Ніколай

Збірник задач

Задач

по сопротивлению материалов

Збірник задач

з опору матеріалів

ІІр 50 + 20

ПЕРЕДМОВА

Цього Збірника задач, проти першого видання його (1924 р.), значно доповнено та перероблено. Матеріял розташовано систематично (стосовно до курсу того-ж автора) та заново доповнено деякими відділами.

Найпростіші задачі постачено відповідями, решту-ж — розвязками, що показують процес розрахування; розвязки ці приведено в такій формі, що вони залишають матеріял для самостійної праці учня, який повинен уміти з'ясувати всі деталі даної розвязки. Деякі задачі мають характер прикладів, надто складних,— їх призначено не стільки для самостійного розвязування, скільки для розбору даного прикладу, що висвітлює прикладання теорії.

Крім задач, що їх розробив автор, у Збірникові дано декілька задач, запропонованих викладачем Одеського Політехнічного Інституту інж. С. Г. Зальцбергом, а також запозичені (з деякою переробкою) з існуючих збірників задач та підручників (проф. С. П. Тимошенка, П. К. Худякова, Н. А. Стожарова, W. Rebber-Hummel'я, Wittenbauer'a).

Б. Ніколаї

РОЗДІЛ I

РОЗТЯГ ТА СТИСК ПРЯМИХ СТРИЖНІВ (ПРУТІВ)

1. Гуків закон

$$\Delta l = \pm \frac{Pl}{E\,\omega};\quad p = \pm \frac{P}{\omega};\quad i = \frac{\Delta l}{l} = \frac{p}{E},$$

де:

l — довжина прямого стрижня (прута);

ω — площа його поперечного перерізу;

P — розтягаюча або стискаюча сила, що справлена по стрижневій осі;

Δl — приріст довжини стрижня ($\Delta l > 0$ при розтягові й $\Delta l < 0$ при стискові);

i — відносне видовження;

p — нормальне напруження по поперечному перерізові стрижня ($p > 0$ при розтягові й $p < 0$ при стискові);

E — модуль нормальної пружности.

---

1. Обчислити відносне (i) й абсолютне (Δl) видовження залізного прута, завдовжки 3 *м*, круглого поперечного перерізу діяметром 2 *см*, цей прут розтягається силою 4 *тон*.

Модуль $E = 2.10^6 \frac{кг}{см^2}$; межа пропорціональности $2000 \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. $i = 0{,}000636$; $\Delta l = 1{,}91$ *мм*.

2. Розвязати питання попередньої задачі при тих-же умовах, якщо тільки розтягаюча сила дорівнює 8 *тон*.

Розвязка. Нормальне напруження $p = \frac{8000}{\pi} \frac{кг}{см^2} > 2000 \frac{кг}{см^2}$; напруження більше за межу пропорціональности, і тому розрахункові формули прикласти не можна. Щоб розвязати питання, треба мати діяграму розтягу заліза по-за межею пропорціональности.

3. Щоб визначити модуля пружности E металу, розтягається зразок металу на взір прута й за допомогою особливих приладів міряється приріст видовження частини зразка між двома позначками, — видовження, що відповідає певному збільшенню розтягаючої сили. Обчисліть E в $\frac{кг}{см^2}$, якщо прямокутній переріз зразка має сторони 30 *мм* і 10 *мм*, первопочаткова довжина між позначками 200 *мм*, і збільшенню ван-таги на 1 *тон.* відповідає приріст згаданої довжини в 0,032 *мм*.

Відповідь. $E = 2083000 \frac{кг}{см^2}$.

4. Залізний дріт 10 *м* завдовжки, з площею поперечного перерізу 1 $мм^2$, висить вертикально; до долішнього кінця його можна навісити важка в 20 *кг*, при чому виявляється, що між важком та жорсткою підлогою залишається щілина в 6 *мм* (при ненапруженому дроті). Важок, розтягаючи дрота, опускатиметься. Треба з'ясувати, чи опуститься важок до підлоги, і якщо опуститься, то якого тиска буде він учиняти на підлогу.

Задано: $E = 2 . 10^6 \frac{кг}{см^2}$; межа пропорціональности $2000 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. При розтягові дроту на 6 *мм* маємо відносне видовження $i = 0{,}0006$; видовження це менше від видовження, що відповідає межі пропорціональности (0,001); тому можна прикласти розрахункові формули й обчислити величину сили, що конче потрібна для згаданого розтягу:

$$P = i . E . \omega = 0{,}0006 . 2 . 10^6 . 0{,}01\ кг = 12\ кг.$$

Вага важка більша за цю силу; отже, важок опуститься до підлоги. Дріт розтягнувсь на 6 *мм*, отже, його розтягає визначена раніше сила 12 *кг*; зайвина-ж ваги важка передається на підлогу, цеб-то відшукуваний тиск дорівнює 8 *кг*.

5. Кінці мідяного стрижня жорстко закріплено (вони нерухомі). Які напруження виникають, якщо температура стрижня знижується на 30° С?

Дано: $E = 10^6 \frac{кг}{см^2}$; межа пропорціональности $1400 \frac{кг}{см^2}$; сучинник (коефіцієнт) лінійного розширення міди 0,000016.

Розвязка. Якщо кінці були-б вільні, то відносне вкорочення стрижня дорівнювало-б $0{,}000016 . 30 = 0{,}00048$. Насправді, довжина зістається така-ж, як і раніше; отже, стрижень розтягається з таким-же відносним видовженням; це видовження менше за відповідну межу пропорціональности (0,0014); тому можна прикласти розрахункову формулу й обчислити відшукуване напруження:

$$p = E\,.\,i = 10^6\,.\,0{,}00048\frac{кг}{см^2} = 480\,\frac{кг}{см^2}.$$

Як бачимо, розвязка не залежить від розмірів стрижня.

6. З якою силою стискаються знютовані залізні аркуші нютою діяметру 2 *см*, якщо нютування скінчилося при температурі нюти 200° С і якщо припускати аркуші за нестискальні (рис. 1). Сучинник лінійного розширення нютового матеріялу (залізо) — 0,000012. Модуль $E = 2\,.\,10^6\,\frac{кг}{см^2}$, межа пропорціональности $2000\,\frac{кг}{см^2}$; температура середовища 15° С.

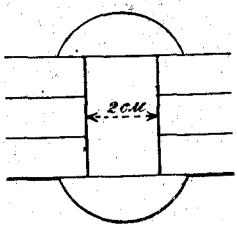


Рис. 1

Розвязка. Якщо вкоротшенню нюти не перешкоджали-б аркуші, то її відносне вкоротшення при охолодженні дорівнювало-б $0{,}000012\,.\,(200 - 15) = 0{,}00222$; при наявності аркушів нюта зазнає розтягу, при чому відносне видовження дорівнює ту-ж величину 0,00222; (припускаємо, що, як згадано, аркуші нестискальні); це видовження більше за відповідне межі пропорціональности, що дорівнює 0,001. Тому визначити відшукувану силу не можна, якщо не дано залежностей по-між напруженням та видовженням по-за межею пропорціональности.

Можна лише вважати, що ця сила P вдоволяє нерівність (при нестискальних аркушах):

$$P > \frac{\pi\,.\,2^2}{4}\cdot 2000\ кг \text{ або } P > 6283\ кг.$$

Насправді-ж матеріял аркушів при гарячому нютуванні сам нагрівається, і при охолодженні нюти аркуші стискаються, як через їхнє власне охолодження, як і через стиск силою, що її нюта розвиває; тому величину сили P тим більше не можливо облічити точно.

7. Два стрижні з одного й того-ж матеріялу рівної довжини l (при температурі $t°$) сполучено суглобами між собою і з опорними точками; віддалення між опорними точками в точності дорівнює $2l$ (рис. 2), так що стрижні містяться по прямій поземій лінії. 1) Визначте, на скільки опуститься середній суглоб, якщо до нього навісити вантажа P *кг* і якщо температура знизиться до $t_1°$. Площа перерізу кожного стрижня ω; сучинник лінійного розширення α. 2) Визначте ту-ж величину в випадку постійної температури.

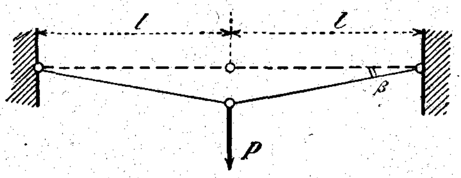


Рис. 2

Розвязка. При зниженні температури (припускаємо, що вантажа P ще не навішено) стрижні розтягаються реакціями опорних точок, при чому відносне видовження їхнє дорівнює відносне вкоротшення, що було-б, якщо стрижні були-б вільні, цеб-то це видовження дорівнює $\alpha(t°-t_1°)$; відповідне напруження дорівнює $E\alpha(t°-t_1°)$. При навішуванні вантажу середній суглоб опускається, і стрижні приймуть положення під кутом β до позему (горизонту); кут β дуже малий. Додаткове відносне видовження дорівнює $\frac{1}{\cos\beta}-1\cong\frac{\beta^2}{2}$ (при малому β). Повне напруження в стрижнях буде:

$$p=E\left[\alpha(t°-t_1°)+\frac{\beta^2}{2}\right].$$

З другого боку, з умов рівноваги вантажу P маємо, позначивши через S натуги в стрижнях: $P=2S\sin\beta$, звідки $S=\frac{P}{2\sin\beta}\cong\frac{P}{2\beta}$, і тому:

$$p=\frac{P}{2\beta\omega}.$$

Зрівнавши одержані значіння p, матимемо:

$$E\left[\alpha(t°-t_1°)+\frac{\beta^2}{2}\right]=\frac{P}{2\beta\omega}.$$

З цього рівнання (кубічного) знайдемо β, а тоді величину опускання середнього суглобу:

$$f=l\beta.$$

В окремому випадкові, коли температура не змінюється, маємо:

$$\beta=\sqrt[3]{\frac{P}{E\omega}},$$

$$f=l\sqrt[3]{\frac{P}{E\omega}}.$$

Всі формули справедливі, поки напруження $\frac{P}{2\beta\omega}$ не переважає межу пропорціональности.

8. Якого найбільшого вантажа можна навісити до середнього суглобу стрижнів попередньої задачі при умові, що напруження в них не переважували межу пропорціональности $1800\ \frac{кг}{см^2}$, якщо $\omega = 2\ см^2$; $\alpha = 0{,}000012$; $t^\circ - t_1^\circ - 20^\circ$; $E = 2 . 10^6 \frac{кг}{см^2}$. Розвязати те-ж питання у випадку $t^\circ = t_1^\circ$.

Розвязка. Припустивши $\frac{P}{2\beta\omega} = 1800\ \frac{кг}{см^2}$, маємо (див. стор. 8):

$$2 . 10^6 \left[0{,}000012 . 20 + \frac{\beta^2}{2}\right] = 1800,$$

звідки:

$$\beta = 0{,}0363;$$

отже:

$$P = 2 . 0{,}0363 . 2 . 1800\ кг = 261{,}4\ кг,$$

у випадку $t^\circ = t_1^\circ$ одержимо:

$$P = 305{,}5\ кг.$$

9. Призматичного бруска AB навішено на трьох дротах, симетрично розташованих відносно середини бруска (рис. 3). Відшукайте натяг дротів S_1, S_2, S_3, якщо вони завдовжки однакові, площі перерізів ω_1, ω_2, ω_3 відносяться, як 1 : 2 : 3; середній дріт залізний $\left(E_з = 2 . 10^6 \frac{кг}{см^2}\right)$, а крайні — мідяні $\left(E_м = 10^6 \frac{кг}{см^2}\right)$. Вага бруска Q.

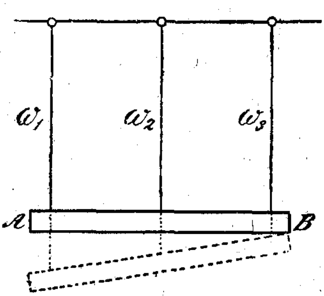


Рис. 3

Розвязка. Маємо рівнання (див. рис. 3):

$$S_1 + S_2 + S_3 = Q; \quad S_1 = S_3; \quad \frac{S_1 l}{E_м . 1} + \frac{S_3 . l.}{E_м . 3} = 2\,\frac{S_2 . l}{E_з . 2},$$

звідки, взявши на увагу, що $\frac{E_з}{E_м} = 2$, одержимо:

$$S_1 = S_3 = \frac{3}{14} Q; \quad S_2 = \frac{4}{7} Q.$$

10. Затягуючи гайку залізного своreня (прогонича), ми стискаємо мідяну рурку (дудку), що своreня оточує (рис. 4). На який кут можна гайку обернути (почавши з положення ненапруженого стулу), при умові, щоб у своreні й рурці нормальні напруження не переважували межу пропорціональности?

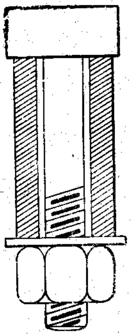


Рис. 4

Дано: площа перерізу своreня 2 $см^2$, перерізу рурки 3 $см^2$; первопочаткова довжина рурки 20 $см$; $E_з = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$; $E_м = 1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$; межа пропорціональности для заліза 1800 $\frac{кг}{см^2}$, для міди 1300 $\frac{кг}{см^2}$; при повному (на 360°) обороті гайки її переміщення по осі своreня дорівнює 1 $мм$.

Розвязка. Натуга, що своreня розтягає, стискає рурку; вважаючи на те, що $1800 \cdot 2 < 1300 \cdot 3$, робимо висновок, що при зашрубовуванні раніше буде осягнено межу пропорціональности для своreня. При цьому видовження своreня дорівнюватиме $\frac{200 \cdot 1800}{2 \cdot 10^6}$ $мм =$ $= 0{,}18$ $мм$, а стиск рурки $0{,}18 \cdot \frac{2\,см}{3\,см} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} = 0{,}24$ $мм$. Гайка може переміститися на $0{,}18 + 0{,}24$ $мм = 0{,}42$ $мм$, звідки знайдемо кут звороту, що дорівнює:

$$0{,}42 \cdot 360°.$$

11. Яке напруження виникне в своreні й рурці попередньої задачі при звороті гайки на $\frac{1}{4}$ обороту, якщо площа перерізу рурки дорівнює 5 $см^2$, а решта умов задачі ті-ж, що й у задачі 10?

Розвязка. Якщо видовження своreня буде δ, то вкоротшення рурки, згідно з міркуваннями попередньої задачі буде:

$$\delta \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2 \cdot 10^6}{1 \cdot 10^6} = \frac{4}{5}\delta;$$

з рівнання:

$$\delta + \frac{4}{5}\delta = \frac{1}{4}\,мм$$

маємо:

$$\delta = \frac{5}{36} \text{ мм.}$$

Відносне видовження свореня:

$$\frac{5}{36 \,.\, 200} = \frac{1}{1440}$$

відшукуване напруження в своренi:

$$\frac{2 \,.\, 10^6}{1440} \frac{кг}{см^2} = 1389 \frac{кг}{см^2},$$

а в рурцi: $-1389 \cdot \frac{2}{5} = -556 \frac{кг}{см^2}$.

12. Зашрубувавши гайку свореня (див. попередню задачу), ми викликали в своренi розтягаюче напруження $1389 \frac{кг}{см^2}$, а в рурцi, що його оточує — стискаюче напруження $-556 \frac{кг}{см^2}$. Захопивши кiнцi стрижня (його головку й гайку), ще розтягатимемо свореня натугою в 1000 *кг*. На скiльки змiняться напруження свореня й рурки при такому розтяговi?

Розвязка. При такому розтяговi сворiнь буде ще розтягатись, а стиск рурки вiдповiдно меншатиме. Припустiм, що по-мiж гайкою та руркою щiлини все-ж не появиться (цеб-то рурка зiстанеться стиснута). Тодi, очевидно, додатковi видовження свореня та рурки будуть однаковi. Позначмо це додаткове вiдносне видовження свореня, що його спричинив згаданий розтяг, через i. Тодi розтягаюче напруження свореня збiльшиться на $2 \,.\, 10^6 \,.\, i \frac{кг}{см^2}$, а стискаюче напруження рурки зменшиться (по абсолютнiй величинi) на $10^6 \,.\, i \frac{кг}{см^2}$. Помноживши на вiдповiднi площi поперечних перерiзiв ($2 \, см^2$ i $5 \, см^2$), одержимо, що сила, яка свореня розтягає, збiльшилася на $4 \,.\, 10^6 \,.\, i$ *кг*, а сила, що рурку стискає, зменшилася на $5 \,.\, 10^6 \,.\, i$ *кг*.

З другого боку, сила, що розтягає свореня, збiльшилася на 1000 *кг* (нова вантага), при чому, однак, зменшилася реакцiя рурки, що розтягає свореня (ця реакцiя, очевидно, дорiвнює силу, що стискає рурку); через те:

$$4 \,.\, 10^6 \,.\, i = 1000 - 5 \,.\, 10^6 \,.\, i.$$

звідки:

$$i = \frac{1}{9000}.$$

Відшукуване напруження свореня:

$$\left(1389 + \frac{2 \,.\, 10^6}{9000}\right) \frac{кг}{см^2} = 1611 \frac{кг}{см^2}$$

і рурки:

$$-\left(556 - \frac{10^6}{9000}\right) \frac{кг}{см^2} = -445 \frac{кг}{см^2};$$

як видко, рурка зісталаса стиснута, цеб-то зроблене раніше припущення ствердилось.

---

2. Розрахунок тривалости

Формула тривалости:

$$\frac{P}{\omega} \leqslant R,$$

де R — допускальне напруження.

Формула Вейравхова:

$$R' = \frac{2}{3} R \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\min p}{\max p}\right),$$

де:

R' — допускальне напруження при змінному навантаженні;

R — допускальне напруження при постійному навантаженні, $\min p$ і $\max p$ — відповідні межі напружень при змінному навантаженні.

---

13. Яке навантаження можна допустити на залізний дріт діяметру 4 *мм* (на розтяг), якщо допускальне напруження дорівнює 1200 $\frac{кг}{см^2}$?

Відповідь. 150 *кг* (заокруглено до найближчого меншого цілого числа).

14. Покришку парового циліндра, що його внутрішній діяметр дорівнює 600 *мм*, притягнено до циліндра 16 свореням. Який повинен бути діяметр своренів, якщо тиск пари згідно з тискоміром (манометром) у циліндрі (за лишкою знадвірнього тиску) 4 атмосфери $\left(\sim 4 \frac{кг}{см^2}\right)$ і допускальне напруження для сворених дорівнює 300 $\frac{кг}{см^2}$ (цю низьку норму взято, щоб забезпечити густоту сполучення)?

Відповідь. Розрахунок дає: 17,3 *мм*; з таблиці для системи Вітвортової[1]) добираємо найближчого більшого діяметра в нарізі: 18,61 *мм*; з тієї-ж таблиці одержимо знадвірнього діяметра: 22,22 *мм.*

15. Визначте діяметри двох сворених, що стягують головку гінка парової машини подвійного ходу (рис. 5), якщо найбільші натуги, що їх гонок передає, дорівнюють 9000 *кг* (при прямому та зворотному перебігові толока), а допускальне напруження при розтягові сворених від постійного навантаження призначено в 900 $\frac{кг}{см^2}$.

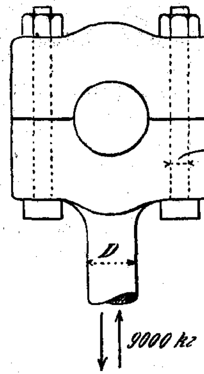


Рис. 5

Розвязка. Сворені зазнають змінного навантаження: сила, що кожного свореня розтягає, зміняється при кожному обороті машини від 0 до 4500 *кг*, відношення $\frac{\min p}{\max p}$ дорівнює 0. За формулою Вейравховою, допускальне напруження:

$$R' = \frac{2}{3} \cdot 900 \frac{кг}{см^2} = 600 \frac{кг}{см^2}.$$

Далі, знаходимо:

$$d = 31 \text{ мм (в нарізі)}.$$

16. Стрижень зазнаватиме змінного навантаження, а саме розтягу силою, що зміняється від P до $0{,}4\,P$. Визначте допускальне напруження R' при такому змінному навантаженні, якщо задано допускальне напруження R для випадку розтягу постійним навантаженням.

Відповідь. $R' = 0{,}8\,R$.

17. Розвязати питання попередньої задачі, якщо навантаження зміняється від розтягу силою P до стиску силою $0{,}2\,P$.

Відповідь. $R' = 0{,}6\,R$.

18. Залізо-бетонові стовпи квадратового перерізу заввишки 3 *м* підтримують підлогу першого поверху пакгавза;

[1]) Див. Hütte. 1926, т. I, стор. 866.

віддалення між стовпами показано на рисункові 6; вага одного квадратового метра підлоги з навантаженням на нього — 1200 *кг*. Визначте виміри поперечного перерізу стовпів якщо допускальне напруження стиску бетона 20 $\frac{кг}{см^2}$, заліза 750 $\frac{кг}{см^2}$ і площа перерізу залізної арматури повинна становити 3% площі перерізу цілого стовпа. Модуль пружности для заліза $E_1 = 2100000 \frac{кг}{см^2}$, для бетону $E_2 = 140000 \frac{кг}{см^2}$. (при стискові). Власну вагу стовпа знехтувати.

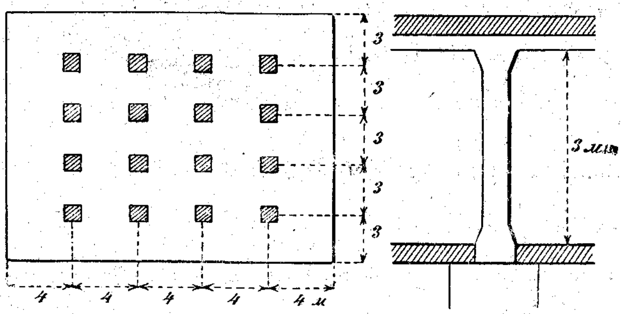


Рис. 6

Розвязка. Навантаження на кожний стовп дорівнює 1200.3.4 *кг* = = 14400 *кг*. При стискові стовпа, відносний стиск бетону й залізних стрижнів буде однаковий; через те, позначаючи напруження заліза p_1 і бетону p_2, маємо:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{E_1}{E_2} = 15,$$

або

$$p_1 = 15\ p_2;$$

якщо $p_2 = 20 \frac{кг}{см^2}$, то $p_1 = 300 \frac{кг}{см^2} < 750 \frac{кг}{см^2}$. Звідси видко, що виміри стовпа треба визначати за допускальним напруженням бетону, залізо-ж не буде сповна використано. Якщо площу перерізу цілого стовпа позначимо ω $см^2$, то матимемо:

$$0{,}97 \cdot \omega \cdot 20 + 0{,}03 \cdot \omega \cdot 15 \cdot 20 = 14400;$$

звідки:

$$\omega = 507 \; см^2,$$

і товщина стовпа дорівнює $\sqrt{507}$ $см = 22{,}5$ $см$. Площа залізної арматури $507 \,.\, 0{,}03 = 15{,}21$ $см^2$.

19. Для того, щоб тимчасово збільшити допускальне навантаження на залізо-бетоновий стовп попередньої задачі (зад. 18), припускається поряд із кожним стовпом поставити й щільно заклинувати по дві дерев'яні (соснові) підпорі (рис. 7) із бервен діяметру 5 вершк. $= 22{,}2$ $см$. Підпори буде поставлено тоді, коли пакгавза не буде заважено й коли навантаження на кожен стовп (від ваги тільки підлоги) дорівнюватиме 3600 $кг$. Визначте, на скільки можна буде збільшити навантаження при тім-же допускальнім напруженні бетону $\left(20 \frac{кг}{см^2}\right)$, якщо допускальне напруження підпори дорівнює $40 \frac{кг}{см^2}$, модуль пружности сосни при стисканні вздовж волокон $E_3 = 100000 \frac{кг}{см^2}$.

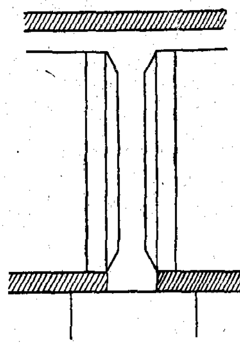


Рис. 7

Розвязка. При заклинуванні підпор напруження бетону в стовпі дорівнюватиме $20 \cdot \frac{3600}{14000} \frac{кг}{см^2} = 5 \frac{кг}{см^2}$. При дальшому навантаженні стовпа відносний стиск стовпа та підпор буде однаковий; тому, позначаючи через p_3 напруження підпори, матимемо:

$$\frac{p_3}{p_2 - 5} = \frac{E_3}{E_2} = \frac{100000}{140000},$$

звідки:

$$p_3 = (0{,}714\, p_2 - 3{,}57) \frac{кг}{см^2}.$$

Коли p_2 дорівнюватиме $20 \frac{кг}{см^2}$, p_3 дорівнюватиме $10{,}71 \frac{кг}{см^2}$. Площа перерізу кожної підпори $\frac{\pi \,.\, 22{,}2^2}{4}$ $см^2 = 387$ $см^2$. Збільшення навантаження стовпа над зазначене в задачі 18, цеб-то над 14400 $кг$, можливе на

$$2 \,.\, 387 \,.\, 10{,}71 \; кг = 8289 \; кг.$$

Справжнє напруження дерев'яних підпор становить лише 27% допускального.

20. Вантажа P треба навісити на двох тяглах (тяговинах) AC і BC (рис. 8), однакових завдовжки, сполучених у точці C суглобом (A і B — опорні суглоби). Визначте довжину l стрижнів і площу їхнього поперечного перерізу ω, якщо задано: віддалення L між точками навісок (підвішання), допускальне напруження R, і, якщо потрібно, щоб витрата матеріялу (обсяг стрижнів) була найменша можлива.

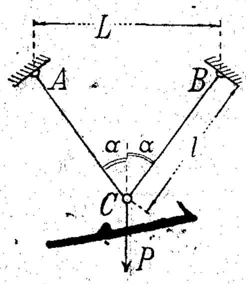


Рис. 8

Розвязка. За рис. 8: $l=\dfrac{L}{2\sin\alpha}$; натуга, що кожного стрижня розтягає (розкладаємо P в напрямах стрижнів):

$$S=\frac{P}{\cos\alpha},$$

через те

$$\omega=\frac{P}{2R\cos\alpha}.$$

Обсяг одного стрижня:

$$\omega\,.\,l=\frac{PL}{4R\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{PL}{2R\sin2\alpha}.$$

Найменший можливий обсяг буде, коли $\sin2\alpha=1$, або $\alpha=45^\circ$.

Остаточно:

$$l=\frac{L}{\sqrt{2}};\ \ \omega=\frac{P}{R\sqrt{2}}.$$

21. Поземого бруса AB прикріплено до опорної стіни суглобом A, і підтримується його тяглом CD (рис. 9). Брус несе вантагу P. Задано: положення суглобів A й C (цеб-то віддалення h), допускальне напруження (R) при розтягові тягла. Визначте положення суглобу D так, щоб обсяг тягла CD був найменший можливий.

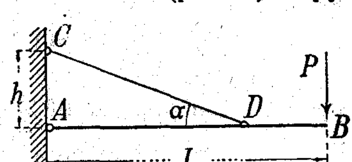


Рис. 9

Розвязка. При позначеннях за рис. 9 маємо:

довжина тягла $l=\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Натугу, що розтягає тягло, знайдемо з умови, що сума моментів сил, прикладених до бруса AB, відносно точки A, дорівнює 0 (брус перебуває в стані рівноваги); одержимо цю натугу:

$$S = \frac{PL}{h \cos \alpha},$$

через те площа поперечного перерізу тягла:

$$\omega = \frac{S}{R} = \frac{P . L}{Rh \cos \alpha}.$$

Обсяг тягла:

$$\omega . l = \frac{PLh}{Rh \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{2 PL}{R \sin 2 \alpha}.$$

Найменший обсяг буде при $\sin 2\alpha = 1$ або при $\alpha = 45°$; инакше кажучи, мусить бути:

$$AD = \text{[illegible]}$$

Найменший обсяг дорівнює $\frac{2PL}{R}$; як бачимо, цей обсяг не залежить від віддалення між суглобами A й C (не залежить від h, див. рис. 9); звідси виходить, що при допускальному напруженні обсяг тягол, що нахилені до AB на кут 45°, можна зробити один і той-же, хоч-би там де містився суглоб C, і обсяг цей буде взагалі найменший можливий.

22. Визначте найменшу можливу площу поперечного перерізу тягла CD (рис. 9) при умовах попередньої задачі (дано: положення суглобів A й C й допускальне напруження R).

Розвязка. Найменша площа буде при умові найменшої розтягаючої натуги; ця остання дорівнює (див. розвязку задачі 21):

$$S = \frac{PL}{h \cos \alpha}.$$

Ця натуга буде найменша при найменшій можливій величині кута α; звідси виходить, що суглоба D треба помістити в точці B (на кінці бруса); тоді матимемо: $\frac{L}{h} = \operatorname{ctg} \alpha$ та найменшу можливу натугу:

$$S = \frac{PL}{h \cos \alpha} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{P\sqrt{L^2 + h^2}}{h}.$$

Відшукувана найменша площа перерізу тягла:

$$\omega=\frac{P\sqrt{L^2+h^2}}{Rh}.$$

23. Розвязуючи задачу 15, припускалося, що сворені зовсім не напружені тоді, коли гонок стиснений або коли машина не робить. Насправді сворені мусять бути стягнені гайками за-для щільности сполуки, і в них виникають розтягаючі напруження перед тим, як почалася робота машини. Оцініть вплив цього первопочаткового натягу (з напруженням p) на напруження в своренях, коли вони розтягаються силою P, що її передає гонок; площу перерізу кожного з двох сворені́в позначмо ω. Розвяжіть питання в двох припущеннях: 1) вважаючи матеріяла головки гінкової за абсолютно твердий; 2) вважаючи його за пружний.

Розвязка. Коли машина спочиває, то натяг сворені́в зрівноважується обопільним натисканням половинок гінкової головки.

Розберім питання в двох випадках:

$$\text{коли } p<\frac{P}{2\omega} \ \text{ і } \ p>\frac{P}{2\omega}.$$

I. Якщо $p<\frac{P}{2\omega}$, то при розтягові гінка силою P сворені мусять одержати додаткове видовження; при цьому:

1) якщо припустити, що матеріял головки абсолютно твердий, то при цьому видовженні появиться щілина між обома половинками головки; обопільного натискання більше не буде, і натяги сворені́в повинні будуть зрівноважити лише силу P; в цьому разі напруження в них при роботі машини буде $\frac{P}{2\omega}$, цеб-то первопочатковий натяг аніяк на це напруження не діє;

2) якщо матеріял головки пружний, то щілина появиться лише тоді, коли додаткове видовження сворені́в зробиться більше за первопочатковий пружний стиск головки; якщо останній становить $\frac{1}{n}$ частину первопочаткового видовження сворені́в (тому що головка масивніша за сворені), цеб-то дорівнює $\frac{pl}{En}$, де l — довжина своріня, то згадана щілина появиться, коли $\frac{l}{E}\left(\frac{P}{2\omega}-p\right)>\frac{pl}{En}$; звідси

робимо висновок, що коли $p < \frac{P}{2\omega} \cdot \frac{n}{1+n}$, то напруження своренів при роботі машини буде, як і раніше, $\frac{P}{2\omega}$.

Якщо $p > \frac{P}{2\omega} \cdot \frac{n}{1+n}$, то при розтягові гінка силою P напруження p_1 в своренях визначиться з ось яких міркувань: додаткове видовження своренів дорівнює $\frac{l}{E}(p_1 - p)$; пружне, що зістається, стиснення головки дорівнюється різниці між первопочатковим стиском головки та додатковим видовженням своренів, цеб-то дорівнює $\frac{l}{E}\left(\frac{p}{n} - p_1 + p\right)$; при такому стискові обопільне надавлювання половинок головки може зрівноважити натяг своренів з напруженням [1]):

$p \cdot \frac{\frac{p}{n} - p_1 + p}{\frac{p}{n}} = (1+n)p - np_1$; величина цього надавлювання дорівнює $2\omega\,[(1+n)p - np_1]$; натяг-же з напруженням p_1 зрівноважується як цим давленням, як і силою P; через те

$$2\omega\,[(1+n)p - np_1] + P = 2\omega p_1,$$

звідки:

$$p_1 = p + \frac{P}{2\omega} \cdot \frac{1}{1+n};$$

ця величина буде більша за $\frac{P}{2\omega}\left(\text{з умовою } p > \frac{P}{2\omega} \cdot \frac{n}{1+n}\right)$, а також більша й за первопочаткове напруження p.

II. Якщо $p > \frac{P}{2\omega}$, то при абсолютно твердому матеріялі гінкової головки, напруження в своренях при наявності сили P залишатимуться рівні p; і дійсно, легко переконатися, що тепер згадана раніше щілина утворитися не може, а якщо довжина своренів не зміняється, то й напруження їхнє зістається таке-ж саме; якщо-ж матеріял пружний, то залишають свою силу згадані раніше міркування, цеб-то при наявності сили P напруження в своренях дорівнює $p + \frac{P}{2\omega} \cdot \frac{1}{1+n}$.

24. Користуючися з висновків попередньої задачі (23), перевірте напруження своренів, що їхні виміри знайдено

[1]) Обопільне надавлювання пропорціональне до пружного стиску головки; первопочаткове надавлювання зрівноважує натяг своренів з напруженням p.

було в задачі 15, і визначте допускальні напруження, якщо первопочаткове напруження вже дорівнювало 500 $\frac{кг}{см^2}$, а сучинник $n=3$.

Розвязка. Згідно з даними задачі 15 маємо:

$$\frac{P}{2\omega}=600\ \frac{кг}{см^2}\cdot$$

Далі, маємо:

$$500\ \frac{кг}{см^2}>600\ \frac{кг}{см^2}\cdot\frac{3}{1+3}\cdot$$

Через те при роботі машини найбільше напруження в своренях дорівнює: $500+\frac{600}{4}\frac{кг}{см^2}=650\ \frac{кг}{см^2}\cdot$ Напруження в своренях хитаються в межах від 500 до 650 $\frac{кг}{см^2}\cdot$ За формулою Вейравховою, прийнявши дані задачі 15, допускальне напруження сворен́ів визначається рівним:

$$\frac{2}{3}\cdot 900\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{500}{650}\right)\frac{кг}{см^2}=831\ \frac{кг}{см^2}\cdot$$

Як бачимо, найбільше нормальне напруження менше, ніж допускальне $(650<831)$.

При повному розрахунку сворен́ів конче потрібно ще брати на увагу вплив скруту підчас зашрубовування гайки через тертя гайки по ґвинтовій нарізі; в цій задачі береться на увагу лише розрахунок нормальних напружень.

---

3. Облік власної ваги прямовисних стрижнів

а) При навантаженні за схемою рис. 10, нормальне напруження (p) в перерізові на віддаленні x від навантаженого кінця визначається формулою:

$$p=\frac{P}{\omega}+\gamma x,$$

де ω є площа поперечного перерізу бруса; γ — вага одиниці обсягу матеріялу.

Умови тривалости:

$$\frac{P}{\omega}+\gamma l\leqslant R,$$

де R є допускальне напруження.

$$\min \omega = \frac{P}{R - \gamma l}.$$

Видовження призматичного стрижня від власної ваги:

$$\Delta l = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Ql}{2E\omega},$$

де Q є вага цілого стрижня.

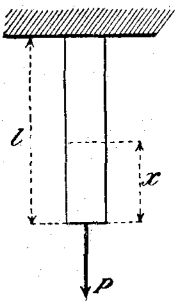


Рис. 10

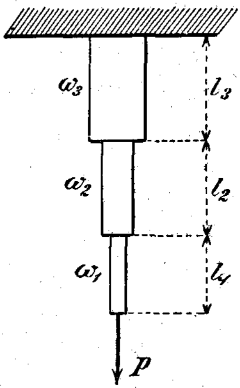


Рис. 11

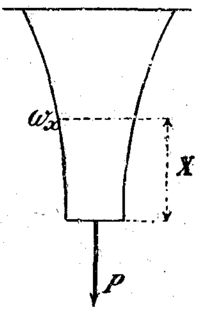


Рис. 12

b) Площі поперечних перерізів щаблястого (східчастого) бруса постійного опору (постійної видержности), навантаженого за схемою рис. 11, визначається формулами:

$$\omega_1 = \frac{P}{R - \gamma l_1},$$

$$\omega_2 = \frac{PR}{(R - \gamma l_1)(R - \gamma l_2)},$$

$$\omega_n = \frac{PR^{n-1}}{(R - \gamma l_1)(R - \gamma l_2)\dots(R - \gamma l_n)}.$$

c) Площі поперечних перерізів бруса постійного (в усіх перерізах) опору, навантаженого за схемою рис. 12, визначається формулою:

$$\omega_x = \frac{P}{R} e^{\frac{\gamma x}{R}},$$

де ω_x є площа перерізу на віддаленні x від навантаженого кінця.

25. Залізне закопове билò (штанга) завдовжки 300 *м* мусить витримувати вантаж 10 тон, що навішується до його долішнього кінця. Визначте площу поперечного перерізу била при допускальнім напруженні 700 $\frac{кг}{см^2}$, якщо било має постійний по всій довжині переріз. Питома вага заліза $=7{,}8$.

Відповідь. 21,5 $см^2$.

26. Обчисліть повне видовження била попередньої задачі, — видовження, що його спричиняє як вантаж 10 тон, як і його (била) власна вага. $E = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. Видовження, що його спричиняє вантаж — 6,98 *см*, а що спричиняє власна вага — 1,76 *см*; повне видовження — 8,74 *см*.

27. Закопове било задачі 25 проєктується, як щаблясте, що складається з трьох дільниць по 100 *м* кожна. Визначте площі поперечних перерізів кожної дільниці. Решту умов див. в задачі 25.

Відповідь. 16,1 $см^2$; 18,1 $см^2$; 20,4 $см^2$.

28. Обчисліть повне видовження щаблястого била задачі 27, що його спричиняє як вантаж (10 тон), як і його (била) власна вага.

Розвязка. Можна довести, що коли било спроєктовано, як щаблясте било постійного опору (постійної видержности), і якщо довжини всіх його дільниць однакові, то повні видовження кожної дільниці (від вантаги та власної ваги) дорівнюватимуть одне одного; довести цю тезу читач може й сам. Обчислюємо, далі, повне видовження долішньої дільниці та потроюємо одержану величину.

Відшукуване повне видовження цілого била дорівнює 9,91 *см*.

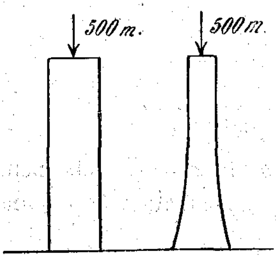


Рис. 13

29. Кам'яну підпору заввишки 15 *м* (рис. 13) навантажено тиском у 500 тон, що його прикладено до горішнього кінця; визначте площу долішньої основи підпори для випадків: 1) призматичної підпори; 2) підпори у формі брусів постійного опору. Допустиме напруження стиску кам'яного мурування 7 $\frac{кг}{см^2}$. Питома вага мурування — 2,6.

Відповідь. 1) 16,13 $м^2$;

$$2)\ \frac{500}{70} e^{\frac{2,6\,.\,15}{70}}\ м^2 = 12,47\ м^2.$$

30. Порівняйте обсяг кам'яного мурування обох варіянтів підпори задачі 29.

Розвязка. В 1-ім випадкові обсяг дорівнює $15 \,.\, 16,12\ м^3 = 241,95\ м^3$. В 2-ім випадкові тиск, що його утворює підпора на її основу при наявності навантаження, дорівнює $70 . 12,47$ тони $= 872,9$ тони, отже, власна вага підпори дорівнює $872,9 - 500 = 372,9$ тони, а її обсяг дорівнює $\frac{372,9}{2,6}\ м^3 = 143,42\ м^3$.

31. Дано бруса постійного опору розтягові; цього бруса навантажено за схемою рис. 12; в усіх перерізах при навантаженні P напруження дорівнюють допускальне R. Скласти формулу для обчислення повного видовження бруса, що його спричиняє так навантаження P, як і власна вага; первопочаткова довжина бруса (в ненапруженому стані) дорівнює l.

Відповідь. $\Delta l = \frac{Rl}{E}$.

32. Призматичного залізного стрижня навішено горішнім кінцем, і він розтягається лише своєю вагою. Яка може бути найбільша довжина такого стрижня, якщо допускальне напруження розтягу $1000\ \frac{кг}{см^2}$, а питома вага заліза $= 7,8$.

Відповідь. 1282 *м*.

33. Хеопсова піраміда заввишки 145 метрів. Визначте напруження на стиск в основі піраміди, якщо питома вага каменя дорівнює 2,5.

Розвязка. Позначивши площу основи через ω, матимемо величину ваги піраміди: $\frac{145 \,.\, \omega \,.\, 2,5}{3}$ тон, а відшукуване напруження:

$$\frac{145 \,.\, \omega \,.\, 2,5}{3\omega}\ \frac{тон.}{м^2} = 120,8\ \frac{тон.}{м^2} = 12,08\ \frac{кг}{см^2}.$$

Розвязка не залежить од величини ω.

34. Залізне било закопового смоку завдовжки 150 *м* має площу перерізу 3 $см^2$ (рис. 14). Опір толоку при перебігові толоку вниз дорівнює 50 кілограмів; а при перебігові вгору— 1000 *кг*. Визначте: 1) в якій частині довжини била напруження змінюють знак при роботі смоку; 2) в яких межах змінюються напруження в долішнім кінці била, в горішнім і в тім перерізові, що в нім одною з меж є нуль. Питома вага заліза $= 7{,}8$.

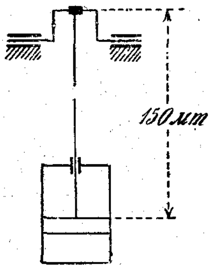


Рис. 14

Розвязка. 1) Напруження в перерізові на віддаленні x *см* від долішнього кінця дорівнює при русі вниз: $\left(0{,}0078 \, . \, x - \frac{50}{3}\right) \frac{кг}{см^2}$, а при русі вгору: $\left(0{,}0078 \, . \, x + \frac{1000}{3}\right) \frac{кг}{см^2}$; якщо $x < \frac{50}{3 \, . \, 0{,}0078}$ *см*, цеб-то $x < 21{,}37$ *м*, то при русі вниз напруження буде від'ємне (стискаюче); отже, на протязі $21{,}37$ *м* від долішнього кінця напруження змінюють знак; вище — напруження зістаються розтягаючі.

2) Межі напружень у долішньому кінці: $-16{,}67 \frac{кг}{см^2}$ і $+333{,}33 \frac{кг}{см^2}$; в горішньому кінці: $+100{,}33 \frac{кг}{см^2}$ і $+450{,}33 \frac{кг}{см^2}$; при $x = 21{,}37$ *м* межі: 0 і $+350 \frac{кг}{см^2}$. На протязі долішніх 20 метрів, де било при русі вниз перебуває в стисненім стані, конче потрібно вжити особливих приладів, що не дають змоги довгому тонкому стрижневі випинатися при стисканні.

---

4. Розтяг або стиск по двох чи трьох взаємно сторчових напрямах

$$i' = \frac{1}{E}\left[p' - \sigma\left(p'' + p'''\right)\right]; \quad i'' = \frac{1}{E}\left[p'' - \sigma\left(p' + p'''\right)\right];$$

$$i''' = \frac{1}{E}\left[p''' - \sigma\left(p' + p''\right)\right].$$

де:

i', i'', i''' — відносні видовження (в даній точці) по трьох взаємно сторчових напрямах;

p', p'', p''' — нормальні напруження по трьох взаємно сторчових площинках (у даній точці), що стосовно сторчові зі згаданими трьома напрямами;

σ — сучинник (коефіцієнт) Пуассонів;

E — модуль нормальної пружности.

Якщо $p'' = p''' = 0$, то маємо:

$$i'' = i''' = -\sigma \, i'$$

---

35. Стрижень із площею поперечного перерізу ω (в ненапруженому стані) розтягується в межах пропорціональности й одержує повздовжне відносне видовження i. Обчисліть площу його поперечного перерізу (ω_1) при такому розтягненому стані, якщо відомий сучинник Пуассонів σ.

Відповідь. $\omega_1 = \omega (1 - \sigma i)^2$.

36. Розвяжіть питання попередньої задачі, якщо стрижня розтягнено з відносним повздовжним видовженням i за межі пропорціональности.

Розвязка. Розрахункові формули, що їх на законі Гуковім засновано, втрачають свою силу. Досвідні вказівки на приблизну постійність обсягу стрижня при розтяганні дозволяють дати наближену розвязку: $\omega_1 = \dfrac{\omega}{1+i}$.

37. Кубик пружного матеріялу вставлено щільно між двох абсолютно твердих нерухомих дощок (рис. 15) і його стискається за допомогою гніту в 10 тон. Визначте тиск, що його кубик на кожну дошку утворює, якщо сучинник Пуассонів дорівнює $\frac{1}{4}$, і припускається, що напруження нижче від межі пропорціональности.

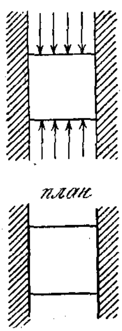


Рис. 15

Відповідь. 2,5 тони.

38. Розвяжіть попередню задачу для випадку, коли кубика вставлено в абсолютно тверду оболонку, що його зі всіх чотирьох бічних сторін обхоплює (рис. 16). Який тиск вчиняє кубик на кожну стінку оболонки при наявності тієї-ж стискаючої сили 10 тон.

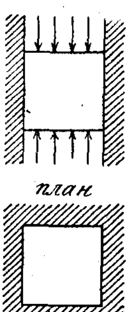


Рис. 16

Відповідь. 3,333 тони.

39. Мідяного кубика з рубами в 10 *см* завдовжки щільно вставлено в абсолютно тверду оболонку (за рис. 16). Визначте, з якою силою кубик тиснутиме на оболонку по кожній із чотирьох стін, що з оболонкою стикаються, якщо його температура підвищилася на 30° С. Для міди $E = 10^6 \frac{кг}{см^2}$, сучинник лінійного розширення $\alpha = 0{,}000016$; $\sigma = 0{,}34$.

Відповідь. 72727 *кг*.

40. Мідяного бруска A з прямокутнім поперечним перерізом (розміри перерізу a й b — див. рис. 17) вставлено щільно по-між двома сталевими дошками B, що їх звязують два залізні сворені. Брусок стискається в повздовжному напрямі силами P, через що його поперечний розмір a більшає, і сворені розтягаються. Визначте напруження в своренях, що його спричиняється, якщо дано (див. рис. 17):

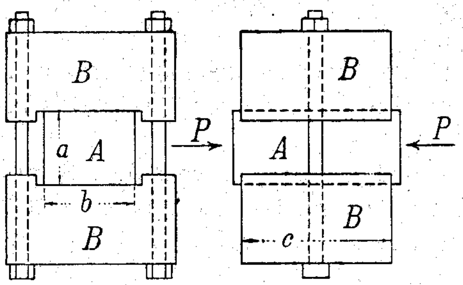


Рис. 17

$$a = 5 \text{ см}; \quad b = 6{,}5 \text{ см}$$

$$c = 10 \text{ см}; \quad l = 20 \text{ см};$$

довжина своreня (по-між головкою та гайкою); площа перерізу кожного своreня $\omega = 3 \text{ см}^2$; для заліза $E_з = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$; для міди $E_м = 10^6 \frac{кг}{см^2}$ і $\sigma = 0{,}34$; $P = 10000$ *кг.*

Розвязка. Позначмо відшукуване напруження сворeнів через p. Тоді абсолютне видовження залізних своренів:

$$\Delta l = \frac{pl}{E_з}.$$

Цю-ж величину, очевидно, дорівнює й збільшення Δa розміру a мідяного бруска (на вплив стиснення дощок B не звертаємо уваги). Відносне видовження мідяного бруска в напрямі розміру a одержимо за формулою:

$$i' = \frac{1}{E_м}[p' - \sigma(p'' + p''')],$$

де: $p' = -\frac{2p\omega}{bc}$ (напруження стиску, що його спричиняє натяг своренів; p — відшукуване напруження своренів);

$p'' = -\frac{P}{ab}$ (напруження стиску, що його спричиняють сили P);

$p''' = 0$ (напруження по повздовжних бічних стінах);

одержимо:

$$i' = \frac{1}{E_м}\left(-\frac{2p\omega}{bc} + \sigma\frac{P}{ab}\right),$$

$$\Delta a = i' \cdot a = \frac{a}{E_м}\left(-\frac{2p\omega}{bc} + \sigma\frac{P}{ab}\right).$$

Умову $\Delta l = \Delta a$ можна тепер написати так:

$$\frac{p_l}{E_з} = \frac{a}{E_м}\left(-\frac{2p\omega}{bc} + \sigma\frac{P}{ab}\right),$$

звідки відшукуване напруження в своренях:

$$p = \frac{\sigma P}{\frac{E_м}{E_з}\cdot lb + \frac{2\omega\,.\,a}{c}}.$$

Підставивши значіння літер, зазначені в завданні, одержимо:

$$p = \frac{0{,}34\,.\,10000}{\frac{20\,.\,6{,}5}{2} + \frac{2\,.\,3\,.\,5}{10}}\,\frac{кг}{см^2} = 50\,\frac{кг}{см^2}.$$

РОЗДІЛ II

ЗРІЗ

Розрахункові формули

Розраховуючи конструктивні частини, що зазнають лише зріз (сколювання), приймається з грубим наближенням, що дотичні напруження розподілено рівномірно по відповідному перерізові; тим-то дотичне напруження відшукується за формулою: $p_t = \frac{Q}{\omega}$, де Q є перетинаюча натуга, ω — площа перерізу, по якому ці напруження виникають.

Формула тривалости:

$$\frac{Q}{\omega} \leqslant R_t,$$

де R_t є допускальне дотичне напруження.

41. Розрахуйте розміри частин биндового ланцюга, що його зображено на рис. 18, якщо розтягаюча сила 30 тон, допускальне напруження на розтяг 500 $\frac{кг}{см^2}$, на зріз 400 $\frac{кг}{см^2}$ і на зім'яття 1000 $\frac{кг}{см^2}$ (по діяметральному перерізові свореня).

Розвязка. Своreня перетинається в 6 перерізах. Щоб сворінь був найменшого діяметру, конче потрібно, щоб перетинаючі (дотичні) напруження були в усіх перерізах однакові; матимемо:

$$6 \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot 400 = 30000;$$

звідки:

$$d = 4{,}0 \ см = 40 \ мм.$$

Вказане припущення що до перетинаючих напружень у своreні вимагає для свого здійснення, щоб натуги в усіх ланкових смугах були однакові, за винятком знадвірніх смуг ланок I; в останніх натуги мусять бути вдвічі менші, ніж у решті. (Щоб у цьому переконатися, треба розглянути умови рівноваги кожної окремої смуги); ця-ж остання умова вимагає, щоб площі перерізів усіх смуг були однакові, за винятком знадвірніх смуг I, що їхні перерізи мусять бути вдвічі менші (при однакових видовженнях натуги пропорціональні з площами). Товщину δ середніх смуг відшукаємо з умови:

$$d\,\delta\,.\,1000=\frac{30000}{3};$$

припускаючи $d=4$ *см*, одержимо:

$$\delta=2{,}5\ \textit{см}=25\ \textit{мм}.$$

Щоб визначити ширину смуги b, маємо:

$$b\,.\,\delta\,.\,500=\frac{30000}{3};$$

звідки:

$$b=8\ \textit{см}=80\ \textit{мм};$$

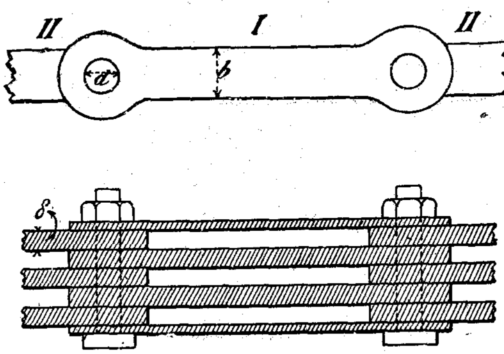


Рис. 18

заховуючи однакову ширину всіх смуг, одержимо товщиину знадвірніх смуг I, що дорівнює 12,5 *мм*.

42. Які найбільші перетинаючі (дотичні) напруження виникали-б у свореннях ланцюгових задачі 41, якщо зовнішні смуги ланок I були-б завтовшки однакові з рештою смуг?

Розвязка. При однакових видовженнях і однакових перерізах натуги, що кожну смугу ланки I розтягують, одна одну дорівнюють і тому рівні $\frac{30000}{4}$ *кг* $=7500$ *кг*. Ця натуга перетинає своreня по одному перерізові, і перетинаюче напруження при $d=4$ *см* дорівнюватиме:

$$\frac{7500}{\frac{\pi\cdot 4^2}{4}}\,\frac{кг}{см^2}\cong 600\,\frac{кг}{см^2}>400\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

Як бачимо, збільшення розмірів одних елементів конструкції може иноді спричинити перенапруження других елементів (напруження в своренi одержалося в $1\frac{1}{2}$ рази більше, ніж напруження згідно з умовами задачі 41).

43. Розрахуйте розміри конструкції закріплення фундаментового свореня (рис. 19), якщо задано внутрішнього діяметра нарізи свореня d, якщо допускальне напруження на перетинання льоника дорівнює $0{,}8\,R$, де R допускальне напруження на розтяг, і допускальне напруження на зім'яття дорівнює $2R$. Визначте всі розміри в залежності від d за умовою однакової тривалости всіх частин.

Розвязка. Маємо рівнання:

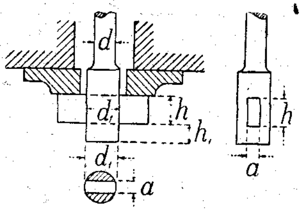


Рис. 19

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot R = \left(\frac{\pi d_1^2}{4} - a d_1\right)\cdot R,$$

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot R = a d_1 \,.\, 2R,$$

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot R = 2ah \,.\, 0{,}8\,R,$$

$$\frac{\pi d^2}{4}\cdot R = 2 d_1 h_1 \,.\, 0{,}8\,R.$$

З перших двох рівнань маємо:

$$d_1^2 = 1{,}5\,d^2,$$

або

$$d_1 = 1{,}225\,d,$$

відтак одержимо:

$$a = 0{,}32\,d,$$

$$h = 1{,}53\,d,$$

$$h_1 = 0{,}40\,d.$$

Вважаючи на те, що льоник зазнає певного вгину, тиск льоника на головку свореневу розподіляється фактично по довжині льоника неоднаково (сильніш у країв, ніж по середині); тим-то й сколюючі напруження по площинах сколювання головки $(d_1 h_1)$ розподіляються неоднаково, що спричиняє перенапруження проти розрахункових даних. Якщо, взагалі, такі перенапруження облічується величиною допускальних напружень (сучинником запасу), то в даному разі при незначності відношення $\frac{h_1}{d_1}$ можна вистерігатися таких великих перенапружень, що обачніше буде збільшити h_1 проти величини, одержаної від розрахунку. На практиці приймають $h_1 = d$.

44. Кроківну ногу зарубається в стягель за схемою рис. 20; ширина ноги й стягеля — 15 *см*. Визначте глибину зарубання (δ) й віддалення його від кінця стягеля (l), якщо позема складова давління ноги дорівнює 2750 *кг*, і допускальне напруження дерева прийнято — на зім'яття уздовж волокон 50 $\frac{кг}{см^2}$ і на сколювання уздовж волокон 10 $\frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. $\delta = 3{,}7$ *см* $\cong 4$ *см*; $l = 18{,}3$ *см* $\cong 19$ *см*.

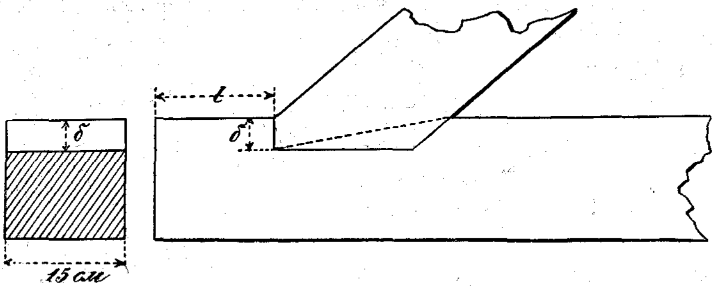


Рис. 20

45. Roківну ногу сполучено зі стягелем зарубанням із шпоником (шипом), що його показано крапками (точковано). Ширина ноги й стягеля 15 *см*. Ширину й висоту шпоника в перерізові *mm* показано на рис. 21. Визначте глибину зару-

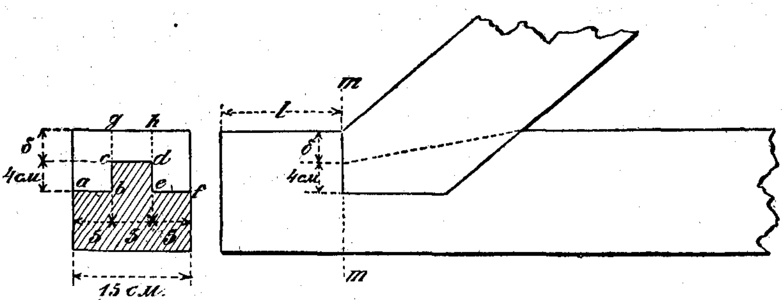


Рис. 21

бання δ й віддалення його l від кінця стягеля, якщо позема складова давління ноги дорівнює 2750 *кг* і допускальні напруження дерева прийнято: на розтяг 100 $\frac{кг}{см^2}$, на стиск 50 $\frac{кг}{см^2}$ і на сколювання уздовж волокон 10 $\frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Кінець стягеля сколюється по поверхні, що її переріз зображається лінією *abcdef*. Величина цієї поверхні:

$(5+4+5+4+5) \,.\, l$ *см*$^2 = 23\,l$ *см*^{2}. Маємо:

$$23l \,.\, 10 = 2750,$$

звідки:

$$l = 11{,}95 \text{ см} \cong 12 \text{ см}.$$

Перевірмо, чи не буде ймовірніше сколювання кінця стягеля по площині *abef*, що його супроводить розрив шпоника по перерізові *bcde*. Опір такому розтрощенню відноситься до опору сколюванню по *abcdef*, як:

$$\frac{15 \,.\, 12 \,.\, 10 + 5 \,.\, 4 \,.\, 100}{23 \,.\, 12 \,.\, 10} = 1{,}38;$$

як бачимо, розтрощення[1]) з розривом шпоника вимагає в 1,38 рази більшої натуги, ніж те, що при ньому вже може виникнути сколювання по *abcdef*; тому зроблений розрахунок довжини l є вірний.

Глибина зарубання визначається з рівнання:

$$(2 \,.\, 5 \,.\, 4 + 15 \,.\, \delta) \,.\, 50 = 2750,$$

звідки:

$$\delta = 1 \text{ см}.$$

При такій малій глибині зарубання треба простежити пильно, чи не виникне перенапруження матеріялу по деяких инших перерізах. Виділімо в думці ось який елемент кінця стягеля: переріз цього елементу є *cghd*; на цей елемент по кимакові (торцеві) утворюється тиск, що дорівнює $5 \,.\, 1 \,.\, 50 = 250$ *кг*; по долішній його поверхні в супротивному напрямі діє згідно з умовою дотична сила $5 \,.\, 12 \,.\, 10 = 600$ *кг*; для рівноваги елементу потрібно, щоб по площинах *cg* й *hd* діяли дотичні сили пружности, що їхні напруження можна відшукати з рівнання:

$$2 \,.\, 1 \,.\, 12 \,.\, p_t = 600 - 250,$$

звідки:

$$p_t = \frac{350}{24} \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} = 14{,}6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} > 10 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

Такий наслідок показує, що глибину δ треба збільшити; прийнявши $\delta = 2$ *см* (більш точне визначення цієї величини не має жадної рації при грубині та дешевині цілої конструкції), можна переконатися, що вказане перенапруження не матиме місця. Як бачимо,

[1]) Припускаємо, що допускальні напруження пропорціональні з відповідними розтрощуючими напруженнями.

величину кимака зарубання довелося зробити більшу, ніж це вимагалося величиною допускального напруження стиску.

46. Нютові отвори в залізних аркушах пробивається на особливому гніті (пресі), що його схему показано на рис. 22. Сталевий стрижень (гартованої стали) A продавлює аркуша, що його підтримує кільце B. Визначте: 1) з якою силою P треба натискати стрижень, щоб пробити діру діяметром 20 *мм* в арк. 8 *мм* завтовшки, якщо розтрощуюче напруження заліза при перетинанні дорівнює $3500 \frac{кг}{см^2}$?

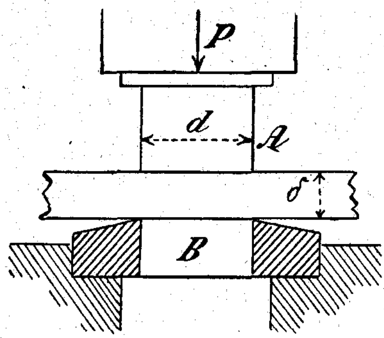


Рис. 22

2) яке мусить бути взаємне відношення по-між поперечником (діяметром) d стрижня й товщиною δ аркуша, щоб пробивання було взагалі можливе, якщо розтрощуюче напруження при стискові стали, що її вживається для стрижня, дорівнює $10000 \frac{кг}{см^2}$?

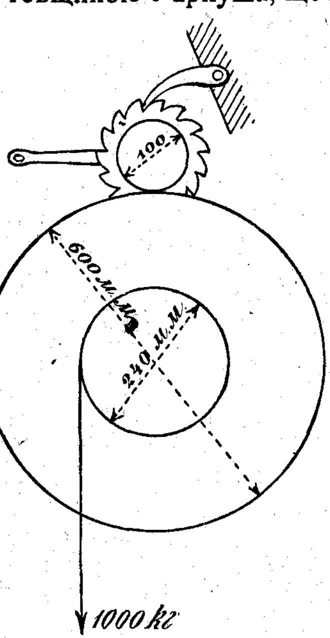


Рис. 23

Відповідь. 1) $P \cong 17600$ *кг*; 2) $10000 \frac{\pi d^2}{4} > 3500\ \pi\ d\ \delta$; звідки: $d > 1{,}4\delta$; в противному разі стрижень розтрощиться раніш, аніж буде пробито діру.

47. Корба катеринки, що вживається, щоб піднести вантаж в 1000 *кг*, і що її схему показано на рис. 23, має цуґове колесо (щоб не опускався вантаж при випусканні з рук корби). Визначте поперечник цуґового колеса d (рис. 24) за ось якими умовами: 1) колесо мусить мати 12 зубців, 2) відношення розступу (кроку) пальців t до ширини b колеса дорівнює 2, 3) допускальне напруження на зріз заліза (матеріял колеса) береться рівне 100 $\frac{кг}{см^2}$ (таку низьку норму взято тому, що при раптовім випусканні корби з рук зубець колеса може зазнати вдару).

Розвязка. Сила P, що тисне на зубець, дорівнює $1000\,кг \times \frac{240}{600} \cdot \frac{100}{d} = \frac{40000}{d}\,кг$, де d міряється в *мм*, або $P = \frac{4000}{d}\,кг$, де d в *см*. Умова тривалости зубця, що зрізується по площі, яка дорівнює bt[1]):

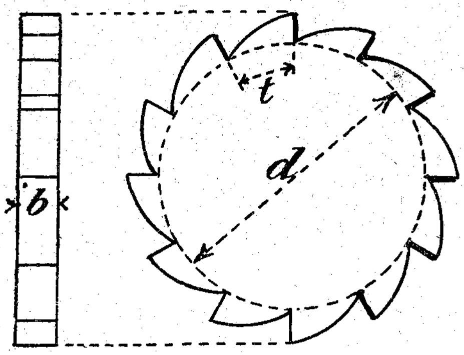


Рис. 24

$$P = bt \,.\, 100 = \frac{t^2}{2} \cdot 100,$$

або

$$\frac{4000}{d} = \frac{t^2}{2} \cdot 100.$$

З достатньою точністю можна припустити: $\pi d = 12t$ (замінивши дугу на довжину відповідної тятиви); звідки:

$$t = \frac{\pi d}{12};$$

підставивши це значіння t в одержане раніш рівнання, матимемо:

$$\frac{4000}{d} = \frac{\pi^2 d^2}{2 \,.\, 12^2} \cdot 100;$$

звідки:

$$d = \sqrt[3]{\frac{4000 \,.\, 2 \,.\, 12^2}{\pi^2 \,.\, 100}} = 10{,}53\ см \sim 106\ мм.$$

48. Два залізні аркуші завтовшки δ знютовано в напусток нютами, що їх розташовано в один ряд (рис. 25); аркуші зазнають розтягу в напрямі, сторчовому зі швом. Визначте найвигідніший з погляду тривалости поперечник нютовий d й віддалення між осями нютовими e, якщо допускальне напруження на зріз нют дорівнює $0{,}8\,R$, а на зім'яття по діяметральному перерізові нюти $2\,R$, де R є допускальне напруження на розрив аркушів.

[1]) Власне кажучи, ця площа трошки менша й залежить від форми зубця, але, взявши на увагу низьку норму допускального напруження, ми це облишаємо.

Розвязка. Легко переконатись, що відношення опору розривові аркуша, ослабленого отворами, до опору суцільного аркуша дорівнює $\frac{e-d}{e}\cdot$ Найменше ослаблення буде тоді, коли це відношення буде як-найбільше (це відношення зветься сучинник тривалости шва φ). Проте, не можна ні зменшувати d, ні збільшувати e по-над певні межі, бо в противному разі натуга, що приходиться на одну нюту й дорівнює $\delta\,(e-d)\,R$, може бути більша за допускальну на таку нюту [1]).

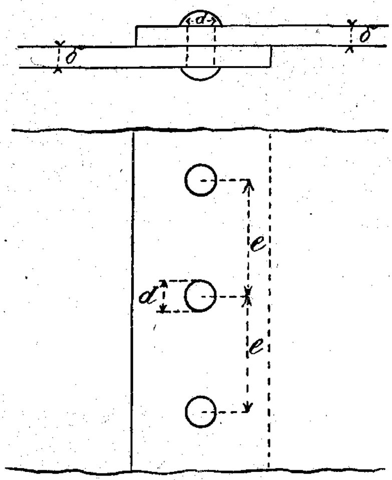


Рис. 25

Умови міцности нюти напишеться так:

$$\delta\,(e-d)\,R \leqslant \frac{\pi d^2}{4}\cdot 0{,}8\,R, \qquad (1)$$

і

$$\delta\,(e-d)\,R \leqslant \delta\,d\,2R. \qquad (2)$$

З другої умови маємо:

$$e \leqslant 3d;$$

найбільше значіння e дорівнює $3d$. При цьому значінні сучинник тривалости досягає найбільшого можливого значіння $\varphi = \frac{2}{3}\cdot$

Що до поперечника d, то його величину визначається першою умовою, що після підставлення $e = 3d$ дає:

$$d \leqslant \frac{\pi}{10}\,d,$$

або

$$d \geqslant \frac{10}{\pi}\,\delta = 3{,}18\,\delta.$$

Зауважмо, що на практиці рідко вживається нют поперечника біль-

[1]) Якщо конструкція шва примушує припускати в ослабленому перерізові аркуша розтягаюче напруження $p < R$, то сучинником тривалости слід назвати відношення $\varphi = \frac{(e-d)\,.\,p}{eR}\cdot$ Раціональна конструкція мусить припускати $p = R$, при чому $\varphi = \frac{e-d}{e}\cdot$

шого за 24 *мм*, й тому часто буває $d < 3{,}18\,\delta$; можна твердити, що в цьому разі $\varphi < \frac{2}{3}$, цеб-то шво не буде найвигідніше що до тривалости.

49. Визначте найбільший сучинник тривалости шва (за рис. 25) $\varphi = \frac{e-d}{e}$, якщо $d = 2{,}5\,\delta$ при решті умов задачі 48.

Розвязка. Найбільше значіння φ відповідає найбільшому значінню e, яке відшукається з першої або другої умови тривалости нюти (див. задачу 48), залежно від того, чи буде величина $\frac{\pi d^2}{4} \cdot 0{,}8R$ менша, чи більша, ніж величина $\delta d \,.\, 2R$. В даному прикладі має місце перший випадок $\left(\frac{\pi \,.\, (2{,}5\,\delta)^2}{4} \cdot 0{,}8R < \delta \,.\, 2{,}5\,\delta \,.\, 2R\right)$, і тому з першої умови маємо для max e:

$$\delta(e - 2{,}5\,\delta) = \frac{\pi\,(2{,}5\,\delta)^2}{4} \cdot 0{,}8;$$

звідки (див. задачу 48):

$$\max e = 6{,}43\,\delta = 2{,}57\,d; \qquad \varphi = \frac{2{,}57 - 1}{2{,}57} = 0{,}61 < \frac{2}{3}\cdot$$

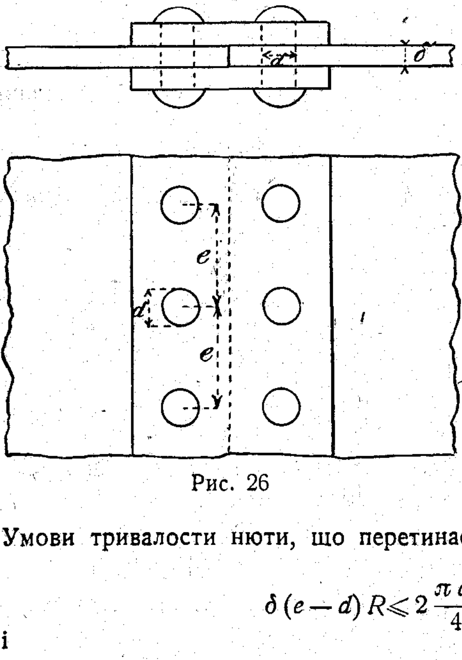


Рис. 26

50. Два залізні аркуші завтовшки δ сполучені за допомогою паристих лиштовок (рис. 26), що їх приклепано до кожного аркуша нютами, розташованими в один ряд. Розвязати питання, що їх знято в задачі 48 для цього випадку.

Розвязка. Сучинник тривалости, як і раніше:

$$\varphi = \frac{e-d}{e}\cdot$$

Умови тривалости нюти, що перетинається в двох перерізах:

$$\delta\,(e-d)\,R \leqslant 2\,\frac{\pi d^2}{4} \cdot 0{,}8\,R \tag{1}$$

і

$$\delta\,(e-d)\,R \leqslant \delta\, d\, 2R; \tag{2}$$

як давніше, маємо з другої умови:

$$\max e = 3d \quad \text{і} \quad \max \varphi = \frac{2}{3}\cdot$$

З першої умови при $e = 3d$ маємо:

$$d \geqslant \frac{5}{\pi}\delta = 1{,}59\,\delta.$$

Як бачимо, і в цьому разі сучинник тривалости не може бути більший за $\frac{2}{3}$, але зате найбільшої тривалости можна осягнути при нютах зі значно меншим поперечником, ніж це було в задачі 48. Легко переконатися також, що, при заданому поперечникові нют, шво з подвійними лиштовками можна зробити триваліше за шво внапусток (див. задачу 49).

51. Визначте сучинник тривалости шва внапусток (рис. 25), якщо $\delta = 10$ *мм*, $d - 20$ *мм* і $e = 60$ *мм*, при допускальних напруженнях, зазначених у задачі 48.

Розвязка. Відношення $\frac{e-d}{e}$ дорівнює $\frac{2}{3}$, проте, в даному разі це відношення не є мірою тривалости шва. Річ у тому, що, як указано в примітці до задачі 48, відношення $\frac{e-d}{e}$ лише в тому разі визначає відношення опору знютованих аркушів до опору суцільного аркуша, коли конструкція шва допускає в ослабленім перерізі таке-ж розтягаюче напруження, яке було-б допущено в суцільному аркуші. В даному разі допускальне в ослабленім перерізі напруження p визначається з умов тривалости нюти, написаних так:

$$\delta(e-d)\,p \leqslant \frac{\pi d^2}{4}\cdot 0{,}8\,R \qquad (1)$$

$$\delta(e-d)\,p \leqslant \delta\, d\, 2\, R. \qquad (2)$$

При заданих значіннях δ і d меншу величину p одержиться з першої умови, з якої й треба скористуватися; одержимо:

$$p = \frac{\pi d^2 \,.\, 0{,}8\,R}{4\,\delta\,(e-d)} < R,$$

$$\varphi = \frac{e-d}{e}\cdot\frac{p}{R} = \frac{\pi d^2 \,.\, 0{,}8}{4 e \delta} = \frac{\pi \,.\, 2^2 \,.\, 0{,}8}{4 \,.\, 6 \,.\, 1} = 0{,}42.$$

52. Залізний аркуш A 10 *мм* завтовшки приклепано до фасонового аркуша B тієї-ж самої товщини нютами з поперечником 20 *мм*. Визначте потрібну кількість нют, якщо аркуша A розтягає сила $P = 16$ тон; допустиме напруження на перетинання нют $720\ \frac{кг}{см^2}$, а допускальне напруження зім'яття по діяметральному перерізові $1800\ \frac{кг}{см^2}$. Розвяжіть питання для випадків: 1) сполучення внапусток (рис. 27) і 2) сполучення паристими лиштовками (рис. 28).

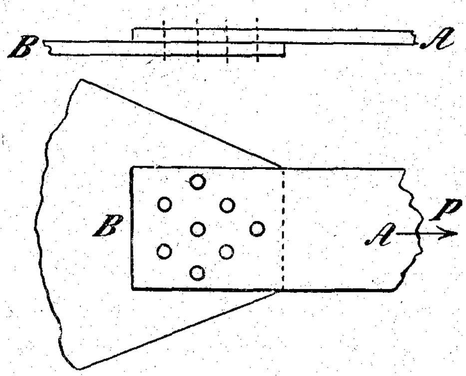


Рис. 27

Розвязка. Умови тривалости нют у першому випадку:

$$16000 \leqslant \frac{\pi \cdot 2^2}{4} \cdot 720\, n \tag{1}$$

$$16000 \leqslant 1 \cdot 2 \cdot 1800\, n, \tag{2}$$

де n — число нют.

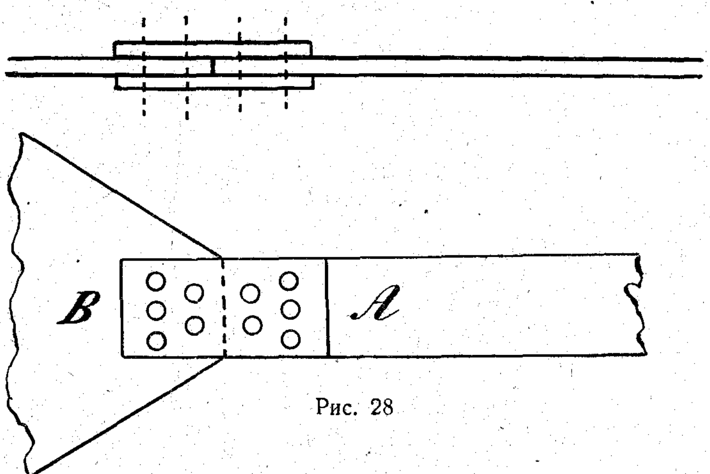


Рис. 28

Перша умова вимагає більшого значіння n, ніж друга; через те з першої умови знаходимо:

$$n \geqslant \frac{16000 \cdot 4}{\pi \cdot 2^2 \cdot 720} = 7{,}1;$$

заокруглюючи до найближчого більшого цілого:

$$n = 8.$$

Умова тривалости в другім випадку:

$$16000 \leqslant 2\,\frac{\pi\,.\,2^2}{4}\cdot 720\,n \tag{1}$$

і

$$16000 \leqslant 1\,.\,2\,.\,1800\,n. \tag{2}$$

Тепер друга умова вимагає більшого значіння n; тому з другої умови маємо:

$$n \geqslant \frac{16000}{2\,.\,1800} = 4{,}45;$$

заокругливши:

$$n = 5.$$

РОЗДІЛ III

СКРУТ

Розрахункові формули

Позначення. Далі розглядається виключно скрут (крутіння) стрижнів чи прутів круглого й кільчатого поперечного перерізу (суцільних і дудчастих).

M — момент скруту.

I_p — полярний момент безвлади поперечного перерізу (відносно центру).

p_t — дотичне напруження в точці поперечного перерізу, яка відлежить на віддалення ϱ від центру

$$p_t = \frac{M \cdot \varrho}{I_p}.$$

D — діяметр (поперечник) суцільного стрижня.

D_1 й d_1 — знадвірній і внутрішній діяметри дудчастого стрижня (рис. 29).

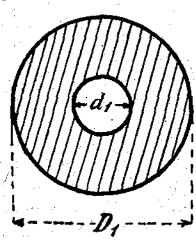


Рис. 29

$$I_p = \frac{\pi D^2}{32}; \quad I_p = \frac{\pi (D_1^4 - d_1^4)}{32}.$$

Для суцільного стрижня:

$$\max p_t = \frac{16\,M}{\pi D^3}.$$

Для дудчастого стрижня:

$$\max p_t = \frac{16\,MD_1}{\pi (D_1^4 - d_1^4)}.$$

φ — кут відносного повороту (в радіянах) двох стрижневих перерізів (одного відносно другого), що один від одного відлежать на віддалення l при постійнім моменті скруту M між ними.

G — модуль пружности при скосові (скрутові):

$$\varphi = \frac{M \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

σ — сучинник Пуассонів.

E — модуль нормальної пружности,

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)}$$

(для ізотропно-пружних тіл).

---

53. Визначте найбільші дотичні напруження, що виникають при скручуванні круглого стрижня з діяметром перерізу 100 *мм*, якщо момент скруту дорівнює 200 *кг.м.*

Відповідь. $p_t = \frac{16 \cdot 20000}{\pi \cdot 10^3} = 101{,}9 \, \frac{кг}{см^2}$.

54. Розвяжіть попередню задачу, якщо вал дудчастий, з тим-же самим знадвірнім діяметром 100 *мм* і внутрішнім діяметром 50 *мм.*

Відповідь. $p_t = \frac{16 \cdot 20000 \cdot 10}{\pi (10^4 - 5^4)} = 108{,}6 = \frac{кг}{см^2}$.

55. Визначте діяметр суцільного вала, якщо момент скруту дорівнює 3 *тон.м.*, а допускальне дотичне напруження 300 $\frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. $D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 300000}{\pi \cdot 300}} \, см = 17{,}2 \; см.$

56. Визначте знадвірній (D_1) і внутрішній (d_1) діяметри дудчастого вала за умовами задачі 55, якщо прийняти $\frac{D_1}{d_1} = 2$.

Відповідь. $d_1 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 300000}{\pi \cdot 15 \cdot 300}} \, см = 8{,}8 \, см; D_1 = 2 d_1 = 17{,}6 \, см.$

57. Відшукайте відносний кут закручування двох перерізів вала задачі 55, що один від одного відлежать на 1 *м*, якщо $G = 8 \cdot 10^5 \, \frac{кг}{см^2}$. (Момент скруту припускається постійний на всьому протязі між перерізами).

Відповідь. $\varphi = \frac{300000 \,.\, 100 \,.\, 32}{8 \,.\, 10^5 \,.\, \pi \,.\, 17{,}2^4} = 0{,}00436$ або $\varphi = 15'$.

58. Розвяжіть попередню задачу для вала задачі 56 при тих самих умовах.

Відповідь. $\varphi = \frac{300000 \,.\, 100 \,.\, 32}{8 \,.\, 10^5 \,.\, \pi \,.\, (17{,}6^4 - 8{,}8^4)} = 0{,}00426$ або $\varphi = 14'39''$.

59. Діяметр довгих валів треба визначити так, щоб при даному моменті скруту (M) найбільші дотичні напруження не переважали допускального напруження (R_t), і щоб разом із тим відносний кут закручування двох перерізів, що один від одного відлежать на 1 *м*, не переважав $\frac{1^\circ}{4}$.

Визначте діяметр суцільного вала, якщо задано: момент скруту $M = 2$ *тон.м.*, допускальне дотичне напруження $R_t = 400 \frac{кг}{см^2}$ і умова, щоб згаданий раніше кут закручування не перевищував $\frac{1^\circ}{4}$. Модуль $G = 8 \,.\, 10^5 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Визначаємо спочатку найменший діяметр за умовою тривалости.

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 200000}{\pi \,.\, 400}}\ см = 13{,}65\ см.$$

З другого боку, найменший діяметр, що при ньому заховується умову що до кута закручування, дорівнює [1]):

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \,.\, 200000 \,.\, 100}{\pi \,.\, 8 \,.\, 10^5 \,.\, 0{,}00436}}\ см = 15{,}55\ см.$$

Щоб удоволити обидві поставлені умові, конче треба прийняти більше з двох значінь D; заокругливши до цілих міліметрів, остаточно одержимо:

$$D = 156\ мм.$$

60. Вал передає роботу двигуна в 15 кінських сил при 60 оборотах за хвилину. Визначте його діяметр так, щоб найбільші дотичні напруження не переважали $300 \frac{кг}{см^2}$.

---

[1]) Кут $\frac{1^\circ}{4}$ в радіянах дорівнює 0,00436.

Розвязка. Щоб визначити величину момента скруту M (в *кг.см*), можна скласти таке-о рівнання, позначивши через N передавану вправність у кінських силах і через n число оборотів за хвилину:

$$M \cdot \frac{2\pi n}{60} = 75 \,.\, 100 \,.\, N,$$

звідки:

$$M = 71620 \frac{N}{n};$$

підставивши це значіння у формулу для визначення діяметру, одержимо:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16M}{\pi R_t}} = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, 71620}{\pi} \cdot \frac{N}{nR_t}} = 71{,}4 \sqrt[3]{\frac{N}{n \,.\, R_t}} \cdot$$

При заданих величинах маємо:

$$D = 71{,}4 \sqrt[3]{\frac{15}{60 \,.\, 300}}\ см = 6{,}71\ см;$$

заокругливши, одержимо остаточно:

$$D = 68\ мм.$$

61. Визначте діяметр вала попередньої задачі за тими-ж умовами, але додавши вимогу, щоб відносний кут закручування двох перерізів, що відлежать на 1 *м*, не переважав $\frac{1^\circ}{4}$. Модуль $G = 8 \,.\, 10^5 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Підставивши значіння $M = 71620 \frac{N}{n}$ у формулу, що визначає кут закручування, знаходимо з одержуваного рівнання:

$$D = \sqrt[4]{\frac{32 \,.\, 71620\, N \,.\, 100}{\pi \,.\, n \,.\, 8 \,.\, 10^5 \,.\, 0{,}00436}} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \cdot$$

В нашій задачі:

$$D = 12 \sqrt[4]{\frac{15}{60}}\ см = 8{,}5\ см.$$

Як бачимо (див. задачу 60), умова тривалости вимагає в даному разі меншого діяметру, тому остаточно призначаємо:

$$D = 85\ мм.$$

62. Визначте в кінських силах вправність парової машини, що роботу передає через вал (суцільний), з діяметром 120

120 *мм*, якщо відомо, що при 60 оборотах за хвилину два перерізи вала, які один від одного відлежать на 4 *м*, обертаються один відносно другого на $\frac{3^\circ}{4}$. Модуль G матеріялу вала $8 \cdot 10^5 \frac{кг}{см^2}$ (залізо).

Розвязка. Момент скруту знайдеться з рівняння:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{M \cdot 400}{8 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 12^4}{32}};$$

визначивши M, знайдемо потім і відшукувану вправність за формулою (див. задачу 60):

$$N = \frac{Mn}{71620} = \frac{M \cdot 60}{71620} \text{ кін. сил.}$$

В даному разі:

$$N = 44{,}65 \text{ кін. сил.}$$

63. Визначте сучинник Пуассонів для даного ґатунку заліза, якщо відомо модуль нормальної пружности цього матеріялу: $E = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$, і якщо при спробі на скрут круглого зразка того-ж матеріялу з діяметром 20 *мм* виявилось, що зростанню момента скруту на 1 *кг.м* відповідає зростання на 0,2° відносного кута закручування двох перерізів, що один від одного відлежать на 440 *мм*.

Розвязка. Модуль пружности при скрутові:

$$G = \frac{100 \cdot 44}{0{,}2 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\pi \cdot 2^4}{32}} \frac{кг}{см^2} = 802500 \frac{кг}{см^2};$$

сучинник Пуассонів визначиться з формули:

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

звідки:

$$\sigma = \frac{E}{2G} - 1 = 0{,}25.$$

64. Частини скручуваного довгого залізного вала з діяметром $d = 80$ *мм* сполучаються чавунною муфтою, що її закріпляються за допомогою льоника (рис. 30). Визначте знадвірній діяметр муфти D, якщо допускальне напруження на сколювання прийняти для муфти в 4 рази менше, ніж для вала.

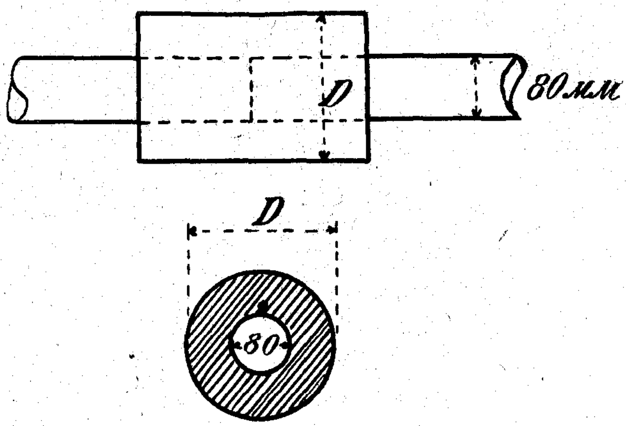


Рис. 30

Розвязка. D знайдемо з рівнання:

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D},$$

що перепишеться так:

$$D^4 - 4d^3 . D - d^4 = 0;$$

звідки, підставивши $d = 80$ і розвязуючи, одержимо:

$$D = 133 \text{ мм.}$$

65. Робота двигуна передається через пасову передачу, шків A й вал I з конічними колесами B й C (рис. 31) на вали II й III. Визначте діяметри всіх валів: (вала I — по частях AB й BC), якщо вправність двигуна 150 парових коней, робота передається валам II й III однаково, число оборотів вала I за хвилину дорівнює 50, допускальне

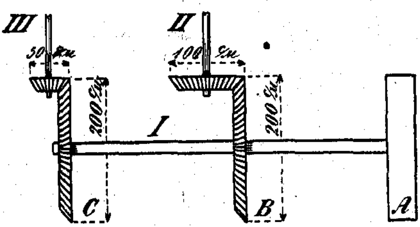


Рис. 31

напруження 400 $\frac{кг}{см^2}$, і розміри конічних коліс показано на рисункові.

Розвязка. Приклавши розвязку задачі 60, матимемо:

Для частини AB вала I: $D=71{,}4\sqrt[3]{\dfrac{150}{50\,.\,400}}=14$ *см.*

Для частини BC вала I: $D=71{,}4\sqrt[3]{\dfrac{75}{50\,.\,400}}=11$ *см.*

Для вала II: $D=71{,}4\sqrt[3]{\dfrac{75}{100\,.\,400}}=8{,}8$ *см.*

Для вала III: $D=71{,}4\sqrt[3]{\dfrac{75}{200\,.\,400}}=7$ *см.*

66. Визначте найбільше дотичне напруження по поперечному перерізові циліндричної пружини з прута круглого поперечного перерізу (рис. 32), яка стискається силою в 50 *кг*, якщо середній радіюс ґвинта дорівнює 6 *м*, а діяметр поперечного перерізу 1 *см*.

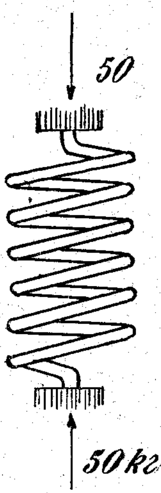


Рис. 32

Відповідь. $\max p_t=\dfrac{16\,.\,50\,.\,6}{\pi\,.\,1^3}+\dfrac{50\,.\,4}{\pi\,.\,1^2}\dfrac{кг}{см^2}=$
$=1591\,\dfrac{кг}{см^2}$.

67. Відшукати залежність по-між відносним кутом закручування φ двох перерізів вала, що один від одного відлежать на віддалення l, найбільшим дотичним напруженням $\max p_t$, знадвірнім діяметром вала D (суцільного або дудчастого) й модулем G. Перевірити за одержаною формулою розвязки задач 57 і 58.

Відповідь. $\varphi=\max p_t\cdot\dfrac{2l}{GD}$.

68. Відшукайте залежність по-між відносним кутом закручування φ двох перерізів суцільного вала, що один від одного відлежать на віддалення l, найбільшим дотичним напруженням $\max p_t$, моментом скруту M (припускається за постійний на всьому просторі l) і модулем G.

Розвязка. Підставивши в розвязку задачі 67 значіння:

$D=\sqrt[3]{\dfrac{16M}{\pi\,.\,\max p_t}}$, одержимо:

$$\varphi=\frac{\max p_t\,.\,l\sqrt[3]{\pi\,.\,\max p_t}}{G\sqrt[3]{2M}}.$$

69. Визначте знадвірній і внутрішній діяметри дудчастого вала за умовами задачі 55 так, щоб вага дудчастого вала була в 2 рази менша від ваги суцільного вала, що його визначено в цій задачі (діяметр останнього дорівнює $D = 17{,}2$ *см*).

Розвязка. Припустім: $\frac{D_1}{d_1} = m$, де D_1 і d_1 — відшукувані знадвірній і внутрішній діяметри. Маємо залежності:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16\,M}{\pi\,R_t}};$$

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{m}{m^4 - 1} \cdot \frac{16\,M}{\pi\,R_t}} = \sqrt[3]{\frac{m}{m^4 - 1}} \cdot D,$$

де R_t є допускальне дотичне напруження.

Обсяг суцільного вала V пропорціональний з перерізом: $\frac{\pi\,D^2}{4}$;

Обсяг дудчастого вала V_1 пропорціональний з перерізом:

$$\frac{\pi(D_1^2 - d_1^2)}{4} = \frac{\pi\,(m^2 - 1)\,d_1^2}{4} = (m^2 - 1)\sqrt[3]{\frac{m^2}{(m^4 - 1)^2}} \cdot \frac{\pi\,D^2}{4};$$

тому:

$$\frac{V_1}{V} = (m^2 - 1)\sqrt[3]{\frac{m^2}{(m^4 - 1)^2}} = \sqrt[3]{\frac{m^2\,(m^2 - 1)}{(m^2 + 1)^2}};$$

припускаючи $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{2}$, одержимо рівняння:

$$7\,m^4 - 10\,m^2 - 1 = 0.$$

Матеріяльний і додатній корінь цього рівняння: $m = 1{,}23$.

Остаточно одержуємо:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{1{,}23}{1{,}23^4 - 1}} \cdot 17{,}2 \text{ см} = 17{,}0 \text{ см},$$

$$D = 1{,}23\,.\,17{,}0 \text{ см} = 20{,}9 \text{ см}.$$

РОЗДІЛ IV

УГИН ПРЯМИХ БРУСІВ

1. Нормальні й дотичні напруження. Моменти опору. Епюри моментів угину й поперечних сил

Позначення:

C — осередок ваготіння певного поперечного перерізу (рис. 33).

OX — вісь бруса.

CY, CZ — головні осередкові осі перерізу.

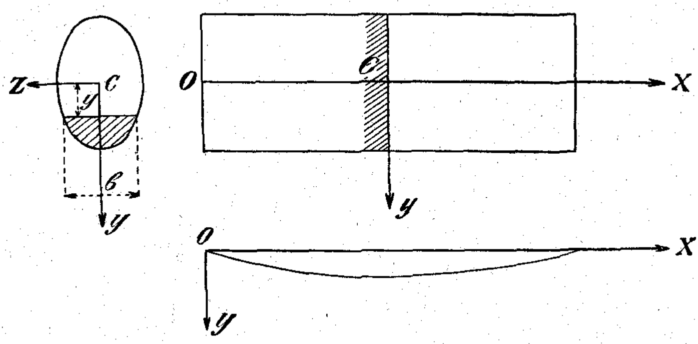


Рис. 33

Всі знадвірні сили лежать у площині CXY (плоский угин).

Нормальне напруження по поперечному перерізові в певній його точці:

$$p_n = \frac{M_z \cdot y}{I_z},$$

де: M_z є момент угину для даного перерізу (відносно оси CZ); знака визначається за знаком моменту сил, що їх ліворуч від перерізу прикладено;

y — координата точки, що її розглядається;

I_z — момент ~~безвлади~~ (інерції) перерізу відносно оси CZ;

$$\max|p_n| = \frac{\max|M_z|}{W_z},$$

де $W_z = \dfrac{I_z}{\max|y|}$ (момент опору).

Дотичне напруження по поперечному перерізові в певній його точці:

$$p_t = \frac{Q_y \, . \, S}{bI_z},$$

де: Q_y є поперечна сила для даного перерізу (знака визначається за знаком проекцій на вісь CY сил, що їх праворуч від перерізу прикладено);

S — статичний момент відносно оси CZ частини перерізу, що її відтинається прямою $\| CZ$, проведеною через розглядувану точку (на рис. 33 цю частину зарисковано);

b — ширина перерізу на рівні точки, що її розглядається.

Диференціяльне рівнання пружної лінії (угнутої оси бруса), що її віднесено до осей OXY (див. рис. 33):

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = -M_z.$$

Друга форма:

$$\frac{EI_z}{\varrho} = |M_z|,$$

де ϱ — радіюс кривини пружної лінії в даного перерізу.

Всі формули справедливі лише в межах спроможности прикладати закон Гуків.

---

70. Витесати з круглого бервена (діяметр перерізу D) брус прямокутнього перерізу найбільшої тривалости (рис. 34; знайти значіння a й h); обчислити відношення момента опору цього перерізу до момента опору перерізу круглого бервена.

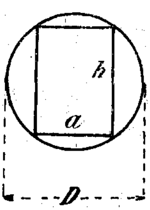


Рис. 34

Розвязка. $W = \dfrac{ah^2}{6} = \dfrac{a(D^2 - a^2)}{6}$; max W маємо при $a = \dfrac{D}{\sqrt{3}}$; далі знаходимо: $h = D\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; відшукуване відношення: 0,653.

71. Витешіть із круглого бервена (рис. 34) брус прямокутнього перерізу найбільшої жорсткости (з найбільшим моментом безвлади перерізу відносно осередкової оси), обчисліть відношення моменту безвлади цього перерізу до моменту безвлади цілого круглого перерізу.

Розвязка. $I = \frac{ah^3}{12} = \frac{a(D^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{12}$; max I маємо при $a = \frac{D}{2}$; далі, знаходимо: $h = \frac{\sqrt{3}\,.\,D}{2}$; відшукуване відношення 0,551.

72. Визначте висоту коритного (таврового) профілю h (рис. 35) за заданою шириною полиці a й товщиною δ так, щоб при вгині в площині стінки нормальні напруження в крайній горішній точці стінки були вдвічі більші, ніж напруження в крайніх долішніх точках полиці.

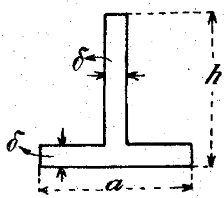


Рис. 35

Відповідь. $h = a - \delta \pm \sqrt{(a-2\delta)^2 - a\,\delta}$.

73. Визначте моменти опору переріза, що його показано на рис. 36 (півкруг, переріз дерев'яної платівки), при вгині в прямовисній площині.

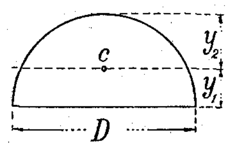


Рис. 36

Розвязка. Знаходимо віддалення осередку ваготіння (C) півкруга од діяметра (обчислюємо статичний момент півкруга відносно діяметру $\left(\frac{D^3}{12}\right)$, ділимо на площу півкруга).

$$y_1 = \frac{2}{3\pi} D = 0{,}212\, D.$$

Момент безвлади півкруга відносно поземої оси, що проходить через осередок ваготіння C (користуємося з формул переходу):

$$I = \frac{\pi D^4}{128} - \left(\frac{2}{3\pi} D\right)^2 \cdot \frac{\pi D^2}{8} = 0{,}00688\, D^4.$$

Щоб розрахувати напруження в долішніх точках перерізу (по діяметру), маємо:

$$W_1 = \frac{I}{y_1} = 0{,}0325\, D^3.$$

Щоб розрахувати напруження в горішній точці перерізу:

$$W_2 = \frac{I}{y_2} = 0{,}0239\, D^3.$$

74. Брус квадратового перерізу вгинається в прямовисній площині; при якому розкладі, I чи II (див. рис. 37; платом чи руба), брус буде більш тривалий?

Розвязка. Брус триваліший при тому розкладі, що при ньому момент опору більший. Порівнюючи положення I и II, бачимо, що моменти безвлади (інерції) відносно поземої осередкової оси—однакові (момент безвлади квадрату відносно першої-ліпшої осередкової оси дорівнює одну й ту-ж величину; читачеві пропонується довести цю тезу). Віддалення-ж найвіддаленіших точок перерізу від невтральної лінії (осередкової оси) при II положенні більші; отже, момент опору при II положенні менший, ніж при I положенні; значить, брус при I положенні триваліший?

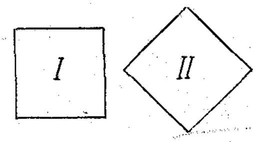


Рис. 37

75. При якому положенні брус попередньої задачі (див. рис. 37) буде більш жорсткий, цеб-то буде при решті однакових умов менше вгинатись?

Розвязка. Як було згадано в розвязці задачі 74, моменти безвлади перерізу відносно поземої осередкової оси — однакові при положеннях I й II; отже, при решті однакових умов, сучинники рівнань, що форму гнучкої лінії визначають, будуть однакові, а тому брус при обох положеннях угинатиметься однаково (жорсткість не змінюється).

76. Виведіть формулу для розрахунку дотичних напружень у невтральної лінії при вгині бруса круглого поперечного перерізу. Поперечну силу (Q_y) вважається за задану.

Розвязка. Користуємося з формули: $p_t = \frac{Q_y \,.\, S}{bI_z}$.

В даному разі при діяметрі перерізу D маємо:

$$S = \frac{D^3}{12},$$

$$b = D,$$

$$I_z = \frac{D^4}{64}.$$

Підставивши, знаходимо:

$$p_t = \frac{16}{3} \cdot \frac{Q_y}{\pi \,.\, D^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{\omega},$$

де ω є площа перерізу.

77. Виведіть формулу для розрахунку найбільшого дотичного напруження по поперечному перерізові бруса, що його показано на рисункові 38 (трикутник рівнораменний; угин припускається в прямовисній площині). Вважається, що поперечну силу задано.

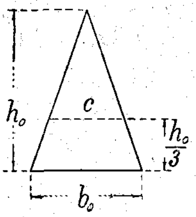


Рис. 38

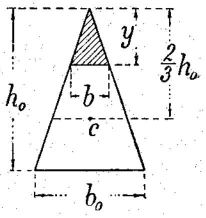


Рис. 39

Розвязка. Визначмо дотичне напруження в точці перерізу на віддаленні y від вершка за формулою:

$$p_t = \frac{Q_y \, . \, S}{b I_z}.$$

В даному разі маємо (див. рис. 39):

$$S = \frac{by}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} h_0 - \frac{2}{3} y\right) = \frac{by}{3}(h_0 - y);$$

$$I_z = \frac{b_0 h_0^3}{36};$$

$$p_t = \frac{12 Q_y by (h_0 - y)}{b \, . \, b_0 \, . \, h_0^3} = \frac{12 Q_y}{b_0 h_0^3} y (h_0 - y).$$

Maximum маємо при $y = \dfrac{h_0}{2}$:

$$\max p_t = \frac{3 Q_y}{b_0 h_0},$$

або

$$\max p_t = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{\omega},$$

де ω є площа цілого перерізу.

Зауважмо, що трикутник є прикладом перерізів, для яких найбільше дотичне напруження має місце не по невтральній лінії (як відомо, для більшости перерізів, що їх на практиці прийнято, найбільші дотичні напруження мають місце якраз по невтральній лінії).

78. Биндову сталеву пилку, для спилювання палів під водою (рис. 40), установлюється на риштованнях або човнах (на рисункові не показано); вона завтовшки 0,8 *мм.* Бинда обхоплює два напрямних блоки, і кінці її за допомогою тяжей звязано з коромислом, що силою робітників і пускає пилку в рух. Визначте як-найменший діяметр блоків так, щоб нормальні при вгині пилки напруження не переважали $3000\ \frac{кг}{см^2}$. (Напруження від безпосереднього розтягу, розвязуючи цю задачу, не брати на увагу).

Модуль $E = 2{,}2 \,.\, 10^6\ \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Користуючися з формули: $\frac{EI_z}{\varrho} = M_z$, одержимо:

$$\frac{D}{2} = \frac{EI_z}{M_z};\ \text{потім: } M_z =$$

$$= 3000\ W_z \text{ і } \frac{I_z}{W_z} = 0{,}04\ см.$$

Остаточно, після підстановлень, матимемо:

$$D = 2 \,.\, \frac{2{,}2 \,.\, 10^6 \,.\, 0{,}04}{3000}\ см = 58{,}7\ см.$$

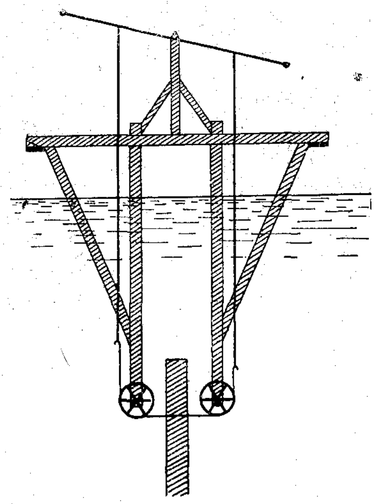


Рис. 40

79. З'ясуйте, чи може биндова пилка попередньої задачі обхопити точно чверть кола блока, як це схематично показано на рис. 40, чи бинда пилки стикається з блоком на меншім протязі.

Розвязка. Якщо бинда пилки обхоплювала-б блока точно на протязі чверти його кола (ac) за рис. 41, то ми мали-б таку суперечність: елемент бинди ab, сумежний з першою точкою стику, очевидно, зігнутий (радіюс його кривини дорівнює радіюс блока), тимчасом момент угину для цього елементу дорівнює 0 (момент сили P, що розтягає бинду, відносно осередку ваготіння перерізу бинди у точки a); суперечність легко виявляється, розглядаючи рівнання гнучкої лінії, у формі:

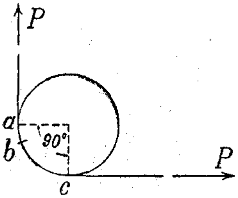


Рис. 41

$$\frac{EI_z}{\varrho} = M_z.$$

Ця-ж увага стосується й до угину бинди у точки C.

Можливу форму бинди коло блоку показано на рис. 42: віддалення ac менше від чверти кола блоку; кривина бинди ступнево більшає від точок a_1 й c_1 до точок a й c (радіюс кривини в точках a_1 й c_1 дорівнює безконечність при моментах угину, що рівні 0; радіюс кривини в точках a й c дорівнює радіюс блоку при моменті вгину, що є рівний $P\,\delta$ (див. рис. 42); точне визначення форми бинди на протязі aa_1 й cc_1 (так само, як і положення точок a_1 й c_1) переходить за межі розвязок теорії Опору Матеріялів.

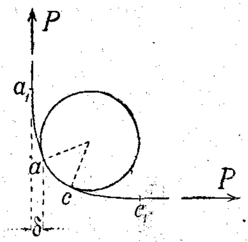


Рис. 42

80. Збудуйте епюри моментів угину й поперечних сил для поданих на рис. 43—51 випадків навантаження[1]).

Відповідь. Щоб учні мали спроможність перевірити одержані ними епюри, подається деякі величини, що до згаданих епюр стосуються.

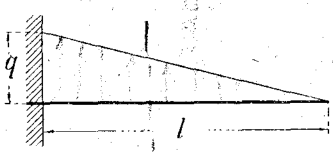


Рис. 43

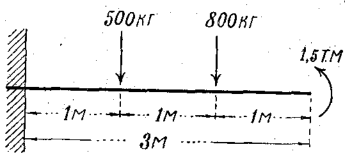


Рис. 44

До рис. 43: в перерізі по середині бруса $M_z = -\frac{ql^2}{48}$; $Q_y = \frac{ql}{8}$.

До рис. 44: в перерізі на віддаленні 1 *м* від лівого закріпленого кінця $M_z = 700$ *кг.м*; у закріпленого кінця M_z—від'ємний; поперечна сила для всіх перерізів крайньої правої третини бруса дорівнює 0.

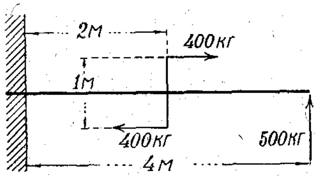


Рис. 45

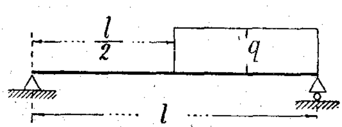


Рис. 46

До рис. 45: епюру моментів угину зображається двома рівнобіжними прямими, по середині бруса епюра має уступ; найбільший момент угину дорівнює 1600 *кг.м*. Поперечна сила для всіх перерізів бруса є постійна.

До рис. 46: найбільший момент угину дорівнює $\frac{9}{128} ql^2$.

[1]) Спершу треба добре засвоїти будову епюр для найпростіших типових випадків, що розглядаються в курсах Опору Матеріялів.

До рис. 47: найбільший момент угину дорівнює $\frac{ql^2}{18}$; для всіх перерізів середньої третини поперечна сила дорівнює 0.

До рис. 48: епюра моментів угину має уступ у переріза на віддаленні 2 *м* від лівої підпори; найбільший момент угину дорівнює 1400 *кг.м*; для всіх перерізів на протязі перших чотирьох метрів од лівої підпори поперечна сила $=200$ *кг*.

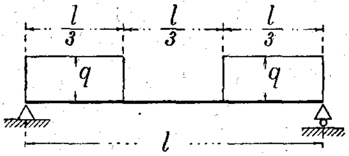


Рис. 47

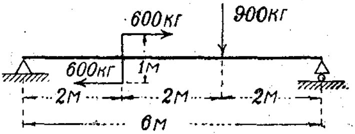


Рис. 48

До рис. 49: епюру моментів угину зображено трьома рівнобіжними прямими з двома уступами; по середині бруса момент угину дорівнює 0; поперечна сила для всіх перерізів бруса є постійна й дорівнює: -200 *кг*.

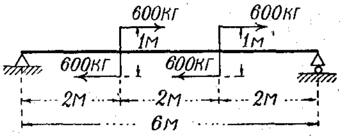


Рис. 49

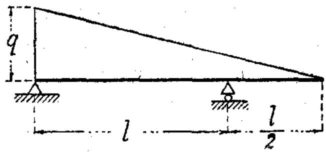


Рис. 50

До рис. 50: найбільший момент угину в перерізі на віддаленні $\frac{3}{2\sqrt{2}}\,l$ від правого кінця бруса (цеб-то на віддаленні $0{,}44\,l$ від лівої підпори).

До рис. 51: найбільший момент угину — для перерізу по середині бруса й дорівнює $\frac{ql^2}{12}$; в перерізах над опорами: $M_z = -\frac{ql^2}{48}$.

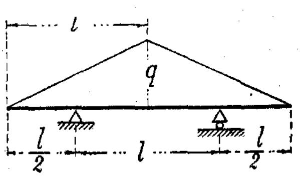


Рис. 51

81. Бруса завдовжки l навантажено рівномірно розподіленою вантагою (рис. 52). Визначте віддалення між симетрично розкладеними підпорами a так, щоб найбільший момент угину був як-найменший (що до абсолютної величини).

Розвязка. Умову задачі буде виконано тоді, коли абсолютні величини моментів угину по-над підпорами й по середині прогону будуть рівні. Звідси знаходимо: $a = 0{,}586\,l$.

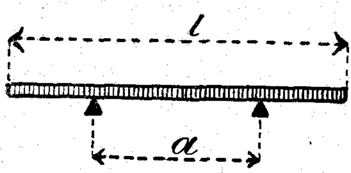


Рис. 52

82. Залізна плоскоденна баржа без вантажу має углибку h метрів (рис. 53); завширшки баржа a метрів; облавки й підошва складаються з облямівки по залізних ребрах (шпанговтах), що одне від одного відлежать на c *m*. Вага кожного облавка становить 20% ваги цілої баржі. З'ясуйте закон зміни моментів угину по довжині всього ребра, визначте найбільші моменти вгину.

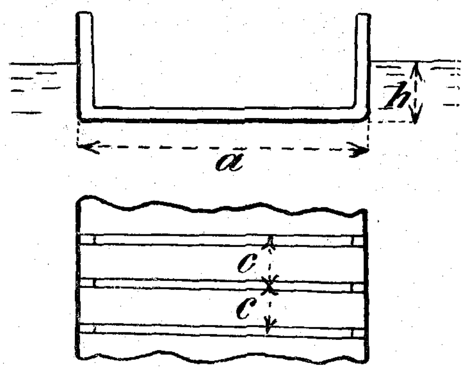


Рис. 53

Розвязка. В перерізі ребра в місця долучення облавка з підошвою момент угину дорівнює (що до абсолютної величини) $\frac{ch^3}{6}$ *тон.м.* Частина ребра, що прилягає до підошви, знаходиться в умовах балка, що його навантажено рівномірною вантагою, яка дорівнює різницю тиснень води (знизу вгору) й власної ваги підошви (згори вниз); очевидно, повна вантага діє знизу вгору; ця вантага зрівноважується вагою двох облавків, а ці сили відіграють ролю опорних реакцій, справлених згори вниз; до кінцевих перерізів поземої частини ребра прикладено, крім того, означені раніш моменти, що спричиняють угин, супротивний угинові від прямовисного навантаження на підошву. Найбільший момент по середині ребра:

$$c\left(\frac{0{,}4\,ha^2}{8} - \frac{h^3}{6}\right) \text{ тон.м.}$$

83. Залізно-бетоновий жолоб, що його переріза зображено на рисункові 54, править для водопроводу й підтримується повздовжними балками. На якому віддаленні a слід розташувати ці балки, щоб найбільший момент угину, що його обчислюється, розраховуючи товщину жолобового дна, мав як-найменшу величину?

Розвязка. Моменти вгину в перерізах по-над підпорами та по середині жолоба що до абсолютної величини мусять бути однакові. Момент над підпорами є пропорціональний з величиною:

$$\frac{h^3}{6}+\frac{h(l-a)^2}{8}.$$

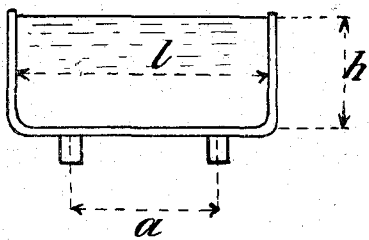


Рис. 54

Момент по середині жолоба пропорціональний:

$$\frac{ha^2}{8}-\frac{h^3}{6}-\frac{h(l-a)^2}{8}.$$

Зрівнавши ці вирази та розвязавши, знайдемо:

$$a=2l-\sqrt{2l^2-\frac{8}{3}h^2}.$$

84. Цілий ряд підпор, що одна від однієї відлежать на однакові віддалення l (рис. 55), треба перекрити балками, що несуть суцільну рівномірно розподілену вантагу інтенсивности q. Підпори можна перекрити за варіянтом I (див. рис. 55), цеб-то рядом однакових балків завдовжки l, і за варіянтом II— односпірними (консольними) балками, перекривши прогони між їхніми кінцями коротшими балками. Який із двох варіянтів корисніший, цеб-то вимагатиме меншої витрати матеріялу, щоб улаштувати балки? Для варіянту II визначте найкориснішу довжину односпірника (консолі) a.

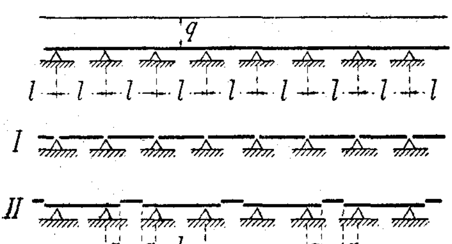


Рис. 55

Розвязка. Корисніший буде той варіянт, що при ньому розрахункові (найбільші) моменти вгину будуть менші.

При варіянті I маємо:

$$\max M=\frac{ql^2}{8}.$$

При варіянті II маємо:
по середині односпірного балка:

$$M=\frac{ql^2}{8}-\left(\frac{qa^2}{2}+\frac{q\,(l-2\,a)\,a}{2}\right)=\frac{ql^2}{8}-\frac{qa(l-a)}{2};$$

над підпорами односпірного балка:

$$|M|=\frac{qa(l-a)}{2};$$

по середині короткого балка:

$$M=\frac{q\,(l-2\,a)^2}{8}.$$

Легко бачити, что при II варіянті величини моментів угину в усіх небезпечних перерізах — менші, ніж момент угину в небезпечнім перерізі при I варіянті $\left(a<\frac{l}{2}\right)$, а тому варіянт II корисніший.

Зауважмо далі, що моменти вгину по середині односпірного балка й по середині короткого балка однакові:

$$\frac{ql^2}{8}-\frac{qa(l-a)}{2}=\frac{q\,(l^2-4\,al+4\,a^2)}{8}=\frac{q\,(l-2\,a)^2}{8}.$$

Найкорисніша довжина односпірника (a) буде тоді, коли найбільший із моментів угину в небезпечних перерізах буде як-найменший. Цю-ж останню умову буде дотримано, якщо моменти вгину по середині односпірного балка й над його підпорами будуть однакові що до абсолютної величини.

Одержуємо рівнання:

$$\frac{q\,(l-2\,a)^2}{8}=\frac{qa(l-a)}{2},$$

звідки:

$$a=\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}\right)l.$$

Маючи на увазі, що $a\leqslant\frac{l}{2}$, одержуємо остаточно:

$$a=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)l=0{,}1465\,l.$$

2. Розрахунок тривалости й жорсткости. Добір перерізів

Формули тривалости:

$$\frac{\max |M_z|}{W_z} \leqslant R; \qquad \frac{\max |Q_y| \cdot S}{b \cdot I_z} \leqslant R_t,$$

де R і R_t є допускальні нормальні та дотичні напруження; перевірку дотичних напружень робиться для точок перерізу по невтральній лінії, де звичайно мають місце найбільші дотичні напруження (один із винятків розглянуто раніше в задачі 77).

Основні формули для розрахунку деформації вгину в найпростіших випадках (позначення — дивись рис. 56 — 60).

При навантаженні за рис. 56:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI_z},$$

$$\vartheta = \frac{Pl^2}{2EI_z}.$$

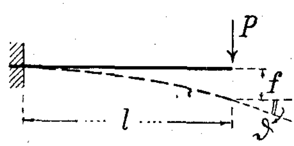


Рис. 56

При навантаженні за рис. 57:

$$f = \frac{ql^4}{8EI_z},$$

$$\vartheta = \frac{ql^3}{6EI_z}.$$

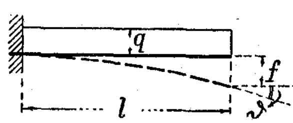


Рис. 57

При навантаженні за рис. 58:

$$f = \frac{Pb(3l^2 - 4b^2)}{48EI_z}$$

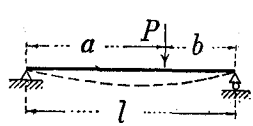


Рис. 58

(тут f є угнуття по середині прогону, що його на практиці приймається за найбільше угнуття; b позначає віддалення сили P до найближчої підпори).

При навантаженні за рис. 59:

$$f = \frac{Pl^3}{48EI_z},$$

$$\vartheta = \frac{Pl^2}{16EI_z}.$$

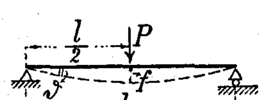


Рис. 59

При навантаженні за рис. 60:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_z},$$

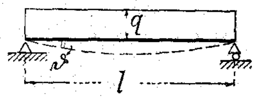


Рис. 60

$$\vartheta = \frac{ql^3}{24EI_z}.$$

Розраховуючи деформацію вгину, в складніших випадках слід користуватись графоаналітичною методою, що часто спрощує обчислення.

---

85. Залізний двокоритний (I) брус жорстко замуровано один кінцем — див. рис. 56; профіль бруса № 14, для якого: $I_z = 569$ *см*^{4}; $W_z = 81{,}3$ *см*^{3}; власна вага повздовжного метру бруса 14,2 *кг*; довжина $l = 2$ *м*; визначте, якого найбільшого вантажа P можна прикласти до кінця бруса (див. рис. 56), якщо допускальне нормальне напруження $R = 900\ \frac{кг}{см^2}$; візьміть на увагу вплив власної ваги.

Відповідь. $P = 351{,}5$ *кг.*

86. Визначте угнуття бруса попередньої задачі від власної ваги та означеної раніше вантаги на кінці ($P = 351{,}5$ *кг*) $E = 2 \cdot 10^6\ \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. Угнуття від власної ваги: 0,025 *см.*
Угнуття від вантаги: 0,823 *см.*
Повне угнуття: $f = 0{,}848$ *см.*

87. Залізний двокоритний (I) брус, профіль № 14, лежить на двох підпорах; прогін між підпорами — 4 *м*; визначте, який найбільший вантаж P можна прикласти по середині прогону (за схемою рис. 59), якщо допускальне нормальне напруження $R = 900\ \frac{кг}{см^2}$; візьміть на увагу вплив власної ваги.

Характеристику профілю № 14 подано в умовах задачі 85.

Відповідь. $P = 703$ *кг.*

88. Визначте угнуття бруса попередньої задачі від власної ваги та означеної раніше вантаги по середині ($P = 703$ *кг*). $E = 2 \cdot 10^6\ \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. Угнуття від власної ваги: 0,042 *см.*
Угнуття від вантажу: 0,823 *см.*
Повне угнуття: $f = 0{,}865$ *см.*

89. Настіл військового дерев'яного мосту, призначеного пропустити польові гармати з тисненням на колесо 500 *кг*, робиться із соснових дощок 25 *см* завширшки. Визначте конче потрібну товщину дощок δ, якщо віддалення по-між осями брусів, що підтримують дошки, 0,75 *м* і допускальне нормальне напруження при вгині сосни прийнято для тимчасових споруд 80 $\frac{кг}{см^2}$ (рис. 61). При розрахунку слід брати дошку в запас тривалости, як розрізний брус із прогоном 0,75 *м*.

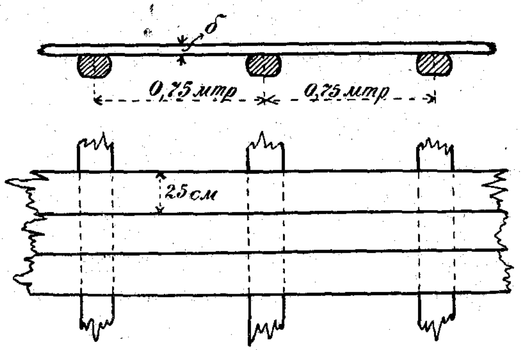


Рис. 61

Відповідь. Найбільший момент угину, коли вантаж по середині прогону. $\delta = 5{,}3$ *см* $\cong 6$ *см*. Цю товщину слід іще побільшити до 7 *см* в запас на зуживання настілу від руху.

90. Дерев'яні бруси міжповерхового перекриття розкладено один від одного (вісь од оси) на віддаленні 0,6 *м*. Прогін брусів $l = 6$ *м*. Тиск на підлогу горішнього поверху (включаючи власну вагу перекриття й брусів) 400 $\frac{кг}{м^2}$. Доберіть прямокутній переріз бруса при допускальнім нормальнім напруженні 64 $\frac{кг}{см^2}$ так, щоб бруса можна було витесати з бервена як-найменшого діяметру. Відшукайте угнуття бруса f по середині в частках прогону; для сосни $E = 10^5 \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. Відношення ширини a до висоти h мусить вдоволяти умову задачі 70: $a = 17{,}1$ *см*; $h = 24{,}2$ *см*; $D = 29{,}7$ *см*; $f = 1{,}99$ *см* $\cong \frac{l}{300}$.

91. Розвязка задачі 90 показує, що хоч брус відшуканих раніше розмірів задоволяє вимоги тривалости, але він не задоволяє звичайні вимоги жорсткости, тому що угнуття сволока не повинно буде більше за $\frac{1}{600} l$. Визначте розміри даного бруса так, щоб додержати умови $f=\frac{1}{600}$, і при тому щоб бруса можна було витесати з бервена як-найменшого діяметру.

Відповідь. Відношення розмірів a й h мусить вдоволяти умову задачі 71:

$$a=17{,}5\ см;\quad h=30{,}4\ см;\quad D=35\ см.$$

92. Брус симетричного відносно невтральної лінії перерізу лежить на двох підпорах і зазнає угину від суцільної рівномірно розподіленої вантаги. Дослідіть питання, яке мусить бути відношення висоти бруса h до прогону l, щоб при найбільших нормальних напруженнях, що дорівнюють допускальну межу R, угнуття по середині f було рівне з n-ою часткою прогону $\left(f=\frac{l}{n}\right)\cdot$ Припускається, що модуль E відомий.

Розвязка. Маємо залежності (позначивши силу навантаження через q):

$$f=\frac{5}{384}\cdot\frac{ql^4}{EI};\qquad R=\frac{ql^2}{8W}=\frac{ql^2}{8\,.\,I}\cdot\frac{h}{2};$$

звідси одержимо:

$$\frac{f}{R}=\frac{5}{24}\cdot\frac{l^2}{Eh}$$

і остаточно:

$$\frac{h}{l}=\frac{5}{24}\cdot\frac{R}{E}\cdot\frac{l}{f}=\frac{5}{24}\cdot\frac{R}{E}\cdot n.$$

93. Брус постійного перерізу лежить на двох підпорах (рис. 62) й зазнає вгину від власної ваги. Як зміняться найбільші нормальні та дотичні напруження, а також угнуття бруса, якщо всі його розміри (як розміри поперечного перерізу, як і довжину, цеб-то прогін) збільшити в n разів?

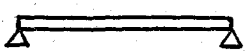


Рис. 62

Відповідь. Напруження збільшаться в n разів; угнуття збільшиться в n^2 разів.

94. Залізну колію на мості укладується по дерев'яних поперечинах прямокутнього перерізу 20×25 *см*, які підтримується повздовжними двокоритними залізними брусами (рис. 63). Визначте як-найбільше віддалення між брусами (цеб-то як-найбільший прогін l поперечин) за такими умовами: 1) коли колеса знаходяться на рейках, найбільше нормальне напруження в поперечині не повинно переважати $102 \frac{кг}{см^2}$, при тисненні кожного колеса в 10 тон, що передається безпосередньо одній поперечині; 2) коли колеса зіступлять із рейок при положенні одного з цих коліс в середині колії на віддаленні 30 *см* від рейки, напруження не повинно переважити $178 \frac{кг}{см^2}$.

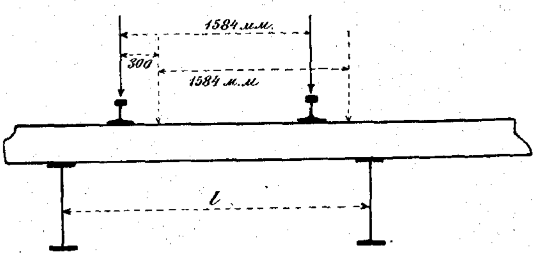


Рис. 63

При розрахунку не беріть на увагу власну вагу рейок і поперечин; пам'ятайте, що поперечина ослаблюється від бретналів (цвяхів) та шрубчаків, що їх забивається чи зашрубовується в поперечину; облічіть це ослаблення, припустивши наявність скрізної прямовисної діри діяметру 2 *см* в небезпечних перерізах обох випадків. Віддалення між точками прикладу вантажів (тиснень коліс) береться в обох випадках за рівне 1584 *мм*.

Розвязка. В першому випадку найбільший момент угину дорівнює:

$$M = \frac{10000\,(l - 158{,}4)}{2}\ кг.см,$$

де l є в *см*.

Момент опору поперечини (в небезпечнім перерізі):

$$W = \frac{(20-2)\,.\,25^2}{6}\ см^3 = 1875\ см^3.$$

Маємо тепер рівняння:

$$\frac{10000(l - 158{,}4)}{2\,.\,1875} = 102,$$

звідки:

$$l = 196{,}6\ см.$$

В другому випадку найбільший момент угину під колесом у середині колії:

$$M = \frac{10000\left(\frac{l}{2} - 49{,}2\right)(l - 60)}{l} \text{ кг.см},$$

де l є в *см.*

Маємо рівняння:

$$\frac{10000\left(\frac{l}{2} - 49{,}2\right)(l - 60)}{l \cdot 1875} = 178;$$

обидва корені додатні; більший корінь дорівнює:

$$l = 194{,}9 \text{ см}.$$

Заокругливши менше з двох одержаних значінь, матимемо остаточно:

$$\max l = 195 \text{ см}.$$

Зауважмо, що при одержаному значінні l праве колесо (в разі коли зіступить із рейок) вийде за межі прогону між повздовжних брусів. Тому треба перевірити, чи буде найбільший момент угину під колесом у середині колії (як ми припускали), чи над правим повздовжним брусом. Підсумки, які читач може сам зробити, показують, що наше припущення стверджується, і тому одержана розвязка зістається справедлива.

95. Залізну колію укладено на мості на повздовжних дерев'яних лежнях прямокутнього перерізу 25×30 *см*, які підтримуються поперечними залізними брусами через кожні півтора метри (рис. 64). Визначте найбільше нормальне на-

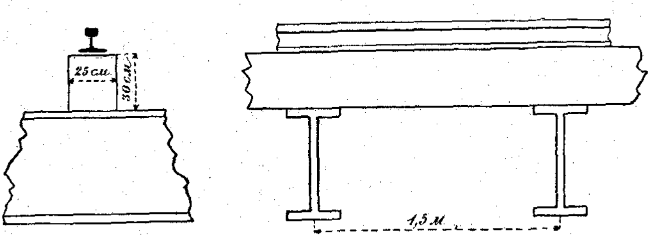


Рис. 64

пруження в лежні при стисненні колеса паротяга в 10 тон; віддалення між сумежними осями паротяга 1,50 *м.* Для упрощення розрахунку (в запас тривалости) розглядати лежня й рейку, як розрізні бруси з прогоном 1,5 *м*. Зверніть увагу, що тиск від коліс угинає так лежня, як і рейку, з тим, що угнуття їхні однакові. Момент безвлади (інерції) перерізу рейки $I_1 = 968$ *см*^{4}; модулі нормальної пружности: рейкової сталі $E_1 = 2,1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$, дерева $E_2 = 10^5 \frac{кг}{см^2}$; на власну вагу не звертайте уваги.

Розвязка. На прогоні міститься лише одно колесо; найбільший момент угину під колесом по середині прогону: $M = 375000$ *кг.см*. Позначивши момент угину для рейки M_1, для лежня M_2, маємо:

$$M_1 + M_2 = M.$$

З другого боку, рейка та лежень угинаються, зіставшись у щільному стулові, і тому, при рівності радіюсів кривини ϱ гнучкої лінії рейки й лежня в небезпечнім перерізі, маємо:

$$M_1 = \frac{E_1 I_1}{\varrho}; \quad M_2 = \frac{E_2 I_2}{\varrho},$$

де I_1 і I_2 — моменти безвлади перерізів рейки й лежня; звідси:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{E_1 I_1}{E_2 I_2},$$

і отже:

$$M_2 = M \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2},$$

відшукуване напруження в лежні:

$$p = \frac{M_2}{W},$$

де W є момент опору лежневого перерізу.

Маємо:

$$I_2 = 56250 \text{ см}^4; \quad W = 3750 \text{ см}^3;$$

підставивши решту заданих величин, одержимо:

$$p = 73,5 \frac{кг}{см^2}.$$

96. Напрямні сковзулі ковзанцеві (крейцкопфові) парової машини паротягової (рис. 65) зазнають угину підчас роботи машини. Визначте висоту їхнього прямокутнього перерізу, якщо перебіг толоку, цеб-то віддалення між його крайніми положеннями, 600 *мм*, сила тиску толока 10000 *кг*, довжина гінка 1500 *мм*, довжина сковзулів між їхніми опорними точками 1400 *мм*, ширина їхнього перерізу 120 *мм*; допускальне нормальне напруження при постійному навантаженні прийнято 900 $\frac{кг}{см^2}$. Вважайте тиск ковзанця за зосереджений у його середині.

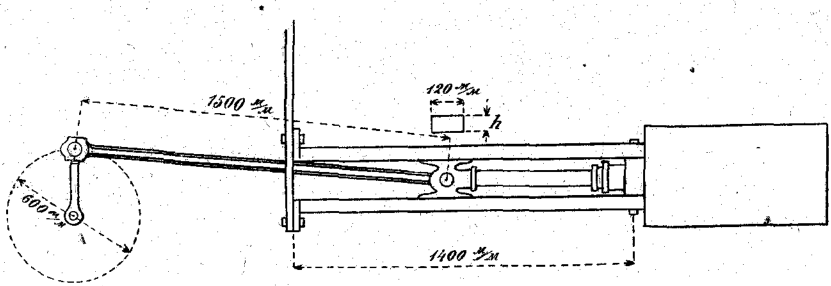


Рис. 65

Розвязка. Найбільший момент угину буде, коли ковзанець знаходиться по середині довжини сковзулів, коли досягає найбільшої величини й кут нахилу α гінка до толокової оси; $\max \operatorname{tg} \alpha = \cong \frac{600}{2 \,.\, 1500} = 0{,}2$; тиск ковзанця по середині прогону сковзулів: 10000 $кг \times 0{,}2 = 2000$ *кг*; при цьому положенні найбільший момент угину: 70000 *кг.см.*

При роботі машини, момент угину в даному перерізі зміняється від нуля до свого maximum'у. За формулою Вейравховою допускальне напруження:

$$\frac{2}{3} \cdot 900 \frac{кг}{см^2} = 600 \frac{кг}{см^2}.$$

Відшукувану висоту переріза знайдеться з рівнання:

$$\frac{12 \,.\, h^2}{6} \cdot 600 = 70000,$$

звідки:

$$h = 7{,}64 \;см \cong 80 \;мм.$$

97. Вантажевий поміст пакгавзів (комор), завдовжки 22 *м*, будується на залізних двокоритних балках профілю № 12, що закріплені за допомогою якірних (анкерних) своренів за схемою рис. 66. Розміри поперечного перекрою помосту показано на рисункові. Власна вага помосту (без залізних балків) $60 \frac{кг}{м^2}$; тимчасова вантага $240 \frac{кг}{м^2}$; допускальне нормальне напруження залізних балків $1000 \frac{кг}{см^2}$.

Для профілю № 12: $W_z = 55{,}7$ *см*³; власна вага одного повздовжного метру балка $11{,}25 \frac{кг}{см}$. Визначте, яке треба призначити віддалення (c) між балками.

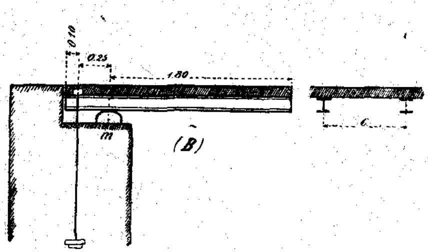


Рис. 66

Розвязка. Вантага на 1 повздовжний метр балка дорівнює:

$$(300\,c + 11{,}25)\,\frac{кг}{м},$$

де c є в метрах.

Найбільший момент угину:

$$\max M_z = \frac{(300 \,.\, c + 11{,}25) \,.\, 1{,}8^2}{2}\ кг.м = \frac{(300 \,.\, c + 11{,}25) \,.\, 1{,}8^2 \,.\, 100}{2}\ кг.см.$$

Маємо рівнання:

$$\frac{\max M_z}{W_z} = R$$

або

$$\frac{(300 \,.\, c + 11{,}25) \,.\, 1{,}8^2 \,.\, 100}{2 \,.\, 55{,}7} = 1000,$$

звідки:

$$c = 1{,}11\ м.$$

Добираємо найближче менше віддалення, що міститься ціле число разів у віддаленні 22 *м*. Остаточно:

$$c = 1{,}10\ м.$$

98. Перевірте найбільші дотичні напруження по невтральному шару балка попередньої задачі (припустивши $c = 1{,}10$ *м*); майте на увазі, що для двокоритних профілів можна наближено приймати, що величина статичного моменту половини перерізу відносно осередкової оси дорівнює $\frac{I_z}{0{,}85 \, . \, h}$, де h є висота перерізу.

Для даного випадку дано: $I_z = 334{,}4$ *см*^{4}; $h = 12$ *см*; товщина прямовисної стінки балка 5,1 *мм*.

Розвязка. Легко переконатись, що найбільше значіння поперечної сили має місце для перерізу балка безпосередньо ліворуч від опорної точки m (див. рис. 66), та й до того в разі, коли тимчасове навантаження розкладено по всій ширині помосту (хоч реакція якірного свореня ще більша, коли тимчасове навантаження знаходиться лише праворуч від точки m, але найбільша поперечна сила буде в останньому разі все-ж менша, ніж при повному навантаженні всього помосту).

Знаходимо реакцію свореня:

$$V = \frac{(300 \, . \, 1{,}1 + 11{,}25) \, . \, (1{,}8^2 - 0{,}35^2)}{2 \, . \, 0{,}25} \, кг = 2129 \, кг.$$

Найбільша поперечна сила у перерізу m:

$$2129 \, кг + (300 \, . \, 1{,}1 + 11{,}25) \, . \, 0{,}35 \, кг = 2248 \, кг.$$

Відшукуване дотичне напруження обчислюємо за формулою: $p_t = \frac{Q_y S}{b I_z}$, де $Q_y = 2248$ *кг*.

$$S = \frac{I_z}{0{,}85 \, . \, h}; \quad \text{отже,} \quad \frac{S}{I_z} = \frac{1}{0{,}85 \, . \, h},$$

$$b = 0{,}51 \, см.$$

Підставивши:

$$p_t = \frac{2248}{0{,}51 \, . \, 0{,}85 \, . \, 12} \, \frac{кг}{см^2} = 432 \, \frac{кг}{см^2}.$$

99. Вал, що віддалення між його опорними точками (чопами) дорівнює $l = 2$ метри (рис. 67), по середині свого прогону несе пасове коліща; позначмо через P вислідну ваги коліщати та натягу пасів. Вал може бути залізний з умовою, щоб нормальні напруження при вгині були не більші як $300 \frac{кг}{см^2}$, або сталевий, — тоді можуть бути більші нормальні напруження. З метою позбутись перекривлення в опорних чопах, треба, щоб кут α, який утворюється на підпорах дотичною до зігнутої оси вала з первопочатковим (до угину) напрямом оси вала, не перевищував 0,001 (в радіянах).

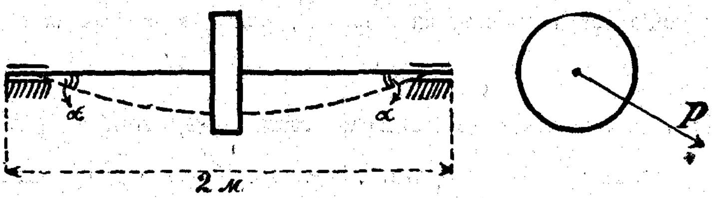


Рис. 67

З'ясуйте питання, при яких значіннях сили P є рація робити вал із дорожчої сталі, якщо модуль нормальної пружности заліза й сталі вважати за приблизно однаковий і рівний $E = 2{,}1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. При малих значіннях P діяметр вала, що його розраховано за умовами тривалости заліза й сталі, може бути такий малий, що умову жорсткости (відносно кута на підпорі) не можна буде одержати, і діяметр доведеться збільшувати, при чому напруження будуть менші від межі для заліза, не кажучи вже за сталь.

Очевидно, що поки, додержуючи умов жорсткости, напруження будуть менші від 300 $\frac{кг}{см^2}$, немає жадної рації проектувати вал із сталі. Звідси виходить, що вал має бути залізний, якщо є такі умови:

$$\frac{Pl^2}{16EI_z} = 0{,}001; \quad \frac{Pl}{4W_z} \leqslant 300 \frac{кг}{см^2},$$

де I_z і W_z є відповідні моменти безвлади й опору переріза вала. З цих умов маємо:

$$\frac{4EI_z}{lW_z} \leqslant 300000 \frac{кг}{см^2};$$

підставивши значіння E й $\frac{I_z}{W_z} = \frac{D}{2}$ (де D є діяметр вала), одержимо:

$$\frac{D}{l} \leqslant \frac{1}{14};$$

з першої умови маємо:

$$P=\frac{0{,}016EI_z}{l^2}=\frac{0{,}016\,E\pi D^4}{64l^2}=\frac{2100\,.\,\pi l^2}{4}\cdot\left(\frac{D}{l}\right)^4\leqslant\frac{2100\,.\,\pi\,.\,l^2}{4\,.\,14^4},$$

де l є в сантиметрах. Підставивши $l=200$ *см*, одержимо остаточно умову доцільности проєктування вала із заліза, а не із сталі:

$$P\leqslant 1717\ \text{кг}.$$

100. Два залізні двокоритні балки підтримують цегляну стіну завтовшки в $1\frac{1}{2}$ цеглини, цеб-то 40 *см*, з дверним прозором (витином) згідно з рис. 68. Визначте конче потрібний момент опору кожного балка при допускальному нормальному напруженні $1000\ \frac{кг}{см^2}$, якщо 1 $м^3$ муру важить 1600 *кг*. (Власною вагою балків для першого наближення нехтуємо).

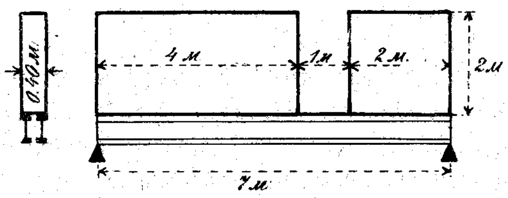


Рис. 68

Розвязка. Щоб визначити найбільший момент угину, знаходимо переріз, що в ньому поперечна сила дорівнює 0. Цей переріз відлежить на $\frac{22}{7}$ *м* від лівої підпори, і в цьому перерізі момент угину (найбільший) для кожного з двох балків дорівнює:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{22^2}{2\,.\,7^2}\cdot 1600\,.\,0{,}40\,.\,2\ \text{кг.м}=3160\ \text{кг.м}=316000\ \text{кг.см}.$$

Потрібний момент опору для кожного із двох балків:

$$W=\frac{316000}{1000}\ \text{см}^3=316\ \text{см}^3.$$

За нормальним сортаментом добираємо № балка з найближчого більшого значіння W. Зупиняємося на № 24, для якого $W=325$ $см^3$ (див. далі задачу 101).

101. Перевірте добір перерізу балків, що його зроблено в попередній задачі, взявши під увагу і вплив власної ваги балків.

Для профілю № 24 маємо власну вагу 34 $\frac{кг}{м}$.

Розвязка. В тому перерізі балка, що в ньому момент угину від навантаження муруванням найбільший і дорівнює (див. раніше) 3160 *кг.м* для кожного балка, маємо момент угину від власної ваги одного балка:

$$\frac{34 \cdot \frac{22}{7} \cdot \left(7 - \frac{22}{7}\right)}{2} \; кг.м = 206 \; кг.м.$$

Повний момент угину в цьому перерізі:

$$(3160 + 206) \; кг.м = 3366 \; кг.м = 336600 \; кг.см.$$

Найбільше нормальне напруження ($W = 325$ $см^3$ — див. задачу 100):

$$\frac{336600}{325} \frac{кг}{см^2} = 1036 \frac{кг}{см^2} > 1000 \frac{кг}{см^2}.$$

Як бачимо, напруження виходить вище за допускальне (майже на 4%), і через те доводиться призначити наступний що до величини профіль балка — № 26.

Дальшого перевірення напружень можна не робити, тому що для № 26 маємо $W = 403$ $см^3$, і через те напруження будуть напевне нижчі від норми.

102. Згідно з розвязкою задачі 101, щоб підтримати цегляну стіну за схемою рис. 68 (див. задачу 100), призначено два двокоритні балки № 26. Визначте їхнє угнуття під впливом навантаження від стіни та власної ваги. Для профілю № 26 маємо: $I_z = 5234$ $см^4$; власна вага 39 $\frac{кг}{м}$; $E = 2{,}1 \cdot 10^6 \; \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Якщо в стіні не було-б прозору, то угнуття дорівнювало-б:

$$f_1 = \frac{5}{384} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot 1600 \cdot 0{,}40 \cdot 2 + 39\right) \cdot 7^4 \cdot 100^3}{2{,}1 \cdot 10^6 \cdot 5234} \; см = 1{,}93 \; см.$$

Якщо ми обчислимо окремо угнуття під впливом навантаження від мурування стіни, а це навантаження прикладено на протязі того ділянки балка, де фактично є прозір у стіні, й угнуття це (f_2) віднімемо з означеного раніш угнуття (f_1), — то, очевидно, матимемо угнуття балка, яке стосується до справжнього навантаження.

Прозір f_2 обчислім наближено, як такий, що його спричиняє сукупна сила, яка рівна зі згаданим навантаженням, цеб-то $\frac{1}{2} \cdot 1600 \,.\, 0{,}40 \,.\, 2$ *кг* $= 640$ *кг*, і прикладена по середині прозору:

$$f_2 = \frac{640 \,.\, 2{,}5\,(3 \,.\, 7^2 - 4 \,.\, 2{,}5^2)\,100^3}{48 \,.\, 2{,}1 \,.\, 10^6 \,.\, 5234}\ \textit{см} = 0{,}37\ \textit{см}.$$

Отже, справжнє угнуття:

$$f = f_1 - f_2 = 1{,}56\ \textit{см}.$$

Точно розрахувати угнуття f_2 (в *см*) можна за формулою (читачеві пропонується проміркувати її вивід):

$$f_2 = \frac{640 \,.\, 100^3}{48 \,.\, 2{,}1 \,.\, 10^6 \,.\, 5234} \int_2^3 x\,(3 \,.\, 7^2 - 4x^2)\,dx.$$

103. Визначте віддалення a між підпорами бруса задачі 81 (рис. 52) так, щоб угнуття бруса були як-найменші.

Розвязка. Умову задачі буде додержано тоді, як угнуття кінців односпірників та середини прогону будуть однакові. Користуючися з графоаналітичної методи, легко матимемо:

1) Стрілка угнуття по середині прогону (q—інтенсивність навантаження):

$$f_c = \frac{5}{384} \cdot \frac{qa^4}{EI} - \frac{1}{64} \cdot \frac{q\,(l-a)^2 \,.\, a^2}{EI}.$$

2) Стрілка угнуття кінця односпірника:

$$f_k = \frac{1}{128} \cdot \frac{q\,(l-a)^4}{EI} - \frac{l-a}{2} \cdot \left[\frac{qa^3}{24EI} - \frac{q\,(l-a)^2 \,.\, a}{16EI}\right].$$

Тут перший член виражає угнуття в разі, коли-б дотична до зігнутої оси на підпорі була позема; другий член виражає вплив кута цієї дотичної з горизонтом.

Зрівнавши $f_c = f_k$, одержимо по скороченнях рівнання:

$$4a^3 - 12a^2 l + 3l^3 = 0.$$

звідки знаходимо:

$$a = 0{,}554\,l.$$

104. Колінчастого важеля (підойму) $ABCD$ (з колінами завдовжки a, b, c) постійного перерізу кінцем A замуровано в стіну (рис. 69). Знайдіть угнуття й кут поворота перерізу D. (Розтягом ділянки BC знехтувати).

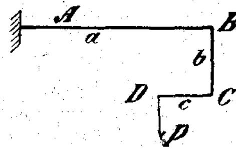


Рис. 69

Відповідь.

$$f=\frac{P}{3EI}(a^3-3a^2c+3ac^2+3bc^2+c^3);$$

$$\vartheta=\frac{P}{2EI}(a^2-2ac-2bc-c^2).$$

105. Залізний двокоритний (I) брус, профілю № 20, лежить на двох підпорах при прогоні 4 *м* (рис. 70) та несе по середині прогону скупчену вагу $P=3$ *тон.* По середині-ж прогону цього бруса підтримує другий поперечний залізний двокоритний брус, профілю № 16; віддалення між підпорами цього останнього бруса дорівнює 2 *м*; ці підпори знаходяться на однакових віддаленнях по 1 *м* від першого бруса.

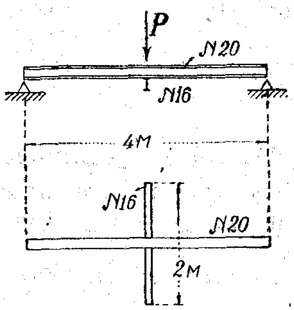


Рис. 70

Визначте найбільші нормальні напруження в обох брусах при вказаному навантаженні.

Дано:

для № 20: $I_z=2014$ *см*^{4}; $W_z=201{,}4$ *см*^{3};

для № 16: $I_z=909$ *см*^{4}; $W_z=113{,}4$ *см*^{3}.

Розвязуючи завдання, знехтуйте впливом власної ваги брусів.

Розвязка. Сила P спричиняє угин обох брусів; можна сказати, що одна частина її (P_1) згинає першого бруса (№ 20), а друга частина (P_2) — другого бруса (№ 16).

$$P_1+P_2=P=3000\ кг.$$

Угнуття обох брусів однакові; тому:

$$\frac{P_1 \cdot 400^3}{48 \cdot E \cdot 2014}\ см=\frac{P_2 \cdot 200^3}{48 \cdot E \cdot 909}\ см,$$

звідки:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{2014}{909}\cdot\frac{2^3}{4^3}=0{,}277,$$

$$\frac{P_1+P_2}{P_2}=\frac{P}{P_2}=1{,}277,$$

$$P_2=\frac{3000}{1{,}277}\ кг=2349\ кг;\ P_1=(3000-2349)=651\ кг.$$

Найбільше напруження першого бруса (№ 20):

$$\frac{651\,.\,400}{4\,.\,201{,}4}\ \frac{кг}{см^2}=323\ \frac{кг}{см^2}.$$

Найбільше напруження другого бруса (№ 16):

$$\frac{2349\,.\,200}{4\,.\,113{,}4}=1036\ \frac{кг}{см^2}.$$

Одержаний наслідок указує на нераціональність розглянутої конструкції що до призначення №№ профілів брусів: виявляється, що брус № 16 міцно напружений (по-над норму, якщо для заліза взяти допускальне напруження $1000\ \frac{кг}{см^2}$), а бруса № 20 дуже слабо використовано (напруження утричі менше від норми). Дослідження умов раціонального призначення №№ профілів—див. задачі 106 і 107.

106. Дослідіть питання: яке має бути відношення висот (h_1 і h_2) двох перехресних брусів (рис. 71), навантажених силою P в точці їхнього перетину, якщо потрібно, щоб найбільші нормальні напруження в обох брусах були однакові (припускається, що матеріял обох брусів однаковий).

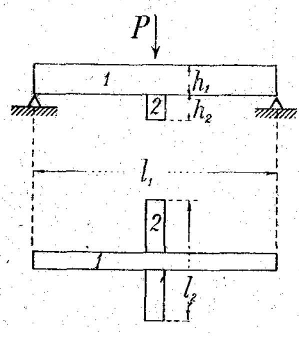


Рис. 71

Загальна схема розкладу брусів така сама, як у задачі 105; припускається, що перерізи симетричні що до невтральної лінії.

Розвязка. Хай для першого бруса дано величини I_1 і W_1, для другого — I_2 і W_2. Як і в задачі 105, позначмо частину сили P, що спричиняє вгин першого бруса, через P_1, а частину, що спричиняє вгин другого бруса, через P_2.

З умови рівности угнуть обох брусів маємо:

$$\frac{P_1 l_1^3}{48 E I_1} = \frac{P_2 l_2^3}{48 E I_2},$$

звідки:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{l_2^3}{l_1^3}. \qquad (1)$$

З умови рівности напружень обох брусів маємо:

$$\frac{P_1 l_1}{4 W_1} = \frac{P_2 l_2}{4 W_2},$$

звідки:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}. \qquad (2)$$

З (1) та (2) одержуємо:

$$\frac{I_1}{I_2} \cdot \frac{l_2^3}{l_1^3} = \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

або

$$\frac{I_1}{W_1} : \frac{I_2}{W_2} = l_1^2 : l_2^2.$$

Але

$$\frac{I_1}{W_1} = \frac{h_1}{2}$$

і

$$\frac{I_2}{W_2} = \frac{h_2}{2};$$

Отже, остаточно:

$$\frac{h_1}{h_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Розвязка ця справедлива при всіх формах перерізів, симетричних що до невтральної лінії.

107. Хай перехресні бруси з однакового матеріялу, розкладені та навантажені за схемою рис. 71, мають геометрично подібні поперечні перерізи, а висоти їхніх перерізів вдоволяють розвязку задачі 106 (цеб-то найбільші напруження брусів при вгинанні від сили P — однакові). З'ясуйте, яку частину сили P бере на себе в такому разі другий (короткий) брус.

Розвязка. Користуючися з позначень задачі 106, напишемо:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{I_1}{I_2}\cdot\frac{l_2^3}{l_1^3}$$

(див. розвязку задачі 106).

При геометрично подібних перерізах:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{h_1^4}{h_2^4}.$$

Але згідно з умовою:

$$\frac{h_1}{h_2}=\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2$$

(див. розвязку задачі 106).

Тому:

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{l_1^8}{l_2^8}$$

і

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{l_1^5}{l_2^5},$$

звідки:

$$P_2=P\cdot\frac{l_2^5}{l_1^5+l_2^5}.$$

Приміром, при $l_1=2l_2$ (див. задачу 105, рис. 70):

$$P_2=P\frac{1}{2^5+1}=\frac{1}{33}\cdot P.$$

В цьому разі поперечний брус звільняє від вантаги повздовжний усього лише на 3%.

Розвязка цієї задачі дає деякі вказівки й що до добору №№ профілів перехресних двокоритних брусів задачі 105 (двокоритні перерізи різних №№ не сповна подібні геометрично, але з певним наближенням можна й до цього випадку пристосувати наслідки розвязання цієї задачі). А саме: сповна використати тривалість обох брусів (коли найбільші напруження в обох брусах дорівнюють допускальну межу) можна при $l_1=2l_2$ лише в разі незначного вивантаження повздовжного бруса, що й є головна складова частина конструкції; але тоді, очевидно, вигідніше зовсім відмовитись од системи перехресних брусів і прийняти вантаж P на один лише поперечний короткий брус. Приміром, вантажа 3 тони (див. задачу 105) можна підтримати одним брусом прогону 2 *м*, призначивши профіль № 18 при напруженні $978 \frac{кг}{см^2} < 1000 \frac{кг}{см^2}$.

Навіть якщо $l_1 = l_2$ і поперечний брус приймає на себе половину всієї вантаги (при $l_1 = l_2$ повинно бути для рівности напружень: $h_1 = h_2$, цеб-то перерізи брусів однакові), все-ж вигідніше буде прикласти один брус сильнішого профілю (радиться читачеві в цьому переконатись).

Отже, система перехресних брусів не раціональна по суті в разі навантаження у вузлі їхнього перетину.

Перевага цієї системи виявляється лише тоді, коли вантагу на повздовжний брус не прикладено тільки в згаданому вузлі, а денебудь і в инших точках прогону.

---

3. Бруси постійного опору вгинові

Виміри поперечних перерізів брусів постійного опору мають вдоволяти умову:

$$\frac{W_z}{\max W_z} = \frac{M_z}{\max M_z},$$

цеб-то моменти опору перерізів мають бути пропорціональні з відповідними моментами вгину.

---

108. Визначте форму оси постійного опору вгинові, якщо коліща (шків) насаджується по середині оси (рис. 72);

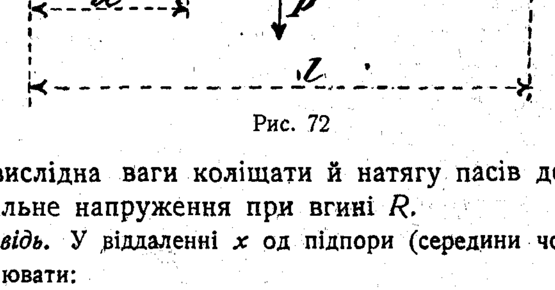


Рис. 72

задано: вислідна ваги коліщати й натягу пасів дорівнює P, і допускальне напруження при вгині R.

Відповідь. У віддаленні x од підпори (середини чопа) діяметр має дорівнювати:

$$D_x = \sqrt[3]{\frac{16Px}{\pi R}} = D\sqrt[3]{\frac{2x}{l}},$$

де D є діяметр по середині. На практиці за цією теоретичною формою проектується упрощена конічна форма так, щоб у першому ліпшому перерізі діяметр не був менший від теоретичного.

109. Бруса, закріпленого на одному кінці, навантажено суцільною вантагою, що її графика інтенсивности показано на рис. 73; найбільша інтенсивність у закріпленого кінця дорівнює q.

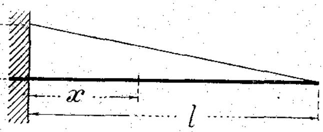


Рис. 73

Визначте форму бруса постійного опору при умові, що всі поперечні перерізи—геометрично подібні прямокутники.

Розвязка. Позначмо: M_z, a, h — відповідно момент угину, ширину й висоту для перерізу, що відлежить на x від лівого кінця; $\max M_z$, a_0, h_0 — ті-ж величини для лівого закріпленого перерізу.

Матимемо:

$$\frac{M_z}{\max M_z} = \frac{(l-x)^3}{l^3}.$$

Тому мусить бути:

$$\frac{ah^2}{6} : \frac{a_0 h_0^2}{6} = \frac{ah^2}{a_0 h_0^2} = \frac{(l-x)^3}{l^3},$$

але за умовою:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{h}{h_0};$$

підставивши, знаходимо остаточно:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{h}{h_0} = \frac{l-x}{l}.$$

Відшукувана форма є пірамідальна.

110. Аркушова (листова) сталева ресора, показана схематично на рис. 74, складається з 10 аркшуів завширшки 100 *мм* і завтовшки 10 *мм* кожен; вони в сукупності становлять бруса постійного опору. Яке може бути найбільше статичне навантаження P на кожен кінець ресори, якщо допускальне напруження дорівнює $5000 \frac{кг}{см^2}$, і яке при цьому буде угнуття ресори? $E = 2{,}2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

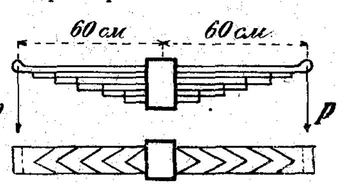


Рис. 74

Відповідь. $P = 1390$ *кг*; угнуття 8,2 *см*.

111. Розвяжіть питання попередньої задачі на випадок, коли ресора містить у собі лише 5 аркушів тих-же самих розмірів, як і в задачі 110, так що середня частина ресори має постійну товщину, як це показано на рис. 75.

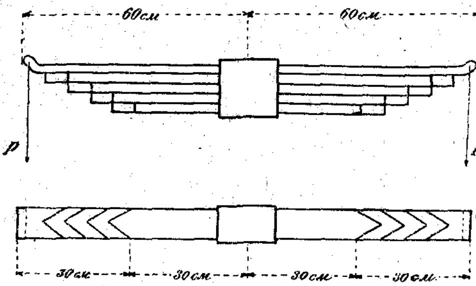


Рис. 75

Розвязка. $P = 695$ *кг.* Ресора вгинається, як брус постійної висоти, що в середній частині має постійну ширину, а по кінцях звужується за законом прямої до нуля. Розрахунок угину простіш за все зробити графоаналітичною методою (див. курси „Опору матеріялів“; прикладання графоаналітичної методи до розрахунку брусів змінного перерізу); дуже легко знайти угнуття $f = 5{,}8$ *см.*

---

4. Скісний угин

Знадвірні сили лежать в площині, що містить у собі вісь бруса, але не містить у собі ані одної з головних осередкових осей безвлади (інерції) поперечних перерізів (CY або CZ—див. рис. 33).

M_z, M_y, I_z, I_y — моменти вгину й моменти безвлади перерізу відносно осей CZ і CY (знак M визначається зі знаку моментів сил, що їх прикладено ліворуч од перерізу).

Нормальне напруження по поперечному перерізові в даній його точці:

$$p_n = \frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y},$$

де y і z є координати цієї точки (відносно осей CY і CZ). Найбільші напруження—в точках, що найбільше віддалені од невтральної лінії.

Якщо площина зовнішніх сил (P) утворює кута φ з віссю CY (рис. 76), то невтральна лінія (nn) утворює кута α з віссю CZ, при чому

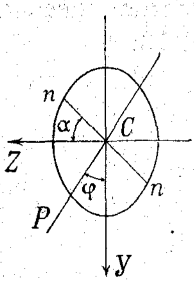


Рис. 76

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \varphi.$$

---

112. Залізний двокоритний брус Z-го перерізу (профіль № 16) зазнає вгину від сил, що лежать у площині (P) стінки бруса. З'ясуйте, в яких точках поперечного перерізу є найбільші нормальні напруження по перерізові.

Дано: $I_z > I_y$; положення головних осередкових осей — див. рис. 77.

Розвязка. Випадок скісного вгину. Якщо $I_z > I_y$, то (див. рис. 76):

$\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi$, цеб-то $\alpha > \varphi$ або $\alpha > 13°17'$. Нанісши на рисунок приблизне положення невтральної лінії, переконуємося, що найвіддаленіші від неї точки—вершки прямих кутів профілю (вгорі й унизу стінки); в цих точках нормальні напруження найбільші.

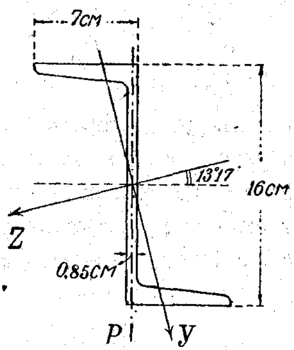


Рис. 77

113. Зазначений у попередній задачі брус (рис. 77) жорстко закріплено на одному кінці при прямовиснім положенні стінки; другий кінець навантажено за схемою рис. 56. (див. стор. 59). Брус завдовжки 3 метри. Яка найбільша можлива величина вантажу P, якщо допускальне нормальне напруження $1000 \frac{кг}{см^2}$? Дано: $I_z = 1172$ $см^4$; $I_y = 178{,}6$ $см^4$. Власною вагою бруса знехтуйте.

Розвязка. Найбільші моменти вгину (для опорного перерізу):

$$M_z = -P \,.\, 300 \,.\, \cos 13°17' \ кг.см = -291{,}9\, P \ кг.см.$$

$$M_y = +P \,.\, 300 \,.\, \sin 13°17' \ кг.см = +\ 68{,}7\, P \ кг.см.$$

Координати небезпечних точок (див. задачу 112):

$$y = \pm (8 \,.\, \cos 13°17' - 0{,}425 \,.\, \sin 13°17') = \pm 7{,}69 \ см.$$

$$z = \pm (8 \,.\, \sin 13°17' + 0{,}425 \,.\, \cos 13°17') = \pm 2{,}25 \ см.$$

Найбільше напруження:

$$\frac{M_z \cdot y}{I_z} - \frac{M_y \cdot z}{I_y} = \mp P\left(\frac{291{,}9 \cdot 7{,}69}{1172} + \frac{68{,}7 \cdot 2{,}25}{178{,}6}\right)\frac{кг}{см^2}.$$

Зрівнавши абсолютну величину з допускальним напруженням, знайдемо остаточно:

$$P = 360 \ кг.$$

114. Обчисліть угнуття бруса попередньої задачі в прямовисному та поземому напрямах при знайденій раніше прямовисній вантазі на кінці ($P = 360$ *кг*). $E = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Складаємо окремо формули для угнуть у площинах головних осередкових осей (CY і CZ):

$$f_y = \frac{360 \cdot \cos 13°17' \cdot 300^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 1172} \ см,$$

$$f_z = \frac{360 \cdot \sin 13°17' \cdot 300^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 178{,}6} \ см.$$

Прямовисний угин:

$$f_1 = f_y \cos 13°17' + f_z \sin 13°17' =$$

$$= \frac{360 \cdot 300^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6}\left(\frac{\cos^2 13°17'}{1172} + \frac{\sin^2 13°17'}{178{,}6}\right) см = 1{,}82 \ см.$$

Поземий угин:

$$f_2 = f_z \cos 13°17' - f_y \sin 13°17' =$$

$$= \frac{360 \cdot 300^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6} \sin 13°17' \cos 13°17' \left(\frac{1}{178{,}6} - \frac{1}{1172}\right) см = 1{,}72 \ см.$$

115. Рівнобока залізна кутівка, що її переріз подано на рис. 78, лежить на двох підпорах і вгинається від діяння власної ваги. Відшукайте граничну величину прогону l, при умовах: 1) щоб найбільші нормальні напруження не перевищували 750 $\frac{кг}{см^2}$; 2) щоб угнуття (в прямовисній площині) не було більше за $\frac{1}{600}$ частини прогону. Вага повздовжного метру кутівки 15 *кг*; $I_x = 176{,}3 \ см^4$; $I_{x0} = 280 \ см^4$; $I_{y0} = 72{,}7 \ см^4$ (точка C — осередок ваготіння перерізу). $E = 2{,}1 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Маємо випадок скісного вгину.

1) Найбільші що до абсолютної величини напруження (стискаючі) мають місце в горішнього ребра прямовисної полиці; в перерізі по середині прогону це напруження дорівнює:

$$p=\frac{0{,}15l^2}{\sqrt{2}\,.\,8}\cdot\left(\frac{10-2\times2{,}82}{\sqrt{2I_{y0}}}+\frac{10}{\sqrt{2I_{x0}}}\right)\frac{кг}{см^2},\quad (l\text{ — в } см).$$

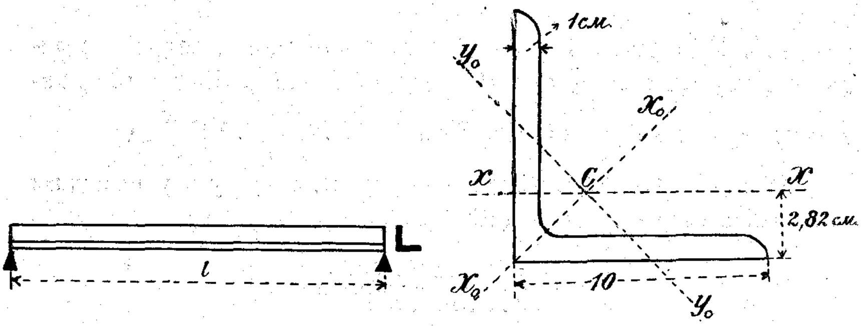


Рис. 78

Зрівнавши $p=750\ \frac{кг}{см^2}$ та розвязавши одержане рівнання, знайдемо:

$$l=914\ см.$$

2) Обчисливши спочатку окремо угнуття по середині у площині головних осередкових осей безвлади (x_0x_0 і y_0y_0), додавши прямовисні складові цих угнуть та зрівнавши їхню сумму $\frac{1}{600}$ частини прогону, одержимо рівнання:

$$\frac{5}{384}\cdot\frac{0{,}15l^4}{\sqrt{2}E}\left(\frac{1}{I_{x0}}+\frac{1}{I_{y0}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{l}{600},$$

де l — в *см*. Звідси:

$$l=591\ см.$$

116. В конструкціях залізних мостів часто вживається поземих стрижнів, складених із двох залізних кутівок; ці кутівки знютовано так, що переріз стрижня має форму або рис. 79 *A*, або 79 *B* (в останньому разі кутівки знютовують за допомогою особливих поперечних платівок, що їх показано точковано). З'ясуйте на зразку рівнобічних кутівок, що переріз їхній показано на рис. 78, при якому способі нютувати угнуття стрижня від власної ваги буде менше; товщину платівок δ прийняти за рівну 1 *см*. Площа перерізу кутівки 19,2 *см*^{2}. Моменти безвлади перерізу—див. задачу 115.

Розвязка. У випадкові рисунка 79 A має місце плоский угин, і угнуття пропорціональне з величиною $\frac{1}{I}$, де

$$I = 2\,(176{,}3 + 19{,}2 \times 2{,}82^2)\ \textit{см}^4$$

(див. дані, що тичаться до перерізу кутівки, зазначені в задачі 115). У випадку рис. 79 B має місце скісний угин, і прямовисне угнуття пропорціональне в даному разі з величиною:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2}\right);$$

$$\text{де } I_1 = 2\,[72{,}7 + 19{,}2 \times (2{,}82 + 0{,}5)^2 \,.\, 2]\ \textit{см}^4 = 992\ \textit{см}^4,$$

$$I_2 = 2 \,.\, 280\ \textit{см}^4 = 560\ \textit{см}^4.$$

Підставивши, одержимо, що в першому випадку вгнуття пропорціональне з величиною:

$$1{,}52 \,.\, 10^{-3},$$

а в другому випадку—з величиною:

$$1{,}40 \,.\, 10^{-3}.$$

Другий спосіб дає жорсткішу конструкцію.

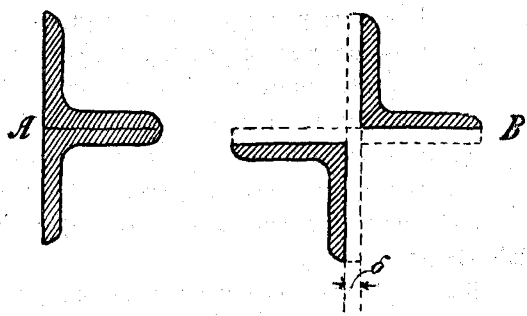


Рис. 79

Зауважмо, що спосіб розраховувати угнуття, який иноді трапляється, при другому типі перерізу (рис. 79 B) за звичайними формулами плоского вгину (цеб-то так-же само, як і при типі A), при чому в формулу вводиться момент безвлади перерізу відносно поземої осередкової оси (не головної!),—явно помилковий; при такому способі розраховувати ми одержали-б, що угнуття пропорціональне з величиною $\frac{1}{I}$, де $I = 2\,(176{,}3 + 19{,}2 \times 3{,}32^2)\ \textit{см}^4 = 776\ \textit{см}^4$, цеб-то пропорціональне з величиною $1{,}29 \,.\, 10^{-3}$, і ми зробили-б помилку до 8% в бік применшення.

РОЗДІЛ V

СКЛАДНИЙ ОПІР

1. Нерівномірний розтяг і стиск; угин із розтягом або стиском

При неосередковому розтягові або стискові нормальне напруження по поперечному перерізові в точці з координатами (y, z) визначається за формулою:

$$p_n = \pm \frac{P}{\omega}\left(1 + \frac{y_0 y}{r_z^2} + \frac{z_0 z}{r_y^2}\right),$$

де:

P є сила розтягу або стиску;

y_0, z_0 — координати точки перерізу, що через неї проходить напрям сили P (координатні осі CY і CZ, як завжди — головні осередкові осі перерізу; див. рис. 33);

r_y, r_z — радіюси безвлади перерізу відносно CY і CZ.

Припустивши $p_n = 0$, одержимо рівнання невтральної лінії.

Найбільші напруження — в точках, що найбільш од невтральної лінії віддалені.

В загальному випадку сукупности вгину з розтягом або стиском:

$$p_n = \pm \frac{P}{\omega} + \frac{M_z \, . \, y}{I_z} - \frac{M_y \, . \, z}{I_y}.$$

---

117. Відшукайте напруження у трьох вершків трикутнього перерізу, показаного на рис. 80 (трикутник рівнораменний), якщо напрям сили розтягу P проходить через вершок (1).

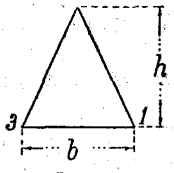


Рис. 80

Відповідь. В точці $1 : p_n = \frac{18P}{bh}$ (розтяг)

„ „ $2 : p_n = -\frac{6P}{bh}$ (стиск)

„ „ $3 : p_n = -\frac{6P}{bh}$ (стиск).

118. Відшукайте ядро перерізу для перстенуватого перерізу при знадвірнім діяметрі D і внутрішнім d.

Відповідь. Ядро перерізу — круг, що його діяметр дорівнює:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{D^2+d^2}{D}.$$

119. Відшукайте ядро перерізу рівнораменного трикутника, що його показано на рис. 80.

Відповідь. Ядро перерізу — трикутник, подібний до заданого, так само розкладений, і оседок його ваготіння зіходиться з оседком ваготіння даного трикутника; розміри ядра перерізу відповідно дорівнюють $\frac{b}{4}$ і $\frac{h}{4}$.

120. Збудуйте ядро перерізу для профілю двокоритного (I) бруса, показаного на рис. 81; площа профілю $\omega = 63{,}6\ см^2$, моменти безвлади (інерції) $I_x = 8881\ см^4$; $I_y = 366\ см^4$.

Відповідь. Ядро перерізу є ромб, що його центр зіходиться з оседком перерізу, а вершки лежать на осях XX і YY, при чому косина (діягональ) ромбу, що зіходиться з віссю XX, дорівнює $1{,}90\ см$, а та, що зіходиться з віссю YY, дорівнює $18{,}62\ см$.

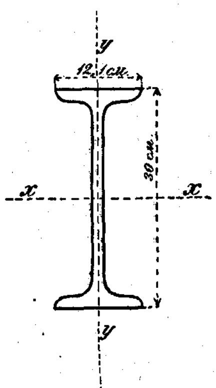


Рис. 81

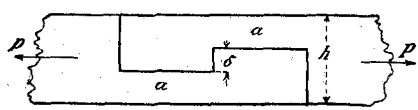


Рис. 82

121. Визначте розмір зарубання δ (рис. 82) в частках висоти бруса h так, щоб тривалість спряження (закріплення, що опирається розтягові силами P) була найбільша, якщо допускальне напруження зім'яття уздовж волокон (у зарубанні) — $40\ \frac{кг}{см^2}$, допускальне напруження розтягу — $114\ \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Найбільша тривалість буде при тій умові, щоб при розтягові закріплення (замка) одночасно осягалось граничних напружень як у зарубанні (зім'яття), як і в найнапруженішому волокні частини a бруса, — ця частина зазнає нерівномірного розтягу.

Цю умову позначають рівнянням:

$$40\,\delta = \frac{114\,(h-\delta)^2}{8h+4\delta};$$

звідки:

$$\delta = 0{,}205\,h \cong \frac{1}{5}\,h.$$

122. Перевірте напруження знадвірнього волокна частини *a* зарубання (див. задачу 121), якщо $\delta = \frac{1}{5}h$, і напруження внутрішнього (крайнього) волокна цієї частини дорівнює $114\,\frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Відшукуване напруження дорівнює:

$$p = 114\,\frac{кг}{см^2}\cdot\frac{1-\frac{6\times 0{,}3}{0{,}4}}{1+\frac{6\times 0{,}3}{0{,}4}} = -72{,}5\,\frac{кг}{см^2}.$$

Це волокно стискається при розтягові закріплення.

123. В конструкціях легких залізних мостів та в другорядних частинах тяжких мостів вживають стрижнів із однієї кутівки, яка сполучається з иншими частинами конструкції рядом нют, що містяться в одній частині цієї кутівки (рис. 83); через ці нюти й передається стискальну та розтягальну натугу P. Часто перевірку напружень роблять за формулою для рівномірного розтягу: $p = \frac{P}{\omega}$; насправді розтягальна натуга, справлена по осі нютового ряду, спричиняє нерівномірний розтяг.

Перевірте на зразкові кутівки, що її переріз показано на рис. 83, яка велика помилка при розрахункові за формулою рівномірного розтягу: $\omega = 12{,}27\,см^2$, $I_x = 114{,}6\,см^4$, $I_y = 30{,}4\,см^4$; C — осередок ваготіння; точка A (по середині товщини поземої полиці у віддаленні 4,5 *см* від краю полиці) лежить на напрямі сили P.

Розвязка. Координати точки A відносно головних осей X, Y відповідно:

$$\frac{4{,}5-0{,}4}{\sqrt{2}}\,см = 2{,}90\,см;\quad \frac{0{,}4}{\sqrt{2}} = 0{,}28\,см;$$

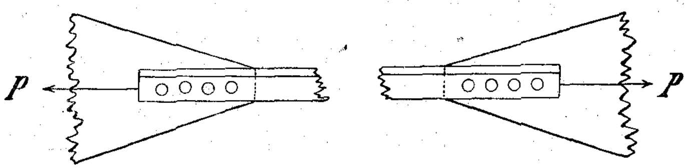
найбільше напруження утворюється в долішній точці правого кінця поземої полиці; координати цієї точки відносно осей X, Y дорівнюють:

$$\frac{8}{\sqrt{2}}\,см = 5{,}66\,см;\quad \frac{8-4{,}5}{\sqrt{2}} = 2{,}47\ см.$$

Напруження в цій точці дорівнює:

$$p = \frac{P}{12{,}27}\left(1 + \frac{2{,}90\,.\,5{,}66\,.\,12{,}27}{114{,}6} + \frac{0{,}28\,.\,2{,}47\,.\,12{,}27}{30{,}4}\right)\frac{кг}{см^2} =$$

$$= \frac{P}{12{,}27}\cdot 3{,}04.$$



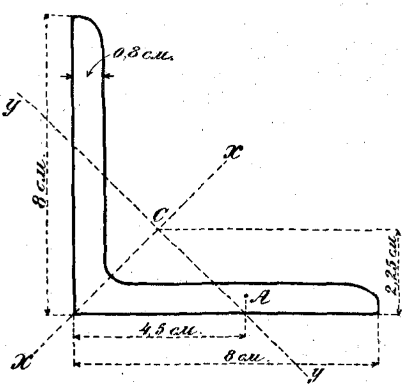


Рис. 83

Як бачимо, справжнє напруження в 3,04 рази більше за те, що визначається за формулою рівномірного розтягу.

124. Кам'яна стінка підпирає шар води $h\,м$ заввишки. Яка може бути найменша товщина стінки (x), якщо потрібно, щоб у муруванні не виникало розтягальних напружень?

Питома вага муру 2,6.

Розвязка. Виділяємо частину стінки завдовжки 1 *м* (у напрямі, сторчовім із площиною рисунка) й розглядаємо сили, прикладені до цієї частини. Стінка зазнає стиску від власної ваги та вгину від тиску води. Складімо формулу для розрахунку напруження у руба (a) в основі стінки (див. рис. 84):

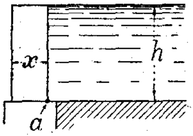


Рис. 84

$$p_n = -2{,}6\,h + \frac{h^3}{6} \cdot \frac{6}{x^2} = -2{,}6\,h + \frac{h^3}{x^2}.$$

Зрівнавши це напруження з нулем, матимемо:

$$x = \frac{h}{\sqrt{2{,}6}} = 0{,}62\,h.$$

125. Якщо припустити в попередній задачі див. (рис. 84) $h = 3\,м$ та призначити товщину стінки згідно з розвязкою задачі 124: $x = 0{,}62\,h$, то яке буде найбільше стискальне напруження в основі стінки?

Відповідь. $-2\,.\,2{,}6\,.\,3\,\frac{тон.}{м^2} = 1{,}56\,\frac{кг}{см^2}$ (вдвічі більше, ніж рівномірне напруження від самої лише власної ваги стінки).

126. Кам'яна стінка трапезоїдного перерізу підпирає шар води h заввишки (рис. 85). Задня грань стінки прямовисна; по верху стінка b завтовшки; вага одиниці об'єму мурування γ. При якій товщині по низу x напруження по всій площі основи стінки будуть однакові (рівномірно розподілені)?

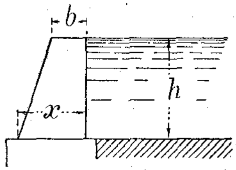


Рис. 85

Розвязка. Напруження будуть рівномірно розподілені по всій площі основи стінки, якщо сума моментів усіх сил, прикладених до стінки, відносно центру долішнього перерізу дорівнює 0.

Розглядаючи частину стіни, що завдовжки дорівнює 1 (в напрямі, сторчовім із площиною рисунка), матимемо:

Вага цієї частини стіни:

$$\gamma \cdot \frac{x+b}{2} \,.\, h.$$

Рамено вислідної сили вагоніння відносно середини долішньої основи:

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2 + bx + b^2}{3\,(x+b)} = \frac{x^2 + xb - 2b^2}{6\,(x+b)}.$$

Згадана раніше умова напишеться так:

$$\gamma \cdot \frac{x+b}{2} \cdot h \cdot \frac{x^2 + xb - 2b^2}{6\,(x+b)} - \frac{h^3}{6} = 0,$$

$$\gamma\,(x^2 + xb - 2b^2) - 2h^2 = 0.$$

Розвязавши це рівнання, знайдемо відшукуване значіння x.

Наприклад, припустім: $b = 0{,}4\ м$, $h = 3\ м$, $\gamma = 2{,}6\ \frac{тон.}{м^3}$.
Рівнання:

$$2{,}6\,(x^2 + 0{,}4\,x - 0{,}32) - 18 = 0,$$

маємо корені:

$$x = -0{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 + 7{,}24}.$$

Для нас має значіння лише додатній корінь:

$$x = (-0{,}2 + 2{,}7)\ м = 2{,}5\ м.$$

---

2. Скрут із розтягом, стиском або вгином

Розрахунка зводиться до визначення нормальних (p_n) та дотичних (p_t) напружень на підставі принципу незалежности діяння сил; перевірку тривалости робиться на підставі однієї з двох поширених нині теорій тривалости, а саме:

$$0{,}35\,p_n + 0{,}65\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \leqslant R \text{ (теорія найбільших видовжень)}$$

або

$$\sqrt{p_n^2 + 4p_t^2} \leqslant R, \text{ (теорія найбільших скосів),}$$

де R є допускальне нормальне напруження.

Перша формула з поправкою Баховою:

$$0{,}35\,p_n + 0{,}65\sqrt{p_n^2 + 4\,(\alpha_0 p_t)^2} \leqslant R,$$

де

$$\alpha_0 = \frac{R}{1{,}3\,R_t};\ R_t \text{ є допускальне дотичне напруження.}$$

Зокрема у випадку вгину зі скрученням круглого вала маємо умови:

$$\frac{0{,}35\,M_{уг} + 0{,}65\sqrt{M_{уг}^2 + M_{скр}^2}}{W} \leqslant R$$

або

$$\frac{0{,}35\,M_{уг} + 0{,}65\sqrt{M_{уг}^2 + (\alpha_0 M_{скр})^2}}{W} \leqslant R,$$

або

$$\frac{\sqrt{M_{уг}^2 + M_{скр}^2}}{W} \leqslant R,$$

де $M_{уг}$ і $M_{скр}$ є моменти угину й скруту для небезпечного перерізу, W — момент опору (при вгині) перерізу.

---

127. Визначте діяметр d стрижня домкрата (внутрішній діяметр нарізи; див. рис. 86), що править, щоб підносити вантаж $P = 8$ тон, якщо допускальне нормальне напруження $600 \frac{кг}{см^2}$, відношення середнього діяметру нарізи (d_c) до внутрішнього діяметру: $\frac{d_c}{d} = \frac{9}{8}$; сучинник тертя ґвинта до гайки $\mu = 0{,}12$; кут нахилу ґвинтової нарізи $a = 4°$.

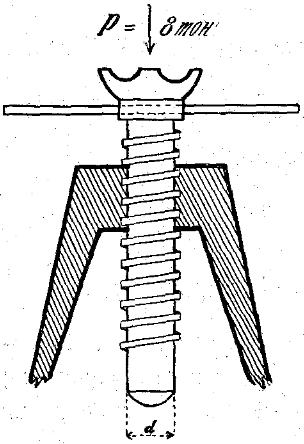


Рис. 86

Розвязка. Щоб піднести вантаж, треба прикласти до стрижня домкрата повертальний момент M; його величину можна відшукати з рівнання робіт:

$$M\varphi = P\frac{d_c}{2}\varphi \operatorname{tg} a + \mu P \frac{d_c}{2}\varphi,$$

де φ є деякий кут повороту ґвинта.

Підставивши, знайдемо:

$$M = 760\, d_c\, кг\,.\,см \qquad (d_c — \text{в } см).$$

Горішня частина ґвинта стискується силою $8000\, кг$ і скручується моментом M. Нормальне напруження: $p_n = \frac{8000}{\frac{\pi d^2}{4}} \frac{кг}{см^2}$; найбільше дотичне напруження: $p_t = \frac{16\,.\,760\,.\,d_c}{\pi d^3} \frac{кг}{см^2}$.

Умова тривалости, заснована на теорії найбільших видовжень:

$$\frac{4}{\pi d^2}\left[0{,}35\,.\,8000 + 0{,}65\sqrt{8000^2 + 4\left(\frac{4\,.\,760\,.\,d_c}{d}\right)^2}\,\right]\frac{кг}{см^2} \leqslant 600\frac{кг}{см^2}.$$

Підставивши $\frac{d_c}{d} = \frac{9}{8}$, знайдемо як-найменший діяметр:

$$d = 4{,}53\, см \cong 46\, мм.$$

Умова тривалости за теорією найбільших скосів дає:

$$d = 4{,}73\, см \cong 48\, мм.$$

128. Вал трансмісії несе два коліщата (шківи) пасової передачі діяметром $0{,}8\, м$ і $1{,}6\, м$; розміри вказано на рис. 87;

вага великого коліщати 250 *кг*, а малого 150 *кг*. Сили натягу пасів показано на рис. 87 (внизу) — погінна галузь натягнена вдвічі сильніше, ніж гонена галузь кожного паса́. Кут нахилу обох пасів до позему 45°.

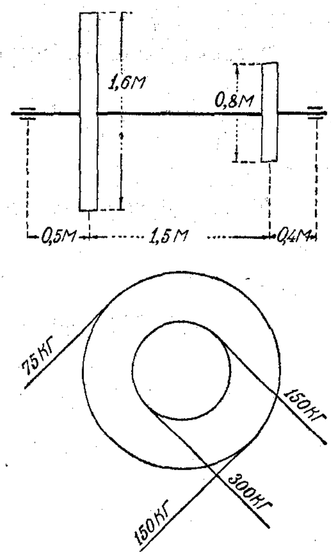


Рис. 87

Допускальне напруження для розрахунку вала призначаємо стосовно до характеру діяння вантаги; нормальні напруження від угину зміняють при обертанні вала свій знак, тому допускальне нормальне напруження $R = 300\ \frac{кг}{см^2}$ (для литого заліза) — див. Hütte, ч. I, стор. 553, вид. 1926 р. Дотичні напруження від скруту знака не міняють, але можуть меншати до нуля (при припиненні роботи); тому допускальне дотичне напруження $R_t = 400\ \frac{кг}{см^2}$.

Треба визначити діяметр вала.

Розвязка. Для дільниці вала між коліщатами маємо момент скруту:

$$M_{скр} = 150\,.\,40\ кг\,.\,см = 75\,.\,80\ кг\,.\,см = 6000\ кг\,.\,см.$$

Щоб визначити найбільший момент угину, розгляньмо окремо прямовисні та поземі складові вантаг і відповідні їм моменти вгину.

У великого коліщати: прямовисний тиск:

$$[250 + (75 + 150)\cos 45°]\ кг = 409\ кг,$$

поземий тиск:

$$(75 + 150)\cos 45° = 159\ кг.$$

У малого коліщати: прямовисний тиск:

$$[150 + (150 + 300)\cos 45°]\ кг = 468\ кг,$$

поземий тиск:

$$(150 + 300)\cos 45° = 318\ кг.$$

Прямовисна реакція лівої валниці:

$$V_1 = \frac{409\,.\,1,9 + 468\,.\,0,4}{2,4}\ кг = 402\ кг.$$

Те-ж — правої валниці:

$$V_2 = 475 \text{ кг.}$$

Позема реакція лівої валниці:

$$H_1 = \frac{159 \,.\, 1{,}9 - 318 \,.\, 0{,}4}{2{,}4} \text{ кг} = 73 \text{ кг.}$$

Те-ж — правої валниці:

$$H_2 = 232 \text{ кг.}$$

Розрахунковий момент угину для перерізу у великого коліщати:

$$M'_{уг} = \sqrt{402^2 + 73^3} \,.\, 50 \text{ кг . см} = 20425 \text{ кг . см.}$$

Те-ж у малого коліщати:

$$M''_{уг} = \sqrt{475^2 + 232^2} \,.\, 40 \text{ кг . см} = 21144 \text{ кг . см.}$$

Небезпечний переріз — у малого коліщати.
Остаточно маємо для дальших розрахунків:

$$M_{уг} = 21 \,.\, 144 \text{ кг . см}; \quad M_{скр} = 6000 \text{ кг . см.}$$

Користуємося з формули тривалости з поправкою Баховою, тому що відношення $\frac{R}{R_t}$ в нашому випадку не дорівнює 1,3 (теоретичну величину цього відношення згідно з теорією найбільших видовжень).

Сучинник Бахів:

$$a_0 = \frac{300}{1{,}3 \,.\, 400} = 0{,}577.$$

За згаданою умовою тривалости:

$$\frac{0{,}35 \,.\, 21144 + 0{,}65 \sqrt{21144^2 + (0{,}577 \,.\, 6000)^2}}{W} = 300,$$

звідки:

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = 71{,}1 \text{ см}^3.$$

І остаточно:

$$d \cong 9 \text{ см.}$$

129. Колінчастий вал $KLMNOS$ (рис. 88 перспективний вигляд) обертається гінком і несе безпосередньо за підпорою (валницею) S коліща пасової передачі до варстатів. Обертальний момент зрівноважується моментом M сили натяґу пасів. (Опором тертя в валницях нехтуємо). Для розрахунку перерізу вала з'ясуйте розподіл по довжині всіх дільниць вала моментів угину та скруту при тім положенні вала, коли сила P, що її передає гонок і що її прикладено до середини участку MN, справлена сторчово з площиною $LMNO$.

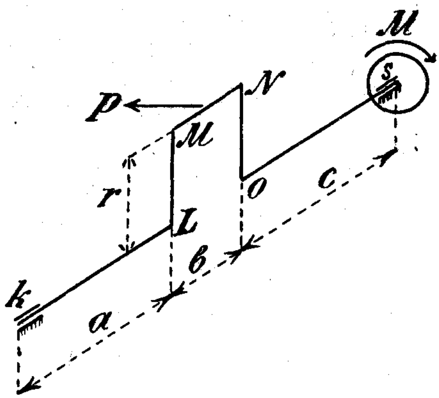


Рис. 88

Відповідь. 1) На дільницях KL, MN і OS момент угину зміняється так само, як коли-б дільницю MN перенесено на місце LO, і ми мали-б прямий стрижень, що вгинається силою P по середині дільниці LO; від L до M момент угину зміняється за законом прямої від 0 до $\frac{Pr\left(\frac{b}{2}+c\right)}{a+b+c}$; від O до N момент угину зміняється за законом прямої від Pr до $\frac{Pr\left(\frac{b}{2}+c\right)}{a+b+c}$.

2) Моменти скруту для кожної дільниці постійні по її довжині та й дорівнюють: на дільниці KL нуль; LM: $\frac{Pa\left(\frac{b}{2}+c\right)}{a+b+c}$; MN: $\frac{Pr\left(\frac{b}{2}+c\right)}{a+b+c}$; NO: $\frac{Pc\left(a+\frac{b}{2}\right)}{a+b+c}$; $OS - Pr$.

130. Відшукайте діяметр дільниці MN попередньої задачі, якщо $P = 2000$ *кг*, $a = 50$ *см*, $b = 20$ *см*, $c = 40$ *см*, $r = 30$ *см*, допускальне нормальне напруження $400 \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Найбільший момент угину дорівнює 54545 *кг. см*; момент скруту 27272 *кг. см*.

Формула Сен-Венанова дає рівнання:

$$\frac{32}{\pi d^3}(0{,}35\,.\,54545+0{,}65\sqrt{54545^2+27272^2})=400,$$

звідки:

$$d=11{,}4\ \textit{см}.$$

Формула, заснована на розрахунку найбільших дотичних напружень, дає рівнання:

$$\frac{32}{\pi d^3}\sqrt{54545^2+27272^2}=400,$$

звідки:

$$d=11{,}6\ \textit{см}.$$

РОЗДІЛ VI

БРУСИ, СТАТИЧНО НЕ ВИЗНАЧЕНІ ЩО ДО ОПОРНИХ РЕАКЦІЙ

Для найпростіших випадків маємо (див. курси Опору Матеріялів):

Схема за рис. 89:

$$V_a = \frac{Pb\,(3\,l^2 - b^2)}{2\,l^3};$$

$$V_b = \frac{Pa^2\,(3\,l - a)}{2\,l^3},$$

$$M_0 = -\,\frac{Pab\,(a + 2\,b)}{2\,l^2}.$$

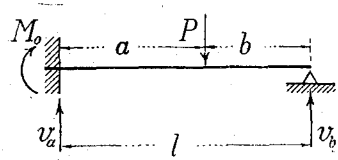


Рис. 89

Схема за рис. 90:

$$V_a = \frac{Pb^2\,(l + 2\,a)}{l^3};$$

$$V_b = \frac{Pa^2\,(l + 2\,b)}{l^3},$$

$$M_a = -\,\frac{Pab^2}{l^2};\quad M_b = -\,\frac{Pa^2 b}{l^2}.$$

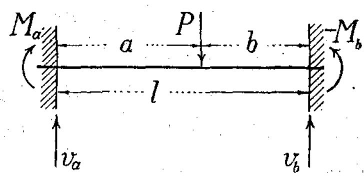


Рис. 90

Нерозрізні бруси (балки): рівняння трьох моментів (рис. 91):

$$M_{n-1}\,n + 2\,M_n\,(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}\,l_{n+1} = -\,6\left(\frac{\Omega_n\,.\,a_n}{l_n} + \frac{\Omega_{n+1}\,.\,b_{n+1}}{l_{n+1}}\right),$$

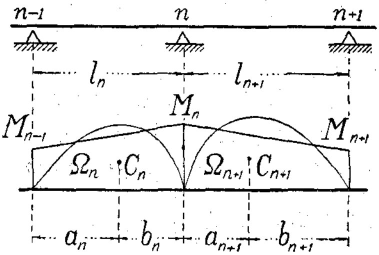


Рис. 91

де M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, є моменти вгину для перерізів над трьома послідовними підпорами, Ω_n і Ω_{n+1}—площі епюр моментів угину від заданого навантаження для уявлюваних поодиноких розрізних брусів прогоном l_n і l_{n+1};

C_n і C_{n+1} — осередки ваготіння цих епюр.

Решту позначень — див. рис. 91.

131. Бруса закріплено та навантажено за схемою рис. 89, при чому $l=3$ *м*, $a=2$ *м*, $b=1$ *м*, $P=2$ тони; доберіть коритний переріз бруса (знайдіть конче потрібну величину моменту опору), якщо допускальне напруження $R=900\ \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Порівнюємо найбільші що до абсолютної величини моменти вгину.

Абсолютна величина момента вгину в лівої підпори:

$$|M_0|=\frac{8}{9}\ тон.\ м.$$

Момент угину в перерізі, де прикладено силу P:

$$M_1=\frac{28}{27}\ тон.\ м.$$

Маємо:

$$M_1>|M_0|;$$

тому:

$$W=\left(\frac{28}{27}\cdot 10^5:900\right)\ см^3=115{,}2\ см^3.$$

Призначаємо № 16 ($W=119{,}2\ см^3$).

132. Розвяжіть попередню задачу при тих-же умовах, але припустивши:

$$a=1\ м,\ b=2\ м.$$

(див. задачу 131).

Розвязка.

$$|M_0|=\frac{10}{9}\ тон.м;\ M_1=\frac{16}{27}\ тон.м;\ |M_0|>M_1,$$

$$W=\left(\frac{10}{9}\cdot 10^5:900\right)\ см^3=123{,}5\ см^3.$$

Призначаємо № 18 ($W=159{,}2\ см^3$).

133. Брус закріплено та навантажено за схемою рис. 90, при чому $l=3$ *м*, $a=b=1{,}5$ *м*, $P=2$ тони; доберіть коритний переріз бруса (знайдіть конче потрібну величину моменту опору), якщо допускальне напруження $R=900\ \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка.

$$|M_a|=|M_b|=M_1=\frac{3}{4}\ тон.м.$$

(M_1 — момент угину в перерізі, де прикладено силу P).

$$W=\frac{3\,.\,10^5}{4\,.\,900}\ см^3=83{,}3\ см^3.$$

Призначаємо № 14 ($W=89{,}2\ см^3$).

134. Розвяжіть попередню задачу при тих-же умовах, але припустивши $a=2\ м$, $b=1\ м$.

Розвязка.

$$|M_a|=\frac{4}{9}\ тон.м;\quad |M_b|=\frac{8}{9}\ тон.м;\quad M_1=\frac{16}{27}\ тон.м.$$

Небезпечний переріз — у правої підпори.

$$W=\frac{8\,.\,10^5}{9\,.\,900}\ см^3=98{,}8\ см^3$$

Призначаємо № 16 ($W=119{,}2\ см^3$).

135. Відшукайте найнебезпечніше положення P при закріпленні бруса за схемою рис. 89 і визначте відповідний найбільший момент угину.

Розвязка. Порівнюємо найбільші величини опорного момента вгину (M_0) і момента для перерізу, що в ньому прикладено вантаж P (M_1).

$$|M_0|=\frac{Pab\,(a+2b)}{2l^2}=\frac{Pa\,(l-a)\,(2l-a)}{2l^2},$$

$$M_1=\frac{Pa^2\,(l-a)\,(3l-a)}{2l^3}.$$

Відшукавши maximum функції від однієї змінної звичайним способом, знаходимо:

$$\max|M_0|=\frac{Pl}{3\sqrt{3}}=0{,}192\,Pl$$

при

$$a=l\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}423\,l,$$

$$\max M_1=\frac{9}{8}\,Pl\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)=0{,}173\,Pl$$

при

$$a=\frac{3}{2}\,l\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}635\,l.$$

Отже найнебезпечніше положення при $a=0{,}423\,l$;

$$\max|M|=0{,}192\,Pl.$$

136. Відшукайте найнебезпечніше положення вантажу P при закріпленні бруса за схемою рис. 90 і визначте відповідний найбільший момент угину.

Розвязка. Доволі буде дослідити положення вантажу на одній половині прогону: результат дослідження можна буде поширити й на другу половину за симетрією. Припустім $a > b$.

Порівнюємо найбільші величини опорного моменту у правої підпори (M_b) з моментом угину в перерізі, що в ньому прикладено вантаж (M_1).

Маємо:

$$|M_b| = \frac{Pa^2b}{l^2} = \frac{Pa^2(l-a)}{l^2},$$

$$M_1 = \frac{Pab}{l} - \frac{Pab^2}{l^2}\cdot\frac{b}{l} - \frac{Pa^2b}{l^2}\cdot\frac{a}{l} = \frac{2Pa^2(l-a)^2}{l^3}.$$

Знаходимо:

$$\max|M_b| = \frac{4}{27}Pl$$

при

$$a = \frac{2}{3}l,$$

$$\max M_1 = \frac{Pl}{8}$$

при

$$a = \frac{l}{2}.$$

Остаточно: небезпечне положення вантажу P при $a = \frac{2}{3}l$ $\left(\text{а за симетрією — і при } a = \frac{l}{3}\right)$; у найближчої підпори одержується $\max|M| = \frac{4}{27}Pl$.

137. Визначте величину опорного моменту при закріпленні та навантаженні бруса за схемою рис. 92.

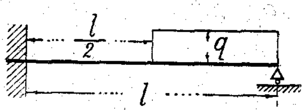


Рис. 92

Розвязка. При навантаженні за схемою рис. 89 маємо:

$$M_0 = -\frac{Pab}{2l^2}(a+2b) = -\frac{Pa(l-a)(2l-a)}{2l^2}.$$

Користуючися з цієї формули, можемо написати для даного випадку:

$$M_0 = -\int_{\frac{l}{2}}^{l} \frac{qx(l-x)(2l-x)}{2l^2}\,dx = -\frac{7}{128}ql^2.$$

138. Визначте найбільший момент угину для бруса, закріпленого та навантаженого за схемою рис. 93.

Розвязка. Для навантаження за схемою рис. 90 маємо:

$$M_a = -\frac{Pab^2}{l^2}, \quad M_b = -\frac{Pa^2b}{l^2}.$$

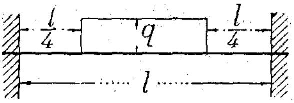


Рис. 93

Легко знаходимо, користуючися з цих формул, що коли прикладено два однакові вантажі P обабіч від середини бруса, кожний на віддаленні b від найближчої підпори, то опорні моменти однакові завбільшки й дорівнюють:

$$M_a = M_b = -\frac{Pb(l-b)}{l}.$$

Користуючися з цього наслідку, можемо написати для заданого випадку симетричного навантаження:

$$M_a = M_b = -\int_{\frac{l}{4}}^{\frac{l}{2}} \frac{qx(l-x)}{l}\,dx = -\frac{11}{192}ql^2.$$

Найбільший додатній момент угину по середині бруса менший що до абсолютної величини, в чому легко переконатись.

Отже:

$$\max|M| = \frac{11}{192}ql^2.$$

139. Відшукайте небезпечний переріз і відповідне значіння момента вгину для нерозрізного бруса, навантаженого за схемою рис. 94; вантажі прикладено по середині кожного прогону.

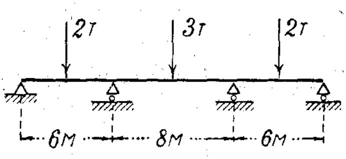


Рис. 94

Розвязка. Через симетрію прогонів та навантаження відносно середини бруса — опорні моменти над середніми підпорами однакові; позначмо їхню величину через M_1. Рівняння трьох моментів у даному разі:

$$2M_1(6+8)+M_1 \cdot 8 = -6\left(\frac{9}{2}+\frac{24}{2}\right) \text{ тон.м}^2 = -99 \text{ тон.м}^2,$$

звідки:

$$M_1 = -2{,}75 \text{ тон.м.}$$

Момент угину по середині крайніх прогонів: 1,625 *тон.м.*

" " " " середнього прогону: 3,25 *тон.м.*

Инші перерізи не можуть бути небезпечні.

Остаточно: небезпечний переріз — по середині середнього прогону; $\max M = 3{,}25$ *тон.м.*

140. Розвяжіть питання попередньої задачі для нерозрізного бруса, навантаженого за схемою рис. 95.

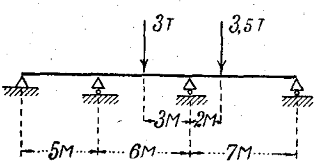


Рис. 95

Розвязка. Позначмо через M_1 і M_2 — моменти вгину в перерізах над лівою й правою з двох середніх підпор.

Рівнання трьох моментів:

$$2M_1(5+6)+M_2 \cdot 6 = -6\left(0+\frac{13{,}5}{2}\right) \text{тон.м}^2 = -40{,}5 \text{ тон.м}^2$$

$$M_1 \cdot 6 + 2M_2(6+7) = -6\left(\frac{13{,}5}{2}+\frac{17{,}5 \cdot 4}{7}\right) = -100{,}5 \text{ тон.м}^2.$$

Звідси:

$$M_1 = -0{,}84 \text{ тон.м},$$

$$M_2 = -3{,}67 \text{ тон.м.}$$

Момент угину по середині середнього прогону: 2,25 *тон.м.*

" " в перерізі, де прикладено силу 3,5 *тон.*: 2,38 *тон.м.*

Инші перерізи не можуть бути небезпечні.

Остаточно: небезпечний переріз над правою із середніх підпор:

$$\max|M| = 3{,}67 \text{ тон.м.}$$

141. Відшукайте небезпечний переріз і відповідне значіння момента вгину для нерозрізного бруса, навантаженого за схемою рис. 96 (лівий кінець — жорстко закріплено).

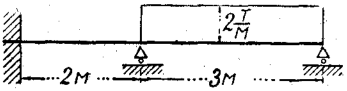


Рис. 96

Розвязка. Позначмо — опорний момент у лівого кінця: M_0, момент угину в перерізі над середньою підпорою: M_1.

Складаємо рівнання:

$$2M_0 + M_1 = 0,$$

$$M_0 \,.\, 2 + 2M_1(2+3) = -6\left(0 + \frac{2}{3}\cdot 3\cdot\frac{2\,.\,3^2}{8}\cdot\frac{1}{2}\right) = -13{,}5 \text{ тон.м}^2.$$

звідси:

$$M_0 = 0{,}75 \text{ тон.м},$$

$$M_1 = -1{,}5 \text{ тон.м}.$$

Відшукаймо найбільший додатній момент у правім прогоні; для відповідного перерізу поперечна сила дорівнює 0.

Складаємо вираз поперечної сили для перерізу на віддаленні x від крайньої правої підпори.

Реакція правої підпори дорівнює: $\left(\frac{2\,.\,3}{2} - \frac{1{,}5}{3}\right)$ *тон.* $= 2{,}5$ *тон.*

Поперечна сила: $Q_y = 2\,.\,x - 2{,}5$ *тон.*

Поперечна сила дорівнює 0 при $x = 1{,}25$ *м.*

Відповідний момент угину:

$$M = \left(2{,}5\,.\,1{,}25 - \frac{2\,.\,1{,}25^2}{2}\right) \text{тон.м} = 1{,}5625 \text{ тон.м}.$$

Як бачимо, небезпечний переріз — у віддаленні 1,25 *м* від правого кінця:

$$\max M = 1{,}5625 \text{ тон.м}.$$

142. Дослідіть моменти вгину в різних перерізах бруса, закріпленого та навантаженого за схемою рис. 97 (однакові скупчені вантаги P по середині кожного прогону; кінці бруса жорстко закріплено). Відшукайте небезпечні перерізи.

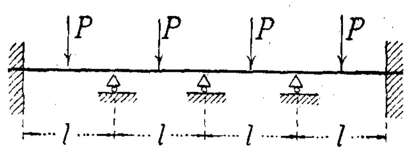


Рис. 97

Розвязка. За силою симетрії — дотична до зігнутої оси над середньою підпорою є позема; розглянувши тепер кожну половину бруса, переконуємося, що знов таки за силою симетрії — дотичні до зігнутої оси над середньою опорою кожної половини бруса є дотичні. Отже, над всіма підпорами дотичні до зігнутої оси є поземі. Таким робом, кожний прогін перебуває в умовах однопрогінного бруса з обома жорстко закріпленими кінцями зі скупченою вантагою по середині.

Для такого випадку просто знаходимо: моменти вгину над усіма підпорами (і по кінцях):

$$M_0 = -\frac{Pl}{8},$$

моменти вгину по середині кожного прогону:

$$M_1 = +\frac{Pl}{8}.$$

Усі ці перерізи і є небезпечні.

РОЗДІЛ VII

ПОВЗДОВЖНИЙ УГИН

Формула Ейлерова:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

де:

$P_{кр}$ є критична сила у випадку суглобового закріплення кінців стискуваного стрижня (рис. 98);

E — модуль нормальної пружности;

I — найменший із моментів безвлади перерізу відносно осередкових осей;

l — довжина стрижня.

Критичне напруження:

$$p_{кр} = \frac{P_{кр}}{\omega} = \pi^2 E \left(\frac{r}{l}\right)^2,$$

де r є найменший із радіюсів безвлади перерізу; $r = \sqrt{\frac{I}{\omega}}$.

Формули справедливі, поки $p_{кр}$ менше від межі пропорціональности.

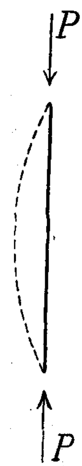


Рис. 98

По-за межею пропорціональности—емпіричні формули: для литого заліза:

$$p_{кр} = \left(3387 - 14{,}83\frac{l}{r}\right)\frac{кг}{см^2}, \text{ якщо } \frac{l}{r} < 110,$$

для чавуна:

$$p_{кр} = \left(7760 - 120\,\frac{l}{r} + 0{,}53\,\frac{l^2}{\gamma^2}\right)\frac{кг}{см^2}, \text{ якщо } \frac{l}{r} < 80,$$

для дерева:

$$p_{кр} = \left(293 - 1{,}94\,\frac{l}{r}\right)\frac{кг}{см^2}, \text{ якщо } \frac{l}{r} < 110.$$

В разі инших схем закріпляти стрижневі кінці маємо:

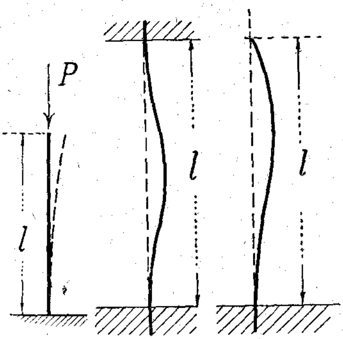


Рис. 99 Рис. 100 Рис. 101

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu\, l)^2}; \quad p_{кр} = \pi^2 E \left(\frac{r}{\mu l}\right)^2,$$

де:

при схемі за рис. 99: $\mu = 2$,

„ „ „ „ 100: $\mu = 0{,}5$,

„ „ „ „ 101; $\mu \cong 0{,}7$.

Допускальне напруження при повздовжному вгині:

$$R_1 = \varphi\, R,$$

де R є допускальне напруження при стисканні короткого стрижня (при виключеній можливості вгину);

φ — сучинник меншання, що його відшукується з таблиць залежно від значіння $\left(\frac{l}{r}\right)$; при схемах за рисунками 99, 100 і 101 треба, користуючися з таблиць, брати замість $\left(\frac{l}{r}\right)$ відношення $\left(\frac{\mu l}{r}\right)$. Таблиці — див. довідники або додаток до курсу автора „Опір матеріялів“.

---

143. Визначте критичну силу для випадку стиснення залізного стрижня за схемою рис. 98, якщо дано: $l = 2$ *м*, діяметр круглого перерізу 4 *см*, $E = 2 . 10^6 \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. $P_{кр} = 6280$ *кг*; $(\pi^2 \cong 10)$.

144. Визначте критичне напруження для випадку стискання дерев'яної підпори за схемою рис. 99, як що дано: $l = 3$ *м*, розміри прямокутнього перерізу: 20 . 24 *см*; $E = 10^5 \frac{кг}{см^2}$.

Відповідь. $p_{кр} = 92{,}6 \frac{кг}{см^2}$; $(\pi^2 \cong 10)$.

145. Визначте, яка має бути довжина l залізного стрижня круглого перерізу діяметра d, закріпленого за схемою рис. 100, щоб при розрахунках на повздовжний угин можна було користуватися з формул Ейлерових. Дано: $E = 2 . 10^6 \frac{кг}{см^2}$. Межа пропорціональности 2000 $\frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Відшукуване визначення знаходимо з умови.

$$p_{кр} \leqslant 2000 \frac{кг}{см^2}$$

або

$$\pi^2 . 2 . 10^6 \left(\frac{\frac{d}{4}}{0,5 l}\right)^2 \leqslant 2000,$$

звідки:

$$l \geqslant 50 d.$$

146. Визначте допускальне навантаження на стрижень задачі 143, якщо допускальне напруження при стисканні короткого залізного стрижня 900 $\frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Обчислюємо:

$$\frac{l}{r} = 200;$$

в таблицях за цим аргументом знаходимо:

$$\varphi = 0,16,$$

$$R' = 0,16 . 900 \frac{кг}{см^2} = 144 \frac{кг}{см^2}.$$

Допускальне навантаження:

$$\frac{\pi . 4^2}{4} \cdot 144 \ кг = 1809,5 \ кг.$$

147. Визначте допускальне навантаження на стрижень задачі 144, якщо допускальне напруження при стисканні короткої соснової підпори 50 $\frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Обчислюємо:

$$\frac{\mu l}{r} = \frac{2 . 300}{5,77} = 104.$$

За цим аргументом та інтерпеляцією (вставленням) знаходимо з таблиці:

$$\varphi = 0,326; \ R' = 0,326 . 50 \frac{кг}{см^2} = 16,3 \frac{кг}{см^2}.$$

Допускальне навантаження:

$$20 . 24 . 16,3 \ кг = 7824 \ кг.$$

148. Чавунний стовп перстенуватого перерізу (знадвірній діяметр 16 *см*, внутрішній 12 *см*) жорстко закріплений на фундаменті й підтримує міжповерхове перекриття; сполучення з цим перекриттям не допускає вершкові стовпа відхилятись, але не перешкоджає горішньому кінцеві повертатися (схема — за рис. 101); висота стовпа 4 *м*. Яке можна допустити навантаження на стовп, якщо допускальне напруження при стисканні коротких чавунних стовпів 750 $\frac{кг}{см^2}$?

Розвязка. Обчислюємо:

$$r = \frac{\sqrt{16^2 + 12^2}}{4}\,см = 5\ см;$$

$$\frac{\mu l}{r} = \frac{0{,}7 \cdot 400}{5} = 56.$$

За таблицями:

$$\varphi = 0{,}34;\ R' = 0{,}34 \cdot 750\ \frac{кг}{см^2} = 255\ \frac{кг}{см^2}.$$

Допускальне навантаження:

$$255 \cdot \frac{\pi(16^2 - 12^2)}{4}\,кг = 22\,.\,430\ кг.$$

149. Визначте конче потрібний діяметр круглого перерізу сталевого стрижня, що робить на повздовжний угин за схемою рис. 98, якщо задано: $P = 8000$ *кг*; $l = 1$ *м*; $E = 2{,}2 \cdot 10^6\ \frac{кг}{см^2}$; сучинник запасу 10.

Розвязка. Поки діяметр перерізу невідомий, не можливо розвязати, чи стосується формула Ейлерова до розрахунків, чи доведеться вжити емпіричних формул.

Для початку скористуймося з формули Ейлерової, взявши на себе зобов'язання перевірити можливість прикласти її.

Конче потрібний діяметр знайдемо з рівняння:

$$8000 = \frac{P_{кр}}{10} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}2 \cdot 10^6 \cdot \frac{\pi d^4}{64}}{10 \cdot 100^2},$$

звідки:

$$d = 5{,}22\ см.$$

Перевіряємо:

$$r = \frac{d}{4} = 1{,}305 \ см; \ \frac{l}{r} = \frac{100}{1{,}305} = 76{,}63 < 110.$$

Виявляється, що формулу Ейлерову прикласти не можливо.

Користуючися з емпіричної формули (зауважимо, що $r = \frac{d}{4}$; запас 10):

$$\left(3387 - 14{,}83 \frac{100}{\frac{d}{4}}\right) \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 8000 \,.\, 10,$$

звідки:

$$d = 6{,}44 \ см.$$

150. Доберіть переріз залізної рівнобічної кутівки (призначте № профілю), що робить на повздовжний угин за схемою рис. 98, якщо задано: $P = 4600$ *кг*, $l = 3$ *м*, допускальне напруження при стисканні короткого залізного стрижня 900 $\frac{кг}{см^2}$; порівняйте варіянти розрахунку за старими та новими російськими нормами.

Розвязка. Користуючися з таблиць нормального сортаменту фасонового заліза, треба рядом послідовних наближень добрати переріз так, щоб одхилення справжнього напруження від допускального не переважало по змозі декількох відсотків (у бік менший).

Уводячи в розрахунок сучинники φ за колишніми табличними нормами, призначаємо кутівку 100 . 100 . 10 *мм*; і справді, для цього профілю:

найменший момент безвлади	72, 7 $см^4$.
площа перерізу	19,17 $см^2$,

$$r = \sqrt{\frac{72{,}7}{19{,}17}} = 1{,}95; \ \frac{l}{r} = \frac{300}{1{,}95} = 154; \ \varphi = 0{,}27;$$

$$R' = 0{,}27 \,.\, 900 \frac{кг}{см^2} = 243 \frac{кг}{см^2} \cdot$$

Справжнє напруження:

$$\frac{4600}{19{,}17} \frac{кг}{см^2} = 240 \frac{кг}{см^2} < 243 \frac{кг}{см^2} \cdot$$

Розраховуючи за новими нормами, призначаємо кутівку:

120 . 120 . 10 *мм.*

Найменший момент безвлади 130 $см^4$.

Площа перерізу 23,18 $см^2$.

$$r = \sqrt{\frac{130}{23,18}}\,см = 2,37\,см;\ \frac{l}{r} = \frac{300}{2,37} = 127;\ \varphi = 0,30;$$

$$R' = 0,30 \,.\, 900\,\frac{кг}{см^2} = 270\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

Справжнє напруження:

$$\frac{4600}{23,18}\,\frac{кг}{см^2} = 198,5\,\frac{кг}{см^2} < 270\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

Здавалося-б — маємо великий зайвий запас тривалости. Проте, якщо взяти найближчий менший профіль кутівки (найближчий — в розумінні величини площі перерізу), а саме 100.100 . 12, то одержимо:

Найменший момент безвлади 85,7 $см^4$.

Площа перерізу 22,73 $см^2$.

$$r = \sqrt{\frac{85,7}{22,73}}\,см = 1,94\,см;\ \frac{l}{r} = \frac{300}{1,94} = 155;\ \varphi = 0,18;$$

$$R' = 0,18 \,.\, 900\,\frac{кг}{см^2} = 162\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

Справжнє напруження:

$$\frac{4600}{22,73}\,\frac{кг}{см^2} = 202\,\frac{кг}{см^2} > 162\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

Цей розрахунок показує, що добрати лекшу кутівку, ніж розміром 120 . 120 . 10, не вдасться.

РОЗДІЛ VIII

РОЗРАХУНОК ГНУЧКИХ НИТОК.

Розрахункові формули

Позначення:

q — рівномірне навантаження на одиницю довжини нитки.
γ — вага одиниці об'єма матеріялу нитки.
T — сила натягу нитки.

На рисункові 102 точка O найнижча точка нитки. S_a і S_b — довжини дільниць нитки AO і OB.

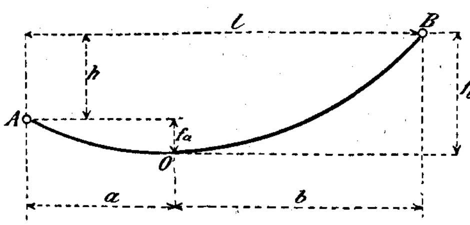


Рис. 102

Решту позначень показано на рис. 102:

$$f_a = \frac{qa^2}{2T}; \quad f_b = \frac{qb^2}{2T};$$

$$a = \frac{l}{2} - \frac{Th}{ql}; \quad b = \frac{l}{2} + \frac{Th}{ql};$$

$$S_a = a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f_a^2}{a^2}\right); \quad S_b = b\left(1 + \frac{2}{3}\frac{f_b^2}{b^2}\right).$$

В окремім випадку, коли $h = 0$, маємо:

$$f_a = f_b = f; \; a = b = \frac{l}{2}; \; S_a = S_b = \frac{S}{2};$$

$$f = \frac{ql^2}{8T}; \; S = l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

Якщо навантаження нитки складається лише з її власної ваги, то в заданих формулах можна замінити відношення $\frac{q}{T}$ на відношення $\frac{\gamma}{p}$, де p є відповідне розтягальне напруження.

Всі зазначені формули справедливі, якщо величини f і h малі порівняно з l.

---

151. Визначте розтягальне напруження в мідянім проводі, що його навішено до двох точок, які знаходяться на однаковій висоті у віддаленні 50 *м* одна від одніеї, якщо стрілка звисання провода $f = 55$ *см.* Питома вага міди 8,80.

Розвязка. Відшукуване напруження p знайдеться за формулою:

$$p = \frac{ql^2}{8f\omega} = \frac{\gamma l^2}{8f} = \frac{0{,}0088\,.\,5000^2}{8\,.\,55}\,\frac{кг}{см^2} = 500\,\frac{кг}{см^2}\,.$$

152. Розвяжіть ту-ж задачу (151) для випадку, коли одна точка причіплення вища за другу на 4,40 *м* (при тому-ж поземому віддаленні між ними 50 *м*) і звисання провода відносно долішньої точки причіплення дорівнює попередню величину 55 *см.*

Розвязка. З основних формул маємо:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{f_b}{f_a};$$

крім того,

$$a + b = l.$$

З цих двох рівнань маємо:

$$a = \frac{l}{\sqrt{\frac{f_b}{f_a}} + 1};$$

підставивши $f_a = 55$ *см* і $f_b = 495$ *см*, одержимо:

$$a = \frac{l}{4} = 1250\ см.$$

Відшукуване напруження:

$$p = \frac{qa^2}{2f_a\omega} = \frac{\gamma\,.\,a^2}{2f_a} = \frac{0{,}0088\,.\,1250^2}{2\,.\,55}\,\frac{кг}{см^2} = 125\,\frac{кг}{см_2}\,.$$

153. Віддалення між точками причіплення (розкладеними однаково заввишки) дорівнює 70 *м*. Який завдовжки має бути залізний провід (питома вага 7,8), щоб у навішеному проводі напруження не переважали $250\ \frac{кг}{см^2}$?

Розвязка. Визначмо стрілку звисання:

$$f = \frac{\gamma l^2}{8p} = \frac{0{,}0078 \,.\, 7000^2}{8 \,.\, 250}\ см = 191\ см.$$

Відшукувана довжина:

$$S = 70 \,.\, \left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{191}{7000}\right)^2\right] м = 70{,}14\ м.$$

154. Розвязуючи попередню задачу, ми нехтували пружним видовженням самого проводу. Перевірте, яке насправді буде напруження в навішеному проводі задачі 153 при довжині $S = 70{,}14$ *м* у ненапруженому стані. $E = 2 \,.\, 10^6\ \frac{кг}{см^2}$.

Розвязка. Якщо p є відшукуване напруження, то довжина провода по видовженні дорівнює $S\left(1 + \frac{p}{E}\right)$; з другого боку, ця довжина дорівнює $l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)$; підставивши $f = \frac{\gamma l^2}{8p}$ і зрівнавши обидва вирази цієї довжини, одержимо:

$$S\left(1 + \frac{p}{E}\right) = l\left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{24 p^2}\right),$$

або

$$p^3 + \frac{S - l}{S} E p^2 = \frac{\gamma^2 l^2 E}{24 S}.$$

Підставивши числа, одержимо:

$$p^3 + \frac{14}{7014} \cdot 2 \,.\, 10^6 p^2 = \frac{0{,}0078^2 \,.\, 7000^3 \,.\, 2 \,.\, 10^6}{24 \,.\, 7014},$$

звідки:

$$p \cong 242\ \frac{кг}{см^2}.$$

Як бачимо, напруження мало відрізняється від заданого в умові задачі 153.

155. Віддалення між точками причіплення точнісінько дорівнює довжину залізного провода в ненапруженому стані (рис. 103). При навішуванні провід звисає та видовжується. Яке може бути найбільше віддалення між точками зачіплення, якщо напруження не має переважати $1000\ \frac{кг}{см^2}$; $E = 2 \cdot 10^6\ \frac{кг}{см^2}$, питома вага 7,8.

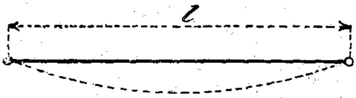


Рис. 103

Розвязка. Міркуючи так само, як і в попередній задачі, і припустивши $l = S$, матимемо:

$$\frac{p}{E} = \frac{\gamma^2 l^2}{24 p^2},$$

звідки:

$$l = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{24 p^3}{E}} = \frac{1}{0{,}0078}\sqrt{\frac{24 \cdot 1000^3}{2 \cdot 10^6}}\ см = 14050\ см = 140{,}5\ м.$$

Легко знайти також за заданим l відшукуване напруження p.

156. Дротяно-линвова передача (рис. 104) править, щоб передавати вправність в 25 HP (кінських сил) от A до B

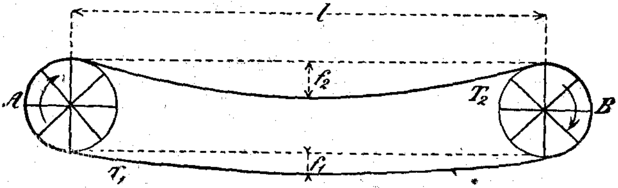


Рис. 104

при хуткості по колові коліщат (шківів) $15\ \frac{м}{сек}$ (хуткість руху линви). Визначте, який має бути первопочатковий натяг линви (коли передача ще не робить), щоб не було ковзання линви по коліщаті, якщо відомо (за теорією передач із гнучкою сполукою), що для цього конче потрібно, щоб при роботі передачі натяг погінної галузи T_1 був удвічі більший за натяг другої галузи T_2.

Розвязка. Натяги T_1 і T_2 в *кг* визначається рівнаннями (зауважмо, що $1\ HP = 75\ \frac{кг.м}{сек.}$):

$$(T_1 - T_2) \cdot 15 = 75 \cdot 25$$

$$T_1 = 2 T_2;$$

звідки:

$$T_1 = 250 \text{ кг} \quad \text{і} \quad T_2 = 125 \text{ кг}.$$

Приклавши позначення рисунка 104, маємо:

$$f_1 = \frac{ql^2}{8T_1},\ f_2 = \frac{ql^2}{8T_2},$$

і отже:

$$f_2 = f_1 \frac{T_1}{T_2} = 2f_1.$$

З цих стрілок звисання галузів чинної линви знайдемо стрілку звисання для стану відпочинку, а з останньої — конче потрібний первопочатковий натяг; а саме: сума довжин обох галузів чинної линви дорівнює:

$$l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_1^2}{l^2}\right) + l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_2^2}{l^2}\right) = 2l + \frac{8}{3l}(f_1^2 + f_2^2).$$

В стані відпочинку обидві галузі линви однаково натягнені й мають однакові стрілки звисання f_0; сума-ж довжини обох галузів, очевидно, не змінюється (якщо нехтувати змінами, що залежать од пружних видовжень). Тому:

$$2l + \frac{8}{3l}(f_1^2 + f_2^2) = 2l\left(1 + \frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\right),$$

звідки:

$$f_0 = \sqrt{\frac{f_1^2 + f_2^2}{2}}.$$

Підставивши $f_2 = 2f_1$, одержимо:

$$f_0 = \sqrt{\frac{5}{2}} f_1.$$

Відшукуваний первопочатковий натяг:

$$T_0 = \frac{ql^2}{8f_0},$$

і отже:

$$\frac{T_0}{T_1} = \frac{f_1}{f_0};$$

звідки:

$$T_0 = \frac{f_1}{f_0} T_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 250 \text{ кг} = 158 \text{ кг}.$$

157. Мідяного провода навішено при температурі $t^\circ = +20^\circ$ C з натягом, який відповідає напруженню $p = 300\,\frac{кг}{см^2}$. Яке буде напруження p_1 провода при зниженні температури до $t_1^\circ = -20^\circ$ C? Сучинник лінійного розширу $\alpha = 0{,}000016$; $E = 1\,.\,10^6\,\frac{кг}{см^2}$; питома вага 8,8; розвяжіть задачу для двох випадків: коли прогін між опорними точками дорівнює 100 *м* і 50 *м*. Оцініть вплив пружного видовження.

Розвязка. Позначмо через f стрілку звисання при $+20^\circ$; через f_1 стрілку при -20°.

Тоді:

$$l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_1^2}{l^2}\right) = l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)[1-\alpha(t-t_1)] +$$

$$+\, l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)\frac{p_1-p}{E} \cong l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) - l\,\alpha(t-t_1) + l\,\frac{p_1-p}{E}.$$

Підставивши:

$$f = \frac{\gamma l^2}{8p} \quad \text{і} \quad f_1 = \frac{\gamma l^2}{8p_1},$$

одержимо, скоротивши:

$$\frac{\gamma^2 l^2}{24 p_1^2} = \frac{\gamma^2 l^2}{24 p^2} - \alpha(t-t_1) + \frac{p_1-p}{E},$$

або

$$p_1^2 + p_1^2 E\left[\frac{\gamma^2 l^2}{24p^2} - \alpha(t-t_1) - \frac{p}{E}\right] - \frac{\gamma^2 l^2 E}{24} = 0.$$

Підставивши числа, одержимо при $l = 100$ *м*:

$$p_1^2 + p_1^2\,.\,10^6\left(\frac{0{,}0088^2\,.\,10000^2}{24\,.\,300^2} - 0{,}000016\,.\,40 - \frac{300}{10^6}\right) -$$

$$-\,\frac{0{,}0088^2\,.\,10000^2\,.\,10^6}{24} = 0,$$

звідки:

$$p_1 = 329\;\frac{кг}{см^2}.$$

Нехтуючи пружним видовженням (припускаючи $E = \infty$), одержимо рівнання:

$$p_1^2\left[\frac{\gamma^2 l^2}{24p^2} - \alpha(t-t_1)\right] - \frac{\gamma^2 l^2}{24} = 0,$$

звідки, підставивши числа, матимемо:

$$p_1 = 331 \ \frac{кг}{см^2}.$$

При $l = 50$ *м* одержимо в першому випадку:

$$p_1 = 447 \ \frac{кг}{см^2}.$$

Нехтуючи-ж пружними видовженнями, одержимо:

$$p_1 = 562 \ \frac{кг}{см^2}.$$

Як бачимо, в першому випадку ми одержали досить точну відповідь, навіть нехтуючи впливом пружного видовження; в другому випадку таке нехтування спричиняє значне прибільшення відшукуваного значіння. Читачеві пропонується продумати звязок зазначеної різниці у впливі пружних видовжень з иншими елементами умов задачі.

158. Повітряний кабель має бути перекинутий через судохідний канал; щоб запобігти напруженням у кабелі, його навішено до залізного дроту діяметра 7 *мм*; вага повздовжного метру кабеля й дроту 0,8 *кг*; віддалення між точками зачіплення дроту 100 *м* (рис. 105). На якій висоті над рівнем

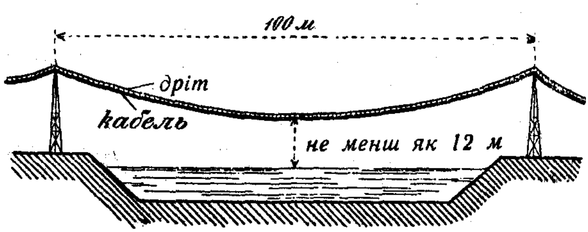


Рис. 105

води повинно розкласти ці точки зачіплення, якщо треба, щоб у найгарячішу пору року (при $t = +40^\circ$ C) кабель ізнімавсь над водою на 12 *м*, а взимку (при $t = -40^\circ$ C), коли вага кабеля й дроту може збільшитися на 20% через обмерзлість, напруження в залізному дроті не переважало $p_0 = 1000 \frac{кг}{см^2}$? Для заліза сучинник лінійного розширу $\alpha = 0{,}000012$, $E = 2 \cdot 10^6 \frac{кг}{см^2}$. Віддалення від низу кабеля до дроту 10 *см*.

Розвязка. Позначивши через l прогін, ω — площу переріза дроту, f — стрілку звисання влітку, f_0 — стрілку звисання взимку, q — вагу одиниці довжини кабеля й дроту влітку, q_0 — ту-ж вагу взимку, p — напруження дроту влітку, — можна написати рівнання, користуючися з міркувань, аналогічних із прикладеними в попередній задачі:

$$l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f_0^2}{l^2}\right)+l\,a\,(t-t_0)-l\,\frac{p_0-p}{E},$$

або, зауваживши, що

$$f_0=\frac{q_0 l^2}{8p_0\,\omega} \quad \text{і} \quad p=\frac{ql^2}{8f\omega},$$

одержимо, скоротивши:

$$f^3-f\cdot\left[\frac{q_0^2 l^4}{64p_0^2\,\omega^2}+\frac{3}{8}\,l^2\,a\,(t-t_0)-\frac{3}{8}\,l^2\,\frac{p_0}{E}\right]-\frac{3}{64}\,\frac{ql^4}{E\omega}=0.$$

Якщо нехтувати впливом пружних видовжень ($E=\infty$), то одержимо рівнання:

$$f^2-\left[\frac{q_0^2 l^4}{64p_0^2\,\omega^2}+\frac{3}{8}\,l^2\,a\,(t-t_0)\right]=0.$$

Відшукаймо спочатку f за цим останнім рівнанням; підставивши $q_0=0{,}0096\,\frac{кг}{см}$, $l=10000$ *см*, $p_0=1000\,\frac{кг}{см^2}$, $\omega=\frac{\pi\,.\,0{,}7^2}{4}=0{,}385\,см^2$, $a=0{,}000012$; $t-t_0=80$, і розвязавши рівнання, одержимо:

$$f=365\ см.$$

Оцінімо, чи велика може бути помилка через нехтування пружними видовженнями:

$$p=\frac{0{,}008\,.\,10000^2}{8.365\,.\,0{,}385}\,\frac{кг}{см^2}=712\,\frac{кг}{см^2};$$

різниця відносних пружних видовжень улітку й узимку дорівнює:

$$\frac{1000-712}{2\,.\,10^6}=0{,}000144;$$

відносне видовження від хитань температури $0{,}000012 \, . \, 80 = 0{,}000960$ як бачимо, перша величина становить лише $\frac{1}{7}$ частину другої; тому можна сподіватися, що наслідок розвязки повного кубового рівнання буде мало відрізнятись (і при тому в бік менший) від одержаного значіння f. І справді, кубове рівнання вдоволяється значінням:

$$f = 358 \text{ см.}$$

Якщо-б ми обмежилися наближеною розвязкою (в запас!), то відшукуване підняття точок зачіплення над водою дорівнювалося-б:

$$12{,}00 + 3{,}65 + 0{,}10 = 15{,}75 \text{ м.}$$

РОЗДІЛ IX

РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ ПОСУДІВ

Розрахункові формули

Розглядається посуди, що мають форму оборотової поверхні.

Позначення:

q є тиск на одиницю поверхні посуду в точці O (рис. 106).

δ — товщина стінки посуду.

p_m і p_n — нормальні напруження (головні) в напрямі: 1) p_m — дотичної до меридіяну mm у точці O і 2) p_n — дотичної до рівнобіжного кругу nn у тій-же точці (третє головне напруження в напрямі нормалі до поверхні в точці O береться наближено за рівне з нулем).

ϱ_1 — радіюс кривини меридіяну в точці O.

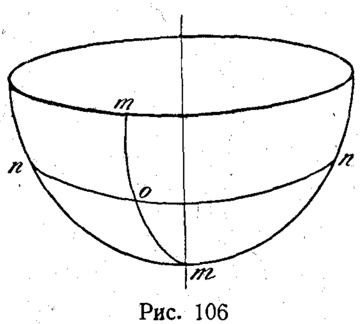


Рис. 106

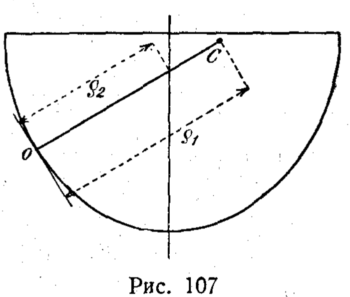


Рис. 107

ϱ_2 — радіюс кривини перерізу нормального до меридіяну в тій-же точці (ϱ_2 дорівнює відтинок нормалі до поверхні, що відтинається поверхнею та віссю обертання). Див. рис. 107:

$$\pm \frac{p_m}{\varrho_1} + \frac{p_n}{\varrho_2} = \pm \frac{q}{\delta} \cdot$$

Знак (+) перед $\frac{p_m}{\varrho_1}$ треба брати, коли оседедок кривини меридіяну C міститься на частині нормалі до поверхні, що перетинає вісь обертання (рис. 107), і знак (—) в противному разі (рис. 108). Знак (+) перед $\frac{q}{\delta}$ треба брати, коли тиск справлено від оси обертання, і знак (—) в противному випадку.

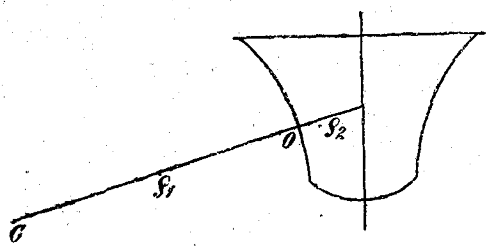


Рис. 108

r — радіюс рівнобіжного кругу, що проходить через розглядувану точку O.

Q — вислідна тисків околишніх сил, що їх прикладено до частини ABC посуду, яку відтинає круг AC (рис. 109); якщо до цієї частини прикладено реакції підпор, то останні входять у суму сил Q.

α — кут, що його утворює дотична до меридіяну в точці O з віссю оборотовою;

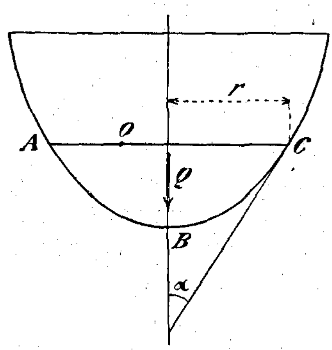


Рис. 109

$$p_m = \pm \frac{Q}{2\pi r \delta \cos \alpha}.$$

Знак (+), коли сила Q спричиняє в точці O розтяг по меридіяну (коли Q справлено в бік частини ABC); знак (—) в супротивному випадку.

Зазначені два рівняння дозволяють визначити p_m і p_n.

Натуга, що стискає перстінь жорсткости (рис. 110):

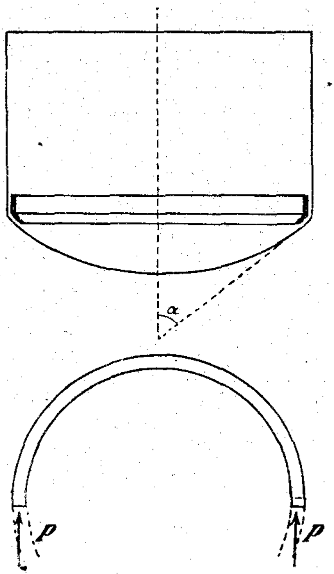


Рис. 110

$$P = \frac{Q}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

де Q є тиск на днище.

---

159. Визначте напруження в кулистій оболонці радіюсу ϱ, що зазнає внутрішнього тиску q.

Розвязка.

$$p_m = p_n = p; \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho; \text{ тому:}$$

$$2\frac{p}{\varrho} = \frac{q}{\delta} \quad \text{і} \quad p = \frac{q\varrho}{2\delta}.$$

160. Визначте товщину сферичного днища парового казана, якщо тиск пари згідно з тискоміром (цеб-то, одрахувавши тиск атмосфери) дорівнює $5\frac{кг}{см^2}$, радіюс сферичної поверхні $1\,м$ і допускальне напруження $300\frac{кг}{см^2}$ (рис. 111).

Розвязка. Умови рівноваги будь-якої частини сферичного днища казана сповна тотожні з умовами рівноваги будь-якої частини повної кулистої оболонки задачі 159. Тому, приклавши розвязку попередньої задачі, маємо:

$$\delta = \frac{5 \cdot 100}{2 \cdot 300} см = 0{,}83\, см.$$

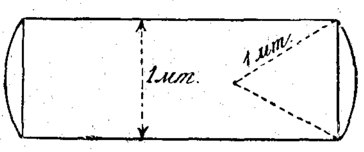


Рис. 111

Звичайно одержану за допомогою розрахунку товщину збільшують на 1—3 *мм* і заокруглюють до цілих *мм*. Остаточно можна припустити:

$$\delta = 10\, мм.$$

161. Визначте товщину стінок циліндричної частини казана за умовами задачі 160, якщо діяметр казана D дорівнює $1\,м$ (рис. 111).

Розвязка.

$$\varrho_1=\infty;\ \varrho_2=\frac{D}{2};\quad Q=\frac{\pi D^2}{4}\cdot q;\ \cos\alpha=1.$$

$$p_m=\frac{\frac{\pi D^2}{2}\cdot q}{\pi D\delta}=\frac{Dq}{4\delta};\quad p_n=\frac{\frac{D}{2}\cdot q}{\delta}=\frac{Dq}{2\delta};$$

як бачимо, $p_n=2p_m$, тому треба припустити $p_n=300\ \frac{кг}{см^2}$; $\delta=\frac{100\,.\,5}{2\,.\,300}\ см=0{,}83\ см$; остаточно:

$$\delta=10\ мм.$$

162. Дослідіть напруження в стінках посуду, що його наповнено водою й що складається із циліндричної частини й днища у формі півкулі (рис. 112).

Розвязка. Щоб розрахувати напруження в першій-ліпшій точці a циліндричної частини, маємо:

$$\varrho_1=\infty,\ \varrho_2=\frac{D}{2};$$

$$\cos\alpha=1;\ q=\gamma\,.\,h_1;$$

$$Q=\left(\frac{\pi D^2}{4}\cdot h+\frac{\pi D^3}{12}\right)\gamma,$$

де γ є вага одиниці об'єму води.

$$p_m=\frac{Q}{\pi D\delta}=\frac{\gamma D}{4\delta}\left(h+\frac{D}{3}\right);$$

$$p_n=\frac{q\cdot\frac{D}{2}}{\delta}=\frac{\gamma D}{2\delta}\cdot h_1.$$

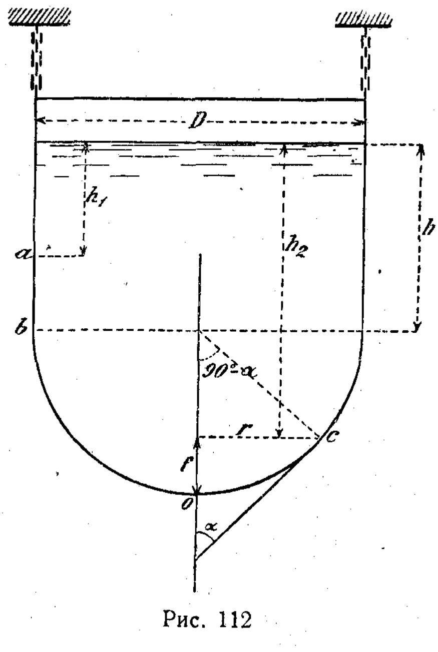


Рис. 112

Напруження p_m постійне для першої-ліпшої точки цієї частини; напруження p_n осягає max. у точці b: $p_n=\frac{\gamma D}{2\delta}\cdot h$. При $h<\frac{1}{3}D$ завжди

$$p_m>p_n;$$

при $h>\frac{1}{3}D$ і $h_1>\frac{h}{2}+\frac{D}{6}$, маємо:

$$p_m<p_n.$$

2) Щоб розрахувати напруження в першій-ліпшій точці c сферичної частини, маємо:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \frac{D}{2}; \; q = \gamma \cdot h_2; \; Q = \left[\pi r^2 h_2 + \pi f^2 \left(\frac{D}{2} - \frac{f}{3}\right)\right] \cdot \gamma$$

(рис. 112; вага циліндру радіюса r і кулистого відтинку).

$$p_m = \frac{Q}{2\pi r \delta \cos\alpha};$$

підставивши $h_2 = h + \frac{D}{2}\sin\alpha$; $r = \frac{D}{2}\cos\alpha$; $f = \frac{D}{2}(1 - \sin\alpha)$, одержимо:

$$p_m = \frac{\gamma D}{4\delta}\left(h + \frac{D}{3}\,\frac{1 - \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right).$$

$$p_n = \frac{\gamma D}{2\delta} \cdot h_2 - p_m = \frac{\gamma D}{4\delta}\left(h - \frac{D}{3} \cdot \frac{1 - 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}\right).$$

В точці b (при $\alpha = 0$):

$$p_m = \frac{\gamma D}{4\delta}\left(h + \frac{D}{3}\right); \; p_n = \frac{\gamma D}{4\delta}\left(h - \frac{D}{3}\right).$$

В точці O (при $\alpha = 90°$):

$$\max p_m = \max p_n = \frac{\gamma D}{4\delta}\left(h + \frac{D}{2}\right).$$

Зауважмо, що в точці b ми маємо тепер різні значіння p_n, залежно від того, чи відносимо ми цю точку до циліндричної чи кулистої частини. Насправді такого скоку в значінні p_n при переході від циліндричної частини до кулистої бути не може (тому що такий скік мав-би своїм наслідком конечну різницю відносних видовжень кол двох сумежних рівнобіжних кругів, що, очевидо, неможливо). Згадана невідповідність пояснюється тим, що наближена теорія розрахунку тонкостінних посудів нехтує впливом пружних змін форми самого посуду, а ці впливи біля точки b мають бути значні. Можна лише сказати, що при переході від циліндричної до кулистої частини напруження p_n мусять дуже швидко меншати.

При $h < \frac{D}{3}$ напруження p_n у горішній частині днища робиться стискальне.

163. Дослідіть напруження в стінці посуду, показаного на рис. 113, його наповнено до верху водою (виведіть вирази p_m і p_n для точки на глибині h від поверхні води).

Розвязка.

$$\varrho_1 = \infty; \ \varrho_2 = \frac{D + 2h \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha};$$

$$r = \frac{D}{2} + h \operatorname{tg} \alpha; \ q = \gamma h;$$

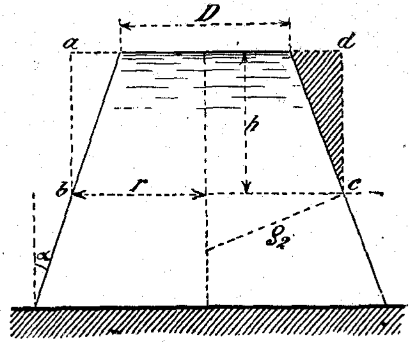


Рис. 113

розтявши посуд за рівнобіжним кругом на глибині h, бачимо, що знадвірні сили, прикладені до долішньої частини посуду, складаються: 1) з ваги води, що знаходиться в долішній частині, 2) з тиску, що дорівнює вагу стовпа води $abcd$, і 3) з реакції основи, що справлена вгору й дорівнює вагу води в цілому посуді; вислідна Q справлена вниз і дорівнює вагу об'ема води, що утворився від обертання зарискованого трикутника. Приклавши теорему Папусову-Гюльденову, одержимо:

$$Q = \pi \gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{D}{2} + \frac{2}{3} h \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Тоді:

$$p_m = \frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{2 \delta \cos \alpha} \cdot \frac{D + \frac{4}{3} h \operatorname{tg} \alpha}{D + 2h \operatorname{tg} \alpha}; \ p_n = \frac{\gamma h}{2 \delta \cos \alpha} \cdot (D + 2h \operatorname{tg} \alpha).$$

Обидва напруження розтягальні.

При всякому h маємо:

$$p_n > p_m.$$

Найбільші напруження у самого дна.

164. Розвяжіть ту-ж саму задачу для випадку, коли посуд навішено його горішнім краем (рис. 114).

Відповідь.

$$p_m = \frac{P + \pi \gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{D}{2} + \frac{2}{3} h \operatorname{tg} \alpha \right)}{\pi \delta \cos \alpha \, (D + 2h \operatorname{tg} \alpha)},$$

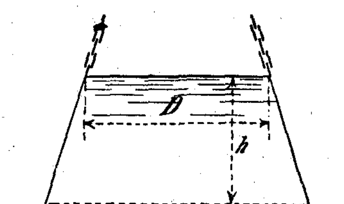


Рис. 114

де P є вага всього об'єму води в посуді.

p_n виражається тою-ж формулою, що і в задачі 163.

165. Розвяжіть ту-ж задачу для посуду, що його зображено на рисункові 115.

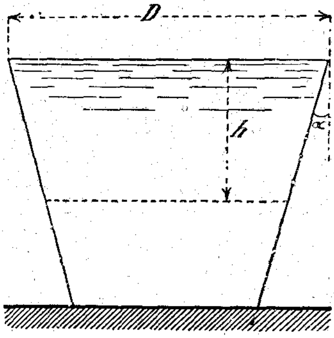


Рис. 115

Відповідь.

$$p_m = -\frac{\gamma h^2 \operatorname{tg} \alpha}{2\delta \cos \alpha} \cdot \frac{D - \frac{4}{3} h \operatorname{tg} \alpha}{D - 2h \operatorname{tg} \alpha}$$

(напруження стискальне; найбільше що до абсолютної величини — біля самого дна),

$$p_n = \frac{\gamma h}{2\delta \cos \alpha} (D - 2h \operatorname{tg} \alpha)$$

$\left(\text{напруження розтягальне; найбільше на глибині } h = \frac{D}{4 \operatorname{tg} \alpha}\right)$.

166. Намітьте хід розрахунку напружень у стінці перстенуватого посуду, що його зображено на рисункові 116.

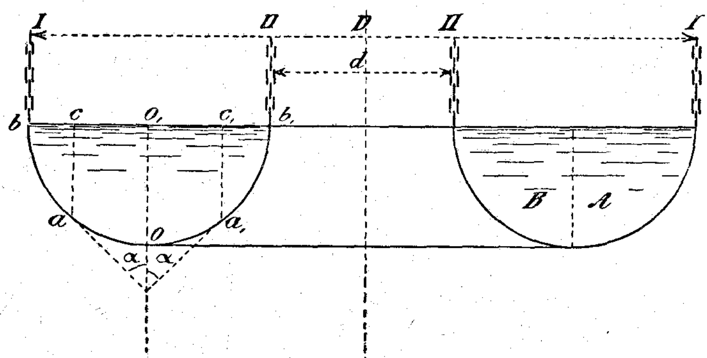


Рис. 116

Розвязка. Перш за все визначмо реакції ланцюгів I й II, що на них висить посуд. Розтявши посуд циліндричною поверхнею діяметру $\frac{D+d}{2}$ (лінії OO_1 — твірні цього циліндру) та розглянувши умови рівноваги обох частин посуду, одержимо, що реакція ланцюгів I дорівнює вагу води в об'ємі, що його утворило обертання вирізка (сектора) A навколо оси посуду, а реакція ланцюгів II дорівнює вагу води в об'ємі, що його утворило обертання вирізка B (це виходить із того, що проекція на прямовисну вісь сил пружности, прикладених до утвореного нами перстеневого перерізу стінки, дорівнює 0, бо ці сили пружности справлено поземо).

1) Напруження p_m і p_n у точці a знайдуться з рівнань:

$$\frac{p_m}{\varrho_1}+\frac{p_n}{\varrho_2}=\frac{q}{\delta}; \quad p_m=\frac{Q}{2\pi r\delta\cos\alpha},$$

де:

$$\varrho_1=\frac{D-d}{4}, \quad \varrho_2=\frac{D-d}{4}+\frac{D+d}{4\cos\alpha}, \quad q=\gamma\cdot\frac{D-d}{4}\sin\alpha;$$

$$r=\frac{D-d}{4}\cdot\cos\alpha+\frac{D+d}{4};$$

сили пружности з напруженням p_m, що діють на рівні точок a, які належать ізнадвірній половині A посуду, зрівноважують реакцію ланцюгів I, відрахувавши вагу води в об'ємі, що його утворило обертання трикутньої фігури abc (рис. 117); тому в данім разі

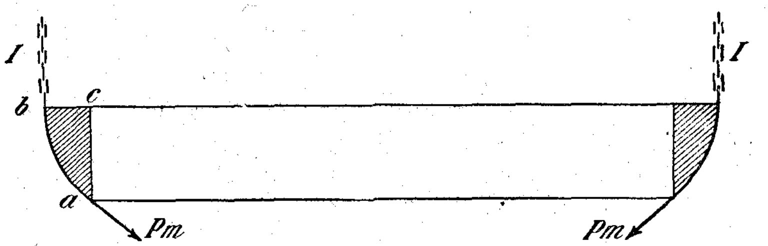


Рис. 117

сила Q дорівнює вагу води в об'ємі, що його утворило обертання фігури acO_1O (рис. 116); напруження p_m мають бути розтягальні.

2) Напруження в точці a_1 знайдуться з рівнань:

$$-\frac{p_m}{\varrho_1}+\frac{p_n}{\varrho_2}=-\frac{q}{\delta}$$

(зверніть увагу на напрям тиску й на положення центру кривини меридіонального перерізу відносно оси обертання!),

$$p_m=\frac{Q}{2\pi r\delta\cos\alpha},$$

де:

$$\varrho_1=\frac{D-d}{4}, \quad \varrho_2=\frac{D+d}{4\cos\alpha}-\frac{D-d}{4}, \quad q=\gamma\frac{D-d}{4}\sin\alpha;$$

$$r=\frac{D+d}{4}-\frac{D-d}{4}\cos\alpha;$$

Q дорівнює вагу води в об'ємі, що його утворило обертання фігури $a_1c_1O_1O$ (в цьому можна переконатися міркуваннями, що аналогічні зі згаданими в п. 1); напруження p_m має бути розтягальне.

3) Для точки O маємо:

$$\varrho_1 = \frac{D-d}{4};\ \varrho_2 = \infty;\ q = \gamma \cdot \frac{D-d}{4};\ \cos\alpha = 0;\ Q = 0.$$

Загальні рівнання отакі:

$$\frac{p_m}{\varrho_1} = \frac{q}{\delta};\ p_n = \frac{0}{0};$$

звідси:

$$p_m = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \left(\frac{D-d}{4}\right)^2.$$

Що до p_n, то загальні рівнання розглядуваної теорії не дають змоги визначити цю величину. Щоб розвязати задачу, треба мислено вирізати перстенувату смужку безконечно малої ширини й середнього радіюсу $\frac{D+d}{4}$ (рис. 118), розтяти цей перстінь пів-на-пів і роз-

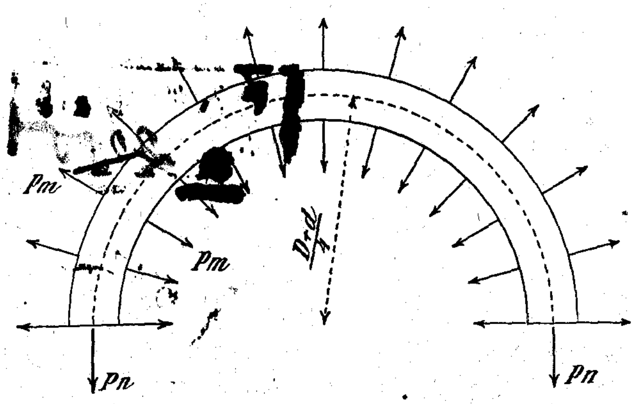


Рис. 118

глянути умови рівноваги прикладених до нього сил (сума проекцій на першу-ліпшу позему вісь дорівнює 0). Користуючися з висновків в пп. 1 й 2 цієї задачі, можна довести, що в точці O матимемо:

$$p_n = \frac{\gamma}{2\delta} \cdot \left(\frac{D-d}{4}\right)^2.$$

167. Водовмісткового бака системи Інцевої (Інце) (рис. 119) можна спроектувати так, що в опорному перстені його не утвориться ні стискальних, ні розтягальних (поземо справлених) напружень. Твірні конічної частини днища справлені до прямовису на кут $\alpha = 45°$. Який має бути кут в допряженні кулистої частини днища з перстенем, щоб в останньому не виникало згаданих напружень, якщо $D = \sqrt{3} \, . \, d$?

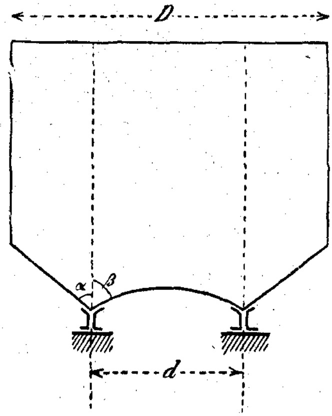


Рис. 119

Розвязка. З достатньою точністю можна вважати, що при згаданім взаємнім відношенні діяметрів D і d об'єм середньої частини бака Q_1 втричі менший від повного об'єму $Q_1 + Q_2$; звідси $Q_2 = 2Q_1$. Потрібної умови додержиться, якщо $Q_2 \operatorname{tg} \alpha = Q_1 \operatorname{tg} \beta$. Маємо:

$$\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha = 2; \quad \beta \cong 63°26'.$$

ЗМІСТ

Механіка