стержень займає горизонтальне положення, а вага кільця — вертикальна сила. Звідси випливає, що узагальнена сила Q теж дорівнює нулю, і рівняння Лагранжа мають такий вигляд:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Підставляючи в це рівняння значення T, знайдемо

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) - m\omega^2 x = 0,$$

або

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0.$$

Частинними розв'язками цього рівняння є функції $e^{\omega t}$ і $e^{-\omega t}$, а його загальний розв'язок буде

$$x = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \tag{г}$$

Сталі інтегрування A, B визначаються з початкових умов руху. Нехай у початковий момент руху $t = 0$ було: $x = x_0$, $\dot{x} = 0$. Підставляючи в (г) $t = 0$ і $x = x_0$, а потім диференціюючи (г) по t і знову підставляючи $t = 0$ і $\dot{x} = 0$, дістанемо два рівняння для визначення сталих A і B. Ці рівняння такі:

$$x_0 = A + B, \quad 0 = A - B.$$

Знаходимо

$$A = B = \frac{x_0}{2}.$$

Закон руху кільця по стержню запишеться так:

$$x = \frac{x_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = x_0 \operatorname{ch} \omega t.$$

Отже, за допомогою рівняння Лагранжа можна, як виявляється, вивчати і відносний рух. Для цього за узагальнені координати треба вибирати відносні координати (в наведеному прикладі це координата x), але кінетичну енергію T треба обчислювати в абсолютному русі (швидкість v у формулі для T абсолютна, а не відносна). Іншими словами, кінетична енергія повинна бути знайдена як енергія абсолютного руху, подана у відносних координатах.

При вивченні відносного руху рівняння Ньютона $m\boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}$ значно ускладнюється додаванням сил інерції, тоді як рівняння Лагранжа тут використовуються без будь-якої зміни їх форми.

§ 4. КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ СИСТЕМИ

Знайдемо вираз кінетичної енергії системи в узагальнених координатах. Кінетична енергія матеріальної системи є сума кінетичних енергій окремих матеріальних точок, що входять у систему:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} m_k \boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k. \tag{3.130}$$

Але за формулою (3.104) швидкість $\boldsymbol{v}_k$ дорівнює

$$\boldsymbol{v}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1}\cdot \dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2}\cdot \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_n}\cdot \dot{q}_n = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i;$$

отже, маємо:

$$\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i\right)\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\cdot \dot{q}_j\right) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} +$$

$$+ 2\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{3.131}$$

Підставивши значення $\boldsymbol{v}_k \cdot \boldsymbol{v}_k$ у формулу (3.130) і помінявши порядок додавання, знайдемо

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\nu} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\nu} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{3.132}$$

Введемо позначення:

$$\left.\begin{aligned}
T_0 &= \sum_{k=1}^{\nu}\frac{m_k}{2}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\\
T_1 &= \sum_{i=1}^{n} A_i\dot{q}_i, \quad \text{де } A_i = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial t}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\\
T_2 &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \quad \text{де } A_{ij} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_j} = A_{ji}
\end{aligned}\right| \tag{3.133}$$

Формула кінетичної енергії перепишеться остаточно так:

$$T = \frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2 + A_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + A_{nn}\dot{q}_n^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots +$$

$$+ 2A_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n) + (A_1\dot{q}_1 + A_2\dot{q}_2 + \ldots + A_n\dot{q}_n) + T_0, \tag{3.134}$$

або в скороченій формі:

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

де T_2 — квадратична форма узагальнених швидкостей, T_1 — лінійна форма, а T_0 — не залежить від узагальнених швидкостей.

Особливо цікавий випадок стаціонарних в'язей, який часто зустрічається на практиці. У цьому випадку вектори $\boldsymbol{r}_k$ не залежать явно від часу t, і тому T_0 і T_1 дорівнюють нулю. Отже, у випадку стаціонарних в'язей $T = T_2$, тобто кінетична енергія системи є квадратичною формою узагальнених швидкостей, причому коефіцієнти A_{ij} цієї форми є функціями тільки узагальнених координат (не залежать явно від часу):

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{3.135}$$

Рівняння Лагранжа можна записати в явному вигляді, якщо в (3.124) підставити значення функції T згідно з (3.134). При цьому легко виявити, що рівняння Лагранжа другого роду дійсно являють собою систему n звичайних (не в частинних похідних) рівнянь другого порядку відносно n узагальнених координат системи.

На закінчення доведемо, що у випадку стаціонарних в'язей функція T задовольняє тотожність

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i=2T. \tag{3.136}$$

Справді, на підставі (3.135) маємо:

$$T=\frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2+\ldots+A_{nn}\dot{q}_n^2+2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2+\ldots+ \\ +2A_{n-1,\,n}\dot{q}_{n-1},\dot{q}_n). \tag{3.137}$$

Звідси знайдемо

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=A_{11}\dot{q}_1+A_{12}\dot{q}_2+\ldots+A_{1n}\dot{q} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_n}=A_{n1}\dot{q}_1+A_{n2}\dot{q}_2+\ldots+A_{nn}\dot{q}_n\end{array}\right| \tag{3.138}$$

Помноживши ці рівності, відповідно, на $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n$ і додавши їх, дістанемо (3.136).

Зауважимо, що знайдена тотожність є наслідком однорідності функції T (див. теорему Ейлера про однорідні функції в курсах математичного аналізу).

§ 5. ІНТЕГРАЛ ЕНЕРГІЇ

Доведемо таку теорему.

Якщо функція Лагранжа не залежить явно від часу, а в'язі системи стаціонарні, то повна механічна енергія системи залишається сталою.

Продиференціюємо функцію $L(q_1,\ldots,q_n;\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n)$ по часу:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\cdot\frac{d}{dt}(\dot{q}_i)\right]= \\ =\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right). \tag{3.139}$$

При перетворенні ми використали тут рівняння Лагранжа. Проінтегрувавши (3.139) по часу, знайдемо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L=h, \tag{3.140}$$

де h — стала.

Замінивши функцію L у рівності (3.140) її значенням $L=T-V$ і взявши до уваги тотожність (3.136), яка справедлива у випадку стаціонарних в'язей, матимемо

$$h=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-(T-V)=2T-(T-V)=T+V,$$

тобто

$$T+V=h. \tag{3.141}$$

Теорему доведено. З погляду математики рівність (3.141) є першим інтегралом рівнянь Лагранжа другого роду.

§ 6. КАНОНІЧНІ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

1. Узагальнені імпульси. Для матеріальної точки проекції її імпульса дорівнюють частинним похідним від кінетичної енергії цієї точки по узагальнених швидкостях $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$:

$$p_x=\frac{\partial T}{\partial\dot{x}},\quad p_y=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}},\quad p_z=\frac{\partial T}{\partial\dot{z}},$$

$$\text{де } T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\ \text{а}\ \ p_x=m\dot{x},\ p_y=m\dot{y},\ p_z=m\dot{z}.$$

Поширюючи цю властивість на випадок системи матеріальних точок, введемо таке означення:

Узагальненими імпульсами матеріальної системи називаються частинні похідні від кінетичної енергії системи по узагальнених швидкостях.

Отже, узагальнені імпульси системи визначаються з рівностей

$$p_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_1},\quad p_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_2},\ \ldots,\ p_n=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_n}.$$

Скориставшись значенням кінетичної енергії (3.134), дістанемо

$$\begin{array}{l}p_1=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_1}=A_{11}\dot{q}_1+A_{12}\dot{q}_2+\ldots+A_{1n}\dot{q}_n+A_1, \\ p_2=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_2}=A_{21}\dot{q}_1+A_{22}\dot{q}_2+\ldots+A_{2n}\dot{q}_n+A_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{q}_n}=A_{n1}\dot{q}_1+A_{n2}\dot{q}_2+\ldots+A_{nn}\dot{q}_n+A_n.\end{array} \tag{3.142}$$

Ці формули показують, що узагальнені імпульси є лінійними функціями узагальнених швидкостей. В окремому випадку, коли в'язі стаціонарні, коефіцієнти $A_1, \ldots, A_n$ дорівнюють нулю і узагальнені імпульси будуть не тільки лінійними, а й *однорідними* функціями узагальнених швидкостей.

Рівняння (3.142) завжди допускають розв'язок відносно узагальнених швидкостей у випадку як нестаціонарних, так і стаціонарних в'язей. Це можливо тому, що детермінант системи рівнянь, складений з коефіцієнтів A_{ij}, як виявляється, завжди відмінний від нуля:

$$\| A_{ij} \| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.143)$$

Причина цього в тому, що коефіцієнти A_{ij} не є довільними: вони такі, що кінетична енергія є додатно означеною формою.

Обмежимось доведенням твердження про те, що $\|A_{ij}\| \neq 0$ для випадку, коли в'язі стаціонарні. Це твердження легко довести методом «від супротивного», а саме: припустимо, що детермінант (3.143) дорівнює нулю для значень A_{ij}, взятих у певний момент руху системи. Тоді система лінійних однорідних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_{11}\dot q_1 + A_{12}\dot q_2 + \ldots + A_{1n}\dot q_n &= 0 \\ A_{21}\dot q_1 + A_{22}\dot q_2 + \ldots + A_{2n}\dot q_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}\dot q_1 + A_{n2}\dot q_2 + \ldots + A_{nn}\dot q_n &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad (3.144)$$

допускає нетривіальний розв'язок, тобто такий, коли хоч одне $\dot q_i$ не дорівнює нулю в зазначений момент руху. Але, помноживши рівняння (3.144), відповідно, на $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$ і додавши їх, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} \left(A_{i1}\dot q_1 + A_{i2}\dot q_2 + \ldots + A_{in}\dot q_n \right) \dot q_i = 0,$$

або

$$2T = 0.$$

Ліва частина цієї рівності є вираз для подвоєної кінетичної енергії. Виходить, що кінетична енергія дорівнює нулю тоді, коли система рухається (бо не всі $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ — нулі). Абсурдність цього висновку свідчить про неправильність припущення, що детермінант дорівнює нулю. Твердження доведено.

Повернемось тепер знову до системи лінійних рівнянь (3.142), які зв'язують узагальнені імпульси з узагальненими швидкостями даної системи. Оскільки детермінант $\|A_{ij}\| \neq 0$, можна твердити, що систему (3.142) алгебраїчних лінійних неоднорідних рівнянь завжди (тобто у випадку руху якої завгодно матеріальної системи) можна розв'язати відносно узагальнених швидкостей $\dot q_i$. Розв'язуючи цю систему рівнянь (3.142) відносно $\dot q_i$,

знайдемо

$$\left. \begin{aligned} \dot q_1 &= B_{11}p_1 + B_{12}p_2 + \ldots + B_{1n}p_n + B_1 \\ \dot q_2 &= B_{21}p_1 + B_{22}p_2 + \ldots + B_{2n}p_n + B_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot q_n &= B_{n1}p_1 + B_{n2}p_2 + \ldots + B_{nn}p_n + B_n \end{aligned} \right\}, \qquad (3.145)$$

де всі коефіцієнти B_{ij} і B_k є функціями $q_1, \ldots, q_n$ і t.

У випадку, коли в'язі матеріальної системи стаціонарні, коефіцієнти $A_1, \ldots, A_n$ і $B_1, \ldots, B_n$ у формулах (3.142) і (3.145) дорівнюють нулю. При цьому залежність між узагальненими координатами і узагальненими імпульсами подається не тільки лінійними, а й однорідними співвідношеннями.

2. **Канонічні змінні. Фазовий простір**. Вище було розглянуто метод Лагранжа дослідження руху матеріальної системи, в якому *стан* матеріальної системи (положення точок і їх швидкості) визначався узагальненими координатами $q_1, \ldots, q_n$ і узагальненими швидкостями $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$. Оскільки в початковий момент часу змінним q_k і $\dot q_k$ можна надавати будь-яких початкових значень, то в цьому розумінні координати $q_1, \ldots, q_n$ і швидкості $\dot q_1, \ldots, \dot q_n$ незалежні одні від одних. Проте в методі Лагранжа узагальнені координати $q_1, \ldots, q_n$ виконують роль основної групи змінних.

Вище було показано, що між узагальненими швидкостями й імпульсами існує взаємно однозначна відповідність [формули (3.142)]. Тому *стан матеріальної системи можна визначати також за допомогою узагальнених координат і імпульсів.*

Узагальнені координати разом з узагальненими імпульсами, тобто змінні $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, називаються канонічними змінними.

Канонічні змінні розглядаються як *рівноправні*, тобто координати $q_1, \ldots, q_n$ не відокремлюються і не розглядаються як основна група змінних, як у методі Лагранжа.

Щоб ввести геометричну термінологію при доведеннях різних теорем, вводять поняття про *фазовий простір*. Оскільки всі канонічні змінні можна розглядати як цілком рівноправні незалежні параметри матеріальної системи, то під фазовим простором розуміють евклідів простір $2n$ вимірів з координатами $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$.

Кожна точка з певної області фазового простору характеризує деякий стан матеріальної системи, тобто систему значень координат і імпульсів. Навпаки, кожному стану механічної системи відповідає певна точка фазового простору. Коли система рухається в реальному тривимірному просторі, то точка, яка зображає систему, «рухається» в уявлюваному фазовому просторі $2n$ вимірів, де n — кількість ступенів вільності системи.

13. **Канонічні рівняння.** Знайдемо диференціальні рівняння руху системи в канонічних змінних. Розглянемо функцію

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{3.146}$$

Це є певна функція узагальнених координат, швидкостей і, можливо, часу. Якщо в (3.146) узагальнені швидкості виключити з допомогою рівнянь (3.142), то функція H буде зображена в канонічних змінних, і тоді вона називається *функцією Гамільтона*.

Знайдемо повний диференціал функції Гамільтона H при сталому значенні t двома способами. Безпосередньо маємо:

$$\delta H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n; t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right), \tag{3.147}$$

а з формули (3.146) знаходимо

$$\delta H = \delta \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - \delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta p_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \delta \dot{q}_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i.$$

Але другий і четвертий доданки тут взаємно знищуються, бо за означенням узагальнених імпульсів маємо: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. У третьому доданку, на підставі рівнянь Лагранжа, можна зробити таку заміну: $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$. Тому маємо:

$$\delta H = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \delta p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \delta q_i. \tag{3.148}$$

Ми знайшли два вирази для δH. Порівнюючи коефіцієнти в (3.147) і (3.148) при незалежних диференціалах δq_i і δp_i, знайдемо

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.149}$$

Рівняння, які розв'язані відносно перших похідних шуканих функцій, називаються *канонічними*. Отже, (3.149) є *канонічні рівняння механіки*. За своїм змістом це є рівняння руху довільної системи матеріальних точок у канонічних змінних, коли в'язі системи голономні.

Звернемо увагу на те, що канонічні рівняння не є рівняннями в частинних похідних, як могло б здатись за їх виглядом, — функцію $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n; t)$ завжди можна обчислити, як тільки відома структура матеріальної системи. Канонічні рівняння являють собою систему $2n$ звичайних (не в частинних похідних) диференціальних рівнянь першого порядку з $2n$ невідомими функціями часу: $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$. При інтегруванні канонічних рівнянь появляються $2n$ сталих інтегрування, які можна

визначити з початкових умов руху. Спосіб визначення сталих інтегрування тут такий самий, що й у випадку рівнянь Лагранжа другого роду.

Канонічні рівняння динаміки широко застосовують у різних галузях теоретичної фізики, зокрема в статистичній фізиці і в квантовій механіці. Їх застосовують також у небесній механіці.

Ці рівняння (і зв'язані з ними так звані канонічні перетворення — див. нижче) виконують важливу роль у побудові різних нових фізичних теорій. Зв'язано це з тим, що в основі методу канонічних рівнянь лежить плодотворна ідея рівноправності координат і імпульсів. Ця ідея привела до побудови (вже в рамках механіки) апарата, який застосовується до дослідження і тих матеріальних рухів, що якісно відрізняються від рухів механічних. Для цих немеханічних форм руху матерії відмінність між координатами й імпульсами не виявлена так яскраво, як для механічних рухів, і тому опис таких рухів у рівноправних канонічних змінних більше відповідає природі цих рухів.

Канонічні рівняння динаміки були відкриті й вивчені завдяки працям багатьох учених: Пуассона (1809), Лагранжа (1810), Гамільтона (1834), Остроградського (1848) й ін. М. В. Остроградський вивчив канонічні рівняння для випадку, коли в'язі матеріальної системи нестаціонарні (коли функція L явно містить час t).

Закінчимо розгляд канонічних рівнянь доведенням такої теореми.

Теорема. *У випадку, коли в'язі стаціонарні, функція Гамільтона H збігається з повною механічною енергією системи.*

Дійсно, на підставі (3.146) і (3.136), маємо:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = 2T - (T - V) = T + V. \tag{3.150}$$

Теорему доведено. Ця теорема розкриває до деякої міри фізичний зміст функції Гамільтона H.

Складаючи канонічні рівняння, можна додержуватись такої послідовності. З'ясовуємо кількість ступенів вільності системи, вибираємо незалежні узагальнені координати і знаходимо потенціальну й кінетичну енергії як функції узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу. Користуючись функцією T, обчислюємо узагальнені імпульси за формулами (3.142); розв'язуємо ці рівняння відносно узагальнених швидкостей і знаходимо функцію $H = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$ (у випадку стаціонарних в'язей $H = T + V$) як функцію канонічних змінних і часу. Знаючи функцію H $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n; t)$, пишемо канонічні рівняння (3.149).

Приклад. Напишемо канонічні рівняння руху матеріальної точки в центральному силовому полі з потенціальною енергією $V(r)$.

Кінетична енергія точки дорівнює

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2),$$

де r, φ — полярні координати точки.

Обчислюємо узагальнені імпульси, що відповідають координатам r і φ. Маємо:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},$$

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}.$$

Звідси знаходимо

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}.$$

Функція Гамільтона H тут є повною механічною енергією точки. Тому пишемо безпосередньо

$$H = T + V(r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r).$$

Канонічні рівняння будуть такі:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}$$

і

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},$$

або

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2},$$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \dot{p}_\varphi = 0.$$

4. Циклічні координати. Координати системи, які входять у вираз функції Лагранжа лише через свої похідні по часу і не входять явно, називаються *циклічними.*

Наведемо приклади. Функція Лагранжа вільної матеріальної точки, яка рухається у вертикальній площині в однорідному полі земного тяжіння, така:

$$L = T - V = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \qquad (3.151)$$

Тут координата x — циклічна.

Для планети, яка рухається навколо Сонця, функція Лагранжа має вигляд

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \gamma\frac{mM}{r}, \qquad (3.152)$$

так що полярний кут φ — циклічна координата.

Зауважимо, що коли функція Лагранжа L не залежить явно від якої-небудь узагальненої координати q_s, то й функція Гамільтона H не залежатиме від цієї координати q_s. Це випливає з означення функції $H = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L$ і з того, що в процесі заміни узагальнених швидкостей $\dot{q}_i$ через узагальнені імпульси p_i, на підставі формул $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, у виразі для функції H не з'явиться, очевидно, та координата q_s, яка не входить в L.

Теорема 1. *Узагальнений імпульс, який відповідає циклічній координаті, залишається сталим протягом всього часу руху системи.*

У випадку циклічної координати $\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0$ і рівняння Лагранжа для циклічної координати запишеться в скороченому вигляді:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right) = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \text{const},$$

або

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \text{const}. \qquad (3.153)$$

Теорему доведено.

З погляду математики співвідношення (3.153) є інтегралом (розв'язком) канонічної системи.

Треба завжди намагатись вибирати узагальнені координати системи так, щоб серед них було якомога більше циклічних.

Теорема 2. *Якщо всі координати $q_1, \ldots, q_n$ циклічні, то інтегрування рівнянь руху зводиться до квадратур.*

Дійсно, праві частини канонічних рівнянь

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} H(p_1, p_2, \ldots, p_n; t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (3.154)$$

є просто деякими функціями часу, бо всі координати, за умовою, циклічні, а тому всі імпульси не змінюються протягом всього часу руху системи, тобто

$$p_k = \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Позначивши праву частину рівняння (3.154) через $f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t)$ і проінтегрувавши цю рівність, дістанемо

$$q_i = \int_{t_0}^{t} f_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; t)\, dt + C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.155)$$

де C_i — сталі інтегрування. У тому окремому випадку, коли в'язі стаціонарні, функція H не залежить явно від часу t, так що функції f_i будуть сталими величинами, а всі координати, згідно з (3. 155), — лінійними функціями часу.

Доведена тут теорема наводить на думку шукати таке перетворення канонічних змінних, яке, зберігаючи форму канонічних рівнянь динаміки, перетворювало б усі координати на циклічні. Якщо таке перетворення знайдено, то, як було тільки що показано, задача інтегрування канонічних рівнянь зводиться до простих квадратур.

Перетворення канонічних змінних $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, *яке зберігає форму канонічних рівнянь динаміки, називається канонічним.* Теорія канонічних перетворень — важливий розділ теоретичної механіки; з цією теорією можна ознайомитись у повніших курсах механіки.

З'ясуємо тепер фізичний зміст циклічного інтеграла. Спочатку розглянемо найпростіші приклади. Для снаряда, який летить у вертикальній площині, за (3.151), маємо:

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = \mathrm{const},$$

тобто *проекція на горизонтальну вісь кількості руху снаряда є сталою*. Для планети, згідно з (3. 152), маємо:

$$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{const},$$

що означає закон збереження момента кількості руху планети.

З цих двох прикладів робимо висновок, що циклічний інтеграл (3.153) може означати незмінність як самої *кількості руху*, так і *момента кількості руху*, а тому рівність (3.153) охоплює два закони — закон збереження кількості руху і закон збереження момента кількості руху.

Покажемо тепер, що й *у випадку системи*, а не тільки однієї точки, *незмінність циклічного імпульса означає закон збереження або кількості руху, або момента кількості руху.*

Нехай в'язі системи допускають поступальне переміщення системи як твердого тіла в якому-небудь напрямі в просторі і нехай узагальнені координати вибрано так, що при зазначеному переміщенні змінюється тільки одна координата q. Якщо при такому переміщенні потенціальна енергія системи не змінюється, то координата q є циклічною*, і тоді сталість циклічного імпульса

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \mathrm{const}$$

означає, що проекція кількості руху системи на зазначений напрям є величина стала. Щоб довести це твердження, обчислимо $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$.

* Кінетична енергія системи тут, очевидно, не залежатиме від координати q.

Маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\sum_{k=1}^{\nu} m_k(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2),$$

або

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}} + \dot{y}_k\frac{\partial \dot{y}_k}{\partial \dot{q}} + \dot{z}_k\frac{\partial \dot{z}_k}{\partial \dot{q}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\nu} m_k\left(\dot{x}_k\frac{\partial x_k}{\partial q_k} + \dot{y}_k\frac{\partial y_k}{\partial q_k} + \dot{z}_k\frac{\partial z_k}{\partial q_k}\right). \qquad (3.156)$$

Тут ми скористались рівностями виду (3.105). Виберемо тепер напрям, уздовж якого в'язі допускають переміщення системи як твердого тіла, за напрям осі Ox і під значенням циклічної координати q розумітимемо просто значення абсциси x якої-небудь точки системи, наприклад, центра мас. Якщо координаті q надати малий приріст, то це зумовить поступальне переміщення всіх точок системи вздовж осі Ox на такий самий відрізок, тоді як y_k, z_k не змінюються. Отже, маємо:

$$\frac{\partial x_k}{\partial q} = \frac{\partial x_k}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y_k}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial z_k}{\partial q} = 0. \qquad (3.157)$$

З (3.156) за допомогою (3.157) дістаємо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k\dot{x}_k.$$

Тепер зрозуміло, що тут рівняння виду (3.153) визначає закон збереження проекції кількості руху на вісь Ox.

Як конкретний приклад можна навести закон збереження величини $\sum_{k=1}^{\nu} m_k\dot{x}_k$ при польоті акробата, коли він, відштовхнувшись від підлоги, робить повний оберт у повітрі.

Розглянемо тепер такий випадок.

Нехай в'язі допускають обертання системи як твердого тіла відносно деякої осі і узагальнені координати вибрано так, що при зазначеному обертанні змінюється лише одна координата q. Якщо при такому переміщенні системи потенціальна енергія її не змінюється, то координата q є циклічною і тоді сталість циклічного імпульса, $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \mathrm{const}$, означає, що момент кількості руху системи відносно згаданої осі є величина стала.

Щоб довести це твердження, виберемо кут повороту φ системи навколо осі за циклічну координату q, а за вісь Oz — вісь, навколо якої можливе обертання тіла. Тоді дістанемо

$$x_k = r_k \cos\varphi, \qquad y_k = r_k \sin\varphi,$$

де r_k — віддаль частинки до осі Oz. Оскільки $d\varphi = dq$, то

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial q} &= \frac{\partial x_k}{\partial \varphi} = -r_k \sin\varphi = -y_k \\ \frac{\partial y_k}{\partial q} &= \frac{\partial y_k}{\partial \varphi} = r_k \cos\varphi = x_k \\ \frac{\partial z_k}{\partial q} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.158}$$

З (3.156) та (3.158) маємо:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \sum_{k=1}^{\nu} m_k (-\dot{x}_k y_k + x_k \dot{y}_k),$$

тобто $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ є моментом кількості руху системи відносно осі Oz.

Як приклад можна навести закон збереження момента кількості руху при обертанні людини з гирями в руках на стільці Жуковського.

Звернемо увагу на те, що аналітична механіка виявляється більш досконалою: поняття узагальненого імпульса охоплює як поняття кількості руху, так і поняття момента кількості руху. У ньютонівській механіці ці поняття вводяться відірвано одне від одного. Обгрунтування необхідності введення поняття момента кількості руху в ньютонівській механіці можна дати, додатково взявши до уваги властивість ізотропності простору.

На закінчення пояснимо походження терміну «циклічні координати». Розглянемо нескінченний пас трансмісії або ланцюгову передачу, шарикопідшипник велосипеда, рідину, яка циркулює по замкненій системі трубопроводів (як у випадку водяного опалення), маховик і т. д. Цей клас систем характерний тим, що їх кінетична енергія не залежить від координат точок системи, бо на місце кожної частинки, яка відходить з даної точки, приходить така сама нова частинка, яка має ту саму швидкість. Але для таких систем і потенціальна енергія не залежить від координат, оскільки розміщення всіх точок ланцюга, паса, підшипника і т. д. з бігом часу зберігається незмінним. Тому для подібних матеріальних систем функція Лагранжа не містить координат. Характерною рисою рухів усіх наведених вище матеріальних систем є їх циклічний характер, що й спонукало Гельмгольца ввести термін «циклічні координати».

Розділ V

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ДИНАМІКИ. РІВНЯННЯ ОСТРОГРАДСЬКОГО — ГАМІЛЬТОНА — ЯКОБІ*

Вступні зауваження. У цьому розділі викладено принципи і рівняння динаміки, які мають першорядне значення не тільки для механіки, але також для всієї сучасної теоретичної фізики і багатьох прикладних наук.

Варіаційні принципи динаміки є, по суті, основними і до того ж найзагальнішими законами руху матеріальних систем. Ці принципи можна поділити на диференціальні й інтегральні.

З'ясуємо основну відмінність варіаційних принципів динаміки від вже відомих нам основних законів руху матеріальних систем. Для порівняння візьмемо, наприклад, другий закон Ньютона.

Якщо другий закон Ньютона $mw = f$ відбиває фундаментальний зв'язок між основними характеристиками руху відносно кожного даного момента часу, то *варіаційний принцип встановлює певний критерій, який дає змогу розпізнати дійсний рух матеріальної системи серед нескінченної множини кінематично можливих рухів*, тобто рухів, які не суперечать в'язям системи.

Серед множини кінематично можливих рухів системи тільки один рух є *дійсним* — той, що відбувається насправді під дією прикладених до точок системи активних сил; уся решта кінематично можливих рухів є *уявлюваними*. Уявлювані кінематично можливі рухи не узгоджені з тими активними силами, які насправді прикладені до точок матеріальної системи, але ці рухи могли б відбутись і насправді при належно підібраних активних силах.

Якщо критерій, що дає змогу визначити дійсний рух системи із множини кінематично можливих її рухів, стосується *скінченного* переміщення системи, то варіаційний принцип називається *інтегральним*, якщо ж він стосується *нескінченно малого* переміщення, — принцип є *диференціальним*.

Спинимось ще коротко на історії відкриття варіаційних принципів динаміки.

У 1744 р. Мопертюї** сформулював без доведення один варіа-

* Гамільтон Вільям Роуан (1805 — 1865) був професором астрономії в Дублінському університеті і президентом Ірландської академії. Він винайшов метод кватерніонів, вніс значний вклад у геометричну оптику, у теорію рівнянь з частинними похідними, в аналітичну механіку.

Якобі Карл (1804 — 1851) був професором Кенігсберзького університету. Він дав теорію перетворення еліптичних інтегралів (ϑ функції Якобі), дістав фундаментальні результати в галузі диференціальних рівнянь з частинними похідними і розробив метод інтегрування диференціальних рівнянь небесної механіки. Головні з цих методів викладені в його «Лекціях з динаміки» (є російський переклад 1936 р.).

** Мопертюї (1698—1759) керував Берлінською Академією наук, займався астрономією і механікою.

ційний принцип і застосував його в механіці й оптиці*. У тому ж самому році Л. Ейлер дав доведення цього інтегрального варіаційного принципу для випадку руху матеріальної точки в центральному силовому полі. Ж. Лагранж поширив цей принцип на широкий клас механічних рухів матеріальних систем, а Якобі в своїх лекціях з динаміки, прочитаних у Кенігсберзі в 1842 р., поглибив теорію цього принципу. У сучасній літературі розглядуваний інтегральний варіаційний принцип відомий під назвою принципу Ейлера — Лагранжа. Дальший розвиток принципу Ейлера — Лагранжа зв'язаний з застосуванням його в теорії відносності і з поширенням на випадок немеханічних процесів.

Михайло Васильович Остроградський (1801—1861).

Видатний математик, один із засновників петербурзької математичної школи. Основні праці стосуються математичного аналізу, теоретичної механіки, математичної фізики. Йому належать класичні результати з теорії варіаційних принципів механіки.

У першій половині XIX ст. був відкритий новий інтегральний варіаційний принцип, який тепер справедливо називають принципом Остроградського — Гамільтона**. Першу важливу працю з теорії цього принципу виконав М. В. Остроградський у 1829 р. і опублікував у 1831 р. Дальший крок вперед зробив В. Гамільтон у 1834 р.; він довів цей принцип для руху матеріальної системи в консервативному силовому полі. Цікаво, що відправним пунктом відповідних досліджень Гамільтона в механіці були його відкриття в галузі оптики. Виявилось, що існує глибокий зв'язок між законами механіки й законами оптики; цей зв'язок був використаний у XX ст. для побудови так званої хвильової механіки.

У більш загальній формі принцип Остроградського—Гамільтона довів у 1848 р. М. В. Остроградський.

Згаданим вище двом інтегральним варіаційним принципам динаміки присвятили свої праці відомі російські механіки: Н. Д. Брашман, Ф. А. Слудський, М. Є. Жуковський, Д. К. Бобильов. Їх праці сприяли уточненню питання про взаємовідношення теорій двох інтегральних варіаційних принципів.

Отже, у відкриття найважливіших і найзагальніших законів руху матеріальних систем — інтегральних варіаційних принципів динаміки — основний вклад внесли видатні російські вчені М. В. Остроградський і Л. Ейлер.

Диференціальний варіаційний принцип — принцип найменшого примусу — відкрив Гаусс, а висловив його у формі принципу найменшої кривизни в 1894 р. Герц (1857—1894).

Слід зауважити, що розглянутий у розділі II принцип Даламбера — Лагранжа можна трактувати теж як диференціальний варіаційний принцип*.

§ 1. ПРИНЦИП СТАЦІОНАРНОЇ ДІЇ ОСТРОГРАДСЬКОГО — ГАМІЛЬТОНА ДЛЯ ВІЛЬНОЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1. Дійсний рух вільної матеріальної точки. Кінематично можливі рухи. Нехай вільна матеріальна точка з масою m рухається під дією сили, що має силову функцію $U(x, y, z, t)$. Проекції сили на осі координат дорівнюють

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Координати точки змінюються за певними законами:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{3.159}$$

Нехай рухома точка в момент t_0 пройшла через положення A в просторі, а в інший момент $t_1 > t_0$ — через положення B (рис. 71). Умовимось називати момент t_0 і положення A *початковими*, а момент t_1 і положення B — *кінцевими*. Рівняння (3.159) визначають рух точки m, який відбувається в дійсності, тобто за законами природи. Цей рух точки називатимемо *дійсним* її рухом.

Рис. 71.

Разом з дійсним рухом вільної матеріальної точки розглядатимемо нескінченну множину *уявлюваних* її рухів, які повинні задовольняти такі умови:

1) кожний уявлюваний рух починається одночасно з дійсним рухом у момент t_0 і закінчується також одночасно з дійсним рухом у момент t_1;

2) кожний уявлюваний рух починається з положення A, що є початковим для дійсного руху, і закінчується в положенні B, яке є кінцевим для дійсного руху;

* Є дані про те, що видатний математик Лейбніц в одному з своїх листів сформулював відповідний принцип ще в 1707 р.

** У закордонній літературі цей принцип відомий під назвою принципу Гамільтона.

* Див. М. О. Кільчевський, Курс теоретичної механіки, т. II, § 74. «Радянська школа», 1957.

3) положення і швидкість точки в будь-якому з уявлюваних рухів відрізняються, відповідно, від положення і швидкості точки в її дійсному русі нескінченно мало в кожний момент часу.

Звернемо увагу на те, що швидкість точки в положеннях A і B в уявлюваних рухах (як і в дійсному русі) не обов'язково повинна дорівнювати нулю.

Уявлювані рухи матеріальної точки, що задовольняють ці вимоги, називатимемо *можливими в розумінні Остроградського.* Визначені переліченими вище трьома ознаками уявлювані рухи є лише *кінематично* можливими, тоді як дійсний рух точки відбувається насправді під дією сил заданого силового поля.

Отже, поряд з дійсним рухом вільної матеріальної точки, який відбувається між положеннями A і B за проміжок часу (t_0, t_1), розглядатимемо нескінченно близькі до дійсного можливі її рухи, які всі відбуваються між тими самими положеннями A та B, між якими відбувається дійсний рух, і за той самий проміжок часу (t_0, t_1).

Порівнювані з дійсним рухом уявлювані рухи вільної точки можна задати аналітично так. Виберемо три довільні однозначні неперервні і диференційовні функції часу $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$, малий параметр ε і покладемо, що уявлюваний рух точки визначається координатами

$$\tilde{x}(t) = x(t) + \varepsilon\xi(t),\quad \tilde{y}(t) = y(t) + \varepsilon\eta(t),\quad \tilde{z}(t) = z(t) + \varepsilon\zeta(t), \quad (3.160)$$

де час t змінюється від моменту t_0 до моменту t_1. Швидкість точки в уявлюваному русі визначається трьома похідними по часу від координат

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{dx}{dt} + \varepsilon\frac{d\xi}{dt},\quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = \frac{dy}{dt} + \varepsilon\frac{d\eta}{dt},\quad \frac{d\tilde{z}}{dt} = \frac{dz}{dt} + \varepsilon\frac{d\zeta}{dt}. \quad (3.161)$$

Щоб уявлюваний рух відбувався протягом того самого проміжку часу і між тими самими положеннями A та B, що й дійсний рух матеріальної точки, функції $\xi(t)$, $\eta(t)$ і $\zeta(t)$ треба підібрати так, щоб вони перетворювались в нуль у початковий і кінцевий моменти часу, тобто при $t = t_0$ і $t = t_1$:

$$\xi(t_0) = \eta(t_0) = \zeta(t_0) = 0,\quad \xi(t_1) = \eta(t_1) = \zeta(t_1) = 0. \quad (3.162)$$

При аналітичному визначенні уявлюваних рухів ми здійснили малу зміну *виду функцій* $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, які описують дійсний рух. Ця зміна, яка полягає в переході від функцій

$$x(t),\ y(t),\ z(t)$$

до нових функцій

$$\tilde{x}(t),\ \tilde{y}(t),\ \tilde{z}(t),$$

що нескінченно мало відрізняються від старих функцій, називається *варіюванням* функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Знаходжувані в ре-

зультаті варіювання прирости функцій позначаються символом δ і називаються *варіаціями* функцій

$$\delta x = \varepsilon\xi(t),\quad \delta y = \varepsilon\eta(t),\quad \delta z = \varepsilon\zeta(t). \quad (3.163)$$

У відповідності з цим означенням і формулами (3.161) варіації функцій $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, тобто варіації похідних по часу від координат точки, дорівнюватимуть:

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{dx}{dt} = \varepsilon\frac{d\xi}{dt},$$

$$\delta\frac{dy}{dt} = \frac{d\tilde{y}}{dt} - \frac{dy}{dt} = \varepsilon\frac{d\eta}{dt},$$

$$\delta\frac{dz}{dt} = \frac{d\tilde{z}}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon\frac{d\zeta}{dt}.$$

Рівність

$$\delta\frac{dx}{dt} = \varepsilon\frac{d\xi}{dt}$$

означає, що

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\varepsilon\xi(t)\right] = \frac{d}{dt}\delta x, \quad (3.164)$$

тобто *операція диференціювання по незалежній змінній t і операція варіювання є комутативними.* Цю властивість комутативності $\delta\frac{d\ldots}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\ldots$ ми використаємо далі.

Користуючись поняттям варіації, можна твердити: якщо дійсний рух точки відбувається за законом $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то порівнювані з ним уявлювані кінематично можливі рухи відбуваються за законом

$$\tilde{x} = x + \delta x,\quad \tilde{y} = y + \delta y,\quad \tilde{z} = z + \delta z.$$

Оскільки вибір варіацій δx, δy, δz [або, що те саме, вибір функцій $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$] довільний, то існує *нескінченна множина* уявлюваних кінематично можливих рухів між заданими положеннями точки.

2. Функція Лагранжа та її інтеграл у порівнюваних (дійсному і можливих) рухах точки. Поряд з дійсним рухом точки розглянемо який-небудь з уявлюваних її рухів.

Обчислимо значення функції Лагранжа L в уявлюваному русі точки.

Для дійсного руху функція Лагранжа дорівнює

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x,\ y,\ z;\ t).$$

Позначимо цю функцію так: $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$. Тоді в уявлюваному русі функція Лагранжа запишеться у вигляді

$$\tilde{L} = L(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z;\ \dot{x} + \delta\dot{x},\ \dot{y} + \delta\dot{y},\ \dot{z} + \delta\dot{z};\ t),$$

де

$$\delta x = \varepsilon\xi(t), \qquad \delta y = \varepsilon\eta(t), \qquad \delta z = \varepsilon\zeta(t).$$

Розклавши праву частину $\tilde{L}$ у ряд Тейлора, функцію $\tilde{L}$ можна записати так:

$$\tilde{L} = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) + \varepsilon f_1 + \frac{\varepsilon^2}{2!} f_2 + \ldots + \frac{\varepsilon^k}{k!} f_k + \ldots,$$

де

$$f_1 = \frac{\partial L}{\partial x}\xi + \frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial z}\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{\xi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\dot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{\zeta}.$$

Головна, лінійна відносно δx, δy, δz, $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$ (тобто лінійна відносно параметра ε), частина приросту функції L називається *першою варіацією* цієї функції, позначається δL і дорівнює $\delta L = \varepsilon f_1$.

Вирази

$$\varepsilon^2 \cdot f_2, \ \varepsilon^3 \cdot f_3, \ \ldots, \ \varepsilon^k \cdot f_k, \ \ldots$$

називаються, відповідно, другою, третьою і т. д. варіаціями функції L і позначаються так:

$$\delta^2 L, \ \delta^3 L, \ldots, \ \delta^k L, \ldots$$

За допомогою цих позначень функцію Лагранжа в уявлюваному русі можна подати як ряд

$$\tilde{L} = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) + \delta L + \frac{1}{2!}\delta^2 L + \frac{1}{3!}\delta^3 L + \ldots \qquad (3.165)$$

Ми дістали формулу, яка визначає функцію Лагранжа в уявлюваних рухах через функцію Лагранжа й її варіації в дійсному русі точки.

Щоб установити аналогічну формулу для інтеграла від функції Лагранжа, помножимо ряд (3.165) на елементарний проміжок часу dt і проінтегруємо від момента t_0 до момента t_1. Матимемо:

$$\int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt + \frac{1}{2!}\int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L \cdot dt + \ldots \qquad (3.166)$$

Інтеграл

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t) \cdot dt, \qquad (3.167)$$

аргументами якого є функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, слід розглядати як *функціонал**.

* Змінна величина I називається функціоналом, що залежить від функції $x(t)$, якщо кожній функції $x(t)$ з деякого класу функцій відповідає певне значення I, тобто кожній функції $x(t)$ відповідає певне число I. Записують це так: $I = I[x(t)]$.

У співвідношенні (3.166) інтеграл лівої частини рівності є функціонал, обчислений для довільного уявлюваного руху. Перший інтеграл правої частини є той самий функціонал, обчислений для дійсного руху точки. Другий інтеграл правої частини у формулі (3.166) є головною, лінійною відносно δx, δy, δz, частиною приросту цього функціонала.

Головна, лінійна, частина приросту функціонала називається першою його варіацією і позначається δS або $\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt$.

На підставі (3.166) і означення першої варіації функціонала, маємо:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L dt, \qquad (3.168)$$

тобто *операції інтегрування і варіювання є комутативними* (вважається, що порівнювані рухи є можливими в розумінні Остроградського).

Інші інтеграли правої частини формули (3.166) є послідовно так звані друга, третя і т. д. варіації функціонала S, які позначаються так: $\delta^2 S$, $\delta^3 S$, ... Тому ряд (3.166) можна переписати у вигляді

$$\tilde{S} = S + \delta S + \frac{1}{2!}\delta^2 S + \ldots, \qquad (3.169)$$

або у вигляді приросту функціонала

$$\Delta S = \tilde{S} - S = \delta S + \frac{1}{2!}\delta^2 S + \ldots \qquad (3.170)$$

9. Принцип стаціонарної дії Остроградського — Гамільтона. Інтеграл із змінною верхньою границею

$$S = \int_{t_0}^{t} L \cdot dt \qquad (3.171)$$

називається *дією матеріальної точки за Остроградським*. Розмірність дії є *ерг · сек*, тобто вона така сама, як розмірність сталої Планка h, що характеризує елементарний «квант дії».

Доведемо тепер принцип Остроградського — Гамільтона для однієї матеріальної точки, що рухається під дією сил з силовою функцією $U(x, y, z; t)$:

Дійсний рух вільної матеріальної точки відрізняється від усіх інших порівнюваних з ним кінематично можливих (у розумінні Остроградського) *рухів тим, що для дійсного руху варіація дії за Остроградським, яку обчислено для довільного фіксованого проміжку часу, дорівнює нулю:*

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt = 0. \qquad (3.172)$$

Розглянемо вираз для δS:

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\cdot dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x+\frac{\partial L}{\partial y}\delta y+\frac{\partial L}{\partial z}\delta z+\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta\dot x+\frac{\partial L}{\partial \dot y}\delta\dot y+\frac{\partial L}{\partial \dot z}\delta\dot z\right)dt. \tag{3.173}$$

Інтегруючи частинами, знайдемо

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta\dot x dt=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial L}{\partial \dot x}\cdot\frac{d}{dt}(\delta x)\cdot dt=\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta x\Big|_{t_0}^{t_1}-\int_{t_0}^{t_1}\delta x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\cdot dt=$$

$$=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\delta x\cdot dt. \tag{3.174}$$

Доданок $\frac{\partial L}{\partial \dot x}\delta x$ тут дорівнює нулю в початковий і кінцевий моменти часу, бо за характером варіювання $\delta x=\varepsilon\xi(t)$, а $\xi(t_0)=\xi(t_1)=0$ (кінцеві точки траєкторій не варіюються). Підставляючи (3.174) в (3.173) і користуючись аналогічними виразами для y і z, дістанемо

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\right]\delta x+\left[\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot y}\right)\right]\delta y+\left[\frac{\partial L}{\partial z}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right)\right]\delta z\right\}dt.$$

Але всі три вирази в прямих дужках дорівнюють нулю, що видно з рівнянь руху точки, записаних у формі Лагранжа. Отже, $\delta S=0$, що й доводить справедливість принципу.

Якщо для S виконана умова $\delta S=0$, то говорять, що значення S *стаціонарне*.

Покажемо, що умова стаціонарності дії, тобто умова

$$\delta S=0, \tag{3.175}$$

є вичерпною характеристикою руху і що рівняння (3.175) є, по суті, *новим виразом закону руху точки*. Дійсно, як було показано вище, з закону руху, записаного у формі Лагранжа, випливає, що $\delta S=0$. Але і, навпаки, з (3.175) випливають рівняння руху Лагранжа. Справді, перетворюючи δS тим самим способом, що й раніше, можна записати

$$\delta S=\int_{t_0}^{t_1}\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)\right]\delta x+\dots\right\}dt=0. \tag{3.176}$$

З повної довільності δx, δy, δz випливає, що для всіх t матимемо рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$$

і ще двоє аналогічних рівнянь, в яких замість x слід писати y і z.

Принцип стаціонарної дії Остроградського — Гамільтона інколи називають *принципом найменшої дії*. З'ясуємо походження цього терміну.

Аналізуючи формулу (3.169), приходимо до висновку, що значення дії S було б для дійсного руху мінімальним, якби виконувались разом умови

$$\delta S=0 \text{ і } \delta^2 S>0. \tag{3.177}$$

Справді, з формули

$$\Delta S=\bar S-S=\delta S+\frac{1}{2!}\delta^2 S+\dots+\frac{1}{k!}\delta^k S+\dots \tag{3.178}$$

випливає, що при виконанні умов (3.177) ряд у правій частині (3.178) починається з другого доданка і знак ΔS тоді такий самий, як і знак $\delta^2 S$, тобто $\Delta S>0$ для будь-яких уявлюваних в розумінні Остроградського рухів.

Отже, умови (3.177) є достатніми для існування мінімуму дії S, тоді як умова $\delta S=0$ є лише необхідною умовою мінімуму дії S.

Можна довести*, що друга варіація дії за Остроградським є додатною в тому випадку, коли величина проміжку часу руху не перевищує певної границі, окремої для кожного розглядуваного випадку руху точки.

На закінчення пояснимо, як слід розуміти існування мінімуму дії. Існування мінімуму дії означає: якщо порівняти числові значення інтегралів дії S і $\bar S$ — інтеграла дії для дійсного руху $S=\int_{t_0}^{t_1}L\cdot dt$ із значенням інтеграла дії $\bar S=\int_{t_0}^{t_1}\bar L\cdot dt$ для уявлюваного кінематично можливого руху,— то виявиться, що завжди

$$S<\bar S.$$

Оскільки єдиному дійсному руху точки відповідає нескінченна множина уявлюваних кінематично можливих рухів, то при вибраних A і B існує лише одне S, але ціла множина порівнюваних з ним значень $\bar S$. Нерівність $S<\bar S$ виконується незалежно від вибору уявлюваного руху. Треба тільки, щоб кінцеві положення A та B і час уявлюваних рухів (t_0, t_1) не відрізнялись від них для дійсного руху.

* Див., например, Е. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, 1937, стор. 281.

§ 2. ПРИНЦИП СТАЦІОНАРНОЇ ДІЇ ОСТРОГРАДСЬКОГО — ГАМІЛЬТОНА ДЛЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Вище було розглянуто принцип Остроградського — Гамільтона для вільної матеріальної точки, яка рухається під дією сил, що мають силову функцію $U(x, y, z; t)$. У цьому параграфі поширимо той самий принцип на випадок матеріальної системи, яка рухається під дією яких завгодно активних сил, що мають силову функцію $U(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$, при яких завгодно накладених на систему стаціонарних або нестаціонарних голономних в'язях*. При цьому, якщо користуватись незалежними узагальненими координатами $q_1, \ldots, q_n$, то математичне доведення принципу для матеріальної системи нічим не відрізняється від доведення принципу для однієї матеріальної точки.

Функція Лагранжа L матеріальної системи залежить від узагальнених координат, узагальнених швидкостей і часу:

$$L = L(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; t),$$

де $q_1, q_2, \ldots, q_n$ є функції часу, які визначають дійсний закон руху системи. Виберемо два положення рухомої системи: A — початкове, що відповідає моменту t_0, і B — кінцеве, що відповідає моменту t_1.

Дійсний рух матеріальної системи порівнюватимемо з уявлюваними кінематично можливими її рухами. За означенням, уявлювані рухи матеріальної системи задовольняють такі умови:

1) накладені на систему в'язі не порушуються;

2) кожний з уявлюваних рухів починається в момент t_0 і закінчується в момент t_1 (у ці самі моменти часу починається і закінчується дійсний рух системи);

3) початкове A й кінцеве B положення механічної системи повинні бути одні й ті самі для всіх уявлюваних рухів і саме такі, якими вони є для дійсного руху.

Крім того, ми завжди вважаємо, що координати й швидкості відповідних точок матеріальної системи в уявлюваному і в дійсному рухах відрізняються на нескінченно малі величини в кожний момент часу.

Уявлювані рухи матеріальної системи, що задовольняють ці вимоги, називатимемо *можливими в розумінні Остроградського*. Нехай уявлюваний кінематично можливий рух відбувається між обома положеннями A, B системи і протягом часу (t_0, t_1) і визначається координатами

$$\bar{q}_1(t) = q_1(t) + \delta q_1, \quad \bar{q}_2(t) = q_2(t) + \delta q_2, \quad \ldots, \quad \bar{q}_n(t) = q_n(t) + \delta q_n,$$

* Принцип допускає узагальнення і на випадок неголономних в'язей (див., наприклад, Е. Уиттекер, Аналитическая динамика).

де час t змінюється в інтервалі (t_0, t_1), а варіації координат $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ усі перетворюються в нуль у початковий і кінцевий моменти часу:

$$(\delta q_k)_{t=t_0} = (\delta q_k)_{t=t_1} = 0.$$

При цих умовах закон дійсного руху розглядуваної матеріальної системи можна записати так:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n; t)\, dt = 0. \tag{3.179}$$

У цьому й полягає принцип Остроградського — Гамільтона, який можна сформулювати так:

*Дійсний рух матеріальної системи з голономними в'язями відрізняється від усіх інших порівнюваних з ним кінематично можливих (*у розумінні Остроградського*) рухів тим, що для дійсного руху матеріальної системи варіація дії за Остроградським, яка обчислена для довільного фіксованого проміжку часу, дорівнює нулю.*

Щоб довести цей принцип, обчислюємо першу варіацію дії:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \cdot \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \cdot \delta \dot{q}_k \right) \cdot dt. \tag{3.180}$$

Закінчується доведення так само, як і для однієї точки.

У випадку руху системи також можна довести, що друга варіація дії є додатною, $\delta^2 S > 0$, якщо тільки інтервал інтегрування достатньо малий. Тоді дві умови — $\delta S = 0$ і $\delta^2 S > 0$ — показують, що дія S за Остроградським мінімальна для дійсного руху матеріальної системи.

На закінчення зробимо кілька загальних зауважень щодо переваг принципу Остроградського — Гамільтона над рівняннями руху матеріальної системи, записаними в інших формах.

По-перше, у принципі Остроградського — Гамільтона немає вказівки на специфіку вибору узагальнених координат. Тому рівняння (3.179) можна застосувати при якому завгодно способі вибору узагальнених координат матеріальної системи.

Властивість дії S бути мінімальною для дійсного руху не залежить від того, в яких координатах ведуть обчислення інтеграла $S = \int_{t_0}^{t_1} L\, dt$.

По-друге, у принципі Остроградського — Гамільтона немає вказівки на кількість ступенів вільності системи. Цей принцип виявляється справедливим і для матеріальних систем з нескінченною множиною ступенів вільності.

За своїм внутрішнім змістом принцип Остроградського — Гамільтона, як і ті рівняння механіки, з яких він знайдений, є одним з виразів закону незнищуваності руху.

Важливо ще підкреслити, що варіаційний принцип формулюється без використання поняття сили — цієї чисто механічної характеристики взаємодії матеріальних об'єктів. У математичному записі варіаційного принципу Остроградського—Гамільтона використовується тільки скалярна міра руху. Отже, у формулюванні принципу механічний характер руху досліджуваної матеріальної системи нічим і ніяк не підкреслений. Ось чому принцип безпосередньо поширюється і на немеханічні фізичні процеси: пружно-механічні, теплові, електромагнітні і т. д.* Принцип виявився правильним і в теорії відносності. Це й зрозуміло: теорія відносності формулює ті самі закони незнищуваності руху, але у відповідності з точнішими уявленнями про властивості простору і часу.

В основу теорії електромагнітного поля можна покласти варіаційний принцип, який є узагальненням принципу Остроградського—Гамільтона, і потім можна вивести з нього як наслідок основні рівняння електродинаміки — так звані рівняння Максвелла. Це виведення рівнянь Максвелла цілком аналогічне до способу виведення рівнянь Лагранжа з принципу Остроградського — Гамільтона ** в механіці.

У зв'язку з специфікою формулювання принципу Остроградського—Гамільтона наведемо глибокі змістом слова Ф. Енгельса:

«... в усякій галузі природознавства, навіть у механіці, роблять крок вперед щоразу, коли де-небудь позбуваються слова *сила*»***.

§ 3. ПРИНЦИП СТАЦІОНАРНОЇ ДІЇ ЕЙЛЕРА—ЛАГРАНЖА

Цей варіаційний принцип не має такої загальності, як доведений вище принцип Остроградського—Гамільтона. Принцип Ейлера—Лагранжа відповідає руху матеріальної системи з стаціонарними в'язями в консервативному силовому полі. При цих умовах існує інтеграл енергії

$$T + V = h, \tag{3.181}$$

а тому таку матеріальну систему називають *консервативною*.

Ми обмежимося тут розглядом лише змісту принципу Ейлера—Лагранжа, відсилаючи за доведенням його до повніших курсів механіки.

---

* За межами механіки функція Лагранжа L часто виступає вже як вихідна, бо там поняття кінетичної і потенціальної енергій не скрізь можуть бути введені.

** Див. А. С. Компанеец, Теоретическая физика, ГИТТЛ, 1955, стор. 115.

*** Ф. Енгельс, Діалектика природи, 1953, стор. 111.

Нехай у момент часу t_0 система пройшла через деяке положення A в просторі, а в інший момент t_1 — через положення B. Умовимось називати момент t_0 і положення A початковими, а момент t_1 і положення B — кінцевими.

Дійсний рух матеріальної системи порівнюватимемо з уявлюваними її рухами, які повинні задовольняти такі три умови:

1) в'язі системи не порушуються;

2) повна механічна енергія системи в будь-якому уявлюваному русі незмінна протягом усього часу руху і дорівнює її значенню h у дійсному русі;

3) початкове й кінцеве положення матеріальної системи повинні бути одні й ті самі для всіх уявлюваних рухів і саме такі, які є для дійсного руху.

Крім того, вважатимемо, що уявлювані рухи починаються одночасно і саме в той момент t_0, в який починається дійсний рух з положення A. Кінцевий момент часу, в який система опиниться в положенні B, у дійсному русі дорівнює t_1, а в уявлюваних рухах залежить від характеру руху і може відрізнятися від t_1 на малу величину δt (додатну або від'ємну).

Дійсний рух матеріальної системи з її уявлюваними рухами порівнюють так, що розглядають лише ті уявлювані рухи, які нескінченно близькі (за координатами й швидкостями) до дійсного руху.

Уявлювані рухи матеріальної системи, що задовольняють всі ці вимоги, називатимемо *можливими в розумінні Ейлера — Лагранжа.*

Упевнимось на прикладі в тому, що моменти приходу механічної системи в кінцеве положення B залежать від вибору уявлюваного руху.

Розглянемо рух однієї матеріальної точки в стаціонарному силовому полі з потенціальною функцією $V(x, y, z)$. Оскільки уявлюваний рух відбувається з додержанням закону збереження енергії, то для уявлюваного руху маємо:

$$\tilde{T} + \tilde{V} = h,$$

або

$$\frac{m\tilde{v}^2}{2} + \tilde{V} = h,$$

звідки

$$\tilde{v} = \sqrt{\frac{2}{m}(h - \tilde{V})}, \tag{3.182}$$

де $\tilde{V}$ — значення потенціальної функції від координат точки в уявлюваному русі: $\tilde{V} = V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$.

Формула (3.182) показує, що швидкість руху точки, а значить, і час переміщення її з початкового положення A в кінцеве положення B в уявлюваному русі залежить від форми траєкторії.

Продовжимо вивчення принципу Ейлера — Лагранжа для випадку руху системи.

Інтеграл із змінною верхньою границею

$$W = \int_{t_0}^{t} 2T \cdot dt$$

називається *дією матеріальної системи за Лагранжем.*

Дія за Лагранжем за час руху, що відповідає переходу системи з початкового положення A в кінцеве положення B, дорівнює:

1) для дійсного руху $W = \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt$,

2) для уявлюваного руху $\bar{W} = \int_{t_0}^{t_1+\delta t} 2\bar{T} \cdot dt$.

Верхня границя в цьому інтегралі відмінна від t_1 тому, що момент приходу системи в кінцеве положення B в уявлюваному русі не збігається з моментом t_1 приходу системи в положення B в дійсному русі, а може відрізнятись від момента t_1 на малу величину δt (додатну або від'ємну).

Зміст принципу Ейлера — Лагранжа можна пояснити так. Якщо порівняти числові значення двох інтегралів, а саме:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt \quad \text{і} \quad \bar{W} = \int_{t_0}^{t_1+\delta t} 2\bar{T} \cdot dt,$$

перший з яких є значенням дії за Лагранжем у дійсному русі системи, а другий — в уявлюваному кінематично можливому русі, то виявиться (при умові, що кінцеве положення системи B не дуже далеко відсунуте від початкового положення A), що завжди

$$W < \bar{W}.$$

Звернемо увагу на те, що тут одне число W порівнюється з цілою множиною чисел $\bar{W}$, бо уявлюваних кінематично можливих рухів існує нескінченна множина.

Аналогічно до того, як це було для ΔS, приріст дії за Лагранжем ΔW можна подати у вигляді ряду

$$\Delta W = \bar{W} - W = \delta^* W + \frac{1}{2!}\delta^{*2} W + \ldots + \frac{1}{k!}\delta^{*k} W + \ldots,$$

де порядок малості кожного наступного доданка на одиницю вищий від порядку малості попереднього доданка ($\delta^* W$ — першого порядку малості, $\delta^{*2} W$ — другого і т. д.).

Головна, лінійна, частина приросту ΔW — доданок $\delta^* W$ — називається *першою варіацією дії* W

Принцип Ейлера — Лагранжа формулюється так:

Дійсний рух консервативної матеріальної системи з голономними в'язями відрізняється від усіх інших порівнюваних з ним кінематично можливих (у розумінні Ейлера — Лагранжа) *рухів тим, що для дійсного руху варіація дії за Лагранжем для довільного фіксованого проміжку часу дорівнює нулю:*

$$\delta^* W = \delta^* \int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt = 0. \tag{3.183}$$

Символ δ^* є символ варіації, який відповідає порівнюванню значення дії в дійсному русі з її значеннями у кінематично можливих в розумінні Ейлера — Лагранжа рухах, тоді як символ δ відповідає порівнюванню значення дії в дійсному русі з її значеннями в кінематично можливих рухах у розумінні Остроградського.

Перша варіація дії $\delta^* W$ за принципом Ейлера — Лагранжа дорівнює нулю для дійсного руху; можна довести, що друга варіація $\delta^{*2} W$ додатна, якщо тільки кінцеве положення системи B не дуже далеко відсунуте від початкового її положення A, і тоді можна твердити, що дія W за Лагранжем мінімальна в дійсному русі.

З принципу (3.183) випливають рівняння руху Лагранжа і, навпаки, з рівнянь Лагранжа випливає принцип (3.183). Отже, (3.183) *є нова форма основного закону руху матеріальної системи в консервативному силовому полі при стаціонарних в'язях.* Ця варіаційна форма закону руху системи має всі переваги, які було перелічено в кінці попереднього параграфа для принципу Остроградського — Гамільтона.

В інтегралі дії W за Лагранжем, обчисленому для уявлюваного руху, верхня границя інтегрування по часу залежить від характеру вибраного уявлюваного руху. Щоб позбутись цієї незручності, Якобі виключив час як змінну інтегрування за допомогою закону збереження енергії. За законом збереження енергії маємо:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\nu} m_k \left(\frac{ds_k}{dt}\right)^2 = h - V, \tag{3.184}$$

звідки

$$dt = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{\nu} m_k\, ds_k^2}{2(h-V)}},$$

так що

$$W = \int_{(A)}^{(B)} 2T \cdot dt = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2(h-V)\sum_{k=1}^{\nu} m_k\, ds_k^2}. \tag{3.185}$$

Це є дія за Лагранжем, яка записана у формі Якобі. У цій останній формі запису дії W границі інтегрування вже незмінні і являють собою кінцеві положення A і B механічної системи, а інтегрування ведеться по дугах траєкторій точок системи. Отже, ми надали принципу Ейлера — Лагранжа чисто геометричної форми.

У випадку однієї матеріальної точки, яка рухається при стаціонарних в'язях у стаціонарному силовому полі, дія за Лагранжем у формі Якобі матиме вигляд

$$W = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{2m(h-V)}\, ds,$$

або

$$W = \int_{(A)}^{(B)} m \cdot v ds.$$

На закінчення звернемо увагу на те, чим відрізняється принцип Остроградського — Гамільтона від принципу Ейлера — Лагранжа:

1. Дія за Остроградським $S = \int_{t_0}^{t} L dt$ відрізняється від дії за Лагранжем $W = \int_{t_0}^{t} 2T dt = \int_{(A)}^{(M)} \sqrt{2(h-V)\sum_{k=1} m_k ds_k^2}$ тим, що у виразі дії S за Остроградським під знаком інтеграла стоїть добуток функції L Лагранжа на елемент часу, тоді як у виразі дії W за Лагранжем під знаком інтеграла стоїть перетворений за допомогою закону збереження енергії добуток подвоєної кінетичної енергії системи на елемент часу, тобто $2T dt$.

2. Уявлювані рухи, з якими порівнюється дійсний рух, у розглядуваних двох принципах різні: у принципі *Остроградського — Гамільтона* вважається, що *всі уявлювані рухи відбуваються між заданими положеннями системи за один і той самий проміжок часу*, за який проходить і дійсне переміщення, а в принципі *Ейлера — Лагранжа* вважається, що *дійсний і всі уявлювані рухи відбуваються між заданими положеннями системи з одним і тим самим значенням h повної механічної енергії*. Тому в принципі Ейлера — Лагранжа порівнювані рухи можуть відбуватись не за один і той самий час.

3. На відміну від принципу Остроградського — Гамільтона, принцип Ейлера — Лагранжа справедливий тільки у випадку, коли при русі системи справджується закон збереження механічної енергії. У цьому останньому випадку можна застосувати будь-який з двох розглянутих принципів.

Щоб з'ясувати відмінність принципу Остроградського — Гамільтона від принципу Ейлера — Лагранжа, розглянемо одну задачу, яку розв'яжемо різними способами.

Приклад 1. Дослідимо рух матеріальної точки по гладенькій поверхні без дії активних сил, коли на рухому точку може діяти лише нормальна до поверхні реакція в'язі.

Розв'яжемо задачу трьома способами: 1) за допомогою принципу Ейлера — Лагранжа, користуючись дією у вигляді $W = \int_{(A)}^{(B)} 2T dt$; 2) за допомогою того самого принципу, користуючись дією W, перетвореною за Якобі; 3) за допомогою принципу Остроградського — Гамільтона з дією у вигляді $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$.

а) Перший спосіб. У класі кінематично можливих (у розумінні Ейлера — Лагранжа) рухів, які відбуваються з однією й тією самою повною енергією (що при відсутності активних сил означає: з однією й тією самою швидкістю), дійсним рухом є той, для якого

$$W = \int_{(A)}^{(B)} 2T dt = \min.$$

Враховуючи сталість T, цю умову можна записати так:

$$\int_{(A)}^{(B)} dt = \min, \qquad \text{(А)}$$

тобто час, протягом якого відбувається дійсний рух, є мінімальним. Але при рівномірному русі шлях $s = vt$, і з умови $t = \min$ випливає, що й $s = \min$. Отже, точка рухається рівномірно й описує на поверхні криву найкоротшої віддалі між заданими положеннями A і B, тобто вона описує *геодезичну лінію* на поверхні. Наприклад, на площині точка рухається по прямій, на сфері — по дузі великого кола.

б) Другий спосіб. Оскільки під радикалом у формулі для дії W стоять сталі величини, то можна написати $W = \int_{(A)}^{(B)} ds$, і тоді зразу видно, що дійсним рухом точки є її рух по лінії найкоротшої віддалі — по геодезичній лінії поверхні. Рух по геодезичній лінії поверхні повинен відбуватись рівномірно, що, як і раніше, випливає з вимоги про сталість енергії для всіх порівнюваних рухів.

в) Третій спосіб. У класі кінематично можливих (у розумінні Остроградського) рухів, які відбуваються між заданими точками A та B за один і той самий час, дійсним є той рух, для якого

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \min, \qquad \text{(Б)}$$

або, оскільки активні сили не діють і потенціальна енергія V дорівнює нулю,

$$S = \int_{t_0}^{t_1} T dt = \min. \qquad \text{(В)}$$

Було б грубою помилкою винести тут за знак інтеграла кінетичну енергію T, як це ми могли зробити, застосовуючи перший спосіб (принцип Ейлера — Лагранжа). Справа в тому, що клас порівнюваних рухів для принципу

Остроградського — Гамільтона інший, ніж клас порівнюваних рухів для принципу Ейлера — Лагранжа. Тепер $T = \frac{mv^2}{2}$ вже не обов'язково стале в уявлюваних рухах, хоч воно й залишається сталим у дійсному русі (останнє доведено нижче).

Продовжимо дослідження рівності (В). Оскільки $v^2 dt = v ds$, маємо:

$$\int_{(A)}^{(B)} v ds = \min .$$

Отже, значення інтеграла $\int_{(A)}^{(B)} v ds$ в дійсному русі менше, ніж у будь-якому кінематично можливому (в розумінні Остроградського) русі:

$$\int_{(A)}^{(B)} v ds < \int_{(A)}^{(B)} \tilde{v} d\tilde{s},$$

або

$$v \cdot \int_{(A)}^{(B)} d\tilde{s} < \int_{(A)}^{(B)} \tilde{v} \cdot d\tilde{s}. \qquad (\Gamma)$$

У лівій частині нерівності (Г) v є швидкість дійсного руху точки; ця швидкість стала (це доведено нижче без використання закону збереження енергії). У правій частині цієї нерівності під знаком інтеграла подано змінну швидкість точки $\tilde{v}$ в уявлюваному русі. Користуючись теоремою про середнє значення, дістанемо

$$v \cdot s_{AB} < (\tilde{v})_{\text{ср}} \cdot \tilde{s}_{AB}, \qquad (Д)$$

де $(\tilde{v})_{\text{ср}}$ — середнє значення швидкості в уявлюваному русі, а $\tilde{s}_{AB}$ — довжина шляху в уявлюваному русі.

З другого боку, за умовою порівнювання дійсного руху з уявлюваними час усіх рухів один і той самий і дорівнює

$$t_1 - t_0 = \frac{s_{AB}}{v} = \frac{\tilde{s}_{AB}}{(\tilde{v})_{\text{ср}}}. \qquad (Е)$$

Тепер перемножимо співвідношення (Д) і (Е) почленно. Дістанемо

$$s_{AB}^2 < \tilde{s}_{AB}^2,$$

звідки

$$s_{AB} < \tilde{s}_{AB},$$

тобто дійсний шлях — найкоротший серед кінематично можливих. Ми знову прийшли до висновку, що рух точки відбувається по геодезичній лінії на поверхні.

Вище ми скористались тим, що дійсний рух відбувається із сталою швидкістю. Це видно з принципу Остроградського — Гамільтона. Справді, у дійсному русі шлях змінюється за законом $s = s(t)$, а в уявлюваному русі — за законом $\tilde{s} = s(t) + \varepsilon\alpha(t)$, де ε — малий параметр, $\alpha(t)$ — довільна функція варіювання, яка перетворюється в нуль на границях інтервалу інтегрування, тобто при $t = t_0$ і $t = t_1$. У дійсному русі дія за Остроградським дорівнює

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{mv^2}{2} dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}^2 \cdot dt,$$

а в кінематично можливому русі

$$\tilde{S} = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} (\dot{s} + \varepsilon\dot{\alpha})^2 dt = \frac{m}{2} \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}^2 dt + m\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}\dot{\alpha} dt + \frac{m}{2} \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \dot{\alpha}^2 dt.$$

Приріст дії дорівнює

$$\Delta S = \tilde{S} - S = m\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}\dot{\alpha} dt + \frac{m}{2} \varepsilon^2 \int_{t_0}^{t_1} \dot{\alpha}^2 dt.$$

У цьому випадку ряд (3.170) складається тільки з двох доданків. Рівність нулю першої варіації означає, що

$$\delta S = m\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{s}\dot{\alpha} dt = 0,$$

або

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{s} \frac{d}{dt} [\alpha(t)] dt = 0.$$

Інтегруючи це рівняння по частинах, знайдемо

$$\dot{s}\alpha(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \alpha(t) \ddot{s} dt = 0,$$

або

$$\int_{t_0}^{t_1} \alpha(t) \ddot{s} dt = 0.$$

Оскільки функція $\alpha(t)$ цілком довільна, то звідси випливає, що

$$\ddot{s} = 0 \text{ і } s = at + b,$$

тобто рух точки відбувається рівномірно.

Отже, принцип Остроградського — Гамільтона один достатній для повного аналізу руху (немає потреби додатково використовувати закон збереження енергії чи якийсь інший закон).

На закінчення зауважимо, що застосування принципу Остроградського — Гамільтона в цій задачі можна значно спростити, якщо скористатись правилом знаходження умовного екстремуму. А саме, дійсний рух точки є той її рух, для якого

$$\int_{(A)}^{(B)} v ds = \min, \qquad (Є)$$

причому всі порівнювані рухи відбуваються протягом одного й того самого часу $\left(dt = \frac{ds}{v}\right)$:

$$\int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{v} = t_1 - t_0 = \text{const}.$$

За правилом знаходження умовного екстремуму утворюємо допоміжну функцію

$$f = v + \frac{\lambda}{v},$$

де λ — стала, і пишемо рівняння Ейлера

$$f_v - \frac{d}{ds} f_{v'} = 0,$$

або

$$f_v = 0,$$

тобто

$$1 - \frac{\lambda}{v^2} = 0,$$

звідки $v^2 = \lambda$. Оскільки λ — величина стала, то дійсний рух точки відбувається рівномірно. Отже, (Є) перетворюється у вираз

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} ds = \min,$$

а це й означає, що рух відбувається по геодезичній лінії на поверхні.

Приклад 2. Матеріальна точка рухається по поверхні сфери без дії активних сил. Знайти умову існування мінімуму дії W за Лагранжем.

Як показано вище [випадок б)], дію W тут можна записати як інтеграл

$$W = \int\limits_{(A)}^{(B)} ds, \tag{Ж}$$

і вона дорівнює просто довжині дуги траєкторії точки.

Звідси випливає, що дія буде мінімальною доти, поки кінцеве положення B в дійсному русі матеріальної точки вздовж дуги великого кола не стане діаметрально протилежним початковому положенню A.

Справді, якщо A і B — дві довільні, але не діаметрально протилежні точки на сфері, а AB — коротша з дуг великого кола, що сполучає ці точки, то

$$AB < \overset{\frown}{AB}, \tag{З}$$

де $\overset{\frown}{AB}$ — довжина дуги довільної кривої, що сполучає на сфері точки A і B. Нерівність (З) тут можна переписати на підставі (Ж) так:

$$W < \bar{W},$$

що й доводить твердження.

§ 4. РІВНЯННЯ ОСТРОГРАДСЬКОГО — ГАМІЛЬТОНА — ЯКОБІ

1. Вступні зауваження. У цьому параграфі розглядається новий метод дослідження руху систем матеріальних точок, відкритий незалежно Остроградським, Гамільтоном і Якобі.

Суть методу зводиться до особливого способу розв'язування задачі про інтегрування системи канонічних рівнянь:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Цей спосіб заснований на інтегруванні допоміжного диференціального рівняння в частинних похідних — рівняння Остроградського — Гамільтона — Якобі. Це рівняння і викладений нижче метод називатимемо скорочено *рівнянням і методом Остроградського.*

Рівняння і метод Остроградського відіграли видатну роль у розвитку теоретичної фізики в XX ст. Була помічена схожість між рівнянням Остроградського і основним рівнянням геометричної оптики; обидва ці рівняння є рівняннями в частинних похідних однакової математичної структури.

Але основне рівняння геометричної оптики є лише окремим випадком більш загального рівняння хвильової оптики — тим випадком, коли довжина світлової хвилі значно менша, ніж віддаль, на якій стає помітною неоднорідність середовища. Тому відкрилась можливість виконати в механіці надбудову, аналогічну до зворотного переходу від геометричної оптики до хвильової.

У цій надбудові відправним пунктом було рівняння Остроградського, і в результаті була створена квантова механіка, що описує рухи, які властиві, наприклад, електронам всередині атомів.

Із сказаного вище випливає, що класична механіка є своєрідним аналогом геометричної оптики.

Після цих попередніх зауважень про значення рівняння і методу Остроградського перейдемо до їх вивчення.

2. Головна функція Гамільтона та її властивості. Раніше ми порівнювали значення дії за Остроградським $S = \int\limits_{t_0}^{t} L \cdot dt$, обчисленої для дійсного руху, з її значенням для мало зміненого руху, який відбувається між тими самими крайніми положеннями і за той самий час.

Тепер підемо іншим шляхом і порівняємо обчислену для дійсного руху за певний час дію за Остроградським S з її значенням в іншому, теж дійсному, русі, який відбувається протягом того самого проміжку часу, але при дещо відмінних координатах і швидкостях.

Отже, перший з двох порівнюваних дійсних рухів починається в момент t_0 з положення A^0 з координатами q_k^0 і швидкостями $\dot{q}_k^0$, і до момента t_1 в цьому русі система приходить у положення A, координати і швидкості якого є q_k і $\dot{q}_k$. Другий дійсний рух починається в той самий момент t_0 з близького до A^0 положення $\bar{A}^0$ з координатами $q_k^0 + \delta q_k^0$ і швидкостями $\dot{q}_k^0 + \delta \dot{q}_k^0$, і до момента t_1 система приходить у цьому русі в близьке до A положення $\bar{A}$, координати і швидкості якого є $q_k + \delta q_k$ і $\dot{q}_k + \delta \dot{q}_k$. Знайдемо головну, лінійну, частину різниці значень дій, обчислених для двох порівнюваних рухів системи, тобто знайдемо варіацію дії δS. Оскільки дія S подається інтегралом, то варіацію дії можна знайти двома способами:

1) спочатку обчислюємо інтеграл від функції L, а потім знайдений інтеграл варіюємо;

2) спочатку знаходимо різницю значень функції Лагранжа в даний момент часу у двох порівнюваних рухів, тобто визначаємо варіацію δL підінтегральної функції, а потім її інтегруємо.

Ми виконаємо обчислення δS вказаними тут двома способами і дорівняємо потім обидва вирази. Це приведе нас до важливих висновків.

Розглянемо перший спосіб обчислення δS. Установимо спочатку, від яких змінних залежить S. Нехай ми проінтегрували рівняння руху системи матеріальних точок (рівняння Лагранжа або канонічні рівняння) і знайшли всі узагальнені координати у вигляді функцій часу і $2n$ сталих:

$$q_k = f_k(t;\ C_1,\ C_2, \ldots, C_{2n}) \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{3.186}$$

Диференціюючи ці рівності по t, знайдемо

$$\dot{q}_k = f'_k(t;\ C_1,\ C_2, \ldots, C_{2n}) \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n). \tag{3.187}$$

Підставляючи в ці $2n$ рівнянь окреме значення $t = t_0$, дістанемо всі початкові координати і швидкості:

$$q^0_k = f_k(t_0;\ C_1,\ C_2, \ldots, C_{2n}),\ \dot{q}^0_k = f'_k(t_0;\ C_1,\ C_2, \ldots, C_{2n}) \tag{3.188}$$

Якщо з цих $2n$ рівнянь (3.188) $2n$ сталих $C_1, \ldots, C_{2n}$ подати через початкові параметри q^0_k, $\dot{q}^0_k$, t_0 і підставити в (3.186) і (3.187), матимемо

$$\left.\begin{aligned} q_k &= F_k(t;\ t_0,\ q^0_1, \ldots, q^0_n,\ \dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n), \\ \dot{q}_k &= \Phi_k(t;\ t_0,\ q^0_1, \ldots, q^0_n,\ \dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n). \end{aligned}\right. \tag{3.189}$$

Отже, координати і швидкості є функціями часу t, початкових значень координат, початкових швидкостей і початкового моменту часу. Якщо початкові координати і початкові швидкості системи задані, то рух, який відбувається за законами природи, приведе (за даний проміжок часу від моменту t_0 до моменту t) до цілком певних кінцевих координат і швидкостей.

Тому маємо $4n + 2$ змінних:

$$\left.\begin{aligned} &t;\ q_1, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n \\ &t_0;\ q^0_1, \ldots, q^0_n,\ \dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n \end{aligned}\right\}, \tag{3.190}$$

які зв'язані $2n$ рівняннями (3.189). З цих змінних можемо вибрати будь-які $2n + 2$ за основні і подати через них решту $2n$ змінних. За основні $2n + 2$ змінних виберемо надалі всі координати й час, а саме:

$$\begin{aligned} &t;\ q_1, \ldots, q_n, \\ &t_0;\ q^0_1, \ldots, q^0_n. \end{aligned} \tag{3.191}$$

Через ці $2n + 2$ змінних визначимо функцію S. Це можна зробити так. Функція Лагранжа $L(t;\ q_1, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, яка залежить від координат, швидкостей і часу, за допомогою (3.189) визначиться як функція часу t і всіх початкових параметрів $q^0_1, \ldots, q^0_n,\ \dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n;\ t_0$, а після інтегрування по часу від t_0 до t знайдемо, що й $S = \int\limits_{t_0}^{t} L \cdot dt$ залежить від цих самих змінних $t;\ q^0_1, \ldots, q^0_n,\ \dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n;\ t_0$. Нарешті, за допомогою перших n рівнянь (3.189) можна виключити початкові швидкості $\dot{q}^0_1, \ldots, \dot{q}^0_n$, і тоді остаточно дістанемо

$$S = S(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ t_0;\ q^0_1, \ldots, q^0_n). \tag{3.192}$$

Дія S за Остроградським, яку подано в такій формі як функцію часу, координат і деяких сталих параметрів, називається головною функцією Гамільтона.

Формула (3.192) визначає дію системи для першого з двох її дійсних рухів — руху системи між положеннями A_0 і A. Для другого руху системи між положеннями $\bar{A}_0$ і $\bar{A}$ дія дорівнює

$$\bar{S} = S(t;\ q_1 + \delta q_1, \ldots, q_n + \delta q_n;\ t_0;\ q^0_1 + \delta q^0_1, \ldots, q^0_n + \delta q^0_n). \tag{3.193}$$

Початковий і кінцевий моменти часу t_0 і t для обох рухів однакові за умовою.

Якщо функцію (3.193) розкласти в ряд Тейлора, відняти (3.192) і залишити тільки величини першого порядку малості, то знайдемо, що головна частина різниці значень цих дій дорівнює

$$\delta S = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_k} \delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q^0_k} \delta q^0_k. \tag{3.194}$$

Це й є варіація δS головної функції Гамільтона, обчислена першим з двох зазначених вище способів.

Тепер розглянемо другий спосіб обчислення δS. У довільний момент часу функція Лагранжа двох порівнюваних рухів відрізняється на величину

$$\delta L = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right).$$

Інтегруючи цей вираз по часу від початкового моменту t_0 до кінцевого моменту t, знайдемо

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right) dt.$$

Беручи інтеграл від другого доданка по частинах, дістанемо

$$\delta S=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\delta q_k\Big|_{t_0}^{t}+\int_{t_0}^{t}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}\right)\right]\delta q_k\cdot dt.$$

Для дійсних рухів усі множники при δq_k під знаком інтеграла перетворюються в нуль згідно з рівняннями Лагранжа. Тому, коли пригадати, що $\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ є імпульс p_k, матимемо

$$\delta S=\sum_{k=1}^{n}p_k\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1},$$

або, остаточно,

$$\delta S=\sum_{k=1}^{n}p_k\delta q_k-\sum_{k=1}^{n}p_k^0\delta q_k^0, \tag{3.195}$$

де p_k^0, δq_k^0 стосується початкового моменту t_0, а p_k, δq_k — кінцевого моменту t.

Ми знайшли два вирази (3.194) і (3.195) для варіації δS. Дорівнюючи праві частини формул (3.194) і (3.195) і користуючись довільністю варіацій δq_k^0 і δq_k, знаходимо

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\quad p_k^0=-\frac{\partial S}{\partial q_k^0}\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{3.196}$$

Ці формули показують, що дія S має властивості потенціальної функції відносно імпульсів. Але співвідношення (3.196), які дуже цікаві самі собою, нічого не давали б, якби спочатку треба було інтегрувати рівняння руху системи (рівняння Лагранжа або канонічні) і обчислювати функцію S інтегруванням функції Лагранжа $S=\int_{t_0}^{t}Ldt$, щоб потім тільки впевнитись у справедливості (3.196).

Значення рівностей (3.196) полягає в тому, що їх можна використати для визначення імпульсів p_k і координат q_k системи. Остроградський, Гамільтон і Якобі знайшли диференціальне рівняння в частинних похідних, яке задовольняє головна функція Гамільтона S, так що визначення координат і імпульсів звелось до інтегрування цього рівняння для функції S.

3. Рівняння Остроградського — Гамільтона — Якобі. Виведемо диференціальне рівняння для головної функції Гамільтона (3.192).

Спостерігаючи зміну функції S з часом у даному дійсному русі системи, оцінимо швидкість зміни цієї функції. На підставі (3.192) маємо:

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot q_k. \tag{3.197}$$

Але, диференціюючи інтеграл $S=\int_{t_0}^{t}Ldt$, що визначає дію, по верхній границі, дістанемо

$$\frac{dS}{dt}=L. \tag{3.198}$$

Порівнюючи вирази (3.197) і (3.198), знаходимо

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot q_k-L=0. \tag{3.199}$$

Це і є шукане рівняння для S. Його можна подати простіше, якщо врахувати, що другий і третій доданки утворюють разом функцію H Гамільтона (3.146), в якій імпульси p_k замінено на похідні $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ від дії. Остаточно рівняння (3.199) запишеться так:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(t;\ q_1,\ldots,\ q_n;\ \frac{\partial S}{\partial q_1},\ldots,\ \frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=0. \tag{3.200}$$

Знайдене рівняння в частинних похідних для головної функції S називається *рівнянням Остроградського — Гамільтона — Якобі*. Воно містить тільки перші похідні від функції S, але в квадратах, так що порядок рівняння завжди перший, але степінь другий.

Функція

$$S=S\,(t;\ q_1,\ldots,\ q_n,\ \alpha_1,\ldots,\ \alpha_n)+\alpha_{n+1}, \tag{3.201}$$

яка є розв'язком рівняння (3.200) і містить n довільних сталих $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, відмінних від адитивної сталої α_{n+1} [адитивну сталу завжди можна приєднати, бо S входить у рівняння (3.200) тільки через свої похідні], називається *повним інтегралом рівняння Остроградського.*

Інтегрування системи канонічних рівнянь зводиться до визначення повного інтеграла рівняння Остроградського, бо справджується така *теорема Остроградського — Гамільтона — Якобі:*

Щоб знайти загальний розв'язок системи канонічних рівнянь, треба продиференціювати повний інтеграл (3.201) по сталих α_k і дорівняти ці частинні похідні $\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}$ до нових сталих інтегрування — β_k. Знайдені алгебраїчні рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_k}=-\beta_k\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n) \tag{3.202}$$

після розв'язування їх відносно q_k дають координати системи як функції часу t і $2n$ сталих α_k, β_k. Імпульси матеріальної системи визначаються за формулами

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}\quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n). \tag{3.203}$$

Доведення цієї теореми можна знайти в повніших курсах механіки*.

Слід зазначити, що задача інтегрування рівняння в частинних похідних у загальному випадку ще складніша, ніж задача інтегрування системи канонічних рівнянь або рівнянь Лагранжа. Однак часто виявляється можливим відокремити змінні в рівнянні Остроградського — Гамільтона — Якобі, і тоді цей метод буває практично зручним. Але справжнє велике значення рівняння Остроградського — Гамільтона — Якобі полягає в глибоких узагальнюючих теоретичних висновках, що були зроблені за його допомогою, а не в вузько практичному його застосуванні.

4. Характеристична функція. Розглянемо рівняння і метод Остроградського у випадку, коли в'язі системи стаціонарні, а силова функція активних сил U явно від часу не залежить, так що справджується закон збереження енергії:

$$T - U(q_1, \ldots, q_n) = h,$$

або

$$T + V(q_1, \ldots, q_n) = h,$$

де $V(q_1, \ldots, q_n)$ — потенціальна енергія.

Роль головної функції Гамільтона тепер відіграватиме так звана *характеристична функція* W. Аналогічно до того, як дія S за Остроградським, обчислена для дійсного руху механічної системи і подана як функція змінних t, t_0, q_k, q_k^0, визначає головну функцію Гамільтона, так і дія W за Лагранжем, обчислена для дійсного руху і подана як функція q_k, q_k^0, h, визначає характеристичну функцію.

Розглянемо який-небудь дійсний рух системи і обчислимо дію за Лагранжем за час від моменту t_0 до моменту t:

$$W = \int_{t_0}^{t} 2T dt.$$

Оскільки при русі системи її повна енергія зберігається, $T + V = h$, можна замінити T під знаком інтеграла виразом

$$T = h - V.$$

Дістанемо

$$W = \int_{t_0}^{t} (T - V)\, dt + \int_{t_0}^{t} h dt = \int_{t_0}^{t} L dt + h(t - t_0) = S + h(t - t_0).$$

Отже, значення дій W і S рухомої матеріальної системи з часом змінюються, але між ними існує залежність

$$W = S + h(t - t_0). \qquad (3.204)$$

* Див., наприклад, М. О. Кільчевський, Курс теоретичної механіки, т. II, 1957.

За допомогою закону збереження енергії $T + V = h$ можна зовсім виключити час з правої частини рівності (3.204). Дійсно, можна показати, що час t і початковий момент часу t_0 можуть входити в рівняння, які виражають закон руху системи, тільки в комбінації $t - t_0$*, тобто

$$q_k = q_k(t - t_0;\ q_1^0, \ldots, q_n^0;\ \dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_n^0) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.205)$$

Звідси і з (3.204) видно, що функція W залежить від величини проміжку часу руху, а також від початкових координат і початкових швидкостей. Але початкові швидкості визначаються з (3.205) через $t - t_0$; $q_1^0, \ldots, q_n^0$; $q_1, \ldots, q_n$, отже,

$$W = W(t - t_0;\ q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0). \qquad (3.206)$$

На підставі закону збереження енергії

$$h = f(q_1^0, \ldots, q_n^0;\ \dot{q}_1^0, \ldots, \dot{q}_n^0), \qquad (3.207)$$

причому функція f від параметра t_0 не залежить, бо кінетична й потенціальна енергії не залежать явно від часу. Виключаючи з останньої функції f швидкості за (3.205), знайдемо

$$h = f_1(t - t_0;\ q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0),$$

звідки

$$t - t_0 = \Phi(h;\ q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0). \qquad (3.208)$$

Тепер залишається підставити в рівність (3.206) знайдене значення $t - t_0$, і ми дістанемо W як функцію координат, а також параметрів $q_1^0, \ldots, q_n^0$ і h:

$$W = W(q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0;\ h). \qquad (3.209)$$

Дія W, яка обчислена для дійсного руху системи між двома її положеннями і визначена за допомогою закону збереження енергії як функція від початкових і кінцевих координат, а також від повного значення енергії, і є характеристичною функцією W. Характеристична і головна функції матеріальної системи в даному її русі зв'язані між собою залежністю (3.204):

$$W(q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0;\ h) = S(t - t_0;\ q_1, \ldots, q_n;\ q_1^0, \ldots, q_n^0) + h(t - t_0). \qquad (3.210)$$

Простим диференціюванням по координатах і енергії дістанемо

$$\frac{\partial W}{\partial q_k} = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_k^0} = \frac{\partial S}{\partial q_k^0}, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0. \qquad (3.211)$$

* Див. М. О. Кільчевський, Курс теоретичної механіки, т. II, 1957, стор. 359.

До цих співвідношень можна дійти також варіюванням (3.210) по всіх параметрах (t_0 вважається незмінним):

$$\delta W = \delta S + h\delta t + (t - t_0)\delta h,$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_k^0}\delta q_k^0 + \frac{\partial W}{\partial h}\delta h = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_k}\delta q_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial q_k^0}\delta q_k^0 +$$
$$+ \left(\frac{\partial S}{\partial t} + h\right)\delta t + (t - t_0)\delta h.$$

Дорівнюючи коефіцієнти при незалежних варіаціях, знову дістаємо співвідношення (3.211). Крім того, ми дістаємо цим способом ще співвідношення $\frac{\partial S}{\partial t} = -h$, яке можна використати для виведення диференціального рівняння (3.213) для функції W, яке аналогічне до рівняння (3.200) для функції S.

З (3.211) і (3.196) маємо:

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k}, \quad p_k^0 = -\frac{\partial W}{\partial q_k^0}. \tag{3.212}$$

Ці рівності аналогічні до рівностей (3.196) для функції S.

Диференціальне рівняння в частинних похідних для функції W встановимо так. За законом збереження енергії

$$T + V = h,$$

або

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = h.$$

Замінюючи тут імпульси згідно з (3.212), матимемо остаточно

$$H\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{\partial W}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}\right) = h. \tag{3.213}$$

Це рівняння можна розглядати також як окремий випадок рівняння (3.200), бо (як було показано вище)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -h, \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k},$$

і рівняння (3.200) переходить у (3.213).

Дослідження руху матеріальної системи при наявності закону збереження енергії можна здійснити на основі теореми Остроградського—Гамільтона—Якобі. Знаходимо повний інтеграл рівняння (3.213), тобто функцію W, яка залежить від координат $q_1, \ldots, q_n$ і n сталих, серед яких буде й h (ще одна стала увійде адитивно):

$$W = W(q_1, \ldots, q_n; h; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) + \alpha_n. \tag{3.214}$$

Тоді $(n-1)$ алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = -\beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

які знаходимо, дорівнюючи до інших довільних сталих $\beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ похідні функції W, взяті по довільних сталих α_k, зв'язують n координат $q_1, \ldots, q_n$ і сталі $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; h. Імпульси системи визначаються за формулами

$$p_k = \frac{\partial W}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

І тільки єдине рівняння, а саме:

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0,$$

містить явно час.

Якщо запровадити в розгляд фазовий простір з координатами $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, то $2n - 1$ рівнянь, які не містять часу, а саме рівняння:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_k} = -\beta_k \; [k = 1, 2, \ldots, (n-1)],$$
$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = p_i \; (i = 1, 2, \ldots, n),$$

визначають траєкторію точки в цьому просторі, а рівняння

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0$$

містить час і визначає закон руху цієї точки по траєкторії (бо це рівняння встановлює відповідність між моментами часу і положеннями точки на траєкторії).

Ми бачимо, що у випадку стаціонарних силових полів і стаціонарних в'язей виходить характерне відокремлення рівняння траєкторії і рівняння руху. Частина рівнянь визначає тільки траєкторію, а друга частина (одне рівняння $\frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0$) — закон руху по траєкторії. У цьому випадку можемо визначити траєкторію, не цікавлячись законом руху по ній.

П р и к л а д. Вивчимо за допомогою методу Остроградського — Гамільтона — Якобі рух матеріальної точки з інерції.

Спочатку складаємо функцію Гамільтона $H = T + V$ і подаємо її через канонічні змінні. Оскільки кінетична енергія точки дорівнює

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \tag{а}$$

імпульс буде

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},$$

звідки $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$, і аналогічно $\dot{y} = \frac{p_y}{m}$, $\dot{z} = \frac{p_z}{m}$. Беручи до уваги, що потенціальна енергія $V = 0$, і підставляючи ці значення в H, дістанемо остаточно

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \tag{б}$$

Потім записуємо рівняння Остроградського—Гамільтона—Якобі, для чого імпульси p_x, p_y, p_z у виразі H треба замінити на частинні похідні $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ і результат прирівняти до сталої

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]=h. \tag{в}$$

Далі знаходимо частинний розв'язок знайденого рівняння. Згідно з (а), всі три координати є циклічними, отже, імпульси є сталими, і тому цілком природно шукати розв'язки (в) у вигляді

$$W=ax+by+cz. \tag{г}$$

Підставляючи (г) в (в), маємо:

$$a^2+b^2+c^2=2mh.$$

Отже, з чотирьох сталих a, b, c, h тільки три є довільними. Нехай це будуть a, b, h. Тоді

$$W=ax+by+\sqrt{2mh-(a^2+b^2)}\,z. \tag{д}$$

Нарешті, пишемо розв'язок. Рівняння $\frac{\partial W}{\partial q_k}=p_k$ дають

$$a=m\dot{x},\ b=m\dot{y},\ \sqrt{2mh-(a^2+b^2)}=m\dot{z}, \tag{е}$$

тобто рух матеріальної точки відбувається рівномірно.

Рівняння $-\frac{\partial W}{\partial \alpha_k}=\beta_k$ і $\frac{\partial W}{\partial h}=-t_0+t$ мають тут вигляд (роль α_1, α_2 відіграють a, b)

$$-x+\frac{az}{\sqrt{2mh-(a^2+b^2)}}=\beta_1,$$

$$-y+\frac{bz}{\sqrt{2mh-(a^2+b^2)}}=\beta_2,$$

$$\frac{mz}{\sqrt{2mh-(a^2+b^2)}}=t-t_0.$$

Перші два рівняння визначають траєкторію — це пряма перетину двох площин. Третє рівняння визначає закон руху точки по траєкторії: z (а також x, y) є лінійною функцією t. Отже, рух точки відбувається рівномірно й прямолінійно.

Звернемо увагу на такий факт, що має аналогію в оптиці. При сталих a, b поверхні рівня функції W утворюють, згідно з (д), сім'ю нерухомих у просторі паралельних площин; через будь-яку точку простору проходить одна площина цієї сім'ї $W=\text{const}$. Поверхня рівня функції S є площина

$$S=W-ht=-ht+ax+by+cz=\text{const}, \tag{є}$$

яка переміщується паралельно самій собі, тобто рівномірно «біжить» у просторі, суміщаючись у кожний момент часу з однією певною площиною з сім'ї нерухомих площин $W=\text{const}$.

Аналогічно до цього в однорідному ізотропному середовищі поширюються плоскі хвилі. Розглянемо це докладніше.

Рівняння для зміщення F хвилі має, як відомо з фізики, вигляд

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2F}{\partial t^2}, \tag{ж}$$

де v — швидкість поширення хвилі в даному середовищі. У випадку світла F є який-небудь з компонентів електричного або магнітного векторів в даній точці ($v=\frac{c}{n}$, де n — показник заломлення середовища, а c — швидкість світла у вакуумі). Хвилі можна збуджувати найрізноманітнішими способами і різної частоти ω. Найважливішим типом хвилі є «плоска монохроматична хвиля», коли геометричним місцем точок однакового фізичного стану є площина і кожна точка x, y, z середовища «коливається» гармонічно з сталою частотою ω і амплітудою a за законом

$$F(x,\ y,\ z;\ t)=a\cos\left[\omega t-\frac{\omega}{v}(\alpha x+\beta y+\gamma z)\right]. \tag{з}$$

У випадку світла (з) є законом зміни компонентів електричного і магнітного векторів у даній точці (x, y, z) середовища. Підстановка (з) в (ж) дає $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ і показує, що α, β, γ є напрямними косинусами прямої — нормалі до площини з рівнянням $\alpha x+\beta y+\gamma z=\text{const}$.

Фазою монохроматичної хвилі називають функцію:

$$\Phi(x,\ y,\ z;\ t)=\omega t-\frac{\omega}{v}(\alpha x+\beta y+\gamma z).$$

У будь-який фіксований момент часу поверхня заданого сталого значення фази $\Phi=\Phi_0$ є площиною, яка суміщається з однією з площин сім'ї:

$$\Psi=\frac{c}{v}(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\text{const}.$$

Поверхня заданого сталого значення фази переміщується паралельно самій собі, тобто в напрямі нормалі до площини $\Psi=\text{const}$. Функція Ψ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2=n^2,$$

яке цілком аналогічне до рівняння (в) для дії.

Променями хвилі називається сім'я прямих, які ортогональні до площин $\Psi=\text{const}$. У розглядуваному випадку промені є паралельними між собою прямими, що мають напрямні косинуси α, β, γ.

Обчислимо фазову швидкість, тобто швидкість, з якою треба переміщуватись уздовж променя, щоб значення фази не змінювалось. Маємо:

$$0=d\Phi=\omega dt-\frac{\omega}{v}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz),$$

або

$$0=dt-\frac{1}{v}\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r},$$

де $\boldsymbol{e}$ — одиничний вектор у напрямі променів, а $d\boldsymbol{r}$ — вектор переміщення по променю. Оскільки $\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{r}=dr$, то

$$0=dt-\frac{1}{v}dr,$$

звідки

$$\frac{dr}{dt}=v.$$

Отже, константа v і є фазовою швидкістю простої хвилі.

У механічній задачі фазовій швидкості відповідає швидкість поширення поверхні рівня дії. Цю останню швидкість знайдемо за (є):

$$0=dS=-hdt+dW,$$

або

$$0 = -hdt + dW.$$

Але за властивістю дії $dW = pds$, де p — імпульс, а ds — переміщення поверхні рівня дії, отже,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{h}{p}.$$

Швидкість поширення поверхні рівня функції дії дорівнює відношенню енергії частинки до її імпульса. Ця швидкість аж ніяк не дорівнює швидкості частинки.

Розглянуту тут аналогію між найпростішими механічною й оптичною задачами можна узагальнити на складніші випадки. Ця аналогія стала вихідним пунктом для побудови квантової механіки.

Розділ VI

ТЕОРІЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

Вступні зауваження. За своїм змістом теорія малих коливань є взагалі *наближеною теорією руху матеріальної системи поблизу її положення стійкої рівноваги.* Ця теорія відіграє основну роль при аналізі багатьох механічних, а також і немеханічних рухів у фізиці.

Нижче розглянемо теорію малих коливань системи матеріальних точок у випадку, коли: 1) в'язі системи голономні і стаціонарні; 2) прикладені до точок матеріальної системи активні сили мають силову функцію — $V(q_1, \ldots, q_n)$, яка не залежить від часу явно. Тут V — потенціальна енергія системи.

§ 1. ВІЛЬНІ МАЛІ КОЛИВАННЯ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

1. Положення рівноваги. Стійка рівновага. Достатня умова стійкості. Почнемо з розгляду питання про те, як знайти всі положення рівноваги системи матеріальних точок.

За принципом можливих переміщень необхідною і достатньою умовою рівноваги є рівність нулю суми робіт усіх прикладених до точок системи активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи з розглядуваного положення. Тому маємо:

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n = 0. \qquad (3.215)$$

Якщо взяти до уваги довільність варіацій узагальнених координат (в'язі системи голономні), то з рівняння (3.215) знайдемо

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.216)$$

Отже, *в положенні рівноваги системи всі узагальнені сили дорівнюють нулю.*

Рівності (3.215) і (3.216) можна переписати за допомогою функції V, що визначає потенціальну енергію матеріальної системи. Оскільки робота активних сил дорівнює зменшенню потенціальної енергії, $\delta A = -\delta V$, маємо:

$$\delta A = Q_1\delta q_1 + \ldots + Q_n\delta q_n = -\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 - \ldots - \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n, \qquad (3.217)$$

звідки

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3.218)$$

Тому положення рівноваги матеріальної системи слід визначати, розв'язуючи відносно узагальнених координат систему рівнянь (3.218). Рівності (3.218) показують, що в положенні рівноваги системи задовольняються необхідні (але недостатні) умови існування мінімуму функції V, що визначає потенціальну енергію.

Приклад. У випадку математичного маятника з жорстким стержнем потенціальна енергія тягаря дорівнює

$$V = -mgl\cos\varphi \qquad (a)$$

і положення рівноваги маятника визначається з рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0. \qquad (б)$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$1)\ \varphi = 0 \ \text{ і } \ 2)\ \varphi = \pi,$$

які визначають два положення рівноваги маятника.

Розрізняють *стійкі* і *нестійкі* положення рівноваги. Поняття стійкості рівноваги зв'язане з можливістю руху системи поблизу положення рівноваги.

Якщо при достатньо малому початковому відхиленні точок системи від положення рівноваги і наданні їм достатньо малих початкових швидкостей система протягом всього наступного часу рухатиметься в наперед заданому як завгодно малому околі положення рівноваги, то останнє називається положенням стійкої рівноваги.

Ті положення рівноваги, які не задовольняють цю умову, називаються нестійкими.

Наведене тут означення стійкості потребує математичного уточнення. Нехай положення рівноваги системи визначається узагальненими координатами $q_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ і в початковий момент руху t_0 координати і швидкості дорівнюють відповідно q_{i_0} і $\dot{q}_{i_0}$.

Положення рівноваги матеріальної системи називається стійким, коли кожному як завгодно малому додатному числу ε можна поставити у відповідність інше додатне число δ таке, що для будь-якого t, більшого за t_0, координати і швидкості системи задовольнятимуть нерівності

$$|q_i - q_i^{(0)}| < \varepsilon, \quad |\dot{q}_i| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3.219)$$

якщо тільки початкові їх значення задовольняють умови

$$|q_{i_0} - q_i^{(0)}| < \delta, \ |\dot{q}_{i_0}| < \delta \ \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.220}$$

Рівновага називається нестійкою, якщо умова стійкості не виконується.

У наведеному вище прикладі положення рівноваги маятника $\varphi = 0$ є стійким, а положення $\varphi = \pi$ — нестійким.

Олександр Михайлович Ляпунов (1857—1918).
Великий російський математик і механік. Створив надзвичайно важливу теорію стійкості рівноваги і стійкості руху матеріальних систем, а також і теорію фігур рівноваги рідини, яка рівномірно обертається

Сформулюємо без доведення достатню ознаку стійкості стану рівноваги системи. Ця ознака відома під назвою *теореми Діріхле:*

Якщо в положенні рівноваги матеріальної системи її потенціальна енергія є мінімум, то це положення є положенням стійкої рівноваги.

У побудованій нижче теорії припускається, що ця достатня умова стійкості виконується: потенціальна енергія в положенні рівноваги має мінімум.

Те, що критерій Діріхле є не тільки достатньою, а й необхідною ознакою стійкості рівноваги, довів академік О. М. Ляпунов при деяких обмежуючих припущеннях. Але повного обернення теореми Діріхле (без обмежуючих припущень) не знайдено.

2. Формули кінетичної та потенціальної енергій при русі матеріальної системи біля положення стійкої рівноваги. Нехай матеріальна система рухається біля положення стійкої рівноваги; покладемо, що в цьому положенні рівноваги всі узагальнені координати дорівнюють нулю:

$$q_1 = 0, \ q_2 = 0, \ \ldots, \ q_n = 0.$$

У русі біля положення стійкої рівноваги системи всі її узагальнені координати $q_1, q_2, \ldots, q_n$ і всі її узагальнені швидкості $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$ будуть весь час малими величинами, якщо початкові

значення цих $2n$ величин малі; справедливість цього твердження випливає з означення стійкості.

Якщо в'язі системи стаціонарні, то кінетична енергія системи є, як відомо, квадратичною формою узагальнених швидкостей:

$$T = \frac{1}{2}(A_{11}\dot{q}_1^2 + \ldots + A_{nn}\dot{q}_n^2 + 2A_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + \\ + 2A_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n), \tag{3.221}$$

де A_{rs} — функції одних лише координат, причому $A_{rs} = A_{sr}$.

При русі матеріальної системи біля положення стійкої рівноваги всі функції $A_{rs}(q_1, \ldots, q_n)$ мало відрізнятимуться від своїх значень $a_{rs} = A_{rs}(0, \ldots, 0)$ у положенні рівноваги системи; це твердження випливає з неперервності функцій $A_{rs}(q_1, \ldots, q_n)$. Замінюючи в (3.221) усі функції A_{rs} на сталі величини a_{rs}, дістанемо наближене значення для T:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \ldots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \ldots + \\ + 2a_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n). \tag{3.222}$$

Отже, якщо матеріальна система з стаціонарними в'язями рухається біля положення стійкої рівноваги, то її кінетична енергія є квадратичною формою узагальнених швидкостей, причому коефіцієнти цієї форми є сталими величинами.

Оскільки при достатньо малих значеннях координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ функції $A_{rs}(q_1, \ldots, q_n)$ відрізняються від своїх значень у положенні рівноваги $A_{rs}(0, \ldots, 0)$ як завгодно мало (властивість неперервності функцій A_{rs}), то в цьому розумінні форма (3.222) з сталими коефіцієнтами дає значення кінетичної енергії системи в процесі її руху біля положення стійкої рівноваги як завгодно точно.

Обчислимо тепер потенціальну енергію системи $V(q_1, \ldots, q_n)$, припускаючи, як і раніше, що система рухається біля положення стійкої рівноваги. Розкладаючи функцію V в ряд Тейлора в околі положення рівноваги, тобто в околі точки $q_1 = 0, \ldots, q_n = 0$, дістанемо

$$V(q_1, \ldots, q_n) = V(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_i} q_i + \\ + \frac{1}{2} \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s} q_r q_s + \ldots, \tag{3.223}$$

де всі похідні обчислюються в положенні $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 0$, і тому вони є просто сталими величинами. Змінними величинами в (3.223) є тільки координати $q_1, q_2, \ldots q_n$, які входять множниками у формулу для V. Покладемо, що $V(0, \ldots, 0) = 0$. Це можна зробити, бо ми завжди можемо відлічувати потенціальну енергію системи від її значення в положенні рівноваги.

Крім того, $\frac{\partial V}{\partial q_k}=0$, оскільки ці похідні обчислюються для положення рівноваги $q_1=q_2=\ldots=q_n=0$, де всі узагальнені сили дорівнюють нулю, як це було встановлено вище на основі принципу можливих переміщень. Отже, розклад (3.223) функції $V(q_1, \ldots, q_n)$ починається тільки з третього доданка. Нехтуючи в цьому розкладі членами третього і вищого порядку малості і вводячи позначення $\frac{\partial^2 V}{\partial q_r \partial q_s}=c_{rs}$ (очевидно, $c_{rs}=c_{sr}$), матимемо

$$V(q_1, \ldots, q_n)=\frac{1}{2}(c_{11}q_1^2+\ldots+c_{nn}q_n^2+2c_{12}q_1q_2+\ldots+ + 2c_{n-1,\,n}q_{n-1}q_n). \tag{3.224}$$

Отже, якщо матеріальна система з стаціонарними в'язями рухається в околі положення стійкої рівноваги, то її потенціальна енергія є квадратичною формою координат, причому коефіцієнти цієї форми є сталими величинами.

Знаючи кінетичну й потенціальну енергії T і V, ми знаємо тим самим і функцію Лагранжа L і зможемо написати рівняння руху системи біля положення її стійкої рівноваги, а проінтегрувавши ці рівняння, зможемо знайти і самий рух матеріальної системи.

Рівняння малих коливань матеріальної системи. Якщо підставити значення знайденої вище функції Лагранжа $L=T-V$ в рівняння руху матеріальної системи, тобто в рівняння

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
&a_{11}\ddot{q}_1+a_{12}\ddot{q}_2+\ldots+a_{1n}\ddot{q}_n+c_{11}q_1+c_{12}q_2+\ldots+c_{1n}q_n=0,\\
&a_{21}\ddot{q}_1+a_{22}\ddot{q}_2+\ldots+a_{2n}\ddot{q}_n+c_{21}q_1+c_{22}q_2+\ldots+c_{2n}q_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{n1}\ddot{q}_1+a_{n2}\ddot{q}_2+\ldots+a_{nn}\ddot{q}_n+c_{n1}q_1+c_{n2}q_2+\ldots+c_{nn}q_n=0.
\end{aligned} \tag{3.225}$$

Це система однорідних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами.

Частинні розв'язки системи (3.225) шукаємо в формі

$$q_i=A_i\cos(\omega t+\varepsilon) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{3.226}$$

де всі A_i, ε і ω — сталі, які слід підібрати так, щоб рівняння системи (3.225) задовольнялись функціями (3.226) тотожно. Підставляючи (3.226) в (3.225), дістанемо [після скорочення на $\cos(\omega t+\varepsilon)$] систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих A_1, A_2, ..., A_n:

$$\begin{aligned}
&(c_{11}-\omega^2a_{11})A_1+(c_{12}-\omega^2a_{12})A_2+\ldots+(c_{1n}-\omega^2a_{1n})A_n=0,\\
&(c_{21}-\omega^2a_{21})A_1+(c_{22}-\omega^2a_{22})A_2+\ldots+(c_{2n}-\omega^2a_{2n})A_n=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(c_{n1}-\omega^2a_{n1})A_1+(c_{n2}-\omega^2a_{n2})A_2+\ldots+(c_{nn}-\omega^2a_{nn})A_n=0.
\end{aligned} \tag{3.227}$$

Нетривіальні* розв'язки однорідної системи існують лише при умові, що детермінант цієї системи дорівнює нулю. Тому повинно бути:

$$\Delta(\omega^2)=\begin{vmatrix}
c_{11}-\omega^2a_{11}, & c_{12}-\omega^2a_{12}, & \ldots, & c_{1n}-\omega^2a_{1n}\\
c_{21}-\omega^2a_{21}, & c_{22}-\omega^2a_{22}, & \ldots, & c_{2n}-\omega^2a_{2n}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
c_{n1}-\omega^2a_{n1}, & c_{n2}-\omega^2a_{n2}, & \ldots, & c_{nn}-\omega^2a_{nn}
\end{vmatrix}=0. \tag{3.228}$$

Отже, коли за ω взяти корінь рівняння (3.228), то з однорідної системи (3.227) визначаться всі сталі A_1, A_2, ..., A_n (з точністю до довільного сталого множника).

Рівняння (3.228) називається характеристичним, або рівнянням частот; воно служить для визначення частот ω, які входять у розв'язки (3.226). Оскільки степінь рівняння (3.228) відносно ω^2 дорівнює n, то, розв'язуючи (3.228), матимемо n коренів:

$$\omega_1^2,\ \omega_2^2,\ \ldots,\ \omega_n^2. \tag{3.229}$$

Кожному з цих коренів відповідає двоє рівних, але протилежних за знаком значень ω, які ми позначимо так:

$$\pm\omega_1,\ \pm\omega_2,\ \ldots,\ \pm\omega_n. \tag{3.230}$$

Якщо припустити, що потенціальна енергія системи в положенні рівноваги мінімальна (достатня умова стійкості Діріхле), то можна довести, що всі числа (3.229) дійсні і додатні, так що жодне з них не дорівнює нулю**. Ця властивість обумовлена тим, що коефіцієнти c_{rs} і a_{rs} у (3.222) і (3.224) не зовсім довільні: вони такі, що не лише кінетична, але й потенціальна енергія зберігає додатне значення при русі механічної системи.

Розглянемо спочатку додатні корені (3.230), записані в неспадаючому порядку:

$$\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\omega_3\leqslant\ \ldots\ \leqslant\omega_n. \tag{3.231}$$

Можливі два випадки: 1) усі корені (3.231) різні, 2) серед коренів є кратні. Спочатку розглянемо перший випадок, коли всі корені ω_1, ω_2, ..., ω_n різні:

$$\omega_1<\omega_2<\omega_3<\ \ldots<\omega_n.$$

Візьмемо яку-небудь з частот ω_1, ω_2, ..., ω_n, наприклад, ω_1, і підставимо її в систему рівнянь (3.227). Тоді дістанемо систему n лінійних однорідних рівнянь відносно невідомих величин A_1, A_2, ..., A_n.

Оскільки корені характеристичного рівняння прості (не кратні), то не всі мінори $(n-1)$-го порядку детермінанта системи (3.227) дорівнюють нулю і лише одне рівняння системи (3.227)

* Однорідна лінійна система завжди має очевидний розв'язок $A_1=A_2=\ldots=A_n=0$, який називається *тривіальним*.

** Доведення див., М. О. Кільчевський, Курс теоретичної механіки, т. II, 1957, стор. 258.

є наслідком решти рівнянь. Нехай це буде останнє рівняння, яке й відкинемо. Тоді матимемо систему $(n-1)$ лінійних однорідних рівнянь з n невідомими. Поділивши всі ці рівняння на A_n, матимемо неоднорідну лінійну систему $(n-1)$ рівнянь для визначення відношень $\frac{A_1}{A_n}, \frac{A_2}{A_n}, \ldots, \frac{A_{n-1}}{A_n}$ невідомих величин:

$$\begin{gathered}(c_{11}-\omega_1^2a_{11})\frac{A_1}{A_n}+\ldots+(c_{1n}-\omega_1^2a_{1n})\frac{A_{n-1}}{A_n}=-(c_{1n}-\omega_1^2a_{1n}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3.232)\\ (c_{n-1,1}-\omega_1^2a_{n-1,1})\frac{A_1}{A_n}+\ldots+(c_{n-1,n}-\omega_1^2a_{n-1,n})\frac{A_{n-1}}{A_n}=\\ =-(c_{n-1,n}-\omega_1^2a_{n-1,n}).\end{gathered}$$

Детермінант цієї неоднорідної системи відмінний від нуля, і система має розв'язок, який визначається за правилом Крамера:

$$\frac{A_1}{A_n}=\frac{\Delta_1(\omega_1^2)}{\Delta_n(\omega_1^2)}, \ldots, \frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{\Delta_{n-1}(\omega_1^2)}{\Delta_n(\omega_1^2)}, \qquad (3.233)$$

де $\Delta_k(\omega_1^2)$ є алгебраїчним доповненням k-го елемента останнього рядка детермінанта системи (3.228) при умові, що ω замінено на ω_1 (тут $k=1, 2, \ldots n$).

З однорідної системи (3.227) можна визначити лише відношення коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots, A_n$, але не самі коефіцієнти. Ці відношення й дають формули (3.233), які можна переписати в симетричному вигляді:

$$\frac{A_1}{\Delta_1(\omega_1^2)}=\frac{A_2}{\Delta_2(\omega_1^2)}=\ldots=\frac{A_n}{\Delta_n(\omega_1^2)}, \qquad (3.234)$$

тобто коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_n$ пропорціональні алгебраїчним доповненням елементів останнього рядка детермінанта (3.228), які обчислені при відповідному значенні ω.

Вважаючи один з коефіцієнтів $A_1, A_2, \ldots; A_n$, наприклад, A_n, цілком довільним і позначаючи відношення $\frac{A_n}{\Delta_n}$ через C, згідно з (3.226) і (3.234), дістанемо

$$q_i=C\Delta_i(\omega_1^2)\cos(\omega_1t+\varepsilon) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.235)$$

де C і ε — дві довільні сталі.

Якщо замість кореня ω_1 взяти $-\omega_1$ і одночасно ε замінити на $-\varepsilon$, то, як видно з (3.235), нового лінійно незалежного частинного розв'язку не буде. Отже, усі від'ємні корені дають розв'язки, які лінійно залежать від розв'язків (3.235), так що достатньо врахувати лише додатні значення коренів $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Для кожного кореня $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ буде розв'язок, що містить дві довільні сталі, і загальне число довільних сталих дорівнюватиме $2n$.

Загальний розв'язок однорідної лінійної системи (3.225) можна подати як суму частинних розв'язків типу (3.235):

$$q_i(t)=\sum_{k=1}^{n}C_k\Delta_i(\omega_k^2)\cos(\omega_kt+\varepsilon_k) \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.236)$$

де C_k і ε_k — довільні сталі.

Знайдений розв'язок доводить, що рух матеріальної системи, який відбувається при довільних достатньо малих початкових швидкостях системи і початкових відхиленнях від положення стійкої рівноваги, є коливальним рухом. Цей коливальний рух є результатом накладання простих гармонічних коливальних рухів. Досліджене мале коливання системи біля положення стійкої рівноваги належить до класу власних коливань, коли матеріальна система ізольована і не відбувається перетворення механічної енергії системи в немеханічні форми.

Те, що коливальний рух системи є результатом накладання *незалежних* один від одного простих гармонічних коливальних рухів, докладно з'ясовується в наступному параграфі.

§ 2. НОРМАЛЬНІ КООРДИНАТИ І ГОЛОВНІ КОЛИВАННЯ

1. Означення нормальних координат. З'ясуємо фізичний зміст знайденого раніше розв'язку. Якщо ввести позначення

$$C_k\cos(\omega_kt+\varepsilon_k)=\theta_k \quad (k=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.237)$$

то для координат системи, згідно з (3.236), дістанемо прості суми:

$$q_i(t)=\sum_{k=1}^{n}\Delta_i(\omega_k^2)\cdot\theta_k \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (3.238)$$

або, докладніше:

$$\left.\begin{aligned}q_1&=\Delta_{11}\theta_1+\Delta_{12}\theta_2+\ldots+\Delta_{1n}\theta_n\\ q_2&=\Delta_{21}\theta_1+\Delta_{22}\theta_2+\ldots+\Delta_{2n}\theta_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ q_n&=\Delta_{n1}\theta_1+\Delta_{n2}\theta_2+\ldots+\Delta_{nn}\theta_n\end{aligned}\right\} \qquad (3.239)$$

Тут $\Delta_{ik}=\Delta_i(\omega_k^2)$ — цілком визначені для коливної матеріальної системи числа. Змінні $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, згідно з (3.237), задовольняють прості диференціальні рівняння, а саме:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\theta}_1+\omega_1^2\theta_1&=0\\ \ddot{\theta}_2+\omega_2^2\theta_2&=0\\ &\ldots\ldots\\ \ddot{\theta}_n+\omega_n^2\theta_n&=0\end{aligned}\right\}, \qquad (3.240)$$

у чому можна впевнитись безпосередньо, підставляючи (3.237) в (3.240).

Звідси випливає: якщо за узагальнені координати вибрати замість спочатку взятих координат $q_1, \ldots, q_n$ лінійно зв'язані з ними за формулами (3.239) параметри $\theta_1, \ldots \theta_n$, то досить складна система рівнянь (3.225) перетворюється в найпростішу (3.240). У цій системі (3.240) кожне рівняння містить лише одну невідому функцію, а вся система являє собою сукупність незалежних одне від одного диференціальних рівнянь, кожне з яких можна проінтегрувати незалежно від інших. Параметри $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ називаються *нормальними координатами* матеріальної системи.

2. Обчислення кінетичної і потенціальної енергій в нормальних координатах. З'ясуємо тепер структуру функцій T і V, що визначають кінетичну й потенціальну енергії, в нормальних координатах $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. З попереднього випливає, що ці функції будуть квадратичними формами з сталими коефіцієнтами, як це буває завжди у випадку малих коливань при будь-якому виборі узагальнених координат.

Рівняння руху в змінних θ_k мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \theta_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.241}$$

оскільки T від θ_k не залежить, T — квадратична форма від узагальнених швидкостей і коефіцієнти форми є сталими величинами і, отже, $\frac{\partial T}{\partial \theta_k} = 0$. Порівнюючи рівняння (3.241) з рівняннями (3.240), дістанемо, що відповідні члени рівнянь можуть відрізнятись щонайбільше множниками a_k:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} = a_k \dot{\theta}_k, \quad \frac{\partial V}{\partial \theta_k} = \omega_k^2 a_k \theta_k. \tag{3.242}$$

Але множники a_k повинні бути сталими, бо похідні від квадратичних функцій із сталими коефіцієнтами можуть бути тільки лінійними.

Помножимо тепер перше з рівнянь (3.242) на $\dot{\theta}_k$, а друге на θ_k і додамо по k від 1 до n. Дістанемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_k} &\equiv 2T = \sum_{k=1}^{n} a_k \dot{\theta}_k^2 = a_1 \dot{\theta}_1^2 + a_2 \dot{\theta}_2^2 + \ldots + a_n \dot{\theta}_n^2, \\ \sum_{k=1}^{n} \theta_k \frac{\partial V}{\partial \theta_k} &\equiv 2V = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 a_k \theta_k^2 = \omega_1^2 a_1 \theta_1^2 + \omega_2^2 a_2 \theta_2^2 + \ldots + \omega_n^2 a_n \theta_n^2. \end{aligned} \tag{3.243}$$

Отже, ні добутки нормальних координат, ні добутки їх похідних по часу не входять у квадратичні форми T і V. Кінетична енергія T містить лише квадрати похідних по часу від нормальних координат, а потенціальна енергія — квадрати цих координат.

Не порушуючи загальності, можна вважати, що всі коефіцієнти $a_1, \ldots, a_n$ дорівнюють просто 1. Дійсно, в противному разі можна було б за нормальні координати взяти нормовані параметри:

$$\xi_k = \sqrt{a_k}\, \theta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.244}$$

і тоді мали б

$$\begin{aligned} 2T &= \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \ldots + \dot{\xi}_n^2, \\ 2V &= \omega_1^2 \xi_1^2 + \omega_2^2 \xi_2^2 + \ldots + \omega_n^2 \xi_n^2. \end{aligned} \tag{3.245}$$

3. Характер руху матеріальної системи. З'ясуємо тепер фізичний зміст знайденого раніше в § 1 розв'язку задачі про рух матеріальної системи біля положення стійкої рівноваги. Якщо за узагальнені координати вибрати нормальні координати $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то рівняння руху системи (3.240) наберуть такої форми:

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2 \xi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.246}$$

Ці рівняння інтегруються незалежно одне від одного. Розв'язки рівнянь (3.246) мають вигляд

$$\xi_k = B_k \cos(\omega_k t + \varepsilon_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3.247}$$

Щоб визначити сталі інтегрування B_k, ε_k, які входять до якої-небудь координати ξ_k, треба знати лише власне початкове значення координати $\xi_k(0)$ і початкову швидкість $\dot{\xi}_k(0)$, але при цьому зовсім не потрібно знати початкові відхилення і похідні решти нормальних координат. Цю властивість можна формулювати так: нормальні координати змінюються незалежно одна від одної. Можна здійснити зміну лише однієї якої-небудь з нормальних координат, тоді як інші не змінюватимуться.

Формули (3.236) показують, що хоч яким способом не був би спричинений рух системи біля її положення стійкої рівноваги, його завжди можна розглядати як результат накладання n незалежних між собою так званих *головних коливань* системи, тобто гармонічних коливань, які здійснюють нормальні координати. Число головних коливань дорівнює кількості ступенів вільності системи.

Ми перенумерували частоти за порядком їх зростання: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots < \omega_n$. Коливання з найменшою частотою ω_1 називають основним тоном системи, а коливання з частотами $\omega_2, \omega_3, \ldots$ — відповідно, першим, другим і т. д. обертонами системи.

Отже, розв'язок задачі про малі коливання системи біля положення стійкої рівноваги зводиться до визначення частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ головних коливань. Ці частоти визначають, розв'язуючи рівняння частот (3.228).

4. Зв'язок між довільними узагальненими координатами і нормальними координатами.

Довільні узагальнені координати $q_1, \ldots, q_n$, зв'язані з нормальними узагальненими координатами системи $\xi_1, \ldots, \xi_n$ лінійними формулами, а саме:

$$\begin{aligned} q_1 &= B_{11}\xi_1 + B_{12}\xi_2 + \ldots + B_{1n}\xi_n, \\ q_2 &= B_{21}\xi_1 + B_{22}\xi_2 + \ldots + B_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_n &= B_{n1}\xi_1 + B_{n2}\xi_2 + \ldots + B_{nn}\xi_n. \end{aligned} \tag{3.248}$$

Це випливає з (3.239) і (3.244).

Практично коефіцієнти B_{rs} можна визначити так. Припустимо, що збуджене тільки перше головне коливання системи, тобто $\xi_2 = \xi_3 = \ldots = \xi_n = 0$. У цьому випадку, згідно з (3.248), дістанемо

$$q_1 = B_{11}\xi_1, \quad q_2 = B_{21}\xi_1, \ \ldots, \ q_n = B_{n1}\xi_1. \tag{3.249}$$

Якщо підставити ці значення координат у (3.225) і взяти до уваги, що $\ddot{\xi}_1 = -\omega_1^2\xi_1$, для визначення коефіцієнтів $B_{11}, B_{21}, \ldots, B_{n1}$ дістанемо алгебраїчну систему рівнянь, які аналогічні до (3.227), а саме:

$$\left.\begin{aligned} (c_{11}-\omega_1^2 a_{11})B_{11}+(c_{12}-\omega_1^2 a_{12})B_{21}+\ldots+(c_{1n}-\omega_1^2 a_{1n})B_{n1} &= 0 \\ (c_{21}-\omega_1^2 a_{21})B_{11}+(c_{22}-\omega_1^2 a_{22})B_{21}+\ldots+(c_{2n}-\omega_1^2 a_{2n})B_{n1} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (c_{n1}-\omega_1^2 a_{n1})B_{11}+(c_{n2}-\omega_1^2 a_{n2})B_{21}+\ldots+(c_{nn}-\omega_1^2 a_{nn})B_{n1} &= 0 \end{aligned}\right| \tag{3.250}$$

Якщо серед частот немає кратних, то лише одне з рівнянь цієї алгебраїчної системи (3.250) буде наслідком решти рівнянь і ми зможемо визначити всі коефіцієнти $B_{11}, B_{21}, \ldots, B_{n1}$, крім одного, який залишиться ще невизначеним.

Коефіцієнти $B_{12}, B_{22}, \ldots, B_{n2}$, що визначають друге головне коливання, задовольняють систему рівнянь, яка відрізняється від (3.250) тільки тим, що замість ω_1 треба писати ω_2. Роблячи так і далі, ми можемо записати системи рівнянь для коефіцієнтів третього, четвертого і всіх інших головних коливань. Якщо всі корені $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ прості, то з кожної системи рівнянь типу (3.250) ми не зможемо визначити тільки по одному коефіцієнту, і всіх ще не визначених коефіцієнтів буде n [за числом самих систем рівнянь типу (3.250)]. Щоб визначити й ці n коефіцієнтів, досить підставити значення $q_1, \ldots, q_n$, згідно з (3.249), у вираз для кінетичної енергії T і покласти коефіцієнти при $\dot{\xi}_1^2, \ldots, \dot{\xi}_n^2$ такими, що дорівнюють 1. Це дасть нам рівно n умов, з яких ми й знайдемо ті n коефіцієнтів, які залишались ще не визначеними.

При цьому само собою виявиться, що квадратичні форми, які визначають кінетичну енергію T і потенціальну енергію V, будуть канонічні, тобто

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \ldots + \dot{\xi}_n^2\right),$$
$$V = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2 + \omega_2^2\xi_2^2 + \ldots + \omega_n^2\xi_n^2\right).$$

Тут коефіцієнти при квадратах нормальних координат ξ_k^2 у функції V дорівнюють квадратам частот ω_k^2.

Описаний метод для визначення коефіцієнтів B_{rs} нижче показаний на конкретному прикладі. Цей метод можна застосовувати і при наявності кратних коренів ω.

5. Комплексна форма розв'язку. Нормальні координати як функції часу можна подати або в дійсній формі

$$\xi_k = B_k \cos(\omega_k t + \varepsilon_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.251}$$

або в комплексній. Зауважимо, що оскільки рівняння

$$\ddot{\xi}_k + \omega_k^2\xi_k = 0$$

має комплексні частинні розв'язки $e^{i\omega_k t}$ і $e^{-i\omega_k t}$, то його загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$\xi_k = C_k e^{i\omega_k t} + D_k e^{-i\omega_k t} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.252}$$

де C_k, D_k — довільні сталі, які визначаються з початкових умов руху.

6. Підсумок. Існує нескінченна множина рухів матеріальної системи з стаціонарними в'язями біля положення стійкої рівноваги, і кожний рух з цієї множини визначається своїми початковими умовами. Але будь-який рух системи, який відповідає довільним достатньо малим початковим швидкостям і відхиленням від положення стійкої рівноваги, є результатом кінематичного накладання головних коливань системи, кількість яких дорівнює кількості ступенів вільності цієї системи. Головні коливання незалежні одне від одного. Якщо збудити яке-небудь з них, наприклад, коливання нормальної координати з номером s, то всі узагальнені координати $q_1, \ldots, q_n$ змінюватимуться за простим гармонічним законом з циклічною частотою ω_s. Значення частоти ω_s залежить від механічних параметрів системи (жорсткості пружин, маси тягарів, довжини стержнів, пружності валів і т. д.), але не залежить, звичайно, від того чи іншого способу вибору узагальнених координат. У кожному головному коливанні координати $q_1, \ldots, q_n$ змінюються так, що відношення амплітуд будь-якої пари координат не залежать від початкових умов і залишаються сталими протягом всього часу руху. Це є характерною рисою головних коливань і випливає з формули (3.234):

$$\frac{A_1}{\Delta_1(\omega_1^2)} = \frac{A_2}{\Delta_2(\omega_1^2)} = \frac{A_3}{\Delta_3(\omega_1^2)} = \ldots = \frac{A_n}{\Delta_n(\omega_1^2)}.$$

У викладеній вище теорії ми нехтували тертям, при наявності якого коливання затухатимуть.

Розклад руху довільної матеріальної системи біля положення стійкої рівноваги на головні коливання допускає далекосяжне узагальнення. Наприклад, у випадку натягнутої струни поперечні її коливання теж зводяться до накладання нескінченної множини головних коливань. У першому головному коливанні вся струна коливається з пучністю посередині, у другому — з вузлом посередині, у третьому — з двома вузлами (струна поділяється вузлами на три рівні частини) і т. д. Частоти головних коливань для струни утворюють простий ряд

$$\omega,\ 2\omega,\ 3\omega,\ \ldots,\ n\omega,\ \ldots$$

У кожному головному коливанні всі точки струни коливаються за простим гармонічним законом і відношення амплітуд коливань двох будь-яких точок струни є сталим. Складне коливання струни зводиться до сукупності простих гармонічних коливань. Тут ми маємо узагальнення законів коливання системи з скінченною кількістю ступенів вільності на випадок системи з нескінченною множиною ступенів вільності.

В електродинаміці доводиться, що таке узагальнення справедливе і при випромінюванні електромагнітних хвиль осциляторами, наприклад, при випромінюванні радіохвиль антеною передавальної радіостанції. Якщо струми в антені строго періодичні, то її випромінювання являє собою сукупність випромінювань гармонічних осциляторів.

7. Випадок кратних коренів рівняння частот. Вище припускалось, що всі частоти $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ різні. У цьому випадку лише одне з рівнянь системи (3.227) було наслідком решти рівнянь.

Якщо ж рівняння частот дає двократний корінь, наприклад, $\omega_2 = \omega_1$, то в системі (3.227), якщо підставити замість ω його значення $\omega_2 = \omega_1$, вже не одне, а двоє рівнянь будуть наслідками решти рівнянь; при трикратному корені, коли $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1$, вже три рівняння виявляються наслідками останніх і т. д. Це означає, що при подвійному корені треба відкинути два рівняння і взяти довільно два коефіцієнти, наприклад, A_n і A_{n-1} і з решти рівнянь визначити коефіцієнти $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ через A_n і A_{n-1}; при потрійному корені треба відкинути три рівняння і взяти довільно три коефіцієнти, наприклад, A_n, A_{n-1} і A_{n-2}, визначивши всі інші через ці три, і т. д.

Найпростіше можна дослідити випадок кратних коренів, користуючись нормальними координатами. Якщо рівняння частот має p-кратний корінь

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_p = \omega,$$

то потенціальна енергія дорівнюватиме

$$2V = \omega^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_p^2) + \omega_{p+1}^2 \xi_{p+1}^2 + \ldots + \omega_n^2 \xi_n^2,$$

а кінетична енергія визначиться так:

$$2T = \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \ldots + \dot{\xi}_n^2.$$

Рівняння руху матимуть вигляд

$$\ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots p),$$
$$\ddot{\xi}_{p+1} + \omega_{p+1}^2 \xi_{p+1} = 0, \ \ldots, \ \ddot{\xi}_n + \omega_n^2 \xi_n = 0.$$

Розв'язок буде

$$\xi_i = A_i \cos(\omega t + \varepsilon_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$\xi_{p+1} = A_{p+1} \cos(\omega_{p+1} t + \varepsilon_{p+1}), \ \ldots, \ \xi_n = A_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n).$$

Отже, при наявності кратних коренів рівняння частот відповідні періоди нормальних коливань між собою рівні.

Лагранж у своїй «Аналітичній механіці» залишив випадок кратних коренів без докладного розгляду, але висловив припущення, що в цьому випадку розв'язок міститиме члени виду

$$(A + Bt) \cos(\omega t + \varepsilon)$$

і рух виявиться нестійким завдяки наявності доданка, пропорціонального часу. Через 70 років, у 1858 р., член Петербурзької

Рис. 72

Академії наук О. І. Сомов указав на помилку Лагранжа. Незалежно від академіка О. І. Сомова випадок кратних коренів дослідив і німецький математик К. Вейєрштрасс.

Зауважимо, що Лагранж мав би рацію, якби квадратична форма, що визначає потенціальну енергію, не була додатно означеною.

Приклад. Розглянемо прямолінійні коливання двох одиничних мас, $m_1 = m_2 = 1$, закріплених на пружинах, як показано на рисунку (рис. 72). Нехай жорсткість крайніх пружин дорівнює k, а жорсткість внутрішньої пружини k_1. Нехай відхилення тягарів від їх положень рівноваги і будуть узагальненими координатами q_1 і q_2. Обчислимо кінетичну й потенціальну енергії системи:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

$$V = \frac{kq_1^2}{2} + \frac{kq_2^2}{2} + \frac{k_1}{2} (q_2 - q_1)^2 = \frac{k + k_1}{2} q_1^2 + \frac{k + k_1}{2} q_2^2 - k_1 q_1 q_2. \quad (3.253)$$

Координати q_1 і q_2 не є нормальними, бо у виразі потенціальної енергії є доданок з добутком координат. Рівняння руху (рівняння Лагранжа) мають вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + (k + k_1) q_1 - k_1 q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + (k + k_1) q_2 - k_1 q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.254)$$

Рівняння частот буде

$$\begin{vmatrix} (k+k_1-\omega^2) & -k_1 \\ -k_1 & (k+k_1-\omega^2)\end{vmatrix}=0,$$

або

$$(k+k_1-\omega^2)^2-k_1^2=0,$$

звідки

$$k+k_1-\omega^2=\pm k_1,$$

тобто

$$\omega_1^2=k,\quad \omega_2^2=k+2k_1. \qquad (3.255)$$

Згідно з викладеною теорією, нормальні координати ξ_1, ξ_2 зв'язані з координатами q_1, q_2 лінійними співвідношеннями

$$q_1=B_{11}\xi_1+B_{12}\xi_2,\quad q_2=B_{21}\xi_1+B_{22}\xi_2. \qquad (3.256)$$

Нам треба знайти коефіцієнти B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}. Нехай механічна система введена з стану спокою так, що здійснюється тільки перше головне коливання. Тоді буде

$$\left.\begin{matrix} q_1=B_{11}\xi_1 \\ q_2=B_{21}\xi_1\end{matrix}\right\},\ \ddot{\xi}_1=-\omega_1^2\xi_1, \qquad (3.257)$$

і підстановка (3.257) в рівняння руху (3.254) дає

$$k_1B_{11}-k_1B_{21}=0,\quad k_1B_{21}-k_1B_{11}=0.$$

З цих рівнянь видно, що

$$B_{11}=B_{21}=A, \qquad (3.258)$$

де A — спільне значення двох коефіцієнтів B_{11} і B_{21}. Отже, згідно з (3.258), (3.255) і (3.257), в першому головному коливанні тягарі коливаються з частотою $\omega_1=\sqrt{k}$ і з однаковими амплітудами й фазами.

Щоб знайти друге головне коливання, припустимо, що система перебуває саме в цьому другому коливанні. Тоді

$$\left.\begin{matrix} q_1=B_{12}\xi_2 \\ q_2=B_{22}\xi_2\end{matrix}\right\},\ \ddot{\xi}_2=-\omega_2^2\xi_2.$$

Підставляючи ці значення в (3.254), маємо:

$$-k_1B_{12}-k_1B_{22}=0,\quad -k_1B_{22}-k_1B_{12}=0.$$

З цих рівнянь видно, що коефіцієнти B_{12} і B_{22} відрізняються лише знаками, тобто $B_{12}=-B_{22}=B$.

Отже, в другому головному коливанні тягарі коливаються з частотою $\omega_2=\sqrt{k+2k_1}$ і з однаковими амплітудами, але фази коливань протилежні (відрізняються на π).

Після окремого дослідження кожного з нормальних коливань приходимо до висновку, що система (3.256) має вигляд

$$q_1=A\xi_1+B\xi_2,\quad q_2=A\xi_1-B\xi_2. \qquad (3.259)$$

Щоб визначити A і B, треба перейти, згідно з загальною теорією, до обчислення кінетичної енергії системи. Кінетичну й потенціальну енергії

в нормальних координатах можна подати формулами

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\xi}_2^2\right), \qquad (3.260)$$

$$V=\frac{1}{2}\left(\omega_1^2\xi_1^2+\omega_2^2\xi_2^2\right)=\frac{1}{2}\left[k\xi_1^2+(k+2k_1)\xi_2^2\right]. \qquad (3.260)$$

З другого боку, згідно з (3.253) і (3.259), маємо:

$$T=\frac{1}{2}\left[(A\dot{\xi}_1+B\dot{\xi}_2)^2+(A\dot{\xi}_1-B\dot{\xi}_2)^2\right]=\frac{1}{2}\left(2A^2\dot{\xi}_1^2+2B^2\dot{\xi}_2^2\right).$$

Порівнюючи цей вираз з (3.260), знайдемо

$$A^2=B^2=\frac{1}{2},$$

звідки

$$A=+\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad B=+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(Інші комбінації знаків зв'язані лише із зміною напряму відліку координат q_1, q_2, і тому їх можна відкинути). Контрольне обчислення функції V за (3.253) і (3.259) дає (3.260).

Отже, координати q_1 і q_2 зв'язані з нормальними координатами залежністю

$$q_1=\frac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}},\qquad q_2=\frac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt{2}}.$$

Звідси

$$\xi_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2),\qquad \xi_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1-q_2), \qquad (3.261)$$

тобто нормальні координати тут мають простий фізичний зміст: ξ_1 — пропорціональне зміщенню центра мас обох тягарів, а ξ_2 — пропорціональне відносному зміщенню цих двох мас.

Покажемо тепер, як знайти закон зміни координат q_1 і q_2, коли задані початкові умови, які полягають, наприклад, у тому, що при $t=0$

$$q_1(0)=0,\ \dot{q}_1(0)=0,\ q_2(0)=\alpha,\ \dot{q}_2(0)=0. \qquad (3.262)$$

Для спрощення обчислень перейдемо до комплексної форми:

$$\begin{aligned}\xi_1&=C_1e^{i\omega_1t}+D_1e^{-i\omega_1t},\\ \xi_2&=C_2e^{i\omega_2t}+D_2e^{-i\omega_2t}.\end{aligned} \qquad (3.263)$$

З (3.262), (3.261) та (3.263) виходить, що

$$\left.\begin{aligned}&C_1+D_1+C_2+D_2=0\\ &C_1+D_1-C_2-D_2=\alpha\sqrt{2}\\ &\omega_1C_1-\omega_1D_1-\omega_2D_2+\omega_2C_2=0\\ &\omega_1C_1-\omega_1D_1-\omega_2C_2+\omega_2D_2=0\end{aligned}\right\},$$

звідки

$$\left.\begin{aligned}&C_1+D_1=\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\\ &C_2+D_2=-\frac{\alpha}{2}\\ &C_1-D_1=0\\ &C_2-D_2=0\end{aligned}\right\},$$

або

$$C_1 = D_1 = \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}, \quad C_2 = D_2 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}},$$

і, отже, за (3.263) маємо:

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cos\omega_1 t, \quad \xi_2 = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\cos\omega_2 t,$$

а з (3.261) дістанемо

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \frac{\alpha}{2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = \alpha\sin\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \\ q_2 &= \frac{\alpha}{2}(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \alpha\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t \end{aligned}\right\}. \qquad (3.264)$$

Це й є закон зміни узагальнених координат q_1, q_2 при зазначених вище початкових умовах руху.

8. **Биття**. Коливання можуть супроводжуватись цікавим явищем, яке відоме під назвою *биття*.

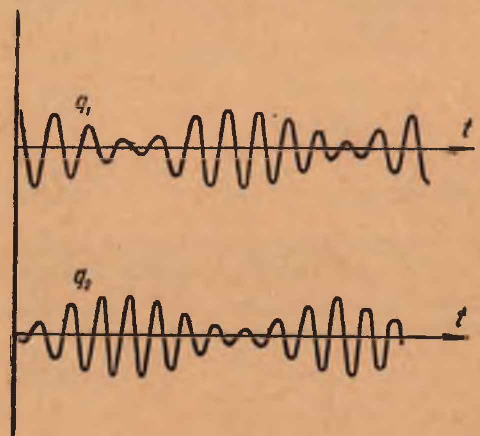

Рис. 73.

Нехай жорсткості пружин у попередньому прикладі підібрано так, що частоти ω_2 і ω_1 відрізняються одна від одної на дуже малу величину. Оскільки

$$\omega_2 = \sqrt{k+2k_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{k},$$

то досить взяти $2k_1 \ll k$. Це означає, що тягарі повинні бути сполучені між собою слабким зв'язком, який можна здійснити пружиною з малою жорсткістю. Покладемо, що

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega.$$

Тоді

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_1 + \Delta\omega \approx 2\omega_1 = 2\sqrt{k}.$$

Формули (3.264) можна переписати так:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= \left(\alpha\sin\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\sqrt{k}\,t \\ q_2 &= \left(\alpha\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\sqrt{k}\,t \end{aligned}\right\}, \qquad (3.265)$$

тобто гармонічне коливання координат q_1 і q_2 відбувається із змінною амплітудою (множник у дужках), яка, однак, змінюється повільно з частотою, що дорівнює $\frac{\Delta\omega}{2}$ (див. графіки). Ми

бачимо, що тягарі розгойдуються по черзі, так що енергія переливається від одного тягаря до другого, зберігаючись незмінною в системі (рис. 73).

§ 3. ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

Вивчимо вимушені коливання системи з двома ступенями вільності. Нехай T і V є кінетична й потенціальна енергії матеріальної системи, а Q_1 і Q_2 — узагальнені збурюючі сили. Рівняння руху мають вигляд

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \; (i = 1,2). \qquad (3.266)$$

Рівняння малих коливань будуть

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= Q_1, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= Q_2. \end{aligned} \qquad (3.267)$$

Найцікавішим буде випадок, коли збурюючі сили є гармонічними функціями часу однакової частоти й фази:

$$Q_1 = H_1\sin(pt+\delta); \quad Q_2 = H_2\sin(pt+\delta). \qquad (3.268)$$

Випадок, коли сили Q_1 і Q_2 є довільними періодичними функціями часу, можна звести до розглядуваного випадку гармонічних сил (розкладанням функцій у ряди Фур'є). Загальний інтеграл неоднорідної системи (3.267) є сумою загального розв'язку однорідної системи і якого-небудь частинного розв'язку неоднорідної системи. Оскільки загальний розв'язок однорідної системи раніше був вивчений у випадку будь-якого n, а не тільки при $n = 2$, то залишається знайти частинний розв'язок системи (3.267). Шукаємо частинний розв'язок у формі

$$\begin{aligned} q_1 &= B_1\sin(pt+\delta), \\ q_2 &= B_2\sin(pt+\delta). \end{aligned} \qquad (3.269)$$

Підстановка (3.269) в (3.267) після скорочення на $\sin(pt+\delta)$ дає систему алгебраїчних рівнянь для визначення амплітуд B_1 і B_2:

$$\begin{aligned} (c_{11} - p^2a_{11})B_1 + (c_{12} - p^2a_{12})B_2 &= H_1, \\ (c_{21} - p^2a_{21})B_1 + (c_{22} - p^2a_{22})B_2 &= H_2. \end{aligned} \qquad (3.270)$$

Якщо частота p збурюючої сили така, що детермінант цієї системи не дорівнює нулю, тобто

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - p^2a_{11} & c_{12} - p^2a_{12} \\ c_{21} - p^2a_{21} & c_{22} - p^2a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то з (3.270) знайдемо

$$B_1 = \frac{1}{\Delta(p^2)}\left[H_1(c_{22} - p^2 a_{22}) - H_2(c_{12} - p^2 a_{12})\right],$$
$$B_2 = \frac{1}{\Delta(p^2)}\left[-H_1(c_{21} - p^2 a_{21}) + H_2(c_{11} - p^2 a_{11})\right]. \qquad (3.271)$$

Отже, частинний розв'язок системи (3.267) визначений і має вигляд (3.269), де амплітуди мають значення (3.271). Тому загальний інтеграл системи (3.267) буде

$$q_1 = C_1\Delta_1(\omega_1^2)\cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + C_2\Delta_1(\omega_2^2)\cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + B_1\sin(pt + \delta), \qquad (3.272)$$
$$q_2 = C_1\Delta_2(\omega_1^2)\cos(\omega_1 t + \varepsilon_1) + C_2\Delta_2(\omega_2^2)\cos(\omega_2 t + \varepsilon_2) + B_2\sin(pt + \delta).$$

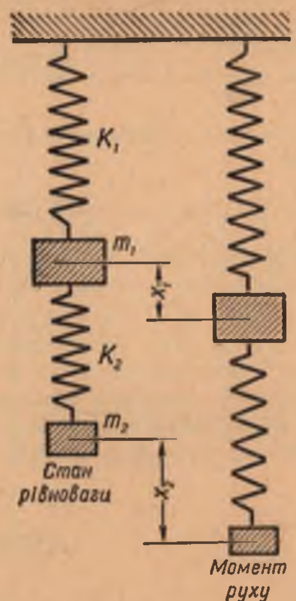

Рис. 74.

Ми бачимо, що при наявності збурюючої сили на головні коливання, які відбуваються з частотами ω_1, ω_2, накладається вимушене коливання, що відбувається з частотою p збурюючої сили.

Випадок системи з $n > 2$ ступенями вільності принципіально нічим не відрізняється від тільки що розглянутого випадку $n = 2$.

Приклад*. Нехай тягар m_1 підвішений на пружині з жорсткістю k_1 до нерухомої точки O і перебуває під дією вертикальної збуджуючої сили $Q = H\sin pt$. Тягар m_1 здійснюватиме вимушені коливання вздовж вертикалі біля положення рівноваги. Покажемо, як можна погасити вимушені коливання з допомогою невеликого тягаря m_2, підвішеного до тягаря m_1 на пружині з жорсткістю k_2 (рис. 74).

Покладемо, що вертикальні зміщення x_1, x_2 тягарів m_1 і m_2 від положень їх рівноваги є узагальнені координати цієї системи з двома ступенями вільності. Кінетична й потенціальна енергії системи дорівнюють

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2, \quad V = \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Рівняння Лагранжа будуть

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2(x_2 - x_1) = H\sin pt,$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) = 0. \qquad (а)$$

Частинні розв'язки цієї системи, що характеризують вимушені коливання, шукаємо в формі

$$x_1 = B_1\sin pt, \quad x_2 = B_2\sin pt. \qquad (б)$$

*С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, ГНТИ, 1931, стор. 191.

Підставляючи ці функції в рівняння руху, дістанемо систему для визначення коефіцієнтів B_1 і B_2, а саме:

$$(k_1 + k_2 - m_1 p^2)B_1 - k_2 B_2 = H,$$
$$k_2 B_1 - (k_2 - m_2 p^2)B_2 = 0. \qquad (в)$$

Звідси

$$B_1 = \frac{H(k_2 - m_2 p^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 p^2)(k_2 - m_2 p^2) - k_2^2},$$
$$B_2 = \frac{Hk_2}{(k_1 + k_2 - m_1 p^2)(k_2 - m_2 p^2) - k_2^2}. \qquad (г)$$

Отже, вимушені коливання системи подано формулами (б), де амплітуди цих коливань визначаються формулами (г).

Вимушені коливання тягаря m_1 будуть погашені цілком, коли $B_1 = 0$, тобто коли

$$\frac{k_2}{m_2} = p^2.$$

Це означає, що маса додаткового тягаря m_2 і жорсткість пружини k_2, на якій цей тягар підвішено, треба підібрати так, щоб частота власних коливань тягаря m_2 (при нерухомому тягарі m_1), яка дорівнює $\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$, дорівнювала частоті p збурюючої сили. При цій умові матимемо

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{H}{k_2}\sin pt.$$

Ми бачимо, що при гасінні коливань дія тягаря m_2 на тягар m_1 у кожний момент часу зрівноважує дію збурюючої сили.

Вбирачі коливань розглянутого в цій задачі типу можна застосовувати в тих випадках, коли частота збурюючої сили не змінюється в процесі роботи (наприклад, для електричних синхронних машин).

Гасники застосовуються і у випадку крутильних коливань. Нехай диск A, який насаджено на пружний вал, зазнає разом з валом дії періодично змінного обертального момента від кривошипно-шатунного механізму поршневого двигуна. Цей диск здійснюватиме крутильне коливання навколо осі вала; воно є накладанням вимушеного коливання (що відбувається з частотою, яка дорівнює частоті двигуна) на вільне коливання, частота якого визначається пружністю вала і моментом інерції диска.

Вимушене коливання диска можна погасити, приєднуючи до диска A другий диск B на пружному стержні C. При цьому, як і в розглянутому вище прикладі, параметри гасника підбирають так, щоб частота його власних крутильних коливань дорівнювала частоті збурюючого момента.

Описані типи гасників крутильних коливань застосовуються в автомобільних двигунах і в колінчастих валах двигунів Дізеля.

Аналогічним способом гасяться бічні коливання суден за допомогою простого бака, який складається з двох резервуарів, що частково заповнені водою і сполучені двома трубами — нижньою і верхньою. Верхня труба має повітряний клапан, перекриваючи який можна змінювати опір. Тут збурююча сила — поштовхи хвиль, а вода, яка переливається з одного резервуара в другий, — вбирач коливань. Гасники такого типу застосовували деякий час на великих пасажирських пароплавах на початку XX ст.

§ 4. РЕЗОНАНС

У випадку коливань, які відбуваються під діянням зовнішніх збурюючих сил, можливе настання резонансу. Це явище настає тоді, коли частота збурюючої сили збігається з однією з частот власних коливань системи; виявляється воно в значному збільшенні амплітуди коливань. Явище резонансу вивчатимемо для випадку системи, яка має два ступені вільності, причому користуватимемось нормальними координатами. Оскільки будь-які узагальнені координати зв'язані з нормальними координатами залежністю

$$\begin{aligned} q_1 &= B_{11}\xi_1 + B_{12}\xi_2, \\ q_2 &= B_{21}\xi_1 + B_{22}\xi_2, \end{aligned} \qquad (3.273)$$

а узагальнені сили Q_1 і Q_2 визначаються з виразу для роботи активних сил

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2,$$

то за допомогою (3.273) дістанемо

$$\begin{aligned} \delta A &= Q_1 (B_{11}\delta\xi_1 + B_{12}\delta\xi_2) + Q_2 (B_{21}\delta\xi_1 + B_{22}\delta\xi_2) = \\ &= (B_{11}Q_1 + B_{21}Q_2)\,\delta\xi_1 + (B_{12}Q_1 + B_{22}Q_2)\,\delta\xi_2. \end{aligned}$$

Отже, нормальним координатам відповідають узагальнені сили

$$Q_{\xi_1} = B_{11}Q_1 + B_{21}Q_2, \quad Q_{\xi_2} = B_{12}Q_1 + B_{22}Q_2.$$

Підставляючи в ці формули значення узагальнених сил, а саме:

$$Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta),$$

$$Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta),$$

знайдемо

$$\begin{aligned} Q_{\xi_1} &= (B_{11}H_1 + B_{21}H_2) \sin(pt + \delta), \\ Q_{\xi_2} &= (B_{12}H_1 + B_{22}H_2) \sin(pt + \delta). \end{aligned}$$

Рівняння руху для нормальних координат будуть такі:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 &= (B_{11}H_1 + B_{21}H_2) \sin(pt + \delta), \\ \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 &= (B_{12}H_1 + B_{22}H_2) \sin(pt + \delta). \end{aligned} \qquad (3.274)$$

Якщо p не збігається ні з ω_1, ні з ω_2, то обидва ці рівняння, які інтегруються незалежно, мають розв'язки у формі

$$\xi_i = C_i \sin(pt + \delta_i) \quad (i = 1,2),$$

що означає просте гармонічне коливання. Це відповідає вивченому раніше випадку вимушених коливань. Але, якщо, наприклад, $p = \omega_1$, то тільки розв'язок другого рівняння з (3.274) матиме, як і раніше, гармонічний вигляд, тоді як частинний розв'язок першого рівняння матиме вже зовсім інший вигляд:

$$\xi_1 = At \cos(\omega_1 t + \delta). \qquad (3.275)$$

Якщо підставити цей розв'язок у (3.274), то дістанемо

$$A = -\frac{B_{11}H_1 + B_{21}H_2}{2\omega_1}.$$

Структура частинного розв'язку (3.275) показує, що ξ_1, коливаючись, необмежено зростає. Це приведе до руйнування системи (за припущенням тертя немає).

При роботі двигуна чи мотора на пружній підставці існує стільки можливостей появи резонансу, скільки ступенів вільності в цієї підставки. Якщо частота двигуна збігається з якою-небудь однією з власних частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ підставки, то виникнуть дуже значні коливання цієї підставки.

На практиці споруди розраховують так, щоб найменша частота ω_1 основного тону була більшою від частоти збурюючої сили. У такому випадку всі інші власні частоти $\omega_2, \omega_3, \ldots$ безумовно будуть більшими від p, так що резонансу не буде.

Розділ VII

ЕЛЕМЕНТИ ДИНАМІКИ ТВЕРДОГО ТІЛА

Вступні зауваження. У цьому розділі розглядаються найпростіші питання динаміки абсолютно твердого тіла. Практичне значення вивчення законів руху твердого тіла очевидне і настільки важливе, що ця галузь механіки вже давно розвивається як самостійна.

Оскільки абсолютно тверде тіло є тільки окремим випадком системи матеріальних точок, то цілком зрозуміло, що всі теореми динаміки матеріальних систем можна застосувати й до тіла.

Характер руху твердого тіла при даних силах істотно залежить від розподілу маси в тілі. Тому побудову динаміки твердого тіла почнемо з розгляду геометрії мас; основним поняттям тут буде поняття момента інерції тіла.

§ 1. ГЕОМЕТРІЯ МАС

1. Момент інерції тіла відносно осі. *Моментом інерції тіла відносно осі називається сума добутків елементів мас тіла на квадрати їх віддалей до осі:*

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} r_k^2 \Delta m_k = \int_{(m)} r^2 dm. \tag{3.276}$$

Доведемо теорему:

Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює сумі момента інерції тіла відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла, і добутку маси тіла на квадрат віддалі між осями:

$$I_l = I_z + mh^2. \tag{3.277}$$

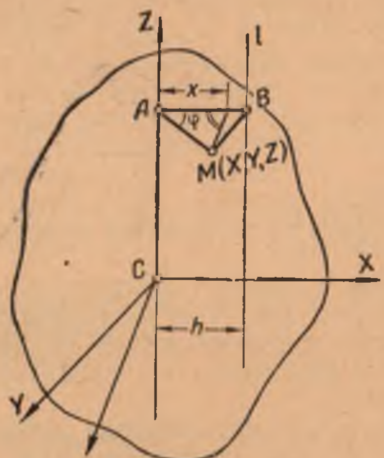

Рис. 75.

Тут l — довільна вісь, а z — паралельна до l вісь, що проходить через центр мас тіла, m — маса тіла, h — віддаль між осями l і z.

Виберемо початок координат у центрі інерції C тіла і напрямимо вісь Cz паралельно осі l, а вісь Cx так, щоб вона перетинала вісь l (рис. 75). Якщо M є довільна точка тіла, а MA і MB — перпендикуляри на осі Cz і l, то з трикутника MAB маємо:

$$MB^2 = MA^2 + AB^2 - 2MA \cdot AB \times \times \cos\varphi = MA^2 + AB^2 - 2AB \cdot x,$$

де x — абсциса точки M. Тут $AB = h$ — стале, тобто одне й те саме для всіх точок тіла, отже,

$$MB^2 = MA^2 + h^2 - 2hx. \tag{3.278}$$

Помноживши (3.278) на dm, інтегруючи по всьому об'єму тіла і помічаючи, що

$$\int x dm = 0$$

(центр інерції — в початку координат, так що $\int x dm = x_c = 0$), дістаємо остаточну формулу

$$I_l = I_z + mh^2.$$

Цю формулу часто застосовують на практиці.

Приклад. Визначимо момент інерції I однорідного циліндра відносно його твірної. За доведеною вище теоремою маємо:

$$I = I_c + mR^2,$$

або

$$I = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2. \tag{3.279}$$

2. Моменти інерції відносно осей, які проходять через одну й ту саму точку тіла. Нехай довільну точку O тіла вибрано за початок координат, а OB — пряма l, яка утворює з координатними осями Ox, Oy, Oz кути, косинуси яких дорівнюють α, β, γ (рис. 76). Якщо елемент маси dm віддалений від прямої l на відстань ρ, то, за означенням, момент інерції тіла відносно прямої l дорівнює

$$I = \int \rho^2 dm.$$

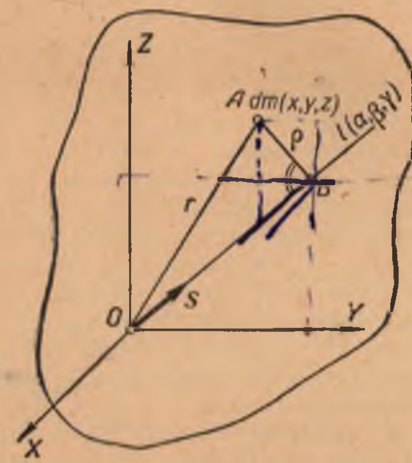

Рис. 76.

З трикутника OAB (AB—перпендикуляр з точки елемента dm на вісь l) маємо:

$$\rho^2 = r^2 - OB^2.$$

Катет OB, що дорівнює проекції гіпотенузи OA на напрям l, можна подати скалярним добутком вектора $\mathbf{OA}$ на одиничний вектор $\mathbf{s}$ у напрямі l:

$$OB = \mathbf{OA} \cdot \mathbf{s} = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

де x, y, z — координати елемента dm. Замінюючи ще r^2 через $x^2 + y^2 + z^2$, дістанемо

$$I = \int [(x^2 + y^2 + z^2) - (x\alpha + y\beta + z\gamma)^2]\, dm = \int [(1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz]\, dm.$$

Але для одиничного вектора $\mathbf{s}$ маємо:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = s^2 = 1.$$

Переписавши ліву частину як скалярний добуток двох векторів з проекціями α, β, γ, матимемо

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Замінюючи величини

$$1 - \alpha^2, \quad 1 - \beta^2, \quad 1 - \gamma^2,$$

відповідно, через

$$\beta^2 + \gamma^2, \quad \alpha^2 + \gamma^2, \quad \alpha^2 + \beta^2$$

перепишемо I так:

$$I = \int[(\beta^2+\gamma^2)\,x^2 + (\alpha^2+\gamma^2)\,y^2 + (\alpha^2+\beta^2)\,z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz]\,dm = \int[\alpha^2(y^2+z^2) + \beta^2(x^2+z^2) + \gamma^2(x^2+y^2) - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz]\,dm,$$

або

$$I = I_x\alpha^2 + I_y\beta^2 + I_z\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{xz}\alpha\gamma - 2I_{yz}\beta\gamma, \qquad (3.280)$$

де

$$\left.\begin{array}{ll} \int(y^2+z^2)\,dm = I_x, & \int xydm = I_{xy} \\ \int(x^2+z^2)\,dm = I_y, & \int xzdm = I_{xz} \\ \int(x^2+y^2)\,dm = I_z, & \int yzdm = I_{yz} \end{array}\right\} \qquad (3.281)$$

Ми довели, що момент інерції будь-якого тіла відносно осей, які проходять через початок координат, визначається квадратичною функцією (3.280) від α, β, γ з коефіцієнтами I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}. Ці коефіцієнти не залежать від напряму осі l. Перші три коефіцієнти I_x, I_y, I_z є моментами інерції тіла відносно координатних осей Ox, Oy, Oz; інші три коефіцієнти I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} називаються *відцентровими моментами інерції*.

Якщо для взятої системи координат і заданого тіла відомі три моменти інерції тіла відносно координатних осей і три відцентрові моменти, то за формулою (3.280) можна обчислити момент інерції тіла відносно будь-якої осі, яка проходить через початок координат.

3. **Еліпсоїд інерції.** Характер зміни величини момента інерції тіла при зміні напряму осі, яка проходить через початок координат, можна наочно показати геометрично. Відкладемо від початку координат уздовж узятої осі l відрізок r, довжина якого за величиною обернена до квадратного кореня з момента інерції відносно розглядуваної осі l:

$$r = \frac{1}{\sqrt{I_l}}. \qquad (3.282)$$

При найрізноманітніших змінах напряму осі l геометричне місце кінців відрізків, які відкладаються вздовж осей, утворить замкнуту поверхню, усі точки якої лежать на скінченній віддалі від початку координат, якщо тільки тіло відрізняється від нескінченно тонкого прямолінійного стержня, що ми й припускаємо.

Якщо координати кінця відкладеного відрізка r є x, y, z, то напрямні косинуси прямої l дорівнюють

$$\alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma = \frac{z}{r}.$$

Підставляючи ці значення в (3.280), помножаючи на r^2 і замінюючи $r^2 I$ за (3.282) через 1, замість (3.280) дістанемо

$$I_x \cdot x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{xz}xz - 2I_{yz}yz = 1. \qquad (3.283)$$

Це й є рівняння поверхні, яка є геометричним місцем кінців відрізків, що відкладаються від початку координат уздовж найрізноманітніших променів l (рис. 77). Поверхня (3.283) є трьохосьовий еліпсоїд (або один з його окремих видів), бо серед поверхонь другого порядку тільки еліпсоїд не має нескінченно віддалених точок: величина $r < \infty$, бо $I \neq 0$. Поверхня, яку ми побудували, називається *еліпсоїдом інерції*. Розміщення еліпсоїда інерції в просторі для даного тіла залежить від вибору точки O: у кожній точці тіла існує свій еліпсоїд інерції.

Еліпсоїд інерції дає наочне уявлення про те, як розподіляються моменти інерції тіла відносно осей, що проходять через дану точку тіла. Для кожної осі l, яка проходить через точку O, момент інерції визначається за довжиною відрізка, який відтинає на цій осі поверхня еліпсоїда інерції:

$$I = \frac{1}{r^2},$$

де r — половина довжини згаданого відрізка.

Усякий трьохосьовий еліпсоїд має три взаємно перпендикулярні головні осі; вони називаються *головними осями інерції* тіла для даного полюса (початку координат), який є центром поверхні еліпсоїда. Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції називаються *головними моментами інерції* тіла для розглянутого полюса.

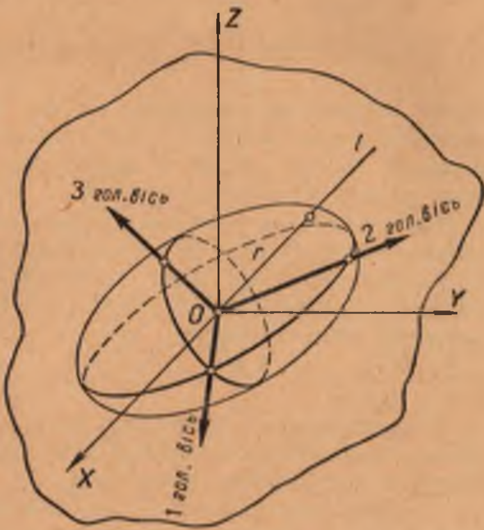

Рис. 77.

Якщо еліпсоїд є еліпсоїдом обертання, то лише одна з головних осей буде визначена однозначно, тоді як за другу головну вісь можна взяти будь-яку, аби вона була перпендикулярною до згаданої і проходила через розглядувану точку тіла. У випадку, коли еліпсоїд вироджується в сферу, будь-яка вісь є головною для даної точки.

Еліпсоїд інерції, побудований для центра інерції (центра мас) тіла, називається *центральним*. Його головні осі називаються *головними центральними осями інерції*.

Моменти інерції тіла відносно головних центральних осей інерції називаються *головними центральними моментами інерції тіла*.

Еліпсоїд інерції, побудований для будь-якої точки тіла, завжди можна віднести до головних осей. З аналітичної геометрії відомо, що рівняння еліпсоїда, віднесеного до головних осей, має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3.284)$$

З другого боку, рівняння еліпсоїда інерції за (3.283) таке:

$$x^2I_x+y^2I_y+z^2I_z-2xyI_{xy}-2xzI_{xz}-2yzI_{yz}=1. \qquad (3.285)$$

Порівнюючи (3.284) з (3.285), приходимо до висновку: якщо осі координат збігаються в даній точці з головними осями інерції тіла, то відповідні значення моментів інерції тіла дорівнюють

$$I_x=\frac{1}{a_2},\quad I_y=\frac{1}{b^2},\quad I_z=\frac{1}{c^2},$$
$$I_{xy}=0,\qquad I_{xz}=0,\qquad I_{yz}=0,$$

тобто *відцентрові моменти інерції тіла відносно головних осей завжди дорівнюють нулю* (для будь-якої точки тіла), *а головні моменти інерції за своєю величиною обернені до квадратів величини півосей еліпсоїда інерції.*

На закінчення наведемо кілька тверджень, доведення яких зовсім прості, і тому їх опускаємо.

1. Щоб вісь Ox була головною віссю інерції для початку координат, необхідно й достатньо, щоб дорівнювали нулю відцентрові моменти інерції, які містять букву x:

$$I_{xy}=I_{xz}=0.$$

2. Якщо тіло має форму нескінченно тонкої пластинки, то одна з головних осей інерції для кожної точки тіла перпендикулярна до площини пластинки.

3. Якщо однорідне тіло має площину симетрії, то в кожній точці цієї площини одна з головних осей інерції перпендикулярна до площини симетрії.

4. Кожна головна центральна вісь інерції залишається головною віссю для всіх своїх точок, а дві інші головні осі зберігають паралельність відповідним головним центральним осям.

5. Якщо однорідне тіло має дві взаємно перпендикулярні площини симетрії, то лінія їх перетину є однією з головних центральних осей інерції.

§ 2. ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ

1. Рівняння руху тіла. Нехай тверде тіло має дві закріплені точки A і B і обертається навколо осі AB під дією активних сил $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_\nu$.

За аксіомою про звільнення від в'язей тіло можна формально розглядати як вільне, що перебуває під дією не тільки заданих активних сил, а й реакцій в'язей, які ми позначимо $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ (рис. 78). Вважатимемо, що реакції $\boldsymbol{A}$ і $\boldsymbol{B}$ перетинають

вісь обертання AB (сили тертя опор відсутні або віднесені до активних сил). Систему координат видно з рисунка.

Щоб знайти диференціальне рівняння руху тіла, застосуємо теорему про зміну момента кількості руху цього тіла відносно його нерухомої осі Az:

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\,(x\dot{y}-y\dot{x})=M_z, \qquad (3.286)$$

де Δm — маса довільно взятої точки тіла, x, y — перші дві координати цієї точки, M_z — головний момент активних сил відносно осі обертання (моменти реакцій опор відносно тієї самої осі дорівнюють нулю).

Але для координат точок тіла справедливі рівності

$$\left.\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi & y=r\sin\varphi \\ \dot{x}=-r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} & \dot{y}=r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} \end{array}\right\}, \qquad (3.287)$$

де r — віддаль від точки Δm до осі обертання, а φ — кут між площиною xAz і площиною, що проходить через вісь Az і точку Δm.

На підставі (3.287) рівняння (3.286) перепишеться так:

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta mr^2\cdot\dot{\varphi}=M_z,$$

або

$$\frac{d}{dt}(I\omega)=M_z, \qquad (3.288)$$

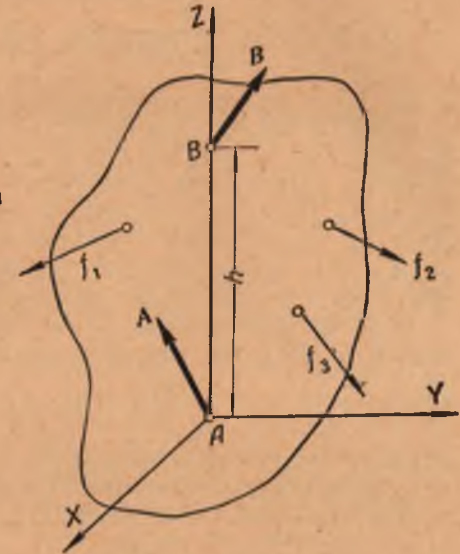

Рис. 78.

де $\omega=\dot{\varphi}$ — кутова швидкість у момент t, а I — момент інерції тіла відносно осі обертання.

Рівняння (3.288) можна подати ще у вигляді

$$I\frac{d\omega}{dt}=M_z. \qquad (3.289)$$

Це й є рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі. За своєю структурою воно аналогічне до того рівняння, яке визначає другий закон Ньютона. Рівняння (3.289) доводить, що чим більший момент інерції тіла I відносно осі обертання, тим менше кутове прискорення $\frac{d\omega}{dt}$ цього тіла при тому самому обертовому моменті M_z. Отже, момент інерції тіла відносно осі виступає як міра інертності у випадку обертання тіла навколо осі. У цьому полягає фізичний зміст введеного поняття момента інерції.

2. **Визначення реакцій опор.** Застосовуючи теорему про зміну кількості руху тіла і теорему про зміну момента кількості руху в проекціях на осі координат, напишемо

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{x} &= \sum X + X_A + X_B\\ \frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{y} &= \sum Y + Y_A + Y_B\\ \frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{z} &= \sum Z + Z_A + Z_B\\ \frac{d}{dt}\sum\Delta m\,(y\dot{z}-z\dot{y}) &= \sum\mathrm{mom}_x f - hY_B\\ \frac{d}{dt}\sum\Delta m\,(z\dot{x}-x\dot{z}) &= \sum\mathrm{mom}_y f + hX_B \end{aligned}\right\}\qquad(3.290)$$

Ненаписане шосте рівняння вже було вивчене в попередньому пункті. У правих частинах цих рівнянь подано вирази: $\sum X$, $\sum Y$, $\sum Z$ — суми проекцій активних сил на осі координат; $\sum\mathrm{mom}_x f$, $\sum\mathrm{mom}_y f$ — суми моментів активних сил відносно осей Ax і Ay; X_A, Y_A, Z_A — проекції на осі координат реакції опори A; X_B, Y_B, Z_B — аналогічні проекції реакції опори B; h — віддаль між точками закріплення A і B.

Ліві частини рівнянь (3.290) перетворимо за допомогою рівностей (3.287), які запишемо так:

$$\dot{x} = -y\omega,\quad \dot{y} = x\omega,\quad \dot{z} = 0.\qquad(3.291)$$

Остання з цих рівностей очевидна: координата z будь-якої точки Δm тіла залишається незмінною при обертанні тіла навколо осі Az.

На підставі (3.291) тепер маємо

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{x} = -\frac{d}{dt}\left(\sum\Delta m\cdot y\cdot\omega\right) = -\sum(\Delta m\dot{y}\omega + \Delta m y\varepsilon) = -\omega^2\sum\Delta m\cdot x - \varepsilon\sum\Delta m\cdot y,$$

де ε — кутове прискорення тіла.

Використавши ще формули (3.50) для визначення координат x_c, y_c центра мас тіла, запишемо остаточно

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{x} = -\omega^2 m x_c - \varepsilon m y_c,\qquad(3.292)$$

де m — маса тіла.

Аналогічно маємо

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot\dot{y} = \frac{d}{dt}\left(\sum\Delta m\cdot x\omega\right) = \sum(\Delta m\dot{x}\omega + \Delta m x\varepsilon) = -\omega^2\sum\Delta m\cdot y + \varepsilon\sum\Delta m\cdot x = -\omega^2 m y_c + \varepsilon m x_c.\qquad(3.293)$$

Перетворимо цим способом ще й ліві частини двох останніх рівнянь системи (3.290):

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\,(y\dot{z}-z\dot{y}) = -\frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot z\dot{y} = -\frac{d}{dt}\sum\Delta m\cdot zx\omega = -\sum\Delta m z(\dot{x}\omega + x\dot{\omega}) = \omega^2\sum\Delta m\cdot zy - \varepsilon\sum\Delta m zx = \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz},\qquad(3.294)$$

і аналогічно

$$\frac{d}{dt}\sum\Delta m\,(z\dot{x}-x\dot{z}) = -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz}.\qquad(3.295)$$

На підставі (3.292) — (3.295) рівняння (3.290) можна переписати так:

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 m x_c - \varepsilon m y_c &= \sum X + X_A + X_B\\ -\omega^2 m y_c + \varepsilon m x_c &= \sum Y + Y_A + Y_B\\ 0 &= \sum Z + Z_A + Z_B\\ \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz} &= \sum\mathrm{mom}_x f - hY_B\\ -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz} &= \sum\mathrm{mom}_y f + hX_B \end{aligned}\right\}\qquad(3.296)$$

Ми знайшли п'ять рівнянь, яким задовольняють шість невідомих X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B. З третього рівняння можна визначити лише суму $Z_A + Z_B$.

Шосте рівняння, якого невистачає для визначення всіх реакцій, можна вивести, якщо відмовитись від припущення про те, що тіло є абсолютно твердим. Але це означало б вихід в область теорії пружності. У межах теоретичної механіки система рівнянь для визначення реакцій опор є неозначеною.

Правда, цю неозначеність системи рівнянь легко усунути, якщо належно вибрати вид опор. При закріпленні тіла з допомогою, наприклад, одного підшипника і одного підп'ятника матимемо, очевидно, тільки п'ять невідомих, отже, ніякої неозначеності не буде.

Кожну з шести невідомих реакцій подамо як суму двох нових доданків, а саме:

$$X_A = X_A^0 + X_A',\quad X_B = X_B^0 + X_B'\ \text{і т. д.}\qquad(3.297)$$

Підставивши ці значення в (3.296), запишемо тепер такі дві системи рівнянь для визначення доданків, що з них складаються реакції опор (тим самим ми визначаємо спосіб вибору доданків):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum X + X_A^0 + X_B^0\\ 0 &= \sum Y + Y_A^0 + Y_B^0\\ 0 &= \sum Z + Z_A^0 + Z_B^0\\ 0 &= \sum\mathrm{mom}_x f - hY_B^0\\ 0 &= \sum\mathrm{mom}_y f - hX_B^0 \end{aligned}\qquad\left|\qquad\begin{aligned} -m(\omega^2 x_c + \varepsilon y_c) &= X_A' + X_B'\\ -m(\omega^2 y_c - \varepsilon x_c) &= Y_A' + Y_B'\\ 0 &= Z_A' + Z_B'\\ \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz} &= -hY_B'\\ -\omega^2 I_{xz} - \varepsilon I_{yz} &= hX_B' \end{aligned}\right.\qquad(3.298)$$

Подана тут зліва система рівнянь нагадує систему рівнянь статики.

Називатимемо величини X_A^0, X_B^0 і т. д. *статичними* реакціями опор, а величини X_A', X_B' і т. д.— *додатковими* реакціями; реакції опор X_A, X_B і т. д. назвемо *динамічними* (це й є саме ті реакції, які в дійсності існують при обертанні тіла).

Звернемо увагу на те, що термін «статичні реакції» умовний: прикладені до тіла активні сили не зрівноважуються, а зумовлюють обертання тіла навколо осі z; проте система п'яти рівнянь, з яких можна знайти статичні реакції, дійсно є такою, як у статиці.

3. Зрівноваження сил інерції. Відповімо тепер на запитання (воно має велике практичне значення): при яких умовах динамічні реакції опор не відрізняються від статичних реакцій і додаткові реакції дорівнюють нулю?

З системи (3.298) видно, що при обертанні тіла ліві частини других п'яти рівнянь системи дорівнюватимуть нулю, і тому рівняння (3.296) для визначення динамічних реакцій не відрізнятимуться від рівнянь для визначення статичних реакцій, якщо поставити вимогу, щоб

$$x_c = 0, \quad I_{xz} = 0, \qquad y_c = 0, \quad I_{yz} = 0. \tag{3.299}$$

Умови (3.299) достатні для того, щоб додаткові реакції були відсутні. Легко показати, що ці умови й необхідні. Дійсно, якщо додаткові реакції відсутні, то, згідно з (3.298), повинні виконуватись такі умови:

$$\omega^2 x_c + \varepsilon y_c = 0, \quad \omega^2 I_{yz} - \varepsilon I_{xz} = 0, \qquad \varepsilon x_c - \omega^2 y_c = 0, \quad \varepsilon I_{yz} + \omega^2 I_{xz} = 0. \tag{3.300}$$

Але детермінант цих систем рівнянь не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & -\omega^2 \end{vmatrix} = -(\omega^4 + \varepsilon^2) \neq 0,$$

так що ці рівняння мають єдиний розв'язок, а саме:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0, \quad I_{xz} = 0, \quad I_{yz} = 0. \tag{3.301}$$

Отже, умови (3.301) не тільки достатні, а й необхідні.

З'ясуємо фізичний зміст знайдених умов (3.301). Умови $x_c = y_c = 0$ означають, що центр ваги тіла повинен лежати на осі обертання, а умови $I_{xz} = I_{yz} = 0$ показують, що вісь обертання — головна вісь інерції.

Отже, динамічні реакції дорівнюють статичним тоді і тільки тоді, коли тіло обертається навколо головної центральної осі інерції. Говорять, що в цьому випадку тіло *динамічно зрівноважене* на осі обертання. Динамічно зрівноважене тіло обертається завжди навколо осі, яка проходить через центр мас тіла. Але обернене твердження не завжди правильне. Якщо, наприклад, центральний еліпсоїд інерції трьохосьовий, то в тілі існують

тільки три осі, при обертанні навколо яких додаткові реакції дорівнюють нулю. Ці три осі взаємно перпендикулярні.

Зауважимо, що вісь геометричної симетрії однорідного тіла завжди є головною центральною віссю інерції, так що при обертанні навколо такої осі тіло динамічно зрівноважене.

Якщо вісь обертання є головною для точки A, але центр мас не лежить на осі обертання, тобто якщо $I_{xz} = I_{yz} = 0$, але $x_c^2 + y_c^2 \neq 0$, то два останні рівняння системи (3.298) приводять до висновку:

$$Y_B' = 0, \quad X_B' = 0,$$

тобто додаткові реакції в точці B зникають, якщо вісь обертання є головною віссю інерції для точки закріплення A.

Динамічне зрівноважування тіл, що обертаються, є одним з дуже актуальних завдань сучасного машинобудування. Якщо вісь обертання (ротора турбіни, колінчастого вала двигуна внутрішнього згоряння, гвинта гелікоптера і т. д.) не є головною центральною віссю інерції, то при великій кутовій швидкості обертання виникають величезні додаткові тиски, які діють на закріплення (підшипники або підп'ятники), і вектор цих додаткових тисків обертається разом з тілом. Внаслідок цього підшипники розхитуються, а при дуже великому числі обертів вал «гуде».

Розрахунки показують, що незрівноважений тягарець вагою в кілька десятків грамів, розміщений на ободі сучасної турбіни Лаваля, може дати додатковий тиск на вісь, який досягає кількох тонн. Зовсім незначне зміщення центра мас колеса турбіни від осі обертання на віддаль порядку 1 *мм* теж приводить до величезних додаткових навантажень, бо робочі колеса сучасних турбін роблять кілька десятків тисяч обертів за хвилину.

У техніці для центрування валів застосовують спеціальні машини. Але ще в 1884 р. Лаваль винайшов цікавий спосіб центрування валів. Цей спосіб спочатку здавався парадоксальним. Замість того щоб збільшувати діаметр вала, укріплюючи його, Лаваль зменшив діаметр, зробивши вал гнучким. Виявилось, що такий вал при обертанні центрується автоматично. Уточнену теорію цього явища дав проф. М. Є. Жуковський у 1897 р.

§ 3. ТЕОРІЯ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА

1. Рівняння руху. *Фізичним маятником називається тверде тіло, яке перебуває під дією власної ваги і може обертатись без тертя навколо нерухомої горизонтальної осі.*

Проведемо через нерухому горизонтальну вісь Oz маятника вертикальну площину xOz і площину COz, що проходить через центр мас C тіла. Положення маятника в кожний момент часу визначається кутом повороту φ тіла, тобто кутом $\varphi = \angle xOC$ (рис. 79).

Момент сили ваги маятника відносно осі Oz дорівнює $-mga\sin\varphi$, де a — віддаль OC. Тому рівняння руху маятника, згідно з (3. 289), запишеться так:

$$I_0 \frac{d\omega}{dt} = -mga\sin\varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{I_0}\sin\varphi = 0, \tag{3. 302}$$

де I_0 — момент інерції маятника відносно осі Oz.

Порівнюючи знайдене рівняння руху фізичного маятника з рівнянням руху математичного маятника (стор. 154), приходимо до висновку: кут φ фізичного маятника змінюється за тим самим законом, що й кут φ математичного маятника, довжина якого дорівнює

$$l = \frac{I_0}{ma}. \tag{3. 303}$$

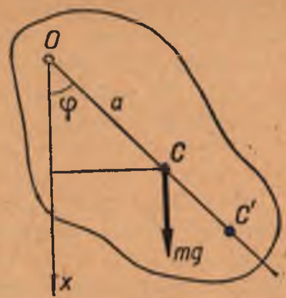

Рис. 79.

Ця довжина l називається *зведеною довжиною фізичного маятника*.

З цього висновку випливає, що властивості математичного маятника поширюються і на маятник фізичний. Зокрема, період малих коливань фізичного маятника визначається формулою

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mga}}. \tag{3. 304}$$

2. Центр коливань і точка підвісу. Точка O осі маятника, що міститься у вертикальній площині, яка перпендикулярна до осі і проведена через центр мас маятника, називається *точкою підвісу*.

Якщо відкласти відрізок l від точки O вздовж прямої OC, то дістанемо точку C' — так званий *центр коливань*. Гюйгенс відкрив цікаву властивість фізичного маятника:

Якщо за нову точку підвісу вибрати старий центр коливань, то новим центром коливань стане стара точка підвісу.

Для доведення цієї теореми запишемо величину момента інерції маятника відносно осі обертання, згідно з (3. 277), як суму:

$$I_0 = I_c + ma^2, \tag{3. 305}$$

де I_c — момент інерції маятника відносно осі, яка паралельна осі Oz підвісу і проведена через центр мас C.

На підставі (3.303) перепишемо формулу (3.305) у вигляді

$$l = \frac{I_c}{ma} + a,$$

або

$$a(l-a) = \frac{I_c}{m},$$

тобто

$$OC \cdot CC' = \frac{I_c}{m}. \tag{3.306}$$

Права частина цієї рівності має, очевидно, одне й те саме значення для всіх осей підвісу маятника, які паралельні між собою. Зокрема, якщо нова вісь підвісу маятника паралельна старій і проходить через точку C', то перший множник у (3.306), який дорівнює віддалі від точки підвісу до центра мас, тепер дорівнюватиме відрізку $C'C$. Тоді другий множник у (3.306) дорівнюватиме CO, бо добуток множників залишається незмінним. Теорему Гюйгенса доведено.

§ 4. РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ

1. Вступні зауваження. Теорія руху твердого тіла навколо нерухомої точки — одна з найважливіших проблем механіки. Розглянемо тут лише деякі основні питання цієї теорії за таким планом: спочатку знайдемо динамічні характеристики твердого тіла — кінетичну енергію T і момент кількості руху $\boldsymbol{K}$ відносно нерухомої точки, потім — основи двох методів дослідження руху тіла навколо нерухомої точки — основи геометричного методу і основи аналітичного методу; наприкінці розглянемо дуже важливу для практики теорію регулярної прецесії гіроскопів в елементарному (але не наближеному, а точному) викладі.

2. Кінетична енергія і момент кількості руху тіла, що обертається навколо нерухомої точки. Зв'яжемо з тілом незмінно рухомі осі Ox, Oy, Oz, які напрямимо по головних осях еліпсоїда інерції тіла в точці O.

Кінетична енергія тіла дорівнює

$$T = \frac{1}{2}\int v^2\,dm, \tag{3.307}$$

де швидкість елемента маси dm можна подати за формулою Ейлера в такому вигляді:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r};$$

тут $\boldsymbol{\omega}$ — вектор миттєвої кутової швидкості обертання тіла, а $\boldsymbol{r}$ — радіус-вектор елемента dm. Проектуючи вектор $\boldsymbol{v}$ на осі рухомої системи $Oxyz$, матимемо

$$\left.\begin{aligned} v_x &= qz - ry \\ v_y &= rx - pz \\ v_z &= py - qx \end{aligned}\right\}, \tag{3.308}$$

де p, q, r — проекції на осі Ox, Oy, Oz вектора $\boldsymbol{\omega}$, а x, y, z — координати елемента dm. Квадрат швидкості елемента dm дорівнює

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = p^2(y^2+z^2) + q^2(x^2+z^2) + r^2(x^2+y^2) - \\ - 2pqxy - 2prxz - 2qryz.$$

Помноживши ліву й праву частини цієї рівності на $\frac{1}{2}$ dm і інтегруючи цю рівність по об'єму тіла, знайдемо його кінетичну енергію:

$$T = \frac{1}{2} p^2 \int (y^2 + z^2)\, dm + \frac{1}{2} q^2 \int (x^2 + z^2)\, dm + \frac{1}{2} r^2 \int (x^2 + y^2)\, dm -$$
$$- pq \int xydm - pr \int xzdm - qr \int yzdm. \qquad (3.309)$$

Оскільки $y^2 + z^2$ — квадрат віддалі від елемента dm до осі Ox, то

$$\int (y^2 + z^2)\, dm = I_x = A$$

і аналогічно

$$\left.\begin{aligned} \int (x^2 + z^2)\, dm = I_y = B \\ \int (x^2 + y^2)\, dm = I_z = C \end{aligned}\right\}, \qquad (3.310)$$

де A, B, C — моменти інерції тіла відносно головних у точці O осей. У формулі (3.309) відцентрові моменти інерції, тобто інтеграли

$$\int xydm, \ \int xzdm, \ \int yzdm,$$

усі дорівнюють нулю, бо осі Ox, Oy, Oz — головні осі інерції для точки O.

Отже, остаточно матимемо

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2). \qquad (3.311)$$

Формула (3.311) визначає миттєве значення кінетичної енергії тіла, яке обертається навколо нерухомої точки. У цій формулі величини A, B, C — сталі.

Знайдемо ще момент кількості руху тіла відносно нерухомої точки O. Момент кількості руху елементарної точки dm відносно нерухомої точки O тіла дорівнює

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} dm.$$

Момент кількості руху всього тіла відносно тієї самої точки буде

$$\boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} dm,$$

де інтеграл поширений на весь об'єм тіла. Проекція вектора $\boldsymbol{K}$ на рухому вісь Ox дорівнює

$$K_x = \int (y \cdot v_z - z \cdot v_y)\, dm.$$

Підставляючи значення v_y, v_z за формулами Ейлера (3.308), знайдемо

$$K_x = \int \left[y (py - qx) - z (rx - pz) \right] dm = \int \left[p (y^2 + z^2) - qxy - \right.$$
$$\left. - rxz \right] dm = p \int (y^2 + z^2)\, dm - q \int xydm - r \int xzdm.$$

Два останні інтеграли дорівнюють, як і раніше, нулю, а перший інтеграл дорівнює A. Маємо

$$K_x = A \cdot p$$

і аналогічно

$$\begin{aligned} K_y = B \cdot q, \\ K_z = C \cdot r, \end{aligned} \qquad (3.312)$$

Формули (3.312) визначають вектор $\boldsymbol{K}$ через його проекції на напрями головних осей інерції, проведених у тілі в нерухомій точці O.

3. Рух зрівноваженого твердого тіла навколо нерухомої точки. (Геометричний метод дослідження). Вивчимо рух довільного тіла, закріпленого тільки в одній точці, у тому випадку, коли нерухома точка O тіла збігається з центром його ваги. Вага тіла mg прикладена в нерухомій точці O і зрівноважується реакцією опори. Рух тіла відбуватиметься «з інерції». Термін «з інерції» слід розуміти умовно: головний вектор прикладених до тіла сил дорівнює нулю.

Кінетична енергія тіла зберігається сталою, тобто

$$T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const} = h, \qquad (3.313)$$

бо ні зовнішні, ні внутрішні сили не виконують роботи.

Момент кількості руху тіла відносно нерухомої точки теж зберігається сталим

$$\boldsymbol{K} = \int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}\, dm = \text{const},$$

тому що головний момент зовнішніх сил відносно точки O дорівнює нулю.

Доведемо тепер теорему, яка дає просту й наочну геометричну інтерпретацію обертання тіла з інерції навколо центра ваги. Цю інтерпретацію знайшов французький геометр Пуансо в 1834 р. На прикладі цієї теореми видно величезне значення поняття еліпсоїда інерції в динаміці обертального руху. Теорема формулюється так:

Рух твердого тіла навколо нерухомої точки з інерції зводиться до кочення (і кручення) *без ковзання еліпсоїда інерції, побудованого для нерухомої точки O тіла по незмінній площині, яка перпендикулярна до вектора моменту кількості руху.*

Щоб довести теорему, побудуємо еліпсоїд інерції для нерухомої точки O тіла. Рівняння цього еліпсоїда в координатних осях Ox, Oy, Oz, які жорстко скріплені з тілом у точці O і напрямлені по головних осях інерції, буде

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \qquad (3.314)$$

де A, B, C — головні моменти інерції для точки O, а x, y, z — біжучі координати еліпсоїда. Побудуємо ще площину Π, перпендикулярну до незмінного вектора моменту кількості руху $\boldsymbol{K}$, причому так, щоб ця площина дотикалась до еліпсоїда інерції.

Нижче буде доведено, що віддаль d від цієї площини Π до нерухомої точки O залишається незмінною, так що площина Π нерухома в просторі.

Рівняння площини Π, яка дотична до еліпсоїда інерції (3.314) в точці (x, y, z), має вигляд

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = 1, \tag{3.315}$$

де ξ, η, ζ — біжучі координати дотичної площини (в системі $Oxyz$).

Але якщо $\boldsymbol{r}$ є радіус-вектор якої-небудь точки площини Π, то його проекція на напрям вектора $\boldsymbol{K}$ дорівнює величині віддалі d площини Π від точки O:

$$\boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{K}}{K} = d, \tag{3.316}$$

де $\frac{\boldsymbol{K}}{K}$ — одиничний вектор. Перепишемо рівність (3.316) у розкритому вигляді:

$$\xi \frac{Ap}{K} + \eta \frac{Bq}{K} + \zeta \frac{Cr}{K} = d. \tag{3.317}$$

Рівняння (3.315) і (3.316) — рівняння однієї й тієї самої площини Π, отже, відповідні коефіцієнти в цих рівняннях пропорціональні:

$$\frac{p}{Kx} = \frac{q}{Ky} = \frac{r}{Kz} = \frac{d}{1}. \tag{3.318}$$

З (3.318) можна дістати два наслідки:

$$\text{а)}\ x = \frac{p}{Kd}, \quad y = \frac{q}{Kd}, \quad z = \frac{r}{Kd}, \tag{3.319}$$

$$\text{б)}\ d^2 = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{K^2(Ax^2 + By^2 + Cz^2)}. \tag{3.320}$$

Останній наслідок виходить з (3.318), якщо піднести всі члени до квадрата, домножити чисельники й знаменники в перших трьох відношеннях на A, B і C, відповідно, і побудувати похідну пропорцію, яка показує, що сума чисельників перших трьох відношень відноситься до суми їх знаменників так, як чисельник четвертого відношення до свого знаменника.

З (3.320) за допомогою (3.313) і (3.314) дістаємо

$$d^2 = \frac{2T}{K^2},$$

звідки

$$d = \frac{\sqrt{2T}}{K}.$$

Ми бачимо, що віддаль d площини Π до нерухомої точки O є величина стала (бо T і K сталі). Але тоді формула (3.319) показує, що координати x, y, z точки дотику площини Π до еліпсоїда пропорціональні проекціям p, q, r вектора $\boldsymbol{\omega}$ миттєвої кутової швидкості обертання тіла:

$$x = \lambda p,\ y = \lambda q,\ z = \lambda r \left(\lambda = \frac{1}{Kd} = \text{const}\right),$$

або (у векторній формі)

$$\boldsymbol{OM} = \lambda\boldsymbol{\omega}.$$

Отже, *радіус-вектор* $\boldsymbol{OM}$ *точки, в якій площина* Π *дотикається до еліпсоїда інерції, напрямлений по миттєвій осі обертання тіла, а довжина радіуса-вектора* $\boldsymbol{OM}$ *пропорціональна миттєвому значенню кутової швидкості.*

Таким чином, рух твердого тіла навколо закріпленого центра ваги зводиться до кочення (і кручення) без ковзання центрального еліпсоїда інерції по нерухомій у просторі площині, яка перпендикулярна до незмінного вектора $\boldsymbol{K}$ — момента кількості руху тіла — і віддалена від закріпленого центра ваги на $\frac{\sqrt{2T}}{K}$. Радіус-вектор точки дотику служить миттєвою віссю обертання, кутова швидкість якого пропорціональна довжині радіуса-вектора і дорівнює

$$\omega = OM \cdot \sqrt{2T}.$$

Крива, яку описує точка дотику M на поверхні еліпсоїда інерції, називається *полодією*, а на нерухомій площині Π — *герполодією*. Полодія є одночасно перетином конічної поверхні рухомого аксоїда миттєвих осей з поверхнею еліпсоїда інерції, а герполоїда — перетином нерухомого аксоїда з нерухомою площиною, по якій котиться еліпсоїд інерції.

Розглянута тут інтерпретація руху за Пуансо дає уявлення про *геометричний метод* вивчення руху твердого тіла навколо нерухомої точки. У цьому напрямі працювали як зарубіжні, так і вітчизняні вчені (Максвелл, Якобі, Дарбу, Жуковський, Сомов і ін.).

Але значно раніше були закладені основи *аналітичного методу* дослідження руху твердого тіла навколо нерухомої точки. У 1767 р. Л. Ейлер знайшов систему рівнянь, які вичерпно характеризують обертання тіла навколо нерухомої точки. Це так звані динамічні й кінематичні рівняння Ейлера, виведення яких дано далі.

4. Аналітичний метод дослідження. Динамічні й кінематичні рівняння Ейлера. Щоб вивести динамічні рівняння Ейлера, застосуємо теорему про зміну момента кількості руху тіла відносно нерухомої його точки O. Маємо

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \sum \text{mom}_0 \boldsymbol{f}; \tag{3.321}$$

тут у правій частині подано суму моментів усіх прикладених до тіла сил відносно нерухомої точки цього тіла.

Почнемо перетворювати ліву частину рівності (3.321). Похідну $\frac{dK}{dt}$ можна розглядати чисто кінематично, тобто як швидкість точки O' — кінця вектора $\boldsymbol{K}$. Тоді за теоремою про додавання швидкостей напишемо

$$\frac{dK}{dt} = \boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO'}, \tag{3.322}$$

де $\boldsymbol{v}_r$ — відносна швидкість точки O' (відносно тіла), а $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO'}$ — переносна її швидкість, тобто швидкість тієї точки тіла, з якою в даний момент зливається точка O'.

Підставляючи вираз (3.322) у рівність (3.321), знайдемо

$$\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO'} = \sum \mathrm{mom}_0 \boldsymbol{f}. \tag{3.323}$$

Спроектуємо цю рівність на *рухомі* осі координат Ox, Oy, Oz, що є головними осями інерції для нерухомої точки O. Проекціями відносної швидкості $\boldsymbol{v}_r$ точки O' будуть похідні по часу від відносних координат цієї точки, тобто похідні від величин Ap, Bq, Cr, бо саме ці величини є проекціями на осі Ox, Oy, Oz вектора $\boldsymbol{OO'}$, який дорівнює $\boldsymbol{K}$ (див. формули (3.312). Отже, маємо

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K})_x &= M_x \\ \frac{d}{dt}(Bq) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K})_y &= M_y \\ \frac{d}{dt}(Cr) + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K})_z &= M_z \end{aligned}\right\}, \tag{3.324}$$

де $M_x = \sum \mathrm{mom}_x \boldsymbol{f}$ і т. д. — проекції на рухомі осі головного момента зовнішніх сил, узятого відносно нерухомої точки O тіла.

Другі доданки в (3.324) перетворюємо за допомогою (3.312) так:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K})_x = \omega_y K_z - \omega_z K_y = qC \cdot r - rB \cdot q = q \cdot r\,(C - B) \quad \text{і т. д.}$$

Остаточно замість (3.324) дістанемо

$$\left.\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + qr\,(C - B) &= M_x \\ B\frac{dq}{dt} + rp\,(A - C) &= M_y \\ C\frac{dr}{dt} + pq\,(B - A) &= M_z \end{aligned}\right\} \tag{3.325}$$

Ці диференціальні рівняння називаються *динамічними рівняннями Ейлера.* Тут p, q, r — проекції миттєвої кутової швидкості тіла $\boldsymbol{\omega}$ на осі Ox, Oy, Oz, які є головними осями інерції для нерухомої точки O тіла; A, B, C — головні моменти інерції для точки O; вони є сталими.

Однак треба ще доповнити систему динамічних рівнянь Ейлера другою системою рівнянь, які зв'язують p, q, r з параметрами, що визначають миттєве положення тіла (бо від останніх параметрів у загальному випадку залежать M_x, M_y, M_z, які стоять у правих частинах динамічних рівнянь). Цей зв'язок можна подати так званими *кінематичними рівняннями Ейлера.*

Щоб знайти кінематичні рівняння Ейлера, введемо до розгляду, крім рухомої системи координат $Oxyz$, вибір якої визначений раніше, ще нерухому систему $O\xi\eta\zeta$. Положення системи $Oxyz$ відносно нерухомої системи $O\xi\eta\zeta$ визначається, як відомо, трьома кутами Ейлера.

Тригранний кут $Oxyz$ можна перевести з даного положення, яке визначається значеннями φ, ψ, θ кутів Ейлера, в інше довільне положення, яке визначається значеннями $\varphi + d\varphi$, $\psi + d\psi$, $\theta + d\theta$ цих кутів, трьома поворотами: навколо осі $O\zeta$ на кут $d\psi$, навколо осі Oz на кут $d\varphi$ і навколо лінії ON вузлів на кут $d\theta$. При кожному з цих трьох поворотів змінюється тільки один кут, два інші залишаються незмінними.

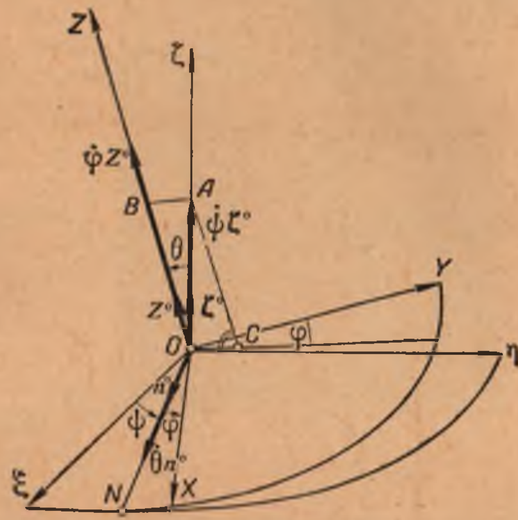

Рис. 80.

Границя відношення приросту будь-якого з трьох ейлерових кутів до відповідного приросту часу дорівнює кутовій швидкості обертання тіла навколо відповідної осі. Тому вектор кутової швидкості прецесії напрямлений по осі $O\zeta$, вектор кутової швидкості власного обертання напрямлений по осі Oz, а вектор кутової швидкості нутації — по лінії вузлів ON (рис. 80). Сума цих трьох векторів кутових швидкостей дає вектор миттєвої кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{z}^\circ + \dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^\circ + \dot{\theta}\boldsymbol{n}^\circ, \tag{3.326}$$

де $\boldsymbol{z}^\circ$, $\boldsymbol{\zeta}^\circ$, $\boldsymbol{n}^\circ$ — одиничні вектори по осях Oz, $O\zeta$, ON.

Кінематичні рівняння Ейлера знаходимо в результаті проектування вектора $\boldsymbol{\omega}$ на рухомі осі Ox, Oy, Oz. Спочатку розкладемо вектор кутової швидкості прецесії $\boldsymbol{OA} = \dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^\circ$ на два компоненти, один з яких спрямуємо вздовж осі Oz, а другий — уздовж перпендикулярної до неї осі OC, яка лежить на перетині площин xOy і $zO\zeta$:

$$\dot{\psi}\boldsymbol{\zeta}^\circ = \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC}.$$

Пряма OC утворює з віссю Oy кут φ, так що проекції вектора OC на осі Ox і Oy дорівнюватимуть $OC \cdot \sin\varphi$ і $OC \cdot \cos\varphi$. Отже, вектор $\dot{\psi}\zeta^{\circ}$ має три проекції, що дорівнюють $OC \cdot \sin\varphi$, $OC \cdot \cos\varphi$, OB, де $OC = \dot{\psi}\sin\theta$, а $OB = \dot{\psi}\cos\theta$. Проектуючи $\boldsymbol{\omega}$, згідно з (3.317), на осі Ox, Oy, Oz, дістанемо

$$\left.\begin{aligned} p &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ q &= \dot{\psi}\sin\theta\cdot\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ r &= \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.327)$$

Ці співвідношення й називаються *кінематичними рівняннями* Ейлера.

Підбиваємо підсумок. Три динамічні рівняння Ейлера разом з трьома кінематичними рівняннями Ейлера утворюють систему

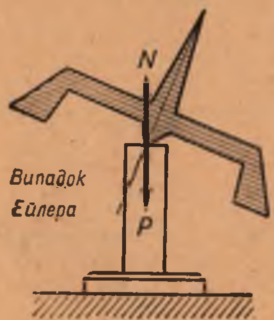

Рис. 81.

Рис. 82.

Рис. 83.

шести рівнянь з шістьма невідомими функціями часу. Невідомими функціями є три кути Ейлера φ, ψ, θ і проекції кутової швидкості p, q, r. У ліві частини динамічних рівнянь входять три невідомі функції p, q, r, а в правій частині стоять проекції M_x, M_y, M_z головного момента зовнішніх сил, які в загальному випадку є функціями параметрів t; φ, ψ, θ; p, q, r. Кінематичні рівняння визначають p, q, r через φ, ψ, θ і похідні від них. Загальні інтеграли шести рівнянь Ейлера міститимуть шість довільних сталих, які визначаться, якщо задати початкове положення тіла (трьома кутами Ейлера φ_0, ψ_0, θ_0) і його початкову кутову швидкість (трьома проекціями p_0, q_0, r_0).

Інтегрування рівнянь Ейлера — дуже складна задача, бо ця система рівнянь — нелінійна. Видатні механіки вказали на три основні частинні випадки, коли інтегрування рівнянь Ейлера можна довести до кінця при довільних початкових умовах руху. Ось ці випадки.

1. Тіло зрівноважене: центр ваги твердого тіла зливається з закріпленою точкою (рис. 81). Перший розв'язок цієї задачі належить самому Л. Ейлеру і виконаний аналітичним методом.

Вище була наведена геометрична інтерпретація Пуансо руху тіла в цьому випадку.

2. Еліпсоїд інерції тіла, побудований для нерухомої точки O, є еліпсоїд обертання, тобто $A = B \neq C$, а центр ваги тіла лежить на осі обертання еліпсоїда (важкий симетричний гіроскоп) (рис. 82). Цей випадок вивчили Лагранж і Пуассон.

Довгий час ці два випадки вважали єдиними випадками, для яких розв'язок задачі зводиться до квадратур.

Але в 1888 р. С. В. Ковалевська знайшла ще один, третій випадок.

3. Еліпсоїд інерції тіла для нерухомої точки є такий еліпсоїд обертання, головні моменти інерції якого зв'язані співвідношенням $A = B = 2C$, а центр ваги лежить в екваторіальній площині еліпсоїда інерції (рис. 83). С. В. Ковалевська знайшла аналітичний розв'язок цієї задачі, який був удостоєний премії Паризької Академії наук.


Софія Василівна Ковалевська (1850—1891).

Відомий російський математик, перша в світі жінка-професор. Після праць Л. Ейлера і Ж. Лагранжа Ковалевська вперше просунула вперед розв'язок задачі про обертання твердого тіла навколо нерухомої точки і, як учений, дістала світове визнання. Царські закони про освіту змусили С. Ковалевську закінчувати свою математичну освіту і шукати посаду професора математики за кордоном.

П р и к л а д. **Обертання навколо нерухомої точки симетричного зрівноваженого тіла.** Якщо центр ваги тіла зливається з нерухомою точкою, а еліпсоїд інерції є еліпсоїдом обертання ($A = B \neq C$), то інтегрування рівнянь Ейлера виконується в елементарних функціях. Цей випадок є окремим випадком першого з тих трьох, які зазначені вище.

Оскільки в розглядуваному випадку вектор момента K кількості руху сталий за величиною і напрямом, то вздовж вектора K можна спрямувати нерухому вісь $O\zeta$. Тоді проекція момента кількості руху K на рухому вісь Oz дорівнюватиме

$$K_z = K\cdot\cos\theta. \qquad (3.328)$$

З другого боку, $K_z = C\cdot r$, так що $\cos\theta = \frac{Cr}{K}$. Але з третього динамічного рівняння Ейлера, тобто з рівняння

$$C\frac{dr}{dt} + pq(B - A) = M_z$$

при $B = A$ і $M_z = 0$ випливає, що $\frac{dr}{dt} = 0$, звідки $r = \text{const}$. Згідно з (3.328) кут θ зберігатиметься сталим і дорівнюватиме своєму початковому значенню $\theta = \theta_0$. Із закону збереження енергії, тобто з закону

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h,$$

при $B = A$ і $r = \text{const}$ випливає, що

$$p^2 + q^2 = \text{const}. \tag{3.329}$$

Підставивши в це рівняння p і q з перших двох кінематичних рівнянь Ейлера, знайдемо ($\theta = \theta_0$; $\dot{\theta} = 0$):

$$\dot{\psi}^2 \sin^2 \theta_0 = \text{const}.$$

Звідси видно, що $\dot{\psi}$ теж залишається сталим і дорівнюватиме своєму початковому значенню:

$$\dot{\psi} = n. \tag{3.330}$$

Нарешті, на підставі третього кінематичного рівняння Ейлера робимо висновок, що коли величини r, θ, $\dot{\psi}$ сталі, то й величина $\dot{\varphi}$, яка дорівнює $\dot{\varphi} = r - \dot{\psi}\cos\theta$ теж буде сталою. Отже, $\dot{\varphi} = m$. Інтегруючи $\dot{\varphi}$ і $\dot{\psi}$, знаходимо

$$\left.\begin{aligned} \psi &= nt + \psi_0 \\ \varphi &= mt + \varphi_0 \\ \theta &= \theta_0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.331}$$

Висновок: зрівноважене симетричне тіло рухається так, що вісь його динамічної симетрії (вісь обертання еліпсоїда інерції) описує коловий конус з кутом при вершині $2\theta_0$, рівномірно обертаючись навколо сталого в просторі напряму вектора K момента кількості руху. Саме тіло при цьому ще обертається рівномірно навколо своєї осі динамічної симетрії. Такий рух тіла називається *регулярною прецесією*.

§ 5. РУХ ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Самий загальний випадок руху твердого тіла являє собою сукупність поступального його руху разом з центром мас і обертального навколо центра мас. Закон руху центра мас можна записати в такому вигляді:

$$M w_c = \Sigma f^{(e)}.$$

Залишається ще визначити, як тіло обертається навколо центра мас. Оскільки при русі тіла навколо центра мас виконується теорема моментів, то будуть справедливими і динамічні рівняння Ейлера, які виводяться з цієї теореми. Отже, обертання вільного твердого тіла навколо центра мас характеризується рівняннями Ейлера. Якщо зовнішні сили зводяться до однієї рівнодійної, яка прикладена в центрі мас тіла, то рух тіла навколо центра мас буде обертанням «з інерції», тобто точно таким, як у розглянутому Ейлером випадку (інтерпретація Пуансо).

Окремі випадки руху твердого тіла навколо нерухомої точки докладно досліджували видатні російські вчені С. О. Чаплигін, О. М. Ляпунов, В. О. Стеклов та ін.

§ 6. ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ РЕГУЛЯРНОЇ ПРЕЦЕСІЇ ГІРОСКОПА

1. Головний момент і головний вектор зовнішніх сил, які підтримують регулярну прецесію гіроскопа. Нехай тверде тіло рухається так, що одна його точка залишається нерухомою. Якщо еліпсоїд інерції для нерухомої точки тіла є еліпсоїдом обертання і центр мас тіла лежить на осі обертання еліпсоїда, то таке тіло називають *гіроскопом*.

У техніці гіроскопи виготовляють як важкі однорідні симетричні тіла, що мають форму дисків, конусів, торів тощо і опираються вістрями на підставки або підвішені в карданових підвісах.

Гіроскоп називається *зрівноваженим*, якщо його центр мас зливається з нерухомою точкою; якщо центр мас зміщений відносно нерухомої точки вздовж осі обертання еліпсоїда інерції, він називається *важким*.

Визначення умов, за яких здійснюється регулярна прецесія гіроскопа, є задача великого практичного значення. Наведемо точний і водночас цілком елементарний розв'язок цієї задачі.

Сергій Олексійович Чаплигін (1869—1942).

Видатний радянський вчений у галузі теоретичної механіки, гідро- і аеродинаміки, академік, Герой Соціалістичної Праці. Основоположник сучасної газової динаміки — аеродинаміки великих швидкостей.

Знайдемо прикладені до гіроскопа сили, що підтримують його регулярну прецесію навколо довільно заданої в просторі осі OP, яка проходить через нерухому точку O тіла (рис. 84).

За умовою тіло обертається рівномірно навколо своєї осі симетрії Oz (навколо осі обертання еліпсоїда інерції для точки O) з кутовою швидкістю ω, а ця вісь у свою чергу обертається рівномірно навколо нерухомої в просторі осі прецесії OP з кутовою швидкістю ω_1. Кут θ між віссю Oz власного обертання і віссю OP прецесії сталий.

Миттєва кутова швидкість Ω обертання тіла дорівнює геометричній сумі кутової швидкості власного обертання $\boldsymbol{\omega}$ і кутової швидкості прецесії $\boldsymbol{\omega}_1$. Площина POz називається *площиною прецесії*; ця площина обертається разом з віссю тіла Oz навколо нерухомої осі OP.

З рисунка бачимо, що проекції вектора Ω на вісь Oz симетрії тіла (рис. 85) і на перпендикулярну до неї вісь ON (ці осі є головними осями інерції для точки O) дорівнюють, відповідно,

$$r = \omega_1 \cos\theta + \omega, \quad p = \omega_1 \sin\theta. \tag{3.332}$$

Тому і на підставі (3. 312) проекції на ті самі напрями вектора $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху тіла, обчисленого відносно нерухомої точки O, дорівнюють

$$K_z = Cr = C(\omega_1 \cos\theta + \omega); \quad K_N = Ap = A\omega_1 \sin\theta. \tag{3.333}$$

Проекція вектора $\boldsymbol{K}$ на вісь, яка перпендикулярна до площини прецесії, дорівнює нулю, бо проекція вектора Ω на цю вісь до-

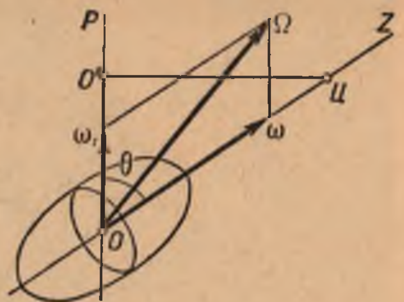

Рис. 84.

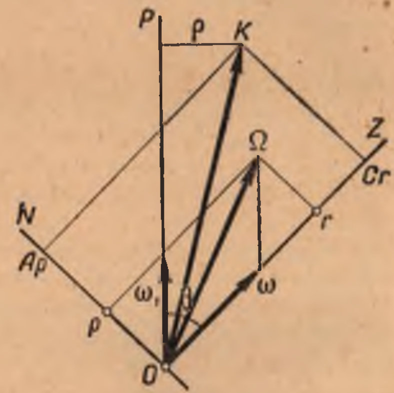

Рис. 85.

рівнює нулю. Отже, вектор $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху, як і вектор Ω миттєвої кутової швидкості, лежить у площині прецесії.

При обертанні площини прецесії вектор момента кількості руху $\boldsymbol{K}$ обертається навколо осі OP з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$. Швидкість точки, що є кінцем вектора $\boldsymbol{K}$, за формулою Ейлера з кінематики дорівнює

$$\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{K}. \tag{3.334}$$

Але, щоб момент кількості руху тіла змінювався, треба, щоб до тіла були прикладені зовнішні сили, головний момент яких відносно нерухомої точки O дорівнює

$$\boldsymbol{M} = \frac{d\boldsymbol{K}}{dt}, \tag{3.335}$$

або, згідно з (3. 334),

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{K}. \tag{3.336}$$

Величина цього момента $\boldsymbol{M}$ дорівнює (див. рис. 85)

$$M = \omega_1 \cdot \rho = \omega_1 (K_z \sin\theta - K_N \cos\theta). \tag{3.337}$$

Підставивши в цю формулу значення K_z і K_N, згідно з (3. 333), дістанемо

$$M = [C\omega + (C - A)\,\omega_1 \cos\theta]\,\omega_1 \sin\theta. \tag{3.338}$$

Ця формула визначає головний момент сил відносно нерухомої точки тіла, які підтримують задану регулярну прецесію гіроскопа. Формула (3. 338) є практично найважливішою в усій теорії гіроскопів.

Напрям головного момента $\boldsymbol{M}$, згідно з (3. 336), є перпендикулярним до площини прецесії. Тому формулу (3. 338) можна переписати у векторній формі, у вигляді

$$\boldsymbol{M} = \left[C + (C - A)\frac{\omega_1}{\omega}\cos\theta\right] \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.339}$$

Нам залишається ще визначити головний вектор $\boldsymbol{F}$ прикладених до гіроскопа сил. Застосуємо теорему про рух центра мас гіроскопа:

$$\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{w}_Ц, \tag{3.340}$$

де $\boldsymbol{w}_Ц$ — прискорення центра мас гіроскопа, m — маса гіроскопа. За умовою центр мас гіроскопа рухається рівномірно по колу радіуса $O'Ц$ з кутовою швидкістю ω_1 (рис. 86). Тому маємо

$$w_Ц = \omega_1^2 \cdot O'Ц = \omega_1^2 a \sin\theta$$

і, отже,

$$F = m\omega_1^2 \cdot a \sin\theta, \tag{3.341}$$

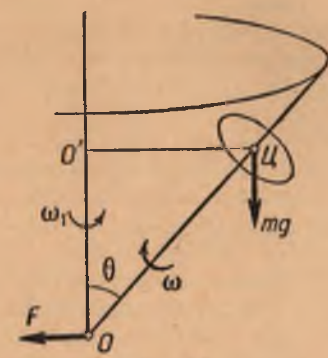

Рис. 86.

де $a = OЦ$ — відстань між нерухомою точкою O і центром мас гіроскопа.

Напрям головного вектора $\boldsymbol{F}$ однаковий з напрямом прискорення центра мас гіроскопа в даний момент; отже, вектор $\boldsymbol{F}$, прикладений до гіроскопа в точці O, перпендикулярний до осі прецесії і обертається з кутовою швидкістю прецесії ω_1.

Дві знайдені формули (3. 339) і (3. 340) розв'язують питання про сили, що забезпечують регулярну прецесію гіроскопа. Момент $\boldsymbol{M}$ можна розуміти як момент пари сил.

Якщо $\omega \gg \omega_1$, тобто кутова швидкість власного обертання гіроскопа велика порівняно з кутовою швидкістю прецесії (саме такий випадок часто зустрічається на практиці), то множник у прямих дужках у формулі (3. 339) буде додатним, і тому прикладена до тіла пара з моментом $\boldsymbol{M}$ матиме напрям, що відповідає збільшенню кута θ. У цьому випадку можна знехтувати доданком, у якому є множник $\frac{\omega_1}{\omega}$, і тоді наближено формулу (3. 339) запишемо так:

$$\boldsymbol{M} = C\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3.342}$$

Формула (3. 342) є, очевидно, точною, незалежно від величини ω, у випадках, коли $\theta = \frac{\pi}{2}$ або $C = A$. Умова $C = A$ означає, що еліпсоїд інерції є сферою.

2. Окремі випадки регулярної прецесії. Окремим випадком розглянутої теорії є теорія регулярної прецесії гіроскопа з інерції, коли зовнішній момент $\boldsymbol{M}$ до гіроскопа не прикладений. З формули (3. 338) при $M = 0$ знайдемо

$$[C\omega + (C - A)\,\omega_1 \cos\theta]\,\omega_1 \sin\theta = 0,$$

звідки

$$\omega_1 = \frac{C\omega}{(A - C)\cos\theta}. \tag{3.343}$$

Отже, регулярна прецесія гіроскопа з інерції може відбуватись навколо довільної осі, що проходить через нерухому точку O; вісь прецесії є для цього випадку водночас і прямою, уздовж якої напрямлений незмінний вектор $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху, бо тут $\frac{d\boldsymbol{K}}{dt} = \boldsymbol{M} = 0$. Формула (3.343) визначає кутову швидкість регулярної прецесії з інерції і показує, що прецесія неможлива відносно осей, які перпендикулярні до осі симетрії гіроскопа (при $\omega \neq 0$ і $\theta = \frac{\pi}{2}$ маємо $\omega_1 = \infty$).

Другим окремим випадком є регулярна прецесія зрівноваженого гіроскопа. Для цього випадку головний вектор $\boldsymbol{F}$ зовнішніх сил дорівнює нулю, або $a = 0$. Головний момент має значення (3.339) або ж дорівнює нулю (для прецесії з інерції).

Третім цікавим окремим випадком є регулярна прецесія важкого гіроскопа під дією сили ваги (рис. 86). Момент сили ваги відносно нерухомої точки дорівнює

$$M = mga \sin\theta.$$

Підставивши це значення в формулу (3.338), знайдемо

$$[C\omega + (C - A)\omega_1 \cos\theta]\omega_1 \sin\theta = mga \sin\theta,$$

звідки

$$(C - A)\omega_1^2 \cos\theta + C\omega\omega_1 - mga = 0,$$

і

$$\omega_1 = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 + 4\,(C - A)\,mga\cos\theta}}{2\,(C - A)\cos\theta}. \tag{3.344}$$

Звідси випливає, що регулярна прецесія гіроскопа під дією сили ваги можлива, якщо виконується умова

$$C^2\omega^2 + 4\,(C - A)\,mga\cos\theta \geqslant 0.$$

Формула (3.344) визначає для випадку нерівності дві різні прецесії. Знайдемо кутові швидкості для того окремого випадку,

коли кутова швидкість ω власного обертання дуже велика. Наближено маємо

$$\sqrt{C^2\omega^2 + 4\,(C - A)\,mga\cos\theta} = C\omega\left[1 + \frac{4\,(C - A)\,mga\cos\theta}{C^2\omega^2}\right]^{1/2} =$$
$$= C\omega\left[1 + \frac{2\,(C - A)\,mga\cos\theta}{C^2\omega^2}\right]. \tag{3.345}$$

На підставі (3.344) і (3.345) дістанемо два значення кутової швидкості прецесії:

$$\omega_1 = \frac{mga}{C\omega}, \quad \omega_1' = \frac{C\omega}{(A - C)\cos\theta}. \tag{3.346}$$

Перше з цих значень кутової швидкості дуже мале, а друге — велике. Відповідні прецесії під дією сили ваги називаються *повільною* і *швидкою*.

3. Аналогія між головним моментом $\boldsymbol{M}$ і доцентровою силою. Гіроскопічний момент та його аналогія з відцентровою силою. Повернемось знову до загального випадку регулярної прецесії гіроскопа і розкриємо фізичну суть явища. Наявність момента $\boldsymbol{M}$, який підтримує регулярну прецесію гіроскопа, у певному розумінні аналогічна наявності доцентрової сили, що зумовлює рівномірний рух точки по колу.

Доцентрова сила перпендикулярна до вектора швидкості точки, тому ця сила не змінює кінетичної енергії точки; прикладений до гіроскопа момент $\boldsymbol{M}$ перпендикулярний до вектора кутової швидкості $\boldsymbol{\Omega}$, і тому він тільки підтримує регулярну прецесію, але не змінює кінетичної енергії гіроскопа.

Якщо доцентрова сила перестане діяти, точка не зупиниться, а продовжить свій рух з інерції; якщо дія момента $\boldsymbol{M}$ зникає, то гіроскоп не зупиняється, а переходить на рух з інерції, що зводиться до регулярної прецесії гіроскопа навколо нерухомого в просторі вектора $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху (вектор $\boldsymbol{K}$ зупиняється в ту мить, коли зникає момент $\boldsymbol{M}$).

При рівномірному русі по колу точка, відхиляючись від руху з інерції, весь час падає до центра кола, хоч і не наближається до нього; у випадку прецесії гіроскопа вектор $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху, згідно з законом $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}dt$, весь час нахиляється в сторону вектора $\boldsymbol{M}$, але не наближається до нього, бо водночас відхиляється й вектор $\boldsymbol{M}$, який обертається навколо осі прецесії. В результаті вектор $\boldsymbol{K}$ описує конус навколо осі прецесії.

Інерція точки, що рухається по колу, проявляється в існуванні відцентрової сили, що дорівнює за величиною силі доцентровій, напрямлена протилежно їй і прикладена до в'язі (до тіла, яке діє на точку з доцентровою силою). Інерція гіроскопа, рух якого є вимушеною регулярною прецесією, проявляється в існуванні момента $-\boldsymbol{M}$, який дорівнює за величиною моменту $\boldsymbol{M}$, напрямлений протилежно до нього і прикладений до в'язі, тобто до того пристрою або тіл, які діють на гіроскоп з моментом $\boldsymbol{M}$ і змушують його здійснювати регулярну прецесію.

Згаданий тут момент протидії $-\boldsymbol{M}$ називається *гіроскопічним моментом* регулярної прецесії і позначається $\boldsymbol{M}_г$. Отже, він дорівнює

$$\boldsymbol{M}_г = \left[C + (C - A) \frac{\omega_1}{\omega} \cos \theta \right] \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1. \qquad (3.347)$$

Формула (3.347) відрізняється від (3.339) тільки тим, що множники $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\omega}_1$ переставлені.

Наближена формула гіроскопічного моменту, що справедлива при великій кутовій швидкості ω власного обертання, така:

$$\boldsymbol{M}_г = C\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1. \qquad (3.348)$$

Гіроскопічний момент $\boldsymbol{M}_г$ виникає при всякій спробі змінити напрям осі обертання гіроскопа. Фізична причина появи гіроскопічного момента та сама, що й появи відцентрової сили, — властивість інертності часток гіроскопа.

Зауважимо, що *гіроскопічний момент дорівнює головному моменту сил інерції елементів маси гіроскопа, взятому відносно нерухомої точки*. Справді, за принципом Германа — Ейлера — Даламбера геометрична сума трьох головних моментів дорівнює

$$\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^{(i)} + \boldsymbol{M}_{\text{інерції}} = 0, \qquad (3.349)$$

де $\boldsymbol{M}$ — головний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла, $\boldsymbol{M}^{(i)}$ — головний момент внутрішніх сил, $\boldsymbol{M}_{\text{інерції}}$ — головний момент сил інерції всіх часток тіла. Тут усі моменти беруться відносно нерухомої точки O тіла.

Оскільки головний момент внутрішніх сил сам по собі дорівнює нулю, $\boldsymbol{M}^{(i)} = 0$, то з формули (3.349) маємо

$$\boldsymbol{M}_{\text{інерції}} = -\boldsymbol{M},$$

звідки

$$\boldsymbol{M}_{\text{інерції}} = \boldsymbol{M}_г.$$

4. Два способи трактування гіроскопічних явищ. На закінчення спинимось на важливому питанні про те, як правильно трактувати гіроскопічні явища.

Гіроскопічними явищами називаються ті несподівані механічні ефекти (кінематичні і динамічні), які виявляються при швидкому обертанні тіла навколо нерухомої точки. Таким ефектом є, наприклад, те, що дзига не падає під дією ваги, а здійснює регулярну прецесію навколо вертикальної осі, яка проходить через вістря дзиги; другий ефект такий: вісь дзиги відхиляється не в напрямі удару, а перпендикулярно до нього, і т. д.

Єдиною причиною всіх «парадоксальних» гіроскопічних явищ є властивість інертності часток тіла, за якою ці частки намагаються зберегти свій стан руху незмінним. Отже, останньою причиною цих явищ є незнищуваність руху (про зв'язок між властивістю інертності і незнищуваністю руху див. розд. II частини другої).

Пояснюючи гіроскопічні явища, можна спиратись на рівняння $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}dt$, що визначає теорему про зміну момента кількості руху гіроскопа. При цьому не слід забувати, що властивість інертності частинок тіла в цьому рівнянні сумарно вже врахована.

Наприклад, дзига не падає під дією ваги просто тому, що вектор $\boldsymbol{K}$ момента кількості руху (який при швидкому обертанні напрямлений весь час майже точно по осі симетрії дзиги) дістає приріст $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}dt$ в напрямі саме *момента* сили ваги, тобто *перпендикулярно* до площини своєї дії. Інакше, вага частинок дзиги і властивість інертності цих частинок разом приводять до зміщення осі дзиги в напрямі, перпендикулярному до площини, в якій лежить рівнодійна ваги частинок тіла і нерухома його точка.

Але є ще другий спосіб пояснення гіроскопічних явищ. Цей спосіб пов'язаний з використанням неінерціальної системи відліку, яка нехай обертається разом з площиною прецесії гіроскопа навколо нерухомої осі (останню можна вибрати за одну з осей неінерціальної системи).

Закон відносного руху окремих частинок гіроскопа треба писати, як відомо, враховуючи сили інерції: переносну (тут — відцентрову, бо прецесія за умовою регулярна) і коріолісову. Тому відносний рух гіроскопа буде таким, ніби на його точки, крім реальних сил, наприклад сил ваги, діють ще сили інерції — відцентрові і коріолісові.

Отже, розглядаючи гіроскоп у відносному русі, треба враховувати ще сили інерції — відцентрові і коріолісові. Але легко довести, що *момент цих сил інерції відносно нерухомої точки O зводиться до гіроскопічного момента $\boldsymbol{M}_г$*.

Справді, гіроскопічний момент $\boldsymbol{M}_г$, який дорівнює моменту сил інерції $-m\boldsymbol{w}$ всіх частинок гіроскопа, розкладається на три складові, бо маємо (за теоремою Коріоліса)

$$-m\boldsymbol{w} = -m\boldsymbol{w}_r - m\boldsymbol{w}_e - m\boldsymbol{w}_c,$$

де $\boldsymbol{w}$ — абсолютне прискорення частинки m, $\boldsymbol{w}_r$ — відносне її прискорення; $\boldsymbol{w}_e$ — переносне прискорення; $\boldsymbol{w}_c$ — прискорення Коріоліса.

Отже, щоб довести сформульоване вище твердження, треба впевнитись лише в тому, що головний момент сил $-m\boldsymbol{w}_r$, тобто головний момент сил інерції відносного руху, дорівнює нулю. Останнє очевидне: відносний рух є рівномірним обертанням навколо власної осі симетрії гіроскопа; в цьому русі частинки гіроскопа мають лише доцентрове прискорення, так що у випадку однорідного гіроскопа (або гіроскопа з віссю матеріальної симетрії) кожному вектору $-m\boldsymbol{w}_r$ є рівний і протилежний вектор, і сума їх моментів дорівнює нулю.

Підіб'ємо підсумок. У другому методі пояснення гіроскопічних явищ використовуємо неінерціальну систему координат і тому вважаємо, що, крім реальних сил, до тіла прикладено і гіроскопічну пару. У цьому методі можемо давати, наприклад, такі пояснення: дзига не падає під дією сили ваги тому, що момент сили ваги відносно точки опори зрівноважений гіроскопічним моментом.

У випадку швидкого обертання гіроскопа (точніше: у випадку, коли в формулі (3.347) множник біля $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_1$ додатний) гіроскопічний момент є парою сил такого напряму, що *намагається повернути вісь власного обертання тіла до осі прецесії* так, щоб при суміщенні осей обидва обертання — власне і прецесійне — відбувалися б в одну сторону.

Але не слід забувати, що гіроскопічний момент справді прикладений до тих пристроїв і тіл, які зумовлюють прецесію даного тіла, а не до самого цього тіла. Фізично «зрівноважуючий гіроскопічний момент» не має нічого спільного з реальним гіроскопічним моментом. У другому методі пояснення «гіроскопічний

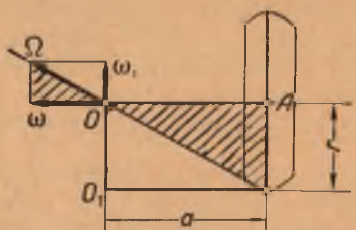

Рис. 87а.

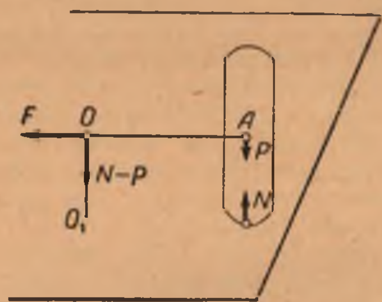

Рис. 87б.

момент» фактично виступає тільки як своєрідний спосіб врахування сумарної властивості інертності всіх частинок гіроскопа.

Приклад 1. **Гіроскопічний ефект при роботі бігунків.** Один кінець горизонтального стержня OA скріплено шарнірно з вертикальним стержнем O_1O, а на другий кінець вільно насаджено важкий бігунок. При обертанні вала O_1O бігунок котиться по горизонтальній площині і дробить певний матеріал (рис. 87б).

Нехай P — вага бігунка, ω_1 — стала кутова швидкість вала OO_1. Обчислимо тиск бігунка на горизонтальну площину.

Бігунок розглядатимемо як симетричний гіроскоп, що здійснює регулярну прецесію навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1 і що має власне обертання навколо осі симетрії OA. Кутову швидкість ω власного обертання знайдемо з умови, що геометрична сума векторів $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{\omega}$ повинна дати вектор $\boldsymbol{\Omega}$ абсолютної кутової швидкості, який напрямлений по миттєвій осі обертання (рис. 87а).

Маємо

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{a}{r},$$

звідки

$$\omega = \frac{a}{r}\,\omega_1.$$

За викладеною вище теорією регулярна прецесія бігунка зумовлена дією однієї сили F і однієї пари сил з моментом $\boldsymbol{M}$. Ця сила прикладена до стержня бігунка в нерухомій точці O в тому самому напрямі, що й напрям

прискорення центра мас, тобто по продовженню стержня AO. Величина сили $\boldsymbol{F}$, згідно з (3.341), дорівнює

$$F = \frac{P}{g}\,\omega_1^2\, a \sin\frac{\pi}{2} = \frac{P}{g}\,\omega_1^2 \cdot a.$$

Головний момент прикладених до бігунка сил P і N (P — активна сила ваги, N — пасивна реакція горизонтальної площини) відносно нерухомої точки O дорівнює (рис. 87б)

$$M = (N - P)\cdot a. \qquad (а)$$

Але за формулою (3.338) при $\theta = \frac{\pi}{2}$ маємо

$$M = C\omega \cdot \omega_1. \qquad (б)$$

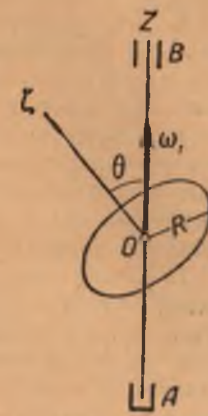

Рис. 88.

Порівнюючи (а) і (б), знайдемо

$$(N - P)\,a = C\omega\omega_1,$$

звідки

$$N = P + \frac{C\omega\omega_1}{a} = P + \frac{C\omega_1^2}{r}.$$

Якщо покласти* $C = \frac{P}{g}\rho^2$, де ρ — так званий радіус інерції тіла, і $\rho = 40$ *см*, $r = 50$ *см*, $\omega_1 = 2\pi\,\frac{1}{сек}$, то знайдемо

$$N = P\left(1 + \frac{\rho^2\omega_1^2}{gr}\right) = 2{,}28\ p.$$

Сили, що утворюють пару сил з моментом M є, очевидно, такі: сила $(N - P)$, прикладена до бігунка вгору, і сила N_1, що дорівнює їй за величиною і діє на кінець O стержня OA вниз.

Гіроскопічний момент — момент протидії — є пара сил, яка створюється силою $N - P$, яка прикладена до вала в точці O і напрямлена вгору, силою N, прикладеною до горизонтальної площини вертикально вниз, і силою P, прикладеною до центра Землі.

Гіроскопічний ефект тут корисний: тиск $N > P$, отже, дія бігунків посилюється.

Приклад 2. **Динамічно незрівноважений ротор.** Диск радіуса R ваги p обертається навколо вертикальної осі Oz з сталою кутовою швидкістю ω_1, причому вісь обертання проходить через центр ваги диска, який збігається з його центром O, і утворює кут θ з нормаллю до його площини. Знайти горизонтальні складові реакцій у точках A і B, якщо $AB = l$ (рис. 88).

Рух диска — окремий випадок регулярної прецесії гіроскопа: кутова швидкість власного обертання $\omega = 0$, центр мас — нерухома точка.

Регулярна прецесія диска зумовлюється дією пари сил з моментом, що, згідно з (3.338), дорівнює

$$M = (C - A)\,\omega_1^2 \sin\theta\cos\theta.$$

Напрям вектора $\boldsymbol{M}$ перпендикулярний до площини прецесії ζz. Отже, реакції опор утворюють пару, яка лежить у площині ζz; кожна реакція дорівнює

$$N = \frac{M}{l} = \frac{C - A}{2l}\,\omega_1^2 \sin 2\theta.$$

---

* Е. Л. Николаи, Теория гироскопов, ОГИЗ, 1948, стор. 55.

Покладемо*, наприклад, радіус диска $R = 10$ *см*, $l = 10$ *см*, $\theta = 1°$; кількість обертів вала за хвилину $n = 9000$. Наближено маємо

$$N = 39P,$$

де P — вага диска.

Як бачимо, динамічний тиск на підшипники виявився тут дуже великим, тоді як у стані спокою ротора горизонтальні складові реакцій дорівнюють, очевидно, нулю. Причиною виникнення великих додаткових тисків тут є динамічна незрівноваженість ротора.

5. Застосування гіроскопів у техніці. В середині минулого століття французький фізик Фуко побудував прилад для виявлення добового обертання Землі. Основною частиною приладу було однорідне тіло з віссю геометричної симетрії, яке оберталося з великою кутовою швидкістю, — ротор. Фуко назвав свій прилад гіроскопом, що в перекладі означає: «прилад, який виявляє обертання». Це поклало початок використанню властивостей ротора з великою кутовою швидкістю для найрізноманітніших цілей у техніці.

В різних галузях сучасної техніки гіроскопи і їх складні системи знаходять все нові й нові застосування. Їх використовують для створення штучного горизонту на кораблях і літаках, вони є основними частинами стабілізаторів качки кораблів. Сучасні літаки, кораблі, підводні човни, міни, торпеди, керовані снаряди, літальні апарати, поїзди неодмінно мають певні гіроскопічні системи.

До того ж треба пам'ятати, що гіроскопічні явища виявляються при швидкому обертанні будь-якого тіла. Це завжди враховується не тільки при конструюванні спеціальних гіроскопів, але, наприклад, і ротора турбіни корабля або колісної пари залізничного вагона, або двигуна, вал якого несе махове колесо, і т. д.

Розглянемо деякі найпростіші технічні застосування гіроскопів.

1. Гіроскоп Фуко. Цей гіроскоп складається з важкого тора T, який може обертатись разом з своєю віссю в кільці A, до якого прикріплений важіль B з вістрям, що спирається на підставку; роль підставки може замінити нитка, прив'язана до важеля B або просто до рами A (рис. 89).

Якщо тор нерухомий, то з показаного на рисунку положення гіроскоп падає під дією власної ваги, обертаючись при цьому навколо горизонтальної осі, яка проходить через вістря O. Але якщо ротор гіроскопа привести в швидке обертання за допомогою шнура, то, незважаючи на дію перевертального моменту, гіроскоп не впаде, а почне обертатись (прецесувати) навколо вертикальної осі Oz. Усякий бічний удар молоточком, який підганяє обертання осі гіроскопа навколо вертикалі, тільки підніме вісь гіроскопа до вертикалі, тоді як удар протилежного напряму нахилить її донизу і може стати причиною падіння. Удар молоточком зверху вниз, як і вага гіроскопа, лише прискорює прецесію; удар знизу вгору сповільнює її. Усе це випливає з теореми $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}dt$ про зміну момента кількості руху.

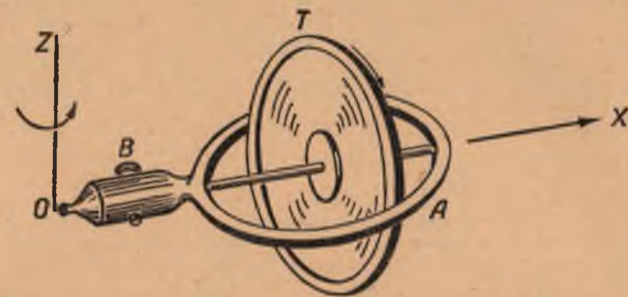

Рис. 89.

Описані вище явища можна спостерігати й за допомогою гіроскопа з противагою (рис. 90). Змінюючи плече противаги, ми можемо спостерігати прецесію навколо вертикальної осі в двох напрямах: за годинниковою стрілкою і проти неї (при незмінному напрямі обертання тора гіроскопа).

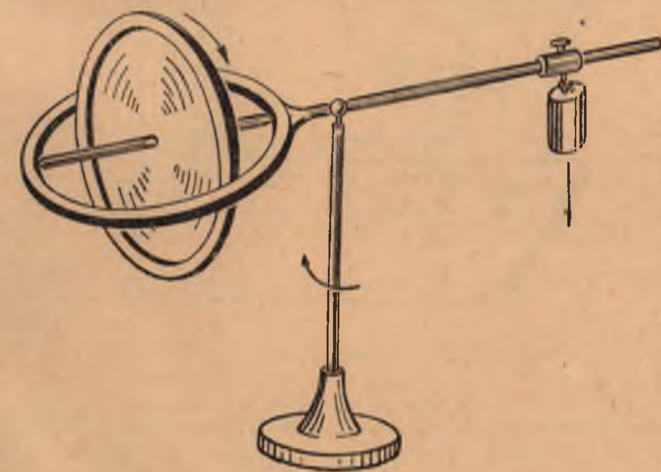
Рис. 90.

2. Гіроскоп у кардановому підвісі. Розглянемо однорідний тор, який може вільно обертатись навколо своєї осі AB, а ця вісь є діаметром внутрішнього кільця K, яке може в свою чергу вільно обертатись навколо осі CD, перпендикулярної до осі AB. Зовнішнє кільце K' може теж вільно обертатись навколо осі EF, перпендикулярної до CD. Пристрій, який складається з внут-

---

* Е. Л. Николаи, Теория гироскопов, 1948, стор. 57.

рішнього кільця K і зовнішнього кільця K', називається кардановим підвісом (рис. 91).

Гіроскоп у кардановому підвісі має три ступені вільності, так що тор може вільно обертатись навколо осі, яка проходить через його центр і як завгодно зорієнтована в просторі.

Вісь гіроскопа з трьома ступенями вільності має стійкість: якщо тор обертається в кардановому підвісі дуже швидко, то його вісь зберігає незмінний напрям у просторі і навіть значні

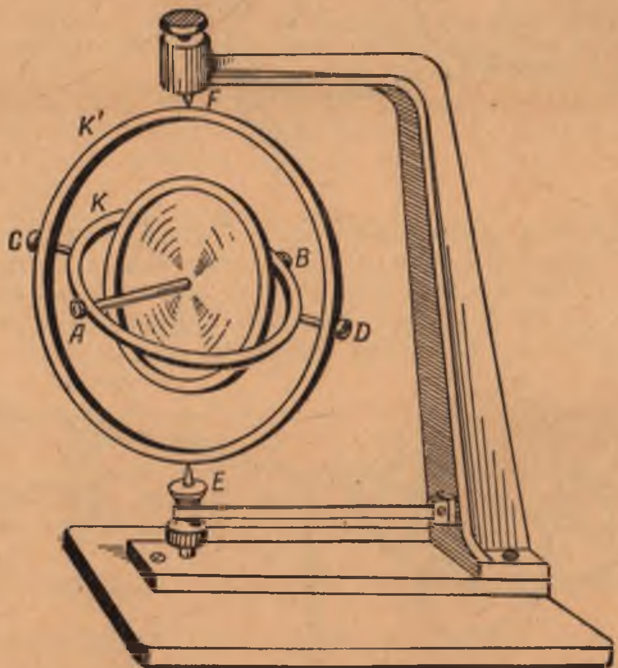

Рис. 91.

удари по осі не можуть помітно змінити початковий її напрям. Цю важливу властивість має гіроскоп тільки з трьома ступенями вільності; ця властивість втрачається, якщо скріпити наглухо внутрішнє й зовнішнє кільця, тобто зменшити число ступенів вільності до двох.

Справедливість сказаного очевидна: за теоремою про зміну момента кількості руху напишемо

$$\frac{dK}{dt} = 0,$$

звідки

$$K = \text{const}.$$

Але вектор K напрямлений по осі симетрії однорідного гіроскопа, отже, вісь гіроскопа буде нерухомою.

Якщо подіяти на вісь з певною скінченною силою протягом дуже малого часу, то на підставі тієї самої теореми $dK = Mdt$ робимо висновок, що зміна вектора K, а отже, і зміна положення осі гіроскопа, буде нескінченно малою.

3. Гіроскоп — покажчик широти. До великого кільця A, яке може обертатись навколо вертикальної осі, жорстко прикріплене зовнішнє кільце гіроскопа в кардановому підвісі. Кут φ можна за бажанням змінювати (див. рис. 92). Гіроскоп, який обертається, завжди розміщується так, що його вісь встановлюється паралельно осі обертання Oz великого кільця, причому напрями обох обертань збігаються. Що це буде саме так, випливає з тієї самої основної теореми $dK = Mdt$.

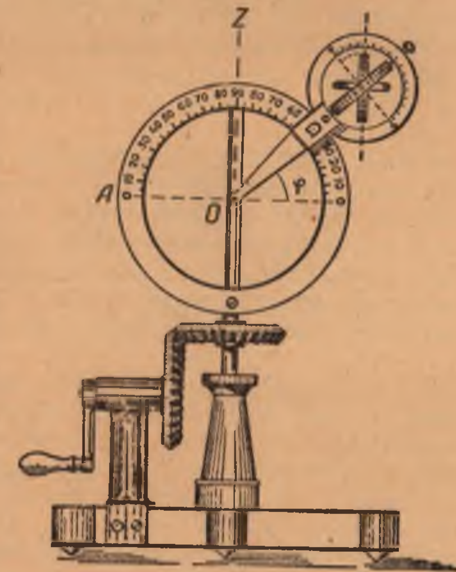

Рис. 92.

Роль великого кільця може виконати Земля, але тоді треба, щоб обертання гіроскопа відбувалося без тертя і дуже швидко — кілька десятків тисяч обертів за хвилину (швидкого обертання гіроскопа досягають за допомогою електромотора або стиснутого повітря).

Отже, якщо гіроскопи у кардановому підвісі розмістити так, щоб його вісь оберталась у площині земного меридіана при нерухомому зовнішньому кільці (площина якого перпендикулярна до площини меридіана), то після кількох коливань вісь гіроскопа встановиться паралельно осі обертання Землі. Цей дослід не тільки підтверджує обертання Землі, а й дає можливість виміряти широту φ місця спостереження: тут гіроскоп буде покажчиком широти.

Обертання Землі можна виявити за допомогою гіроскопа безпосередньо. Для цього, як показав Фуко в 1852 р., досить узяти гіроскоп з трьома ступенями вільності, тобто в кардановому підвісі, надати тору дуже швидкого обертання (кілька тисяч обертів за хвилину) і підтримувати це обертання за допомогою електромотора (тертя в підшипниках повинно бути надзвичайно малим). Якщо вісь гіроскопа напрямити на яку-небудь зірку, то виявиться, що вона весь час залишатиметься напрямленою на цю зірку, поки тор швидко обертається. Водночас відносно земних предметів вісь гіроскопа повертається, бо сама Земля обертається відносно зірок навколо своєї осі. Позірний поворот осі гіроскопа є наочним доведенням обертання Землі.

На кораблях, де багато металу, магнітний компас ненадійний. На зміну йому прийшов гіроскопічний компас, принцип дії якого такий. Якщо скріпити між собою зовнішнє і внутрішнє кільця гіроскопа в кардановому підвісі так, щоб внутрішнє кільце було горизонтальним, то вісь гіроскопа зможе вільно обертатись у горизонтальній площині. При дуже швидкому обертанні тора гіроскопа його вісь, подібно до стрілки магнітного компаса, розміщується з півдня на північ. Це можна пояснити намаганням осі власного обертання тора максимально наблизитись до положення, паралельного осі обертання Землі.

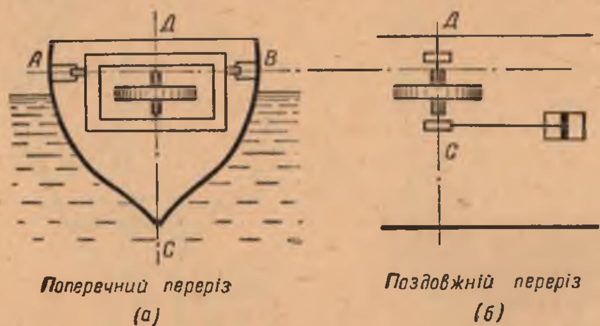

Рис. 93.

4. Гіроскопічний стабілізатор на кораблях. На морі бувають хвилі значної висоти, іноді понад 10 *м*. Вони спричинюють значну качку навіть великих пароплавів. Тут гіроскоп знайшов важливе застосування як заспокоювач качки корабля. На рис. 93 показано його поперечний і поздовжній перерізи. Важкий маховик, який вмонтовано в раму, може обертатись навколо осі *СД*, тоді як сама рама висить у підшипниках і може обертатись навколо горизонтальної осі *AB*, перпендикулярної до *СД*. Нижня частина рами скріплена з спеціальним гальмом (гідравлічним, фрикційним та ін.). Маховик може важити 100 *т*, його діаметр може становити 10 *м*, число обертів за хвилину — 1000. Маховик приводять в обертання або електромоторами, або за допомогою пари, як парову турбіну.

У нормальному положенні вісь *СД* гіроскопа вертикальна. При бортовій качці ця вісь разом з рамою і всім судном повертається навколо горизонтальної поздовжньої осі судна. Як випливає з основного закону $d\boldsymbol{K} = \boldsymbol{M}dt$, рама при цьому по-

вертається так, що вісь *СД* наблизиться до горизонтальної поздовжньої осі корабля, тобто обертатиметься навколо осі *AB*. Але цьому руху рами дуже перешкоджає, наприклад, гідравлічне гальмо. В результаті відбувається перетворення енергії коливань корабля в енергію руху рідини в гідравлічному гальмі або в теплоту при фрикційному способі гальмування. Якщо загальмувати зовсім, то у випадку, коли маховик гіроскопа обертається, бортова качка перетвориться в кільову, тобто занурюватись у воду буде то ніс корабля, то його корма.

§ 7. ПРЯМИЙ ЦЕНТРАЛЬНИЙ УДАР ДВОХ ТІЛ

Ударом називається короткочасна взаємодія тіл, яка за дуже малий проміжок часу спричинює різку зміну швидкостей їх точок.

Хоч удар звичайно триває десятитисячні (і менше) долі секунди, слід розрізняти дві його фази. Перша фаза триває від момента геометричного контакту тіл до момента їх максимального взаємного зближення, коли відбувається зміна форми тіл, їх деформація. Після цього починається друга фаза удару, яка закінчується розділенням тіл. В явищі удару відіграє роль деформація тіл, так що гіпотеза про ідеальну твердість тіл незастосовна.

При ударі відбувається або просте перенесення руху з одного тіла на інше без перетворення механічного руху в інші його види, або ж обмін рухом між тілами супроводжується частковим перетворенням механічного руху в немеханічні форми (нагрівання тіл, які співударяються, свічення їх і т. д.). У першому випадку деформації тіл від удару зовсім зникають до кінця удару. У другому випадку деформації зберігаються після удару або повністю, або частково.

У теоретичних дослідженнях проміжок часу удару вважають нескінченно малим, а сили, які діють при ударі,— нескінченно великими. Зміною положень точок тіл при ударі можна знехтувати. Так само нехтують усіма іншими силами (вагою і т. д.), які прикладені до рухомого тіла.

Розглянемо найпростіший випадок — прямий центральний удар двох тіл. За припущенням рух тіл як до удару, так і після нього поступальний, а швидкості напрямлені паралельно прямій лінії, яка сполучає центри мас.

В основі теорії удару покладено гіпотезу Ньютона, яка для розглядуваного випадку формулюється так:

Відношення абсолютної величини відносної швидкості тіл після удару до її величини до удару залежить тільки від фізичної природи тіл, які зіткнулися, але не від величини відносної швидкості і мас цих тіл.

Якщо v_0 і v_0' — швидкості тіл до удару, а v_1 і v_1' — після удару, то за гіпотезою Ньютона маємо

$$\frac{v_1' - v_1}{v_0 - v_0'} = k, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{3.350}$$

Константа k називається *коефіцієнтом відновлення*. Якщо $k = 1$, удар називається *цілком пружним;* якщо $k = 0$, то удар називається *непружним;* якщо $0 < k < 1$ — *не цілком пружним*. Перепишемо (3.350) у вигляді

$$-v_1 + v_1' = kv_0 - kv_0' \tag{3.351}$$

і візьмемо до уваги закон збереження імпульса

$$mv_1 + Mv_1' = mv_0 + Mv_0', \tag{3.352}$$

де m і M – маси тіл.

Розв'язуючи систему рівнянь (3.351) і (3.352) відносно v_1 і v_1', знайдемо швидкості тіл після удару:

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} kv_0 - kv_0' & 1 \\ mv_0 + Mv_0' & M \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ m & M \end{vmatrix}} = \frac{(m - kM)v_0 + (1 + k)Mv_0'}{m + M}, \tag{3.353}$$

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} -1 & kv_0 - kv_0' \\ m & mv_0 + Mv_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & +1 \\ m & M \end{vmatrix}} = \frac{m(1 + k)v_0 + (M - km)v_0'}{m + M}. \tag{3.354}$$

Імпульс (кількість руху), який при ударі втрачає перше тіло, дорівнює імпульсу, що його набуло друге тіло. Обчислимо цю величину, замінюючи v_1' за (3.354) у виразі того імпульса, якого набуло друге тіло:

$$p = Mv_1' - Mv_0' = M\frac{m(1 + k)v_0 + (M - km)v_0'}{m + M} - Mv_0' =$$

$$= \frac{M}{m + M}[mv_0(1 + k) + (M - km)v_0' - v_0'(m + M)],$$

або

$$p = \frac{mM}{m + M}(1 + k)(v_0 - v_0'). \tag{3.355}$$

Обчислимо ще втрату кінетичної енергії. Запишемо імпульси, які тіла набули при ударі:

а) для першого тіла $m(v_1 - v_0) = -p$,
б) для другого тіла $M(v_1' - v_0') = p$.

Помножимо перше з цих двох рівнянь на вираз

$$\frac{1 - k}{2}(v_1 - v_0) + \frac{1 + k}{2}(v_1 + v_0),$$

а друге — на аналогічний вираз

$$\frac{1 - k}{2}(v_1' - v_0') + \frac{1 + k}{2}(v_1' + v_0')$$

і додамо. Додаючи по стовпчиках, дістаємо

$$\frac{1 - k}{2}[m(v_1 - v_0)^2 + M(v_1' - v_0')^2] + \frac{1 + k}{2}[m(v_1^2 - v_0^2) +$$
$$+ M(v_1'^2 - v_0'^2)] = p(v_1' + kv_0' - v_1 - kv_0).$$

Але права частина дорівнює нулю, згідно з (3.351). Переносячи доданок лівої частини вправо і змінюючи знаки, маємо остаточно

$$\left(\frac{mv_0^2}{2} + \frac{Mv_0'^2}{2}\right) - \left(\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_1'^2}{2}\right) = \frac{1 - k}{1 + k}\left[\frac{m}{2}(v_0 - v_1)^2 + \frac{M}{2}(v_0' - v_1')^2\right],$$

або

$$T_0 - T_1 = \frac{1 - k}{1 + k}\left[\frac{m}{2}(v_0 - v_1)^2 + \frac{M}{2}(v_0' - v_1')^2\right]. \tag{3.356}$$

Ми дістали таку теорему:

Утрачена при ударі кінетична енергія дорівнює $\frac{1 - k}{1 + k}$ — кратній енергії втрачених швидкостей. Справді, ліва частина (3.356) є різниця значень суми кінетичних енергій тіл до і після удару, а в правій частині стоять вирази $\frac{m}{2}(v_0 - v_1)^2$ і $\frac{M}{2}(v_0' - v_1')^2$, які за своєю структурою збігаються із значеннями кінетичних енергій для швидкостей $v_0 - v_1$ і $v_0' - v_1'$, тобто для тих швидкостей, які тіла втрачають при ударі. Розглянемо окремі випадки.

1) $k = 1$; **удар цілком пружний.** Основні формули (3.353), (3.354), (3.355) і (3.356) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m - M)v_0 + 2Mv_0'}{m + M}, \\ v_1' &= \frac{2mv_0 + (M - m)v_0'}{m + M}, \\ p &= \frac{2mM}{m + M}(v_0 - v_0'), \\ T_0 - T_1 &= 0 \end{aligned} \tag{3.357}$$

Формула $T_0 = T_1$ показує, що при цілком пружному ударі кінетична енергія системи двох тіл зберігається незмінною. Отже, відбувається лише просте перенесення механічного руху (енергії й імпульса) від одного тіла до другого, але немає перетворення руху в немеханічні форми. З перших двох формул для швидкостей видно, що в окремому випадку удару двох тіл з рівними масами відбувається простий обмін швидкостями. Справді, якщо $m = M$, то $v_1 = v_0'$ і $v_1' = v_0$. Якщо маса другого тіла така велика, що можна знехтувати відношенням $\frac{m}{M}$ порівняно з одиницею, а швидкість другого тіла до удару v_0' дорівнює нулю, то ті самі формули дають

$$v_1 = \frac{m - M}{m + M} v_0 = \frac{\frac{m}{M} - 1}{\frac{m}{M} + 1} v_0 \approx - v_0,$$

$$v_1' = \frac{2m}{m + M} v_0 = \frac{2v_0 \frac{m}{M}}{\frac{m}{M} + 1} \approx 0.$$

Отже, внаслідок удару тіло з малою масою m втратить дуже малу частку своєї швидкості і відскочить від нерухомого тіла великої маси M з швидкістю v_1, що близька до швидкості v_0 до удару. Важке нерухоме тіло масою M дістане дуже малу швидкість, близьку до нуля.

Цим можна пояснити те, що в атомних реакторах як сповільнювачі використовують речовини з малою атомною вагою (графіт, важка вода). При сповільненні швидких нейтронів треба «проскочити» небезпечну «резонансну» швидкість нейтронів, при якій вони дуже сильно поглинаються, вибуваючи з реакції. Це неможливо зробити, коли як сповільнювачами користуватись елементами з важкими ядрами, бо тоді сповільнення нейтронів відбувається дуже малими порціями і резонансна швидкість буде обов'язково досягнута, а не «проскочена».

2) $k = 0$; **удар непружний.** Основні формули будуть

$$v_1 = v_1' = \frac{mv_0 + Mv_0'}{m + M},$$

$$p = \frac{mM}{m + M} (v_0 - v_0'). \tag{3.358}$$

$$T_0 - T_1 = \frac{m}{2} (v_0 - v_1)^2 + \frac{M}{2} (v_0' - v_1')^2.$$

З останньої формули помічаємо, що *при непружному ударі втрачена кінетична енергія дорівнює кінетичній енергії втрачених швидкостей* (теорема Карно). Зазнавши непружного удару, тіла рухаються потім разом, бо їх швидкості після удару рівні: $v_1' = v_1$.

Порівнюючи значення для p при $k = 1$ і при $k = 0$, помічаємо, що при цілком пружному ударі від одного тіла до другого переходить у два рази більший ударний імпульс (кількість руху) порівняно з тим, який переходить при непружному ударі.

3) $0 < k < 1$; **удар не цілком пружний.** Основні формули мають вигляд (3.353), (3.354), (3.355) і (3.356).

Отже, якщо при $k = 1$ механічний рух лише переходить від тіла до тіла, а деформації тіл, які ударяються, повністю зникають до кінця удару, то при $k = 0$ механічний рух частково перетворюється в немеханічну (головним чином теплову) форму, причому деформації зберігаються або повністю (при $k = 0$), або частково (при $0 < k < 1$).

При розв'язуванні задач часто використовують формулу, яка характеризує втрату кінетичної енергії при ударі, визначену через початкові швидкості тіл. Знайдемо цю формулу. Для цього у формулу (3.356) треба підставити значення v_1 і v_1' з формул (3.353) та (3.354). Прості алгебраїчні перетворення дають

$$T_0 - T_1 = \frac{1 - k^2}{2} \cdot \frac{mM}{m + M} (v_0 - v_0')^2. \tag{3.359}$$

Розглянемо тепер два приклади застосування цієї формули.

П р и к л а д 1. **Коефіцієнт корисної дії молота.** Розглянемо удар молота по розжареному металу, який лежить на ковадлі і піддається куванню. Оскільки швидкість ковадла до удару дорівнює нулю ($v_0' = 0$), то, згідно з (3.359), дістанемо

$$T_0 - T_1 = \frac{1 - k^2}{2} \cdot \frac{mM}{m + M} \cdot v_0^2 = (1 - k^2) \frac{M}{m + M} \cdot T_0, \tag{3.360}$$

де T_0 — кінетична енергія молота до удару.

Утрачена кінетична енергія $T_0 - T_1$ зв'язана з виконанням роботи по деформації куска металу. Тому коефіцієнт корисної дії молота визначають як відношення

$$\eta = \frac{T_0 - T_1}{T_0},$$

яке, згідно з (3.360), дорівнюватиме

$$\eta = (1 - k^2) \frac{M}{m + M}.$$

Ми бачимо, що при заданому k коефіцієнт корисної дії η тим більший, чим більше відношення

$$\frac{M}{m + M}.$$

Отже, коефіцієнт корисної дії молота тим більший, чим менша маса m молота порівняно з масою M ковадла. Однак маса молота не повинна бути дуже малою, бо кування не буде ефективним через малість $T_0 - T_1$, яке пропорціональне кінетичній енергії T_0 молота.

П р и к л а д 2. **Коефіцієнт корисної дії копра, який забиває палю.** Оскільки швидкість палі до удару дорівнює нулю, то $v_0' = 0$. Згідно з (3.359), дістаємо

$$T_0 - T_1 = \frac{1 - k^2}{2} \cdot \frac{mM}{m + M} \cdot v_0^2 = (1 - k^2) \frac{M}{m + M} \cdot T_0, \tag{3.361}$$

де $T_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ — кінетична енергія копра, який б'є по палі. Ефективність дії копра тим вища, чим менші при ударі втрати кінетичної енергії, бо ці втрати $T_0 - T_1$ характеризують енергію, яка перетворюється з кінетичної в інші, немеханічні форми і зв'язана з некорисною роботою по деформації палі.

Тому коефіцієнт корисної дії копра визначають як відношення

$$\eta = \frac{T_1}{T_0}.$$

За формулою (3.361) маємо

$$T_0 - T_1 = (1 - k^2) \cdot \frac{M}{m + M} \cdot T_0,$$

звідки

$$1 - \frac{T_1}{T_0} = (1 - k^2) \cdot \frac{M}{m + M},$$

або

$$\frac{T_1}{T_0} = 1 - (1 - k^2) \cdot \frac{M}{m + M},$$

тобто

$$\eta = \frac{T_1}{T_0} = \frac{m + k^2 M}{m + M}.$$

Отже, при заданому коефіцієнті відновлення k коефіцієнт корисної дії копра тим більший, чим більша маса m копра порівняно з масою M палі.

При непружному ударі, при $k = 0$,

$$\eta = \frac{m}{m + M}, \tag{3.362}$$

тоді як при пружному ударі, при $k = 1$,

$$\eta = 1. \tag{3.363}$$

ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

§ 1. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ НЬЮТОНІВСЬКОЇ ДИНАМІКИ ДО ВИВЧЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕРІАЛЬНИХ СИСТЕМ

Курси теоретичної механіки будуються, як правило, для дискретних матеріальних систем або для абсолютно твердого тіла. Але було б помилкою вважати, що сфера застосування методів теоретичної механіки обмежується цими двома випадками матеріальних систем.

Методи механіки знаходять застосування в різних розділах теоретичної фізики при дослідженні не тільки дискретних, а й неперервних матеріальних систем.

Покажемо на одному з найпростіших прикладів, як з допомогою методів ньютонівської механіки можна дослідити малі коливання пружного тіла.

Розглянемо задачу про рух n бусинок, закріплених на суцільній нитці. Нитку натягнено між двома точками на прямій, яку візьмемо за вісь Ox. Нехай усі віддалі між сусідніми бусинками і від крайніх бусинок до кінців нитки в положенні рівноваги однакові і дорівнюють Δx, а маса кожної бусинки дорівнює Δm. Вважатимемо, що рух бусинок відбувається в одній площині xOy по прямих, паралельних осі Oy. Натяг S нитки в процесі руху бусинок можна брати незмінним за величиною, бо ми обмежуємось розглядом лише невеликих відхилень $y_1, y_2, \ldots, y_n$ бусинок від положення їх рівноваги. При цьому довжини частин нитки між двома будь-якими сусідніми бусинками можуть відрізнятись від Δx лише на величини не нижче другого порядку малості, а тому віддалі між бусинками при їх русі не змінюватимуться. Вагою бусинок порівняно з силою S натягу нитки знехтуємо.

На будь-яку бусинку діють дві сили натягу суміжних частин нитки, кожна з яких за величиною дорівнює S, а їх рівнодійна напрямлена по тій перпендикулярній до осі Oy прямій, уздовж якої відбувається рух цієї бусинки. Проекцію Y_k рівнодійної на вісь Oy знайдемо як суму проекцій сил натягу двох суміжних частин нитки. З рис. 94 видно, що

$$Y_k = -(S\cos\alpha_k + S\cos\alpha_{k+1}) =$$

$$= -\left(S\frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} + S\frac{y_k - y_{k+1}}{\Delta x}\right) = \frac{S}{\Delta x}[(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})].$$

За другим законом Ньютона рівняння руху бусинки з номером k запишеться так:

$$\Delta m \ddot{y}_k = Y_k,$$

або

$$\Delta m \ddot{y}_k - \frac{S}{\Delta x}[(y_{k+1} - y_k) - (y_k - y_{k-1})] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (4.1)$$

Це рівняння малих коливань бусинок. Їх можна було б знайти за допомогою рівнянь Лагранжа, якщо за узагальнені координати взяти відхилення y_k бусинок від положення рівноваги.

Перепишемо рівняння (4.1) так:

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}\ddot{y}_k - \frac{S}{\Delta x}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}\right) = 0. \quad (4.2)$$

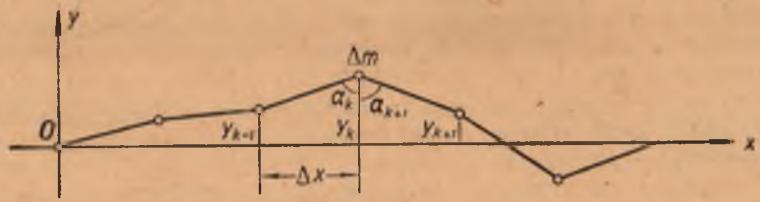

Рис. 94.

Нехай тепер число бусинок n необмежено зростає так, що віддаль Δx між бусинками зменшується до нуля, а загальна маса всіх бусинок залишається весь час незмінною. Це означає, що в рівняннях (4.2) ми проводимо граничний перехід. Відношення $\frac{\Delta m}{\Delta x}$ у границі дорівнюватиме лінійній густині ρ суцільної матеріальної лінії — так званої струни.

Відношення

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} \text{ і } \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}$$

при нескінченно малому Δx слід розглядати як похідні від y по x, обчислені в точках x і $x - \Delta x$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x.$$

Тому з точністю до величин другого порядку малості матимемо

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x} - \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x-\Delta x} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\Delta x.$$

Ми пишемо тут символ частинної похідної, оскільки y залежить не лише від x, а й від t.

Отже, в результаті граничного переходу в рівняннях (4.2) матимемо

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (4.3)$$

Ми дістали відоме рівняння поперечних коливань струни

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (4.4)$$

де $a = \sqrt{\frac{S}{\rho}}$.

Підіб'ємо підсумок. Вихідна дискретна матеріальна система (бусинки на нитці) мала n ступенів вільності, і її малі коливання характеризуються n звичайними диференціальними рівняннями відносно узагальнених координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Після граничного переходу ми дістали неперервну (суцільну) струну, яку слід розглядати як систему з нескінченною множиною ступенів вільності.

Коливання струни характеризується лише одним диференціальним рівнянням (4.4) другого порядку в частинних похідних. Здавалося б, що в процесі граничного переходу кількість рівнянь повинна зростати разом з n, а не зводитись до одного. Це так і є: у вихідних n звичайних рівняннях (4.2) є лише одна незалежна змінна — час t, тоді як у рівнянні (4.4) в частинних похідних, яке знайдене після граничного переходу, незалежною змінною є не тільки час t, а й координата x. Фактично рівняння в частинних похідних (4.4) еквівалентне нескінченній множині звичайних диференціальних рівнянь, оскільки змінній x можна надати довільного сталого значення з того інтервалу, на якому натягнута струна. Отже, роль змінної x у граничному рівнянні (4.4) аналогічна до ролі біжучого номера бусинок у початкових рівняннях (4.2). У дискретній системі кожному номеру k відповідає певна узагальнена координата y_k, а в неперервній системі кожній координаті x відповідає своя узагальнена координата $y(x, t)$. Координата x виконує роль «неперервного номера», який з нескінченної множини узагальнених координат вибирає лише одну певну координату.

Дослідження малих коливань матеріальної системи зводиться, як відомо, до визначення її головних коливань. Щоб знайти головні коливання дискретної матеріальної системи, здійснюють перехід до динамічно незалежних одна від одної нормальних координат цієї системи. Аналогічно досліджують і малі коливання неперервних систем.

Характерною ознакою головних коливань є те, що в кожному головному коливанні відношення відхилень різних точок коливної системи від своїх положень рівноваги залишаються незмінними протягом всього часу.

Тому у випадку неперервної струни головні коливання визначають, відшукуючи такі розв'язки рівняння (4.4), які можна подати у вигляді

$$y(x, t) = X(x)\,T(t). \quad (4.5)$$

Цей метод знаходження головних коливань відомий під назвою методу «відокремлення змінних».

Саме в коливаннях типу (4.5) відношення відхилень двох довільних точок струни не залежатиме від часу, бо

$$\frac{y(x_1, t)}{y(x_2, t)} = \frac{X(x_1)T(t)}{X(x_2)T(t)} = \frac{X(x_1)}{X(x_2)} = \text{const}.$$

Кількість головних коливань дискретної матеріальної системи дорівнює кількості ступенів вільності цієї системи. У випадку, коли число бусинок n, число головних коливань теж дорівнює n. При граничному переході від системи n бусинок до суцільної струни кількість головних коливань необмежено зростає. Відповідно до цього рівняння (4.4) має не один, а нескінченну множину розв'язків типу $y = X(x)T(t)$.

З наведеного прикладу видно, що існує глибока аналогія між рухом дискретної системи бусинок і рухом суцільної струни. Наявність такої аналогії дає змогу вивчати, наприклад, малі пружні коливання в суцільних тілах методами ньютонівської механіки.

Виявляється, що така аналогія існує і для електромагнітного поля.

Фізичний стан електромагнітного поля у вакуумі визначається значеннями напруженостей $\boldsymbol{E}$ і $\boldsymbol{H}$ або значеннями потенціалів $\boldsymbol{A}$ і φ, які є функціями просторових координат і часу. Як і у випадку суцільного пружного тіла, координати точок простору тут «нумерують» ступені вільності фізичної системи — електромагнітного поля. Роль узагальнених координат при вивченні поля звичайно виконують потенціали. Однак ці «узагальнені координати» електромагнітного поля не незалежні одна від одної, тобто вони не є «нормальними координатами». Це видно з того, що рівняння, які задовольняються потенціалами (рівняння хвиль $\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0$), містять похідні від потенціалів по просторових координатах, що входять під знак оператора Лапласа Δ, тобто вони містять різниці значень потенціалів у нескінченно близьких точках простору.

Аналіз законів зміни (руху) електромагнітного поля найпростіше можна здійснити методом, аналогічним до того, який у механіці дискретних систем відомий як метод головних коливань. Здійснюють перехід до незалежних одна від одної нормальних координат*, зводячи тим самим вивчення електромагнітного поля у вакуумі до вивчення системи незалежних лінійних гармонічних осциляторів.

Зауважимо ще, що цей шлях вивчення електромагнітного поля відкриває найпростіший спосіб для побудови його квантової теорії.

* Див., например, А. С. Компанеец, Теоретическая физика, ГИТТЛ, 1955.

Отже, можна твердити, що й закони електродинаміки в певній мірі аналогічні до законів механіки.

Треба, однак, твердо пам'ятати, що немеханічні види руху (теплові, електромагнітні й ін.) не можна звести до механічних переміщень. Тому неможливо вивести, наприклад, термодинамічні або електромагнітні закономірності з рівнянь механіки, хоч у фізиці такі спроби й були: з рівнянь Лагранжа Гельмгольц намагався дістати основні співвідношення термодинаміки, а Максвелл виводив рівняння електромагнітного поля.

Наведені вище два приклади свідчать про те, що методи механіки дійсно використовуються при дослідженні рухів різноманітних матеріальних систем, у тому числі й немеханічних рухів. Особливо широко використовуються аналітичні методи механіки.

Аналітичні методи механіки широко використовуються при дослідженнях різноманітних немеханічних видів руху. Так, рівняння Лагранжа, канонічні рівняння, варіаційні принципи, що були відкриті і досліджені спочатку у випадку механічного руху дискретних матеріальних систем, тепер застосовуються в механіці суцільних середовищ (у гідромеханіці й теорії пружності), у статистичній фізиці, у квантовій механіці, у радіотехніці, в електродинаміці.

Особливо поширились варіаційні принципи динаміки, які, як виявилось, відбивають найбільш загальні закономірності матеріального руху. Варіаційні методи дають змогу встановити загальні властивості навіть нововідкриваних у фізиці полів, фізична природа яких ще недостатньо вивчена.

Виникає питання: чим пояснити, що аналітичні методи динаміки так широко застосовуються у фізиці взагалі і виявляються такими ефективними? Що спільного, наприклад, між системою матеріальних точок і такою якісно відмінною від неї фізичною системою, як електромагнітне поле?

Єдність цих систем — в їх матеріальності. Хоч у цих системах матерію і подано в якісно різних формах і рух тут теж якісно різний, але матерія і рух — незнищувані, в яких би фізичних формах вони не існували. Водночас основні рівняння тієї чи іншої галузі фізики, якщо не прямо, то посередньо, визначають внутрішньо властиву руху незнищуваність, властивість збереження руху при будь-яких його перетвореннях (основні рівняння фізики завжди узгоджені з законами збереження мір руху). Саме тому виявляється, що, хоч фізичні види руху якісно й відмінні, рівняння фізики, які стосуються різних її галузей, за математичною структурою часто бувають аналогічні, і досліджувати різні фізичні процеси можна подібними між собою методами.

Зрозуміло, що особливу ефективність повинні мати ті методи механіки, в яких не використовуються фізичні поняття, які специфічні лише для механічного виду руху (як, наприклад, сила). Саме такими є аналітичні методи механіки і, особливо, варіаційний метод, при формулюванні якого ми користуємось, крім поняття простору і часу, що завжди потрібно, лише поняттям енергії та її зміни (роботи).

В. І. Ленін у книзі «Матеріалізм і емпіріокритицизм» писав, одночасно цитуючи працю відомого фізика-атоміста Л. Больцмана: «Єдність природи виявляється в «разючій аналогічності» диференціальних рівнянь, які стосуються до різних сфер явищ. «Тими самими рівняннями можна розв'язувати питання гідродинаміки і виражати теорію потенціалів. Теорія вихрів у рідинах і теорія тертя газів (Gasreibung) виявляють разючу аналогію з теорією електромагнетизму і т. д.» (7). Люди, які визнають «теорію всезагальної підстановки», ніяк не викрутяться від питання, хто ж це так одноманітно догадався «підставити» фізичну природу»*.

Вище було зазначено, що варіаційні принципи мають універсальну застосовність у різних галузях сучасної фізики. В основу кожної галузі фізики можна покласти варіаційний принцип з функцією дії, вибраною так, щоб варіаційний принцип приводив до відомих рівнянь руху — Ньютона або Лагранжа в механіці, Максвелла в теорії електромагнітного поля, Шредінгера в квантовій механіці і т. д. При такому способі побудови науки всі галузі фізики, як виявляється, мають деяку структурну аналогію. І тому, як тільки експериментальна фізика виявляє потребу змінити фізичний зміст якої-небудь однієї з теорій, наявність структурної аналогії показує, як саме треба зробити ці зміни і в інших галузях фізики. Ось чому, наприклад, побудова квантової електродинаміки спирається на методи квантування елементарних частинок**. Тут ми щільно підійшли до питання про міру руху, оскільки з ним нерозривно зв'язаний фізичний принцип збереження руху. Коротко спинимось ще раз на цьому питанні.

§ 2. ДО ПОНЯТТЯ ПРО МІРУ РУХУ В МЕХАНІЦІ

Твердження про те, що при всіх перетвореннях рух зберігається, за своїм змістом звичайно вважають цілком простим. Але в дійсності це твердження спирається на поняття міри руху, бо про збереження руху при його перетвореннях можна говорити лише після того, як встановлені закони для вимірювання «кількості руху» кожного окремого його виду***. Не вміючи вимірювати запас окремих фізичних видів руху, ми не змогли б установити й факт збереження руху при всіляких його перетвореннях. Без знання мір руху не можна сформулювати і основні закони його перетворення.

Ось чому побудова теоретичної механіки, першого розділу фізики, історично почалась з установлення міри механічного руху. Але встановлення міри механічного руху — справа складна.

* В. І. Ленін. Твори, т. 14, стор. 264—265.

** Г. Голдстейн, Классическая механика, ГИТТЛ, 1957.

*** В. С. Сорокин, Закон сохранения движения и мера движения в физике, УФН, т. LIX, вып. 2, 1956.

Міру механічного руху було встановлено лише після тривалих спроб. Декарт спочатку помилково припускав, що міра механічного руху є додатною величиною, яка дорівнює добутку маси на величину швидкості. І лише в зв'язку з накопиченням експериментальних фактів виявилось, що цю міру слід розуміти не як додатний скаляр, а як вектор.

Так само було і з встановленням скалярної міри руху, тобто закону для вимірювання енергії механічного руху. Дуже довго скалярною мірою руху вважали величину mv^2; лише від середини XIX ст., після відкриття закону збереження і перетворення енергії, виявилось, що скалярною мірою руху є величина $\frac{mv^2}{2}$.

До того ж слід нагадати, що поняття маси в механіку ввів першим Ньютон, отже, з мірами руху до Ньютона зв'язували не масу, а вагу тіл; міри руху в механіці встановили поступово, спираючись на накопичуваний досвід.

Лише після того, як, нарешті, було знайдено закон, який визначав міру механічного руху, Ньютон зміг сформулювати основні закони механіки, чим і поклав початок розвитку нової фізики. Закони Ньютона фактично стверджували незнищуваність руху, вимірюваного в механіці за допомогою встановленої міри і поняття сили.

Усі численні наслідки, що випливали з теорії, побудованої Ньютоном на основі встановленої ним міри руху, стверджувались усією практикою. Це й свідчило про те, що міру механічного руху було встановлено правильно.

Але в кінці XIX ст. і на початку XX ст. фізичний експеримент (який тоді вже вступив у сферу атомних явищ) виявив, що маса електрона не є незмінною, а залежить від величини його швидкості: чим більша швидкість електрона, тим важче його прискорювати. Це відкриття залежності маси від швидкості по суті означало відкриття того факту, що ньютонівські міри руху $\frac{mv^2}{2}$ і mv не точно характеризують «запас руху» електрона, коли він рухається з великою швидкістю. Отже, як і кілька століть тому, знову постало питання про «правильні» міри руху. Треба було знайти для них нові закони і на їх основі побудувати нову фізичну теорію руху, що стосується таких матеріальних об'єктів, як електрони, швидкість яких близька до швидкості світла.

В основу нової фізичної теорії (вона дістала назву спеціальної теорії відносності) А. Ейнштейн поклав два експериментально виявлені принципи: 1) відносності і 2) незалежності швидкості світла від швидкості його джерела. За принципом відносності рівномірний і прямолінійний рух матеріальної системи як цілого не впливає на хід фізичних процесів, що відбуваються всередині її. Цей принцип є узагальненням на всі фізичні явища відомого принципу відносності Галілея, який стосується лише механічних явищ.

Принцип незалежності швидкості світла від швидкості його джерела вимагав, щоб формулювання фізичних законів були відповідні до експериментально встановленої граничної фізичної швидкості, яка дорівнює швидкості світла у вакуумі.

За другим принципом Ейнштейна швидкість світла одна й та сама в усіх інерціальних системах координат, які перебувають у відносному русі. А це означає, що ньютонівський закон додавання швидкостей треба замінити новим законом, який не приводив би до швидкостей, більших від швидкості світла у вакуумі. Але ми знаємо, що закон додавання швидкостей є логічним наслідком встановлених у механіці властивостей простору і часу. Отже, відкидаючи закон додавання швидкостей ньютонівської механіки, ми тим самим відкидаємо і встановлені там уявлення про властивості простору й часу. Тому цілком зрозуміло, що теорія, яка побудована на принципі незалежності швидкості світла від швидкості його джерела, несумісна з уявленнями про ті властивості простору і часу, які лежать в основі ньютонівської механіки.

Далі виявилось, що з двох принципів, які А. Ейнштейн поклав в основу нової фізичної теорії, логічно випливають і нові властивості простору й часу (перетворення Лоренца).

З новими властивостями простору й часу ньютонівські міри руху виявились несумісними. Структуру нових мір руху можна знайти математичним способом так само, як міри руху ньютонівської механіки, але виходячи вже з нових властивостей простору і часу.

Отже, створена на базі нових експериментальних відкриттів, теорія відносності встановила нові міри руху, структура яких являє собою

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

де m_0 — маса матеріальної точки в стані спокою, $\boldsymbol{v}$ — швидкість точки, а c — швидкість світла у вакуумі. Механіка, яка побудована на основі цих нових мір руху, фактично стверджує незнищуваність руху, виміряного новими мірами. Основним законом цієї (релятивістської) механіки є другий закон Ньютона, який записується тепер так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F}.$$

Усі численні теоретичні висновки релятивістської механіки цілком підтверджуються практикою (наприклад, при русі елементарних частинок у прискорювачах).

Разом з тим релятивістська механіка не заперечує правильності ньютонівської механіки для тих явищ, в яких рухомі об'єкти мають невелику швидкість.

І ньютонівська, і релятивістська механіки побудовані на мірах руху, які мають векторно-скалярну структуру. Скалярна міра руху називається енергією, а векторна — імпульсом.

Поширена думка про те, нібито векторна міра руху (імпульс) специфічна лише для механічного його виду, тоді як складніші — немеханічні — види руху можуть і не мати її. Ця думка помилкова. Імпульс — така сама універсальна міра руху, як і енергія. Фізична система, якій властиві будь-які види руху, як і матеріальна точка, також має двоякого роду міру руху — енергію й імпульс*. Той факт, що всякий фізичний рух має міру, структура якої завжди векторно-скалярна, не випадковий. Векторно-скалярна структура міри руху обумовлена тим, що «...рухома матерія не може рухатись інакше, як в просторі і в часі»**. Отже, просторово-часовий характер руху матерії обумовлює векторно-скалярну структуру його міри.

Енергія «відірвана» від імпульса лише в рамках ньютонівської механіки, бо в ній час теж «відірваний» від простору, тоді як в релятивістській механіці енергія й імпульс зливаються в один чотиривимірний вектор, компоненти якого виступають як просторово-часові складові єдиної міри руху. Отже, сучасна фізика не може відривати імпульс від енергії або розглядати його як менш повноцінну порівняно з енергією міру руху.

Дальший розвиток фізики привів до встановлення існування однієї тензорної міри руху, але це питання виходить за рамки цієї книги.

Фізика належить до числа так званих точних наук. При побудові всякої фізичної науки фактично (хоч і не завжди свідомо) використовується постулат про незнищуваність руху, який нерідко визначається у вигляді тих чи інших законів, начал, рівнянь і т. п. Наприклад, у механіці цей постулат визначений вже вихідними законами Ньютона, у термодинаміці — одним з вихідних її начал і т. д. Те, що численні висновки, до яких приводить фізична теорія, побудована на началі незнищуваності руху, дійсно стверджуються всіма експериментами, усіма явищами природи, людською практикою, і є доказом абсолютної правильності одного з основних принципів сучасної фізичної науки — принципу незнищуваності руху.

Форма, в якій математично визначається принцип незнищуваності руху в механіці (або в іншому розділі фізики), може змінюватись, і дійсно вже змінювалась, але сам цей принцип являє собою ту перлину теорії, яка назавжди залишиться однією з непохитних основ фізичної науки.

---

* Див. згадувану статтю В. С. Сорокіна.

** В. І. Ленін, Твори, т. 14, стор. 156.

ЛІТЕРАТУРА

Ньютон И., Математические начала натуральной философии, Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова, АН СССР, 1936.
Эйнштейн А., Сущность теории относительности, ИЛ, 1955.
* Борн М., Теория относительности Эйнштейна и ее физические основы, ОНТИ, 1938.
Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, ИЛ, т. I, 1948; т. II, 1949.
* Геронимус Я. Л., Очерки о работах корифеев русской механики, ГИТТЛ, 1952.
Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, курс высшего технического училища, Полн. собр. соч., вып. 3, М. — Л., 1939.
Жуковский Н. Е., Кинематика, статика, динамика точки (университетский курс), М.—Л., 1939.
Жуковский Н. Е., Механика системы, динамика твердого тела (университетский курс), М. — Л., 1939.
Жуковский Н. Е., Теоретическая механика, ч. III, Дополнительные статьи, ГТИ, 1925.
Зоммерфельд А., Механика, ГИИН, 1947.
Кільчевський М. О., Курс теоретичної механіки, «Радянська школа», т. І, 1955, т. II, 1957.
* Кирпичев В. Л., Беседы о механике, ГИТТЛ, 1950.
Космодемьянский А. А., Курс теоретической механики, Учпедгиз, 1955.
Крылов А. Н., О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, АН СССР, 1933.
Леви-Чивита А. и Амальди У., Курс теоретической механики, т. I—IV, ИЛ, 1951 — 1952.
Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. II, ГИТТЛ, 1955.
Савин Г. Н., Кильчевский Н. А., Путята Т. В., Курс теоретической механики, 1957.
* Сорокин В. С., Закон сохранения движения и мера движения в физике, УФН, т. LIX, вып. 2, 1956.
Суслов Г. К., Аналитическая механика, ОГИЗ, 1946.
Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, М.—Л., 1937.
Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ, 1955.
Чаплыгин С. А., Механика системы, М. — П., 1923.
Граммель Р., Гироскоп, его теория и применения, 1952.
Мещерский И. В., Работы по механике тел переменной массы, ГИТТЛ, 1949.
З працями, які позначені зірочкою *, слід ознайомитись кожному студенту-фізику.

ІМЕННИЙ ПОКАЖЧИК

Александров А. Д. 94
Амальді У. 350
Арістотель 84
Артоболевський І. І. 59
Архімед 80, 178

Бер К. М. 170
Бернуллі Д. 11
Бернуллі Й. 233
Бернуллі Я. 233
Бобильов Д. К. 59
Боголюбов М. М. 13
Борн М. 159, 350
Брашман 193
Бруно Д. 80
Булгаков Б. В. 13

Вавілов С. І. 11
Валле Пуссен Ш. Ж. 350
Варіньйон 178
Вейєрштрасс К. 291
Велигоцький Г. Г. 4
Воронець П. В. 193

Галілей Г. 80, 93
Гамільтон В. 193, 247
Гаусс К. 193
Гельмгольц Г. 93, 345
Герман Я. 193
Геронімус Я. Л. 350
Герц Г. 193
Голдстейн Г. 346
Граммель Р. 350
Гюйгенс Х. 81, 93

Даламбер Ж. 93, 193, 217
Декарт Р. 93

Евклід 8
Ейлер Л. 11, 12, 156, 193, 315, 318, 319
Ейнштейн А. 7, 81, 99, 348, 350
Енгельс Ф. 6, 90, 93, 95, 96, 97, 98, 121, 258
Жуковський М. Є. 12, 13, 59, 85, 101, 102, 193, 309, 315, 350

Зоммерфельд А. 99, 101, 350

Ільюшин О. А. 13

Кант І. 93
Кеплер Й. 80
Кільчевський М. О. 62, 249, 272, 273, 283, 350
Кирпичов В. Л. 350
Кірхгоф Г. 101
Ковалевська С. В. 12, 319
Компанієць О. С. 258, 344
Коперник М. 80
Космодем'янський А. О. 350
Крилов М. М. 13
Крилов О. М. 12, 118, 350

Лаваль 309
Лагранж Ж. 12, 178, 193, 223, 291, 319
Ланжевен 102
Лебедєв П. М. 7
Леві-Чівіта Т. 350
Лейбніц 93, 248
Ленін В. І. 3, 5, 8, 102, 103, 346, 349
Лобачевський М І. 8
Лойцянський Л. Г. 350
Ломоносов М. В. 6, 7, 10, 11
Лопіталь 233
Лур'є 350
Ляпунов О. М. 12, 13, 280, 320

Максвелл 315, 345
Мандельштам Л. І. 13
Мах Е. 99, 101
Мебіус А. 178
Мещерський І. В. 12, 212, 350
Мопертюї 193, 247

Ніколаї Є. Л. 329, 330
Ньютон І. 7, 81, 84, 93, 98, 100, 347, 350

Остроградський М. В. 12, 178, 193, 248

Папалексі М. Д. 13
Планк 102
Птоломей 80
Пуансо Л. 178, 313, 315
Пуассон 319
Путята Т. В. 350

Ритов С. М. 118

Савін Г. М. 350
Слудський 193
Сомов О. І. 291, 315
Сорокін В. С. 95, 346, 349, 350
Стеклов В. А. 320
Степанов В. В. 13
Столетов 102
Стрєлков С. П. 113
Суслов Г. К. 350

Тимошенко С. П. 296
Тімірязєв 102

Уіттекер Е. 101, 255, 256, 350
Умов М. О. 102

Фок В. О. 350

Ціолковський К. Е. 12, 213

Чаплигін С. О. 12, 13, 193, 320, 321, 350
Чебишов П. Л. 12, 13, 59
Четаєв М. Г. 13

Шаль М. 178

Якобі К. 193, 247, 315

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Абсолютно тверде тіло 10
Аксіома про звільнення від в'язей 150, 173
Аксоїди 63
Активні сили 150, 175
Алгебраїчне значення швидкості 20
Амплітуда коливань 110
— вимушених коливань 115
Апогелій 139

Биття 294
Біне формула 137
Брахістохрона 233

Вага тіла 81, 161, 192
Варіньйона теорема 190
Вектор кутової швидкості 42
— миттєвої кутової швидкості 51
— переміщення 20
— прискорення 24
— швидкості 20
Вектори аксіальні (псевдовектори) 45
— вільні 44
— зв'язані 44
— ковзні 44
— полярні 45
Векторна форма рівнянь руху точки 17
— — диференціальних рівнянь руху точки 103
Вимушені коливання 113, 295
Відносний рух 157
— спокій 160
Відцентрові моменти інерції 304
Вільна матеріальна система 172
— матеріальна точка 103
Власні коливання 111
Внутрішні сили 175

Гамільтона функція 240
Геліоцентрична система координат 86
Геометричні (голономні) в'язі 173
Германа — Ейлера — Даламбера принцип 155, 216
Герполодія 315
Гіроскоп 321
— покажчик широти 333
— у кардановому підвісі 331
Гіроскоп Фуко 330
Гіроскопічний момент 326
Головна нормаль кривої 26
— функція Гамільтона 269
Головний вектор системи сил 176, 185
— момент системи сил 176, 185
Головні коливання 285
— осі інерції 303
Гюйгенса теорема 310

Даламбера — Лагранжа принцип 219
Декремент затухання 112
— — логарифмічний 112
Динаміка 103
Динамічний гвинт 189
Динамічні рівняння Ейлера 316
— реакції опор 308
Динамічно зрівноважене тіло 308
Діріхле теорема 280
Дія матеріальної точки (системи) за Остроградським 253
— — — — за Лагранжем 260
Довжина 14
Додаткові реакції опор 308
Дотична 26
Доцентрове прискорення 56
Другі інтеграли диференціальних рівнянь руху 105

Ейлера—Лагранжа принцип стаціонарної дії 258
Ейлера—Даламбера теорема 49
Ейлера динамічні рівняння 316
— кінематичні рівняння 318
Ейлера кути 59
Ейлера формула 43
Ейлера—Шаля теорема 46
Еквівалентні системи сил 185
Еквіпотенціальна поверхня 128
Еліпсоїд інерції 302
Енергія 90

Загальне рівняння статики 180
— — механіки 219
Задача двох тіл 146
Закони природи 9
Закон збереження механічної енергії 130, 200, 202
Закон інерції 84, 91, 95, 99
Закон незалежності дії сил 85
— незнищимості матерії 5
— незнищимості руху 6
Закони Ньютона 8, 83—86
Закон руху точки 16, 17
Затухаючі коливання 111

Зведена довжина фізичного маятника 310
Зовнішні сили 175
Зрівноважена система сил 185
Зрівноважуюча сила 185

Ідеальні в'язі 176
Імпульс сили елементарний 119
— — за проміжок часу 119
Імпульси узагальнені 237
Інертність 82, 86, 91, 95
Інерція 84
Інерції закон 84, 91, 95, 99
— сили 155, 159

Канонічні змінні 239
— рівняння 240
Кеплера закони 139
Кеплера — Ньютона задача 138
Кількість руху (імпульс) 83, 92, 93, 94, 97
— ступенів вільності руху 52, 174
Кінематика 14
Кінематичні (неголономні) в'язі 173
— рівняння Ейлера 318
Кінетична енергія 94, 234
Коефіцієнт корисної дії молота 339
— — — копра 339
Коливання точки 107
— головні 285
Консервативна система 258
Консервативне силове поле 202
Координати нормальні 285
— узагальнені 222
— циклічні 242
Координатна форма рівнянь руху 15
Коріоліса теорема 69
— сила інерції 159
Космічна швидкість перша 146
— — друга 146
Кривизна кривої 26
Кут власного обертання 60
— нутації 60
— повороту 38
— прецесії 60
Кути Ейлера 59
Кутова швидкість 40
— — миттєва 50, 73
Лагранжа рівняння другого роду 227
— — першого роду 220
— функція 230
Логарифмічний декремент затухання 112
Ляме коефіцієнти 32

Малі коливання системи навколо положення стійкої рівноваги 278—299
Маса 81, 86
— вагома 88
Маса зведена 148
— інертна 88
Математичний маятник 154
Матеріальна точка 10
Матерія 5—7
Маятник математичний 154
— фізичний 309
— Фуко 166
— циклоїдальний 232
Методика застосування рівнянь Лагранжа другого роду 230
Механічна енергія 130
Механічний рух 9
Мещерського рівняння 212
Миттєва вісь обертання 62
— кутова швидкість 47
Миттєвий обертальний рух 73
— поступальний рух 73
— центр обертання 47
— — прискорень 57
— — швидкостей 56
Міра руху 92, 346
— — векторна 94, 348
— — скалярна 94, 348
Можливе (віртуальне) переміщення матеріальної системи 174
Момент вектора відносно осі 133
— — — точки 133
Момент гіроскопічний 326
Момент інерції тіла відносно осі 207, 300
— — — відцентровий 304
— — — головний 303
— — — центральний 303
Момент кількості руху (момент імпульса) 134

Натуральна форма рівнянь руху 16
Натуральні диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки 104
Невільна матеріальна точка 150
— система матеріальних точок 172
Неголономна в'язь 173
Незмінна площина Лапласа 206
Неінерціальна система відліку 158
Нерухома центроїда 58
Нестаціонарна в'язь 150
Нестійка рівновага 280
Нормальні координати 285
Ньютона другий закон 84, 96
— перший закон 84, 91, 95
— третій закон 84,98

Обертальний рух тіла 37
Обертання миттєве 73
Обертальне прискорення 56
Обрі прилад 335
Основні задачі динаміки точки 105
Основні теореми динаміки точки 118

Остроградського—Гамільтона принцип стаціонарної дії 249, 256
Остроградського—Гамільтона рівняння 271

Пара обертань 79
— сил 186
Пасивні сили 175
Переміщення точки 20
Переносний рух 67
Перигелій 139
Період затухаючих коливань 112
Перша основна задача динаміки 105
Перший закон Ньютона 84, 91, 95
Перші інтеграли диференціальних рівнянь руху 105
Плече пари сил 186
Плоский рух тіла 53
Поверхня рівня 128
Повний інтеграл 271
Поворотне прискорення 70
Поле потенціальне 126
— силове 125
— стаціонарне 125
Полодія 315
Поступальний рух тіла 36
— — — миттєвий 74
Потенціальна енергія 130
Потенціальне силове поле 126, 200
Потужність 121
Початкова швидкість 105
Початкове положення 105
Початковий момент часу 105
Права система координат 14
Прецесії кут 60
Прецесія повільна 325
— регулярна 320
— швидка 325
Принцип відносності Галілея 91,92
— Даламбера — Лагранжа 219
— збереження і перетворення руху 90
— можливих переміщень 179
— стаціонарної дії Ейлера — Лагранжа 258
— — — Остроградського—Гамільтона 249, 256
Прискорення руху точки 23
— — — абсолютне 70
— — — відносне 70
— — — вздовж траєкторії 24
— — — доосьове 64
— — — дотичне 28
— — — доцентрове 56
— — — нормальне 28
— — — обертальне 56, 64
— — — переносне 70
— — — поворотне 70
Прискорення вектор 24
Прискорення кутове 40
Прискорення кутове, вектор 42
Прискорень миттєвий центр 57
Проміжок часу 15
Простір 7, 8
Прямолінійний рух 17
Пуансо геометрична інтерпретація 315
Пуассона формула 62

Радіус-вектор точки 17
Радіус інерції 329
— кривизни 27
Реактивна сила 213
Реакції опор динамічні 308
— — додаткові 308
— — статичні 308
Реакція в'язі 150, 175
Регулярна прецесія 320
Резонанс 298
Рівновага нестійка 280
— стійка 279
Рівнодійна 86, 185
Рівнозмінний рух точки 23
Рівноприскорений рух точки 23
Рівносповільнений рух точки 23
Рівняння аксоїд 63
— відносного руху точки 158
— канонічні 240
— механіки загальне 219
— Остроградського — Гамільтона — Якобі 276
— рівноваги вільного твердого тіла 182
— рівноваги твердого тіла, що має нерухому вісь 184
— рівноваги твердого тіла, що має одну нерухому точку 183
— руху точки 15, 16, 17
— — — диференціальні 103
— руху системи матеріальних точок, диференціальні 193
— обертального руху тіла 38
— плоского руху тіла 54
— — вільного тіла 65
— — тіла навколо нерухомої точки 60
— — руху точки в координатній формі 16
Рівняння поступального руху тіла 37
— руху точки в векторній формі 17
— — — змінної маси 211
— — — натуральне 16
— частот (характеристичне) 283
— центроїд 58
Робота елементарна 120
— пружної сили 124
— сили тяжіння 122
— центральної сили 122
Робота сил, прикладених до абсолютно твердого тіла 181

Робота сил у потенціальному силовому полі 126, 200
Рух 5, 6
— абсолютний 67
— відносний 67
— з інерції 84, 313
— переносний 67
— складний 73
— системи відносно центра інерції 208
Рухома центроїда 58

Секторна швидкість 29
Секунда 15
Середнє прискорення (уздовж траєкторії) 24
— —, вектор 25
Середня швидкість точки 19
— — —, вектор 20
Сила 81, 83, 84, 85, 96, 97, 98, 101, 102
— інерції 155, 159
Силова функція 126, 200
Силове поле 125
Сили узагальнені 225
Система відліку 14
— збіжних сил 188
— матеріальних точок 172
— паралельних сил 190
Спокій 9
Статика 178
Статичні реакції опор 308
Стична площина 26
Стійке положення рівноваги системи 279
Ступені вільності 52

Теорема Гюйгенса 310
— Діріхле 280
— Ейлера — Даламбера 49
— Ейлера — Шаля 46
— Карно 338
— Остроградського — Гамільтона — Якобі 271, 274
— про додавання обертальних рухів 74, 75
— про додавання поступальних рухів 73
— про додавання швидкостей 67
Теорема про зміну кількості руху (імпульса) 119, 195
— — — кінетичної енергії 120, 153, 199, 209
— — — момента кількості руху 133, 204, 208
— — момент інерції тіла відносно довільної осі 300
— — рух центра інерції 197
Тіло відліку 14
Точка підвісу фізичного маятника 310
Траєкторія точки 16

Третій закон Ньютона 84, 98
Удар двох тіл, прямий центральний 335
— — —, непружний 336, 338
— — —, не цілком пружний 336, 339
— — —, цілком пружний 336, 337
Узагальнені імпульси 237
—координати 222
—сили 235
—швидкості 223
Умова і рівняння рівноваги твердого тіла, яке має нерухому вісь 184
Умова і рівняння рівноваги вільного твердого тіла 182
— — — — твердого тіла, що має одну нерухому точку 183
Умова рівноваги 278, 279

Фаза коливань 117
Фазовий простір 239
Фізичний маятник 309
Функція Гамільтона 240
— — головна 267—289
— Лагранжа 230
— розсіювання енергії 131
— характеристична 272

Центр ваги тіла 190
— інерції 147
— коливань фізичного маятника 310
— мас (центр інерції) 197
— паралельних сил 190
Центральна вісь системи сил, прикладених до твердого тіла 188
Центральне силове поле 134
Центроїди 58
Циклічні координати 242
Циклоїдальний маятник 232
Ціолковського друга задача 215
— перша задача 215
— число 214

Час 7, 8
Частоти головних коливань 287
Число ступенів вільності руху 52, 174
Число Ціолковського 214

Шаля теорема 52
Швидкість нерівномірного руху точки 19
— рівномірного прямолінійного руху точки 17, 18
— секторна 29
тіла кутова 38, 39
— точки в прямокутних декартових координатах 21
Швидкості вектор 20
— миттєвий центр 56
— узагальнені 223

ЗМІСТ

Стор.
Передмова 3

ВСТУП

§ 1. Матерія і рух 5
§ 2. Простір і час 7
§ 3. Взаємозв'язок у природі. Закони природи. Предмет механіки . . 9
§ 4. Деякі основні абстракції теоретичної механіки 9
§ 5. Коротка історична довідка про вклад вітчизняних учених у механіку 10

Частина перша

КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТІЛА

Розділ I. Кінематика матеріальної точки

§ 1. Три форми рівнянь руху матеріальної точки 15
§ 2. Швидкість руху матеріальної точки 17
§ 3. Швидкість точки в прямокутних декартових координатах 21
§ 4. Шлях точки 22
§ 5. Прискорення руху матеріальної точки 23
§ 6, Прискорення руху точки в прямокутних декартових координатах . 25
§ 7. Дотичне і нормальне прискорення точки 26
§ 8. Секторна швидкість точки 29
§ 9. Кінематика точки в криволінійних координатах 30

Розділ II. Найпростіші основні види руху твердого тіла

§ 1. Поступальний рух твердого тіла 36
§ 2. Обертання тіла навколо нерухомої осі 37

Розділ III. Основні види руху твердого тіла (геометрична теорія)

§ 1. Рух тіла, який паралельний нерухомій площині (плоский рух) . . 45
§ 2. Рух тіла навколо нерухомої точки 49
§ 3. Рух вільного твердого тіла 51

Розділ IV. Основні види руху твердого тіла (аналітична теорія)

§ 1. Число ступенів вільності руху 52
§ 2. Рух тіла, який паралельний нерухомій площині (плоский рух) . . 53
§ 3. Рух тіла навколо нерухомої точки 59
§ 4. Рух вільного твердого тіла 65

Розділ V. **Кінематика відносного руху точки**

Стор.

§ 1. Теорема про додавання швидкостей 67
§ 2. Теорема Коріоліса про додавання прискорень. Фізичний смисл поворотного прискорення 69

Розділ VI. **Синтез рухів**

§ 1. Складний рух твердого тіла 73

Частина друга

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Розділ I. **Класичний метод побудови динаміки Ньютона. Деякі основні поняття динаміки. Закони Ньютона**

§ 1. Основні поняття динаміки в класичному трактуванні 81
§ 2. Закони динаміки (закони Ньютона) 83
§ 3. Маса 86

Розділ II. **Фізичний зміст деяких основних понять і законів ньютонівської механіки**

§ 1. Інерціальна система відліку. Закон інерції і принцип відносності Галілея 89
§ 2. Міра руху 92
§ 3. Фізичний зміст законів Ньютона 95
§ 4. Боротьба в механіці проти ідеалістичних перекручень змісту законів Ньютона 99

Розділ III. **Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки**

§ 1. Диференціальні рівняння руху матеріальної вільної точки 103
§ 2. Дві основні задачі динаміки точки 105
§ 3. Перші і другі інтеграли системи диференціальних рівнянь руху точки 105

Розділ IV. **Елементи теорії коливань матеріальної точки**

§ 1. Власні незатухаючі коливання матеріальної точки 108
§ 2. Власні затухаючі коливання матеріальної точки 111
§ 3. Коливання матеріальної точки при наявності зовнішньої збурюючої сили (вимушені коливання) 113

Розділ V. **Основні теореми динаміки матеріальної точки. Робота. Силове поле**

§ 1. Теорема про зміну кількості руху (імпульса) матеріальної точки . 119
§ 2. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки 120
§ 3. Обчислення роботи в деяких окремих випадках 122
§ 4. Силові поля 125
§ 5. Закон збереження механічної енергії при русі матеріальної точки в потенціальному силовому полі 130
§ 6. Теорема про зміну момента кількості руху матеріальної точки . . 133

Розділ VI. **Рух матеріальної точки в центральному силовому полі. Задача двох тіл**

Стор.

§ 1. Загальні закони руху матеріальної точки в центральному силовому полі 134
§ 2. Задача Кеплера — Ньютона 138
§ 3. Штучний супутник Землі 144
§ 4. Задача двох тіл 146

Розділ VII. **Динаміка невільної матеріальної точки**

§ 1. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки . . . 150
§ 2. Теорема про зміну кінетичної енергії невільної матеріальної точки. 153
§ 3. Принцип Германа — Ейлера — Даламбера 155

Розділ VIII. **Відносний рух матеріальної точки**

§ 1. Основне рівняння відносного руху 158
§ 2. Відносний спокій тіла поблизу поверхні Землі 160
§ 3. Вага тіла. Формула $p = mg$ 161
§ 4. Рівняння руху вільної матеріальної точки відносно Землі 164
§ 5. Відхилення вільно падаючого тіла на схід 164
§ 6. Маятник Фуко 166
§ 7. Про фізичну причину явищ, які обумовлені обертанням Землі . . . 169

Частина третя

ДИНАМІКА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ЕЛЕМЕНТИ СТАТИКИ

Розділ I. **Основні поняття динаміки системи. Елементи статики**

§ 1. Деякі основні поняття динаміки системи 172
§ 2. Закони рівноваги матеріальних систем 178
§ 3. Еквівалентні перетворення систем сил, прикладених до абсолютно твердого тіла 185

Розділ II. **Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок Основні теореми динаміки системи.**

§ 1. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок 193
§ 2. Основні теореми динаміки системи в абсолютному русі 194
§ 3. Основні теореми динаміки системи у відносному русі 208

Розділ III. **Елементи динаміки матеріальної точки змінної маси**

§ 1. Основне рівняння руху точки змінної маси (рівняння Мещерського) 211
§ 2. Перша задача Ціолковського 213
§ 3. Друга задача Ціолковського 215

Розділ IV. **Основні принципи і рівняння аналітичної динаміки**

§ 1. Принцип Германа — Ейлера — Даламбера. Принцип Даламбера—Лагранжа. Загальне рівняння механіки 216
§ 2. Рівняння Лагранжа першого роду 220
§ 3. Рівняння Лагранжа другого роду. Узагальнені сили. Узагальнені координати і узагальнені швидкості 222
§ 4. Кінетична енергія системи 234
§ 5. Інтеграл енергії 236
§ 6. Канонічні рівняння динаміки 237

Розділ V. **Варіаційні принципи динаміки. Рівняння Остроградського — Гамільтона — Якобі**

§ 1. Принцип стаціонарної дії Остроградського — Гамільтона для вільної матеріальної точки . . . 249
§ 2. Принцип стаціонарної дії Остроградського — Гамільтона для матеріальної системи . . . 256
§ 3. Принцип стаціонарної дії Ейлера — Лагранжа . . . 258
§ 4. Рівняння Остроградського — Гамільтона — Якобі . . . 266

Розділ VI. **Теорія малих коливань системи матеріальних точок**

§ 1. Вільні малі коливання системи матеріальних точок . . . 278
§ 2. Нормальні координати і головні коливання . . . 285
§ 3. Вимушені коливання матеріальної системи . . . 295
§ 4. Резонанс . . . 298

Розділ VII. **Елементи динаміки твердого тіла**

§ 1. Геометрія мас . . . 300
§ 2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі . . . 304
§ 3. Теорія фізичного маятника . . . 309
§ 4. Рух твердого тіла навколо нерухомої точки . . . 311
§ 5. Рух вільного твердого тіла . . . 320
§ 6. Елементарна теорія регулярної прецесії гіроскопа . . . 321
§ 7. Прямий центральний удар двох тіл . . . 335

Частина четверта

ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

§ 1. Застосування методів ньютонівської динаміки до вивчення неперервних матеріальних систем . . . 341
§ 2. До поняття про міру руху в механіці . . . 346

Література . . . 350
Іменний покажчик . . . 351
Предметний покажчик . . . 353

Григорий Алексеевич Бугаенко,
Курс теоретической механики
(на украинском языке).
Государственное учебно-педагогическое издательство
«Радянська школа»

Григорій Олексійович Бугаєнко.
Курс теоретичної механіки

Редактор *М. І. Бовда* Технічний редактор *Н. М. Горбунова*
Художн. редактор *В. Ф. Монжеран* Коректор *З. М. Рубінштейн*

Здано до набору 16/II-1959 р. Підписано до друку 19/IX-1959 р. Папір $60 \times 92^1/_{16}$.
Друк. арк. 22,5, видавн. арк. 23,3. Тираж 3.000. БФ 00123.
Державне учбово-педагогічне видавництво «Радянська школа».
Київ, Ново-Павлівська, 5. Видавн. № 10759.
Ціна без оправи 7 крб. Оправа 1 крб. 50 коп.

Надруковано з матриць Книжкової фабрики імені Фрунзе Головвидаву Міністерства культури УРСР. Харків, Донець-Захаржевська, 6/8, в друкарні «Комуніст» Головвидаву Міністерства культури УРСР. Харків, Пушкінська, 29. Зам. 434.

Май совість, як розуму не маєш.