МБШ

Задачи по физике и методы их решения

В. А. Балаш

Методическая библиотека школы

В. А. Балаш

Задачи по физике и методы их решения

Пособие для учителей

Издание 3-е,
переработанное и исправленное

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1974

Балаш В. А.

Б 20 Задачи по физике и методы их решения. Изд. 3-е, перераб. и испр. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1974.

430 с. (Метод. б-ка школы).

В пособии собраны задачи повышенной трудности по элементарному курсу физики, многие из которых предлагались на олимпиадах и вступительных экзаменах в московских вузах.

Перед каждым разделом даны краткие теоретические сведения и методика решения задач.

Б $\frac{60501\text{-}420}{103(03)\text{-}74}$ подписное 53

От автора

Настоящая книга представляет собой пособие по решению задач повышенной трудности по курсу элементарной физики. Она предназначена для занимающихся самообразованием, готовящихся к поступлению в вузы, для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов и учителей средней школы.

Создавая пособие, автор стремился разработать единые методы решения задач по курсу элементарной физики, показать, как нужно использовать эти методы при решении конкретных задач.

Построение книги не является стандартным для задачника. В начале каждой главы даны краткие теоретические сведения, позволяющие вспомнить основные понятия и законы курса физики, приводятся формулы, которые используются при решении задач. Далее следуют рекомендации по решению задач и примеры их решения. В конце каждой главы предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Большинство задач, приведенных в пособии, предлагалось на физических олимпиадах и вступительных экзаменах по физике в ведущих вузах Москвы. Многие задачи составлены автором.

В конце книги помещены ответы к задачам, а также решения некоторых задач.

Третье издание пособия было переработано и исправлено. Автор выражает глубокую благодарность всем читателям, приславшим свои замечания и пожелания по улучшению пособия; в новом издании задачника они учтены.

ВВЕДЕНИЕ

Общие замечания по решению физических задач

1. В изучении курса физики решение задач имеет исключительно большое значение, и им отводится значительная часть курса.

Решение и анализ задач позволяет понять и запомнить основные законы и формулы физики, создает представление об их характерных особенностях и границах применения. Задачи развивают навык в использовании общих законов материального мира для решения конкретных вопросов, имеющих практическое и познавательное значение. Умение решать задачи является лучшим критерием оценки глубины изучения программного материала и его усвоения.

В основу каждой физической задачи положено то или иное частное проявление одного или нескольких фундаментальных законов природы и их следствий. Поэтому, прежде чем приступать к решению задач какого-либо раздела курса, следует тщательно проработать теорию вопроса и внимательно разобрать иллюстрирующие ее примеры. Без твердого знания теории нельзя рассчитывать на успешное решение и анализ даже сравнительно простых задач, не говоря уже о более сложных.

2. Решение большинства физических задач расчетного характера можно разделить на четыре этапа: а) анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом; б) составление алгебраических уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны; в) совместное решение полученных уравнений относительно той или иной величины, считающейся в данной задаче неизвестной; г) анализ полученного результата и числовой расчет.

Первый этап решения является в какой-то мере вспомогательным и иногда его опускают, если данный физический процесс и условие задачи оказываются достаточно ясными и понятными. Второй — использование известных законов и формул физики для математической записи условий задачи (составление системы уравнений, полностью отражающей данный физический процесс) — представляет основную трудность решения почти всех задач по физике. В результате такой записи получается одно или несколько уравнений, в которых неизвестным служит искомая величина, и физическая задача почти полностью приводится к математической. Дальнейшее решение состоит в том, чтобы из полученной системы уравнений путем алгебраических выкладок найти эту величину, выразив ее через исходные данные задачи.

Получив расчетную формулу, необходимо проанализировать ее: выяснить, как меняется искомая величина при изменении других величин, функцией которых она является. Такой анализ стимулирует физическое мышление, расширяет представление о рассматриваемом явлении, выявляет характерные особенности установленной зависимости. После этого можно подставлять в расчетную формулу числа и делать окончательный расчет.

3. а) При анализе задачи и составлении алгебраических соотношений, описывающих то или иное явление, особое внимание следует обратить на векторный характер ряда величин, входящих в формулы физики. Для полного определения этих величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление. При этом всегда нужно помнить, что число и направление — это две неотъемлемые характеристики любого вектора. Если происходит изменение векторной величины, то это значит, что меняется или ее числовое значение, или направление, или то и другое вместе. Векторные величины равны только в том случае, если их модули и направления одинаковы.

Действия с векторами существенно отличаются от действий с обычными числами. Для изучения механики в элементарном курсе физики достаточно знать сложение (разложение) и вычитание векторов, а также умножение вектора на скаляр.

Под суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленных под углом α друг к другу, подразумевают третий вектор $\vec{c}$, построенный как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы. Символически эта операция записывается так: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

Для нахождения разности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленных под углом α друг к другу, необходимо найти такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дал бы вектор $\vec{a}$. Геометрически вычитание векторов сводится к построению параллелограмма, в котором уменьшаемый вектор служил бы диагональю, а вычитаемый — одной из его сторон. Вектор разности $\vec{d}$ будет являться в этом случае второй стороной параллелограмма. Иначе, чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{d}.$$

Чтобы определить числовое значение вектора суммы $\vec{c}$, необходимо вычислить длину диагонали построенного параллелограмма, для чего удобно пользоваться теоремой косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

При умножении векторной величины на скаляр k ее модуль увеличивается в k раз, а направление остается неизменным при $k \geqslant 0$ и меняется на противоположное при $k < 0$.

б) Для упрощения анализа физических процессов и математических выкладок нередко приходится прибегать к разложению векторов скорости, ускорения, силы и т. д. на составляющие по каким-либо двум направлениям, чаще всего взаимно перпендикулярным.

Разложение вектора на составляющие есть действие, обратное сложению векторов, поэтому, чтобы разложить вектор $\vec{a}$ по двум заданным направлениям, нужно построить стороны параллелограмма $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, зная его диагональ и направление сторон ($\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$).

Следует заметить, что разложение вектора на составляющие— это чисто математический прием, и тот факт, что любой вектор можно разложить на составляющие по осям, не означает, что каждой из них можно дать такое же физическое толкование, как исходному вектору. Рациональный выбор направлений для составляющих вектора при его разложении обычно неявно диктуется условием задачи, однако в общем случае он может быть произвольным.

Если какая-нибудь физическая величина является вектором (т. е. определяется числом и направлением), то эту же величину можно полностью охарактеризовать тремя (на плоскости — двумя) числами-проекциями данного вектора на оси прямоугольной системы координат. Проекцией вектора на координатную ось называют произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением этой оси. Проекция вектора может быть как положительной, так и отрицательной. Обычно при нахождении проекций вектора сначала находят его составляющие по осям. Если составляющая совпадает с положительным направлением оси, проекцию берут со знаком «плюс», если же нет, то со знаком «минус».

Если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы координатных осей OX и OY и вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости OXY, то его проекции по этим осям:

$$a_x = a\cos(\vec{a}, \vec{i}); \quad a_y = a\cos(\vec{a}, \vec{j}),$$

причем

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2; \quad \vec{a}_x + \vec{a}_y = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

4. а) Все задачи, независимо от способа задания исходных величин, следует решать в общем виде. При такой форме решения остаются ясными следы законов, используемых в процессе решения, а сами выкладки позволяют при необходимости проверить любую часть решения и исключить возможные ошибки. Получив ответ в виде алгебраической формулы или уравнения, его можно проанализировать, установить характер и пределы изменения искомой величины в функции величин, через которые она выражена. Кроме того, и это, пожалуй, главное, указанный способ решения позволяет отработать методику и приемы решения задач по каждому разделу курса.

б) Ознакомившись с условиями задачи, никогда не следует заострять внимание на искомой величине и тем более пытаться сразу ее найти. Необходимо помнить, что ближайшая цель решения состоит в том, чтобы свести задачу от физической к математической, записав ее условие при помощи формул.

Для этого нужно четко представить себе физическое явление, о котором говорится в условии задачи, установить, какие законы физики лежат в основе данного явления, вспомнить математическое выражение этих законов.

в) Чтобы хорошо понять условие задачи, необходимо сделать схематический чертеж, где, хотя бы условно, указать все величины, характеризующие данное явление. Если при этом окажется, что для полного описания явления надо использовать величины, не фигурирующие в условии задачи, их нужно ввести в решение самим, так как в большинстве случаев без них невозможно найти связь между искомыми и заданными величинами.

г) Сделав чертеж, следует еще раз прочитать условие задачи и отметить, какие из величин, указанных на чертеже, даны и какие требуется найти. Все известные величины — их числовые значения и наименования — выписываются обычно в колонку. (Эту запись можно делать и после составления уравнений.)

д) Далее, с помощью физических законов и формул необходимо установить математическую связь между всеми величинами, введенными в решение при символическом описании рассматриваемого явления. В результате получится одно или несколько уравнений, включающих в себя как заданные, так и неизвестные величины, — физическая задача сведется к математической.

е) Прежде чем решать составленную систему уравнений, полезно убедиться в том, что число неизвестных равно числу уравнений, иначе система не будет иметь определенного решения.

Решение системы уравнений нужно начинать с исключения тех неизвестных величин, которые не требуется находить по условию задачи, и следить за тем, чтобы при каждом алгебраическом действии число неизвестных уменьшалось.

5. Получив ответ в общем виде и проанализировав его, можно приступать к числовым расчетам. Прежде всего для этого необходимо выбрать систему единиц, в которой решено проводить вычисления, предпочтение отдается Международной системе единиц (СИ).

Если заданные величины выражены в одной системе единиц, вычисления проводят в этой системе, и, получив окончательный результат, переводят его при необходимости в другую систему. Если величины, входящие в расчетную формулу, даны в разных системах единиц, их следует выразить в единицах системы, принятой для решения.

В тех случаях, когда в числитель и знаменатель расчетной формулы входят однородные величины одной степени, их можно подставлять в любых единицах, лишь бы они были одинаковыми. Единицы измерения этих величин сокращаются и на размерность искомой величины не влияют.

Подставив числовые значения всех величин (вместе с их наименованием) в расчетную формулу, проводят действия с наименованиями, с тем чтобы убедиться, что результат получается в единицах измерения искомой величины в принятой системе. Несоблюдение этого условия (оно необходимо, но недостаточно) свидетельствует об ошибке, допущенной в ходе решения. Установив наименование искомой величины, можно приступать к действиям с числами. (Если есть полная уверенность в правильности решения, единицы измерения в расчетную формулу можно не подставлять.)

Проводя арифметические расчеты, следует пользоваться правилами приближенных вычислений, позволяющих во многих случаях сэкономить время, не нанося никакого ущерба точности. Эти правила излагаются в руководствах по элементарной математике.

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА

Глава 1. КИНЕМАТИКА

Основные понятия, законы и формулы

1. Механическим движением называют изменение взаимного расположения отдельных тел или различных частей одного тела, происходящее в пространстве с течением времени. В любом механическом движении всегда участвует не менее двух тел. Одно из них принимают за неподвижное тело отсчета и по отношению к нему определяют механическое состояние всех остальных тел. Чтобы установить законы механического движения тел относительно тела отсчета, с ним связывают ту или иную систему отсчета, чаще всего прямоугольную систему координат. Наиболее простой вид эти законы имеют в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли, когда по условию задачи суточным и годовым вращением Земли можно пренебречь.

Простейшим механическим движением является движение материальной точки — тела, размеры и форму которого можно не учитывать при описании его движения.

2. Движение материальной точки характеризуют траекторией, длиной пути, перемещением, скоростью и ускорением.

Траекторией называют линию в пространстве, описываемую точкой при своем движении.

Длину дуги, отсчитываемую вдоль траектории от некоторой точки, принятой за начало отсчета, называют отрезком пути (дуговой координатой). Перемещение — это расстояние между начальным положением движущейся точки и ее положением в данный момент времени.

Длина пути — величина скалярная, перемещение — величина векторная.

3. Положение материальной точки M на плоскости в наиболее распространенной системе отсчета — декартовой системе координат OXY определяют или заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в точку M, или двумя числами — координата-

ми x, y точки M, представляющими собой проекции вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси.

Если известна траектория точки M, ее положение в пространстве можно определить заданием дуговой координаты s (отрезком пути), отсчитываемой вдоль траектории от начала отсчета.

При движении точки ее радиус-вектор и координаты изменяются и являются функциями времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad s = s(t). \qquad (1.1)$$

Уравнения (1.1) называют кинематическими уравнениями движения точки, заданными соответственно в векторной, координатной и так называемой естественной формах.

4. Физическую величину, характеризующую изменение положения точки в пространстве за единицу времени, называют средней скоростью перемещения. Если за время Δt точка переместилась на расстояние $\Delta\vec{r}$, ее средняя скорость перемещения за это время будет равна:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

Средняя скорость перемещения — величина векторная, ее направление всегда совпадает с направлением вектора перемещения.

Чтобы получить значение скорости в данный момент времени — мгновенную скорость, нужно рассмотреть перемещение точки за бесконечно малый промежуток времени и найти предел отношения 1.2) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Направление вектора мгновенной скорости в каждой точке траектории совпадает с направлением касательной.

Аналогично выражениям (1.2) и (1.3) определяют среднюю и мгновенную скорости при координатном и естественном способе задания движения.

5. Величину, характеризующую изменение скорости за единицу времени, называют средним ускорением. Если за время Δt мгновенная скорость точки изменилась от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$, среднее ускорение точки за это время будет равно:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.4)$$

Ускорение — величина векторная; направление вектора ускорения всегда совпадает с направлением вектора изменения скорости.

Чтобы получить значение ускорения в данный момент времени — мгновенное ускорение, нужно найти предел отношения (1.4) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (1.5)$$

В общем случае криволинейного движения точки вектор ее ускорения $\vec{a}$ в каждой точке траектории направлен под некоторым углом α к касательной, проведенной к кривой в этой точке. Если вектор $\vec{a}$ разложить по направлению касательной и нормали к ней, то составляющие $a_к = a\cos\alpha$ и $a_н = a\sin\alpha$ называют соответственно касательным и нормальным ускорением. Касательное ускорение всегда направлено по линии скорости и характеризует ее изменение по величине; нормальное ускорение всегда перпендикулярно скорости и характеризует ее изменение по направлению.

В зависимости от того, направлено ли касательное ускорение в сторону движения ($a_к > 0$) или в противоположную сторону ($a_к < 0$), величина скорости в криволинейном движении или возрастает, или уменьшается. Если $a_к = 0$ и $a_н \neq 0$, то изменяется только направление скорости; величина же ее остается неизменной. Такое криволинейное движение будет равномерным. Если $a_н = 0$, то направление вектора скорости с течением времени не меняется — движение точки является прямолинейным.

6. Простейший вид механического движения — прямолинейное движение точки с постоянным ускорением.

Если ось координат направить в сторону начального смещения точки, то для такого движения $|\vec{r}| = x = s$;

$$\vec{a} = \text{const}; \quad |\vec{a}| = |\vec{a}_к| = a_x = \text{const}; \quad a_н = 0; \qquad (1.6)$$

$$v = v_0 + at; \qquad (1.7)$$

$$v_{ср} = \frac{v_0 + v}{2}; \qquad (1.8)$$

$$s = v_{ср}t = \frac{v_0 + v}{2}t; \qquad (1.9)$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}; \qquad (1.10)$$

$$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \qquad (1.11)$$

Соотношения (1.6), (1.7) и (1.10), выражающие законы изменения ускорения, скорости и перемещения с течением времени, называют соответственно уравнением ускорения, скорости и перемещения.

Движение точки с постоянным ускорением включает в себя равномерное и равнопеременное (равноускоренное и равнозамедленное) движения.

При равномерном движении скорость точки с течением времени не меняется ($v = v_0 = \text{const}$), и в уравнениях (1.7) и (1.10) нужно положить $a = 0$. При равноускоренном движении ($v > v_0$) во всех формулах кинематики нужно считать $a > 0$. При равнозамедленном движении в формулах (1.7), (1.10) и (1.11) ускорение следует брать со знаком «минус».

7. К равнопеременному движению можно отнести движение тел под действием силы тяжести, если их перемещение h по вертикали, отсчитанное от поверхности Земли, мало по сравнению со средним расстоянием тела до центра Земли. Так как сила тяжести сообщает всем телам, находящимся на одинаковом расстоянии от центра Земли, одинаковое ускорение g (ускорение свободного падения) и при $h \ll R_з$ с достаточной степенью точности можно считать, что $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2}, то законы этого движения в принятых обозначениях получаются автоматической заменой в формулах (1.7)—(1.11) a на g и s на h.

8. Простейшим видом криволинейного движения является равномерное движение точки по окружности. При таком движении $R = \text{const}$, $a_к = 0$, $|\vec{v}| = \text{const}$, а направление вектора скорости за любые равные промежутки времени изменяется на одинаковый угол. Нормальное ускорение, называемое в этом случае центростремительным, $|\vec{a}_н| = \text{const}$.

Если точка движется по кругу радиусом R с линейной скоростью v, делая n оборотов за время t, то

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi R n}{t} = 2\pi R f = \frac{2\pi R}{T}; \tag{1.12}$$

$$a_н = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2 f^2 R = 4\frac{\pi^2 R}{T^2}, \tag{1.13}$$

$$\text{где } f = \frac{n}{t} \text{ и } T = \frac{t}{n} = \frac{1}{f} \tag{1.14}$$

соответственно число оборотов в единицу времени (скорость вращения) и продолжительность одного оборота (период вращения).

9. По виду движения отдельных частиц твердого тела различают поступательное и вращательное движение тел.

При поступательном движении тела всякая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения тела.

Поступательное движение тел описывают теми же величинами и уравнениями, что и движение материальной точки; кинематическими характеристиками вращательного движения тел служат угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение. Угловым перемещением φ называют центральный угол, соответствующий дуге, пройденной движущейся точкой. Угловую скорость и угловое ускорение определяют аналогично скорости и ускорению прямолинейного движения:

$$\omega_{ср} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{1.15}$$

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\omega - \omega_0}{t}. \tag{1.16}$$

Для тел, вращающихся с постоянным угловым ускорением, по аналогии с прямолинейным движением имеем:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t; \\ \varphi &= \frac{\omega + \varphi_0}{2} t; \\ \varphi &= \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}; \\ \varphi &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

В случае равномерного вращения $\omega = \text{const}$ и в формулах (1.17) необходимо положить $\varepsilon = 0$. При ускоренном вращении $\omega > \omega_0$ и $\varepsilon > 0$; при замедленном $\omega < \omega_0$ и $\varepsilon < 0$.

Из сравнения формул (1.12) и (1.15) видно, что линейная скорость v точек тела, удаленных от его оси вращения на расстояние R, равна

$$v = \omega R. \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что касательное и нормальное ускорение этих точек связано с кинематическими характеристиками вращательного движения тела формулами:

$$a_к = \varepsilon R; \; a_н = \omega v = \omega^2 R. \tag{1.19}$$

10. Очень часто движение тел рассматривают относительно какого-либо предмета, который в свою очередь перемещается по отношению к телу отсчета, принятому условно за неподвижное. Движение тел относительно системы координат, связанной с подвижным телом отсчета, называют относительным, а движение подвижной системы отчета относительно неподвижной — переносным. Результирующее движение тел относительно неподвижной системы отсчета называют абсолютным движением. В соответствии с этим различают относительное, переносное и результирующее (абсолютное) перемещение, скорость и ускорение. Если известны векторы относительного и переносного перемещений, то результирующее перемещение равно их геометрической сумме и находится по правилу сложения векторов:

$$\vec{s}_а = \vec{s}_0 + \vec{s}_п. \tag{1.20}$$

Аналогично находятся переносная скорость и переносное ускорение:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_0 + \vec{v}_п; \tag{1.21}$$

$$\vec{a}_а = \vec{a}_0 + \vec{a}_п. \tag{1.22}$$

(Последнее соотношение имеет место лишь в том случае, если переносное движение является поступательным.)

11. Всякое перемещение плоской фигуры, происходящее в плоскости расположения этой фигуры (такое движение называют плоскопараллельным), можно рассматривать в любой момент времени как результат наложения поступательного движения тела вместе с некоторой произвольной точкой O тела (называемой полюсом) и вращательного движения тела относительно этой точки.

Скорость любой точки тела при его плоскопараллельном движении равна:

$$\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}_0,$$

где $\vec{v}_п$ — скорость полюса, $v_в = \omega r$ — линейная скорость рассматриваемой точки, обусловленная поворотом тела около полюса с угловой скоростью ω, r — расстояние от точки до полюса.

Выбирая полюс O в различных точках тела, можно по-разному осуществить разложение плоского движения на поступательное и вращательное. В каждом из этих случаев перемещение (скорость) в поступательном движении может быть различным, угловое перемещение (скорость) будет одинаковым.

В общем случае плоскопараллельного движения твердого тела существует такая точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей.

Если за полюс принять мгновенный центр скоростей, плоскопараллельное движение тела можно представить как непрерывный ряд вращений вокруг полюса. Абсолютная скорость v произвольной точки тела, удаленной от мгновенного центра на расстояние r, равна в этом случае $v = \omega r$.

а) При качении без проскальзывания плоской фигуры по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тела с поверхностью.

б) Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восставленных из двух данных точек тела к линиям векторов абсолютной скорости этих точек.

в) В том случае, когда перпендикуляры, проведенные из указанных точек, сливаются в один, мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляра с линией, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.

Решение задач. Примеры

При решении задач по физике на те или иные разделы курса, кроме общих правил решения, приходится учитывать некоторые дополнения к ним, связанные со спецификой самих разделов.

Задачи по кинематике, разбираемые в курсе элементарной физики, включают в себя задачи о равнопеременном прямолинейном движении одной или нескольких точек, задачи о криволинейном движении точки на плоскости и небольшое количество задач, связанных с вращением твердого тела. Мы рассмотрим каждый из этих типов задач отдельно.

а) Прочитав условие задачи, нужно сделать схематический чертеж, на котором следует прежде всего изобразить систему отсчета и указать траекторию движения точки. Удачно выбранная система координат может значительно упростить решение и сделать математические выкладки предельно простыми, однако четких правил для выбора систем координат нет. Общие рекомендации здесь сводятся к следующему: начало координат удобно совмещать с положением движущейся точки в начальный рассматривамый момент времени, а оси направлять так, чтобы приходилось делать как можно меньше разложений векторов. Установив систему отсчета, нужно отметить на чертеже все кинематические характеристики движения: перемещение точки за рассматриваемый промежуток времени, мгновенную скорость в начале и конце этого перемещения, ускорение и время. Если по условию задачи характер движения тел на рассматриваемом перемещении различен или само перемещение делится на части, весь путь следует разбить на отдельные участки и рассматривать движение на них по отдельности.

После того как выполнен чертеж, с помощью формул (1.7) — (1.11) устанавливают связь между величинами, отмеченными на чертеже. При этом следует иметь в виду, что в уравнение скорости и перемещения входят все кинематические характеристики равнопеременного прямолинейного движения и из них путем простых алгебраических преобразований получаются формулы (1.9) и (1.11). Учитывая это, при составлении системы уравнений для нахождения какой-либо величины, ради общности решения, достаточно использовать только формулы (1.7) и (1.10).

Составив полную систему кинематических уравнений, описывающих движение точки, нужно записать в виде вспомогательных уравнений все дополнительные условия задачи, после чего, проверив число неизвестных в полученной системе уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомых величин.

Решение задач о движении одних тел относительно других, которые в свою очередь движутся относительно тела, принятого за неподвижное (чаще всего его связывают с Землей), начинают с выбора системы отсчета. Для этого необходимо прежде всего тщательно продумать условие задачи и выяснить, к какой системе относятся заданные и искомые характеристики движения. Затем нужно установить подвижную и неподвижную системы отсчета, связав их с телами, относительно которых рассматривается движение, указать кинематические характеристики относительного и переносного движений и составить уравнения движения отдельно для подвижной и неподвижной систем отсчета. Составляя эти уравнения, необходимо следить за тем, чтобы начало отсчета времени было одинаковым для всех тел, участвующих в движении. Связь между абсолютным, переносным и относительным движениями дается формулами (1.20)—(1.22). Подстановкой в них развернутых выражений для $s_п$, s_0, $v_п$, v_0 и т. д. и заканчивается первая часть решения.

Решая задачи на движение тел, брошенных вертикально вверх, нужно обратить особое внимание на следующее. Уравнения скорости и перемещения для тела, брошенного вертикально вверх, дают общую зависимость v и h от t для всего времени движения тела. Они справедливы (со знаком минус) не только для замедленного подъема вверх, но и для дальнейшего равноускоренного падения тела, поскольку движение тела после мгновенной остановки в верхней точке траектории происходит с прежним ускорением. Под h при этом всегда подразумевают перемещение движущейся точки по вертикали, т. е. ее координату в данный момент времени — расстояние от начала отсчета движения до точки.

Если тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0, то время $t_{под}$ и высота $h_{макс}$ его подъема равны:

$$t_{под} = \frac{v_0}{g}\ ;\ h_{макс} = \frac{v_0}{2g} = \frac{gt^2_{под}}{2}.$$

Кроме того, время падения этого тела в исходную точку равно времени подъема на максимальную высоту ($t_{пад} = t_{под}$), а скорость падения равна начальной скорости бросания ($v_{пад} = v_0$).

б) В задачах на криволинейное движение точки можно выделить задачи о движении точки по окружности и задачи о движении тел, брошенных под углом к горизонту.

Решение задач о движении точки по окружности принципиально ничем не отличается от решения задач о прямолинейном движении. Особенность состоит лишь в том, что здесь наряду с общими формулами кинематики приходится учитывать связь между угловыми и линейными характеристиками движения.

Движение тел, брошенных под углом к горизонту, можно рассматривать как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям OX и OY, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней. Учитывая это, решение всех задач такого типа удобно начинать с разложения вектора скорости и ускорения по указанным осям и затем составлять кинематические уравнения движения для каждого направления. Необходимо при этом иметь в виду, что тело, брошенное под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха и небольшой начальной скорости летит по параболе и время движения по оси OX равно времени движения по оси OY, поскольку оба эти движения происходят одновременно.

Решение задач о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси основано на применении формул (1.17) с учетом (1.18) и (1.19). Как и в случае поступательного движения, для составления кинематических уравнений вращательного движения достаточно использовать только основные формулы — уравнения угловой скорости и углового перемещения.

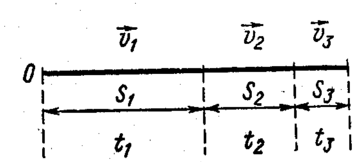
в) В заключение остановимся на задачах, требующих использования графиков. Основное требование, которое предъявляется при решении таких задач, — это твердое знание графиков простейших элементарных функций и умение их исследовать. В частности, нужно хорошо знать уравнение прямой линии и параболы, отображающих геометрически уравнения ускорения, скорости, пути и перемещения при равномерном и равнопеременном движениях.

Первую группу графических задач составляют задачи, в которых дается график зависимости (обычно от времени) одних кинематических величин и по нему нужно построить график зависимости между какими-либо другими величинами. Приступая к решению таких задач, необходимо внимательно проанализировать предложенный график, установить характер заданного движения и представить данную зависимость в виде уравнения. По этому уравнению нужно определить искомую зависимость и, исследовав ее, построить нужный график. При достаточном навыке в решении подобных задач искомый график можно строить сразу, не прибегая к алгебраическим выкладкам.

Вторую группу составляют задачи, решение которых предполагает отображение условий на одном из графиков зависимости кинематических величин от времени. Как только условия такой задачи записаны графически, ее дальнейшее решение состоит в том, чтобы найти ту или иную величину на вычерченном графике, что, как правило, особого труда не представляет. Большое внимание в задачах подобного типа следует обращать на рациональный выбор графика, на котором будет удобнее всего представить условия задачи и легче всего указать искомую величину.

Пример 1. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $v_1 = 12$ *км/ч*. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 6$ *км/ч*, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ *км/ч*. Определите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Р е ш е н и е. а) Установив, что задача дана на равномерное прямолинейное движение одного тела, и представив себе весь процесс движения, делаем схематический чертеж (рис. 1.1). При составлении чертежа прежде всего изображаем траекторию движения и выбираем на ней начало отсчета движения (точка O). Весь путь разбиваем на три отрезка s_1, s_2, s_3, на каждом из них указываем скорости v_1, v_2, v_3 и отмечаем время движения t_1, t_2 и t_3.



б) Составляем уравнения движения для каждого отрезка пути:

$$s_1 = v_1 t_1;\ s_2 = v_2 t_2;\ s_3 = v_3 t_3$$

Рис. 1.1.

и записываем дополнительные условия задачи:

$$s_1 = s_2 + s_3;\ t_2 = t_3;\ v_{ср} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

в) Читаем еще раз условие задачи, выписываем числовые значения известных величин и, определив число неизвестных в полученной системе уравнений (их семь: s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 и $v_{ср}$), решаем ее относительно искомой величины $v_{ср}$.

Если при решении задачи полностью учтены все условия, но в составленных уравнениях число неизвестных получается больше числа уравнений, это означает, что при последующих вычислениях одно из неизвестных сократится, такой случай имеет место и в данной задаче.

Решение системы относительно средней скорости дает:

$$v_{ср} = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{2s_1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

г) Подставив числовые значения в расчетную формулу, получим:

$$v_{ср} \approx 7\ км/ч.$$

Пример 2. От буксира, идущего против течения реки, оторвалась лодка. В тот момент, когда на буксире заметили лодку, она находилась от него на достаточно большом расстоянии s_0. С буксира быстро спустили катер, который доплыл до лодки и возвратился с нею назад. Сколько времени заняла поездка катера и какое расстояние он проплыл в одну и другую сторону, если скорости катера и буксира относительно воды равны соответственно v_1 и v_2?

Решение. В задаче рассматривается равномерное движение тел относительно воды, которая сама течет относительно берега. Все тела, участвующие в движении: лодка, буксир и катер — имеют скорости относительно воды и переносную вместе с водой. В тех случаях, когда движение изучают в системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно неподвижной системы отсчета (как, например, в данной задаче), все расчеты можно производить по тем же формулам и уравнениям, как если бы переносного движения (течения) не было. Это почти очевидное обстоятельство следует из принципа относительности движения.

При изучении относительного движения двух или нескольких тел, движущихся в то же время относительно Земли, систему отсчета удобно связывать с одним из этих тел, принимая его за тело отсчета, и рассматривать перемещения, скорости и ускорения относительно этого тела. В предлагаемой задаче систему отсчета удобно связать с буксиром, так как все происходящие события рассматриваются по отношению к нему. В системе отсчета, связанной с буксиром, сам буксир покоится, лодка удаляется от него со

скоростью v_2, катер удаляется от буксира со скоростью $v_1 + v_2$, катер вместе с лодкой приближается к нему со скоростью $v_1 - v_2$.

Допустим, что за время t_1, спустя которое катер догонит лодку, буксир удалился от лодки на расстояние s_1, тогда уравнение движения для катера и лодки за это время дает:

$$s_0 + s_1 = (v_1 + v_2)t_1 \quad (1)$$

и

$$s_1 = v_2 t_1. \quad (2)$$

Если для возвращения на буксир катеру потребовалось время t_2, то уравнение его движения имеет вид:

$$s_0 + s_1 = (v_1 - v_2)t_2. \quad (3)$$

Искомое время движения катера будет равно:

$$t = t_1 + t_2, \quad (4)$$

и за это время катер проплывет расстояние

$$s = 2(s_0 + s_1). \quad (5)$$

Итак, получены пять уравнений, содержащих пять неизвестных величин (s_1, t_1, t_2, s и t), из которых требуется определить продолжительность поездки катера t и пройденное им расстояние s. Решая уравнения совместно, находим:

$$t = \frac{2s_0}{v_1 - v_2};\ s = 2s_0\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right).$$

Пример 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 3{,}13$ *м/сек*. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта с такой же начальной скоростью бросили второе тело. Определите, на каком расстоянии от точки бросания встретятся тела; сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Делаем чертеж (рис. 1.2). Отмечаем на нем траекторию движения первого и второго тела. Выбрав начало отсчета в точке O, указываем начальную скорость тел v_0, высоту h, на которой произошла встреча (координату $y = h$), и время t_1 и t_2 движения каждого тела до момента встречи. (Чтобы не загромождать чертеж, скорости тел в момент встречи не указаны.)

Уравнение перемещения тела, брошенного вертикально вверх, позволяет найти координату движущегося тела для любого момента времени независимо от того, поднимается ли тело вверх или падает после подъема вниз, поэтому для первого тела

$$h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2},$$

а для второго

$$h = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}.$$

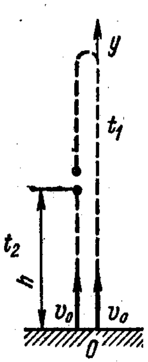


Рис.1.2.

Третье уравнение составляем, исходя из условия, что второе тело бросили позднее первого на время максимального подъема:

$$t_1 - t_2 = \frac{v_0}{g}.$$

Решая систему трех уравнений относительно h, получаем:

$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2}{2g}; \ h \approx 0{,}37 \text{ м}.$$

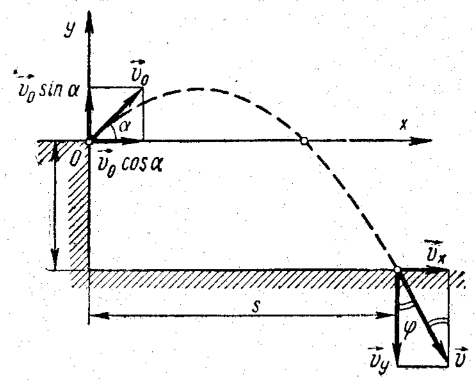


Рис. 1.3.

Пример 4. Артиллерийское орудие расположено на горе высотой h. Снаряд вылетает из ствола со скоростью $\vec{v}_0$, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: а) дальность полета снаряда по горизонтальному направлению; б) скорость снаряда в момент падения; в) угол падения; г) уравнение траектории и д) начальный угол стрельбы, при котором дальность полета наибольшая.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 1.3). Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней в сторону начального смещения снаряда. Изображаем траекторию снаряда, его начальную скорость $\vec{v}_0$, угол бросания α, высоту h, горизонтальное перемещение s, скорость в момент падения $\vec{v}$ (она направлена по касательной к траектории в точке падения) и угол падения φ (углом падения тела называют угол между касательной к траектории, проведенной в точку падения, и нормалью к поверхности Земли).

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: одного — вдоль поверхности Земли (оно будет равномерным, поскольку сопротивление воздуха не учитывается) и второго — перпендикулярно поверхности Земли (в данном случае это будет движение тела, брошенного вертикально вверх). Для замены сложного движения двумя простыми разложим (по правилу параллелограмма) скорости $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ на горизонтальные и вертикальные составляющие и найдем их проекции: $v_0 \cos\alpha$ и $v_0 \sin\alpha$ — для скорости $\vec{v}_0$ и v_x и v_y — для скорости $\vec{v}$.

а, б) Составляем уравнения скорости и перемещения для их проекций по каждому направлению. Так как в горизонтальном

направлении снаряд летит равномерно, то его скорость и координаты в любой момент времени удовлетворяют уравнениям

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{1}$$

и

$$x = v_0 \cos\alpha t. \tag{2}$$

Для вертикального направления:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt; \tag{3}$$

$$y = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

В момент времени t_1, когда снаряд упадет на землю, его координаты равны:

$$x = s; \ y = -h. \tag{5}$$

В последнем уравнении перемещение h взято со знаком «минус», так как за время движения снаряд сместится относительно уровня отсчета O высоты в сторону, противоположную направлению, принятому за положительное.

Результирующая скорость в момент падения равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{6}$$

В составленной системе уравнений пять неизвестных; нам нужно определить s и v.

Из уравнений (4) и (5) находим время полета снаряда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для t_1 в формулы (2) и (3) с учетом (5), соответственно получаем:

$$s = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}; \tag{7}$$

$$v_y = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}. \tag{8}$$

После этого из (6) с учетом (1) и (8) находим:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{9}$$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Если $h = 0$, т. е. снаряды падают на уровне вылета, то согласно формуле (7) дальность их полета будет равна: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Если при этом угол бросания равен $45°$ ($\sin 2\alpha = 1$), то при заданной начальной скорости v_0 дальность полета наибольшая: $s_{макс} = \frac{v_0^2}{g}$.

Подставив в выражение (9) значение $h = 0$, получим, что скорость снаряда в момент его подлета к уровню, с которого был произведен выстрел, равна его начальной скорости: $v = v_0$.

При отсутствии сопротивления воздуха скорость падения тел равна их начальной скорости бросания независимо от того, под каким углом было брошено тело, лишь бы точки бросания и падения находились на одном уровне. Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости с течением времени не изменяется, легко установить, что в момент падения скорость тела образует с горизонтом такой же угол, как и в момент бросания.

в) Угол падения можно найти, исходя из того, что скорость тела в любой точке траектории направлена по касательной. Из рисунка 1.3 видно, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y}$, откуда с учетом выражений (1) и (8) получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \cos\alpha}{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}.$$

г) Чтобы найти уравнение траектории движения точки — снаряда, нужно найти связь между ее координатами x и y в произвольный момент времени t. Если в уравнениях (2) и (4) под x и y подразумевать смещение снаряда по осям (учитывая, что эти уравнения справедливы для всего движения снаряда), а под t — время, по истечении которого снаряд из O попал в данную точку траектории, то, исключая из уравнений t, мы и получим искомую связь. Найдя из уравнения (2) время t и подставив его в уравнение (4), получим:

$$y = \operatorname{tg}\alpha\, x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\, x^2.$$

Это уравнение вида $y = -ax^2 + bx$, оно представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат O и обращенной выпуклостью вверх. Таким образом, тело, брошенное под углом α к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха летит по параболе. Нетрудно заметить, что этот вывод имеет место для любых углов бросания.

д) Решая уравнения (2), (4) и (5) относительно начального угла бросания α, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gs}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2}\right). \qquad (10)$$

Поскольку угол бросания не может быть мнимым, то это выражение имеет физический смысл лишь при условии, что

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2 \geqslant 0,$$

т. е. $s \leqslant \dfrac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$,

откуда следует, что максимальное перемещение снаряда по горизонтальному направлению равно:

$$s_{\text{макс}} = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для $s = s_{\text{макс}}$ в формулу (10), получим для угла α, при котором дальность полета наибольшая:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{g\, s_{\text{макс}}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

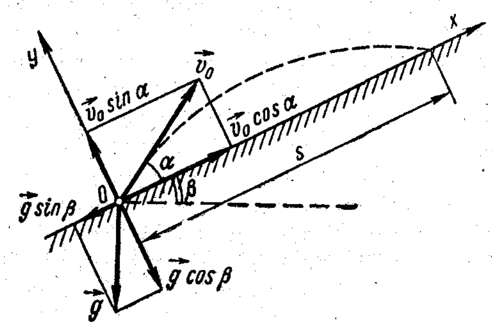


Рис. 1.4.

Пример 5. Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности (рис. 1.4). Определите дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня равна $\vec{v}_0$, угол наклона горы к горизонту β. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Сложное движение камня по параболе нужно представить как результат наложения двух прямолинейных движений: одного вдоль поверхности Земли, другого — по нормали к ней.

Выберем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке бросания камня так, чтобы оси OX и OY совпали с указанными направлениями, и найдем составляющие векторов начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения свободного падения $\vec{g}$ по осям. Проекции этих составляющих на оси OX и OY равны соответственно:

$$v_0\cos\alpha;\ v_0\sin\alpha;\ -g\sin\beta;\ -g\cos\beta.$$

После этого сложное движение можно рассматривать как два более простых: равнозамедленное движение вдоль поверхности Земли с ускорением $g\sin\beta$ и равнопеременное движение, перпендикулярное склону горы, с ускорением $g\cos\beta$.

Составляем уравнения движения для каждого направления с учетом того, что за время t_1 всего движения перемещение камня по нормали к поверхности (по оси OY) оказалось равным нулю, а вдоль поверхности (по оси OX) — равным s:

$$0 = v_0\sin\alpha\, t_1 - \frac{g\cos\beta\, t_1^2}{2}; \qquad s = v_0\cos\alpha\, t_1 - \frac{g\sin\beta\, t_1^2}{2}.$$

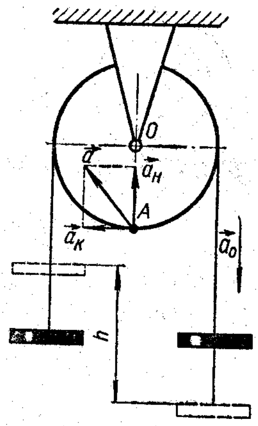


Рис. 1.5.

По условию задачи v_0, α и β нам заданы, поэтому в составленных уравнениях имеется две неизвестные величины s и t_1.

Из первого уравнения определяем время полета камня:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g\cos\alpha}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим:

$$s = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}.$$

Если подставить сюда значение $\beta = 0$, что соответствует случаю, когда тело брошено под углом α к горизонтальной поверхности, то получим:

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с результатом предыдущего примера.

Предлагаем самим читателям определить максимальную высоту подъема камня над поверхностью горы и угол падения.

Пример 6. Через блок радиусом R (рис. 1.5) переброшена нить, на концах которой находятся два груза, установленные на одном уровне. Предоставленные самим себе, грузы приходят в равноускоренное движение и спустя время t один из них оказывается над другим на высоте h. Определите угол поворота блока, его угловую скорость и величину полного линейного ускорения точки A в конце времени t. Проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

Решение. а) Проставляем на чертеже перемещение грузов h за время t и, приняв за начало отсчета точку O, расставляем векторы касательного $\vec{a}_к$, нормального $\vec{a}_н$ и полного $\vec{a}$ ускорений точки A.

Так как по условию задачи нить по блоку не проскальзывает, то касательное ускорение всех точек, лежащих на ободе, по абсолютной величине равно ускорению грузов $a_к = a_0$.

б) Поскольку движение грузов равноускоренное и за время t они смещаются относительно друг друга на расстояние h, уравнение движения для каждого груза будет иметь вид:

$$\frac{h}{2} = \frac{a_0 t^2}{2}, \qquad (1)$$

так как ускорение у них одинаковое и каждый груз проходит расстояние $\frac{h}{2}$.

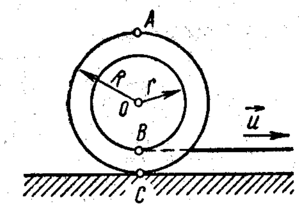


Рис. 1.6.

в) Записываем уравнения вращательного движения блока:

$$\omega = \varepsilon t \text{ и } \varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad (2)$$

учитывая, что блок вращается равноускоренно.

Угловая скорость ω и угловое ускорение ε блока связаны с нормальным и касательным ускорениями точки A формулами

$$\varepsilon = \frac{a_к}{R} \text{ и } a_н = \omega^2 R. \qquad (3)$$

Полное ускорение точки A равно:

$$a = \sqrt{a_к^2 + a_н^2}. \qquad (4)$$

г) По условию задачи нам даны R, t и h, поэтому в составленной системе уравнений неизвестными являются a_0, ω, ε, φ, $a_н$ и a. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных φ, ω и a, получим:

$$\varphi = \frac{h}{2R}; \qquad \omega = \frac{h}{Rt}; \qquad a = \frac{h\sqrt{h^2+R^2}}{Rt^2}.$$

Пример 7. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальной поверхности стола (рис. 1.6) и может катиться по ней без скольжения. С какой скоростью будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$. Радиус внутренней части катушки r, внешней — R. Каковы будут скорость и ускорение точки A?

Решение I. а) Качение катушки по столу можно представить как результат наложения двух одновременных независимых движений: переносного поступательного движения всех точек катушки с одинаковыми скоростями v_0, равными скорости оси катушки, и относительного — вращения вокруг ее оси с некоторой угловой скоростью ω_0. Абсолютная (результирующая) скорость $\vec{u}$ произвольной точки катушки, удаленной от ее оси на расстояние ρ, равна векторной сумме скоростей этой точки в переносном и относительном движениях, т. е.

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v}, \qquad (1)$$

где $v = \omega_0 \rho$ — линейная скорость точки при круговом относительном движении.

Угловую скорость ω_0 можно определить из условия, что тело катится по поверхности без скольжения. Точка C катушки в момент соприкосновения с поверхностью стола не движется относительно стола, ее абсолютная скорость $u_G = 0$. Для этой точки $\rho = R$ и, следовательно, относительная скорость движения $\omega_0 R$, направленная влево, равна переносной скорости v_0, направленной вправо, т. е.

$$\omega_0 R = v_0; \qquad \omega_0 = \frac{v_0}{R}. \qquad (2)$$

В задаче дана абсолютная скорость точки B, u_B, равная скорости u конца нити, и надо найти переносную скорость v_0 (абсолютную скорость оси катушки) и скорость u_A точки A.

Согласно выражениям (1) и (2) с учетом направления относительных скоростей точек B и A и того, что $\rho_B = r$ и $\rho_A = R$, получим для u и u_A соответственно:

$$u = v_0 - \frac{v_0}{R} r, \qquad \text{откуда} \quad v_0 = \frac{R}{R-r} u$$

и

$$u_A = v_0 + \frac{v_0}{R} r, \qquad \text{откуда} \quad u_A = 2v_0 = \frac{2Ru}{R-r}.$$

б) Переносное движение всех точек катушки является поступательным, поэтому для нахождения ускорения какой-либо точки катушки можно воспользоваться формулой (1.22).

Поскольку переносное движение катушки равномерное, то для всех точек $a_п = 0$ и их полное ускорение равно относительному ускорению $a = a_0$. Относительное ускорение представляет собой нормальное ускорение в процессе равномерного вращения катушки вокруг ее оси, поэтому

$$a_A = \omega_0^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{u^2}{R(R-r)}.$$

Р е ш е н и е II. а) Движение катушки по столу является плоскопараллельным движением твердого тела без проскальзывания, так как скорость точки C в данный момент времени равна нулю. Если принять ось, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости чертежа, за мгновенную ось вращения, то качение катушки можно представить как непрерывный ряд мгновенных поворотов вокруг линии опоры с некоторой угловой скоростью ω_G и найти связь между абсолютной скоростью u любой точки катушки и ω_G, если известно расстояние x от точки до мгновенной оси вращения ($u = \omega_C x$). Учитывая, что для точек B, O, и A $x_B = R - r$, $x_O = R$, $x_A = 2R$ и что абсолютная скорость точки B равна скорости конца нити ($u_B = u$), получим для этих точек:

$$u = \omega_G (R - r); \quad v_0 = \omega_C R; \quad u_A = \omega_G 2R.$$

По условию задачи нам известны u, R и r, поэтому в составленных уравнениях неизвестными являются ω_C, v_0 и u_A. Решая систему относительно искомых неизвестных — скорости перемещения оси катушки v_0 и абсолютной скорости u_A точки A, получим:

$$v_0 = \frac{R}{R-r} u; \qquad u_A = \frac{2Ru}{R-r}.$$

б) Несмотря на то что мы нашли скорость точки A, ее ускорение нельзя сразу определить по формуле нормального ускорения, так как нам неизвестен радиус кривизны траектории. Следует обратить внимание, что он не равен $2R$, как это может показаться, а равен $4R$ (рекомендуем доказать это читателю), поэтому для нахождения a_A нужно поступить точно так же, как сделано в первом случае.

При отклонении нити от горизонтального положения вверх — увеличении угла между нитью и плоскостью стола — угловая скорость вращения катушки вокруг мгновенной оси будет уменьшаться (поскольку уменьшается расстояние x при неизменной скорости u). В том случае, когда нить составит с горизонтом такой угол α_0, при котором продолжение нити пройдет через точку C (радиус $x = 0$), катушка будет вращаться на месте. При углах $\alpha > \alpha_0$ катушка начнет двигаться влево.

Задачи к главе 1

1.1. Самолет летит горизонтально над землей. Тень его движется по земле со скоростью 525 *км/ч*. Чему равна скорость самолета?

1.2. Всадник проехал за первые 40 *мин* 5 *км*. Следующий час он передвигался со скоростью 10 *км/ч*, а оставшиеся 6 *км* пути — со скоростью 12 *км/ч*. Определите среднюю скорость всадника: за все время движения, за первый час движения и на первой половине пути.

1.3. Из пункта A выехал автомобиль с постоянной скоростью v_0. Через t_1 минут из того же пункта в том же направлении выходит другой автомобиль и нагоняет первый в пункте B, находящемся от A на расстоянии s_1. Постройте график движения автомобилей и по графику определите скорость второго автомобиля. Решите задачу аналитически.

1.4. Расстояние между двумя городами автомашина проехала со скоростью 60 *км/ч*. Обратный путь она совершила со скоростью, вдвое меньшей. Постройте график движения автомашины и определите по нему среднюю скорость рейса из одного города в другой и обратно.

1.5. Колонна войск, растянувшись в длину на 2 *км*, движется по шоссе со скоростью 5 *км/ч*. Командир, находясь в арьергарде, посылает мотоциклиста с распоряжением головному отряду. Через 10 *мин* мотоциклист возвратился. Определите скорость движения мотоциклиста, считая, что в обе стороны он двигался с одной и той же скоростью.

1.6. Определите скорость звука в воздухе при отсутствии ветра и скорость теплохода, движущегося равномерно в море, если известно, что звуковой сигнал, посланный от середины корабля, достигает его носа через 0,103 *сек*, а кормы — через 0,097 *сек*. Длина теплохода 68 *м*.

1.7. Когда две лодки равномерно движутся навстречу друг другу — одна по течению, а другая против течения реки, то расстояние между ними сокращается на 20 *м* за каждые 10 *сек*. Если же лодки с прежними по величине скоростями будут двигаться по течению реки, то расстояние между ними за то же время будет увеличиваться на 10 *м*. Каковы скорости лодок относительно воды?

1.8. Вертолет летит из пункта A в пункт B, расположенный южнее пункта A на 150 *км*, и возвращается обратно. Определите продолжительность полета, если известно, что во время рейса дул ветер с запада на восток. Скорость вертолета относительно ветра 180 *км/ч*, скорость ветра 20 *м/сек*.

1.9. Пункты A и B расположены на одном берегу реки, пункт C — на другом, напротив A. Расстояния между пунктами A и B, A и C одинаковые. Рыбак плывет на лодке один раз из A в B и обратно, второй — из пункта A в C и обратно. Чему равна скорость лодки относительно воды, если известно, что скорость течения воды $v = 2$ *км/ч* и что первая поездка требует времени в $n = 1,1$ раза больше, чем вторая?

1.10. Корабль плывет на юг со скоростью 42,3 *км/ч*. Заметив в море катер, наблюдатель, находящийся на палубе корабля, определил, что катер движется на северо-восток со скоростью 30 *км/ч*. Какова абсолютная скорость катера и в каком направлении он идет?

1.11. Три лодки стоят в спокойной воде на одинаковом расстоянии l друг от друга. В некоторый момент времени лодки начинают плыть с постоянной по величине скоростью v так, что в каждый момент времени одна лодка находится на курсе другой. Через сколько времени встретятся лодки и какое расстояние пройдет каждая лодка до места встречи?

1.12. Вниз по течению реки на расстоянии l от берега плывет катер со скоростью v_0 относительно берега. По какому направлению должна двигаться с берега лодка, чтобы доплыть до катера за минимальное время, если ее скорость относительно воды v_1 и в начальный момент она находится от катера на расстоянии s? Скорость течения u. Какой может быть минимальная скорость лодки, чтобы она могла встретить катер?

1.13. Верхняя часть кабины самолета имеет в сечении форму равнобочной трапеции, размеры которой указаны на рисунке 1.7. Самолет летит горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$ под вертикальным дождем. Скорость падения капель $\vec{v}_2$. Во сколько раз число капель, падающих на переднее и заднее стекло кабины, отличается от числа капель, падающих на крышу?

1.14. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально на высоте 4 *км*. Наблюдатель, находящийся на земле, услышал звук от двигателя спустя 10 *сек* после того, как самолет пролетел прямо над ним. Определите скорость самолета, если скорость звука равна 330 *м/сек*.

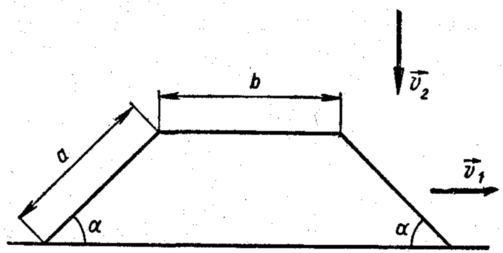


Рис. 1.7.

1.15. Наблюдатель стоит на платформе около передней площадки вагона электропоезда и замечает, что первый вагон проходит мимо него после начала равноускоренного движения за 5 *сек*. Определите время, за которое пройдет мимо наблюдателя шестой вагон, если длина каждого вагона равна 15 *м*, а расстояние между вагонами 1,5 *м*.

1.16. При равноускоренном движении точка проходит в первые два равных последовательных промежутка времени $t = 4$ *сек* отрезки пути $s_1 = 24$ *м* и $s_2 = 64$ *м*. Чему равна средняя скорость движения точки на первой и второй половине пути?

1.17. Автомобиль начал движение с ускорением 0,5 *м/сек²* в тот момент, когда мимо него равноускоренно проезжал трамвайный вагон со скоростью 18 *км/ч*. Какую скорость будет иметь автомобиль, когда он догонит трамвай? Ускорение трамвая 0,3 *м/сек²*.

1.18. За пятую секунду равнозамедленного движения точка проходит 5 *см* и останавливается. Какой путь проходит точка за третью секунду этого движения?

1.19. Длина перегона трамвайного пути равна 400 *м*. Зная, что в начале и в конце перегона трамвайный вагон движется с постоянным ускорением 0,5 *м/сек²* и что вагон должен проходить перегон за 1 *мин* 20 *сек*, определите наибольшую скорость, с которой должен двигаться вагон.

1.20. Концы нити, огибающей два неподвижных и один подвижный блок (рис. 1.8), перемещаются вниз с ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. На какое расстояние s сместится груз A за время t, если в начальный момент времени он находился в покое? Решите задачу при условии, что ускорение $\vec{a}_2$ направлено вверх и $a_1 > a_2$.

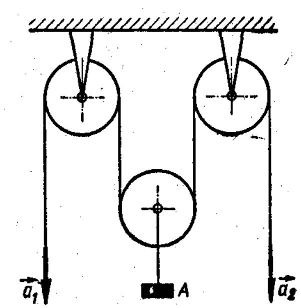


Рис. 1.8.

1.21. Уравнения скорости имеют вид: $v = 2$; $v = 0,3 + 4t$; $v = t$; $v = 20 - 6t$; $v = -2 + 3t$. Запишите

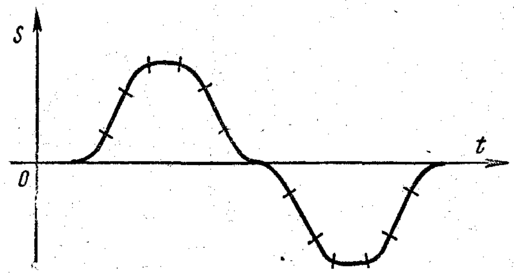


Рис. 1.9.

уравнения перемещения и постройте графики скорости и перемещения.

1.22. Уравнения движения имеют вид: $s = 3$; $s = t$; $s = 5 + 0{,}2t^2$; $s = 2t - 3t^2$; $s = 16 - 4t - 3t^2$; $s = 8 - 2t + 0{,}5t^2$; $s = -t \pm t^2$. Запишите уравнения скорости и постройте графики перемещения и скорости.

1.23. На рисунке 1.9 дан график движения некоторого тела, причем отрезки кривых являются участками парабол. Постройте графики зависимости $v = f(t)$, $a = f(t)$, $s = f(v)$ и $a = f(v)$.

1.24. На рисунке 1.10 изображен график скорости некоторого тела. Постройте графики перемещения и ускорения тела в зависимости от времени и скорости.

1.25. На рисунке 1.11 показано, как меняется с течением времени скорость точки на прямолинейном участке пути. Определите максимальное и минимальное смещения точки от начального положения за время такого движения. Чему равна средняя скорость точки за время t_2? Участки кривых на графике являются полуокружностями.

1.26. На рисунке 1.12 представлен график ускорения автомобиля, трогающегося с места. Постройте график перемещения в зависимости от скорости. Рассмотрите случай, когда: а) изменение скорости при разгоне и торможении одинаковое и $a_р = a_т$, $t_р = t_т$; б) изменение скорости при торможении вдвое меньше, чем при разгоне.

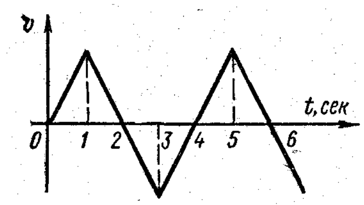


Рис. 1.10.

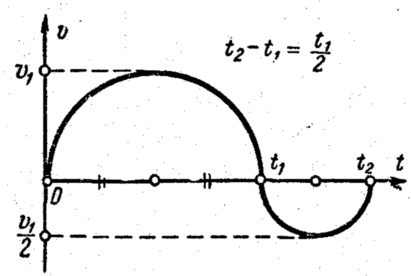


Рис. 1.11.

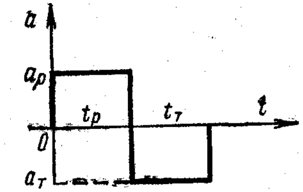


Рис. 1.12.

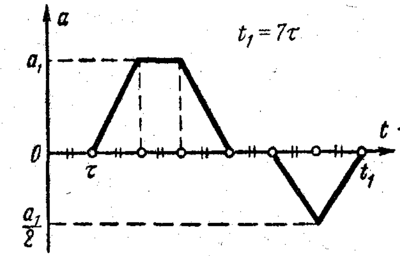


Рис. 1.13.

1.27. График ускорения точки имеет вид, показанный на рисунке 1.13. Начертите график зависимости $v = f(t)$. Чему равна средняя скорость движения точки за время t_1, если ее начальная скорость была равна нулю?

1.28. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело?

1.29. С крыши дома через каждые четверть секунды падают капли воды. На каком расстоянии друг от друга будут находиться первые две капли воды в момент отрыва десятой? С какой скоростью будет двигаться первая капля относительно второй?

1.30. Камень, брошенный вертикально вверх, упал на землю через 2 *сек*. Определите путь и перемещение камня за 1, 1,5 и 2 *сек*. Какую скорость приобретет камень за эти промежутки времени? Чему равна средняя скорость перемещения камня за все время движения?

1.31. Мячик брошен вертикально вверх из точки, находящейся на высоте h. Определите начальную скорость мячика, время движения и скорость падения, если известно, что за время движения он пролетел путь $3h$.

1.32. Тело, брошенное вертикально вверх, проходит в первую секунду половину высоты подъема. Какой путь пройдет тело в последнюю секунду падения?

1.33. Тело брошено вертикально вверх со скоростью v_0. Сколько времени оно будет находиться выше уровня соответствующего высоте h_1?

1.34. Аэростат поднимается с постоянной скоростью v_0. К гондоле аэростата привязан на веревке груз. Как будет двигаться груз относительно Земли, если веревку, на которой он подвешен, перерезать в тот момент, когда аэростат находится на высоте h_0? Сколько времени груз будет падать на землю? Какая скорость будет у него при соприкосновении с землей?

1.35. Жонглер бросает мячи вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями через равные промежутки времени. Каким должно быть минимальное значение начальной скорости, чтобы в движении всякий раз участвовало пять мячей? Известно, что в момент бросания пятого мяча первый находился от второго на расстоянии $s = 3$ *м* и в руке у жонглера находится не более одного мяча.

1.36. Из гондолы аэростата, опускающегося со скоростью v_0 вертикально вниз, бросают предмет со скоростью v_1 относительно гондолы. По какому закону будет изменяться расстояние между этим предметом и аэростатом с течением времени? По какому закону будет изменяться это расстояние при условии, что в момент бросания аэростат поднимался вверх со скоростью v_0?

1.37. Дальность полета тела, брошенного в горизонтальном направлении со скоростью 9,8 *м/сек*, равна высоте, с которой брошено тело. Чему равна эта высота и под каким углом к горизонту тело упало на землю?

1.38. Камень брошен по горизонтальному направлению. Через 3 *сек* его скорость оказалась направленной под углом 45° к горизонту. Какова начальная скорость камня?

1.39. С самолета, летящего на высоте h_0 со скоростью v_0, сброшен груз. На какой высоте его скорость будет направлена под углом α к горизонту?

1.40. Вверх по идеально гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, пустили шайбу с начальной скоростью v_0. Когда шайба достигла половины максимальной высоты подъема, из той же точки в том же направлении пустили вторую шайбу тоже со скоростью v_0. На каком расстоянии от начала наклонной плоскости встретятся обе шайбы?

1.41. С высоты 900 *м* летчик заметил корабль, шедший встречным курсом с постоянной скоростью. Пикируя точно на цель под углом 60° к горизонту, летчик сбрасывает бомбу и поражает цель. Какова была скорость корабля, если в момент освобождения бомбы самолет пикировал со скоростью 700 *км/ч*?

1.42. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю со скоростью 9,8 *м/сек*. Чему равна дальность и высота полета камня, если известно, что во время движения его максимальная скорость была вдвое больше минимальной?

1.43. При каких значениях угла бросания дальность полета тела равна его высоте подъема?

1.44. Тело, брошенное под углом α к горизонту, упало на землю по прошествии времени t. Определите высоту подъема и дальность полета тела.

1.45. Тело, брошенное под углом к горизонту, имеет дальность полета l и максимальную высоту подъема h. Чему равны угол бросания и начальная скорость тела?

1.46. Мяч, брошенный под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью 10 *м/сек*, через 5 *сек* имел скорость 7 *м/сек*. Определите максимальную высоту подъема мяча и время всего движения.

1.47. Какую минимальную скорость под углом 30° к горизонту нужно сообщить гранате, чтобы перебросить ее через стену высотой 6 *м*, если точка бросания находится на высоте 2 *м* от поверхности Земли и стена удалена от нее на 10 *м*? Под каким углом нужно бросить гранату, сообщив ей наименьшую возможную скорость, чтобы перебросить гранату через стену?

1.48. Пожарный направляет струю воды на крышу здания высотой $h = 20$ *м*. На каком расстоянии s по горизонтали от пожарного и с какой скоростью v падает струя на крышу дома, если высота подъема струи $H = 30$ *м* и из ствола брандспойта она вырывается со скоростью $v_0 = 25$ *м/сек*?

1.49. Орудие установлено на расстоянии 8100 *м* от вертикального обрыва высотой 105 *м*. Под каким углом нужно установить ствол, чтобы снаряды падали как можно ближе к основанию обрыва? На каком расстоянии от обрыва будут при этом падать снаряды? Начальная скорость снарядов равна 300 *м/сек*.

1.50. Тяжелый шарик, размеры которого можно не учитывать, влетает со скоростью v_0, направленной под углом α к горизонту, в стальную трубу диаметром $d < \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ и длиной $L \gg d$. Считая удар шарика о внутреннюю поверхность трубки идеально упругим, определите, сколько раз шарик ударится о трубку, если: а) трубка расположена вертикально; б) горизонтально.

1.51. На идеально гладкую наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол α, падает абсолютно упругий шарик. Скорость шарика в момент удара v. Определите расстояние между точками первого и второго удара при условии, что: а) плоскость покоится; б) поднимается вверх со скоростью v; в) движется в горизонтальном направлении со скоростью v (для этого случая проанализируйте результат в функции угла α).

1.52. На вершину идеально упругой наклонной плоскости падает упругий шарик с высоты $h = 0{,}5$ *м*. Сколько раз шарик ударится о наклонную плоскость, если длина ее равна $L = 32$ *м*, а угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$?

1.53. С вышки в противоположные стороны бросают одновременно два тела с одинаковыми начальными скоростями v_0. Первое тело брошено под углом α, второе под углом β к горизонту. По какому закону будет изменяться с течением времени расстояние между телами и их относительная скорость? Траектории движения тел лежат в одной плоскости.

1.54. Лодка переплывает реку шириной s_0, держась перпендикулярно течению. Скорость лодки относительно воды v. На какое расстояние течение снесет лодку за время переправы с одного берега на другой, если известно, что при удалении от берега до середины реки скорость течения возрастает по закону $u = u_0 + ks$? Какова будет траектория движения лодки? Под каким углом к течению нужно плыть, чтобы переправиться в противоположную точку на другом берегу?

1.55. Лента перематывается с одной катушки на другую. Угловая скорость вращения мотка постоянна и равна ω, начальный radius мотка R, толщина ленты h. Какова будет скорость подачи ленты спустя время t после начала вращения?

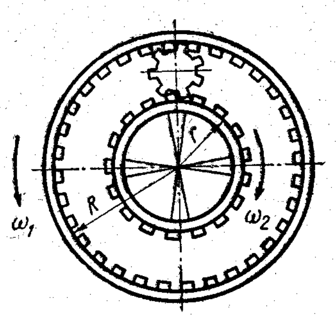


Рис. 1.14.

1.56. Вращающееся колесо с n спицами освещается неоновой лампой, работающей на частоте f. С какой минимальной скоростью должно вращаться колесо, чтобы оно казалось неподвижным? Какова будет скорость кажущегося вращения, если скорость вращения колеса будет вдвое меньше найденной?

1.57. В каком направлении и с какой минимальной скоростью должен лететь самолет на широте Ленинграда (60° северной широты), чтобы его экипаж не замечал, как ночь сменяет день? Радиус Земли принять равным 6400 *км*.

1.58. Гирька описывает круги радиусом 5 *см* с постоянным касательным ускорением 5 *см/сек*². Чему равна линейная скорость гирьки к концу пятого оборота? Каковы будут ее угловая скорость и угловое ускорение в этот момент?

1.59. Точка движется по окружности радиусом 20 *см* с постоянным касательным ускорением 5 *см/сек*². Через сколько времени после начала такого движения нормальное ускорение будет равно касательному? Будет вдвое больше касательного?

1.60. На барабан намотана нить, к концу которой привязан груз. Предоставленный самому себе, груз начинает опускаться с ускорением 5,6 *м/сек*². Определите ускорение точек, лежащих на ободе барабана, в тот момент, когда барабан сделает поворот на угол в 1 *рад*?

1.61. Камень брошен под углом 60° к горизонту со скоростью 19,6 *м/сек*. Каковы будут нормальное и касательное ускорения камня через 0,5 *сек* после начала движения? В каких пределах изменяется радиус кривизны траектории камня?

1.62. Бревно передвигают по каткам диаметром 20 *см* со скоростью 0,4 *м/сек*. С какой скоростью перемещаются сами катки? Какова скорость их вращения относительно оси симметрии? Проскальзыванием бревна по каткам пренебречь.

1.63. Между зубчатыми колесами радиусами R и r находится в зацеплении ролик (рис. 1.14). Колеса начинают вращаться в разные стороны с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Какова будет угловая скорость вращения ролика вокруг собственной оси? Куда и с какой скоростью будет двигаться ось ролика? Решите задачу при условии, что ω_1 и ω_2 направлены в одну сторону.

1.64. Стержень длиной $2l$ скользит по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент скорость одного конца стержня оказалась равной v_1 и направленной под углом α к стержню, скорость второго конца v_2. Определите: а) скорость середины стержня; б) угловую скорость вращения стержня вокруг его центра.

1.65. Автомобиль идет по прямому шоссе так, что его скорость изменяется по закону $v = (1 + 2t)$ *м/сек*. Определите скорость и ускорение точек колеса, лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров, спустя 0,5 *сек* после начала ускоренного движения, если радиус колеса равен 1 *м*.

Глава 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основные понятия, законы и формулы

1. В динамике изучают законы движения тел с учетом причин, обуславливающих характер данного движения. Динамика делится на две части: динамику материальной точки и динамику твердого тела. Первую из этих частей, как более простую, изучают в курсе элементарной физики.

2. Механическое движение тел изменяется в процессе их взаимодействия друг с другом.

Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют силой. Сила — величина векторная; она характеризуется числовым значением, направлением действия и точкой приложения к телу.

Если к материальной точке (частице) приложено несколько сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, их действие можно заменить действием одной силы $\vec{F}$, которая является равнодействующей данных сил. Величина и направление равнодействующей находится векторным сложением заданных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \qquad (2.1)$$

Если реально действующие силы заменены равнодействующей, то в дальнейшем нужно считать, что к частице приложено не несколько сил, а только одна — их равнодействующая.

3. При отсутствии внешних воздействий тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Это свойство, присущее всем телам, называют инерцией, а тела, им обладающие, — инертными. Меру инертности тел при поступательном движении называют массой тел.

4. Основой динамики и всей классической механики служат три закона Ньютона, сформулированные для материальной точки и тел, движущихся поступательно в инерциальных системах отсчета.

а) I закон Ньютона. Если равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

$$\text{При } \vec{F} = \Sigma \vec{F}_i = 0 \quad \vec{v} = \text{const}. \tag{2.2}$$

Из первого закона динамики следует, что свободное движение частиц с постоянной скоростью — движение по инерции есть такое же естественное состояние частиц, как и покой. Каждая частица может двигаться с какой угодно постоянной скоростью без каких бы то ни было внешних воздействий со стороны, но изменить свое движение — сообщить себе ускорение не может. Состояние покоя и равномерного прямолинейного движения с точки зрения динамики неразличимо.

б) II закон Ньютона. Изменение импульса частицы за единицу времени равно силе, приложенной к частице, и происходит по направлению прямой, вдоль которой действует эта сила:

$$\frac{\vec{K}_2 - \vec{K}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{K}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{K}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{K}_2 = m_2\vec{v}_2$ — импульсы (количества движения) частицы в начале и конце промежутка наблюдения Δt; $\vec{F}$ — сила, действующая на частицу в течение этого времени.

Если за время действия силы масса частицы не меняется ($m_1 = m_2 = m$), то согласно (2.3)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \text{откуда} \quad \vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.4}$$

Это уравнение является основным уравнением динамики материальной точки. При его использовании нужно иметь в виду следующее.

Действие сил на материальную точку не зависит друг от друга. Каждая из сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, приложенных к частице, сообщает ей такое ускорение, как если бы других сил не было (принцип независимости действия сил):

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}; \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}; \quad \ldots; \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результирующее ускорение $\vec{a}$ частицы, находящейся под действием нескольких сил, равно геометрической сумме отдельных ускорений $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, сообщаемых каждой силой в отдельности. Величина и направление ускорения $\vec{a}$ таковы, как если бы на частицу действовала одна сила, равная векторной сумме приложенных сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

т. е. основное уравнение динамики точки справедливо как для отдельных сил, так и для их равнодействующей.

Если направление равнодействующей $\vec{F}$ совпадает с направлением вектора скорости $\vec{v}$ (под действием сил изменяется только величина скорости), то движение будет прямолинейным. Если при этом $\vec{F}$ и $\vec{v}$ направлены в одну сторону, движение будет ускоренным, если в противоположные — замедленным. Если равнодействующая направлена под углом к вектору скорости, то движение материальной точки будет криволинейным. В общем случае такого движения под действием нескольких сил изменяются и величина, и направление скорости, если же в течение всего времени движения равнодействующая перпендикулярна скорости, последняя меняется лишь по направлению.

В тех случаях, когда на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых с течением времени не меняется, движение точки будет равнопеременным. При $\vec{F} = \text{const}$ $\vec{a} = \text{const}$. В частном случае, если $\vec{F} = 0$ и $\vec{a} = 0$, то $\vec{v} = \text{const}$. Отсюда следует, что для частиц постоянной массы первый закон Ньютона можно рассматривать как следствие второго.

Основное уравнение динамики показывает, что равнодействующую всех сил, приложенных к материальной точке, можно определить по величине произведения $m\vec{a}$; само же по себе это произведение силой не является.

Как и всякому векторному равенству, каждому из уравнений (2.2)—(2.5) на плоскости в декартовой системе координат OXY соответствует два скалярных уравнения, связывающих проекции сил и ускорений по соответствующим осям. Так, для уравнения (2.5) будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = ma_x; \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = ma_y. \tag{2.6}$$

Именно в таком виде основное уравнение динамики точки чаще всего и используют при решении задач.

При изучении криволинейного движения, заданного в естественной форме, и в частности движения по окружности, все силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, действующие на частицу в рассматриваемой точке траектории, удобно разложить по направлению касательной и нормали к траектории движения (вектору скорости).

Равнодействующую $\vec{F}_к$ составляющих сил $\vec{F}_{iк}$ по касательной называют касательной или иначе **тангенциальной силой**. Эта сила сообщает частице касательное ускорение $\vec{a}_к$, и по второму закону динамики

$$\vec{F}_к = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iк} = m\vec{a}_к. \quad (2.7)$$

Равнодействующую $\vec{F}_н$ составляющих сил $\vec{F}_{iн}$ по нормали называют нормальной силой, а в случае кругового движения — центростремительной. Эта сила сообщает частице нормальное ускорение $\vec{a}_н$, причем

$$\vec{F}_н = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{iн} = m\vec{a}_н; \quad |\sum \vec{F}_{iн}| = ma_н = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R. \quad (2.8)$$

Здесь R — радиус кривизны траектории частицы в данной точке пространства (в общем случае); при круговом движении R — радиус описываемой окружности.

Если на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых $\vec{F}$ все время оказывается направленной перпендикулярно вектору скорости ($\vec{F} \equiv \vec{F}_н$) и с течением времени не меняется по величине ($\vec{F} \perp \vec{v}$ и $|\vec{F}| = \text{const}$), то величина вектора скорости остается постоянной, а ее направление за любые равные промежутки времени меняется на одинаковый угол ($a_к = 0$, $a_н = \text{const}$). Нетрудно заметить, что в этом случае точка равномерно движется по окружности.

Материальная точка может описывать окружность (или дугу окружности) и в том случае, если равнодействующая приложенных сил образует с вектором скорости острый или тупой угол. Для этого необходимо, чтобы составляющие равнодействующей $\vec{F}$ по направлению вектора скорости и направлению, ему перпендикулярному, вызывающие касательное и нормальное ускорение точки (силы $\vec{F}_к$ и $\vec{F}_н$), изменялись так, чтобы в каждый момент времени имело место равенство (2.8) при постоянном R.

Если в процессе кругового движения равнодействующая $\vec{F}$ образует с вектором скорости острый угол, то $a_к > 0$ и $F_н$ возрастает. Если же угол между $\vec{F}$ и $\vec{v}$ тупой, то $a_к < 0$ и $F_н$ уменьшается.

в) III закон Ньютона. Все тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению; приложены эти силы к разным телам.

Равенство сил при взаимодействии имеет место всегда, независимо от того, находятся ли взаимодействующие тела в относительном покое или они движутся.

5. Механическое взаимодействие тел обусловлено их упругостью и свойством притягиваться друг к другу.

а) Силу, вызванную деформацией тел и препятствующую изменению их формы и объема, называют **упругой**. Простейший случай упругого взаимодействия тел — взаимодействие груза с нитью, на которой он подвешен. Со стороны нити на груз вдоль нити в месте его закрепления действует сила упругости $\vec{T}$, называемая **силой натяжения**; по третьему закону Ньютона с такой же по величине силой груз действует на нить в противоположном направлении.

Второй, наиболее распространенный случай упругого взаимодействия тел — это взаимодействие материальной точки с поверхностью. Силы $\vec{F}$, действующие со стороны груза на опору и со стороны опоры на груз, называют соответственно **силой давления** и **силой реакции опоры**. В большинстве задач механики каждую из этих сил принято рассматривать не целиком, а по частям. Для этого силу давления и силу реакции опоры раскладывают по двум взаимно перпендикулярным направлениям: по нормали к поверхности соприкосновения и касательной. Составляющие $\vec{N}$ силы давления и реакции опоры по нормали называются **силами нормального давления**; составляющие силы упругого взаимодействия вдоль касательной получили название **сил трения** $\vec{F}_{тр}$.

Различают три вида сухого трения: силы трения покоя, скольжения и качения. Сила трения покоя может меняться в пределах от $-\vec{F}_{тр. макс.}$ до $+\vec{F}_{тр. макс.}$ Максимальную силу трения покоя определяют из соотношения:

$$F_{тр. макс.} = fN, \quad (2.9)$$

где f — постоянный для данной пары соприкасающихся поверхностей коэффициент, называемый **коэффициентом трения покоя**. При малых скоростях скольжения по этой же формуле рассчитывают и силу трения скольжения, так как в этом случае коэффициент трения скольжения мало отличается от коэффициента трения покоя.

б) Две материальные точки (два однородных шара) притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (**закон всемирного тяготения**):

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{R^2}. \quad (2.10)$$

Если тело массой m находится над поверхностью Земли на высоте h, то на него действует сила земного притяжения, равная

$$F = \gamma \frac{mM_з}{(R_з + h)^2}. \quad (2.10')$$

Предоставленное действию одной этой силы, всякое тело падает ускоренно по направлению отвесной линии и одновременно с этим участвует в суточном вращении земного шара, обладая центростремительным ускорением. Эти ускорения создаются составляющими силы притяжения по направлению отвесной линии и радиусу окружности, описываемой телом.

Составляющую $\vec{P}$ силы земного притяжения по отвесному направлению в данной точке земного шара называют силой тяжести, а ускорение $\vec{g}$, создаваемое этой силой, — ускорением свободного падения. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела; если не учитывать вращение Земли и считать ее шаром, то $\vec{P} = \vec{F}$ и, стало быть, согласно формулам (2.4) и (2.10′)

$$g = \gamma \frac{M_З}{(R_З + h)^2}. \qquad (2.11)$$

Если тело находится на поверхности Земли или на близком от нее расстоянии ($R_З \gg h$), то

$$g = g_0 = \gamma \frac{M_З}{R_З^2} \qquad (2.11')$$

и можно считать, что ускорение свободного падения имеет для всех тел не только одинаковое, но и постоянное значение.

Из соотношений (2.11) и (2.11′) следует, что

$$g = \left(\frac{R_З}{R_З + h}\right)^2 g_0.$$

в) Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или нить, удерживающую его от свободного падения. Следует иметь в виду, что по величине вес и сила тяжести ($\vec{T}$, $\vec{N}$ и $\vec{P}$) могут сильно различаться друг от друга, как, например, при невесомости (или перегрузке), и отождествление их приводит к абсурду.

6. а) При изучении движения системы материальных точек силы, действующие на отдельные частицы системы, делят на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, которые действуют на тела данной системы со стороны тел, не принадлежащих к ней. Внутренними называют силы, действующие между телами, входящими в данную систему. По третьему закону динамики во всякой механической системе сумма внутренних сил всегда равна нулю. Систему называют замкнутой (изолированной), если геометрическая сумма внешних сил, действующих на материальные точки системы, равняется нулю.

б) При движении системы частиц существует такая точка, движение которой наиболее полно представляет механическое состояние системы в целом. Эту точку называют центром масс (центром инерции) системы.

Центр масс системы, состоящей из n частиц, определяют как точку, радиус-вектор которой $\vec{r}_G$ относительно выбранной системы отсчета равен

$$\vec{r}_G = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_G}, \qquad (2.12)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ — масса и радиус-вектор i-й частицы, M_G — масса всей системы.

Векторному уравнению (2.12) на плоскости соответствуют два скалярных уравнения для координат центра масс x_C и y_C. В общем случае центр масс ни с одной из частиц системы не совпадает.

Из (2.12) вытекает, что

$$M_C \vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i, \qquad (2.13)$$

где $\vec{v}_C$ — скорость центра масс, $\vec{v}_i$ — скорость i-й частицы.

Центр массы системы материальных точек имеет смысл точки, масса и импульс которой равны массе и полному импульсу системы.

в) Из второго и третьего законов динамики вытекает, что для системы, состоящей из n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, находящихся под действием внешних сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, справедливо уравнение:

$$\frac{\vec{K}_2 - \vec{K}_1}{\Delta t} = \sum \vec{F}, \qquad (2.14)$$

где $\vec{K}_1 = \Sigma m_i \vec{v}_i$ и $\vec{K}_2 = \Sigma m_i' \vec{v}_i'$ — векторные суммы импульсов всех частиц в начале и конце промежутка наблюдения Δt. При неизменной массе частиц

$$\sum \vec{F} = \sum m_i \vec{a}_i = M_C \vec{a}_C, \qquad (2.15)$$

где $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_G$ — соответственно ускорения i-й частицы и центра масс.

Если частицы обладают при этом одинаковым ускорением $\vec{a}$, то

$$\sum \vec{F} = \vec{a} \sum m_i. \qquad (2.16)$$

7. Следствием второго и третьего законов Ньютона является один из фундаментальных законов природы — закон сохранения импульса.

В изолированной системе векторная сумма импульсов частиц с течением времени не изменяется, или, иначе, полный импульс изолированной системы при любых изменениях, происходящих в этой системе, остается одним и тем же.

Если $\Sigma \vec{F} = 0$, то согласно (2.14) $\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = 0$, т. е. в изолированной системе

$$\vec{K} = \sum m_i \vec{v}_i = M_C \vec{v}_C = \text{const}. \qquad (2.17)$$

Для практически наиболее распространенного случая — взаимодействия двух изолированных частиц закон сохранения импульса дает:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'. \tag{2.17'}$$

Из закона сохранения импульса системы следует:

а) Импульсы отдельных частиц, входящих в изолированную систему, могут изменяться под действием внутренних сил, но в сумме эти изменения равны нулю.

б) Поскольку векторному уравнению (2.17) соответствуют два скалярных уравнения для проекций векторов импульсов частиц (если векторы расположены в одной плоскости), закон сохранения импульса может выполняться по отдельным осям, вдоль которых сумма проекций сил равна нулю. Иными словами, закон сохранения импульса может выполняться по оси OX и при этом не выполняться по оси OY, и наоборот.

в) Скорость центра масс в изолированной системе с течением времени не изменяется.

г) В системе отсчета, связанной с центром масс изолированной системы частиц, их суммарный импульс равен нулю.

8. Законы Ньютона сформулированы для инерциальных систем отсчета — систем, связанных с телами, на которые не действуют внешние силы. В системах, движущихся ускоренно, эти законы не выполняются. Чтобы можно было пользоваться законами Ньютона в неинерциальных системах отсчета, нужно учесть, что все тела ведут себя в этих системах так, как если бы вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ получил приращение $-\vec{a}$, равное ускорению системы, взятому с противоположным знаком. Иными словами, в неинерциальных системах отсчета можно использовать те же законы, формулы и уравнения, что и в инерциальных, но всюду, где стоит вектор $\vec{g}$, заменить его вектором $\vec{g}'$:

$$\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}). \tag{2.18}$$

Рекомендуем учащимся проверить это сначала на элементарных примерах, когда ускоренное движение системы происходит вверх или вниз, затем рассмотреть ускоренное движение по горизонтали и после этого перейти к общему случаю.

Указанный способ расчета, несмотря на известный формализм и трудности его физического обоснования, позволяет быстро получить результат там, где обычные пути оказываются длинными и трудными. Само собой разумеется, что этот метод расчета не является единственным — системы отсчета можно связать не с телом, имеющим ускорение, а, например, с Землей, считая ее неподвижной, и использовать законы механики в их обычном виде.

Решение задач. Примеры

1. Основная задача динамики материальной точки состоит в том, чтобы найти законы движения точки, зная приложенные к ней силы, или, наоборот, по известным законам движения определить силы, действующие на материальную точку.

Характерная особенность решения задач механики о движении материальной точки, требующих применения законов Ньютона, состоит в следующем:

а) Представив по условию задачи физический процесс, следует сделать схематический чертеж и указать на нем все кинематические характеристики движения, о которых говорится в задаче. При этом, если возможно, обязательно проставить вектор ускорения.

б) Расставить все силы, приложенные к движущейся материальной точке, в текущий (произвольный) момент времени. Материальную точку нужно при этом изображать отдельно от связей, заменив их действие силами. Связями в механике называют тела (нити, опоры, подставки и т. д.), ограничивающие свободу движения рассматриваемого тела.

в) Следует помнить, что, говоря о движении какого-либо тела, например поезда, самолета, автомобиля и т. д., мы подразумеваем под этим движение материальной точки. Расставляя силы, приложенные к телу, необходимо все время руководствоваться третьим законом Ньютона, помня, что силы могут действовать на это тело только со стороны каких-то других тел: со стороны Земли это будет сила тяжести $\vec{P}$, со стороны нити — сила натяжения $\vec{T}$, со стороны поверхности — силы нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$.

Полезно также иметь в виду и то обстоятельство, что для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, надо учитывать только силу тяжести и силы, возникающие в местах непосредственного соприкосновения тел.

Силы притяжения, действующие между отдельными телами, настолько малы по сравнению с силой земного притяжения, что во всех задачах, где нет специальных оговорок, ими пренебрегают.

г) Расставив силы, приложенные к материальной точке, необходимо составить основное уравнение динамики:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a}.$$

Далее, пользуясь правилом параллелограмма, следовало бы попарным сложением сил определить величину равнодействующей, выразив ее через заданные силы, и подставить выражение для модуля равнодействующей в исходное уравнение. В большинстве случаев, и особенно когда дается три и более сил, выгоднее поступать иначе: движение частицы (на плоскости) описывать двумя скалярными уравнениями. Для этого нужно разложить все силы, приложенные к частице, по линии скорости (касательной к траектории движения — оси OX) и по направлению, ей перпендикулярному (нормали к траектории —оси OY), найти проекции F_x и F_y составляющих сил по этим осям и затем составить основное уравнение динамики точки в проекциях:

$$\Sigma F_x = ma_x; \quad \Sigma F_y = ma_y,$$

где a_x и a_y — ускорения частицы по осям.

Положительное направление осей удобно выбирать так, чтобы оно совпадало с направлением ускорения частицы. При указанном выборе осей легко установить, какие из приложенных сил (или их составляющие) влияют на величину вектора скорости, какие — на направление. Само собой разумеется, что, если все силы действуют по одной прямой или по двум взаимно перпендикулярным направлениям, раскладывать их не надо и можно сразу записывать уравнение динамики в проекциях.

В случае прямолинейного движения материальной точки одно из ускорений (a_x или a_y) обычно равно нулю.

При наличии трения силу трения, входящую в уравнение динамики, нужно сразу же представить через коэффициент трения и силу нормального давления, если известно, что тело скользит по поверхности или находится на грани скольжения. В противном случае пользоваться формулой (2.9) нельзя.

д) Составив основное уравнение динамики и, если можно, упростив его (проведя возможные сокращения), необходимо еще раз прочитать задачу и определить число неизвестных в уравнении. Если число неизвестных оказывается больше числа уравнений динамики, то недостающие соотношения между величинами, фигурирующими в задаче, составляют на основании формул кинематики, законов сохранения импульса и энергии. После того как получена полная система уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомого неизвестного.

2. Выписав числовые значения заданных величин в единицах одной системы, принятой для расчета, и подставив их в окончательную формулу, прежде чем делать арифметический подсчет, нужно проверить правильность решения методом сокращения наименований. В задачах динамики, особенно там, где ответ получается в виде сложной формулы, этого правила в начальной стадии обучения желательно придерживаться всегда, поскольку в этих задачах делают много ошибок.

3. Задачи на динамику движения материальной точки по окружности можно разделить на две группы.

Первая группа включает задачи о равномерном движении точки по окружности. Задачи такого типа решают только на основании законов Ньютона и формул кинематики с тем же порядком действий, о котором говорилось в п. 1, но только уравнение второго закона динамики здесь нужно записывать в форме:

$$\left|\sum \vec{F}_i\right| = m\frac{v^2}{R} \text{ или } \left|\sum \vec{F}_i\right| = m\omega^2 R.$$

Следует при этом помнить, что вектор суммы всех сил, приложенных к частице, направлен по радиусу к центру окружности. Для нахождения этой суммы (модуля центростремительной силы) можно или воспользоваться правилом параллелограмма и, складывая силы попарно, выразить ее через заданные величины, или разложить предварительно все силы по линии радиуса и линии, ей перпендикулярной, а затем найти сумму составляющих по R, которая и будет равна искомой сумме действующих сил.

Вторую группу составляют задачи о неравномерном движении, когда по условию задачи точка переходит по дуге окружности с одного уровня на другой. Решение этих задач требует применения не только законов Ньютона, но и закона сохранения энергии. На нескольких примерах мы покажем, как нужно решать такие задачи.

4. Задачи на применение второго закона Ньютона в общем виде:

$$\vec{F}\Delta t = \vec{K}_2 - \vec{K}_1, \quad \text{где } \vec{K}_1 = m\vec{v}_1; \ \vec{K}_2 = m\vec{v}_2,$$

встречаются сравнительно редко. Как правило, это задачи на соударение тел. При решении таких задач и составлении исходного уравнения особое внимание следует обращать на векторный характер величин, входящих во второй закон динамики.

Общая схема решения задач этого типа такова:

а) Проанализировав условие задачи, нужно сделать чертеж с указанием векторов начального и конечного импульсов частицы $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$, а также вектора импульса силы $\vec{F}\Delta t$.

б) Записать уравнение второго закона Ньютона, обращая внимание на то, что вектор импульса силы всегда равен геометрической разности векторов импульсов частиц и, стало быть, вектор $\vec{K}_2$ должен являться диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}\Delta t$ и $\vec{K}_1$. Это обстоятельство полезно иметь в виду и при выполнении чертежа.

Далее можно перейти от векторной записи основного уравнения к скалярной. Пользуясь теоремой косинусов, легко установить, что в общем случае связь между векторами импульсов частицы и вектором импульса силы дается соотношением:

$$(F\Delta t)^2 = K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$.

в) Затем, как обычно, следует записать математически все дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомого неизвестного.

5. Курс элементарной механики включает задачи динамики системы материальных точек, к которым прежде всего относятся задачи о поступательном движении связанных друг с другом тел и задачи на закон сохранения импульса.

Задачи о движении системы связанных материальных точек (например, движение грузов на блоке) можно свести к задаче динамики отдельной материальной точки. Для этого нужно изобразить силы, действующие на каждую материальную точку системы, и составить для нее уравнение второго закона динамики в проекциях. Сами тела, как обычно, следует рассматривать при этом отдельно, свободными от всяких связей, заменяя действие связей силами.

Составив уравнение динамики для каждой материальной точки, мы получим систему уравнений, в которую искомая величина входит одним из неизвестных. Если число неизвестных больше числа уравнений динамики, к ним добавляют формулы кинематики. После этого дальнейшее решение задачи сводится к математическим выкладкам и числовым расчетам. Указанный способ решения следует применять всегда, когда по условию задачи необходимо определить силы, действующие между отдельными телами заданной системы, или когда тела имеют разные ускорения.

В задачах на систему материальных точек возможны случаи, когда движущиеся тела взаимодействуют друг с другом трением и силы трения сообщают телам положительное ускорение. Перед тем как расшифровывать силы трения с помощью формулы (2.9), здесь нужно проанализировать условия задачи и установить, находятся ли соприкасающиеся тела на грани скольжения или нет.

Если по смыслу задачи все тела, принадлежащие к данной системе, имеют одинаковые ускорения и о внутренних силах в условии не спрашивается и они не заданы, основное уравнение динамики можно составлять сразу для всей системы материальных точек, участвующих в движении, не рассматривая тела в отдельности. При составлении уравнения в этом случае необходимо:

а) Расставить внешние силы, действующие на систему. Ими, как правило, являются силы тяжести $\vec{P}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и различного рода силы тяги. Силы, действующие между отдельными телами движущейся системы, к внешним не относятся и в решении не используются.

б) Составить основное уравнение динамики для системы материальных точек или в форме $\Sigma\vec{F} = \vec{a}\Sigma m$, или в проекциях $\Sigma F_x = a_x \Sigma m$ и $\Sigma F_y = a_y \Sigma m$, выбрав предварительно оси координат и разложив по ним все внешние силы.

в) Добавить при необходимости к составленному уравнению (уравнениям) формулы кинематики и решить уравнения совместно относительно искомой величины.

В общем случае, если тела, входящие в данную систему, обладают одинаковым ускорением, для составления уравнений динамики систему нужно «разрезать» только в тех местах, где по условию задачи требуется определить внутренние силы.

После этого нужно расставлять силы, действующие на каждую из полученных частей системы, и рассматривать их движение по отдельности.

6. Задачи, требующие применения закона сохранения импульса, включают задачи о разрыве одного тела на части (или, наоборот, о соединении нескольких тел в одно), задачи на удар и задачи о

движении одних тел по поверхности других в полностью или частично изолированной системе.

Решая такие задачи, удобно придерживаться следующих правил:

а) Прежде всего нужно установить, является ли рассматриваемая система тел изолированной полностью или же эта система изолирована по какому-либо одному направлению. Следует при этом иметь в виду, что если в системе происходит быстрое изменение импульсов, вызванное взаимодействием тел (удар, взрыв и т. д.), продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой. Это упрощающее предположение, хотя оно часто и не оговаривается, позволяет применять закон сохранения импульсов даже в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы. Импульс этих сил за ничтожно малое время взаимодействия тел будет тоже ничтожно мал и практически не влияет на скорость тел. Именно по этой причине не учитывается действие силы тяжести и силы сопротивления на тела, находящиеся у поверхности Земли, при их столкновениях или разрывах.

Это предположение эквивалентно тому, что при разрывах и соударениях тел в неизолированных системах мы обычно считаем, что внутренние силы системы намного превосходят внешние и поэтому изменение импульса тел в этих процессах практически обусловлено лишь действием внутренних сил. Изменение импульса тел под действием внешних сил за время быстрых процессов не учитывается. Как в первом, так и во втором случаях при решении задач на закон сохранения импульсов предполагается, что в процессе быстрого взаимодействия тела не успевают заметно сместиться и, следовательно, их скорости изменяются в данной точке пространства мгновенно.

б) Сделать чертеж, где для каждого тела системы изобразить векторы импульса в начале и в конце рассматриваемого процесса.

в) Выбрать прямоугольную систему координат, разложить по осям OX и OY каждый вектор импульса $\vec{K}$ на составляющие $\vec{K}_x$ и $\vec{K}_y$. Найти их проекции на эти оси.

Оси координат удобно выбирать так, чтобы приходилось делать минимум разложений и чтобы по крайней мере вдоль одной из осей система была изолированной. В тех случаях, когда все векторы $\vec{K}$ направлены по одной прямой и внешние силы вдоль нее не действуют или в сумме равны нулю, никакого разложения векторов делать, конечно, не следует, однако выбрать ось OX и установить на ней положительное направление и найти проекции импульсов необходимо.

г) Составить уравнение закона сохранения импульса частиц в проекциях по осям OX и OY или в форме уравнений

$$\sum K_{ix} - \sum K'_{ix} = 0 \text{ и } \sum K_{iy} - \sum K'_{iy} = 0$$

или, что делают чаще, в форме равенств

$$\sum K_{ix} = \sum K'_{ix} \text{ и } \sum K_{iy} = \sum K'_{iy},$$

где K_{ix}, K_{iy} и т. д. — проекции векторов импульса тел соответственно до и после их изменения.

Составляя уравнения, нужно внимательно следить за знаками проекций векторов. Если направление вектора $\vec{K}$ или его составляющей совпадает с положительным направлением координатной оси, то проекция берется со знаком «плюс», если нет, то со знаком «минус».

д) Затем, как обычно, необходимо выписать численные значения заданных величин, определить число неизвестных в уравнении закона сохранения, добавить к нему, если неизвестных больше одного, формулы кинематики и решить полученную систему относительно искомой величины.

В заключение следует отметить, что при составлении уравнения закона сохранения импульса обычно берут абсолютные скорости тел и все изменения в заданной системе рассматривают относительно неподвижного тела отсчета — Земли. Если в задаче дана скорость тел относительно друг друга, то абсолютную скорость движения нужно представить как векторную сумму относительной и переносной скоростей.

Пример 1. На концах нити, переброшенной через блок, висят на одинаковой высоте две гирьки массой по $m_1 = 96$ *г* каждая. Если на одну из гирек положить перегрузок, вся система придет в движение и через $t = 3$ *сек* расстояние между гирьками станет равным $h = 1{,}8$ *м*. Определите: ускорение тел, массу m_2 перегрузка, силу натяжения нити T, силу давления N перегрузка на гирьку при движении и силу давления N_1 на ось блока. Нить можно считать невесомой и нерастяжимой, массой блока пренебречь, трение в блоке не учитывать.

Решение. В задаче надо определить все внутренние силы, действующие между отдельными телами системы. Согласно сказанному в п. 5 систему следует мысленно «разрезать» на части в тех местах, где нужно найти эти силы, заменить действие связей силами и рассмотреть движение каждого тела отдельно. В результате задача сведется к задаче динамики материальной точки.

Почти во всех задачах о движении грузов на блоках делается ряд упрощающих предположений, которые намного облегчают решение. В них, если даже нет на то специальных оговорок, предполагается, что нить, связывающая грузы, невесома, нерастяжима и трение на блоке отсутствует.

Пренебрегая массой нити по сравнению с массой грузов, можно принять (с большой степенью точности) их движение за равноускоренное. Если не учитывать растяжение нити, можно считать, что в каждый момент времени грузы на ее концах имеют одинаковые по величине ускорения.

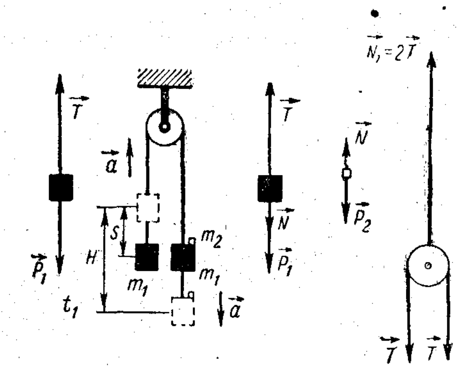


Рис. 2.1.

Условие об отсутствии трения на блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении (конечно, при условии, что ее масса ничтожно мала).

а) Делаем схематический чертеж (рис. 2.1).

б) Рисуем каждое тело отдельно и расставляем приложенные к нему силы.

На левую гирьку со стороны Земли действует сила тяжести $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, со стороны нити — сила натяжения $\vec{T}$. По условию задачи гирька поднимается ускоренно, следовательно, $T > P_1$.

Равнодействующая приложенных сил равна разности $T - P_1$. Эта сила направлена вертикально вверх и сообщает гирьке ускорение $\vec{a}$. Основное уравнение динамики в проекциях на ось, совпадающую с ускорением левой гирьки, имеет вид:

$$T - m_1 g = m_1 a. \tag{1}$$

На перегрузок действует со стороны Земли сила тяжести $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$ и со стороны нижней гирьки — нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Перегрузок движется ускоренно вниз, следовательно, $P_2 > N$. Равнодействующая приложенных сил равна разности $P_2 - N$. Эта сила направлена вертикально вниз и сообщает перегрузку ускорение $\vec{a}$. Составим основное уравнение динамики в проекциях на ось, совпадающую с ускорением перегрузка:

$$m_2 g - N = m_2 a. \tag{2}$$

На правую гирьку действуют: сила тяжести $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила нормального давления $\vec{N}$ перегрузка, численно равная силе, действующей со стороны гири на перегрузок. (Здесь часто допускают ошибку, считая, что сверху на гирю действует не сила нормального давления $\vec{N}$, а сила тяжести перегрузка $\vec{P}_2$).

Равнодействующая этих сил равна $P_1 + N - T$, она направлена вертикально вниз и сообщает грузу ускорение $\vec{a}$.

Основное уравнение динамики в этом случае имеет вид:

$$m_1 g + N - T = m_1 a. \tag{3}$$

На блок действуют силы натяжения нити $\vec{T}$ вниз и нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны оси (вверх). Под действием этих сил блок находится в равновесии, его ускорение равно нулю ($a = 0$); следовательно,

$$2T - N_1 = 0. \tag{4}$$

Наконец, используя заданные характеристики движения, составляем кинематическое уравнение для одного из грузов, учитывая, что за указанное время каждый груз проходит расстояние, вдвое меньшее h:

$$\frac{h}{2} = \frac{at^2}{2}. \tag{5}$$

Система уравнений (1)—(5) содержит пять неизвестных: a, m_2, T, N и N_1, которые требуется найти.

Решая уравнения (1)—(5) совместно относительно этих величин и подставляя числовые значения, получим:

$$a = \frac{h}{t^2} = 0{,}2\ м/сек^2;\quad m_2 = \frac{2m_1 a}{g - a} = 4 \cdot 10^{-3}\ кг;$$

$$T = m_1(g + a) = 0{,}96\ н;\quad N = 2m_1 a = 3{,}8 \cdot 10^{-3}\ н;$$

$$N_1 = 2T = 1{,}9\ н.$$

Пример 2. На столе лежит кубик весом P. К кубику прикреплена идеально гладкая цепочка, свешивающаяся со стола. К свободному концу цепочки подвешен грузик весом $4P$. Предоставленная самой себе, система приходит в ускоренное движение. Определите натяжение в середине цепочки в тот момент, когда с блока свисает 2/3 ее длины. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью стола равен f, вес цепочки Q.

Р е ш е н и е. По условию задачи нужно определить внутреннюю силу, действующую при движении между половинками цепочки, поэтому систему можно «разрезать» в середине цепочки и рассмотреть движение каждой из образовавшихся частей отдельно.

а) Делаем схематический чертеж (рис. 2.2), отмечаем на нем вектор ускорения $\vec{a}$ в тот момент, когда с блока спускается 2/3 длины цепочки. Движение системы будет неравномерно ускоренным с возрастающим ускорением, так как за счет перемещения цепочки сила тяги в направлении движения возрастает.

б) Рисуем обе части системы отдельно и расставляем приложенные к ним внешние силы; на кубик и верхнюю половину цепочки действуют: $\vec{P} = m\vec{g}$ — сила тяжести кубика, $\vec{Q}/3$ — сила тяжести горизонтальной части цепочки, $\vec{Q}/6$ — сила тяжести свисающей части цепочки, $\vec{F}_{тр}$ — сила трения, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — реакции стола, $\vec{T}$ — сила натяжения (со стороны нижней половины цепочки). Под действием этих сил кубик и половина цепочки имеют в рас-

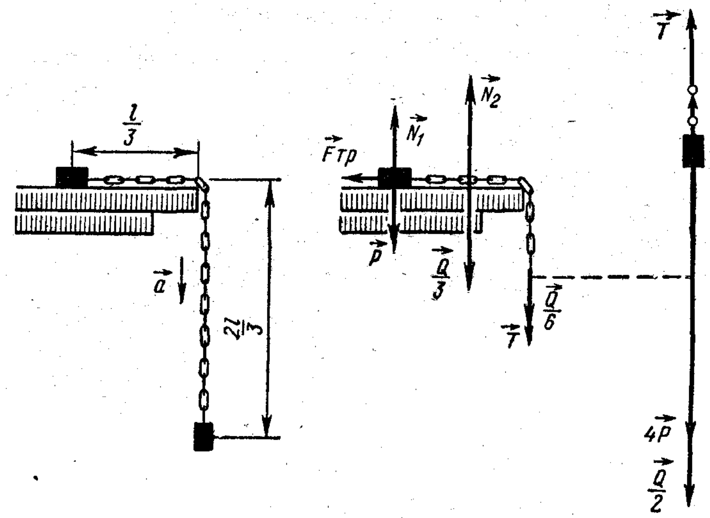


Рис. 2.2.

сматриваемый момент времени ускорение $\vec{a}$, направленное в сторону движения. Согласно второму закону динамики для этой части системы будем иметь:

$$T + \frac{Q}{6} - F_{тр} = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{a}{g}.$$

Если задан коэффициент трения (или его надо найти), то силу трения необходимо представить в виде $F_{тр} = fN_1 = fP$ (поскольку в данном случае $N_1 = P$) и переписать основное уравнение более подробно:

$$T + \frac{Q}{6} - fP = \left(P + \frac{Q}{2}\right)\frac{a}{g}. \tag{1}$$

К грузу и второй половине цепочки приложены: силы тяжести $4\vec{P}$ и $\vec{Q}/2$ и сила натяжения $\vec{T}$, действующая со стороны верхней половины цепочки. Уравнение динамики для этой части системы записывается так:

$$4P + \frac{Q}{2} - T = \left(4P + \frac{Q}{2}\right)\frac{a}{g}. \tag{2}$$

Система уравнений (1) — (2) содержит две неизвестные величины a и T. Решая их совместно относительно искомого неизвестного — силы натяжения, действующей в середине цепочки, получаем:

$$T = \frac{(8P + Q)(3P + Q + 3fP)}{30P + 6Q}.$$

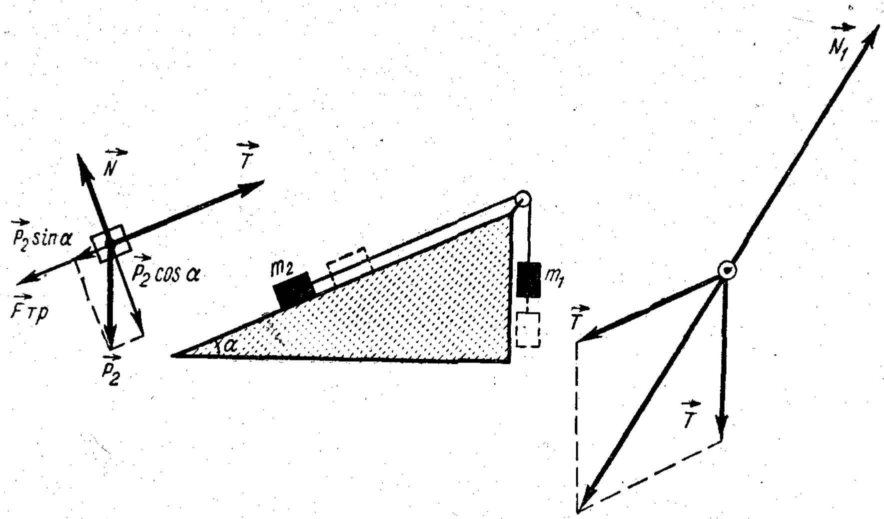


Рис. 2.3.

Пример 3. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится груз массой $m_2 = 2$ *кг* (рис. 2.3). К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой $m_1 = 20$ *кг*. Предоставленная самой себе, система приходит в равноускоренное движение. Определите ускорение грузов и силу давления на ось блока при условии, что коэффициент трения между грузом и плоскостью равен $f = 0{,}1$. Массу блока не учитывать.

Р е ш е н и е. В задачах о движении тел по наклонной плоскости рекомендуется прежде всего установить направление движения. Для этого необходимо расставить все внешние силы, действующие на систему грузов в целом, и, разложив их по линии скорости и перпендикуляру к ней, определить направление равнодействующей. Можно легко доказать, что в данном примере гиря будет опускаться, а груз подниматься по наклонной плоскости.

а) Рассмотрим движение каждого тела отдельно. На гирю действуют сила тяжести $\vec{P_1} = m_1\vec{g}$ и сила натяжения шнура $\vec{T}$. Поскольку гиря опускается ускоренно, то

$$m_1 g - T = m_1 a. \qquad (1)$$

б) На груз действуют сила тяжести $\vec{P_2} = m_2\vec{g}$, сила натяжения шнура $\vec{T}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$.

Чтобы установить, какие силы изменяют величину скорости, а какие — направление, разложим силы, действующие на груз, по касательной и нормали к траектории движения (вдоль наклонной

плоскости и перпендикуляру к ней). В данном случае надо разложить только силу тяжести $\vec{P_2}$, ее составляющие по этим направлениям равны $\vec{P_2} \sin \alpha$ и $\vec{P_2} \cos \alpha$. Под действием приложенных сил груз массы m_2 ускоренно поднимается по наклонной плоскости, следовательно,

$$T - m_2 g \sin \alpha - F_{тр} = m_2 a,$$

или

$$T - m_2 g \sin \alpha - fN = m_2 a. \qquad (2)$$

В направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, скорость груза не меняется, поэтому

$$N - m_2 g \cos \alpha = 0. \qquad (3)$$

При составлении уравнения динамики для груза, находящегося на наклонной плоскости, силу $\vec{P}$ можно и не раскладывать, а поступить так. Зная, что ускорение $\vec{a}$ груза, а стало быть, и равнодействующая приложенных сил направлены вверх по наклонной плоскости, можно было бы найти сумму сил $\vec{P_2}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ их попарным сложением и приравнять ее произведению $m_2\vec{a}$. Иными словами, мы могли бы представить основное уравнение динамики в векторном виде:

$$\vec{P_2} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m_2\vec{a},$$

и искать выражение для модуля суммы, стоящей в левой части равенства. Получился точно такой же результат, что и при разложении сил. Однако этот прием требует большего времени, поскольку в данном случае на груз действует сравнительно много сил.

Так как по условию задачи масса блока не учитывается, то можно считать, что на него действуют только две силы натяжения $\vec{T}$ со стороны шнура и нормальная реакция опоры $\vec{N_1}$ со стороны оси. Согласно третьему закону Ньютона блок действует на ось с такой же силой $\vec{N_1}$, но направленной в противоположную сторону. Эту силу нам нужно определить.

Под действием приложенных сил блок находится в равновесии: его ускорение равно нулю. Согласно второму закону динамики должно быть:

$$\vec{T} + \vec{T} + \vec{N_1} = 0.$$

Здесь, как и раньше, мы могли бы разложить силы по каким-либо двум осям и записать по ним уравнение динамики с учетом того, что $a = 0$. Однако в данном случае условие равновесия проще представить в векторном виде и сразу перейти от него к скалярной записи, сложив предварительно силы натяжения по правилу параллелограмма. Как видно из чертежа, диагональ параллелограмма равна:

$$2T\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$

и, стало быть,

$$2\vec{T}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)+\vec{N}_1=0,$$

или, учитывая направление векторов,

$$2T\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-N_1=0. \tag{4}$$

Система уравнений (1)—(4) содержит четыре неизвестные величины: T, a, N и N_1. Решая систему относительно a и N_1, найдем:

$$a=\frac{m_1-m_2\sin\alpha-fm_2\cos\alpha}{m_1+m_2}\,g;$$

$$a\approx 4\,\frac{м}{сек^2};$$

$$N_1=\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\,g\,(1+\sin\alpha+f\cos\alpha)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$N_1=202\ н.$$

Пример 4. К концам легкой нити, перекинутой через блок, укрепленный на динамометре, подвешены два груза массой $m_1=0{,}1\ кг$ и $m_2=0{,}2\ кг$. Определите ускорение грузов, натяжение нити и показание динамометра при условии, что блок вместе с грузами поднимается на динамометре вверх с ускорением $a=1{,}2\ м/сек^2$. Массой блока и динамометра пренебречь.

Решение. Решение задач динамики, в которых тела одновременно участвуют в двух ускоренных движениях — относительном и переносном, принципиально ничем не отличается от только что рассмотренных. Особое внимание здесь нужно обратить на то, что в основном уравнении динамики точки под a всегда подразумевается полное (абсолютное) ускорение относительно неподвижного тела отсчета — Земли и его приходится представлять как сумму относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a}=\vec{a}_0+\vec{a}_п.$$

Если в сложном движении участвуют не одно, а несколько тел (как, например, в данной задаче), то независимо от того, требуется или нет определять внутренние силы системы, движение каждого тела необходимо рассматривать отдельно, поскольку они имеют разные абсолютные ускорения.

а) В данной задаче грузы перемещаются относительно блока (относительное движение) и одновременно с этим поднимаются

вверх вместе с блоком (переносное движение). Делаем схематический чертеж (рис. 2.4), где прежде всего проставляем векторы относительного ускорения $\vec{a}_0$ и переносного $\vec{a}_п\equiv\vec{a}$.

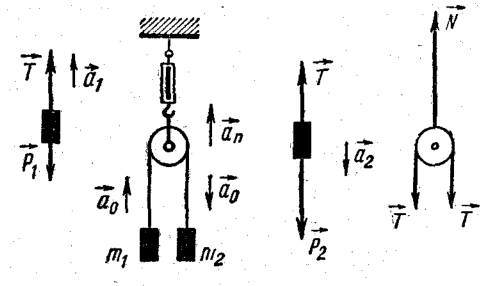


Рис. 2.4.

б) На левый груз действуют сила тяжести $\vec{P}_1=m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Под действием этих сил груз движется вертикально вверх с некоторым ускорением $\vec{a}_1$ относительно неподвижного тела отсчета — Земли, поэтому

$$T-m_1g=m_1a_1. \tag{1}$$

Модуль ускорения $\vec{a}_1$ связан с модулем относительного $\vec{a}_0$ и переносного $\vec{a}$ ускорений соотношением

$$a_1=a_0+a, \tag{2}$$

поскольку оба эти ускорения направлены вверх.

На правый груз также действуют две силы $\vec{P}_2=m_2\vec{g}$ и $\vec{T}$, однако сразу установить, какая из них больше, какая меньше, и определить тем самым направление полного ускорения $\vec{a}_2$ этого груза нельзя. В зависимости от величин P_1 и P_2, при заданном a больший груз может иметь относительно Земли ускорение или направленное вверх (при $T>P_2$), или вниз (если $T<P_2$), или даже находиться в состоянии покоя (при $T=P_2$).

Предположим, что направление полного ускорения $\vec{a}_2$ совпадает с направлением относительного движения, т. е. $P_2>T$ и вектор $\vec{a}_2$ направлен вниз (груз опускается, приближаясь к земле). Тогда уравнение движения этого груза будет иметь вид:

$$m_2g-T=m_2a_2. \tag{3}$$

При нашей договоренности о направлении $\vec{a}_2$ относительное ускорение должно быть больше переносного ($a_0>a$) и, следовательно,

$$a_2=a_0-a. \tag{4}$$

Блок взаимодействует с тремя телами: Землей, динамометром и нитью. Основное уравнение динамики (при условии, что масса блока ничтожно мала) дает:

$$N-2T=0. \tag{5}$$

Решая уравнения (1) — (5) совместно относительно искомых неизвестных (a_1, a_2, T и N), находим:

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1)\,g - 2m_2 a}{m_1 + m_2} = 4{,}87\ м/сек^2;$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1)g - 2m_1 a}{m_1 + m_2} = 2{,}47\ м/сек^2;$$

$$T = \frac{2m_1 m_2\,(g + a)}{m_1 + m_2} = 1{,}47\ н;$$

$$N = 2T = 2{,}94\ н.$$

Пример 5. Грузы весом $P = 98$ *н* и $2\,P$ связаны легкой нитью, переброшенной через блок, укрепленный на краю горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Система находится в равновесии на грани скольжения. Каково будет ускорение большего груза и натяжение нити, если плоскость начнет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a = 3\ м/сек^2$?

Решение. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, необходимо выяснить, что будет происходить с грузами при ускоренном движении плоскости.

Так как взаимодействие груза с плоскостью в горизонтальном направлении осуществляется только за счет трения, самая большая сила, с которой плоскость может действовать на груз вдоль поверхности соприкосновения, равна максимальной силе трения покоя fN. Именно с этой силой плоскость и действует на груз A в сторону, противоположную направлению его возможного движения, т. е. вправо, когда груз находится на грани скольжения. Если к плоскости приложить некоторую силу и сообщить ей вправо ускорение $\vec{a}$, то плоскость не сможет увлечь за собой груз A с ускорением $\vec{a}$, поскольку сила взаимодействия между ними уже имела максимальное значение, равное fN, и при неизменных f и N увеличиться не может. В результате груз A начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$, направленным противоположно $\vec{a}$. Как только груз A придет в движение относительно плоскости, груз B станет опускаться.

Относительно неподвижной системы отсчета (например, поверхности Земли) каждый груз будет участвовать в сложном движении, которое можно представить как результат двух равноускоренных перемещений — движения вместе с плоскостью относительно Земли с ускорением $\vec{a} \equiv \vec{a}_п$ (переносное движение) и движения относительно самой плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ (относительное движение).

Полное ускорение каждого груза по отношению к Земле будет равно векторной сумме ускорений $\vec{a}_п$ и $\vec{a}_0$.

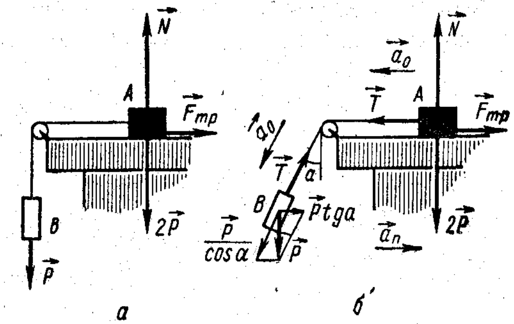


Рис. 2.5.

Делаем схематический чертеж для двух состояний системы: когда она находится на грани скольжения (рис. 2.5, *а*) и когда ей сообщено переносное ускорение (рис. 2.5, б). Проставляем векторы переносного $\vec{a}_П$ и относительного $\vec{a}_0$ ускорений и расставляем действующие силы. В первом случае систему рассматриваем целиком, во втором — «разрезаем» на части, поскольку требуется определить внутреннюю силу (силу натяжения) и, кроме того, полные ускорения грузов неодинаковы.

В первом случае ускорение системы равно нулю, и основное уравнение динамики для нее дает:

$$P - F_{тр} = 0,$$

или, учитывая, что $F_{тр} = fN$, а $N = 2P$, получим:

$$P - 2fP = 0,$$

откуда $f = 0{,}5$.

Условие о нахождении груза на грани скольжения является вспомогательным; оно позволяет определить коэффициент трения скольжения, который понадобится в дальнейшем.

Рассмотрим второй случай. На груз A действует сила тяжести $2\vec{P} = 2m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Предположим, что $T > F_{тр}$ и вектор полного ускорения этого груза $\vec{a}_1$ направлен к блоку. Тогда основное уравнение динамики для груза A будет иметь вид:

$$T - F_{тр} = 2ma_1 \text{ или } T - fN = 2ma_1.$$

В направлении нормали ускорения нет, следовательно,

$$T - f2P = 2ma_1. \tag{1}$$

Так как мы считаем, что вектор $\vec{a}_1$ направлен к блоку, то относительное ускорение должно быть больше переносного, т. е.

$$a_1 = a_0 - a. \tag{2}$$

На груз B действуют сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная под некоторым углом α к вертикали. Под действием приложенных сил груз одновременно участвует в двух равноускоренных движениях: переносном (вместе со всей системой) и относительном (вдоль направления нити). Ускорения в этих движениях равны соответственно $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$. Чтобы выявить причины появления ускорений, необходимо разложить действующие силы по горизонтальному направлению и вдоль нити. В данном случае нужно разложить только силу $\vec{P}$, ее составляющие по этим направлениям равны $\vec{P}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\vec{P}/\cos\alpha$.

Согласно второму закону динамики уравнения движения для этих направлений будут иметь вид:

$$P\,\mathrm{tg}\,\alpha = ma \qquad (3)$$

и

$$\frac{P}{\cos\alpha} - T = ma_0. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) вытекает, что $\mathrm{tg}\,\alpha = a/g$, т. е. угол наклона нити к вертикали при ускоренном движении точки подвеса определяется лишь горизонтальным ускорением a системы (у нас $a = a_п$). Этот результат имеет общий характер и его полезно помнить.

Исключая из уравнений (1)—(4) $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\cos\alpha$ и a_0 и решая их относительно искомых неизвестных a_1 и T, получаем:

$$a_1 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2} - 2fg - a}{3}; \quad a_1 \approx 2{,}16 \ м/сек^2;$$

$$T = \frac{2P}{3} \cdot \frac{\sqrt{g^2 + a^2} + fg - a}{g}; \quad T \approx 10{,}1 \ н.$$

Пример 6. Брусок массой M лежит на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит маленький кубик массой m (рис. 2.6). Коэффициент трения между кубиком и бруском равен f. При каком минимальном значении силы F, приложенной к кубику, он начнет скользить по бруску? Какую скорость будет иметь брусок в тот момент, когда кубик упадет с бруска, если сила тяги будет равной $2F$? Длина бруска L.

Решение. При движении кубика в горизонтальном направлении он будет увлекать за собой брусок вследствие того, что между ними есть трение. Максимальная сила, с которой кубик может действовать на брусок в направлении движения, равна максимальной силе трения покоя fN. Эта сила будет сообщать бруску некоторое предельное ускорение $\vec{a}_2$, которое при заданных f и N увеличиваться не может. Если при этом потянуть за кубик так, чтобы сам он двигался с ускорением $a_1 > a_2$, кубик начнет обгонять брусок, скользя по его поверхности, пока не упадет с него.

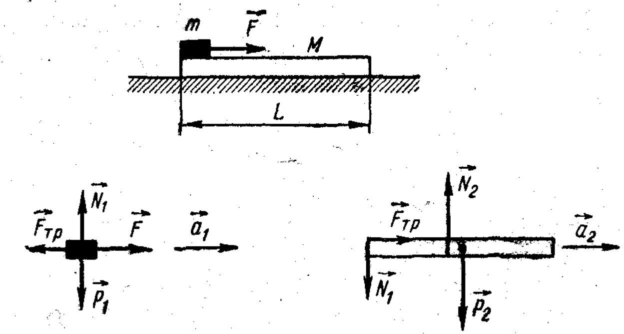


Рис. 2.6.

1. Рассмотрим первый случай, когда тела находятся на грани проскальзывания и движутся с одинаковым ускорением. На кубик действуют: сила тяжести $\vec{P}_1 = m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Поскольку кубик перемещается вправо с ускорением $\vec{a}_1$, то согласно второму закону Ньютона должно быть: $F - F_{тр} = ma_1$, или, учитывая, что $F_{тр} = fN_1$ и $N_1 = P_1$,

$$F - fmg = ma_1. \qquad (1)$$

К бруску приложена сила тяжести $\vec{P}_2 = M\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_2$, сила нормального давления $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны кубика в направлении движения и сообщающая бруску ускорение $\vec{a}_2$. Основное уравнение динамики для бруска дает:

$$F_{тр} = Ma_2 \ \text{или} \ fmg = Ma_2. \qquad (2)$$

Если кубик не скользит по бруску, то независимо от того, находятся ли тела на грани скольжения или нет, их ускорения одинаковы и к составленным уравнениям нужно добавить условие:

$$a_1 = a_2. \qquad (3)$$

Уравнения (1)—(3) содержат три неизвестные величины: искомую силу тяги F и ускорения a_1 и a_2. Решая уравнения относительно F, мы получим ответ на первый вопрос задачи:

$$F = fmg\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (4)$$

2. Если сила тяги окажется больше силы F, которую мы нашли, ускорение кубика увеличится. Так как ускорение бруска при этом возрасти не может и останется равным a_2, кубик станет скользить по бруску в направлении их движения. За время t, в

течение которого кубик находится на бруске и увлекает его за собой, брусок приобретет скорость

$$v = a_2 t. \tag{5}$$

За это же время кубик сместится относительно бруска на расстояние

$$L = \frac{(a_1 - a_2)\, t^2}{2}, \tag{6}$$

где L — длина бруска, $(a_1 - a_2)$ — ускорение кубика относительно бруска.

Чтобы найти скорость бруска в момент падения кубика, нужно совместно решить уравнения (1), (2), (4)—(6) относительно v, положив в них вместо F силу $2F$, считая ее известной. Проведя вычисления, получим:

$$v = m\sqrt{\frac{2fgL}{(m+M)M}}.$$

Пример 7. Тяжелое тело находится на вершине наклонной плоскости на грани скольжения (рис. 2.7). За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a = 0{,}5$ *м/сек*^{2}? Длина наклонной плоскости $l = 1$ *м*, угол наклона ее к горизонту равен $\alpha = 30°$.

Решение. В задаче рассматриваются два состояния тела: первое, когда оно находится на грани скольжения, второе — в равноускоренном движении.

Условие о нахождении тела на грани скольжения имеет вспомогательное значение. Оно позволяет определить коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью.

1. Для определения f (это самостоятельная задача) нужно составить основное уравнение динамики с учетом того, что ускорение тела равно нулю.

На тело, находящееся на наклонной плоскости, действуют сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (рис. 2.7, *а*). Разложив силы, действующие на тело, по направлению возможного перемещения (вдоль наклонной плоскости) и направлению, ему перпендикулярному (по нормали к плоскости), можно написать:

$$P\sin\alpha - F_{тр} = 0;\quad N - P\cos\alpha = 0.$$

Причем $F_{тр} = fN$, поскольку тело находится на грани скольжения.

Решая уравнения совместно относительно коэффициента трения, находим:

$$f = \operatorname{tg}\alpha.$$

Полученная формула для коэффициента трения скольжения имеет место лишь для случая, когда тело равномерно скользит по наклонной плоскости или находится на грани скольжения. Если

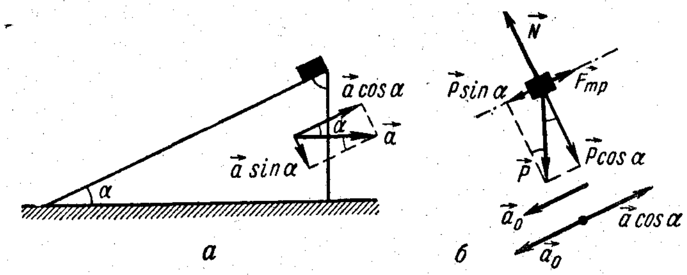


Рис. 2.7.

угол наклона плоскости больше или меньше предельного, пользоваться этой формулой для определения f (или α) нельзя.

2. Сообщая горизонтальное ускорение наклонной плоскости мы тем самым как бы вынимаем ее из-под груза и уменьшаем силу давления плоскости на груз в направлении нормали. В результате сила нормального давления $\vec{N}$, а стало быть, и сила трения, препятствующая скольжению груза по плоскости, уменьшается: составляющая $\vec{P}\sin\alpha$ станет больше $\vec{F}_{тр}$ и груз начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$.

Движение груза относительно неподвижного тела отсчета (например, Земли) будет сложным, но оно складывается из двух прямолинейных движений — переносного с ускорением $\vec{a}_п \equiv \vec{a}$ (вместе с наклонной плоскостью) и относительного с ускорением $\vec{a}_0$ вдоль наклонной плоскости.

На груз, находящийся в ускоренном движении, действуют те же силы, что и при его равновесии: $\vec{P}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ (рис. 2.7,б).

Чтобы сложное криволинейное движение груза представить как два прямолинейных, разложим силы и кинематические характеристики движения по каким-либо двум взаимно перпендикулярным направлениям. Эти направления удобно выбрать вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней. При таком выборе направлений придется разложить силу $\vec{P}$ на составляющие $\vec{P}\sin\alpha$ и $\vec{P}\cos\alpha$ и вектор переносного ускорения $\vec{a}$ на составляющие $\vec{a}\sin\alpha$ и $\vec{a}\cos\alpha$.

Под действием приложенных сил тело ускоренно опускается по наклонной плоскости, имея вдоль нее некоторое ускорение $\vec{a}_1$, отсчитываемое относительно неподвижного тела отсчета — Земли. Это ускорение сообщает телу результирующая всех сил, действующих вдоль наклонной плоскости. Выше указывалось, что $P\sin\alpha > fN$, поэтому

$$mg\sin\alpha - fN = ma_1. \tag{1}$$

Перемещение тела с ускорением $\vec{a}_1$ можно рассматривать как состоящее из двух: движения относительно наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ и движения в противоположную сторону вместе с плоскостью с ускорением $\vec{a}\cos\alpha$. Поэтому

$$a_1 = a_0 - a\cos\alpha. \qquad (2)$$

В направлении нормали к наклонной плоскости последняя имеет ускорение $\vec{a}\sin\alpha$. Таким же ускорением в этом направлении обладает и тело, так как по смыслу задачи оно все время находится на плоскости, не отрываясь от нее.

Нормальное ускорение $\vec{a}\sin\alpha$ возникает у груза вследствие того, что при ускоренном движении плоскости реакция $\vec{N}$ становится меньше составляющей силы тяжести $\vec{P}\cos\alpha$. По второму закону Ньютона

$$mg\cos\alpha - N = ma\sin\alpha. \qquad (3)$$

В заключение остается записать кинематическое уравнение, обратив внимание на то, что относительно наклонной плоскости тело движется с ускорением a_0:

$$l = \frac{a_0 t^2}{2}. \qquad (4)$$

Уравнения (1)—(4) содержат четыре неизвестные величины: a_1, a_0, N и t. Решая их совместно для времени спуска тела с наклонной плоскости, получим:

$$t = \sqrt{\frac{2l\cos\alpha}{a}}; \quad t = 1{,}87 \text{ сек.}$$

Пример 8. Космический корабль, имеющий скорость $v = 10$ *км/сек*, попадает в неподвижное облако микрометеоров. В объеме $V_0 = 1$ *м*^{3} пространства находится $n = 1$ микрометеор. Масса каждого микрометеора $m_0 = 2 \cdot 10^{-6}$ *кг*. На сколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля при прохождении через облако не изменилась? Лобовое сечение корабля $S = 49$ *м*^{2}. Удар микрометеоров об обшивку корабля считать неупругим.

Р е ш е н и е. При движении космического корабля в облаке микрометеоров частицы получают импульс со стороны обшивки, в результате чего их скорость возрастет от 0 до скорости корабля v, поскольку удар неупругий. Одновременно такой же импульс, как и частицы, получает и корабль, но в сторону, противоположную движению. В результате скорость корабля должна уменьшаться и для ее сохранения сила тяги двигателя должна возрасти. Прирост силы тяги должен быть тем большим, чем больше изменение импульса частиц за единицу времени.

Выделим (рис. 2.8) часть микрометеорного облака, которой был сообщен импульс за небольшой промежуток времени Δt, в течение которого движение корабля можно считать равномерным.

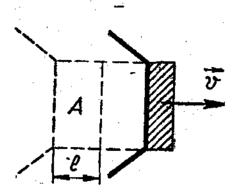


Рис. 2.8.

Если за время Δt корабль пройдет расстояние l, то импульс частиц, находящихся в объеме цилиндра A, возрастет от 0 до $m\vec{v}$, частицы станут двигаться вместе с кораблем. Такое изменение количества движения произойдет за счет импульса силы $\vec{F}\Delta t$, действующего на выделенную часть облака со стороны обшивки корабля. Сила $\vec{F}$ будет равна при этом по величине и направлению искомому увеличению силы тяги.

Учитывая, что вначале частицы покоились и направления векторов $\vec{F}\Delta t$ и $m\vec{v}$ совпадают, по второму закону Ньютона:

$$F\Delta t = mv. \qquad (1)$$

Масса частиц, увлекаемых за время Δt, равна:

$$m = \frac{nm_0}{V_0} Sl. \qquad (2)$$

При малом Δt можно с достаточной степенью точности считать, что движение на участке l равномерное и, следовательно,

$$l = v\Delta t. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) находим, что искомое увеличение силы тяги равно:

$$F = \frac{nm_0 S v^2}{V_0}; \qquad F \approx 100 \text{ кн.}$$

Решение задач о равномерном движении материальной точки по окружности принципиально не отличается от решения только что разобранных задач. Если до этого основное внимание уделялось выявлению причин изменения величины вектора скорости и составлению уравнения второго закона Ньютона в проекциях по направлению касательной к траектории, то сейчас нас будут интересовать главным образом причины изменения направления вектора $\vec{v}$ и условия, при которых материальная точка находится на окружности. Задача состоит в составлении того же уравнения динамики, но для другого направления — направления нормали (радиуса окружности).

Некоторые из предлагаемых задач требуют применения закона всемирного тяготения. Обычно это задачи на движение небесных тел и искусственных спутников Земли. Их решение рекомендуется начинать с составления уравнения второго закона Ньютона. Получив это уравнение, нужно представить в развернутом виде входящую в него силу тяжести с помощью закона всемирного тяготения, добавить при необходимости формулы кинематики и затем решить полученную систему уравнений совместно. Очень часто при этом

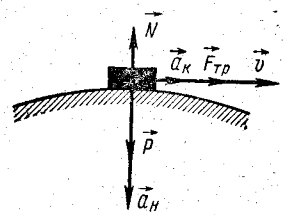


Рис. 2.9.

приходится использовать формулу (2.11′), позволяющую исключить из уравнений массу Земли.

Пример 9. Автомобиль с двумя парами ведущих колес движется по мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом $R = 40$ *м*, обращенной своей выпуклостью вверх. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль на вершине моста, если скорость его в этой точке равна $v = 54$ *км/ч*? Коэффициент трения колес автомобиля о мост равен $f = 0{,}6$.

Р е ш е н и е. Делаем схематический чертеж (рис. 2.9) и указываем на нем линейную скорость автомобиля $\vec{v}$ и касательное ускорение $\vec{a}_к$. Автомобиль взаимодействует с двумя телами: Землей и поверхностью моста. Со стороны Земли на него действует сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, со стороны моста — нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Здесь прежде всего необходимо обратить внимание на направление силы трения. При вращении колес покрышка ведущих колес отталкивается от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины. По третьему закону Ньютона поверхность действует на автомобиль в направлении движения. Сцепление колес с поверхностью дороги осуществляется за счет трения, поэтому при качении автомобиля движущей силой является сила трения сцепления, направленная по касательной к баллону в сторону движения.

Под действием приложенных сил изменяется и величина, и направление вектора скорости. Величина скорости меняется за счет силы трения, сообщающей телу касательное ускорение. Согласно второму закону динамики

$$F_{тр} = ma_к.$$

По условию задачи ускорение $a_к$ максимально, поэтому колеса находятся на грани пробуксовки и сила трения имеет наибольшее значение, равное $F_{тр} = fN$. Поэтому

$$fN = ma_к. \quad (1)$$

По нормали к траектории (вдоль радиуса окружности) действуют две силы: $\vec{P}$ и $\vec{N}$. В сумме они не равны нулю и изменяют направление вектора скорости. При движении по выпуклому мосту вектор скорости отклоняется от своего начального направления в сторону центра окружности. Это возможно лишь при условии, что нормальная реакция оказывается меньше силы тяжести. Последнее объясняется тем, что мост из-за своей кривизны как бы уходит из-под машины.

Равнодействующая сил $\vec{P}$ и $\vec{N}$ является в данном примере центростремительной силой, сообщающей автомобилю ускорение $\vec{a}_н$, направленное к центру окружности. Величина равнодействующей равна разности $P - N$, и согласно второму закону Ньютона для проекций сил и ускорения по направлению нормали к траектории движения автомобиля в верхней ее точке имеем:

$$P - N = ma_н = m\frac{v^2}{R}. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно касательного ускорения, получим:

$$a_к = f\left(g - \frac{v^2}{R}\right); \quad a_к \approx 1{,}9 \text{ м/сек}^2.$$

Пример 10. Какую скорость относительно поверхности Земли должен иметь искусственный спутник, чтобы лететь по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора, на высоте $h = 1600$ *км* над Землей? Радиус Земли принять равным $R_з = 6400$ *км*, ускорение свободного падения у ее поверхности $g_0 = 9{,}8$ *м/сек*^{2}.

Р е ш е н и е. Если пренебречь силами притяжения, действующими на спутник со стороны небесных тел, и не учитывать сопротивление среды, можно с достаточной степенью точности считать, что на спутник при его движении действует только сила земного притяжения $\vec{P}$.

Под действием этой силы спутник равномерно движется по окружности, следовательно, сила притяжения изменяет только направление вектора скорости и поэтому является центростремительной силой. Согласно второму закону динамики

$$P = \frac{mv^2}{R_з + h}, \quad (1)$$

где m — масса спутника, v — скорость спутника относительно центра Земли.

Силу тяготения P в уравнении второго закона Ньютона нужно представить в развернутом виде, используя закон всемирного тяготения:

$$P = \gamma\frac{mM_з}{(R_з + h)^2}. \quad (2)$$

Если в решении задач подобного типа фигурирует масса Земли, расчеты можно значительно упростить, исключив произведение $\gamma M_з$ с помощью формулы

$$g_0 = \gamma\frac{M_з}{R_з^2}. \quad (3)$$

Скорость спутника относительно поверхности Земли равна:

$$u = v \pm v_0, \quad (4)$$

где v_0 — линейная скорость точек Земли на экваторе, которую можно найти из соотношения

$$v_0 = \frac{2\pi R_з}{\tau}, \qquad (5)$$

зная радиус Земли и период ее суточного вращения $\tau = 24$ *ч*.

Знак «плюс» или «минус» в уравнении (4) берется в зависимости от того, запущен ли спутник с востока на запад или с запада на восток.

Уравнения (1)—(5) содержат шесть неизвестных величин: P, m, $M_з$, v, v_0 и u.

Решая систему относительно скорости спутника, находим:

$$u = \sqrt{\frac{g_0 R_з^2}{R_з + h}} \pm \frac{2\pi R_з}{\tau}.$$

Подставляя числовые значения в выражение для скорости, получим:

$$u_1 \approx 7{,}6 \text{ км/сек} \text{ и } u_2 \approx 6{,}6 \text{ км/сек}.$$

Эти результаты показывают, что запускать искусственные спутники Земли легче в направлении с запада на восток, чем в противоположном.

Пример 11. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной l. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол α (конический маятник). Сколько оборотов делает шарик за время t. Решите задачу при условии, что конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$.

Р е ш е н и е. 1. При вращении нити на шарик действуют две силы: со стороны Земли сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и со стороны нити — сила натяжения $\vec{T}$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно в горизонтальной плоскости по кругу радиусом R (рис. 2.10). Это возможно лишь при условии, что равно-

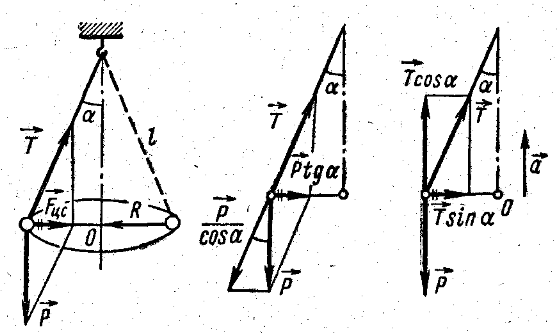


Рис. 2.10.

действующая сил $\vec{P}$ и $\vec{T}$ оказывается направленной перпендикулярно скорости к центру окружности O и, следовательно, является центростремительной силой:

$$\vec{F}_{ц.с} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Расставив силы, составляем основное уравнение динамики материальной точки:

$$|\vec{P} + \vec{T}| = \frac{mv^2}{R}. \qquad (1)$$

Чтобы найти из этого соотношения какую-либо величину, и в частности длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{T}$ и $\vec{P}$, нужно вычислить модуль суммы $|\vec{T} + \vec{P}|$. Сделать это можно различными способами.

а) Сложить силы $\vec{T}$ и $\vec{P}$ по правилу параллелограмма и найти его диагональ, зная, что равнодействующая направлена по радиусу. Как видно из чертежа,

$$|\vec{T} + \vec{P}| = P\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2 - P^2}. \qquad (1')$$

б) Разложить силу $\vec{P}$ по направлению нити и радиуса вращения на составляющие $\vec{P}/\cos\alpha$ и $\vec{P}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Так как нить нерастяжима и вдоль нее ускорения нет, то $\vec{T} + \vec{P}/\cos\alpha = 0$ и в сумме силы $\vec{T}$, $\vec{P}/\cos\alpha$ и $\vec{P}\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (а значит, и $\vec{T} + \vec{P}$) будут равны силе $\vec{P}\,\mathrm{tg}\,\alpha$, которую и можно рассматривать как центростремительную.

в) Для вычисления равнодействующей $\vec{T} + \vec{P}$ можно использовать и такой прием. Разложить силу $\vec{T}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям — по радиусу вращения и вертикали на составляющие $\vec{T}\sin\alpha$ и $\vec{T}\cos\alpha$. Так как по вертикальному направлению скорость шарика не меняется, то

$$\vec{T}\cos\alpha + \vec{P} = 0$$

и в сумме силы $\vec{P}$, $\vec{T}\sin\alpha$ и $\vec{T}\cos\alpha$ (а значит, и $\vec{T} + \vec{P}$) должны равняться силе $\vec{T}\sin\alpha$, которую можно рассматривать как центростремительную.

Сравнивая все три результата, нетрудно заметить, что в данном примере величина центростремительной силы равна:

$$F_{ц.с} = |\vec{P} + \vec{T}| = P\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2 - P^2}, \qquad (2)$$

и согласно (1) уравнение второго закона Ньютона можно представить в одном из трех видов:

$$P\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\frac{v^2}{R}; \quad T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \text{ и } \sqrt{T^2 - P^2} = m\frac{v^2}{R}.$$

Какое из этих уравнений нужно использовать в том или ином конкретном случае, зависит от вопроса задачи и исходных данных.

Если не задана масса частицы, как например в нашем примере, уравнение второго закона удобно записать в первой форме:

$$mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$gR\,\mathrm{tg}\,\alpha = v^2. \qquad (3)$$

Составив уравнение динамики, записываем дополнительные условия:

$$v = \frac{2\pi R n}{t}, \qquad (4)$$

где n — число оборотов шарика, и

$$R = l\sin\alpha. \qquad (5)$$

Исключая из уравнений (3)—(5) v и R и решая их относительно n, получим:

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

2. Если конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, число сил, действующих на шарик, остается тем же. Однако сила натяжения действует на шарик не так, как в первом случае; она не только (совместно с силой $\vec{P}$) обеспечивает движение шарика по кругу, но и сообщает ему ускорение $\vec{a}$ ракеты. Так как шарик участвует в двух ускоренных движениях: равномерном по окружности и прямолинейном вверх, для нахождения связи между действующими силами $\vec{T}$ и $\vec{P}$ и ускорениями силы нужно разложить по радиусу и вертикали. Поскольку сила $\vec{P}$ направлена вниз, то необходимо разложить только силу натяжения $\vec{T}$ на составляющие $\vec{T}\sin\alpha$ и $\vec{T}\cos\alpha$. По направлению радиуса вращения шарика уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \qquad (6)$$

для вертикального направления:

$$T\cos\alpha - P = ma. \qquad (6')$$

Решая уравнения (2) и (6′) относительно n, получим:

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l\cos\alpha}}.$$

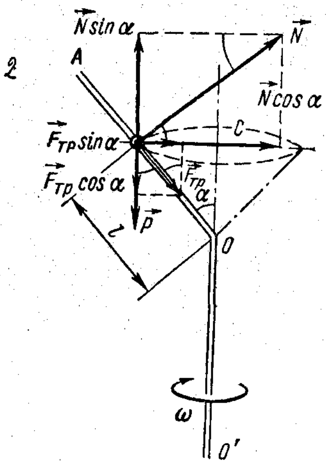


Рис. 2.11.

Анализируя ответ, можно заметить следующее: а) в системе, поднимающейся ускоренно вверх, явление протекает так, как если бы ускорение свободного падения увеличилось на величину a, б) по мере увеличения числа оборотов маятника в единицу времени (n/t) угол α увеличивается и становится равным 90° только при бесконечно большой скорости вращения. Из этого следует, что при отсутствии поддерживающей силы груз на нити в горизонтальной плоскости вращаться не может.

Пример 12. Стержень AOO', изогнутый, как показано на рисунке 2.11, вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси OO'. На стержень надета бусинка, размеры которой очень малы. Определите, на каком максимальном расстоянии l от точки O бусинка может находиться в равновесии относительно стержня AO, если коэффициент трения между ними равен f.

Решение. При вращении стержня на бусинку действуют три силы: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно стержню, и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная вдоль стержня к точке O. То, что сила трения направлена вниз, а не вверх, вытекает из того, что расстояние l должно быть максимальным. Действительно, находясь на максимальном расстоянии, бусинка при увеличении скорости вращения стала бы сразу двигаться вверх, по раскручивающейся спирали, а это возможно лишь в том случае, когда $\vec{F}_{тр}$ имеет указанное направление. Нетрудно заметить, что если бы речь шла о минимальном l, силу трения следовало бы направить вверх.

Под действием приложенных сил бусинка равномерно движется по кругу радиусом

$$R = l\sin\alpha \qquad (1)$$

в горизонтальной плоскости. Такое движение может происходить лишь при условии, что силы $\vec{P}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ в сумме оказываются направленными к центру окружности C и изменяют только направление вектора скорости, сообщая бусинке нормальное ускорение. Действие этих сил можно заменить действием одной силы — их равнодействующей, равной векторной сумме приложенных сил. Эта сила служит в данном случае центростремительной силой.

Уравнение второго закона Ньютона для бусинки имеет вид:

$$|\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}| = m\omega^2 R.$$

Чтобы найти из него какую-либо величину, нужно вычислить модуль векторной суммы, стоящей в левой части равенства. Сделать это проще всего так: разложить силы по радиусу вращения и вертикали и записать уравнение второго закона динамики по каждому из этих направлений. Так как сила $\vec{P}$ направлена вертикально, то следует разложить только силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ на составляющие $\vec{N}\cos\alpha$, $\vec{N}\sin\alpha$, $\vec{F}_{\text{тр}}\sin\alpha$ и $\vec{F}_{\text{тр}}\cos\alpha$. В вертикальном направлении ускорения у бусинки нет, поэтому

$$N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha - P = 0. \qquad (2)$$

Вдоль радиуса у бусинки есть нормальное ускорение, его ей сообщают составляющие $\vec{N}\cos\alpha$ и $\vec{F}_{\text{тр}}\sin\alpha$, поэтому

$$|\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}| = N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = ma_{\text{н}} = m\omega^2 R. \qquad (3)$$

Поскольку бусинка находится на грани скольжения (расстояние l наибольшее), то

$$F_{\text{тр}} = fN. \qquad (4)$$

Составленные уравнения полностью отражают динамику движения бусинки. Решая их относительно l, получим:

$$l = \frac{g(1 + f\,\mathrm{tg}\,\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha - f)}.$$

Анализируя этот результат, нетрудно заметить, что при $\alpha = 90°$ (стержень AO расположен горизонтально) $\mathrm{tg}\,\alpha = \infty$ и $l = \frac{gf}{\omega^2}$.

При $90° < \alpha < 180°$ $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$ и, следовательно,

$$l = \frac{g(f\,\mathrm{tg}\,\alpha - 1)}{\omega^2\sin\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha + f)}.$$

Пример 13. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает груз массой $m = 10$ *кг* под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Груз падает на расстоянии $l = 2{,}2$ *м* от точки бросания. Какова будет начальная скорость движения конькобежца, если масса его $M = 64$ *кг*? Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.

Р е ш е н и е. Если не учитывать смещение тел за время, в течение которого конькобежец сообщает грузу скорость, можно с большой степенью точности считать, что на систему Земля — человек — груз внешние силы не действуют и ее можно принять за изолированную. Для всех механических явлений, протекающих в такой системе, будет иметь место закон сохранения импульсов.

На схематическом чертеже (рис. 2.12) проставляем векторы импульса каждого тела до и после изменения их движения.

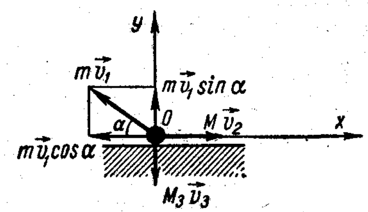


Рис. 2.12.

Перед броском все тела находились в покое: импульс каждого из них был равен нулю, равнялась нулю и их векторная сумма. В конце броска импульс груза равен $m\vec{v}_1$, конькобежца — $M\vec{v}_2$, земного шара — $M_3\vec{v}_3$ ($\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ — скорости тел относительно точки пространства, где находился конькобежец в момент бросания). Эту точку можно считать неподвижной, так как по условию задачи перемещение тел за время бросания ничтожно мало.

Согласно закону сохранения импульса

$$0 = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 + M_3\vec{v}_3.$$

Поскольку векторы импульсов тел направлены под углом друг к другу, для простоты вычислений нужно перейти от векторной записи уравнения к скалярной, представив его в проекциях. Напомним, что разложение векторов по осям удобно делать в тех случаях, когда их больше двух и они направлены под углом друг к другу. Модуль суммы двух векторов легче найти сложением векторов по правилу параллелограмма. Направим оси прямоугольной системы координат OXY с началом в точке бросания так, чтобы пришлось делать минимум разложений, вдоль поверхности Земли и по нормали к ней и разложим векторы $m\vec{v}_1$, $M\vec{v}_2$ и $M_3\vec{v}_3$ на составляющие по этим осям. В данном случае необходимо разложить лишь вектор импульса груза на составляющие $m\vec{v}_1\cos\alpha$ и $m\vec{v}_2\sin\alpha$, так как векторы $M\vec{v}_2$ и $M_3\vec{v}_3$ направлены вдоль выбранных осей.

Учитывая положительное направление координатных осей, записываем уравнение закона сохранения импульса в проекциях: для горизонтали

$$0 = Mv_2 - mv_1\cos\alpha, \qquad (1)$$

для вертикали

$$0 = mv_1\sin\alpha - M_3v_3. \qquad (2)$$

Начальную скорость груза можно определить, зная его дальность полета l по горизонтальному направлению. Эта дальность равна:

$$l = \frac{v_1^2\sin 2\alpha}{g}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) и (3) скорость конькобежца в начале его скольжения получается равной:

$$v_2 = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{gl\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}}, \quad v_2 = 0{,}675 \text{ м/сек}.$$

Уравнение (2) позволяет оценить ту скорость, которую приобрела бы Земля вследствие толчка. Решая его относительно $v_з$, получим:

$$v_з = v_1 \frac{m}{M_з} \sin\alpha.$$

Из выражения для $v_з$ видно, что эта скорость ничтожно мала, так как масса Земли $M_з$ во много раз больше массы груза.

Пример 14. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки сидят два рыбака, массы которых равны m_1 и m_2. На сколько сдвинется лодка, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение. Если не учитывать сопротивление воды и считать, что при движении лодки вода ею не увлекается, систему лодка — рыбаки можно считать изолированной по любому направлению вдоль поверхности воды, так как внешние силы в горизонтальной плоскости на систему не действуют.

Вначале все тела находились в состоянии покоя и, следовательно, сумма всех импульсов тел равнялась нулю. Как только один рыбак пойдет по лодке, она станет двигаться ему навстречу под действием внутренних сил (сил трения). Согласно закону сохранения импульса, какие бы перемещения в нашей системе тел не начались, векторная сумма всех импульсов должна оставаться равной нулю.

Пусть v_1 — скорость первого рыбака относительно лодки, u_1 — скорость, которую приобретает лодка при движении этого рыбака. Тогда, пренебрегая движением воды, получим:

$$0 = m_1(v_1 - u_1) - (M + m_2)u_1.$$

Напомним, что, составляя уравнение закона сохранения импульсов, нужно всегда брать абсолютную скорость тел относительно неподвижного тела отсчета (в нашем случае воды). Нетрудно сообразить, что у рыбака она равна разности между его относительной скоростью и скоростью лодки, которую можно рассматривать как переносную. При этом v_1 должно быть обязательно больше u_1, поскольку обратное предположение противоречило бы закону сохранения импульсов.

Вследствие того что человек и лодка движутся одновременно и время, затрачиваемое на разгон и замедление в начале и в конце движения рыбака, мало, можно считать, что

$$v_1 = \frac{l}{t} \text{ и } u_1 = \frac{x_1}{t},$$

где t и x_1 — соответственно время движения и перемещение лодки за это время. Учитывая все это, уравнение закона сохранения импульсов можно переписать так:

$$m_1(l - x_1) - (M + m_2)x_1 = 0. \qquad (1)$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, составляем такое же уравнение для перемещения второго рыбака. Если через x_2 обозначить смещение лодки при переходе второго рыбака, то

$$m_2(l - x_2) - (M + m_1)x_2 = 0. \qquad (2)$$

Результирующее смещение лодки равно разности:

$$s = x_1 - x_2. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1)—(3) совместно относительно искомой величины s, получим:

$$s = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} l.$$

Задачи к главе 2

2.1. После прекращения тяги локомотива состав остановился на горизонтальном участке пути через 60 *сек*. Определите расстояние, пройденное поездом за это время, если известно, что сила сопротивления движению не зависит от скорости и составляет 2% веса всего состава.

2.2. Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 44,8 *м/сек*, упало на землю, если сила сопротивления воздуха не зависела от скорости и составляла в среднем 1/7 силы тяжести?

2.3. Динамометр вместе с прикрепленным к нему грузом сначала поднимают вертикально вверх, затем опускают. В обоих случаях движение происходило с положительным ускорением, равным 6 *м/сек*^{2}. Чему равна масса груза, если разность показаний динамометра оказалась равной 29,4 *н*? Решите задачу при условии, что движение вверх и вниз происходило замедленно.

2.4. Гиря массой 10 *кг* лежит на пружинных весах, установленных в лифте. Каково будет показание весов при движении лифта вверх, если известно, что он проходит с постоянным ускорением два одинаковых отрезка пути по 5 *м* каждый: первый — за 2 *сек*, второй — за 1 *сек*. Что покажут весы, если лифт будет опускаться вниз с тем же по величине ускорением?

2.5. Груз массой 10 *кг* привязан к концу веревки, намотанной на лебедку. Груз и лебедка находятся на некоторой высоте. Груз начинает падать, причем веревка натянулась в тот момент, когда он пролетел 5 *м*. Вслед за этим начинает с трением раскручиваться лебедка. Какую минимальную длину веревки пришлось вытравить до полной остановки груза, если прочность ее равна 147 *н*?

2.6. Санки массой 5 *кг* в течение 5 *сек* тянули горизонтально с силой 20 *н*. Коэффициент трения между санками и дорогой 0,3. Какое расстояние пройдут санки до полной остановки?

2.7. На высоте 3,5 *м* горизонтально подвешена трубка длиной 50 *см*. На полу стоит маленькая катапульта, выбрасывающая шарик так, что он влетает в трубку горизонтально и, скользя в ней, останавливается у конца трубки. Определите расстояние по гори-

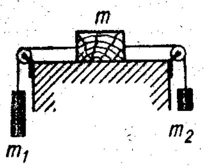


Рис. 2.13.

зонтали от трубки до катапульты. Коэффициент трения принять равным 0,07.

2.8. Спортсмен разбегается с максимальным ускорением и делает прыжок в длину. Как велика оказалась длина прыжка, если высота взлета спортсмена была h? Коэффициент трения принять равным f, время действия силы трения при разбеге считать равным τ, сопротивлением воздуха пренебречь.

2.9. Два груза, массы которых равны 0,98 и 0,2 *кг*, связаны нитью и лежат на гладком столе. К левому грузу приложена сила 5,3 *н*, к правому в противоположном направлении — 2,94 *н*. Чему равно натяжение нити? Изменится ли натяжение, если силы поменять местами?

2.10. N одинаковых грузов массой m каждый связаны нитями и лежат на гладком горизонтальном столе. К крайнему грузу привязан прочный тросик, переброшенный через блок, укрепленный на конце стола. а) Какой груз можно подвесить к свободному концу троса, чтобы максимально натянутая нить не оборвалась, если прочность всех нитей одинакова и равна F? б) С какой силой можно потянуть за тот же конец тросика, чтобы не произошел разрыв нити?

2.11. На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укрепленные на краю стола (рис. 2.13). К свободным концам нитей подвешены грузы массой $m_1 = 0{,}85$ *кг* и $m_2 = 0{,}2$ *кг*, вследствие чего брусок приходит в движение и за 1 *сек* проходит путь 1 *м*. а) Зная, что масса бруска равна $m = 2$ *кг*, определите коэффициент трения скольжения f и натяжение нитей. б) Каковы будут ускорение, скорость и перемещение бруска спустя 4 *сек* после начала движения, если нить между грузом массой m_1 и бруском оборвется в конце первой секунды движения? в) С каким ускорением будут двигаться тела, если груз массой m_2 положить на брусок, пропустив нить через блок? Коэффициент трения между этим грузом и бруском равен 0,015.

2.12. Две гири, находящиеся на блоках, установлены на высоте 3 *м* друг от друга (рис. 2.14). Предоставленные самим себе, грузы через 1 *сек* после начала движения оказались на одной высоте. Какова масса гири, подвешенной к свободному концу веревки, если масса другой гири 0,3 *кг*? Чему равно натяжение нити и давление на ось неподвижного блока? Массой блоков и трением пренебречь.

2.13. В кабине лифта, масса которой 100 *кг*, лежит груз массой 50 *кг*. Определите натяжение троса и силу давления груза на пол кабины в то время, когда лифт поднимается противовесом в 1,96 *кн*. Трение не учитывать, массой троса пренебречь.

2.14. В верхней части штанги установлен неподвижный блок, через который перекинута нить с двумя грузами массой 0,5 и 0,1 *кг*. Во втором грузе есть отверстие, через которое проходит штанга

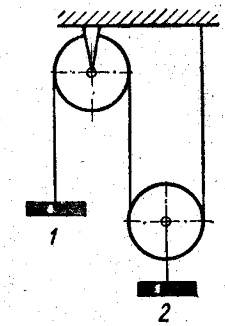


Рис. 2.14.

(рис. 2.15). Сила трения этого груза о штангу постоянна по величине и равна 2,94 *н*. Определите ускорения грузов, силу натяжения нити, давление на ось блока и давление штанги на стол. Массой блока и штанги пренебречь.

2.15. К грузу массой 7 *кг* подвешен на веревке другой груз в 5 *кг*. Какое натяжение будет испытывать верхний конец и середина веревки, если всю систему поднимать вертикально вверх силой в 235 *н*, приложенной к большему грузу? Масса веревки равна 4 *кг*.

2.16. На концах веревки длиной 12 *м* и массой 6 *кг* укреплены два груза, массы которых равны 2 и 12 *кг*. Веревка переброшена через неподвижный блок и начинает скользить по нему без трения. Какое натяжение испытывает середина веревки в тот момент, когда длина ее по одну сторону блока достигнет 8 *м*?

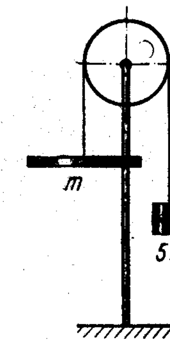


Рис. 2.15.

2.17. Через блок ничтожно малой массы перекинута нить, на концах которой находятся грузы массой m и $2m$. Больший груз поднимают настолько, чтобы меньший коснулся пола. На какую максимальную высоту поднимется этот груз, если систему предоставить самой себе? В начальный момент времени больший груз находился на высоте h. Решите задачу при условии, что на нить при ее скольжении по блоку действует сила трения, равная $0{,}5\,mg$.

2.18. Через неподвижный блок перекинута веревка, за концы которой одновременно хватаются два гимнаста, массы которых 60 *кг* и 70 *кг*. Более легкий из них держится за конец веревки, а второй старается подниматься вверх. При этом оказывается, что более тяжелый гимнаст остается на одной и той же высоте, а другой поднимается вверх. Через сколько времени этот гимнаст достигнет блока, если вначале он находился ниже блока на 4,9 *м*?

2.19. На горизонтальной доске есть выступ высотой H, в который упирается цилиндр радиусом $R > H$, лежащий на доске (рис. 2.16). С каким максимальным ускорением можно двигать доску в горизонтальном направлении, чтобы цилиндр не перекатился через выступ?

2.20. Гладкий клин массой M лежит на пружинных весах. По клину с ускорением a спускается небольшая пластинка массой $M/2$. Каково будет показание весов при движении пластинки?

2.21. На легкой нити укреплены два маленьких шарика одинаковой массы — один на конце, другой в середине нити. Точка подвеса нити движется с ускорением a, направленным под углом α к горизонту. На какие углы отклонятся нити от вертикали?

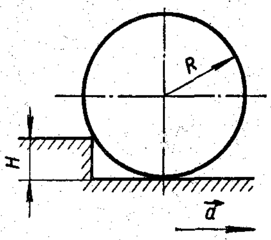


Рис. 2.16.

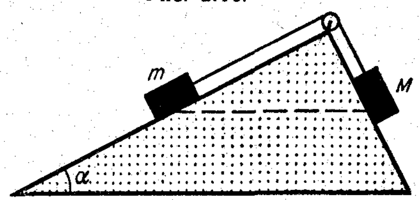


Рис. 2.17.

2.22. Скользящие с горы санки за время t прошли путь L. Скорость санок за это время возросла в три раза. Определите коэффициент трения, если угол наклона горы равен α.

2.23. Два груза массами M и m находятся на гранях гладкого прямоугольного клина с острым углом α (рис. 2.17).

а) При каком соотношении масс грузы будут находиться в равновесии; груз массы M будет опускаться?

б) Решите задачу при условии, что коэффициент трения между грузами и наклонной плоскостью равен f.

в) Каково будет давление на ось блока во время движения грузов при коэффициенте трения $f_1 < \frac{M - m\,\mathrm{tg}\alpha}{m + M\,\mathrm{tg}\alpha}$?

2.24. За какое время тяжелое тело спустится с вершины наклонной плоскости высотой 2 *м* и углом наклона 45°, если предельный угол, при котором тело может находиться на наклонной плоскости в покое, равен 30°?

2.25. Санки можно удержать на ледяной горке с уклоном 0,2 силой, не меньшей 49 *н*. Чтобы тянуть санки в горку равномерно, силу тяги надо увеличить на 9,8 *н*. С каким ускорением будут двигаться санки, если их предоставить самим себе?

2.26. Небольшая шайба массой m лежит на наклонной грани клина, составляющей с горизонтом угол α. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен $f = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Какую силу нужно приложить к шайбе параллельно нижнему ребру клина, чтобы сдвинуть ее с места? Какое ускорение нужно сообщить клину параллельно нижнему ребру клина, чтобы шайба начала скользить по плоскости?

2.27. Тело массой $m = 10$ *кг* тянут по горизонтальной поверхности с силой $F = 39{,}2$ *н*. Если эта сила приложена к телу под углом 60° к горизонту, оно движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если силу приложить под углом $\alpha = 30°$? Под каким углом нужно приложить силу, чтобы тело двигалось с максимальным ускорением? Чему равно это ускорение?

2.28. Тележка с установленным на ней отвесом скатывается с горки, затем движется по горизонтальному участку и вновь въезжает на другую горку. В каком положении будет находиться нить отвеса при движении тележки, если: а) трение ничтожно мало; б) трение таково, что ускорение тележки $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$?

2.29. На плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, находится бак с водой. С какой силой, приложенной параллельно наклонной плоскости, нужно двигать бак, чтобы уровень воды в баке стоял вдоль наклонной плоскости? Коэффициент трения между плоскостью и баком равен f, масса бака с водой M.

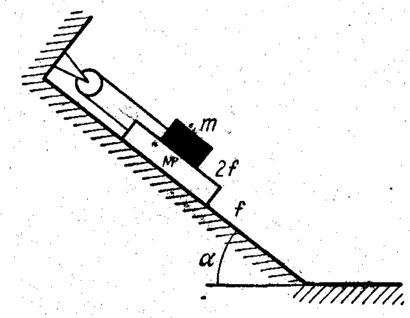


Рис. 2.18.

2.30. По канатной железной дороге с наклоном 30° к горизонту спускается вагонетка массой 500 *кг*. Какую силу нужно приложить к канату, чтобы вдвое снизить скорость вагонетки на пути в 10 *м*, если перед торможением она имела скорость 4 *м/сек*? Коэффициент трения принять равным 0,1.

2.31. На идеально гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α находится доска массой m. Куда и с каким ускорением должен бежать по доске мальчик массой M, чтобы доска оставалась на месте?

2.32. Буксир при буксировке баржи вверх по реке развивает скорость $v_1 = 10$ *км/ч* относительно берега, натягивая буксирный канат с силой $F = 1{,}17 \cdot 10^4$ *н*. Считая силу сопротивления воды пропорциональной скорости, определите, с какой скоростью баржа будет двигаться самосплавом, если скорость течения реки равна $v_т = 2$ *км/ч*, а уклон реки составляет $h = 10$ *м* на $l = 1$ *км*. Масса баржи $m = 5000$ *кг*.

2.33. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона α тянут с ускорением a однородную веревку длиной l и массой m. Коэффициент трения между веревкой и плоскостью равен f. Какое натяжение испытывает веревка в сечении, находящемся на расстоянии x от ее верхнего конца? Как будет изменяться это натяжение в зависимости от угла α?

2.34. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, находится доска массой M и на ней брусок массой $m < M$ (рис. 2.18). Коэффициенты трения между плоскостью и доской, доской и бруском равны соответственно f и $2f$. Определите ускорение тел. При каком соотношении между массами тела будут находиться в равновесии?

2.35. Цепочка массой m надета на гладкий прямой конус, высота которого H, а радиус основания R. Ось конуса направлена вертикально вверх, цепочка расположена в горизонтальной плоскости. Конус поднимается вверх с ускорением $2g$. Определите натяжение цепочки.

2.36. На горизонтальной доске стоят два одинаковых кубика массой M каждый. Между кубиками вставляют идеально гладкий

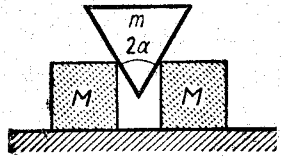


Рис. 2.19.

клин массой m с углом при вершине 2α (рис. 2.19). С каким ускорением будут двигаться кубики, если коэффициент трения между кубиком и доской равен f?

2.37. Легкая нить переброшена через два неподвижных и один подвижный блок (рис. 2.20). На концах нити висят грузы массой m и $3m$, а на оси подвижного блока находится гиря массой $2m$. Определите ускорения грузов.

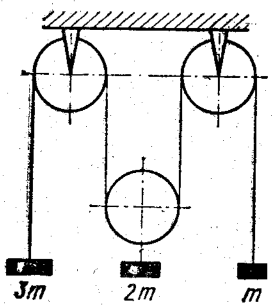


Рис. 2.20.

2.38. Через неподвижный блок переброшена легкая нить, на одном конце которой висит груз массой 3 *кг*, а на другом — подвижный блок (рис. 2.21). Через подвижный блок переброшены на нити гири массой 1 *кг* и 2 *кг*. а) Каково будет натяжение нитей и давление на оси блоков при движении грузов? б) При каком значении массы среднего груза он будет находиться в равновесии? Массой блоков пренебречь.

2.39. На вертикальном стержне массой M и длиной l надета муфта массой M. Верхняя половина стержня шероховатая, нижняя идеально гладкая. При равновесии стержня муфта удерживается трением и находится на грани скольжения наверху стержня. Сколько времени муфта будет соскальзывать со стержня, если сила, действующая на стержень вертикально вверх, увеличится до значения $F = 3Mg$? При решении считать, что сила трения не зависит от скорости.

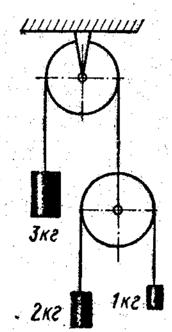


Рис. 2.21.

2.40. Два клина одинаковой массы $M/2$ лежат на идеально гладком столе, как указано на рисунке 2.22. Коэффициент трения между наклонными гранями клиньев равен f. С какой максимальной силой можно давить на верхний клин, чтобы система двигалась как одно целое?

2.41. На доске массой $m = 1$ *кг*, расположенной на горизонтальном столе, лежит брусок массой $M = 2$ *кг*. Коэффициент трения между доской и поверхностью стола равен $f_2 = 0{,}5$, между бруском и доской $f_1 = 0{,}25$. Каково будет ускорение бруска относительно доски и стола, если к доске приложить силу $F = 19{,}6$ *н*? 29,4 *н*?

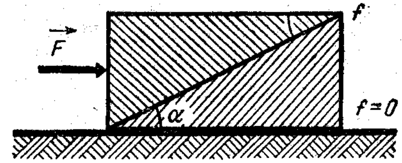


Рис. 2.22.

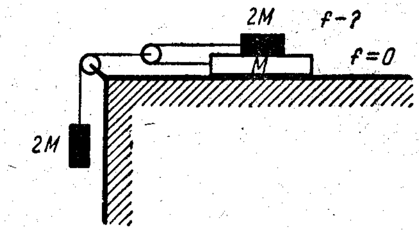


Рис. 2.23.

2.42. На рисунке 2.23 показана система грузов, соединенных через блоки легкими нерастяжимыми нитями. При каком минимальном значении коэффициента трения между грузами массами M и $2M$ они в процессе движения системы не будут проскальзывать относительно друг друга? Каково будет ускорение тел, если грузы, находящиеся на горизонтальной плоскости, поменять местами? Трением о стол пренебречь.

2.43. На гладком столе расположена система грузов (рис. 2.24). Коэффициент трения между грузами массой M и m равен f. К верхнему (нижнему) грузу приложена сила F. Определите ускорение грузов в зависимости от величины силы F.

2.44. На легкой нити, перекинутой через блок, подвешены два груза массами m и M. Предоставленные самим себе, грузы приходят в ускоренное движение. Зная, что на нить действует сила трения F, определите ускорение и изменение импульса центра масс системы спустя время t после начала движения.

2.45. На столе массой $m = 9$ *кг* лежит брусок массой $M = 10$ *кг*. К бруску привязана нить, пропущенная через блоки, укрепленные на краю и сбоку стола, как показано на рисунке 2.25. С каким ускорением будут двигаться брусок и стол, если за нить потянуть силой $F = 78{,}5$ *н*: а) в горизонтальном направлении; б) вертикально вверх? Коэффициент трения между бруском и столом равен $f = 0{,}3$; трением между полом и столом можно пренебречь. Как будет изменяться ускорение стола, если сила тяги будет изменяться с течением времени по закону $F = kt$? Начертите график зависимости $a = \varphi(t)$.

2.46. Посмотрите на рисунок 2.26. а) Какую постоянную горизонтальную силу F нужно приложить к тележке массой M, чтобы бруски массой $2M$ и $3M$ относительно нее не двигались? Трением пренебречь.

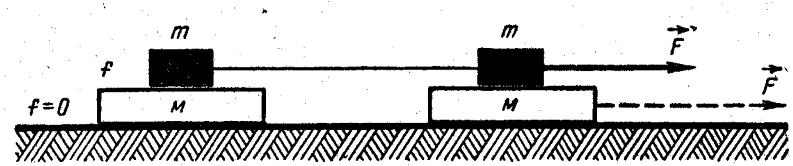


Рис. 2.24.

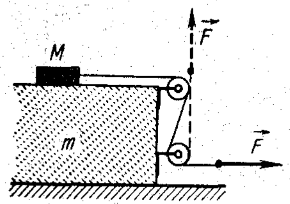


Рис. 2.25.

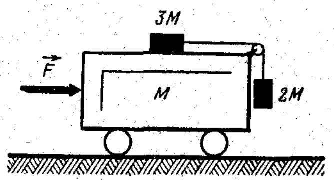


Рис. 2.26.

б) При каком значении силы F груз массой $2M$ начнет подниматься с ускорением, численно равным ускорению свободного падения; перемещаться в вертикальном направлении с ускорением, равным ускорению тележки?

в) Ответьте на первый вопрос, полагая, что коэффициент трения между тележкой и брусками равен f.

2.47. На столе лежит деревянный брусок массой $M = 2$ *кг*, к которому привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на краю стола. К свободному концу нити подвешен груз массой $m = 1$ *кг*, вследствие чего брусок движется с ускорением $a = 0{,}6$ *м/сек*^{2}. Каковы будут ускорения груза и бруска, а также натяжение нити, если вся система будет: а) подниматься с ускорением $a = 2{,}2$ *м/сек*^{2}; б) опускаться с тем же по величине ускорением?

2.48. В лифте, поднимающемся вверх с ускорением a, укреплен неподвижный блок, на котором висит веревка массой m. Ничтожно малой силой веревка выводится из равновесия и начинает скользить по блоку без трения. Определите натяжение в середине веревки, когда длина ее по одну сторону блока будет равна 2/3 длины веревки.

2.49. В ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением a, установлена наклонная плоскость. Тяжелое тело, предоставленное самому себе, спускается с вершины наклонной плоскости за время t. За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если: а) ракета стоит неподвижно на земле; б) опускается вниз с ускорением $a < g$?

2.50. Небольшое тело находится на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60°$. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен $f = 0{,}1$. С каким минимальным (максимальным) ускорением a нужно двигать наклонную плоскость в горизонтальном направлении, чтобы тело не скользило по ней? Каково будет ускорение тела относительно плоскости при $a = 29{,}4$ *м/сек*^{2}?

2.51. Груз массой m находится на наклонной грани клина массой m. С каким ускорением будет двигаться клин по столу, если груз начнет соскальзывать с него? Коэффициент трения между клином и столом, а также между грузом и клином достаточно мал и равен f, грань клина, на которой лежит груз, образует с плоскостью стола угол α. При каком соотношении масс клин будет находиться в покое во время движения груза?

2.52. По идеально гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°, скользит клин массой 3 *кг*. На горизонтальной грани клина лежит гладкий кубик массой 1 *кг*. а) С какой силой кубик давит на клин во время движения? б) При каком значении коэффициента трения между клином и кубиком они будут двигаться без проскальзывания?

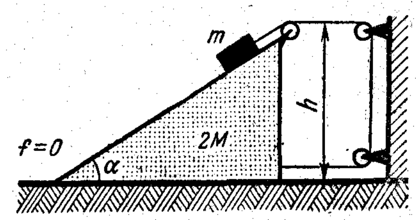


Рис. 2.27.

2.53. Шайба массой m лежит на вершине идеально гладкого клина массой $M = 2m$ (рис. 2.27). Предоставленная самой себе система приходит в ускоренное движение. Определите скорость шайбы в тот момент, когда она достигнет стола. Трением в блоках пренебречь.

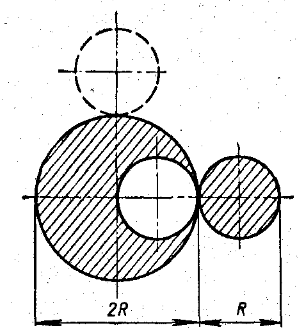


Рис. 2.28.

2.54. Какой путь пройдет тело за первую секунду, если оно будет падать свободно с высоты 1000 *км*? Радиус Земли принять равным 6400 *км*.

2.55. На какой высоте вес тел в n раз меньше, чем на поверхности Земли?

2.56. Радиус Луны приблизительно в 3,8 раза меньше радиуса Земли, а ее масса в 81 раз меньше массы Земли. Во сколько раз нужно изменить начальную скорость бросания, чтобы подбросить тело на Луне на такую же высоту, что и на Земле?

2.57. Радиус Марса составляет 0,53 радиуса Земли, а масса 0,11 земной массы. Какой груз мог бы поднять человек, находящийся на полюсе Марса, если на Земле он в состоянии поднять 0,98 *кн*?

2.58. Каково ускорение силы тяжести на поверхности Солнца, если радиус его в 108 раз больше радиуса Земли, а плотность солнечной материи относится к плотности Земли, как 1 : 4?

2.59. В шаре радиусом R сделана сферическая полость, поверхность которой касается шара (рис. 2.28). Масса сплошного шара равнялась M. С какой силой этот шар будет притягивать шар диаметром R, имеющий плотность, равную плотности большего шара, если шары расположить так, как указано на рисунке?

2.60. В воде находится стальной шарик радиусом r и пузырек воздуха такого же радиуса. Расстояние между их центрами равно L. Какая сила действует на шарик вследствие гравитации? Как изменится ответ, если стальной шарик заменить воздушным пузырьком того же радиуса? Массой воздуха в пузырьках пренебречь.

2.61. С какой силой притягивается к центру Земли тело массой m, находящееся на расстоянии $r < R_з$ от центра? Плотность Земли считать всюду одинаковой, ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0.

2.62. Внутри однородного шара плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии r от центра шара. С какой силой гравитационное поле будет действовать на частицу массой m, помещенную в полость?

2.63. Частица массой 1 *кг* движется по окружности радиусом 1 *м*. Зависимость пути, пройденного частицей, от времени определяется уравнением $s = (2t^2 + t + 1)$ *м*. По какому закону изменяется с течением времени сила, действующая на частицу? Чему будет равна эта сила в тот момент, когда частица первый раз пройдет половину окружности?

2.64. Гоночный автомобиль массой 1800 *кг* идет по шоссе со скоростью 480 *км/ч* вдоль экватора. На сколько отличаются силы давления автомобиля на полотно дороги при его движении с запада на восток и с востока на запад?

2.65. На вертикальной оси укреплена горизонтальная штанга, по которой могут без трения перемещаться два груза массами m_1 и m_2, связанные нитью длиной l. Система вращается с угловой скоростью ω. На каких расстояниях от оси вращения будут находиться грузы в состоянии покоя относительно штанги? Чему будет равно при этом натяжение нити? Что произойдет с грузами, если их немного сместить из найденного положения?

2.66. Наибольшее значение силы трения покоя между вращающимся диском и расположенным на нем грузом в 10 *кг* равно 24,5 *н*. На каком максимальном расстоянии от оси вращения груз будет удерживаться на диске, не скользя по нему, если диск станет вращаться со скоростью 0,5 *об/сек*? Чему равна сила трения груза о диск в тот момент, когда груз находится от оси вращения на половине найденного расстояния? Решите задачу при условии, что диск установлен в ракете, поднимающейся с ускорением $4g$.

2.67. Динамометр вместе с прикрепленным к нему грузом массой 2 *кг* равномерно вращают в горизонтальной плоскости со скоростью 1 *об/сек*. Показания динамометра при этом равны 39,2 *н*. Каковы будут показания динамометра, если скорость вращения увеличить до 1,5 *об/сек*? Упругость пружины динамометра 0,98 *кн/м*.

2.68. В известном аттракционе «мотоцикл на вертикальной стене» мотоцикл движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом 10 *м* по горизонтальному кругу. Какова при этом должна быть минимальная скорость движения мотоцикла, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра равен 0,24? Под каким углом к стене должен быть при этом наклонен мотоциклист? Как будет двигаться мотоцикл, если скорость станет меньше (больше) найденной?

2.69. Гирю массой 98 *г* равномерно вращают в вертикальной плоскости со скоростью 6 *м/сек* на стержне длиной 2 *м*. По какому

закону будет изменяться сила, действующая вдоль стержня, в зависимости от его положения? Чему будет равна эта сила в тот момент, когда гиря находится в верхней точке траектории, нижней точке, проходит горизонтальное положение? Чему равна сила, действующая на груз в этих точках?

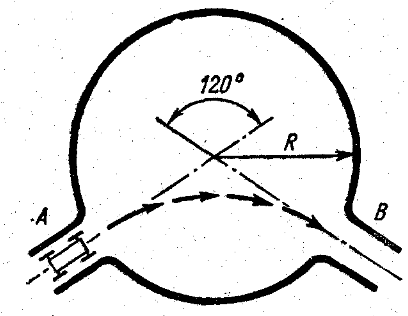


Рис. 2.29.

2.70. Какую максимальную скорость может развивать автомобиль перед подъемом в гору, если допустимая перегрузка на передний мост автомобиля не должна превышать z% от его веса? Радиус кривизны полотна дороги при подъеме равен R.

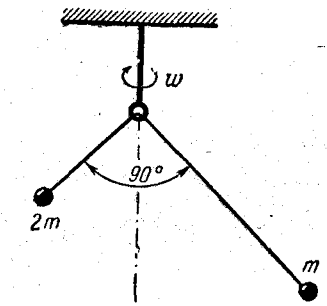


Рис. 2.30.

2.71. Какова должна быть максимальная длина выпуклого моста радиусом 100 *м*, чтобы автомобиль мог проходить по нему со скоростью 90 *км/ч*, не отрываясь от полотна дороги?

2.72. Две улицы выходят на площадь радиусом 98 *м* (рис. 2.29). Автомобиль трогается с места перед площадью и, равномерно набирая скорость, выезжает на улицу B. Коэффициент трения между асфальтом и шинами равен 0,314. За какое минимальное время машина может проехать площадь, двигаясь по дуге окружности?

2.73. На краю платформы радиусом R, вращающейся вокруг вертикальной оси, стоит цилиндр высотой $2h$ и радиусом $r \ll R$. При каком значении угловой скорости платформы цилиндр опрокинется? Чему будет равна при этом сила трения, действующая между цилиндром и платформой, если масса цилиндра m?

2.74. Стальной шарик диаметром 4 *см* катится по двум кольцевым рельсам, расположенным в горизонтальной плоскости. Радиус кольца внешнего рельса 170 *см*. Определите, при какой наибольшей скорости шарик не сойдет с рельс, если расстояние между ними равно 20 *мм*.

2.75. Два грузика массами $2m$ и m соединены нитью длиной l (рис. 2.30). Нить пропущена через кольцо, укрепленное на вертикальном стержне. С какой угловой скоростью нужно вращать стержень, чтобы нить была изогнута под углом 90°?

2.76. Средняя высота спутника над поверхностью Земли равна 1700 *км*. Определите скорость и период обращения спутника вокруг Земли, считая ее радиус равным 6400 *км*, а ускорение свободного падения у поверхности 9,8 *м/сек*^{2}.

2.77. Определите расстояние от центра Земли до искусственного спутника и его скорость относительно ее поверхности, если спутник запущен так, что он движется в плоскости земного экватора и с Земли все время кажется неподвижным. Радиус Земли принять равным 6400 *км*.

2.78. Чему равна продолжительность лунного месяца, если ускорение свободного падения у поверхности Земли равно 9,8 *м/сек*^{2} и расстояние от Земли до Луны $3{,}85 \cdot 10^5$ *км*? Радиус Земли 6370 *км*.

2.79. Расстояние от Земли до Луны равно $3{,}85 \cdot 10^5$ *км*, время обращения Луны вокруг Земли 27,32 суток. Зная, что спутник Сатурна Диона находится от него на расстоянии $3{,}77 \cdot 10^5$ *км* и период обращения этого спутника вокруг Сатурна 2,74 суток, определите массу Сатурна. Радиус Земли $6{,}4 \cdot 10^3$ *км*.

2.80. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, зная, что период ее обращения вокруг собственной оси равен 2 *ч* 27,5 *мин*.

2.81. Чему равен вес гири массой m на экваторе и на широте 60°, если известны масса земного шара M, его радиус R и период вращения T?

2.82. Кольцо массой m и радиусом R вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Кольцо сделано из тонкой проволоки, выдерживающей натяжение F. С какой максимальной скоростью можно вращать кольцо, чтобы оно имело трехкратный запас прочности?

2.83. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения велосипедиста по наклонному треку с углом наклона α по сравнению с допустимой скоростью на горизонтальном треке, если радиус закругления и коэффициент трения скольжения f в обоих случаях имеют одинаковое значение?

2.84. Сфера радиусом R вращается с угловой скоростью ω около вертикальной оси (рис. 2.31). При каком минимальном коэффициенте трения скольжения тело A будет удерживаться на поверхности сферы, не скользя по ней, так, чтобы радиус сферы, проведенный в точку A, составлял с горизонтом угол α? Каков будет ответ, если тело находится в точке B на внешней поверхности сферы?

2.85. Две штанги расположены под углом α к вертикальной оси и лежат в одной плоскости с ней (рис. 2.32). На каждую штангу надета муфта массой m, соединенная с противоположной муфтой пружиной с жесткостью k. Система вращается с постоянной угловой скоростью ω так, что муфты находятся на одном уровне. Определите расстояние между муфтами, если в недеформированном состоянии длина пружины равнялась l. Трение не учитывать.

2.86. На невесомом стержне длиной $2l$ укреплены два груза,

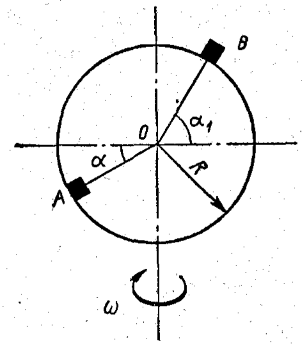


Рис. 2.31.

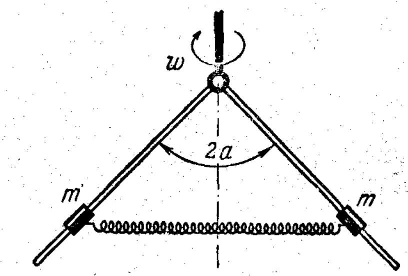


Рис. 2.32.

массой M каждый. Один груз находится в середине стержня, второй — на конце. Стержень представляет конический маятник и вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определите угол между стержнем и осью вращения. Точка подвеса стержня находится на его конце.

2.87. Внутри конуса, установленного в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением a, находится небольшое тело. Конус имеет при вершине угол 2α и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. На каком максимальном расстоянии от вершины конуса будет находиться тело, если коэффициент трения между телом и поверхностью конуса равен f? Ось конуса совпадает с продольной осью ракеты.

2.88. К вертикальной оси центробежной машины прикреплена легкая нить, на конце которой находится тонкая замкнутая цепочка массой m. При вращении оси с угловой скоростью ω нить составляет с вертикалью угол α и цепочка образует кольцо, вращающееся в горизонтальной плоскости. Определите: а) расстояние между центром тяжести цепочки и осью вращения; б) натяжение нити.

2.89. Мячик массой 60 *г* падает на пол с высоты 1 *м* и подскакивает на высоту 0,5 *м*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите среднюю силу удара мяча о пол, если известно, что продолжительность удара составляет 0,1 *сек*.

2.90. На корме шлюпки массой M стоит матрос массой m. Длина шлюпки l. В некоторый момент времени матрос начинает идти на нос шлюпки со скоростью v относительно лодки. Считая силу сопротивления воды постоянной и равной F, определите: а) скорость шлюпки в зависимости от времени; б) расстояние, на которое сместится матрос, перейдя с кормы на нос шлюпки.

2.91. Тело массой 10 *г* летит горизонтально со скоростью 5 *м/сек*. Определите величину и направление импульса силы, если в конце действия импульса тело стало двигаться со скоростью 5 *м/сек* под углом 30° к своему начальному направлению.

2.92. Гладкая вертикальная стенка движется в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$. В стенку попадает шарик массой m, летящий со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к стенке. Считая удар абсолютно упругим, определите изменение импульса шарика после соударения и угол, под которым шарик отлетит от стенки. Проанализируйте ответ в зависимости от u и α.

2.93. Доска массой M движется равномерно по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v. Сверху на доску осторожно кладут кирпич массой $m = M/2$. Какое расстояние пройдет кирпич по доске за время проскальзывания? Коэффициент трения между доской и кирпичом равен f.

2.94. Плот массой M свободно скользит по поверхности воды со скоростью $\vec{v}$. С берега на плот прыгает человек, скорость которого в горизонтальном направлении равна $\vec{u}$. Пренебрегая погружением плота при толчке, определите его скорость вместе с человеком для случаев, когда скорости плота и человека направлены в одну сторону, в противоположные, перпендикулярно друг другу. Масса человека m; трением плота о воду пренебречь.

2.95. Гладкий неупругий шарик из мягкого свинца налетает на такой же шарик, находящийся сначала в покое. Скорость первого шарика в момент удара направлена под углом α к линии центров шаров. Под каким углом разлетятся шары после удара?

2.96. Из орудия выстрелили вертикально вверх. Снаряд вылетел из ствола со скоростью v_0 и в верхней точке разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал со скоростью v_1 недалеко от места выстрела. Определите начальную скорость второго осколка и время, в течение которого он находился в полете после разрыва.

2.97. Снаряд, выпущенный под углом к горизонту, разорвался в верхней точке траектории на два осколка, отношение масс которых равно n. Один осколок после разрыва полетел горизонтально и упал недалеко от места выстрела. Определите, на каком расстоянии x от этого осколка упадет второй осколок, если точка разрыва удалена по горизонтали от места выстрела на расстояние s.

2.98. При неудачном запуске ракеты под некоторым углом к горизонту она разорвалась в верхней точке траектории на высоте 400 *м* на две одинаковые части. Через 2 *сек* после разрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии от места старта упадет второй осколок, если первый упал на расстоянии 1 *км* от стартовой площадки?

2.99. Через легкий блок, вращающийся на оси без трения, перекинута нить, на концах которой привязаны грузы одинаковой массы M. Один из концов нити пропущен через кольцо, укрепленное на высоте h от соответствующего груза. В некоторый момент времени кольцо падает и остается на грузе. Определите время, за которое расстояние между грузами станет равным $2h$. Масса кольца m.

2.100. На тонкой пластинке лежит шар массой M. Снизу вертикально вверх в шар стреляют из пистолета пулей массой m. Пробив пластинку, пуля ударяет в шар, который подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимается пуля, если известно, что в момент удара о шар она имела скорость $\vec{v}$, направленную по оси шара, и пробила шар насквозь? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.101. Две лодки массой M и $2M$ двигались навстречу друг другу со скоростями, равными соответственно $2v$ и v. Когда лодки поравнялись друг с другом, из первой лодки во вторую переложили мешок массой m. Скорость мешка относительно лодок в горизонтальном направлении была равна u и направлена перпендикулярно движению. Каковы станут скорости лодок? Решите задачу при условии, что вначале лодки двигались перпендикулярно друг другу.

2.102. На горизонтальной плоскости сделан выстрел из винтовки. Ствол винтовки был поднят под углом 30° к горизонту и пуля массой 10 *г* попала в вагончик массой 2 *кг*, шедший со скоростью 1 *м/сек* навстречу пуле. Определите скорость вагончика после удара пули, если известно, что она попадает в него на расстоянии 100 *м* от места выстрела и что конец ствола и вагончик находятся на одном уровне. Как изменится ответ, если в момент удара пули вагончик будет удаляться от места выстрела?

2.103. Лыжник массой M, скользящий с горы, у которой длина спуска равна l и наклон к горизонту α, на половине пути стреляет вертикально вверх. Ракета массой $m \ll M$ вылетает из ракетницы со скоростью u. Определите скорость лыжника в конце спуска. Коэффициент трения лыж о снег равен f.

2.104. С высоты H без начальной скорости падает шар массой M. На высоте $H/2$ в шар попадает пуля массой $m \ll M$, имеющая в момент удара скорость u, направленную вниз под углом α к горизонту. Полагая, что пуля застревает в центре шара и продолжительность импульса ничтожно мала, определите, с какой скоростью шар упадет на землю.

2.105. Человек, находящийся в неподвижной лодке, прыгает на берег под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 5$ *м/сек* относительно лодки. Масса лодки $M = 176$ *кг*, масса человека $m = 60$ *кг*. Определите: а) дальность прыжка; б) угол, под которым должен прыгнуть человек, чтобы дальность прыжка была наибольшей.

2.106. Тело массой m лежит на клине массой M с длиной основания l и высотой h. Определите расстояние, на которое переместится клин за то время, когда тело опустится с его вершины до основания. Трением пренебречь. Как будет направлена скорость тела в конце спуска?

2.107. Через неподвижный блок переброшена веревка длиной l, на концах которой на одной высоте висят два гимнаста массой m каждый. Через сколько времени первый гимнаст достигнет блока, если он полезет вверх со скоростью v_0 относительно веревки? С какой скоростью он будет приближаться к блоку? Каково будет ускорение гимнастов и натяжение веревки? Массу веревки не учитывать, трением на блоке пренебречь.

2.108. К свободному аэростату, масса которого M, привязана веревочная лестница длиной l, на конце которой находится человек массой m. Аэростат не движется. Человек начинает подниматься по лестнице вверх. На какой высоте будет находиться человек над землей в тот момент, когда он доберется до аэростата, если в начальный момент он находился от нее на высоте h?

2.109. Плот с человеком плывет в спокойной воде со скоростью v. Человек находится в середине плота, масса плота M, масса человека m. Человек проходит по плоту расстояние l со скоростью u относительно плота и останавливается. Какое расстояние пройдет плот за это время, если: а) человек шел в направлении движения плота; в сторону, противоположную движению плота; б) перпендикулярно движению плота? В каком направлении и с какой скоростью должен идти человек, чтобы плот не двигался?

Глава 3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Основные понятия, законы и формулы

1. Работу постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ ее точки приложения измеряют произведением

$$A = Fs\cos\alpha, \tag{3.1}$$

где α — угол между направлением силы и перемещения (скорости). Если на тело действуют несколько сил, каждая из которых совершает над ним работу, то вся произведенная работа равна алгебраической сумме работ отдельных сил:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Если в процессе совершения работы сила изменяется по величине или направлению, ее работу можно вычислить по формуле (3.1) при условии, что известно среднее значение силы на данном перемещении. Вычислить $F_{ср}$ методами элементарной математики можно лишь для простейшего случая, когда величина силы F изменяется пропорционально перемещению s, т. е. когда

$$F = ks, \tag{3.2}$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

По закону (3.2) изменяется, в частности, сила, действующая со стороны упругой пружины на растягивающие или сжимающие ее тела. Для пружины s — величина ее удлинения (сжатия); k — коэффициент упругости (жесткости) пружины, показывающий, какую силу нужно приложить к пружине, чтобы ее растянуть (сжать) на единицу длины. Среднее значение переменной силы (3.2) на каком-либо перемещении равно полусумме ее значений $F_н$ в начале и $F_к$ в конце этого перемещения:

$$F_{ср} = \frac{F_н + F_к}{2}.$$

Если $F_н = 0$ и $F_к \equiv F$, работа силы (3.2) на перемещении s равна:

$$A = \frac{Fs}{2} = \frac{ks^2}{2} = \frac{F^2}{2k}. \tag{3.3}$$

Такую работу совершает и сила упругости при растяжении или сжатии пружины из свободного состояния.

Работа по подъему тела массой m в поле тяготения равна:

$$A = mgh_{ц.т}, \tag{3.3'}$$

где $h_{ц.т}$ — перемещение центра тяжести тела по вертикали.

2. Мощность, развиваемая постоянной силой $\vec{F}$, составляющей угол α с направлением перемещения, может быть рассчитана по формулам:

$$N = \frac{A}{t} \tag{3.4}$$

и

$$N = Fv\cos\alpha = F_т v, \tag{3.4'}$$

где $F_т = F\cos\alpha$ — проекция силы на направление движения; v — скорость тела.

Используя формулу (3.4) для практических расчетов, необходимо различать два возможных случая. Если по условию задачи требуется определить среднее значение мощности, то под v следует понимать среднюю скорость движения. Если же необходимо найти мощность в некоторый момент времени — мгновенную мощность, за v нужно принять мгновенное значение скорости в этот момент. К мгновенной мощности относятся максимальная и минимальная мощности.

Понятие мощности вводится для оценки величины работы, которую совершает или может совершить та или иная машина (механизм) в единицу времени, поэтому в формуле (3.4) под $F_т$ всегда подразумевается одна строго определенная сила — сила тяги, направленная в сторону перемещения рассматриваемого тела.

3. Физическое состояние всех тел и полей определяется различными видами движения материи, каждый из которых характери-

вуется рядом величин. Существует скалярная физическая величина, которая при любых изменениях, происходящих в изолированной системе тел (полей), остается неизменной и поэтому может быть принята за единую количественную меру движения материи. Единую количественную меру движения материи, не зависящую от форм этого движения, называют энергией.

В различных процессах и явлениях, обусловленных проявлением того или иного вида движения материи, в каждом конкретном случае энергию можно выразить через комбинации физических величин, характеризующих частные свойства материи и ее движения.

Поскольку движение материи изменяется лишь при взаимодействии тел и в процессе такого взаимодействия всегда совершается работа, то за величину энергии принимают работу, которую может совершить тело или система тел, находясь в данном состоянии. Учитывая это, энергию, хотя она и является одной из фундаментальных физических характеристик, для большей наглядности определяют как величину, показывающую, какую работу может совершить тело (поле) или их система.

Часть энергии тела, соответствующую механическим формам движения материи, называют механической энергией. Ее принято делить на кинетическую и потенциальную. В случае движения материальной точки или поступательного движения твердого тела кинетическая энергия равна:

$$W_к = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3.5)$$

Потенциальная энергия представляет собой часть механической энергии, обусловленную взаимным расположением тел или частей тела и их взаимодействием друг с другом. Потенциальную энергию измеряют работой, которая может быть совершена вследствие изменения конфигурации данной системы.

Потенциальную энергию сжатой (растянутой) пружины измеряют работой, которую может совершить сила упругости при возвращении пружины в исходное состояние. Согласно (3.3) величина ее равна

$$W_п = \frac{ks^2}{2}. \qquad (3.6)$$

Потенциальную энергию тел, расположенных около Земли, измеряют работой, совершаемой силой земного притяжения при удалении тел от Земли на бесконечно большое расстояние.

Эта работа, а следовательно, и потенциальная энергия тела массой m, находящегося на расстоянии $r \geqslant R_з$ от центра Земли, равна:

$$W_п = -\gamma\frac{mM}{r} = -mgr, \qquad (3.7)$$

где γ — гравитационная постоянная; M — масса Земли.

На поверхности Земли ($r = R_з$) тело обладает потенциальной энергией

$$W_п = -\gamma\frac{mM}{R_З} = -mg_0R_З. \qquad (3.7')$$

Для большинства практических вопросов, связанных с движением тел у поверхности Земли, наибольший интерес представляет не само значение потенциальной энергии, а ее изменение, равное

$$\Delta W_п = mgh. \qquad (3.8)$$

Эта формула справедлива лишь для перемещения h тел по вертикали на расстояние во много раз меньшее, чем среднее расстояние от тела до центра Земли, так как лишь при этих условиях можно пренебречь изменением силы тяжести с высотой и считать ее постоянной. Для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, выражение, стоящее в правой части формулы (3.8), рассматривают обычно не как изменение потенциальной энергии, а как ее значение на высоте h, отсчитанной от поверхности Земли. (Потенциальную энергию на уровне поверхности Земли принимают равной нулю.)

Полная механическая энергия системы тел равна арифметической сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел, входящих в данную систему:

$$W_{полн} = \sum W_к + \sum W_п.$$

Кинетические энергии тел суммируются арифметически, поскольку они не зависят от направления движения, потенциальные энергии тяготения могут иметь положительное и отрицательное значение в зависимости от выбора уровня отсчета высоты.

В изолированной системе тел при любых переходах системы из одного состояния в другое полная энергия системы (включая все известные виды энергии) остается неизменной (закон сохранения энергии). Если в такой системе механическая энергия не преобразуется в другие виды энергии (и наоборот), полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$W_{полн} = \text{const}. \qquad (3.9)$$

Из закона сохранения механической энергии как следствие вытекает:

а) Если в какой-либо момент времени полная механическая энергия изолированной системы равна W_1, а в любой последующий момент времени W_2, то

$$W_2 - W_1 = 0. \qquad (3.9')$$

б) В применении к наиболее часто встречающемуся случаю, когда в задаче рассматривают изолированную систему, состоящую из двух тел — Земля плюс тяжелый предмет у ее поверхности, — уравнение (3.9′) можно представить в виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2} = 0, \qquad (3.9'')$$

где v_1 и v_2 — скорости тела относительно поверхности Земли в первом и втором состоянии; h — перемещение тела по вертикали. Изменение энергии самой Земли при этом не учитывают.

в) Если на тело (систему тел) в процессе его перехода из одного состояния в другое, помимо силы земного притяжения, действуют другие внешние силы, то изменение полной механической энергии равно работе этих сил:

$$W_2 - W_1 = A. \tag{3.10}$$

В том случае, когда в левой части этого уравнения изменение потенциальной энергии тяготения учтено, работа силы тяжести P и ее составляющих в A не включается.

Решение задач. Примеры

1. Правила решения задач о работе постоянной силы сводятся к следующим:

а) Прежде всего надо установить, работу какой силы требуется определить, и записать исходную формулу: $A = Fs\cos\alpha$, где F может быть и равнодействующей, и отдельной силой.

б) Сделать чертеж, указав на нем силы, приложенные к телу.

в) Установить, чему равен угол α между направлением вектора силы, работу которой нужно вычислить, и направлением перемещения (скорости).

г) Если сила условием задачи не задана, ее следует найти из уравнения второго закона динамики.

д) Найти величину перемещения (если оно неизвестно) по формулам кинематики.

е) Подставить найденные выражения для F и s в формулу работы и провести вычисления.

2. Задачи на работу переменной силы решают в основном по формулам (3.3). Для решения таких задач необходимо:

а) Установить, работу какой силы нужно определить, и записать одну из трех расчетных формул в зависимости от того, что в данной задаче считается известным и неизвестным.

б) Сделать чертеж, на котором указать все силы, приложенные к телу.

в) Определить, чему равна сила, совершающая работу над телом, и подставить ее выражение в исходную формулу (обычно такими силами являются сила упругости пружины, переменная сила трения, переменная выталкивающая сила жидкости).

г) Если конечное значение силы не задано, из дополнительных условий нужно определить коэффициент пропорциональности k и, подставив найденное выражение k в расчетную формулу (3.3), провести вычисления.

3. Решение задач механики, связанных с расчетом мощности, развиваемой постоянной силой, основано на применении формул (3.4) и (3.4′).

а) Приступая к решению задач такого типа, необходимо сначала установить, какую мощность требуется определить — среднюю или мгновенную. Далее следует записать исходную формулу, подразумевая под v в первом случае среднюю скорость на заданном участке пути, во втором — мгновенную скорость в конце рассматриваемого перемещения.

б) Сделать чертеж, указав на нем все силы, приложенные к телу, и заданные кинематические характеристики движения.

в) Составить основное уравнение динамики материальной точки и найти из него силу тяги $F_т$.

г) Если значения $v_{ср}$ или v не заданы, то определить их из формул кинематики.

д) Подставить в формулу мощности вместо v и $F_т$ их выражения и провести окончательный расчет.

4. Уравнение закона сохранения и превращения энергии (3.10), представляющее одну из самых общих формул динамики, позволяет при известном навыке решить почти все задачи элементарной механики, включая многие из тех, что были разобраны в главе 2. Во многих задачах это уравнение является одним из основных, которое вместе с уравнением второго закона динамики и уравнением закона сохранения импульсов составляет полную систему уравнений, описывающих данное явление. Особенно удобно (а во втором случае просто необходимо) использовать закон сохранения энергии при решении задач, где: а) дается два механических состояния или положения тела в пространстве при равнопеременном движении; б) рассматриваются два состояния или положения тела (или системы тел) в процессе неравномерно переменного движения.

Общую схему решения задач, требующих составления уравнения закона сохранения энергии, можно представить так:

а) Сделать схематический чертеж и записать формулу закона сохранения и превращения энергии:

$$W_2 - W_1 = A.$$

б) Установить первое и второе положение рассматриваемого тела (системы тел). Ими обычно служат начальное и конечное положение.

в) Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Его можно взять произвольно, но удобнее выбирать или по самому нижнему положению, которое занимает тело при своем движении, или отсчитывать от уровня, на который опускается тело, переходя из первого положения во второе.

г) Расставить все внешние силы, действующие на тело в произвольной точке траектории, и отметить кинематические величины v и h, характеризующие механическую энергию тела (системы) в первом и втором положениях.

д) С помощью формул (3.1), (3.3), (3.5) и (3.6) составить выражения для работы внешних сил и полной механической энергии тела (системы) в положениях I и II. Подставить эти выражения

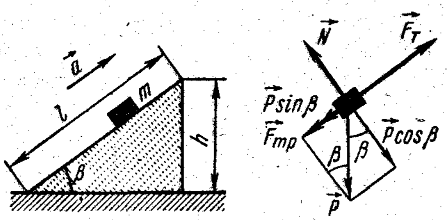


Рис. 3.1.

в исходное уравнение закона сохранения энергии и найти из него ту величину, которая считается неизвестной. Если неизвестных оказывается больше одного, то к составленному уравнению закона сохранения энергии нужно добавить основное уравнение динамики материальной точки, уравнение закона сохранения импульса или формулы кинематики. В результате получится система уравнений, совместное решение которых позволяет определить искомую величину.

Пример 1. Вагонетку массой $m = 3$ *т* поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту равен $\beta = 30°$. Какую работу совершила сила тяги на пути $s = 50$ *м*, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением $a = 0{,}2$ *м/сек*²? Коэффициент трения принять равным $f = 0{,}1$; $g = 10$ *м/сек*².

Решение. а) По условию задачи необходимо вычислить работу постоянной силы тяги $F_т$. Эта работа определяется формулой:

$$A = F_т \cdot s \cos\alpha. \qquad (1)$$

б) Делаем чертеж (рис. 3.1) и расставляем силы, действующие на вагонетку: это сила тяги $\vec{F}_т$, сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и реакция опоры $\vec{N}$.

По условию задачи сила тяги направлена вдоль перемещения, поэтому угол α между $\vec{F}_т$ и перемещением равен нулю и, следовательно, $\cos\alpha = 1$. (Этот угол не следует путать с углом наклона β плоскости.)

Для определения силы тяги разложим силу $\vec{P}$, как обычно, на составляющие $\vec{P}\sin\beta$ и $\vec{P}\cos\beta$ и запишем уравнение второго закона динамики в проекциях на ось, совпадающую с ускорением,

$$F_т - P\sin\beta - F_{тр} = ma.$$

Откуда с учетом того, что $F_{тр} = fN = fP\cos\beta$ и $P = mg$, получим:

$$F_т = m(a + g\sin\beta + fg\cos\beta).$$

Подставляя значение силы тяги в уравнение (1), найдем:

$$A = m(a + g\sin\beta + fg\cos\beta)\,s, \quad A \approx 900 \text{ дж}.$$

Пример 2. Две пружины одинаковой длины, имеющие коэффициенты жесткости $k_1 = 9{,}8$ *н/см* и $k_2 = 19{,}6$ *н/см*, соединены между собой концами (параллельно). Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на $s_0 = 1$ *см*? Чему будет равна эта работа, если пружины будут соединены между собой только одним концом (последовательно)?

Решение. Чтобы растянуть или сжать пружину на заданную величину, к ней нужно приложить силу, величина которой зависит от упругих свойств пружины. Эти свойства характеризуются ее коэффициентом жесткости k. При небольших удлинениях или сжатиях упругих пружин можно с большой степенью точности считать, что удлинение s пружины прямо пропорционально приложенной к ней силе, т. е. $F = ks$. Работа такой силы, как мы знаем, может быть рассчитана по второй формуле (3.3), если известны удлинение и жесткость пружины. При параллельном или последовательном соединении пружин с известными коэффициентами жесткости k_1 и k_2 их общую жесткость k_0 можно вычислить следующим образом:

а) При растяжении силой F_0 двух пружин, соединенных параллельно, общее удлинение пружин

$$s_0 = s_1 = s_2, \qquad (1)$$

где s_1 и s_2 — удлинения первой и второй пружины. Если растянутые пружины находятся в равновесии и массы их ничтожно малы, то сила, деформирующая пружины, равна сумме сил F_1 и F_2 натяжений пружин, т. е.

$$F_0 = F_1 + F_2. \qquad (2)$$

Согласно формуле (3.2) для системы пружин и каждой пружины в отдельности можно записать:

$$F_0 = k_0 s_0; \quad F_1 = k_1 s_1; \quad F_2 = k_2 s_2. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1)—(3) силы и удлинения, получим:

$$k_0 = k_1 + k_2. \qquad (4)$$

В общем случае при параллельном соединении n пружин их общий коэффициент жесткости равен:

$$k_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Зная коэффициент жесткости двух пружин, соединенных параллельно, и удлинение, легко найти работу, совершенную силой F_0. Согласно формуле (3.3) она равна:

$$A_0 = \frac{k_0 s_0^2}{2} = \frac{(k_1 + k_2)\, s_0^2}{2};$$

$$A_0 = 0{,}147 \text{ дж}.$$

б) При растяжении двух пружин, соединенных последовательно, натяжение каждой пружины равно внешней приложенной силе:

$$F_0 = F_1 = F_2, \qquad (1)$$

а общее удлинение — сумме удлинений каждой пружины:

$$s_0 = s_1 + s_2. \qquad (2)$$

Кроме того, для системы пружин и каждой пружины в отдельности будут иметь место соотношения (3).

Исключая из уравнений (1), (2) и (3) силы и удлинения, получим:

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \qquad (5)$$

В общем случае при последовательном соединении n пружин их общий коэффициент жесткости можно найти из формулы

$$\frac{1}{k_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}.$$

Работа по растяжению двух параллельно соединенных пружин согласно формуле (3.3) будет равна:

$$A_2 = \frac{k_0 s_0^2}{2} = \frac{k_1 k_2 s_0^2}{2(k_1 + k_2)}; \quad A_2 = 0{,}037 \text{ дж}.$$

Пример 3. Самолет массой $m = 3$ *т* для взлета должен иметь скорость $v = 360$ *км/ч* и длину разбега $s = 600$ *м*. Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлета самолета? Силу сопротивления движению считать пропорциональной силе нормального давления, средний коэффициент сопротивления принять равным $f = 0{,}2$. Движение при разгоне самолета происходит равноускоренно.

Решение. В задаче требуется определить мгновенную мощность мотора в момент взлета самолета. Она и будет являться той минимальной мощностью, при которой самолет может еще набрать скорость, необходимую для отрыва от земли:

$$N_{\text{мин}} = F_{\text{т}} v. \qquad (1)$$

При разгоне самолета на его винт действует со стороны отбрасываемого воздуха сила тяги $\vec{F}_{\text{т}}$, кроме того, к самолету приложены сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$ и сила сопротивления, равная по условию задачи $f\vec{P}$. Согласно второму закону Ньютона

$$F_{\text{т}} - fP = ma \text{ или } F_{\text{т}} - fmg = ma. \qquad (2)$$

Поскольку известны длина s разбега самолета и скорость при отрыве v, ускорение самолета можно найти из формулы:

$$a = \frac{v^2}{2s}. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1)—(3) неизвестные величины $F_{\text{т}}$ и a, получим для минимальной мощности:

$$N_{\text{мин}} = m\left(\frac{v^2}{2s} + fg\right)v; \quad N_{\text{мин}} = 3000 \text{ квт}.$$

Пример 4. Поезд, масса которого равна $m = 784$ *т*, начинает двигаться под уклон и за $t = 50$ *сек* развивает скорость $v = 18$ *км/ч*. Коэффициент сопротивления равен $f = 0{,}005$, уклон $\varphi = 0{,}005$. Определите среднюю мощность локомотива, считая силу сопротивления пропорциональной силе нормального давления.

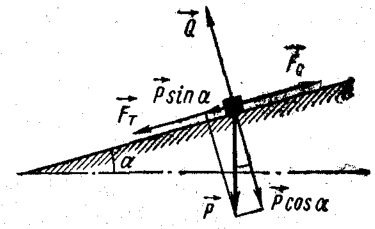


Рис. 3.2.

Указание. Уклоном называют отношение высоты наклона плоскости к ее длине; уклон $\varphi = \frac{h}{l} = \sin\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

Решение. Среднюю мощность, развиваемую силой тяги локомотива, можно определить по формуле:

$$N_{\text{ср}} = F_{\text{т}}\, v_{\text{ср}}. \qquad (1)$$

Силу тяги находим из уравнения второго закона Ньютона. Для его составления расставляем силы, приложенные к поезду (рис. 3.2): силу тяги $\vec{F}_{\text{т}}$, действующую со стороны рельс (силой тяги здесь является сила сцепления колес с рельсами), силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, нормальную реакцию опоры $\vec{Q}$ и силу сопротивления движению $\vec{F}_{\text{c}}$.

Разложив силу тяжести на составляющие $\vec{P}\sin\alpha$ и $\vec{P}\cos\alpha$, составляем основное уравнение динамики в проекциях на ось, совпадающую с направлением движения:

$$F_{\text{т}} + P\sin\alpha - F_{\text{c}} = ma;$$

но так как по условию

$$F_{\text{c}} = fQ = fmg\cos\alpha,$$

получим:

$$F_{\text{т}} + mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha = ma. \qquad (2)$$

Формулы кинематики дают:

$$a = \frac{v}{t}; \quad v_{\text{ср}} = \frac{v}{2}. \qquad (3)$$

Решая систему уравнений (1)—(3) относительно $N_{\text{ср}}$, получаем:

$$N_{\text{ср}} = m\left(\frac{v}{t} + fg\cos\alpha - g\sin\alpha\right)\frac{v}{2} \approx m\left(\frac{v}{t} + fg - g\varphi\right)\frac{v}{2};$$

$$N_{\text{ср}} = 200 \text{ квт}.$$

Пример 5. Камень брошен под некоторым углом к горизонту со скоростью $\vec{v}_1$ (рис. 3.3). Пренебрегая сопротивлением воздуха,

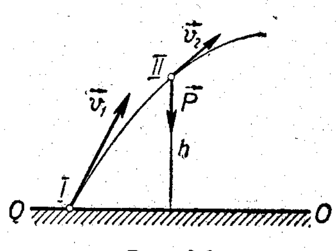


Рис. 3.3.

определите, на какой высоте от горизонта скорость камня уменьшится вдвое.

Р е ш е н и е. Многие задачи динамики в курсе элементарной физики можно решить двумя способами: или с помощью уравнения второго закона Ньютона, или с помощью закона сохранения энергии. Данную задачу проще решить, применив уравнение закона сохранения энергии.

а) Записываем основное уравнение энергетического баланса:

$$A = W_2 - W_1.$$

Отмечаем первое (I) и второе (II) положение камня: в начальной точке траектории и на искомой высоте. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принимаем нижнее положение, которое занимает камень по условию задачи — уровень бросания OO.

б) Расставляем силы, приложенные к камню. На него действует только сила тяжести $\vec{P}$. Указываем вектор скорости $\vec{v}_2$ и высоту h камня над уровнем OO в положении II.

в) Так как внешние силы на тело не действуют (в системе тело — Земля сила P считается внутренней и ее работа учитывается изменением потенциальной энергии), то их работа

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия камня в первом положении равна:

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

во втором:

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh.$$

Подставляем выражения для A, W_1 и W_2 в исходную формулу:

$$0 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда после упрощений получим:

$$0 = v_2^2 + 2gh - v_1^2.$$

Так как по условию задачи $v_2 = \frac{v_1}{2}$, то

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{3v_1^2}{8g}.$$

Несмотря на то что при решении задачи мы не использовали угол бросания α и в ответ он не вошел, полученный результат

неявно зависит от α. Можно легко показать, что условие $v_2 = \frac{v_1}{2}$ имеет место лишь в том случае, если $\alpha \geqslant 60°$. Рекомендуем доказать это самим читателям.

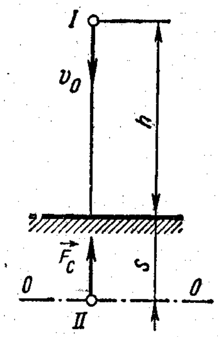


Рис. 3.4.

Пример 6. Груз массой $m = 1$ *кг* падает с высоты $h = 240$ *м* и углубляется в песок на $s = 0{,}2$ *м* (рис. 3.4). Определите среднюю силу сопротивления грунта, если начальная скорость падения груза $v_0 = 14$ *м/сек*. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж и записываем исходное уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Выбираем уровень OO отсчета потенциальной энергии по самому нижнему положению груза (но не от поверхности земли!).

На груз при свободном падении внешние силы не действуют (в системе тело — Земля сила тяжести $\vec{P}$ — внутренняя сила). При перемещении груза в земле внешней силой, действующей на него, является сила сопротивления грунта $\vec{F}_c$. Работа этой силы равна

$$A = -F_c s$$

(знак «минус» указывает, что сила направлена в сторону, противоположную движению, и образует с вектором скорости угол 180°, $\cos 180° = -1$). В положении I груз обладает механической энергией:

$$W_1 = \frac{mv_0^2}{2} + mg(h + s).$$

В положении II кинетическая, а также потенциальная энергия относительно выбранного уровня равны нулю, т. е. $W_2 = 0$. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходное уравнение, получим:

$$-F_c s = -\frac{mv_0^2}{2} - mg(h + s).$$

Откуда после подстановки числовых значений

$$F_c = \frac{m}{s}\left[\frac{v_0^2}{2} + g(h + s)\right];$$

$$F_c \approx 12\ кн.$$

Пример 7. Тяжелый шарик соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R. С какой высоты шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке траектории?

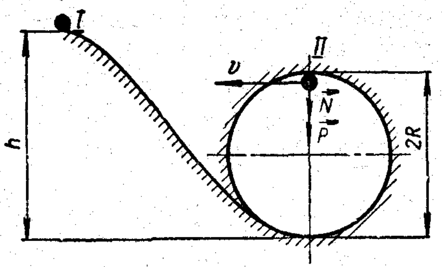


Рис. 3.5.

Решение. Нам дана задача о неравномерно переменном движении материальной точки по окружности. Причем в процессе этого движения изменяется положение точки по высоте. Эта и подобные задачи относятся ко второй группе задач о криволинейном движении, и, как указывалось выше, главным в их решении является составление уравнения закона сохранения энергии и уравнения второго закона Ньютона по нормали к траектории движения.

Делаем чертеж (рис. 3.5) и записываем формулу закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Первым считаем положение шарика в начале движения, вторым — положение в верхней точке траектории. Уровень отсчета высоты выберем на поверхности стола.

В процессе движения на шарик действуют две силы: сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Работа силы тяжести учитывается в изменении потенциальной энергии, сила $\vec{N}$ работу не совершает, так как она всюду перпендикулярна перемещению (в формуле работы $\cos\alpha = 0$), поэтому

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия шарика в первом и втором случаях равна соответственно:

$$W_1 = mgh$$

и

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mg\,2R.$$

Подставляя выражения для работы и энергии в исходное уравнение, получим:

$$0 = \frac{mv^2}{2} + 2mgR - mgh,$$

откуда

$$v^2 + 4gR - 2gh = 0. \qquad (1)$$

В верхней точке петли на шарик в общем случае действуют вниз две силы $\vec{P}$ и $\vec{N}$. Следовательно, по второму закону Ньютона

$$N + P = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

При пуске с достаточно большой высоты шарик приобретает такую скорость, что в каждой точке петли давит на желоб с некоторой силой $\vec{N}$, разной в разных точках. По третьему закону Ньютона желоб действует на шарик с той же по величине силой в противоположную сторону и отжимает его на дугу окружности радиусом R.

По мере уменьшения начальной высоты спуска скорость шарика в верхней точке петли уменьшается и при некотором значении h становится такой, что он пролетает верхнюю точку петли, лишь касаясь желоба. Для этого предельного случая $N = 0$, и уравнение второго закона примет вид:

$$mg = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$gR = v^2. \qquad (3)$$

Такой же результат получается из анализа уравнения (2). При заданном радиусе R величина N уменьшается с уменьшением скорости v, пока не достигнет нуля. Это соответствует минимальной высоте, когда шарик еще описывает «мертвую петлю».

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно h, получим:

$$h = 2{,}5R.$$

Пример 8. Люстра массой 10 *кг* висит на цепи, прочность которой равна $F = 196$ *н*. На какой максимальный угол α можно отклонить люстру от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях люстры цепь не оборвалась?

Решение. 1. Делаем чертеж (рис. 3.6), отмечаем первое и второе положения люстры и записываем уравнение закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1,$$

приняв (пока без доказательства), что наибольшее натяжение нить испытывает при прохождении люстрой положения равновесия. За начало отсчета потенциальной энергии примем самое нижнее положение люстры — уровень 00.

Отмечаем высоту h и скорость $\vec{v}$ люстры в нижнем положении.

На люстру при ее движении действуют сила натяжения цепи $\vec{T}$ и сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$. Во время движения сила натяжения всюду направлена под углом 90° к вектору скорости, поэтому при перемещении люстры из положения I в положение II работа этой силы равна нулю: $A = 0$.

Значения полной энергии люстры в указанных положениях равны соответственно:

$$W_1 = mgh \text{ и } W_2 = \frac{mv^2}{2},$$

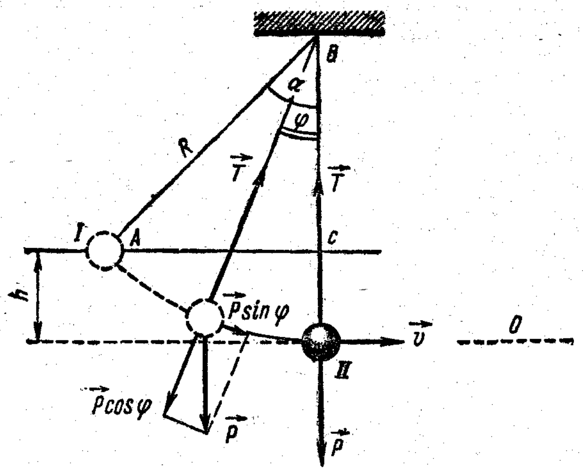


Рис. 3.6.

так как в положении I скорость люстры, а в положении II высота люстры над уровнем 00 равны нулю. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходную формулу, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0,$$

откуда

$$v^2 = 2gh. \tag{1}$$

2. Чтобы найти положение, при котором цепь испытывает наибольшее натяжение, нужно в произвольной точке траектории составить уравнение второго закона Ньютона для люстры по радиусу вращения и исследовать зависимость T от φ.

Предположим, что в некоторый момент времени цепь составляет с вертикалью угол φ. На люстру здесь будет действовать сила тяжести $\vec{P}$ и сила натяжения цепи $\vec{T}$. Под действием этих сил люстра движется по дуге окружности, обладая нормальным и касательным ускорениями.

Разложим силу тяжести $\vec{P}$ на составляющие по направлению радиуса и касательной.

Составляющая $\vec{P}\sin\varphi$, действуя вдоль касательной, изменяет величину скорости, сообщая люстре касательное ускорение. Согласно второму закону Ньютона

$$mg\sin\varphi = ma_к, \text{ откуда } a_к = g\sin\varphi.$$

Силы $\vec{T}$ и $\vec{P}\cos\varphi$ направлены перпендикулярно вектору скорости, поэтому они изменяют только его направление, сообщая люстре нормальное ускорение $\vec{a}_н$. Нетрудно заметить, что $T > P\cos\varphi$ (от своего начального направления движения люстра отклоняется

вверх), поэтому уравнение второго закона Ньютона в проекциях по направлению нормали будет иметь вид:

$$T - mg\cos\varphi = \frac{mv^2}{R},$$

где R — длина цепи; v — скорость люстры в рассматриваемой точке траектории.

Центростремительной силой здесь являлась бы сила, равная по величине разности $T - P\cos\varphi$ и направленная к точке B. Из последнего уравнения видно, что сила T будет иметь наибольшее значение, когда скорость люстры максимальна, а угол φ минимален, т. е. в тот момент, когда люстра проходит положение равновесия. Для этого положения $v = v_{макс}$, $\varphi = 0$ и, стало быть,

$$T - mg = \frac{mv^2_{макс}}{R}.$$

С увеличением скорости $v_{макс}$ прохождения люстрой нижнего положения сила натяжения T возрастает, поскольку P и R не изменяются. Согласно (1) $v_{макс}$ в свою очередь тем больше, чем больше высота подъема h, т. е. чем больше начальный угол отклонения люстры α. С увеличением α сила T, а значит, и равная ей (по величине и противоположная по направлению) сила, стремящаяся разорвать цепь, возрастает, пока не достигнет при некотором предельном значении угла α допустимого значения, равного по условию задачи $T = 2P$. Цепь в этом случае будет находиться на грани разрыва, и уравнение второго закона динамики можно переписать так:

$$2mg - mg = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$gR = v^2. \tag{2}$$

3. Для нахождения предельного угла отклонения $\alpha_{пр}$ составленных уравнений недостаточно. Необходимо еще выразить какую-нибудь тригонометрическую функцию этого угла через величины h и R, входящие в уравнения динамики. Из треугольника ABC

$$\cos\alpha_{пр} = \frac{BC}{AB}, \text{ или, иначе, } \cos\alpha_{пр} = \frac{R-h}{R}. \tag{3}$$

Решая уравнения (1)—(3) совместно, получим:

$$\cos\alpha_{пр} = 0{,}5,$$

откуда искомый угол $\alpha_{пр} = 60°$.

Пример 9. Вокруг горизонтальной оси может свободно (без трения) вращаться легкий рычаг (рис. 3.7), плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы массами, равными соответственно m_1 и m_2. Предоставленный самому себе, рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное. Какую скорость будет иметь в нижней точке второй груз?

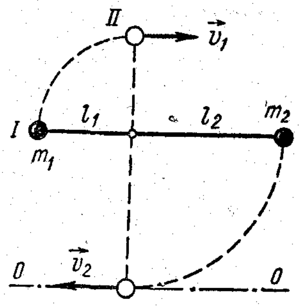


Рис. 3.7.

Решение. В задаче рассматривается неравномерно переменное движение системы материальных точек. Решать эту задачу нужно с помощью закона сохранения энергии. Приняв за первое положение системы начальное положение штанги, а за второе — ее положение в момент прохождения вертикали, записываем исходное уравнение:

$$A = W_2 - W_1,$$

Потенциальную энергию грузов будем отсчитывать от нижнего уровня 00.

Из внешних сил на движущийся рычаг с грузами действуют только силы со стороны оси. Если пренебречь трением, то можно считать, что работа этих сил равна нулю ($A = 0$) и поэтому полная энергия грузов не меняется. Поскольку масса рычага ничтожно мала, в горизонтальном положении система обладает механической энергией, равной сумме потенциальных энергий первого и второго грузов, т. е.

$$W_1 = m_1 g l_2 + m_2 g l_2$$

(кинетические энергии грузов в этом положении равны нулю, так как равны нулю их скорости). В вертикальном положении полная механическая энергия системы равна:

$$W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g (l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости соответственно первого и второго грузов.

Подставляя полученные выражения для полной энергии в исходную формулу и учитывая, что внешние силы работу не совершают, получаем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g (l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_1) g l_2 = 0. \qquad (1)$$

В этом уравнении содержатся две неизвестные величины — скорости грузов. Второе, недостающее уравнение получим, исходя из того, что в каждый рассматриваемый момент времени радиусы вращения всех точек рычага имеют одинаковую угловую скорость ω, и, следовательно, в положении II

$$\omega_2 = \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) v_1, находим:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{2(m_2 l_2 - m_1 l_1) g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$$

Пример 10. Для определения скорости пули применяется баллистический маятник (рис. 3.8), состоящий из деревянного бруска, подвешенного на легком стержне. При выстреле в горизонтальном направлении пуля массой m попадает в брусок и застревает в нем. Какова была скорость пули, если маятник поднимается на высоту h? Масса бруска равна M; трение в подвесе и массу стержня не учитывать.

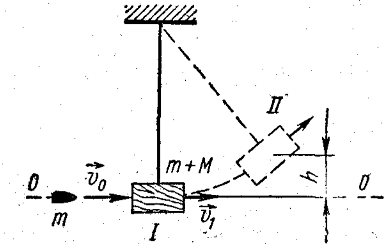


Рис. 3.8.

Решение. Это одна из распространенных задач на неупругий удар двух тел, в результате которого изменяется их положение по высоте. Неупругим ударом называют удар, при котором происходит полное или частичное превращение механической энергии в тепловую. Важно отметить, что при неупругом ударе тел их механическая энергия до соударения не равна механической энергии после удара: часть механической энергии расходуется на остаточную деформацию тел, вызывая их нагревание.

а) Составляем уравнение закона сохранения энергии. За положение I нужно принять положение системы в тот момент, когда деформации закончились и пуля и брусок начинают двигаться как одно целое с некоторой, пока неизвестной скоростью v_1. Напомним, что во всех задачах на упругое и неупругое соударение тел, когда нет специальных оговорок, предполагается, что удар происходит очень быстро и за время удара тела́ не успевают заметно сместиться. Иными словами, нужно предположить, что скорость v_1 возникает мгновенно и маятник не успевает при ударе отклониться от вертикали.

Положение II соответствует положению маятника в верхней точке. Отсчитывая потенциальную энергию от уровня 00 и принимая во внимание, что при переходе из положения I в положение II внешние силы работы не совершают, уравнение закона сохранения энергии можно записать так:

$$W_2 - W_1 = 0.$$

Откуда с учетом того, что

$$W_1 = \frac{(m + M) v_1^2}{2}$$

и

$$W_2 = (m + M) g h,$$

получаем:

$$v_1^2 = gh. \qquad (1)$$

б) Скорость тел после неупругого удара можно определить из уравнения закона сохранения импульсов, если считать, что за время соударения внешние силы $\vec{T}$ и $\vec{P}$ практически не влияют на изменение скорости тел. До удара пуля обладает скоростью v_0, брусок покоится, поэтому импульс системы пуля — брусок

$$K_1 = mv_0.$$

В конце удара пуля и брусок начинают двигаться из положения равновесия вместе со скоростью v_1, следовательно, их импульс в этот момент равен:

$$K_2 = (m + M)v_1.$$

Так как при ударе импульс внешних сил считается равным нулю, то

$$K_1 = K_2,$$

или

$$mv_0 = (m + M)v_1. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1)—(2) относительно начальной скорости пули, получим:

$$v_0 = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}.$$

Пример 11. Космический корабль, имеющий массу M и скорость v_1, сталкивается с метеором массой m, летящим со скоростью v_2. Метеор попадает в середину лобовой части корабля под углом α к его продольной оси. Считая удар абсолютно упругим и пренебрегая трением между обшивкой корабля и метеором, определите скорость корабля после удара.

Решение. Задачи на упругое соударение тел решают с помощью законов сохранения энергии и количества движения. Обычно в этих задачах даются скорости тел до удара и нужно найти их скорости после соударения. Механизм взаимодействия идеально гладких тел при абсолютно упругом ударе вдоль линии центров тел можно представить примерно так. При соприкосновении тел, например шаров, возникают силы упругости, увеличивающиеся до тех пор, пока скорости шаров не сравняются. В этот момент деформация и потенциальная энергия шаров достигает наибольшего значения, а кинетическая энергия — минимального. Затем форма шаров начинает восстанавливаться, силы упругости начинают расталкивать шары до тех пор, пока они не разойдутся. Потенциальная энергия деформации полностью переходит в энергию движения. В результате кинетическая энергия перераспределяется между соударяющимися телами, причем ее суммарная величина не меняется.

Абсолютно упругим ударом называют удар, при котором механическая энергия тел остается неизменной.

Если в момент удара скорости тел направлены под углом α к линии их центров, то в процессе удара происходит не только деформация тел и сближение их центров, но и проскальзывание одного тела по поверхности другого. Помимо сил, направленных по нормали к поверхности соприкосновения, возникают силы трения скольжения, действие которых рассчитать очень трудно.

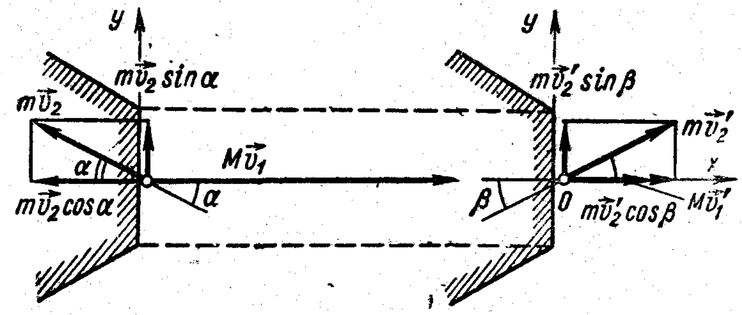


Рис. 3.9.

В тех случаях, когда тела достаточно гладкие и сила трения во много раз меньше силы упругого действия по нормали, задача об ударе решается сравнительно просто — она сводится к задаче о центральном ударе, поскольку при отсутствии трения импульс сил, направленных перпендикулярно линии центров, равен нулю и составляющие векторов скорости по этому направлению не меняются.

1. Обозначим скорости корабля и метеора до и после соударения соответственно через v_1, v_2, v_1' и v_2' и будем считать, что после удара корабль продолжал двигаться в прежнем направлении (рис. 3.9).

Так как импульсы тел в момент удара направлены под углом α друг к другу, то для простоты решения разложим их по направлению линии центров (примем ее за ось OX) и нормали к ней (ось OY). Составляющие импульсов корабля и метеора по этим осям равны:

$$\text{до удара} — M\vec{v}_1,\ m\vec{v}_2\cos\alpha,\ m\vec{v}_2\sin\alpha,$$
$$\text{после удара} — M\vec{v}_1',\ m\vec{v}_2'\cos\beta,\ m\vec{v}_2'\sin\beta,$$

где β — угол, под которым отразится метеор.

Направив ось координат слева направо и приняв систему корабль — метеор за изолированную, запишем уравнение закона сохранения импульсов для оси OX:

$$Mv_1 - mv_2\cos\alpha = Mv_1' + mv_2'\cos\beta. \qquad (1)$$

Второй член левой части уравнения взят со знаком «минус», так как перед столкновением метеор двигался противоположно направлению, принятому за положительное.

Поскольку обшивка корабля идеально гладкая, для проекций импульсов по оси OY будем иметь:

$$mv_2 \sin\alpha = mv_2' \sin\beta. \quad (2)$$

2. Учитывая, что соударение корабля и метеора абсолютно упругое и внешние силы на них не действуют, применим закон сохранения энергии:

$$Mv_1^2 + mv_2^2 = Mv_1'^2 + mv_2'^2. \quad (3)$$

В отличие от закона сохранения импульсов, уравнение закона сохранения энергии в общем случае по осям не выполняется. Однако если взять прямоугольную систему координат, то уравнение закона сохранения механической энергии будет иметь место и для той ее части, которая приходится на движение тел по осям OX и OY (рекомендуем доказать это учащимся). В данной задаче это уравнение для линии центров — оси OX дает[1]:

$$Mv_1^2 + mv_2^2\cos^2\alpha = Mv_1'^2 + mv_2'^2\cos^2\beta. \quad (4)$$

3. Чтобы найти из уравнений (1), (4) скорость корабля после столкновения, их нужно представить в виде:

$$M(v_1 - v_1') = m(v_2'\cos\beta + v_2\cos\alpha);$$

$$M(v_1^2 - v_1'^2) = m(v_2'^2\cos^2\beta - v_2^2\cos^2\alpha),$$

и затем разделить второе уравнение на первое:

$$v_1 + v_1' = v_2'\cos\beta - v_2\cos\alpha.$$

Умножая это уравнение на m и вычитая его из (1), после простых преобразований найдем:

$$v_1' = \frac{(M-m)v_1 - 2mv_2\cos\alpha}{M+m}.$$

Аналогично для проекций вектора скорости метеора по оси OX и OY получим соответственно:

$$v_{2x}' \equiv v_2'\cos\beta = \frac{(M-m)v_2\cos\alpha + 2Mv_1}{M+m},$$

$$v_{2y}' = v_2\sin\alpha.$$

Точно такие же результаты мы получили бы, решая уравнения (1), (3). Рекомендуем в этом убедиться самим читателям.

Из уравнений (1), (2), (4) можно определить также направление вектора скорости метеора после удара:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(M+m)v_2\sin\alpha}{2Mv_1 + (M-m)v_2\cos\alpha}.$$

[1] Для оси OY мы имели бы $mv_2^2\sin^2\alpha = mv_2'^2\sin^2\beta$, что эквивалентно уравнению (2).

4. Анализируя выражения для скоростей v_1' и v_2', которые тела будут иметь после абсолютно упругого удара, можно сделать следующие выводы.

а) При лобовом соударении тел ($\alpha = 0$) $\beta = 0$ и скорости тел после удара равны:

$$v_1' = \frac{(M-m)v_1 - 2mv_2}{M+m};$$

$$v_2' \equiv v_{2x} = \frac{(M-m)v_2 + 2Mv_1}{M+m}.$$

б) Если при лобовом соударении происходит упругое столкновение двух тел одинаковой массы ($m = M$), то $v_1' = -v_2$, $v_2' = v_1$, т. е. тела обмениваются скоростями.

Если при этом одно из тел покоилось, например $v_1 = 0$, то $v_1' = -v_2$, а $v_2' = 0$ — движущееся тело после удара остановится, неподвижное станет двигаться со скоростью второго тела.

в) Если $\alpha \neq 0$, но $m = M$, для угла β разлета тел будем иметь:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_2}{v_1}\sin\alpha.$$

Задачи к главе 3

3.1. Какую работу нужно совершить, чтобы груз массой 1 *кг* поднять вначале равномерно на высоту 1 *м* с ничтожно малой скоростью, далее в течение 2 *сек* поднимать равноускоренно с ускорением 0,5 *м/сек*^{2}, а затем — равнозамедленно с ускорением — 0,5 *м/сек*^{2} до полной остановки? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.2. Груз массой m равноускоренно поднимается лебедкой. На некотором участке пути длиной h груз двигался со средней скоростью v, причем его скорость возросла на Δv. Определите работу силы натяжения троса на этом пути.

3.3. Пластинка массой m лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружинка с коэффициентом упругости k. Какую работу нужно совершить, чтобы на пружинке поднять пластинку на высоту h от поверхности стола?

3.4. Три одинаковые пружины прикреплены к кольцам так, как показано на рисунке 3.10. За каждое кольцо тянут силой $F = 49$ *н*. Какая работа была совершена при растяжении пружин, если известно, что при нагрузке $F_0 = 9{,}8$ *н* каждая пружина удлиняется на $s_0 = 1$ *см*?

3.5. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть пробку из бутылки, если сила трения между пробкой и горлышком бутылки равна F? Размеры пробки и горлышка указаны на рисунке 3.11.

3.6. Поезд, отходя от станции, за 5 *мин* развивает скорость 64,8 *км/ч*. Масса поезда 600 *т*, коэффициент трения 0,004. Определите среднюю мощность локомотива за время равноускоренного движения. Какова должна быть минимальная мощность локомотива, чтобы за указанное время поезд набрал такую скорость?

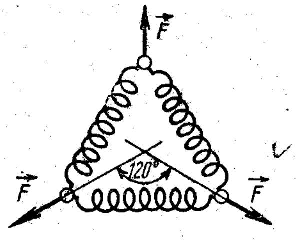


Рис. 3.10.

3.7. При спуске с небольшого уклона один тепловоз идет со скоростью v_1 и развивает максимальную мощность N_1. Второй тепловоз на том же участке пути идет со скоростью v_2, развивая мощность N_2. С какой скоростью могут везти по этому пути тепловозы в сцепе друг с другом состав массой m? Силу сопротивления движению считать пропорциональной силе нормального давления, причем коэффициент пропорциональности равен f.

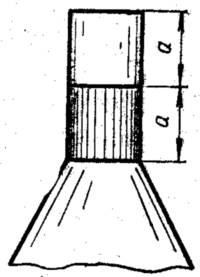


Рис. 3.11.

3.8. Тягач массой 15 *т*, обладающий мощностью 375 *квт*, поднимается равномерно в гору с наклоном 30°. Какую максимальную скорость может развивать тягач на подъеме, если при спуске с горы с выключенным мотором он движется с той же скоростью?

3.9. Автомобиль массой 4 *т* подходит к горке высотой 12 *м* и длиной 80 *м* со скоростью 36 *км/ч*. Какую среднюю мощность развивает автомобиль на подъеме, если его скорость при постоянной силе тяги на вершине горы оказалась равной 21,6 *км/ч*? Коэффициент сопротивления считать равным 0,1.

3.10. Веревка массой $M = 30$ *кг* связана своими концами и переброшена через неподвижный блок. Обезьяна массой $m = 12$ *кг* прыгает на веревку и начинает карабкаться вверх. Некоторое время она находится на одной и той же высоте. Сколько времени она сможет продержаться на этой высоте, если максимальная мощность, развиваемая обезьяной, равна $N_{\text{макс}} = 360$ *вт*? Какую работу совершит обезьяна за это время? Трением на блоке пренебречь.

3.11. Какую мощность должен развивать человек, чтобы подняться вверх по движущемуся вниз эскалатору метро на высоту h за время t? Скорость эскалатора постоянна и равна v, угол наклона эскалатора к горизонту α. Какую мощность должен развивать человек, чтобы за то же время спуститься с высоты H по эскалатору, движущемуся вверх? Какую мощность должен развивать человек, чтобы находиться на эскалаторе на одной высоте? Масса человека m.

3.12. Шкив приводится во вращение приводным ремнем. Радиус шкива 25 *см*, число оборотов 2 *об/сек*. Сила натяжения ведущей ветви ремня вдвое больше ведомой. Обе ветви ремня параллельны друг другу. Какова должна быть минимальная прочность ремня при передаче шкиву мощности 15 *квт*?

3.13. Велосипедист имеет массу m и может развивать мощность N. По какому максимальному уклону может подниматься велосипедист при коэффициенте трения между колесами и дорогой, равном f? С какой скоростью он будет при этом ехать?

3.14. Реактивный самолет летит со скоростью 183 *м/сек*. Двигатель забирает каждую секунду воздух массой 70 *кг*, который идет на сжигание топлива массой 2,9 *кг*. Скорость истечения газов из сопла 488 *м/сек*. Определите мощность, отдаваемую двигателем.

3.15. На столе лежат карманные часы с цепочкой. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы часы оторвать от стола, поднимая их за цепочку? Цепочка имеет длину L и массу m, масса часов M, диаметр часов равен D.

3.16. Камень брошен с крыши дома высотой 20 *м* со скоростью 18 *м/сек*. Определите работу по преодолению сопротивления воздуха, если известно, что к моменту удара о землю камень имеет скорость 24 *м/сек*. Масса камня равна 50 *г*.

3.17. Хоккейная шайба, имеющая начальную скорость 5 *м/сек*, проходит по льду до удара о бортик расстояние 10 *м* и после удара отскакивает от него. Определите, на какое расстояние отлетит шайба, если коэффициент трения о лед в обоих случаях равен 0,036.

3.18. Автомобиль удерживается тормозами на склоне горы с уклоном, не большим 0,25. Какой тормозной путь пройдет автомобиль по горизонтальной дороге при скорости движения 36 *км/ч*? Каким будет тормозной путь при подъеме в гору с указанным уклоном и такой же скоростью?

3.19. Из винтовки в горизонтальном направлении сделано два выстрела в щит, расположенный на расстоянии 50 *м*. После первого выстрела перед дулом винтовки была поставлена доска, вследствие чего вторая пуля, пробив доску, попала в щит на 5 *см* ниже первой. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите работу, совершенную пулей, если масса пули и ее начальная скорость равны соответственно 8 *г* и 800 *м/сек*.

3.20. Санки скатываются с горки и, пройдя в горизонтальном направлении расстояние l, останавливаются. Масса санок m, коэффициент трения f. Какую работу нужно совершить, чтобы санки затащить в горку на прежнюю высоту, прикладывая к ним силу в направлении движения?

3.21. С наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, с высоты h соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска, у основания наклонной плоскости, шайба ударяется о стенку и отскакивает от нее вверх по наклонной плоскости. Считая удар абсолютно упругим, определите, на какую высоту поднимается шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость равен f.

3.22. Тело пущено вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0,20, начальная скорость тела 3,00 *м/сек*. Определите скорость, с которой тело вернется в исходную точку, и время движения тела.

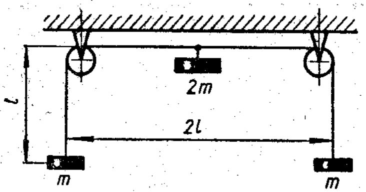


Рис. 3.12.

3.23. Тело массой 4 *кг* двигалось по горизонтальной прямой со скоростью 2 *м/сек*. После действия некоторой силы оно стало двигаться в противоположную сторону с вдвое большей скоростью. Найдите величину этой силы и совершенную ею работу, если время действия силы 2 *сек*. Решите задачу при условии, что после действия силы тело стало двигаться под углом 90° к начальной траектории с той же по величине скоростью.

3.24. Человек массой 70 *кг* подтягивает к берегу лодку массой 300 *кг*. Один раз он тянет ее канатом с берега, другой — закрепив канат на берегу, подтягивается к берегу, сидя в лодке. Какую работу совершит человек к концу третьей секунды, если в обоих случаях он тянул за канат с силой 147 *н*? Чему равна максимальная мощность, развиваемая человеком? Массой каната и сопротивлением воды пренебречь.

3.25. На концах нити длиной $4l$ подвешены грузы массой m каждый. В середине нити укреплен груз массой $2m$ (рис. 3.12). Предоставленные самим себе, грузы приходят в движение. Определите их скорость в тот момент, когда они будут находиться на одном уровне.

3.26. Нить маятника, установленного в ракете, отклонили до горизонтального положения и отпустили. В тот момент, когда маятник проходил положение равновесия, ракета стала подниматься вертикально вверх, вследствие чего максимальный угол отклонения маятника от вертикали оказался равным 45°. Каково было ускорение ракеты в момент старта?

3.27. Какая сила необходима для вытаскивания из доски гвоздя длиной 120 *мм*, если он забит двенадцатью ударами молотка массой 0,5 *кг* при скорости молотка перед ударом 5 *м/сек*? Силу сопротивления считать не зависящей от направления движения.

3.28. Санки, движущиеся по горизонтальному льду со скоростью v, выезжают на асфальт. Длина полозьев санок l, коэффициент трения об асфальт равен f. Какое расстояние пройдут санки по асфальту до полной остановки? Трением о лед пренебречь.

3.29. С какой высоты может прыгнуть акробат в упругую сетку, если он выдерживает перегрузку $5g$? Статический прогиб сетки равен 0,20 *м*. Массой сетки пренебречь.

3.30. Груз массой m падает с высоты h на пружину с коэффициентом упругости k. Пренебрегая массой пружины, определите максимальную скорость, которую будет иметь груз при движении.

3.31. Пружина детского пистолета имеет в свободном состоянии длину $l_0 = 15$ *см*. Сила, необходимая для изменения ее длины на $x_0 = 1$ *см*, равна $F_0 = 9{,}8$ *н*. Какова будет максимальная дальность полета шарика массой $m = 10$ *г*, если им зарядить пистолет, сжав пружину до $l_1 = 5$ *см*? Решите задачу при условии, что пистолет расположен вертикально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.32. При посадке самолета на палубу авианосца торможение осуществляется тросом, натянутым поперек палубы корабля. Полагая коэффициент k упругости троса постоянным на пути торможения, определите максимальную силу, действующую на летчика массой m при посадке. Начальная скорость и масса самолета равны соответственно v_0 и M.

3.33. На столе, свисая на одну треть в небольшое отверстие стола, лежит на грани скольжения цепочка массой m и длиной $3l$. а) Какую работу нужно совершить, чтобы цепочку втащить на стол горизонтальной силой, прикладывая силу к концу цепочки? б) Какую скорость будет иметь цепочка в момент отрыва от стола, если ее вывести из положения равновесия ничтожно малой силой и она начнет соскальзывать?

3.34. Два мальчика играют в мяч, стоя на льду на расстоянии 10 *м* друг от друга. Один из них бросает мяч массой 1 *кг*, второй ловит его через 0,5 *сек*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние, на которое откатится мальчик массой 40 *кг*, бросивший мяч, если коэффициент трения подошвы о лед равен 0,01. Какую работу совершил этот мальчик?

3.35. На легком стержне длиной l висит деревянный шар массой M. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость v, направленную под углом α к горизонту. На какой угол отклонится стержень после неупругого центрального удара пули?

3.36. На расстоянии l_1 от поверхности вертикальной стальной плиты подвешен маятник, состоящий из легкого стержня длиной $l_2 > l_1$ и небольшого тяжелого шарика. На какой угол отклонится маятник после абсолютно упругого удара о плиту, если первоначально он находился в горизонтальном положении? На какую высоту поднимется маятник, если плита будет расположена горизонтально на расстоянии l_1 от точки подвеса стержня?

3.37. Автоматический пистолет имеет подвижный кожух, связанный с корпусом пружиной. Масса кожуха 250 *г*, масса пули 8 *г*, жесткость пружины 980 *н/м*. Какова должна быть минимальная скорость пули при вылете из ствола, чтобы пистолет перезаряжался, если при выстреле кожух должен отходить назад на 3 *см*? Трением пренебречь.

3.38. Груз массой $m = 0{,}5$ *кг* падает с некоторой высоты на плиту массой $M = 1$ *кг*, укрепленную на пружине с коэффициентом жесткости $k = 980$ *н/м*. Определите величину наибольшего сжатия пружины, если в момент удара груз обладал скоростью $v = 5$ *м/сек*. Удар считать неупругим.

3.39. В гладком горизонтальном желобе, имеющем форму круга радиусом R, находятся два маленьких шарика массами m_1 и m_2. Между шариками вставлена пружина, сжатая нитью. В неко-

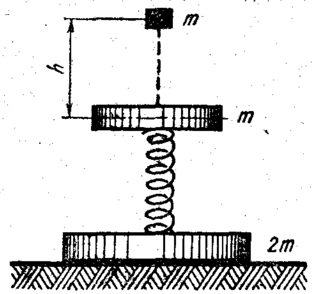


Рис. 3.13.

торый момент нить пережигают и шарики начинают двигаться по желобу. Определите: а) В каком месте произойдет столкновение шариков (массой и размерами пружины пренебречь)? б) Через сколько времени после обрыва нити шарики столкнутся 2-й (n-й) раз, если потенциальная энергия сжатой пружины была равна W_0?

3.40. Пластинки массами m и $2m$ соединены легкой пружиной с коэффициентом упругости k (рис. 3.13). С какой высоты должен упасть на верхнюю пластинку грузик массой m, чтобы при растяжении пружины после удара нижняя пластинка оторвалась от стола? Удар считать неупругим. На какую высоту от начального уровня поднимется после удара груз и верхняя пластинка?

3.41. По идеально гладкой горизонтальной поверхности пущены навстречу друг другу два абсолютно упругих шарика массами 10 и 20 *г*. Каковы будут скорости шаров после центрального удара, если вначале они равнялись соответственно 20 *м/сек* и 10 *м/сек*? Чему будут равны скорости шаров в момент их наибольшей деформации?

3.42. В идеально гладком желобе расположены шарики массами M_1 и M_2. Между ними находится шарик массой m, много меньшей массы двух первых шаров. В некоторый момент времени маленький шарик получает скорость v в направлении шара массой M_1. Какие скорости будут иметь большие шарики после очень многих соударений?

3.43. Два абсолютно гладких одинаковых шара массой M покоятся на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга. Третий шар того же радиуса, но вдвое большей массы движется к ним по плоскости со скоростью v_0 вдоль прямой, проходящей через точку касания шаров. Определите скорость шаров после упругого удара. Каков будет ответ, если один из покоящихся шаров убрать, оставив все остальное неизменным?

3.44. Атом распадается на две равные части, которые летят со скоростями v_1 и v_2 под углом α друг к другу. Зная, что общая кинетическая энергия частей атома равна W, определите его массу и кинетическую энергию до разрыва. (Дефект массы не учитывать.)

3.45. От удара копра массой 50 *кг*, падающего свободно с высоты 4 *м*, свая массой 150 *кг* погружается в грунт на 10 *см*. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар: а) неупругим; б) упругим.

3.46. В клин массой M попадает горизонтально летящая пуля массой $m \ll M$ и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту поднимется пуля, если скорость клина после удара равна v. Трением пренебречь.

3.47. Два упругих шарика подвешены на тонких нитях рядом так, что они находятся на одной высоте и касаются друг друга. Длина нитей равна 10 и 6 *см*, масса шариков 8 и 20 *г*. Меньший шарик отклонили на угол 60° и отпустили. На какие высоты поднимутся шарики после абсолютно упругого удара?

3.48. На пути тела массой m, скользящего по идеально гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v, находится незакрепленная горка, угол наклона которой к горизонту плавно изменяется от некоторого максимального значения в верхней части до нуля в нижней. На какую высоту тело поднимется на горку, если масса ее равна M? Решите задачу при условии, что горка сама движется навстречу телу со скоростью $2v$.

3.49. Мальчик массой 30 *кг* вбегает со скоростью 2 *м/сек* на наклонную плоскость массой 20 *кг*, которая может двигаться по горизонтальному полу без трения. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Какую работу совершит мальчик, поднявшись на высоту 2 *м*? Какую мощность он при этом должен развивать?

3.50. Вертикально вверх бросают шар массой $2M$, сообщая ему скорость v_0. К шару привязан легкий шнур длиной $l < v_0^2/2g$, на втором конце которого находится груз массой M. Через сколько времени и на каком расстоянии от точки бросания встретятся тела? Нить абсолютно упругая.

3.51. Спутник движется по круговой орбите вокруг Луны на высоте, равной радиусу Луны. С какой скоростью нужно запустить кабину с космонавтами с поверхности Луны, чтобы можно было осуществить стыковку кабины с кораблем без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно 1,7 *м/сек*^{2}, радиус Луны 1740 *км*.

3.52. На нити, прочность которой равна 1,96 *н*, подвешен груз массой 100 *г*. На какой максимальный угол можно отклонить нить от вертикали, чтобы при последующих качаниях она не оборвалась? Чему равно натяжение нити, когда она находится под углом 30° к вертикали? В какой точке траектории скорость груза в вертикальном направлении будет наибольшей? В каких точках траектории полное ускорение груза направлено вертикально вверх и в каких горизонтально?

3.53. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол нужно отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в 1,5 раза больше минимальной?

3.54. Груз массой m свободно вращается на нити в вертикальной плоскости. На сколько отличаются силы натяжения нити при переходе груза из верхнего положения в нижнее?

3.55. На легкой нити длиной l подвешен небольшой шарик. Какую минимальную скорость нужно сообщить шарику в гори-

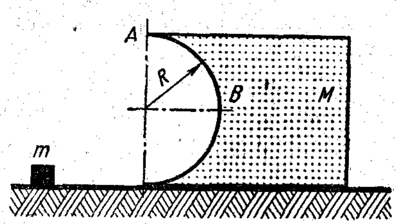


Рис. 3.14.

зонтальном направлении, чтобы он описал окружность в вертикальной плоскости?

3.56. Шарик массой $m = 100$ *г* скатывается с высоты $h = 1$ *м* по желобку, переходящему в «мертвую петлю» радиусом $R = 0{,}5$ *м*. По какому закону будут изменяться сила давления N шарика на желоб и полное ускорение a шарика при его движении? Трение не учитывать.

3.57. Маятник длиной $l = 1$ *м* с грузом массой $m = 1$ *г* на конце отводят в горизонтальное положение и отпускают. Определите максимальное натяжение нити и предельную высоту подъема маятника после удара о гвоздь, вбитый на расстоянии 50 *см* от точки подвеса на линии, образующей с вертикалью угол $\alpha = 60°$.

3.58. Маленькая шайба массой m продета сквозь проволочное кольцо радиусом R в его верхней точке. Ничтожно малой силой шайбу выводят из положения равновесия, и она начинает скользить по кольцу. По какому закону будет изменяться сила давления шайбы на кольцо в зависимости от высоты положения шайбы? Чему равны силы максимального и минимального давления? Трение не учитывать.

3.59. Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v_0, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определите высоту, на которой оно оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

3.60. Вагонетка, стоящая горизонтально, начинает спускаться вниз по рельсам, представляющим винтовую линию с шагом h и радиусом внешнего рельса R. Сколько полных оборотов может сделать вагонетка, не сходя с рельс, если расстояние между ними равно l, а центр тяжести вагонетки находится на высоте b от полотна дороги? Каково будет полное ускорение вагонетки в этот момент? (h и $l \ll R$.)

3.61. На концах и в середине невесомого стержня длиной l расположены одинаковые шарики. Стержень ставится вертикально на идеально гладкую горизонтальную поверхность и легким толчком выводится из положения неустойчивого равновесия. Каковы будут скорости шариков в момент удара верхнего шарика о горизонтальную поверхность? Каким будет результат, если нижний конец стержня шарнирно закрепить? Какую скорость нужно сообщить верхнему шарику в горизонтальном направлении, чтобы нижний шарик не давил на подставку?

3.62. На идеально гладком столе находится брусок массой M, одна сторона которого представляет собой цилиндр радиусом R (рис. 3.14). Какую скорость v нужно сообщить шайбе массой m

вдоль стола, чтобы она достигла точки A? Какое давление будет оказывать шайба на брусок в точке B? Трением пренебречь.

3.63. Определите кинетическую энергию гусеницы трактора, который движется со скоростью v, если расстояние между осями колес равно l, радиус колеса r, масса единицы длины гусеницы q.

Глава 4. СТАТИКА

Основные понятия, законы и формулы

1. Статикой называют раздел механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел. Равновесием называют такое состояние тела, когда оно находится в покое, движется равномерно прямолинейно или равномерно вращается вокруг какой-либо неподвижной оси, проходящей через центр масс тела.

В курсе элементарной физики рассматривают статику материальной точки и некоторые вопросы статики твердого тела.

Относительный покой и движение материальной точки с постоянной скоростью можно рассматривать как частный случай переменного движения, при котором ее ускорение равно нулю. Согласно основному уравнению динамики $a = 0$ и $\vec{v} = \text{const}$, если

$$\Sigma \vec{F} = 0. \tag{4.1}$$

Для равновесия материальной точки необходимо, чтобы геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке, равнялась нулю. Условие равновесия (4.1) можно записать иначе. Для этого все силы, действующие на материальную точку, нужно разложить по каким-либо двум осям (обычно берут перпендикулярные оси OX и OY) и приравнять нулю суммы проекций сил на эти оси:

$$\Sigma F_x = 0; \ \Sigma F_y = 0. \tag{4.1'}$$

Уравнения (4.1′) называют уравнениями равновесия материальной точки в проекциях.

2. Равновесие твердого тела зависит не только от величины и направления действующих сил, но и от того, где они приложены. Механическое состояние абсолютно твердого тела не изменяется, если точку приложения действующей на него силы переносить вдоль линии ее действия.

Равнодействующая двух или нескольких сил, действующих на тело по одной прямой или приложенных к телу под углом друг к другу, равна их векторной сумме и находится по правилу параллелограмма.

Две параллельные силы могут быть уравновешены одной силой. Уравновешивающая сила параллельна им и по величине равна их алгебраической сумме: $F = F_1 \pm F_2$. Линия действия уравновешивающей отстоит от линии действия силы $F_1 > F_2$ на расстоянии

$$x = \frac{F_2}{F_1 \pm F_2} l, \qquad (4.2)$$

где l — расстояние между линиями действия приложенных сил. Знак «плюс» ставят, когда силы направлены в одну сторону, знак «минус» — в противоположные.

Мерой взаимодействия тел, при котором происходит деформация и изменение угловой скорости вращения тел, служит момент силы.

Величина момента силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки O равна произведению величины силы на длину перпендикуляра l (плечо), опущенного из точки O на линию действия силы:

$$M = Fl. \qquad (4.3)$$

Момент силы, стремящейся повернуть тело относительно точки O по направлению вращения часовой стрелки, берется со знаком «плюс», против — со знаком «минус». Если на тело действует несколько сил, расположенных в одной плоскости (плоская система сил), величина результирующего момента этих сил относительно выбранной точки O равна алгебраической сумме отдельных моментов:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Систему двух равных антипараллельных сил, действующих на тело не по одной прямой, называют парой сил. Относительно любой точки пара сил создает одинаковый вращающий момент $M = Fl$, где под F подразумевают величину одной из сил, а под l — кратчайшее расстояние между их линиями действия (плечо пары).

Если на тело действует несколько сил, лежащих в одной плоскости, и тело находится в состоянии покоя или равномерного движения (поступательного или вращательного), геометрическая сумма приложенных сил и алгебраическая сумма моментов, взятых относительно произвольной точки, должны равняться нулю:

$$\Sigma\vec{F} = 0; \ \Sigma M = 0. \qquad (4.4)$$

Условия равновесия тела (4.4) можно представить в более удобном для практического применения виде, записав первое из них в форме (4.1′).

Решение задач. Примеры

1. Основная задача статики заключается в том, чтобы найти условия равновесия материальной точки, системы точек, тела или системы тел. Статика представляет собой частный случай динамических процессов, при которых отсутствуют угловые и линейные ускорения, поэтому правила решения задач статики материальной точки принципиально ничем не отличаются от правил решения задач динамики. Вместо уравнения второго закона Ньютона здесь нужно составить вытекающее из него условие равновесия (4.1) или (4.1′).

Порядок действий при решении задач этого типа такой.

1. а) Нужно сделать чертеж, на котором указать все силы, действующие на материальную точку, находящуюся в равновесии. (Если дана система материальных точек, это нужно проделать для каждой из них, освободив все точки от связей.)

б) Выбрать оси координат OX и OY и разложить по ним все силы, действующие на рассматриваемую точку. Оси координат нужно выбирать так, чтобы приходилось делать минимум разложений. В частных случаях оси разложения могут быть и неперпендикулярны друг другу. Сделав разложение сил, необходимо составить уравнение равновесия в проекциях по осям (4.1′) и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

2. Решение задач на статику твердого тела сводится к составлению уравнений равновесия (4.4). Чтобы составить эти уравнения, необходимо:

а) Сделать чертеж и расставить все силы, приложенные к рассматриваемому телу. Само тело нужно при этом изобразить свободным от связей, заменив их силами.

б) Выбрать оси координат OX и OY и разложить по ним все силы, действующие на тело. Поскольку тело находится в равновесии и в любом направлении у тела ускорения нет, проекции сил по осям должны быть связаны между собой уравнениями (4.1′).

в) Составив уравнения равновесия в проекциях, следует перейти к составлению уравнения моментов. Для этого нужно выбрать точку O, относительно которой будут рассматриваться моменты приложенных сил. Точку O можно взять произвольно, однако лучше ее выбирать так, чтобы через нее проходило наибольшее число линий действия неизвестных сил. Моменты этих сил относительно точки O будут равны нулю (поскольку их плечи будут равны нулю), и во второе уравнение равновесия (4.4) они не войдут — уравнение моментов будет предельно простым. Выбрав точку O, нужно найти плечи всех сил относительно этой точки и приступить к составлению уравнения моментов, следя за знаками моментов отдельных сил. При составлении уравнения моментов можно брать или моменты самих сил, или моменты их составляющих: результат получится одинаковый.

Уравнение равновесия в проекциях и уравнение моментов дают систему трех независимых уравнений. Решая их совместно относительно искомой величины, мы и получим ответ на вопрос задачи.

г) Если тело, находящееся в равновесии, имеет одну неподвижную ось вращения, исключающую всякое поступательное движение, то можно ограничиться лишь составлением уравнения моментов,

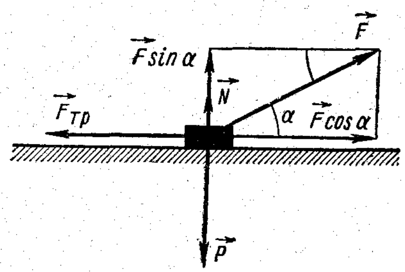


Рис. 4.1.

так как для равновесия такого тела достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных сил относительно какой-либо точки, лежащей на заданной оси, равнялась нулю. Раскладывать силы по осям в этом случае не нужно.

Следует заметить, что иногда при решении задач на равновесие тел, не имеющих закрепленной оси вращения, можно ограничиться только составлением уравнения моментов и не использовать уравнения проекций. Во всех таких случаях нужно лишь удачно выбрать точку O. Поэтому, прежде чем приступать к разложению сил по осям и записи уравнений равновесия, необходимо тщательно подумать над тем, как лучше составить уравнение моментов.

Пример 1. С какой силой нужно тянуть за веревку, составляющую с горизонтом угол $\alpha = 30°$, чтобы сдвинуть с места санки массой $m = 50$ *кг* при коэффициенте трения полозьев о снег, равном $f = 0,1$? Какую минимальную силу нужно приложить к санкам, чтобы их сдвинуть с места?

Р е ш е н и е. Эта задача на статику материальной точки (геометрические размеры санок не заданы).

Делаем схематический чертеж (рис. 4.1), указываем на нем силы, действующие на санки: силу тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, силу трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, нормальную реакцию опоры $\vec{N}$ и силу натяжения веревки $\vec{F}$, равную искомой силе тяги. Под действием приложенных сил санки находятся в равновесии (на грани скольжения), и , следовательно, уравнение равновесия в векторной форме имеет вид:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

Чтобы записать условие равновесия в проекциях, выбираем оси OX и OY и раскладываем по ним силы, действующие на санки. Эти оси лучше всего взять по вертикали и горизонтали, так как в этом случае придется разложить только одну силу $\vec{F}$. Ее составляющие по осям равны соответственно $\vec{F}\cos\alpha$ и $\vec{F}\sin\alpha$, и уравнения равновесия в проекциях для горизонтального и вертикального направлений будут иметь вид:

$$F\cos\alpha - fN = 0 \qquad (1)$$

и

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

При составлении первого уравнения учтено, что $F_{тр} = fN$, поскольку по условию задачи санки находятся на грани скольжения.

Решая уравнения (1) и (2) совместно, получаем:

$$F = \frac{fmg}{\cos\alpha + f\sin\alpha}; \quad F = 54 \text{ н}.$$

Из физических соображений и анализа последнего выражения видно, что с изменением угла α величина силы тяги $\vec{F}$, необходимой для смещения санок, будет изменяться. Наименьшей она окажется в том случае, когда знаменатель дроби достигнет максимального значения. Введем обозначение $f = \operatorname{tg}\varphi$, тогда

$$\cos\alpha + f\sin\alpha = \cos\alpha + \operatorname{tg}\varphi\sin\alpha =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Так как $\cos\varphi$ — величина постоянная, то максимального значения знаменатель достигнет при $\cos(\alpha - \varphi) = 1$. Но

$$\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1 + f^2},$$

и, следовательно,

$$\cos\alpha + f\sin\alpha = \sqrt{1 + f^2}, \qquad (3)$$

т. е. минимальное значение силы тяги, позволяющей сдвинуть санки с места, равно:

$$F_{мин} = \frac{fmg}{\sqrt{1 + f^2}}; \quad F_{мин} = 45,5 \text{ н};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = f; \qquad \alpha = 5°40'.$$

Пример 2. Под каким наименьшим углом α к горизонту может стоять прислоненная к стене лестница, если известно, что коэффициент трения между лестницей, полом и стеной равен f?

Р е ш е н и е. Это задача на статику твердого тела, не имеющего неподвижной оси вращения.

а) Делаем чертеж (рис. 4.2) и, принимая лестницу за однородный стержень длиной l, расставляем приложенные к ней силы. Со стороны стены на верхний конец лестницы действуют нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр1}$, препятствующая скольжению верхнего конца лестницы по стене. Со стороны пола на лестницу действуют реакция опоры $\vec{N}_2$ и сила $\vec{F}_{тр2}$, препятствующая скольжению лестницы вправо, со стороны Земли — сила тяжести $\vec{P} = m\vec{g}$, приложенная в середине лестницы.

б) Проводим оси координат OX и OY и, поскольку все силы направлены по этим осям, сразу записываем уравнение равновесия лестницы в проекциях.

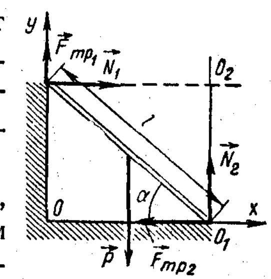


Рис. 4.2.

Для оси OX

$$N_1 - fN_2 = 0; \qquad (1)$$

для оси OY

$$fN_1 + N_2 - P = 0. \qquad (2)$$

Здесь учтено, что лестница стоит под предельным углом на грани скольжения и, следовательно, силы трения покоя имеют наибольшие значения, равные соответственно $F_{тр1} = fN_1$ и $F_{тр2} = fN_2$.

в) Поскольку лестница покоится, сумма моментов всех сил относительно любой точки O должна равняться нулю. Выбираем точку O так, чтобы через нее проходило наибольшее число линий действия сил; уравнение моментов в этом случае получится наиболее простым. Такому условию в данной задаче удовлетворяют точки, лежащие на концах лестницы, а также точки O и O_2, где пересекаются линии действия сил трения и реакций опор. Возьмем одну из них, допустим O_1. Относительно нее моменты сил $\vec{F}_{тр2}$ и $\vec{N}_2$ равны нулю, так как плечи этих сил относительно O_1 равны нулю.

Находим плечи сил $\vec{P}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр1}$ относительно точки O_1, они равны соответственно $\frac{l}{2}\cos\alpha$, $l\sin\alpha$ и $l\cos\alpha$.

Учитывая знаки моментов, составляем уравнение моментов:

$$fN_1 l\cos\alpha + N_1 l\sin\alpha - P\frac{l}{2}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Записав уравнения равновесия лестницы (1) — (3) и решая их совместно относительно искомого неизвестного α (минимального угла наклона лестницы), получим: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-f^2}{2f}$.

Пример 3. Пять шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$, $4m$ и $5m$, укреплены на стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Пренебрегая массой стержня, найдите центр тяжести системы.

Р е ш е н и е. 1. В основе решения задач на определение центра тяжести системы материальных точек (системы тел с известным положением центра тяжести каждого тела) лежит следующее обстоятельство. Если в центре тяжести системы частиц приложить вертикально вверх уравновешивающую силу F, равную по величине силе тяжести всех частиц, то система будет находиться в равновесии, и поэтому сумма моментов всех сил (включая, конечно, и уравновешивающую силу) равняется нулю относительно любой точки.

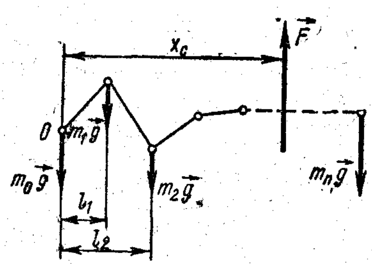


Рис. 4.3.

Пусть массы частиц системы равны m_0, m_1, ..., m_n и положение центра тяжести мы договоримся отсчитывать по горизонтали (оси OX) от центра тяжести крайней левой частицы (рис. 4.3). Тогда расстояние от точки O до линии действия уравновешивающей силы — координату x_C центра тяжести системы можно найти из уравнения моментов, составленного относительно точки O:

$$m_0 g\cdot 0 + m_1 g x_1 + \ldots + m_n g x_n - Fx_C = 0,$$

где x_1, x_2 и т. д. — плечи сил $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, ..., $m_n\vec{g}$ относительно центра тяжести левого груза. Подставляя в это уравнение вместо уравновешивающей силы ее выражение $F = m_0 g + m_1 g + \ldots + m_n g$ и решая уравнение относительно x_C, получим:

$$x_C = \frac{m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \ldots + m_n g x_n}{m_0 g + m_1 g + \ldots + m_n g} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_0 + m_1 + \ldots + m_n},$$

или, короче,

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M},$$

где m_i и x_i — масса и координата i-й частицы, M — масса всех частиц.

Аналогично находится y_C — координата центра тяжести системы материальных точек по оси OY.

Полученные выражения для x_C и y_C являются основными формулами механики, позволяющими определить координаты центра тяжести системы материальных точек на плоскости.

2. Решение нашей задачи основано на только что полученном результате.

а) Сделав чертеж, расставляем все силы, действующие на систему. Выбираем точку отсчета O в центре первого шара и на произвольном от нее расстоянии x мысленно прикладываем к стержню уравновешивающую силу, равную силе тяжести, действующей на всю систему:

$$F = mg + 2\,mg + 3\,mg + 4\,mg + 5\,mg.$$

Находим плечи всех сил относительно O. Они равны соответственно 0, l, $2l$, $3l$ и $4l$.

б) Определяем положение центра тяжести:

$$x = \frac{2ml + 3m\cdot 2l + 4m\cdot 3l + 5m\cdot 4l}{m + 2m + 3m + 4m + 5m} = \frac{8}{3}\,l.$$

Пример 4. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной a, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $a/4$ так, как указано на рисунке 4.4.

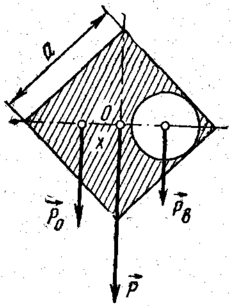


Рис. 4.4.

Р е ш е н и е. 1. На примере этой задачи будет показано, как определяется положение центра тяжести однородных плоских фигур, имеющих вырез. Элементарными методами эти задачи решаются лишь при условии, что положение центра тяжести целой фигуры и центра тяжести вырезанной части известны.

а) В задачах этого типа фигуру с вырезом желательно изобразить так, чтобы ось симметрии была горизонтальна. В основе вывода расчетного соотношения лежит следующее обстоятельство, имеющее общий характер. Если вставить вырезанную часть пластинки на прежнее место, то силу тяжести всего тела $\vec{P}$ (в данной задаче квадрата) можно представить как сумму двух параллельных сил — силы тяжести вырезанной части $\vec{P}_в$ (диска) и силы тяжести оставшейся фигуры $\vec{P}_0$ (квадрата с отверстием). Первая из этих сил приложена в центре тяжести невырезанной фигуры (квадрата), вторая — в центре тяжести вырезанной части (круга), третья — в неизвестном пока центре тяжести пластинки с отверстием. Если известны величина равнодействующей (P), одна из параллельных сил ($P_в$) и расстояние l между линиями действия этих сил, легко определить положение линии действия второй силы (P_0), а следовательно, и расстояние x между центрами тяжести вырезанной и целой фигур. Действительно,

$$P_0 x = P_в l \text{ или } (P - P_в)\, x = P_в\, l,$$

так как сила тяжести оставшейся части равна: $P_0 = P - P_в$.

Из предыдущего равенства находим:

$$x = \frac{P_в l}{P - P_в},$$

или окончательно:

$$x = \frac{S_в}{S - S_в}\, l,$$

поскольку сила тяжести однородной пластинки одинаковой толщины h равна: $P = \rho g h S$, где S — площадь; ρ — плотность материала.

2. В данном примере площадь вырезанной части $S_в = \pi \frac{a^2}{16}$, площадь всей фигуры $S = a^2$. Расстояние между центрами тяжести вынутого диска и квадрата равно:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{4}\, a.$$

Подставляя в расчетную формулу для x вместо $S_в$, l и S их значения и проводя упрощения, получим:

$$x = \frac{\pi \sqrt{2}}{4\,(16 - \pi)}\, a.$$

Задачи к главе 4

4.1. Груз массой 50 *кг* прижат к вертикальной стене силой 118 *н*. Какую минимальную силу необходимо приложить к грузу, чтобы удержать его в покое; чтобы поднимать равномерно вверх? Коэффициент трения скольжения равен 0,3.

Что будет происходить с грузом, если в вертикальном направлении прикладывать силу 460 *н*? 490 *н*? Какова будет при этом сила трения?

4.2. В песчаном грунте была вырыта траншея, поперечное сечение которой имеет форму равносторонней трапеции с параллельными верхним и нижним основаниями. Когда песок высох, края траншеи осыпались и размеры ее стали такими: верхнее основание 9 *м*, нижнее основание 1 *м*, глубина 3 *м*. Определите коэффициент трения между песчинками в сухом грунте.

4.3. Какой груз можно удержать на наклонной плоскости длиной 1 *м* и высотой 0,5 *м* силой в 49 *н*, направленной параллельно наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,4? Как изменится ответ, если силу прикладывать перпендикулярно наклонной плоскости?

4.4. На горизонтальной шероховатой доске лежат две пластинки, имеющие форму равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 4.5). Пластинку *1* сдвигают равномерно вправо вдоль гипотенузы на ее длину. Пластинка *2* при этом скользит по катету *BC* и проходит $^3/_4$ его длины. Чему равен коэффициент трения между пластинками?

4.5. Через два блока, оси которых расположены на одной высоте, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза массами 2 и 3 *кг*. В середине нити прикреплен груз массой 4 *кг*, предоставленный самому себе. Чему будет равно смещение этого груза по вертикали, когда система придет в равновесие? Расстояние между блоками равно 1,6 *м*.

4.6. Система грузов находится в равновесии (рис. 4.6). Найдите массу груза, расположенного на наклонной плоскости, и силу, с которой он давит на плоскость, если масса двух других грузов и угол наклона плоскости к горизонту известны. Массой нитей и трением пренебречь.

4.7. На гладком вертикальном полукруге помещен легкий шнур, длина которого равна четверти длины окружности. На концах шнура находятся грузы массами 10 и 15 *г*. Какое натяжение испытывает нить и как она будет расположена на полукруге при равновесии?

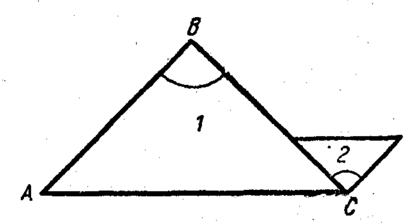


Рис. 4.5.

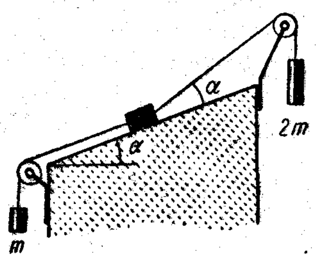


Рис. 4.6.

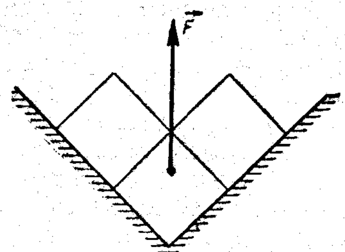


Рис. 4.7.

4.8. N маленьких шариков, каждый из которых имеет массу m, тянут равномерно по столу силой, направленной горизонтально. Коэффициент трения между шариками и плоскостью f. Шарики соединены между собой легкими пружинками, имеющими в свободном состоянии длину l. Коэффициент упругости пружинки k. Определите расстояние между крайними шариками при движении системы.

4.9. На двух плоскостях, наклоненных под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, лежат три куба массой $m = 1$ *кг* каждый (рис. 4.7). Какую минимальную силу $\vec{F}$ нужно приложить в вертикальном направлении к нижнему кубу, чтобы его вытащить? Коэффициент трения между каждой парой соприкасающихся плоскостей равен $f = 0{,}1$.

4.10. Тяжелый ящик стоит на доске, наклоненной к горизонту под углом α. Для того чтобы ящик сдвинуть с места вверх по доске, к нему нужно приложить силу не меньшую, чем сила тяжести, действующая на ящик. Чему равен коэффициент трения между ящиком и доской? Как должна быть направлена сила тяги?

4.11. Через конец стрелы корабельного крана, масса которой m, проходит неподвижная горизонтальная ось, вокруг которой стрела может вращаться без трения. Ко второму концу стрелы привязан трос, перекинутый через неподвижный блок, находящийся на одной вертикали с осью на расстоянии от нее, равном длине стрелы. С какой силой нужно тянуть за трос, чтобы удержать на стреле груз массой $3m$ при угле наклона стрелы к вертикали, равном α? Какова будет при этом сила, действующая вдоль стрелы?

4.12. Шар висит на нити, опираясь на стену. Точка, в которой закреплена нить, находится на стене на одной вертикали с точкой опоры шара. При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и стеной точка, где нить прикреплена к шару, будет находиться на одной вертикали с его центром тяжести?

4.13. Масса колеса равна 100 *кг*, радиус 0,5 *м*. Какую минимальную силу нужно приложить к колесу, чтобы перекатить его через балку высотой 0,10 *м*? При каком минимальном коэффициенте трения между колесом и выступом это можно сделать?

4.14. Однородный стержень подвешен за концы на двух пружинах, у которых коэффициенты упругости равны k_1 и k_2. В нерастянутом состоянии длина пружин одинаковая, масса единицы длины стержня q. Под каким углом к горизонту будет висеть стержень при равновесии? Где нужно прикрепить вторую пружину, чтобы стержень висел горизонтально? Длина стержня l.

4.15. Автомобиль массой 10^3 *кг* равномерно поднимается по наклонному шоссе с уклоном 0,2. Расстояние между осями переднего и заднего мостов равно 2,5 *м*, центр тяжести автомобиля расположен на равных расстояниях от осей на высоте 0,75 *м*. Определите, на сколько отличаются силы давления передних и задних колес на дорогу.

4.16. Маховик радиусом 0,2 *м* насажен на неподвижную ось радиусом $2 \cdot 10^{-2}$ *м*. Сила трения между маховиком и осью 10^3 *н*. Чтобы легче снять маховик с оси, по касательной к его ободу приложили силу $F = 80$ *н*. С какой минимальной силой нужно при этом тянуть маховик вдоль оси, чтобы его снять? При каком значении силы F маховик можно снять ничтожно малой силой?

4.17. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на наклонной плоскости, как показано на рисунке 4.8. С какой силой и под каким углом нужно тянуть за нить, чтобы катушка находилась в равновесии? Масса катушки m, коэффициент трения между плоскостью и катушкой f.

4.18. Под каким минимальным углом к горизонту нужно приложить силу к верхнему ребру прямоугольного ящика длиной l и высотой h, чтобы он перемещался, не переворачиваясь? Коэффициент трения равен f. Какова должна быть величина этой силы, если масса ящика равна m?

4.19. Чтобы выложить карниз здания, каменщик кладет кирпичи один на другой так, что часть каждого кирпича выступает над нижележащим. Сколько кирпичей нужно уложить в карниз, чтобы он выступал не менее чем на 35 *см* от стены и чтобы кирпичи находились в равновесии без цементного раствора? Длина каждого кирпича 30 *см*. На какое максимальное расстояние может выступать карниз, уложенный без соединительного раствора?

4.20. Две тонкие палочки, массы которых M и m, установлены перпендикулярно друг другу (рис. 4.9). Палочки могут свободно вращаться в шарнирах A и B. При каком минимальном коэффициенте трения между

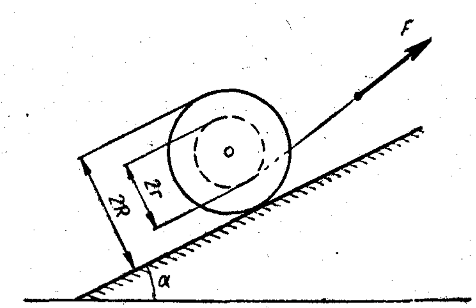


Рис. 4.8.

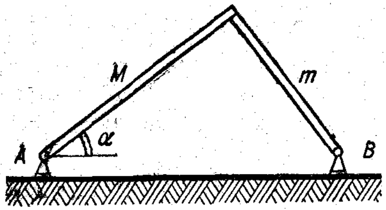


Рис. 4.9.

палочками система будет находиться в равновесии? Какова будет при этом сила давления, действующая на шарнир A?

4.21. На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых цилиндрических бревна. Сверху на них кладут такое же бревно. При каком условии бревна будут находиться в равновесии, не раскатываясь?

4.22. В открытый с обеих сторон полый цилиндр радиусом R, стоящий торцом на горизонтальной плоскости, положили два одинаковых шара радиусом $r > R/2$ и массой m. При какой минимальной массе M цилиндра шары его не опрокинут? Поверхности шаров и цилиндра считать гладкими, стенки цилиндра тонкими.

4.23. Какой длины нужно взять нить, чтобы подвесить на ней у стены кубик с ребром a, как показано на рисунке 4.10? Коэффициент трения между стеной и кубиком равен f.

4.24. На какую высоту может подняться по трехметровой лестнице человек массой 60 *кг*, если лестница стоит под углом 30° к идеально гладкой стене? Масса лестницы 20 *кг*, коэффициент трения скольжения между полом и лестницей 0,5.

4.25. Балка массой m, лежащая на двух опорах, нагружена так, как показано на рисунке 4.11. Определите давление балки на опоры. Силы, создающие вращающий момент M в точке опоры, лежат в плоскости чертежа.

4.26. Два идеально гладких шара, радиусы которых равны 5 *см* и 10 *см*, подвешены в одной точке на легких нитях длиной 45 и 40 *см*. Чему равно натяжение нитей и давление одного шара на другой, если масса шаров равна соответственно 50 и 100 *г*?

4.27. Найдите положение центра тяжести треугольника, составленного из тонких однородных проволочек длиной 3, 4 и 5 *см*.

4.28. Квадрат из однородной проволоки, у которого отрезана одна сторона, подвешен на гвоздь. Какой угол образует средняя сторона с вертикалью?

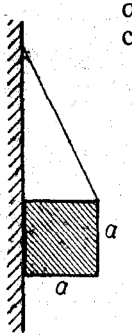


Рис. 4.10.

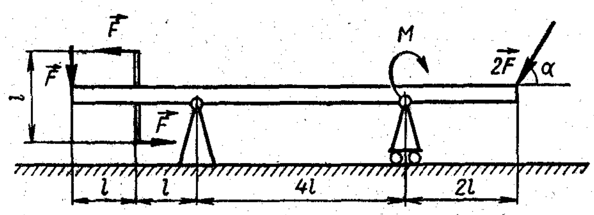


Рис. 4.11.

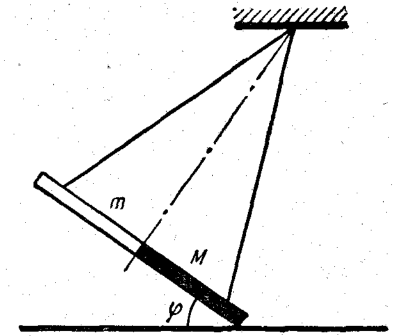


Рис. 4.12.

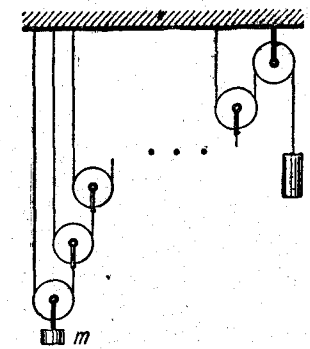


Рис. 4.13.

4.29. Стержень длиной l, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины и массы M и m, подвешен за концы на двух легких нитях длиной $2l$ (рис. 4.12). Какой угол образует стержень с горизонтом в положении равновесия? Какую силу нужно приложить к стержню, чтобы он находился в горизонтальном положении?

4.30. Какова должна быть высота цилиндра радиусом R, укрепленного на полушаре того же радиуса и материала, чтобы вся фигура находилась в состоянии безразличного равновесия? Центр тяжести полушара лежит на расстоянии $^3/_8$ R от плоскости сечения шара.

4.31. Однородная пластинка имеет форму равностороннего треугольника со стороной 16 *см*. В пластинке вырезано круглое отверстие радиусом 2 *см*. Определите положение центра тяжести полученной фигуры при условии, что центр отверстия лежит на отрезке высоты, опущенной из вершины треугольника, а края отверстия касаются сторон треугольника.

4.32. На полу лежит стержень массой M и длиной L. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы стержень повернуть на угол α вокруг одного из его концов? Коэффициент трения между стержнем и полом f. Какие минимальные силы нужно приложить к концам стержня, чтобы вращать его на полу с постоянной угловой скоростью вокруг середины стержня?

4.33. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч массой M и радиусом R. По обручу начинает ползти жук массой m. Какие траектории описывают центр обруча и жук? На какое расстояние сместится жук относительно пола, пройдя четвертую часть кольца?

4.34. Один неподвижный и n подвижных блоков образуют полиспаст (рис. 4.13). Какой груз нужно подвесить к шнуру, сходящему с неподвижного блока, чтобы уравновесить систему, если на первом блоке висит груз массой m, а каждый блок имеет массу q?

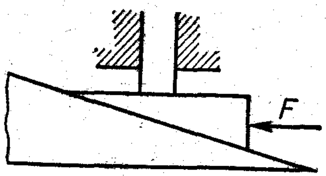


Рис. 4.14.

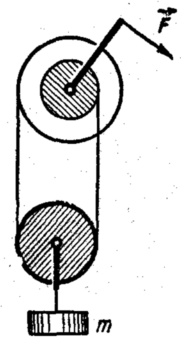


Рис. 4.15.

4.35. Какую силу нужно приложить к тыльной стороне прямоугольного клина (рис. 4.14) с катетами 10 *см* и 1 *м*, вдвигаемого под поршень массой 200 *кг*, чтобы поднимать поршень равномерно вверх? Коэффициент трения между клином и поршнем, а также между клином и опорой равен 0,1. Массой клина пренебречь. Чему равен к.п.д. клина?

4.36. Какой груз можно удержать с помощью дифференциального ворота (рис. 4.15) силой 24,5 *н*, если длина рукоятки равна 1 *м*, радиус большого цилиндра 20 *см*, малого — 10 *см*? Момент сил трения на оси ворота составляет 20% от момента приложенной силы.

4.37. Винт тисков имеет шаг 4 *мм*. При завинчивании винта деталь должна прижиматься силой в 1,47 *кн*. Какую силу нужно приложить к рукоятке тисков длиной 30 *см*, чтобы зажать деталь? К. п. д. винта 40%, потери на трение при перемещении губок тисков по станине составляют 9,8 *дж* на каждый сантиметр перемещения.

Глава 5. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основные понятия, законы и формулы

1. Колебательным движением называют движение, при котором происходит частичная или полная повторяемость состояния системы по времени. Если значения физических величин, характеризующих данное колебательное движение, повторяются через равные промежутки времени, колебания называют периодическими.

Самым простым колебательным движением является гармоническое колебание материальной точки. Гармоническим называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение, сила и т. д.), изменяются с течением времени по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

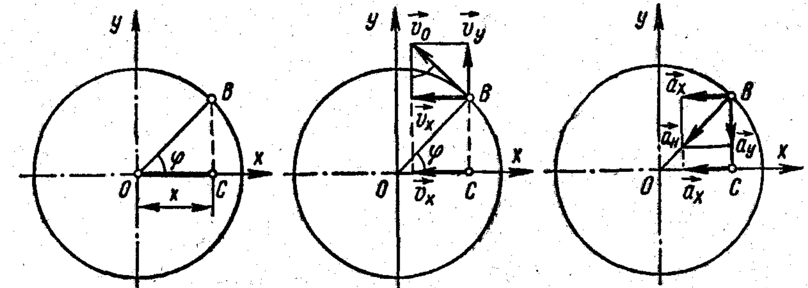


Рис. 5.1.

Основные законы гармонических колебаний материальной точки можно установить из сопоставления равномерного кругового движения точки и движения ее проекции на диаметр окружности. Если точка B, обладающая массой m, равномерно перемещается по окружности радиусом R с угловой скоростью ω (рис. 5.1), то ее проекция на горизонтальный диаметр — точка C совершает гармонические колебания вдоль оси OX.

Смещение точки C от начала отсчета O движения — ее координата x в каждый момент времени определяется уравнением

$$x = A\cos(\varphi + \varphi_0), \quad \text{или} \quad x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (5.1)$$

где t — время; φ_0 — угол, характеризующий положение точки C в момент начала отсчета движения (на чертеже $\varphi_0 = 0$), $A = R$ — амплитуда колебания.

2. Раскладывая вектор линейной скорости $\vec{v}_0$ и вектор нормального ускорения $\vec{a}_н$ по осям OX и OY, для модулей составляющих $\vec{v}_x$ и $\vec{a}_н$ (скорости и ускорения точки C) получим:

$$v_x = v_0 \sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$a_x = a_н \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку $v_0 = A\omega$ и $a_н = A\omega^2$, уравнения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания, можно представить в виде:

$$v_x = A\omega \sin(\omega t + \varphi_0); \qquad (5.2)$$

$$a_x = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \qquad (5.3)$$

Знак «минус» в последней формуле указывает на то, что ускорение при гармоническом колебании направлено в сторону, противоположную смещению.

Из соотношений (5.2) и (5.3) вытекает, что:

а) Максимальные значения скорости и ускорения колеблющейся точки равны:

$$v_{макс} = A\omega; \qquad (5.2')$$

$$a_{макс} = A\omega^2. \qquad (5.3')$$

б) Скорость и ускорение сдвинуты друг относительно друга на угол $\frac{\pi}{2}$. Там, где скорость наибольшая, ускорение равно нулю, и наоборот.

в) Во всех точках траектории ускорение направлено к центру колебаний — точке O.

3. Учитывая формулу (5.3), уравнение второго закона Ньютона для материальной точки, совершающей гармонические колебания, можно представить в виде

$$F = ma_x = mA\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \qquad (5.4)$$

где F есть величина равнодействующей всех сил, приложенных к точке, — величина возвращающей силы.

Произведение $m\omega^2$, стоящее в правой части уравнения (5.4), — величина постоянная, поэтому материальная точка может совершать гармонические колебания лишь при условии, что в процессе движения возвращающая сила изменяется пропорционально смещению и направлена к положению равновесия, т. е.

$$F = -kx.$$

Здесь k — постоянный для данной системы коэффициент, который в каждом конкретном случае может быть выражен дополнительной формулой через величины, характеризующие колебательную систему, и в то же время всегда равный $m\omega^2$.

4. Кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки равна:

$$W_к = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \qquad (5.5)$$

В процессе гармонического колебания сила изменяется пропорционально смещению, поэтому в каждый момент времени потенциальная энергия точки равна:

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \qquad (5.6)$$

Полная механическая энергия колеблющейся точки

$$W = W_к + W_п = \frac{m\omega^2 A^2}{2}. \qquad (5.7)$$

5. Всякое колебательное движение, в том числе и гармоническое, характеризуется амплитудой, периодом колебаний, частотой, круговой частотой и фазой колебаний.

Амплитудой называют наибольшее значение колеблющейся величины (смещения, скорости, ускорения и т. д.). Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называют частотой колебания f:

$$f = \frac{n}{t}.$$

Круговая частота — это число полных колебаний, совершаемых в течение 2π *сек*:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f.$$

Периодом называют время, в течение которого совершается одно полное колебание:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Величину $\omega t + \varphi_0$, стоящую под знаком тригонометрической функции в формулах (5.1) и характеризующую значение колеблющейся величины в данный момент времени, называют фазой колебаний. Величину φ_0, определяющую значение колеблющейся величины в момент начала отсчета движения, называют начальной фазой.

6. Материальная точка, подвешенная на легкой невесомой и нерастяжимой нити, совершающая колебания под действием силы тяжести и натяжения нити, называется математическим маятником. При малых углах отклонения нити от положения равновесия (точнее, бесконечно малых) колебания математического маятника являются гармоническими с периодом колебания

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}, \qquad (5.8)$$

где l — длина нити маятника; a — ускорение, сообщаемое грузу силой натяжения нити.

В наиболее распространенном частном случае, когда точка подвеса маятника находится в равновесии в поле земного тяготения и сила натяжения нити равна по величине силе тяжести P, a численно равно ускорению свободного падения на данной широте и направлено вертикально вверх. Полное ускорение математического маятника, как и во всяком гармоническом колебании, определяется уравнением (5.3).

7. Время, показываемое маятниковыми часами, пропорционально числу полных колебаний маятника n. Это число при заданном времени наблюдения t зависит от периода колебаний, а следовательно, от длины маятника и ускорения, создаваемого силой натяжения нити. Если за время t_1 маятниковые часы, идущие точно, делают n_1 полных колебаний, то при изменении l и a они за то же время t_1 будут делать n_2 колебаний, станут отставать или уходить вперед. Показания точных и неточных маятниковых часов окажутся при этом равными соответственно $t_1 = kn_1$ и $t_2 = kn_2$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции часов. Учитывая, что

$$t_1 = n_1T_1 = n_2T_2; \; T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{a_1}}; \; T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{a_2}}$$

и разность показаний точных и неточных часов равна $\pm\Delta t = t_1 - t_2$, из составленных уравнений получим:

$$\pm\Delta t = t_1\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l_2}\frac{a_2}{a_1}}\right). \qquad (5.9)$$

Эта формула служит исходным соотношением для расчета поправки к маятниковым часам. Знак «плюс» соответствует случаю, когда $t_1 > t_2$ — неточные часы отстают, знак «минус», когда $t_1 < t_2$ — неточные часы спешат.

Решение задач. Примеры

1. Задачи о колебательном движении материальной точки можно разделить на две группы: задачи, требующие применения общих уравнений гармонических колебаний, и задачи о математических маятниках и маятниковых часах.

Основная трудность при решении задач первого типа заключается в выводе уравнений (5.1) — (5.7). Получив же эти уравнения и внимательно проанализировав их, можно легко довести решение до конца, так как все дальнейшие расчеты почти целиком сводятся к математическим выкладкам.

Задачи второй группы требуют детального анализа физического явления и глубокого понимания основных формул. Эти задачи включают в себя задачи, связанные с ускоренным движением маятников, и задачи на расчет поправок к показаниям маятниковых часов.

При ускоренном движении точки подвеса математического маятника изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению всей возвращающей силы и, следовательно, частоты и периода колебания. Вывести формулу периода колебания точки, обладающей не только относительным, но и переносным ускорением, элементарными методами сравнительно трудно. Однако ее легко получить для каждого конкретного случая, внося соответствующую поправку в формулу периода (5.8).

Если маятник в том или ином направлении приобретает переносное ускорение $\vec{a}_п$, то причиной этому служит изменение силы натяжения $\vec{F}_н$ на некоторую величину $\Delta\vec{F}_н$, поскольку $\vec{P}$ не меняется и на маятник другие силы не действуют. Ускорение $\vec{a}$ здесь равно сумме ускорений $-\vec{g}$ и $\vec{a}_п$, сообщаемых силой $\vec{F}_н$ и ее приращением $\Delta\vec{F}_н$, т. е.

$$\vec{a} = -\vec{g} + \vec{a}_п.$$

Найдя обычными методами модуль этого ускорения и подставив его в соотношение (5.8), мы получим формулу периода колебаний математического маятника с учетом движения точки подвеса.

Пример 1. Небольшой груз совершает колебания по закону $x = 2\sin\pi\,(t + 0{,}5)$ *см*. Определите амплитуду, период, начальную фазу колебаний, а также максимальную скорость и ускорение груза. Через сколько времени после начала отсчета движения груз будет проходить через положение равновесия?

Решение. Сравнивая заданное уравнение с уравнением гармонических колебаний (5.1), записанным в общем виде, легко заметить, что в нашем примере $A = 2$ *см*. Фаза колебаний равна:

$$\varphi = \pi\,(t + 0{,}5) = \pi t + 0{,}5\,\pi,$$

откуда следует, что угловая частота $\omega = \pi\,сек^{-1}$, период $T = 2$ *сек*, а начальная фаза $\varphi_0 = 0{,}5\pi$.

Зная амплитуду колебаний и угловую частоту, можно найти максимальную скорость и ускорение колеблющейся точки. Согласно (5.2′) и (5.3′) они будут равны:

$$v_{макс} = 2\pi\ см/сек;$$

$$a_{макс} = 2\pi^2\ см/сек^2.$$

Уравнение движения колеблющейся точки позволяет определить ее смещение в любой момент времени и найти время, по истечении которого точка сместится от положения равновесия на заданное расстояние. В момент прохождения положения равновесия $x = 0$. Подставляя это значение в наше уравнение, получим:

$$0 = 2\sin\,\pi\,(t + 0{,}5),$$

откуда $\pi\,(t + 0{,}5) = k\pi$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$, и, следовательно, промежутки времени, спустя которые груз будет проходить положение равновесия, определяются формулой:

$$t = (k - 0{,}5)\ сек.$$

Первый раз груз пройдет положение равновесия через время $t = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ *сек* ($k = 1$) после начала отсчета движения.

Пример 2. Шарик массой $m = 20$ *г* колеблется с периодом $T = 2$ *сек*. В начальный момент времени шарик обладал энергией $W = 0{,}01$ *дж* и находился от положения равновесия на расстоянии $x_1 = 2{,}5$ *см*. Запишите уравнение гармонического колебания шарика и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

Решение. Законы изменения смещения и возвращающей силы можно записать, если мы знаем амплитуду, угловую частоту, начальную фазу и массу колеблющейся точки.

По условию задачи период колебаний нам известен, следовательно, угловая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (1)$$

Кроме того, известна полная энергия колеблющейся точки, которая согласно формуле (5.7) независимо от положения точки равна:

$$W = \frac{m\omega^2A^2}{2}. \qquad (2)$$

Наконец, используя последнее условие задачи, можно записать уравнение движения для начального момента, когда $t = 0$:

$$x_1 = A\cos\varphi_0. \tag{3}$$

Из соотношений (1) — (3) находим:

$$\omega = \pi\ сек^{-1};\quad A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W}{m}} \approx 0{,}32\ м;$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{x_1}{A} \approx 0{,}78,$$

следовательно,

$$\varphi_0 \approx 51^\circ \approx 0{,}3\pi.$$

Подставляя найденные числовые значения A, ω и φ_0 в уравнения (5.1) и (5.4) и проводя упрощения, получим ответ на вопрос задачи:

$$x = 0{,}32\ \cos\pi\,(t + 0{,}3)\ м;$$

$$F = 0{,}063\ \cos\,\pi\,(t + 0{,}3)\ н.$$

Пример 3. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине с коэффициентом упругости k. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость $\vec{v}_0$, направленную вдоль оси пружины (рис. 5. 2, *а*). Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите амплитуду и период колебаний шара.

Решение. а) В момент соударения пуля сообщит шару кинетическую энергию, вследствие чего он придет в движение и начнет сжимать пружину. Пружина сжимается до тех пор, пока энергия движения полностью не перейдет в потенциальную энергию деформации. В этот момент кинетическая энергия шара станет равной нулю, потенциальная энергия пружины достигнет максимума, смещение шара от положения равновесия станет равно амплитудному значению (рис. 5. 2, *б*). Дальше процесс пойдет в обратном порядке: форма пружины будет восстанавливаться, ее потенциальная энергия станет уменьшаться, кинетическая энергия шара будет возрастать и в положении равновесия (в точке O) первая станет равной нулю, вторая достигнет максимума. Скорость шара будет направлена вправо, и при своем движении он начнет растягивать пружину. Так как поверхность стола идеально гладка и сопротивление воздуха ничтожно мало, кинетическая энергия шара полностью перейдет в потенциальную энергию пружины и процесс начнет повторяться заново. Возвращающая сила упругости, приложенная к шару, всюду будет при этом пропорциональна смещению, и стало быть, колебания шара будут гармоническими.

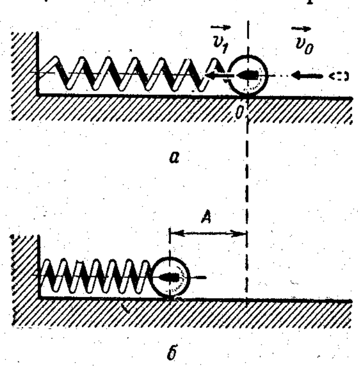


Рис. 5.2.

б) Чтобы определить амплитуду этих колебаний, нужно воспользоваться законом сохранения энергии для системы шар — пуля — пружина. В первом положении (в момент начала движения) энергия пружины равнялась нулю, а шар вместе с пулей обладал энергией

$$W_1 = \frac{(m+M)\,v_1^2}{2};$$

во втором положении энергия всей системы равна только потенциальной энергии сжатой пружины

$$W_2 = \frac{kA^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии $W_2 - W_1 = 0$, или

$$\frac{kA^2}{2} - \frac{(m+M)\,v_1^2}{2} = 0, \tag{1}$$

поскольку внешние силы (реакция опоры и сила тяжести) над системой шар — пуля — пружина работу не совершают.

Начальная скорость шара v_1 определяется из уравнения закона сохранения импульса. Пренебрегая, как обычно, смещением шара во время удара и учитывая, что пуля застревает в шаре, получим:

$$mv_0 = (m + M)\,v_1. \tag{2}$$

Согласно (5.4′) уравнение второго закона динамики для шара с пулей имеет вид:

$$F = -(m + M)\,\omega^2 x, \tag{3}$$

где ω — угловая частота, равная

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

В то же время возвращающую силу F можно выразить через коэффициент упругости пружины k и смещение x:

$$F = -kx. \tag{5}$$

Соотношения (1) — (5) полностью отражают явление, рассматриваемое в задаче, и служат исходной системой уравнений для нахождения неизвестных A и T.

Решая уравнения (1) и (2), получаем:

$$A = \frac{mv_0}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Из формул (3) — (5) находим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Пример 4. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 243$ *см* и стального шарика радиусом $r = 2$ *см*, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ *см*. Определите скорость шарика при прохождении им положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

Решение. а) К математическому маятнику применимы все уравнения гармонических колебаний. Они дают возможность определить кинематические и динамические характеристики движения маятника, причем в отличие от общего случая к этим уравнениям добавляется формула периода колебания математического маятника, позволяющая найти угловую частоту, если известна длина маятника.

б) Исходя из условий задачи, можно сразу определить период и, следовательно, угловую частоту колебаний маятника. Применяя формулу математического маятника к колебаниям шарика, необходимо учесть, что входящая в нее длина равна расстоянию $l + r$ от точки подвеса до центра тяжести колеблющегося тела, поскольку в данном примере шарик можно рассматривать как материальную точку. Кроме того, здесь $a = g$, так как точка подвеса находится в равновесии.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l+r}}\,. \qquad (1)$$

Зная угловую частоту и амплитуду, легко найти скорость маятника при прохождении им положения равновесия. В этом положении она имеет максимальное значение, равное согласно формуле (5.2')

$$v = A\,\omega. \qquad (2)$$

Наибольшее значение возвращающая сила имеет в крайнем положении маятника, где смещение становится равным амплитуде, а ускорение достигает максимума:

$$F_{\text{макс}} = ma_{\text{макс}} = mA\omega^2. \qquad (3)$$

Массу колеблющегося шарика мы найдем, зная его радиус и плотность материала:

$$m = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi r^3. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно скорости и силы, после подстановки числовых данных получим:

$$v = A\sqrt{\frac{g}{l+r}} \approx 0{,}2 \text{ м/сек}; \qquad F_{\text{макс}} = \frac{4\pi g\rho r^3 A}{3(l+r)} \approx 0{,}1 \text{ н}.$$

Пример 5. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, уходят за сутки на $\Delta t = 2$ *мин* вследствие изменения длины маятника, вызванного понижением температуры. Как нужно изменить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Решение. Из-за понижения температуры длина l_1 маятниковых часов, выверенных при комнатной температуре, уменьшается и становится равной l_2. Период колебаний таких часов уменьшается, поскольку ускорение a остается неизменным. За сутки — время t_1 — эти часы сделают большее число колебаний, чем точные часы, и, следовательно, будут спешить. Согласно формуле (5.9) показания маятниковых часов за сутки будут отличаться от показаний точных часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right), \qquad (1)$$

так как в данном случае $a_1 = a_2 = g_0$.

Чтобы часы шли точно, маятник часов нужно удлинить настолько, насколько он уменьшился при охлаждении. Относительное изменение длины должно быть при этом равно $\frac{l_1 - l_2}{l_2}$.

Из уравнения (1) находим отношение $\frac{l_1}{l_2}$:

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\Delta t}{t_1} + 1\right)^2 \approx \frac{2\Delta t}{t_1} + 1$$

(в задачах данного типа, если $\Delta t \ll t_1$, членом $\Delta t^2/t_1^2$ всегда можно пренебречь и этим упростить вычисления). Решая последнее уравнение относительно искомого изменения длины, получим:

$$\frac{l_1 - l_2}{l_1} = \frac{2\Delta t}{t_1} = 2{,}8 \cdot 10^{-3},$$

т. е. длину маятника нужно увеличить на 0,3% по сравнению с длиной, которую он имел, когда часы спешили.

Пример 6. Самое высокое место, обжитое человеком на земном шаре, находится на высоте $h = 6200$ *м* над уровнем моря (Ронбургский монастырь в Гималаях). На сколько будут уходить за сутки маятниковые часы, выверенные на этой высоте, если их перенести на уровень моря?

Решение. При перемещении маятниковых часов с одного уровня на другой изменяется период колебаний маятника, так как ускорение свободного падения зависит от высоты. Выверенные на одном уровне, такие часы будут уходить вперед или отставать в зависимости от того, опускают ли их вниз или поднимают вверх. По условию нашей задачи часы переносят на более низкий уровень, поэтому ускорение $a = g$ будет увеличиваться, и часы, выверенные в горах, станут уходить вперед. Это вызвано тем, что период колебаний маятника уменьшится, и за сутки такие часы будут делать больше колебаний, чем часы, идущие в монастыре.

Согласно формуле (5.9) показания маятниковых часов, перенесенных на уровень моря, за время t_1 будут больше показаний правильно идущих часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1-\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\right), \qquad (1)$$

так как в данном случае $l = \text{const}$. В этой формуле g_1 — ускорение свободного падения на высоте h, равное

$$g_1 = \gamma\frac{M_з}{(R_з+h)^2}, \qquad (2)$$

g_2 — ускорение свободного падения на уровне моря:

$$g_2 = g_0 = \gamma\frac{M_з}{R_з^2}. \qquad (3)$$

Из формул (2) и (3) находим:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{(R_з+h)^2}{R_з^2}.$$

Подставляя это отношение в уравнение (1), для разности показаний маятниковых часов при перемещении их на высоту h получим:

$$-\Delta t = t_1\left(1-\frac{R_з+h}{R_з}\right) = t_1\frac{h}{R_з}.$$

Подставляя числовые значения, найдем, что за сутки часы уйдут вперед на

$$\Delta t = 70 \text{ сек.}$$

Пример 7. В ракете и на Земле установлены маятниковые часы. Ракета стартует без начальной скорости и за время равноускоренного движения поднимается на высоту H. Затем двигатели выключаются и ракета продолжает двигаться замедленно с вдвое меньшим ускорением, чем при разгоне. На сколько будут отличаться показания маятниковых часов от показаний точных часов в тот момент, когда ракета достигнет высоты $2H$? Изменением ускорения силы тяжести с высотой пренебречь.

Решение. 1. Если маятниковые часы находятся в системе, которая движется с ускорением, например в ракете, период колебаний маятника, а следовательно, и показания часов будут отличаться от показаний неподвижных часов. Это объясняется тем, что ускорение a, создаваемое силой натяжения нити, становится больше или меньше ускорения g, при котором обычно выверяются часы.

В нашем примере первую половину высоты $2H$ ракета двигалась ускоренно: сила натяжения нити $F_{1н}$ была больше силы тяжести P груза, т. е. $a_1 > g$, и, стало быть, маятниковые часы уходили вперед. Вторую половину высоты $2H$ ракета, а с ней и маятниковые

часы двигались замедленно. Это возможно лишь при условии, что $F_{2н} < P$, т. е. $a_2 < g$. Маятниковые часы здесь будут отставать. Чтобы определить разность показаний маятниковых часов, установленных в ракете, и часов, идущих правильно на Земле, нужно определить, на сколько они уйдут вперед при $a_1 > g$, отстанут затем при $a_2 < g$, и из первой поправки вычесть вторую.

2. При ускоренном подъеме ракеты на высоту H период колебаний маятника уменьшится, частота колебаний увеличится и за время подъема t_{01} маятниковые часы уйдут вперед на

$$-\Delta t_1 = t_{01}\left(1-\sqrt{\frac{a_1}{g}}\right), \qquad (1)$$

поскольку длина маятника останется неизменной.

Если ракета поднимается вверх с ускорением w_1, то полное ускорение, создаваемое силой натяжения нити, будет равно:

$$a_1 = g + w_1. \qquad (2)$$

Ускорение w_1 можно рассматривать как переносное и определить его из уравнения движения ракеты

$$H = \frac{w_1 t_{01}^2}{2}. \qquad (3)$$

При замедленном движении ракеты сила натяжения и сообщаемое ею ускорение уменьшаются. Период колебаний маятниковых часов увеличится, частота колебаний станет меньшей и за время t_{02} подъема ракеты с высоты H на высоту $2H$ маятниковые часы отстанут от правильно идущих часов на

$$\Delta t_2 = t_{02}\left(1-\sqrt{\frac{a_2}{g}}\right). \qquad (1')$$

Ускорение, создаваемое силой натяжения нити при таком движении, будет равно:

$$a_2 = g - w_2, \qquad (2')$$

где согласно условиям задачи

$$w_2 = \frac{w_1}{2}.$$

Точное время замедленного подъема можно определить из уравнения движения

$$H = v_0 t_{02} - \frac{w_2 t_{02}^2}{2}, \qquad (3')$$

где

$$v_0 = w_1 t_{01}.$$

Показания маятниковых часов в момент достижения ракетой высоты $2H$ будут отличаться от истинного времени (времени подъема) на величину

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно с учетом того, что $t_{01} = t$, получим:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{gt^2+2H}+0,59\sqrt{gt^2-H}}{\sqrt{g}} - 1,59t.$$

Это и будет ответ на вопрос задачи.

Задачи к главе 5

5.1. Две идеально гладкие плоскости составляют двугранный угол. Левая плоскость наклонена к горизонту под углом α, правая — под углом β. Определите период колебаний шарика, скользящего вниз и вверх по этим плоскостям, если вначале он находился на левой плоскости на высоте h.

5.2. Грузик массой 10 *г* совершает колебания на нити длиной 1 *м* и обладает энергией 0,015 *дж*. Чему равна амплитуда колебаний грузика? Можно ли эти колебания считать гармоническими?

5.3. Точка, совершающая гармонические колебания, в некоторый момент времени имеет смещение, скорость и ускорение, равные соответственно $4 \cdot 10^{-2}$ *м*, 0,05 *м/сек*, 0,8 *м/сек*^{2}. Чему равны амплитуда и период колебаний точки? Чему равна фаза колебаний в рассматриваемый момент времени? Каковы максимальная скорость и ускорение точки?

5.4. Шарик массой 10 *г* совершает синусоидальные колебания с амплитудой 3 *см* и частотой 10 *сек*$^{-1}$. Чему равны максимальное значение возвращающей силы и полная энергия шарика? Каковы будут эти значения, когда шарик удален от положения равновесия на расстояние 2 *см*? Начальная фаза колебаний равна нулю.

5.5. Между точками A и B шарик массой m совершает гармонические колебания с периодом T. Определите величину возвращающей силы и кинетическую энергию шарика по прошествии t *сек* после прохождения им положения равновесия, если расстояние AB равно $2l$.

5.6. Точка совершает колебания, описываемые уравнением $x = 5 \sin 2t$. В некоторый момент времени сила, действующая на точку, и ее потенциальная энергия равны соответственно $F = 5 \times 10^{-3}$ *н* и $W_п = 10^{-4}$ *дж*. Чему равны фаза и кинетическая энергия точки в этот момент времени?

5.7. Автомобиль массой 1,5 *т* при движении по ребристой дороге совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом 0,5 *сек* и амплитудой 15 *см*. Определите максимальную силу давления, действующую на каждую из четырех рессор автомобиля.

5.8. Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с частотой $f = 0,25$ *сек*$^{-1}$. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу равен $k = 0,1$. Какова может быть максимальная амплитуда A колебаний платформы, чтобы груз не скользил по ней?

5.9. На идеально гладкой поверхности стола закреплена легкая пружина с грузом массой m на конце. Стол движется равномерно со скоростью v и в некоторый момент времени резко останавливается. С какой амплитудой груз начнет совершать колебания? Чему будут равны период колебаний и максимальное ускорение груза? Коэффициент упругости пружины равен k.

5.10. Легкая пружина с коэффициентом упругости 19,6 *н/м* подвешена к штативу. В некоторый момент к свободному концу пружины подвесили гирю массой 100 *г* и осторожно отпустили. Запишите уравнение движения гири на пружине, приняв за начало отсчета положение равновесия.

5.11. Две пружины с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 соединены один раз последовательно, второй раз параллельно. Во сколько раз будут отличаться периоды вертикальных колебаний груза на таких пружинах?

5.12. Ареометр массой m, имеющий площадь поперечного сечения S, плавает в растворе электролита с плотностью ρ. Ареометр погрузили еще немного и отпустили. С какой частотой ареометр будет совершать вертикальные колебания?

5.13. В открытые сообщающиеся сосуды с площадью поперечного сечения S и $2S$ налита ртуть массой m. Столбик ртути в одном из сосудов вывели из положения равновесия, вследствие чего ртуть начала колебаться. Найдите период колебаний ртути.

5.14. Два цилиндрических шкива одинакового радиуса вращаются в противоположные стороны. Расстояние между осями шкивов 15 *см*. На шкивы положили однородный стержень так, что его центр тяжести оказался смещен к одному из шкивов. Коэффициент трения между стержнем и шкивом 0,2. Определите период колебаний стержня.

5.15. Два шарика массами m и $2m$ соединены между собой пружиной с коэффициентом упругости k. Шарики лежат на идеально гладком столе. а) Пружину сжали, прикладывая к шарикам две силы, каждая из которых $F = mg$, и затем быстро отпустили. Как будут двигаться шарики? б) В маленький шарик попадает пуля массой m, летящая вдоль линии центров шаров со скоростью v. Считая удар неупругим, определите период и амплитуду колебаний шаров.

5.16. Длина нити одного из математических маятников на 15 *см* больше длины другого. В то время как один из маятников делает 7 колебаний, другой делает на одно колебание больше. Чему равны периоды колебаний маятников?

5.17. В идеально гладкую сферическую полость радиусом R положили небольшой грузик и отпустили. Сколько раз в течение времени t грузик побывает в положении равновесия, если известно, что амплитуда его колебаний ничтожно мала по сравнению с радиусом полости?

5.18. На сколько уменьшится число колебаний маятника с периодом колебаний 1 *сек* за сутки, если длина его возрастет на 5 *см*?

5.19. Маятник совершает колебания с амплитудой 1 *см* и имеет период 1 *сек*. Определите максимальные значения скорости и ускорения маятника.

5.20. Математический маятник совершает колебания с амплитудой A. Через время t после начала движения из положения равновесия его смещение было равно 0,5 A. Определите длину маятника.

5.21. В ракете установлен математический маятник длиной l. Чему будет равен период колебаний такого маятника, если ракета начнет подниматься вертикально вверх с ускорением a?

5.22. В лифте находится математический маятник. Во сколько раз изменяется период колебаний маятника, когда лифт опускается с ускорением 0,25 g?

5.23. Маятник длиной $l = 1$ *м* совершает гармонические колебания в кабине самолета. Чему равен период колебаний маятника при движении самолета в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $a = 3$ *м/сек*^{2}? Будет ли зависеть период от знака ускорения и положения плоскости колебаний относительно кабины самолета? Чему будет равен период, если самолет, имея скорость v, начнет описывать в горизонтальной плоскости окружность радиусом R?

5.24. Маятник укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Чему равен период колебаний маятника во время движения тележки? Длина маятника l. Каков будет ответ, если тележку пустить вверх по наклонной плоскости?

5.25. В ракете, запущенной вертикально вверх, установлен математический маятник. Что произойдет с маятником после того, как двигатели прекратят работу и ракета будет двигаться лишь под действием силы тяжести? Как будет вести себя маятник при свободном падении ракеты?

5.26. В кабине аэростата установлены маятниковые часы. Без начальной скорости аэростат начинает подниматься вверх с ускорением $a = 0,2$ *м/сек*^{2}. На какую высоту h поднимается аэростат за время, когда по маятниковым часам пройдет $t_м = 60$ *сек*?

5.27. В космическом корабле установлены маятниковые часы. Корабль без начальной скорости запускают вертикально вверх, и он поднимается с ускорением 0,5 g. Достигнув высоты h, корабль начинает двигаться замедленно с тем же по величине ускорением. На какой высоте маятниковые часы будут показывать точное время? Изменением g с высотой пренебречь.

5.28. К тележке, которая может двигаться по горизонтальным рельсам без трения, на нити длиной l подвешен шарик массой m. Нить отклонили на небольшой угол и отпустили, после чего шарик стал совершать гармонические колебания с частотой ν. Определите массу тележки.

Глава 6. ГИДРОМЕХАНИКА

Основные понятия, законы и формулы

1. Основная задача гидромеханики состоит в том, чтобы найти законы распределения давлений и скоростей внутри жидкости. Сравнительно просто эта задача решается для идеальной жидкости — несжимаемой жидкости, в которой отсутствуют силы трения между ее слоями (нет вязкости). Со стороны идеальной жидкости на тела могут действовать только нормальные силы упругости. Силовое взаимодействие в жидкости характеризуется скалярной величиной — давлением.

Давление, производимое силой F, равномерно распределенной по площади S и действующей перпендикулярно площади, равно:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{6.1}$$

Давление, создаваемое покоящейся жидкостью, называют гидростатическим.

При отсутствии движения внутри идеальной жидкости, находящейся в равновесии, давление, производимое жидкостью на глубине h, равно:

$$p = \rho g h, \tag{6.2}$$

где ρ — плотность жидкости; g — ускорение свободного падения.

Формула (6.2) носит общий характер: давление не зависит от того, какую форму имеет сосуд, содержащий жидкость.

Сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда равна весу столба жидкости с основанием, равным площади дна сосуда:

$$F_{дн} = p_{дн} S_{дн} = \rho g h S_{дн}.$$

Средняя сила давления жидкости на плоскую боковую стенку наполненного сосуда равна давлению жидкости на глубине центра тяжести стенки, умноженному на площадь ее поверхности:

$$F_б = p_{ц.т} S_б = \rho g h_{ц.т} S_б.$$

Давление p_0 на открытой поверхности жидкости передается во все точки жидкости без изменения (закон Паскаля).

Из закона Паскаля следует:

а) Полное давление в любой точке жидкости складывается из давления p_0 на ее открытой поверхности, которое в большинстве случаев равно атмосферному, и гидростатического давления столба жидкости, находящегося над этой точкой:

$$p = p_0 + \rho g h.$$

б) При равновесии жидкости давление на поверхности одного уровня внутри однородной жидкости во всех точках этой поверхности одинаково.

2. На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_в = \rho_ж g V,$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости; V — объем вытесненной жидкости. Выталкивающая сила является суммой сил упругости, действующих на поверхность тела со стороны жидкости. Приложена эта сила в центре тяжести вытесняемого объема жидкости и направлена по нормали к ее открытой поверхности.

На тело, находящееся на дне сосуда с жидкостью (или погруженное в жидкость на нити), в общем случае действуют три силы: сила тяжести $\vec{P}$, выталкивающая сила $\vec{F}_в$ и реакция $\vec{N}$ дна сосуда (или сила натяжения нити $\vec{F}_н$), численно равная весу тела в жидкости.

3. При стационарном (установившемся) течении идеальной жидкости, когда все частицы жидкости, проходящие через данную точку пространства, имеют одинаковую скорость, через любое сечение потока проходит одинаковое количество жидкости (закон постоянства потока):

$$Q = \frac{m}{t} = \text{const}. \tag{6.3}$$

Если жидкость с плотностью ρ проходит через сечение S со скоростью v, то временной расход жидкости Q через это сечение равен:

$$Q = \rho S\, v. \tag{6.3′}$$

Из формул (6.3) и (6.3′) следует, что для двух произвольных сечений потока

$$\rho\, S_1\, v_1 = \rho\, S_2\, v_2, \tag{6.3″}$$

где v_1 и v_2 — скорости частиц жидкости, проходящих через сечения S_1 и S_2.

Поток жидкости, текущей со скоростью v и падающей с высоты h, обладает мощностью

$$N = \frac{W_{полн}}{t} = \frac{W_к + W_п}{t} = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t}, \tag{6.4}$$

или

$$N = \frac{Qv^2}{2} + Qgh, \tag{6.4′}$$

или

$$N = \rho\frac{Sv^3}{2} + \rho Svgh. \tag{6,4″}$$

Если в произвольном сечении установившегося потока выбрать достаточно тонкий слой жидкости, центр тяжести которого находится на высоте h от нулевого уровня отсчета, то вдоль всего потока должно быть (закон Бернулли):

$$p + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const}, \tag{6.5}$$

где p — внешнее давление; v — скорость движения жидкости через данное сечение.

Сумма $p + \rho gh$ представляет статическое давление, член $\rho\frac{v^2}{2}$ — динамическое давление жидкости. Все вместе дает полное давление жидкости в движущемся слое.

С энергетической точки зрения давление p есть работа, совершаемая внешними силами над единичным объемом жидкости: произведения ρgh и $\frac{\rho\, v^2}{2}$ соответственно представляют потенциальную и кинетическую энергию жидкости, заключенной в этом объеме.

Согласно формуле (6.5) для двух произвольных сечений потока идеальной жидкости

$$p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \tag{6.5′}$$

Если $v_1 = 0$, $h_2 = 0$ и $p_1 = p_2$ (происходит истечение жидкости из малого отверстия широкого открытого сосуда), то

$$v = \sqrt{2gh} \text{ (формула Торричелли)}, \tag{6.5″}$$

где $v = v_2$, $h = h_1$ — глубина, на которой находится отверстие в сосуде.

Решение задач. Примеры

Законы гидромеханики позволяют решать задачи как по статике, так и по динамике жидкостей. Среди этих задач нужно прежде всего выделить задачи на уравнение второго закона Ньютона, в которых движущимся телом является слой жидкости. В этих задачах приходится учитывать не силы, действующие между телами, а производимые ими давления.

1. Правила решения задач этой группы почти такие же, как задач на статику или динамику тела, движущегося поступательно. Различие состоит лишь в том, что уравнения равновесия или второго закона Ньютона нужно записывать не через силы, а через давления. Выразить левую часть основного уравнения динамики через давление можно следующим образом. Выбрав слой жидкости, для которого составляется уравнение, надо представить его массу как произведение $\rho S l$, где ρ — плотность жидкости; S — площадь поперечного сечения, проведенного перпендикулярно направлению движения жидкости; l — толщина слоя. Тогда уравнение второго закона Ньютона можно записать так:

$$\Sigma\vec{F} = \rho\, S l\vec{a},$$

откуда

$$\Sigma p = \rho\, l a.$$

В левой части последнего равенства стоит сумма давлений, производимых на движущийся слой жидкости.

2. Задачи, связанные с нахождением давления и сил давления в какой-либо точке внутри покоящейся жидкости, решают на основании закона Паскаля и вытекающих из него следствий. Методика решения таких задач состоит в следующем:

а) Необходимо сделать чертеж и отметить все равновесные уровни жидкости, которые она занимала по условию задачи. Если даны сообщающиеся сосуды с разнородной жидкостью, нужно отметить уровни каждой из них и указать границы раздела. Затем следует провести поверхность нулевого уровня — поверхность, от которой будут отсчитываться высоты столбов жидкости. Эта поверхность должна проходить через однородную жидкость — по самой нижней границе раздела сред (жидкость — жидкость, жидкость — воздух). Если по условию задачи происходит перетекание жидкости из одной части сосуда в другую и при этом имеется два или несколько равновесных состояний жидкостей, необходимо отметить высоты всех уровней, отсчитывая их от поверхности нулевого уровня.

б) Указав высоты всех столбов и расстояния, на которые смещаются уровни жидкости, можно приступать к составлению уравнения равновесия жидкости. Для двух произвольных точек, лежащих на поверхности нулевого уровня, должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=1}^{m} p'_k ,$$

или подробнее:

$$p_0 + \rho_1 g h_1 + \ldots + \rho_n g h_n = p'_0 + \rho'_1 g h'_1 + \ldots + \rho'_k g h'_k .$$

В этом уравнении p_0 — давление на свободной поверхности верхнего слоя (обычно атмосферное), h_1, ρ_1, h'_1, ρ'_1 и т. д. — высоты элементарных столбов жидкостей и их плотности.

в) Если до наступления момента равновесия жидкость переливалась из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению добавляют условие несжимаемости жидкости: при уменьшении объема жидкости в какой-либо части сосуда на V_1 в другой части сосуда объем возрастет на такую же величину. Если сосуды имеют форму цилиндров, то условие несжимаемости $V_1 = V_2$ можно записать так:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

где S_1 и S_2 — площади поперечного сечения; h_1 и h_2 — высоты столбов переливаемой жидкости.

Составив уравнение равновесия и, если нужно, условие несжимаемости, следует записать математически все остальные условия задачи. Как правило, они связывают между собой высоты h_1, h_2 и т. д.

г) Затем надо выписать числовые значения известных величин,

проверить число неизвестных в полученных уравнениях и решить их совместно относительно искомой величины.

д) В заключение остановимся на задачах, где требуется найти давление внутри жидкости, движущейся ускоренно. При решении их нужно учесть замечания к п. 7 гл. 2. Давление на глубине, отсчитанной от установившейся поверхности жидкости, движущейся с ускорением a, можно вычислить по формуле:

$$p = p_0 + \rho g' h, \qquad \text{где} \quad g' = |\vec{g} + (-\vec{a})|.$$

3. Решение задач о плавании тел основано на законах динамики поступательного движения твердого тела с учетом закона Архимеда, позволяющего выразить выталкивающую силу, входящую в уравнение равновесия (или динамики), через величины, которые считаются в данной задаче известными. Принципиально решение таких задач не отличается от решения задач динамики материальной точки.

а) Нужно сделать чертеж и, руководствуясь третьим законом Ньютона, расставить силы, действующие на тело, погруженное в жидкость.

Если в задаче говорится о весе тела в воде, то тело удобно изобразить подвешенным на нити в жидкости или лежащим на дне сосуда и помнить, что вес в воде численно равен силе натяжения нити или нормальной реакции дна (но не силе земного притяжения P). Не следует также забывать, что сила давления верхнего слоя жидкости, действующая на погруженное тело, в выталкивающей силе учтена.

Если тело плавает на границе раздела двух жидкостей, выталкивающая сила, действующая на тело, равна:

$$F_в = \rho_1 g V_1 + \rho_2 g V_2,$$

где V_1 и V_2 — объемы частей тела, находящихся в жидкостях с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно.

б) Составить основное уравнение динамики поступательного движения

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

и подставить в него вместо P и $F_в$, если эти силы не заданы, их выражения:

$$P = \rho_т g V_т \ \text{ и } \ F_в = \rho_ж g V.$$

Здесь $V_т$ и $\rho_т$ — объем и плотность погруженного тела, V — объем погруженной части тела, равный объему вытесненной жидкости.

Если погруженное тело находится в равновесии относительно жидкости, то основное уравнение упрощается, поскольку правая часть обращается в нуль и задача сводится к задаче статики.

Для ее решения нужно составить уравнение равновесия в проекциях и редко уравнение моментов.

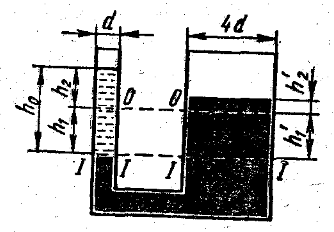


Рис. 6.1.

в) Далее, руководствуясь общими правилами решения задач механики, необходимо составить дополнительные уравнения, выписать числовые значения заданных величин, проверить число неизвестных в полученной системе уравнений и решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают столб воды высотой $h_0 = 70$ *см*. На сколько поднимется уровень ртути в одном сосуде и опустится в другом?

* Р е ш е н и е. а) Делаем чертеж (рис. 6.1), на котором отмечаем начальный уровень ртути $O-O$, и выбираем поверхность нулевого уровня по границе раздела воды и ртути $1-1$.

Разбиваем столбы жидкости над этой поверхностью в левом и правом сосудах на элементарные части и обозначаем их высоты: h_1 и h_2' — понижения и повышения уровней в левом и правом колене; h_1' — расстояние между уровнями $O-O$ и $1-1$ в правом колене, h_2 — высота столба воды над начальным уровнем.

б) Записываем условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах: на поверхности $1-1$ давление в любых точках, находящихся в левом колене, равно давлению в точках, находящихся в правом:

$$\rho_в g h_1 + \rho_в g h_2 = \rho_р g h_1' + \rho_р g h_2'. \qquad (1)$$

Обратите внимание, что на поверхности $O-O$, проходящей через разнородные жидкости, давления в левом и правом коленах разные.

в) Условие несжимаемости и дополнительные условия задачи позволяют составить еще три уравнения:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2' \text{ или } d^2 h_1 = 16 d^2 h_2'; \qquad (2)$$

$$h_1 + h_2 = h_0; \qquad (3)$$

$$h_1 = h_1'. \qquad (4)$$

г) Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно искомых неизвестных h_2' и h_1, после подстановки числовых значений получим:

$$h_2' = \frac{\rho_в h_0}{17\rho_р};\ h_2' \approx 0{,}3 \text{ см}; \quad h_1 = \frac{16}{17}\cdot\frac{\rho_в h_0}{\rho_р};\ h_1 \approx 4{,}8 \text{ см}.$$

Пример 2. Какой массы камень нужно положить на плоскую льдину толщиной $h = 20$ *см*, чтобы он вместе с льдиной полностью погрузился в воду, если площадь льдины равна $S = 1$ *м*²? Плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ *г/см*³, плотность камня $\rho_к = 2{,}2$ *г/см*³. С какой силой камень давит на льдину в воде?

Р е ш е н и е. Так как льдина и камень находятся в погруженном состоянии в равновесии и по условию задачи требуется определить не только массу камня, но и внутреннюю силу, действующую между этими телами, необходимо составить уравнения равновесия отдельно для каждого тела.

К льдине приложены сила земного притяжения $\vec{P}_л$, выталкивающая сила воды $\vec{F}_1$ и сила нормального давления камня $\vec{N}$. Под действием этих сил льдина находится в покое, ее ускорение равно нулю, следовательно,

$$F_1 - P_л - N = 0. \qquad (1)$$

Поскольку силы $P_л$ и F_1, входящие в это уравнение, не заданы, их нужно выразить через известные величины:

$$P_л = \rho_л g h S;\quad F_1 = \rho_в g h S, \qquad (2)$$

где $\rho_л$ и $\rho_в$ — плотность льда и воды; h и S — толщина и площадь льдины (объем погруженного тела равен объему вытесненной жидкости).

На камень действует сила тяжести $\vec{P}_к$, выталкивающая сила $\vec{F}_2$ воды и нормальная реакция опоры $\vec{N}$ (со стороны льдины). Так как камень находится в равновесии, то

$$F_2 + N - P_к = 0. \qquad (3)$$

Как и в первом случае, силу тяжести и выталкивающую силу нужно выразить через заданные величины:

$$P_к = \rho_к g V_к;\quad F_2 = \rho_в g V_к. \qquad (4)$$

Исключая из уравнений (1) — (4) неизвестные F_1, $P_л$, F_2 и объем камня $V_к$, находим:

$$P_к = \frac{(\rho_в - \rho_л)\rho_к h S}{(\rho_к - \rho_в)};\ P_к \approx 360 \text{ н};\ N = (\rho_в - \rho_л) g h S;\ N \approx 19{,}6 \text{ н}.$$

Пример 3. Прямой деревянный цилиндр плавает на поверхности воды так, что в воде находится $n = 0{,}9$ его высоты. Какая часть высоты цилиндра будет погружена в воду, если на воду налить слой масла, полностью закрывающий цилиндр? Плотность масла принять равной $\rho_м = 0{,}8\cdot10^3$ *кг/м*³.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 6.2), на котором изображаем два положения цилиндра: до и после того, как было налито масло. Обозначаем площадь цилиндра через S, части высоты цилиндра, находящиеся в воздухе и воде (первый случай), через h_1 и h_2; в масле и воде (второй случай) —

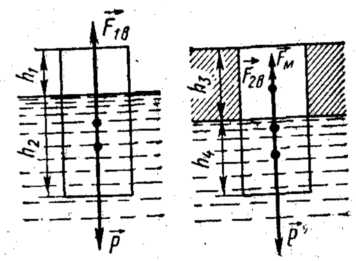


Рис. 6.2.

через h_3 и h_4. В первом случае на цилиндр действуют сила тяжести $\vec{P}$ и выталкивающая сила воды $\vec{F}_{1в}$; во втором — сила тяжести $\vec{P}$ и выталкивающие силы со стороны воды $\vec{F}_{2в}$ и масла $\vec{F}_{м}$. (На тела, находящиеся частично в жидкости, частично в воздухе действует выталкивающая сила воздуха. В большинстве случаев ею пренебрегают, так как она очень мала.)

В обоих случаях цилиндр находится в равновесии, поэтому

$$F_{1в} - P = 0; \qquad F_{2в} + F_{м} - P = 0.$$

Учитывая, что

$$P = \rho_т g(h_1 + h_2)S; \;\; F_{1в} = \rho_в g h_2 S;$$
$$F_{2в} = \rho_в g h_4 S, \;\; F_{м} = \rho_м g h_3 S,$$

где $\rho_т$ и $\rho_в$ — соответственно плотность материала цилиндра и воды, записываем условия равновесия более подробно:

$$\rho_в h_2 - \rho_т (h_1 + h_2) = 0 \text{ (после сокращения на } S \text{ и } g), \tag{1}$$

$$\rho_в h_4 + \rho_м h_3 - \rho_т (h_1 + h_2) = 0. \tag{2}$$

Кроме того,

$$h_1 + h_2 = h_3 + h_4, \tag{3}$$

и по условию задачи

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} = n. \tag{4}$$

Из составленной системы уравнений надо определить отношение

$$x = \frac{h_4}{h_3 + h_4}. \tag{5}$$

Система уравнений (1) — (5) содержит шесть неизвестных величин: все высоты, $\rho_т$ и x. Такая система имеет определенное решение, если требуется найти не все неизвестные, а только некоторые из них или их отношение. Уравнения (1) и (4) позволяют сразу определить плотность дерева:

$$\rho_т = \rho_в \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \rho_в n.$$

Второе уравнение с учетом равенства (3) можно представить после несложных преобразований так:

$$\rho_в \frac{h_4}{h_3 + h_4} + \rho_м \frac{h_3}{h_3 + h_4} - \rho_т = 0,$$

откуда

$$x = \frac{h_4}{h_3 + h_4} = \frac{\rho_т - \rho_м}{\rho_в - \rho_м},$$

или с учетом выражения для плотности дерева:

$$x = \frac{n\rho_в - \rho_м}{\rho_в - \rho_м} = 0{,}5.$$

Пример 4. Полый медный шар весит в воздухе $P = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ *н*, в воде $T = 2{,}17 \cdot 10^{-2}$ *н*. Определите объем внутренней полости шара. Плотность меди $\rho_м = 8{,}8 \cdot 10^3$ *кг/м³*. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

Решение. При взвешивании шара в воде на него действует сила тяжести $\vec{P}$, равная весу тела в воздухе (так как выталкивающей силой воздуха можно пренебречь), сила натяжения $\vec{T}$ нити, на которой шар подвешен к динамометру (численно она равна весу тела в воде), и выталкивающая сила воды $\vec{F}_в$. Поскольку взвешиваемое тело находится в равновесии, то

$$F_в + T - P = 0.$$

Выразив $F_в$ через плотность воды $\rho_в$ и объем погруженной части тела, равный объему тела $V_т$, получим

$$\rho_в g V_т + T - P = 0. \tag{1}$$

Объем полости $V_п$ равен объему всего тела $V_т$ без объема $V_м$, который занимает материал тела (в нашем примере медь):

$$V_п = V_т - V_м \text{ или } V_п = V_т - \frac{P}{\rho_м g}. \tag{2}$$

Из уравнений (1) и (2) находим объем полости:

$$V_п = \frac{P - T}{\rho_в g} - \frac{P}{\rho_м g}; \; V_п = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Пример 5. Тонкая палочка плотностью ρ_1 закреплена шарнирно на одном конце и опущена свободным концом в жидкость с плотностью $\rho_2 < \rho_1$. Какая часть длины палочки будет находиться в жидкости при равновесии?

Решение. Палочка шарнирно закреплена одним концом и может совершать только вращательное движение. Следовательно, условием ее равновесия будет равенство нулю алгебраической суммы моментов всех действующих сил относительно оси, проходящей через шарнир.

Допустим, что палочка имеет длину l, при равновесии образует с горизонталью угол α и в жидкости находится ее длина x (рис.6.3).

Чтобы составить уравнение моментов, расставим внешние силы, действующие на палочку (все

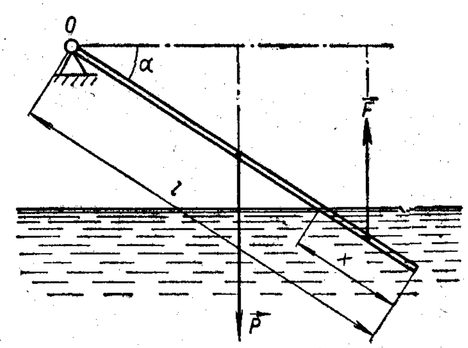


Рис. 6.3.

силы, кроме силы, действующей со стороны шарнира, так как ее момент относительно точки O равен нулю). Со стороны Земли на палочку действует сила тяжести $\vec{P}$, приложенная в середине палочки; со стороны жидкости — выталкивающая сила $\vec{F}$, приложенная в центре тяжести жидкости, находившейся на месте погруженной части тела, т. е. на расстоянии $x/2$ от свободного конца палочки.

Плечо силы $\vec{P}$ относительно точки O равно $\frac{l}{2}\cos\alpha$, силы $\vec{F}$ — $(l - \frac{x}{2})\cos\alpha$ и условие равновесия — уравнение моментов относительно неподвижной оси вращения, проходящей через точку O, будет иметь вид:

$$P\frac{l}{2}\cos\alpha - F\left(l - \frac{x}{2}\right)\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Силы, входящие в уравнение моментов, не заданы, поэтому их нужно выразить через плотности и объемы тела и жидкости:

$$P = \rho_1 g l S; \; F = \rho_2 g x S. \qquad (2)$$

По условию задачи требуется определить отношение x/l.

Подставляя в уравнение (1) выражения для сил P и F, после простых преобразований получим:

$$\rho_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\rho_2\left(\frac{x}{l}\right) + \rho_1 = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно искомого отношения, находим:

$$\frac{x}{l} = \frac{\rho_2 - \sqrt{\rho_2^2 - \rho_1\rho_2}}{\rho_2}.$$

(Второй, больший корень уравнения, как нетрудно заметить, показывает, какая часть длины находится в воздухе, если под x подразумевать длину палочки над водой.)

Пример 6. Стальной цилиндр плотностью ρ_c, диаметром d и высотой h опущен в воду на тонкой цепочке длиной l и массой m_1. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть цилиндр из воды за цепочку?

Решение. Чтобы совершить минимальную работу при подъеме тела, к нему нужно приложить такую силу, которая увеличивала бы потенциальную энергию тела, не сообщая ему заметной скорости.

Для подъема цилиндра из воды необходимо совершить работу A_1 по подъему цепочки и работу A_2 по подъему самого цилиндра. В обоих случаях придется преодолевать только действие силы тяжести, поэтому вся совершенная работа равна:

$$A = A_1 + A_2. \qquad (1)$$

Чтобы нижнее основание цилиндра оказалось на уровне воды, цепочку надо поднять вверх на расстояние $l + h$. Так как по условию задачи цепочка тонкая, то выталкивающей силой воды, действующей на цепочку, можно пренебречь, и работа по подъему цепочки

$$A_1 = m_1 g(l + h). \qquad (2)$$

При перемещении цилиндра на него, помимо силы тяжести $P_2 = m_2 g$ и натяжения, действует выталкивающая сила воды, направленная вверх и как бы уменьшающая силу земного притяжения P_2. Пока цилиндр полностью находится в воде, выталкивающая сила постоянна, когда же цилиндр станет выходить из воды, выталкивающая сила начнет уменьшаться от максимального значения $F_в$ до нуля. Объем погруженной части цилиндрического тела пропорционален глубине погружения h, поэтому выталкивающая сила здесь меняется в зависимости от h по линейному закону, и, следовательно, ее работу можно найти по формуле:

$$A' = F_{в.ср}h = \frac{F_в h}{2}.$$

Учитывая это, всю работу A_2 по подъему цилиндра можно представить как работу по преодолению силы притяжения P_2 на перемещении $l + h$ без работы постоянной выталкивающей силы на перемещении l (верхнее основание цилиндра доходит до поверхности воды) и работы переменной выталкивающей силы на перемещении, равном высоте цилиндра:

$$A_2 = m_2 g(l + h) - F_в l - F_в\frac{h}{2}, \qquad (3)$$

где

$$m_2 = \rho_c\frac{\pi d^2}{4}h; \; F_в = \rho_в g\frac{\pi d^2}{4}h. \qquad (4)$$

С учетом (2), (3) и (4), вся работа по подъему цилиндра равна:

$$A = m_1 g(l + h) + [l(\rho_c - \rho_в) + h(\rho_c - 0{,}5\rho_в)]\,g\frac{\pi d^2}{4}h.$$

Пример 7. В дне сосуда проделано отверстие сечением S_1. В сосуд налита вода до высоты h, и уровень ее поддерживается постоянным. Определите площадь поперечного сечения струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $3h$ от его дна. Считать, что струя не разбрызгивается, силами трения в жидкости пренебречь.

Решение. Решение этой задачи основано на применении закона постоянства потока жидкости и уравнения Бернулли.

Если не учитывать сжимаемости воды, можно считать, что за любые равные промежутки времени через сечения потока 1 и 2 (рис. 6.4) проходит одинаковое количество жидкости. Согласно уравнению (6.3″) площади поперечного сечения потока S_1 и S_2 и скорости жидкости v_1 и v_2 должны быть связаны между собой соотношением

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (1)$$

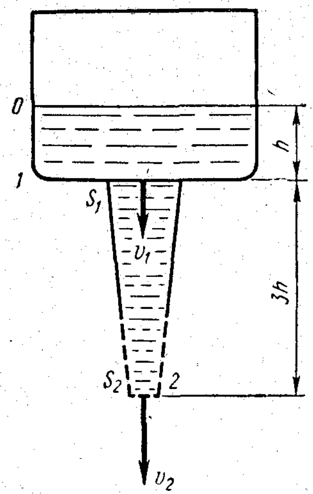


Рис. 6.4.

Скорости слоев в потоке жидкости можно определить из закона Бернулли (6.5), представляющего собой выражение закона сохранения энергии для жидкости, заключенной в единичном объеме.

При составлении уравнения Бернулли нужно рассмотреть энергию единичного объема жидкости в каких-либо двух сечениях потока. Одно из этих сечений нужно взять на уровне *1*, второе — на уровне *2*, т. е. там, где нас интересуют скорости v_1 и v_2. Для определения потенциальной энергии, как всегда, устанавливаем уровень отсчета высоты. При сравнении энергий, которые имеет единичный объем жидкости, переходя из слоя *0* в слой *1*, уровень отсчета высоты берем на слое *1*, при сравнении энергий в слоях *0* и *2* — на слое *2*.

Находясь на уровне *0*, жидкость, заключенная в единичном объеме, имеет относительно уровня *1* только потенциальную энергию, равную ρgh, так как по условию задачи скоростью жидкости на открытой поверхности можно пренебречь. Перейдя в сечение *1*, эта жидкость будет иметь только кинетическую энергию $\frac{\rho v_1^2}{2}$. Поскольку работа внешних сил в процессе перемещения жидкости равна нулю (внешними силами здесь являются силы атмосферного давления, действующие на жидкость сверху и снизу), то по закону Бернулли

$$\rho gh = \frac{\rho v_1^2}{2}, \text{ откуда } v_1 = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

При переходе единичного объема жидкости с уровня *0* на уровень *2* ее потенциальная энергия $\rho g4h$ полностью переходит в кинетическую $\frac{\rho v_2^2}{2}$ и аналогично предыдущему мы получим:

$$\rho g4h = \frac{\rho v_2^2}{2}, \text{ откуда } v_2 = \sqrt{8gh}. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1)—(3) скорости и решая их относительно искомого сечения S_2 потока, получим:

$$S_2 = 0{,}5\, S_1.$$

Пример 8. Какова должна быть минимальная мощность насоса, поднимающего воду по трубе с сечением S на высоту $2h$, если к.п.д. насоса равен η и ежесекундная подача воды равна Q?

Р е ш е н и е. За счет работы насоса увеличивается потенциальная и кинетическая энергия каждого литра воды, перекачиваемого насосом. В результате вода заполняет трубу и приобретает такую скорость v, что за время t из трубы вытекает вода массой m.

Предположим, что столб воды, заполняющий трубу, имеет массу m; рассмотрим два состояния системы: первое — до поступления воды в насос, второе — когда вода наполнит трубу. По закону сохранения энергии работа насоса

$$A = W_2 - W_1.$$

Для минимальной мощности с учетом к.п.д. получим:

$$\eta N = \frac{W_2 - W_1}{t}.$$

Энергия системы в первом состоянии равна: $W_1 = 0$, во втором состоянии равна сумме кинетической энергии всего столба воды и потенциальной энергии его центра тяжести:

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Поэтому

$$\eta N = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t},$$

или

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right),$$

где

$$Q = \frac{m}{t}.$$

Из формулы ежесекундного расхода воды $Q = \rho Sv$ находим значение v и, подставив его в выражение для N, получаем окончательно для мощности насоса:

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{Q^2}{2\rho^2 S^2} + gh\right).$$

Задачи к главе 6

6.1. Снаряд массой 8 *кг* вылетает из ствола орудия со скоростью 700 *м/сек*. Определите давление пороховых газов во время выстрела, принимая движение снаряда внутри ствола за равноускоренное. Сила сопротивления движению снаряда равна 16,2 *кн*, длина нарезной части ствола 3 *м*, диаметр 77 *мм*.

6.2. В автомобиле укреплена канистра с бензином, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, грани которого перпендикулярны оси автомобиля и находятся на расстоянии $l = 30$ *см* друг от друга. Какова разность давлений бензина на эти грани во время разгона автомобиля, если он набирает скорость $v = 65$ *км/ч* за $t = 1$ *мин*? Плотность бензина $\rho = 0{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

6.3. По каналу с радиусом закругления 30 *м* и шириной 3 *м* течет вода. Два манометра, находящиеся в одной горизонтальной плоскости у наружной и внутренней стенок канала, дают показания, отличающиеся на 400 *н/м*^{2}. Чему равна скорость воды в канале?

6.4. Воздух из магдебургских полушарий откачан до давления $1{,}06 \cdot 10^3$ *н/м*^{2}. Радиус полушарий 0,5 *м*. Какую силу нужно приложить, чтобы разорвать полушария? Атмосферное давление $1{,}02 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}.

6.5. В цилиндрический сосуд налита ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкости равна 29 *см*. Определите давление жидкости на дно сосуда. Изменится ли это давление, если в воду пустить деревянный шарик?

6.6. В резервуар с водой погружают закрытый цилиндрический сосуд, нижнее основание которого закрыто легкой пластинкой. Пластинка находится на глубине 50 *см*. Какой наибольший груз можно положить на пластинку внутри сосуда, чтобы пластинка не оторвалась? Давление воздуха в сосуде равно $0{,}33 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}, площадь основания сосуда 100 *см*^{2}, атмосферное давление нормальное.

6.7. Вертикально расположенный цилиндр наполнен водой. Сверху в цилиндр вставлен поршень сечением S, в дно цилиндра впаяна короткая трубка сечением s. Трубка закрыта гладкой пробкой, соединенной нитью длиной l с поршнем. Чему равно натяжение нити? Каково будет натяжение нити, если цилиндр поставить в горизонтальное положение, закрепив пробку? Массой поршня и пробки пренебречь.

6.8. Поршень массой m представляет собой круглый диск радиусом R с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиусом r. Поршень вплотную входит в стакан и вначале находится на дне стакана. Пренебрегая трением, определите, на какую высоту поднимется поршень, если в трубку налить воду массой M. На сколько после этого сместится поршень, если сверху него налить масла массой m? Плотность воды ρ.

6.9. Конический сосуд без дна стоит на столе. Края сосуда плотно прилегают к поверхности стола. Сколько воды может находиться в сосуде, если высота уровня ее в сосуде не может быть большей, чем h? Радиус нижнего основания сосуда равен R, масса сосуда m.

6.10. К весам подвешена коническая барометрическая трубка длиной $L = 1$ *м*, нижний конец которой погружен в ртуть на ничтожную глубину. Масса трубки $m = 200$ *г*, радиус внутреннего сечения нижнего конца трубки $r = 0{,}56$ *см*, верхнего — $R = 1{,}36$ *см*. Какой груз нужно положить на другую чашку весов, чтобы весы были в равновесии при атмосферном давлении $p_a = 9{,}8 \cdot 10^4$ *н/м*^{2}? Решите задачу при условии, что радиус сечения нижнего конца трубки равен R, а верхнего r.

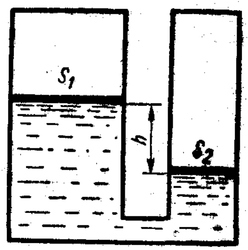


Рис. 6.5.

6.11. Две трубки диаметром 4 *см* представляют собой сообщающийся сосуд. В одно колено сосуда наливают 0,25 *л* воды, в другое — 0,25 *л* ртути. Какова будет разность уровней жидкостей в коленах? Объемом изогнутой части трубки пренебречь.

6.12. В двух сообщающихся сосудах, площади поперечного сечения которых равны S_1 и S_2, налита жидкость (рис. 6.5). На поверхности жидкости находятся тяжелые поршни и поэтому разность уровней равна h. Если на больший поршень положить груз, поршни оказываются на одном уровне. Какова будет разность уровней жидкости, если груз переложить на меньший поршень? Трение не учитывать.

6.13. В двух цилиндрических сообщающихся сосудах, имеющих одинаковое поперечное сечение 11,5 *см*^{2}, находится ртуть. В один из сосудов поверх ртути наливают 1 *дм*^{3} воды, в другой — 1 *дм*^{3} масла. На какое расстояние переместится уровень ртути в сосудах? Каков будет ответ, если в воду опустить плавать тело массой 150 *г*? Плотность масла 0,8 *г/см*^{3}.

6.14. В стакан диаметром 5 *см* налито 313 *г* воды. На сколько повысится уровень воды в стакане и чему будет равно давление на дно, если в стакан пустить сосновый кубик объемом 31,4 *см*^{3}? Атмосферное давление нормальное. Плотность сосны 0,5 *г/см*^{3}.

6.15. В один из сообщающихся сосудов налита вода плотностью ρ_1, в другой — масло плотностью ρ_2. На какое расстояние сместится граница раздела жидкостей в горизонтальной трубке, если на поверхность воды налить слой масла толщиной h? Площадь поперечного сечения сосудов в k раз больше площади поперечного сечения соединительной трубки.

6.16. Барометрическая трубка сечением 1 *см*^{2} опущена в чашку со ртутью. Как изменится уровень ртути в чашке, если, не вынимая конца трубки из ртути, наклонить ее под углом 45° к вертикали? Диаметр чашки 6 *см*, атмосферное давление нормальное.

6.17. Барометр, состоящий из барометрической трубки, опущенной открытым концом в чашку со ртутью, установлен в ракете и показывает давление $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Каково будет показание барометра во время подъема ракеты вертикально вверх с ускорением 1,2 *м/сек*^{2}? Во время ее спуска с тем же по величине ускорением?

6.18. Сосуд, имеющий форму куба, до половины налит водой и движется в горизонтальном направлении с ускорением a. Длина ребра куба l. Чему равно давление жидкости в точках, лежащих в воде в углах сосуда? Чему равна средняя сила давления, действующая на дно и стенки сосуда, перпендикулярные движению?

Чему будут равны эти силы и давления, если сосуд будет подниматься (опускаться) с ускорением a?

6.19. В трубку, имеющую вид перевернутой буквы П, налита жидкость. Какова станет разность уровней жидкости в трубке, если она начнет вращаться с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, расположенной на расстоянии x от оси левого колена? Длина горизонтальной части трубки l. Внутренний диаметр трубок считать малым по сравнению со всеми рассматриваемыми размерами.

6.20. Закрытый стакан высотой h наполнен водой. Стакан закреплен на нерастяжимой нити длиной $l \gg h$ и может качаться на ней в вертикальной плоскости. Нить отклонили до горизонтального положения и отпустили. Каково будет давление жидкости на дно стакана в тот момент, когда стакан проходит положение равновесия?

6.21. В U-образную трубку налита жидкость до высоты l. Жидкость выводят из положения равновесия и она начинает совершать колебания. На сколько изменяется давление в точках жидкости, удаленных от открытой поверхности на расстояние y, в тот момент, когда разность уровней в коленах равна h?

6.22. Цилиндрическая труба с поршнем погружена в воду. Вначале поршень касается воды, а затем с малой скоростью поднимается до высоты 15 *м*. Площадь сечения трубы 1 *дм*^{2}. Какую работу пришлось совершить, поднимая поршень при нормальном атмосферном давлении? Вес поршня, трение и давление паров воды не учитывать.

6.23. Плотность жидкости в n раз больше плотности материала тела. Какая часть объема тела будет выступать над поверхностью, если тело поместить в жидкость?

6.24. Однородное тело плавает на поверхности спирта так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема тела. Определите объем погруженной части при плавании этого тела на поверхности воды. Плотности спирта и воды равны соответственно 0,8 и 1 *г/см*^{3}.

6.25. Вес однородного тела в воде в n раз меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность тела? Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

6.26. Шарик на нити, уравновешенный на весах, опускают в воду. Когда шарик на 0,3 своего объема погрузился в воду, равновесие нарушилось и для его восстановления пришлось снять разновесок, составляющий 1/6 часть веса шарика. Какова плотность материала шарика?

6.27. Дубовый шар лежит в сосуде с водой, причем половина его находится в воде. С какой силой шар давит на дно сосуда, если он весит в воздухе 5,9 *н*? Плотность дуба $0{,}8 \cdot 10^3$ *кг/м*^{3}.

6.28. Что труднее удержать полностью погруженными в воду: кусок алюминия или кусок пробки, если они имеют одинаковую массу? Во сколько раз нужно изменить объем пробки по сравнению

с первоначальным, чтобы оба тела можно было удержать в воде одинаковой силой? Плотность пробки 0,2 *г/см*^{3}, алюминия 2,7 *г/см*^{3}.

6.29. Какой минимальный груз из свинца нужно подвесить к куску пробки массой 1 *кг*, чтобы пробка и груз полностью погрузились в воду? Чему будет равна при этом сила натяжения нити? Плотность свинца 11,3 *г/см*^{3}, пробки 0,2 *г/см*^{3}.

6.30. В цилиндрическом сосуде диаметром 50,0 *см* плавает льдинка объемом $1{,}2 \cdot 10^4$ *см*^{3}. В льдинку вмерз стальной шарик объемом 50 *см*^{3}. Плотность льда и стали равна соответственно 0,9 и 7,8 *г/см*^{3}. Какой объем льдинки выступает над водой? Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает?

6.31. В цилиндрическом сосуде высота налитой воды составляет $h_0 = 30$ *см*. Когда в сосуд опустили пустой стеклянный стакан так, чтобы он плавал, вода поднялась на $\Delta h = 2{,}2$ *см*. Чему будет равна высота столба воды в сосуде, если стакан утопить в воде? Плотность стекла $\rho_{ст} = 2{,}7$ *г/см*^{3}.

6.32. Кубик с ребром 10 *см* погружен в сосуд с водой, на которую налит слой керосина высотой 5 *см* так, что линия раздела обеих жидкостей проходит посредине высоты кубика. Определите массу кубика. Что произойдет с кубиком, если слить слой керосина с поверхности воды? Плотность керосина 0,8 *г/см*^{3}.

6.33. Стальной шарик плавает в ртути. Какая часть объема шарика будет находиться в ртути, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий шар? Плотность стали 7,8 *г/см*^{3}, плотность ртути 13,6 *г/см*^{3}.

6.34. Дубовый цилиндр высотой 12 *см* плавает в стакане с водой. Как изменится уровень воды в стакане, если поверх воды налить слой керосина толщиной 2 *см*? Площадь поперечного сечения стакана в четыре раза больше площади поперечного сечения цилиндра. Плотность керосина и дуба равна $\rho = 0{,}8$ *г/см*^{3}.

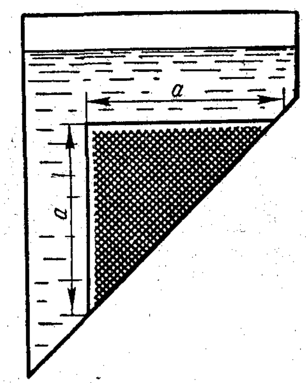


Рис. 6.6.

6.35. На дне сосуда, показанного на рисунке 6.6, лежит клин, вырезанный из куба с ребром a. Верхняя грань клина находится на глубине $a/2$. В сосуд налита жидкость плотностью ρ, которая под клин не подтекает. При каком значении плотности материала клина он будет находиться в равновесии, если коэффициент трения равен f? Атмосферное давление p_0.

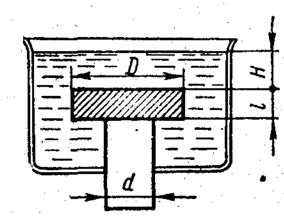


Рис. 6.7.

6.36. В дно бака, наполненного водой, впаяна труба диаметром d, прикрытая сверху цилиндрической пластинкой диаметром D и толщиной l (рис. 6.7). Какова должна быть минимальная плотность материала пластинки, чтобы она не всплывала, если известно, что уровень воды в баке отстоит от верхнего основания пластинки на расстоянии H? Давление воздуха в трубе равно атмосферному.

6.37. Однородный шар весит в воздухе P_1, в воде — P_2. Чему равен вес шара в пустоте и какова его плотность?

6.38. Тело объемом 500 *см*^{3} при взвешивании в воздухе было уравновешено на весах медными гирями массой 440 *г*. Определите массу тела. Плотность воздуха принять равной 1,29 *г/л*, плотность меди 8,9 *г/см*^{3}.

6.39. На камень, выступающий над поверхностью воды на высоту H, своим верхним концом опирается доска длиной L, частично погруженная в воду. При каком минимальном коэффициенте трения между камнем и доской она будет находиться в равновесии? Плотность дерева ρ_1, воды ρ_2.

6.40. Деревянный брусок, имеющий квадратное сечение площадью $S = 625$ *см*^{2}, плавает в вертикальном положении в воде. Плотность дерева $\rho_1 = 0,7$ *г/см*^{3}. При какой высоте h бруска его равновесие в воде будет устойчивым?

6.41. Однородный стержень длиной l шарнирно закреплен своим нижним концом на глубине $h < l$ под свободной поверхностью жидкости. Плотность жидкости ρ_0 больше плотности ρ_1 стержня. Под каким углом к вертикали должен находиться стержень, чтобы его равновесие было устойчивым? При каком максимальном значении l стержень будет находиться в устойчивом равновесии в вертикальном положении?

6.42. Два шарика массами m и $2m$ связаны легкой нитью, перекинутой через неподвижный блок. Меньший шарик погружен в сосуд с жидкостью, и вся система предоставлена самой себе. С какой установившейся скоростью будут двигаться шарики, если известно, что установившаяся скорость падения одиночного шарика в той же жидкости равна v? Силу сопротивления движению считать пропорциональной скорости. Плотность жидкости и материала шариков равна соответственно ρ_2 и ρ_1.

6.43. Определите минимальный объем шара, наполненного водородом, который может поднять человека массой $m_1 = 70$ *кг* на высоту $H = 100$ *м* за время $t = 30$ *сек*. Масса оболочки и корзины $m_2 = 20$ *кг*, плотность воздуха и водорода принять равными соответственно $\rho_1 = 1,3$ *кг/м*^{3} и $\rho_2 = 0,1$ *кг/м*^{3}. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.44. Сколько будет весить гиря массой 1 *кг*, взвешиваемая на пружинных весах в гондоле аэростата при его равноускоренном подъеме, если масса гондолы с оболочкой равна 500 *кг*? Оболочка имеет объем 1000 *м*^{3} и наполнена водородом с плотностью 0,1 *кг/м*^{3}. Плотность воздуха 1,3 *кг/м*^{3}.

6.45. В стакан радиусом R налита жидкость плотностью ρ_0. На дне стакана у одной из стенок находится шарик радиусом $r \ll R$ и плотностью $\rho_1 > \rho_0$. С какой силой шарик будет давить на стенку стакана, если стакан будет вращаться с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси?

6.46. Пробковый шарик диаметром 2 *см* погрузили в воду на глубину 1 *м* и отпустили. На какую высоту над поверхностью воды поднимется шарик и как глубоко он затем погрузится? Какова будет энергия шарика на предельной глубине, которую он достигнет? Трением шарика о воздух и воду пренебречь, поверхностное натяжение не учитывать. Плотность пробки 0,2 *г/см*^{3}.

6.47. Палочка длиной $2l$ и плотностью ρ_1 погружена в вертикальном положении в жидкость с плотностью $\rho_2 > \rho_1$. Верхний конец палочки находится на расстоянии l от поверхности жидкости. На какую максимальную высоту от уровня жидкости поднимется палочка, если ее отпустить? Рассмотрите все возможные варианты.

6.48. В стакане сечением $S = 27$ *см*^{2} плавает сосновый кубик объемом $V = 27$ *см*^{3}. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы кубик полностью погрузить в воду? Плотность сосны $\rho = 0,5$ *г/см*^{3}.

6.49. Деревянная свая высотой $2H$ и диаметром d стоит вертикально в бассейне с водой, выступая из него наполовину. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть сваю из воды, если диаметр дна бассейна равен D? Плотности дерева и воды соответственно равны ρ_1 и ρ_0.

6.50. С какой скоростью понижается уровень воды в баке с площадью поперечного сечения 1 *м*^{2}, если скорость истечения воды через отверстие диаметром 2 *см*, просверленное в баке, равна 2 *м/сек*?

6.51. Из брандспойта бьет струя воды под углом 30° к горизонту и падает от него на расстоянии 5 *м*. Сколько воды подает брандспойт за 10 *сек*, если площадь его отверстия равна 2 *см*^{2}? Сопротивление воздуха не учитывать.

6.52. Огнетушитель выбрасывает ежесекундно 0,2 *кг* пены со скоростью 20 *м/сек*. Какую силу нужно приложить к огнетушителю, чтобы удержать его неподвижно в вертикальном положении в начальный момент работы? Масса полного огнетушителя 2 *кг*.

6.53. Через трубу, изогнутую под прямым углом, за время t протекает вода массой m. Площадь поперечного сечения трубы S. Чему равна сила бокового давления в месте закругления трубы, если труба расположена в горизонтальной плоскости?

6.54. Какой мощностью обладает воздушный поток, набегающий на автомобиль «Волга», при скорости движения 100 *км/ч*, если площадь лобовой поверхности машины равна примерно 2,5 *м*^{2}? Плотность воздуха 1,3 *кг/м*^{3}.

6.55. Вентилятор гонит воздух в комнату через отверстие в стене. Во сколько раз нужно увеличить мощность мотора, чтобы ежесекундную подачу свежего воздуха увеличить вдвое?

6.56. Балластный резервуар подводной лодки объемом $V = 5000$ *л* заполнен водой. Для сброса балласта в верхнюю часть резервуара подается воздух от компрессора, и вода через трубу сечением $S = 100\ см^2$, расположенную в нижней части резервуара, вытекает наружу. Какова должна быть минимальная мощность компрессора, чтобы лодка на глубине $H = 100\ м$ могла полностью освободиться от балласта за время $t = 50\ сек$? Атмосферное давление нормальное.

6.57. Чему равна полезная мощность водяного двигателя, к.п.д. которого равен 80%, если известно, что вода поступает в него со скоростью 3 *м/сек*, а оставляет его со скоростью 1 *м/сек* на уровне, находящемся на 1,5 *м* ниже уровня входа? Секундный расход воды равен 0,3 $м^3$.

6.58. В широкий сосуд, в нижней части которого имеется отверстие, налита вода до высоты H. На поверхность воды налит слой масла плотностью ρ_2 и высотой h. С какой скоростью вода вытекает из отверстия? Понижением уровня воды в баке пренебречь. Плотность воды ρ_1.

6.59. Конический сосуд высотой H и с углом при вершине 2α стоит на своем основании на горизонтальном столе. В сосуд налита вода до высоты $H/2$. На высоте $H/4$ в сосуде имеется небольшое отверстие. На каком максимальном расстоянии от сосуда будет падать струя воды, если открыть отверстие?

6.60. На столе стоит цилиндрический сосуд высотой h, наполненный водой. На каком расстоянии от дна сосуда нужно сделать отверстие, чтобы струя из него падала на поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Чему равно это расстояние? Каков будет при этом опрокидывающий момент, действующий на цилиндр, если площадь отверстия равна S?

6.61. Две открытые манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения. Одна трубка находится в том месте, где сечение трубы равно S_1, вторая — где сечение $S_2 > S_1$. По трубе течет вода, и разность уровней воды в манометрических трубках равна h. Сколько воды ежесекундно проходит через сечение трубы?

6.62. Из крана выливается вода. Начиная с некоторого места диаметр струи уменьшается на протяжении 3 *см* с 3 до 2 *см*. Сколько воды можно налить из крана за 60 *сек*?

ЧАСТЬ II

ТЕПЛОТА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Глава 7. ТЕПЛОТА

Основные понятия, законы и формулы

1. Все тела состоят из атомов и молекул, находящихся в непрерывном беспорядочном движении. Хаотическое движение молекул тела называют тепловым движением. Каждая молекула вещества обладает кинетической и потенциальной энергией, поэтому всякое тело, наряду с механической энергией направленного движения частиц, обладает внутренней энергией.

В молекулярной физике под внутренней энергией подразумевают часть ее: кинетическую энергию хаотического движения микрочастиц (молекул, атомов, ионов, свободных электронов) и потенциальную энергию их взаимодействия друг с другом. Все другие виды внутренней энергии тел (энергия электромагнитного излучения, электронных оболочек, внутриядерная) считаются неизменными и не влияющими на рассматриваемые процессы:

$$U = W_к + W_п = \sum m_i \frac{v_i^2}{2} + W_п.$$

Изменение внутренней энергии и передача ее от одного тела к другому происходит в процессе взаимодействия тел. Есть два способа, две формы такого взаимодействия. При первом способе внутренняя энергия одного тела изменяется за счет изменения энергии упорядоченного (механического) движения частиц другого тела (механической работы, электризации, перемагничивания, облучения).

Мерой изменения энергии упорядоченного движения частиц вещества в процессе макроскопического взаимодействия тел служит работа A. Во втором случае изменение внутренней энергии происходит вследствие соударения хаотически движущихся молекул соприкасающихся тел.

Процесс изменения внутренней энергии тела, обусловленный передачей теплового движения молекул без совершения работы внешней средой, называют тепловым процессом или процессом теплопередачи.

Мерой взаимодействия тел, приводящего к изменению энергии хаотического движения и взаимодействия молекул (мерой энергии хаотического движения, переданной от одного тела к другому в процессе теплообмена), служит величина Q, называемая количеством теплоты.

2. Количество теплоты, подведенное к телу (системе тел) идет в общем случае на изменение внутренней энергии тела и на совершение телом работы над внешними телами (первое начало термодинамики — закон сохранения и превращения энергии с учетом тепловых явлений):

$$Q = \Delta U + A. \tag{7.1}$$

Количество теплоты Q, сообщенное телу, считают при этом положительным, отданное телом — отрицательным. Работу считают положительной, если тело за счет своей внутренней энергии совершает работу над внешней средой, и отрицательной, если работа совершается над телом и за счет работы увеличивается внутренняя энергия.

Количество теплоты и работа являются мерами изменения внутренней энергии, количество теплоты — в процессе теплопередачи, работа — в процессе превращения механической энергии в теплоту.

3. Если при подведении к телу количества теплоты Q температура тела повышается на Δt, то теплоемкость тела в рассматриваемом процессе равна:

$$C = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{A}{\Delta t}. \tag{7.2}$$

Удельная теплоемкость тела массой m:

$$c = \frac{Q}{m\Delta t}. \tag{7.3}$$

Если суммарная кинетическая энергия теплового движения молекул изменяется при неизменной потенциальной энергии, то изменение внутренней энергии тела массой m, равно:

$$\Delta U = c_V m \Delta t, \text{ или } \Delta U = C_V \Delta t, \tag{7. 3'}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ — изменение температуры тела, c_V — удельная теплоемкость и C_V — теплоемкость тела, взятые при постоянном объеме ($A = 0$).

4. Тела могут находиться в одном из трех агрегатных состояний — твердом, жидком или газообразном — и при определенных условиях могут переходить из одного состояния в другое. Эти превращения происходят или в процессе теплообмена тела с окружающими телами, или вследствие перераспределения внутренней энергии в самом теле.

а) При плавлении кристаллических тел за счет теплоты, подводимой к телу (при $A = 0$), потенциальная энергия атомов или молекул вещества, имеющего массу m, возрастает на величину

$$\Delta U = Q = \lambda m, \tag{7.4}$$

где λ — удельная теплота плавления.

В процессе кристаллизации потенциальная энергия уменьшается на такую же величину, и соответствующее количество теплоты отводится к окружающим телам. Кинетическая энергия атомов при этом почти не меняется.

б) Если при испарении жидкости образуется пар массой m, то потенциальная энергия молекул пара увеличивается, а кинетическая энергия молекул, остающихся в жидкости, уменьшается на величину

$$\Delta U = rm, \tag{7.5}$$

где r — удельная теплота испарения. Внутренняя энергия системы пар — жидкость при этом остается неизменной. Если процессу испарения сопутствует теплообмен с окружающей средой, в результате которого температура жидкости остается постоянной, то количество подводимой к ней теплоты определяется той же формулой (7.5).

При образовании пара массой m в процессе кипения жидкости внутренняя энергия молекул возрастает на величину

$$\Delta U = r_к m,$$

где $r_к$ — удельная теплота кипения, являющаяся частным значением удельной теплоты испарения жидкости для температуры кипения. Внутренняя энергия системы в процессе кипения (при $A = 0$) увеличивается за счет подвода к жидкости соответствующего количества теплоты извне.

в) В процессе химического соединения у ряда веществ перестраивается структура молекул, в результате чего резко увеличивается их кинетическая энергия. Такие процессы называют процессами горения, а участвующие в них тела — топливом и окислителем.

При полном сгорании топлива массой m внутренняя энергия теплового движения молекул возрастает на величину

$$\Delta U = Q = qm, \tag{7.6}$$

где q — удельная теплота сгорания топлива при данном окислителе.

Решение задач. Примеры

1. Решение задач этой главы основано на уравнении закона сохранения и превращения энергии с учетом формул изменения внутренней энергии тел и некоторых уравнений механики. Умение правильно применять закон сохранения энергии к конкретным физическим процессам представляет основную трудность при решении задач на теплоту. Особое внимание здесь нужно обратить на различие между количеством теплоты и изменением внутренней энергии и на выбор системы тел (или тела), для которой составляется основное уравнение. Нередко возникают затруднения при числовых расчетах в задачах, связанных с превращением одного вида энергии в другой. Здесь нужно помнить, что в уравнении (7.1) закона сохранения и превращения энергии все три величины Q, ΔU и A должны быть выражены в одних единицах.

2. Задачи об изменении внутренней энергии тел можно разделить на три группы. В задачах первой группы рассматривают такие явления, где в изолированной системе при взаимодействии тел изменяется лишь их внутренняя энергия без совершения работы над внешней средой. Одни из тел, участвующих в теплообмене, при этом охлаждаются, другие — нагреваются. Согласно закону сохранения и превращения энергии (7.1) для тел, внутренняя энергия которых уменьшается, можно записать:

$$Q_{\text{отд}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i, \tag{7.7}$$

поскольку ни сами тела, ни над телами работу не совершают ($A = 0$).

Аналогично для тел, энергия которых возрастает, мы получим:

$$Q_{\text{получ}} = \Delta U'_1 + \Delta U'_2 + \ldots + \Delta U'_m = \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k. \tag{7.7$'$}$$

Из определения понятия количества теплоты и закона сохранения энергии как следствие вытекает:

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}} \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k. \tag{7.8}$$

Перенеся все члены в левую часть равенства, уравнение (7.8) представим в ином виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta U_i - \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k = 0,$$

или короче:

$$\Sigma \Delta U = 0. \tag{7.8$'$}$$

Последнее уравнение является очевидным следствием первого начала термодинамики — в изолированной системе тел, где происходят только процессы теплопередачи, внутренняя энергия системы не изменяется и, следовательно, алгебраическая сумма изменений энергии отдельных тел равна нулю.

Уравнение (7.8) называют уравнением теплового баланса, оно обычно служит основным расчетным соотношением для всех задач первой группы.

Правила их решения состоят в следующем:

а) Прочитав условие задачи, нужно установить, у каких тел внутренняя энергия уменьшается, у каких — возрастает. Особое внимание следует обращать на то, происходят ли в процессе теплообмена агрегатные превращения или нет.

б) Составить уравнения (7.7) для тел, энергия которых уменьшается, (7.7′) — для тел, энергия которых возрастает, и приравнять полученные суммы.

При записи уравнения теплового баланса в виде (7.8) нужно в выражении $cm(t_2 - t_1)$ для изменения внутренней энергии всегда вычитать из большей температуры тела меньшую и суммировать все члены арифметически, если же уравнение записывается в виде (7.8′), необходимо вычитать из конечной температуры тела начальную и суммировать члены с учетом получающегося знака.

В ряде задач задается к.п.д. теплообмена; в этом случае его всегда нужно ставить сомножителем перед $Q_{\text{отд}}$.

При определенном навыке можно составлять уравнение (7.8) или (7.8′). теплового баланса сразу, не прибегая к промежуточным выкладкам. Практически при решении задач удобнее пользоваться первым из этих уравнений.

3. В задачах второй группы рассматривают явления, связанные с превращением одного вида энергии в другой при взаимодействии двух тел. Результат такого взаимодействия — изменение внутренней энергии одного тела вследствие совершенной им или над ним работы. Теплообмен между телами здесь, как правило, не учитывают.

Уравнение закона сохранения и превращения энергии в этом случае имеет вид:

$$0 = \Delta U + A. \tag{7.9}$$

Решение таких задач удобно проводить по следующей схеме.

а) Анализируя условие задачи, нужно прежде всего установить, у какого из двух взаимодействующих тел изменяется внутренняя энергия и что является причиной этого изменения — работа, совершенная самим телом, или работа, совершенная над телом. Кроме того, следует убедиться, что в процессе взаимодействия тел теплота извне к ним не подводится, т. е. действительно ли $Q = 0$.

б) Записать уравнение (7.9) для тела, у которого изменяется внутренняя энергия, учтя знак перед A и к.п.д. рассматриваемого процесса. При записи уравнения (7.9) с учетом к.п.д. удобно поступать так. Если по смыслу задачи работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии одного из тел и по каким-либо причинам лишь часть ее идет на совершение работы A, то

$$A = \eta \Delta U. \qquad (7.9')$$

Если же из условия видно, что внутренняя энергия тела увеличивается за счет работы, совершенной над телом, и по каким-либо причинам лишь часть ее идет на увеличение U, то

$$\eta A = \Delta U. \qquad (7.9'')$$

в) Составив уравнение (7.9′) или (7.9″), нужно найти выражение для A и ΔU.

Для A возможно одно из следующих соотношений:

$$A = Fs;$$
$$A = N\tau;$$
$$A = W_2 - W_1.$$

Для ΔU чаще всего достаточно использовать одну из формул:

$$\Delta U = qm \ \text{(сжигание топлива)};$$
$$\Delta U = cm\Delta t + \lambda m \ \text{(нагрев и плавление тела)};$$
$$\Delta U = cm\Delta t + rm \ \text{(нагрев и испарение)}.$$

Подставляя в исходное уравнение вместо A и ΔU их выражения, получим окончательное соотношение для определения искомой величины. Если в условиях задачи даются дополнительные условия, то к основному уравнению следует, как обычно, добавить вспомогательные.

г) Далее нужно выписать числовые значения известных величин, проверить число неизвестных в уравнениях и решить систему уравнений относительно искомой величины.

4. Задачи третьей группы объединяют в себе две предыдущие. В этих задачах рассматривают взаимодействие трех и более тел. В процессе такого взаимодействия к одному из тел подводится некоторое количество теплоты Q, в результате чего изменяется его внутренняя энергия и совершается работа.

Для решения этих задач надо составить полное уравнение закона сохранения и превращения энергии (7.1). Составление такого уравнения включает в себя приемы, описанные в п. 2 и 3.

Пример 1. В закрытом медном калориметре массой $m_м = 200$ *г* находится лед массой $m_л = 1$ *кг* при температуре $t_л = -10$°C. В калориметр впускают пар массой $m_п = 200$ *г*, имеющий температуру $t_п = 110$°C. Какая температура установится в калориметре? Удельную теплоемкость паров воды в интервале от 100 до 110°C считать равной $c_п = 1{,}7 \cdot 10^3$ *дж/(кг · град)*.

Р е ш е н и е. а) Примем систему пар — лед — калориметр за изолированную и будем считать, что с окружающей средой ее теплообмен ничтожно мал и им можно пренебречь. В такой системе

полная внутренняя энергия остается неизменной, так как $Q = 0$ и $A = 0$.

Основным уравнением, описывающим процесс теплового взаимодействия между телами системы, здесь является уравнение теплового баланса с учетом агрегатных превращений. Поскольку в данном примере произведение $m_п r \gg m_л \lambda$, нетрудно заметить, что при установившейся температуре в калориметре будет находиться вода при температуре, большей 0°C.

б) При тепловом взаимодействии со льдом и калориметром внутренняя энергия молекул пара уменьшается: при охлаждении от начальной температуры $t_п$ до температуры конденсации $t_к = 100$°C на величину $c_п m_п (t_п - t_к)$, при конденсации пара в воду — на величину $rm_п$, при дальнейшем охлаждении образовавшейся воды от температуры $t_к$ до окончательно установившейся температуры θ — на величину $c_в m_п (t_к - \theta_п)$. В результате внутренняя энергия горячего тела — пара уменьшится на

$$\Delta U_1 = c_п m_п (t_п - t_к) + rm_п + c_в m_п (t_к - \theta) = Q_{отд}.$$

За счет этой энергии калориметр нагревается от начальной температуры, равной температуре льда $t_л$, до окончательной Θ; его внутренняя энергия увеличивается на величину $c_м m_м \ (\Theta - t_л)$. Кроме того, часть энергии пара переходит ко льду. Энергия молекул льда возрастает: при нагревании от начальной температуры $t_л$ до температуры плавления $t_0 = 0$°C на величину $c_л m_л \ (t_0 - t_л)$, в процессе плавления — на величину $\lambda m_л$ и при дальнейшем нагревании образовавшейся воды — на величину $c_в m_л (\Theta - t_0)$.

В результате внутренняя энергия холодных тел возрастает на

$$\Delta U_2 = c_м m_м (\theta - t_л) + c_л m_л (t_0 - t_л) + \lambda m_л + c_в m_л (\theta - t_0) = Q_{получ}.$$

Так как $\Delta U_1 = \Delta U_2$, то уравнение теплового баланса для данного процесса будет иметь вид:

$$c_п m_п (t_п - t_к) + rm_п + c_в m_п (t_к - \theta) =$$
$$= c_м m_м (\theta - t_л) + c_л m_л (t_0 - t_л) + \lambda m_л + c_в m_л (\theta - t_0).$$

Решая это уравнение относительно Θ и подставляя числовые данные, взятые из условия задачи и из таблиц, находим:

$$\theta = \frac{c_п m_п (t_п - t_к) + rm_п + c_в m_п t_к + c_м m_м t_л + c_в m_л t_0 - c_л m_л (t_0 - t_л) - \lambda m_л}{c_в (m_п + m_л) + c_м m_м};$$

$$\theta \approx 37\text{°C}.$$

Анализируя полученное выражение, можно заметить, что при достаточно большой массе пара $m_п$ температура Θ может оказаться больше начальной температуры пара $t_п$, чего в действительности быть не может. Такой результат объясняется тем, что после теплообмена при установившейся температуре одновременно могут существовать две фазы вещества: жидкость и пар, если при охлаждении пар не полностью конденсируется в воду. Уравнение теплового баланса в этом случае будет отличаться от того, которое мы составили. Чтобы не делать лишних вычислений, во всех сомнительных случаях, когда трудно определить, окажется ли вещество в одном или двух агрегатных состояниях, рекомендуется сделать предварительную числовую прикидку — сколько теплоты требуется для нагревания холодного тела до температуры соответствующего превращения (плавления или кипения) и сколько теплоты может выделиться горячим телом при остывании или при полной конденсации (кристаллизации). Сразу в общем виде такие задачи решать нельзя. Если окажется, что $Q_1 > Q_2$, то после перераспределения энергии получится одна фаза вещества, если же будет $Q_1 < Q_2$, то при установившейся температуре будут находиться две фазы — пар и жидкость (жидкость и лед).

Пример 2. При соблюдении необходимых предосторожностей вода может быть переохлаждена до $t_1 = -10°C$. Сколько льда образуется из такой воды массой $m_0 = 1$ *кг*, если в нее бросить кусочек льда и этим вызвать замерзание воды? Какую температуру должна иметь переохлажденная вода, чтобы она целиком превратилась в лед? Удельная теплоемкость переохлажденной воды $c_в = 4{,}19 \cdot 10^3$ *дж/(кг · град)*, льда $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3$ *дж/(кг · град)*. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

Решение. Для того чтобы при охлаждении вода замерзла, в ней должны находиться неоднородные включения, около которых начинается рост кристалликов льда. При отсутствии центров кристаллизации воду можно охладить до температуры значительно ниже 0°C. Такая вода называется переохлажденной.

Если в переохлажденной воде искусственно создать центры кристаллизации, в ней начнет образовываться лед. Молекулы станут переходить в состояние, соответствующее минимуму их потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии одной части молекул, образующих лед, вызывает увеличение теплового движения остальных молекул, которое регистрируется нами как нагревание воды. Так как взаимодействием переохлажденной воды с окружающей средой по условию задачи можно пренебречь, то в результате частичной кристаллизации воды в ней произойдет только перераспределение энергии. Полная внутренняя энергия останется неизменной, и, следовательно, уменьшение потенциальной энергии молекул будет равно увеличению их кинетической энергии.

Задача сводится к составлению уравнения теплового баланса при условии, что $Q = 0$, $A = 0$ с учетом агрегатного превращения.

При образовании из переохлажденной воды льда массой m_2 потенциальная энергия молекул уменьшится на величину

$$\Delta U_1 = \lambda m_2 = Q_{отд}.$$

Эта энергия пойдет на нагревание образовавшегося льда от начальной температуры t_1 до температуры $t_0 = 0°C$ и нагревание

оставшейся после кристаллизации воды массой m_1 на $t_0 - t_1$ градусов (дальнейшее нагревание невозможно, так как при 0°C кристаллизация льда прекратится). Таким образом, вследствие нагревания внутренняя энергия теплового движения молекул увеличится на

$$\Delta U_2 = c_л m_2 (t_0 - t_1) + c_в m_1 (t_0 - t_1) = Q_{получ}.$$

По закону сохранения энергии $\Delta U_1 = \Delta U_2$, поэтому уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$\lambda m_2 = c_л m_2 (t_0 - t_1) + c_в m_1 (t_0 - t_1). \tag{1}$$

Кроме того,

$$m_1 + m_2 = m_0. \tag{2}$$

Из соотношений (1)—(2) находим массу образовавшегося льда:

$$m_2 = \frac{c_в (t_0 - t_1)}{\lambda + (c_в - c_л)(t_0 - t_1)} m_0;$$

$$m_2 \approx 0{,}12 \text{ кг}.$$

Чтобы замерзла вся переохлажденная вода, энергия, выделившаяся при кристаллизации, должна полностью пойти на нагревание образовавшегося льда, т. е.

$$\lambda m_0 = c_л m_0 (t_0 - t_x), \tag{3}$$

где t_x — начальная температура переохлажденной воды.

Из последнего уравнения находим:

$$t_x = -\frac{\lambda}{c_л}; \quad t_x = -160° \text{ C}.$$

Пример 3. В колбе находилась вода при $t = 0°C$. Выкачиванием из колбы воздуха заморозили всю воду в сосуде. Какая часть воды при этом испарилась, если притока теплоты извне не было? Удельная теплота испарения воды при 0°C $r = 24{,}8 \cdot 10^5$ *дж/кг*. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

Решение. При испарении воды вылетают наиболее быстрые молекулы, вследствие чего суммарная кинетическая энергия оставшихся молекул уменьшается и температура воды понижается. Если из сосуда, в котором происходит испарение, откачивать пары воды и свести до минимума теплообмен с окружающей средой, то кинетическая энергия оставшихся молекул может уменьшиться настолько, что они образуют твердую фазу воды — лед. Поскольку в данном процессе тепло извне не подводится ($Q = 0$) и работа не совершается ($A = 0$), то внутренняя энергия всех молекул остается постоянной, изменение потенциальной энергии вылетающих молекул воды ΔU_1 равно изменению потенциальной энергии ΔU_2 оставшихся, так как температура жидкости не изменяется.

При образовании пара массой m_1 потенциальная энергия молекул пара возрастает на величину

$$\Delta U_1 = r m_1.$$

В процессе образования льда массой m_2 потенциальная энергия молекул уменьшается на

$$\Delta U_2 = \lambda m_2.$$

Поскольку $\Delta U_1 = \Delta U_2$, то

$$r m_1 = \lambda m_2, \qquad (1)$$

причем

$$m_1 + m_2 = m_0. \qquad (2)$$

По условию задачи нам нужно определить отношение

$$x = \frac{m_1}{m_0}.$$

Из соотношений (1)—(2) находим:

$$x = \frac{\lambda}{\lambda + r}; \quad x \approx 11{,}7\,\%.$$

Пример 4. В дьюаровском сосуде, содержащем жидкий азот при температуре $t_а = -195°C$, за время $\tau_1 = 24$ *ч* испаряется азот объемом $V_1 = 1$ *дм*^{3} при температуре окружающего воздуха $t_в = 20°C$. Определите удельную теплоту парообразования азота, если известно, что при температуре $t_л = 0°C$ в том же сосуде за время $\tau_2 = 22{,}5$ *ч* тает лед массой $m_2 = 40$ *г*. Считать, что скорость подвода теплоты внутрь сосуда пропорциональна разности температур снаружи и внутри сосуда. Плотность жидкого азота $\rho_1 = 0{,}8$ *г/см*^{3}, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

Решение. Вследствие того что дьюаровский сосуд не является идеальным теплоизолятором, между телами, находящимися в сосуде, и окружающей средой происходит теплообмен. Так как работа при этом не совершается, то основным уравнением, описывающим процесс теплопередачи при испарении азота и плавлении льда, служит уравнение теплового баланса:

$$Q = \Delta U.$$

В результате теплообмена хранящиеся в сосуде холодные тела нагреваются и могут переходить из одного агрегатного состояния в другое. Теплота, подводимая извне, идет на увеличение внутренней энергии этих тел, причем согласно условию задачи

$$\frac{Q}{\tau} = k(t_2 - t_1),$$

где τ — время, в течение которого к сосуду подводится количество теплоты Q ($\frac{Q}{\tau}$ — скорость подвода теплоты); k — коэффициент пропорциональности, зависящий от устройства и материала сосуда; $t_2 - t_1$ — разность температур снаружи и внутри сосуда.

К жидкому азоту за время τ_1 подводится количество теплоты, равное

$$Q_1 = k(t_а - t_в)\tau_1.$$

За счет этой теплоты внутренняя энергия молекул азота возрастает на величину

$$\Delta U_1 = r m_1,$$

где m_1 — масса испарившегося азота; r — удельная теплота парообразования.

Согласно закону сохранения и превращения энергии

$$Q_1 = \Delta U_1 \text{ или } k(t_а - t_в)\tau_1 = r m_1. \qquad (1)$$

Проводя аналогичные рассуждения для льда, получим:

$$k(t_л - t_в)\tau_2 = \lambda m_2. \qquad (2)$$

Дополнительные условия позволяют записать:

$$m_1 = \rho_1 V_1. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1)—(3) неизвестные k и m_1, находим:

$$r = \frac{m_2 (t_а - t_в)\tau_1}{\rho_1 V_1 (t_л - t_в)\tau_2}\lambda; \quad r \approx 1{,}9 \cdot 10^5 \text{ дж/кг}.$$

Пример 5. Лед массой $M = 1$ *кг* при температуре 0°C заключен в теплонепроницаемый сосуд и подвергнут давлению $p = 6{,}9 \times 10^7$ *н/м*^{2}. Сколько льда расплавится, если при увеличении давления на $\Delta p = 3{,}8 \cdot 10^7$ *н/м*^{2} температура плавления льда понижается на $\Delta t = 1°$? Понижение температуры плавления от 0°C считать пропорциональным увеличению давления сверх атмосферного.

Решение. Если лед подвергнуть давлению больше атмосферного, температура его плавления понизится и такой лед, находясь при $t_{0п} = 0°C$, плавится, поглощая тепло из окружающей среды.

При достаточной теплоизоляции льда средой, отдающей тепло, служит сам лед. Работа, совершаемая внешними силами, идет в этом случае на перераспределение энергии между молекулами воды. Часть исходного количества льда растает, часть охладится до новой температуры плавления $t_{1п}$ и система придет в равновесное состояние.

При отсутствии тепловых потерь количество теплоты, выделенной при охлаждении нерастаявшего льда от 0°C до температуры плавления $t_{1п}$, равно количеству теплоты, пошедшей на его частичное плавление:

$$Q_{отд} = Q_{получ} \text{ или } \Delta U_1 = \Delta U_2.$$

Температура плавления $t_{1п}$ при давлении $p > p_{атм}$ определяется из условия, что ее понижение $t_{0п} - t_{1п}$ пропорционально увеличению давления $p - p_{атм}$, т. е.

$$t_{0п} - t_{1п} = k(p - p_{атм}), \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств вещества.

Вместе с уравнением теплового баланса это уравнение является основным соотношением для решения данной задачи.

При сжатии льда и понижении температуры плавления от $t_{0п}$ до $t_{1п}$ внутренняя энергия теплового движения молекул льда массой M уменьшится на

$$\Delta U_1 = cM(t_{0п} - t_{1п}) = Q_{отд},$$

где c — удельная теплоемкость льда.

Так как система изолирована, то вся теплота, выделяющаяся при сжатии, идет на плавление льда массой m:

$$\Delta U_2 = \lambda m = Q_{получ}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$cM(t_{0п} - t_{1п}) = \lambda m. \qquad (2)$$

Кроме того, дополнительное условие позволяет записать

$$\Delta t = k\Delta p. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1)—(3) совместно относительно m и подставляя числовые значения, получим:

$$m = \frac{c\Delta t\,(p - p_{атм})}{\lambda \Delta p} M; \quad m \approx 11{,}3 \text{ г}.$$

Пример 6. Некоторая установка, развивающая мощность $N = 30$ *квт*, охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке сечением $S = 1$ *см*^{2}. При установившемся режиме проточная вода нагревается на $\Delta t = 15°$. Определите скорость воды v, предполагая, что на нагревание воды идет $\eta = 0{,}3$ мощности.

Решение. В процессе работы установки часть механической энергии расходуется на нагревание проточной воды, охлаждающей установку. Так как теплообмен с окружающей средой не учитывается ($Q = 0$), то указанная часть мощности установки идет на увеличение внутренней энергии воды и, согласно закону сохранения и превращения энергии, должно быть

$$0 = \Delta U - \eta A, \text{ или } \eta A = \Delta U.$$

Если за время τ в трубках нагревается вода массой m на Δt градусов, то работа, совершенная за это время (при мощности N), и изменение внутренней энергии воды будут равны соответственно

$$A = N\tau$$

и

$$\Delta U = cm\Delta t,$$

где c — удельная теплоемкость воды.

Подставляя выражения для A и ΔU в исходное уравнение энергетического баланса, получим:

$$\eta N\tau = cm\Delta t.$$

При течении потока по трубе сечением S масса жидкости m, прошедшей через это сечение за время τ, равна:

$$m = \rho S v\tau,$$

где ρ — плотность жидкости; v — скорость течения.

С учетом этого выражения уравнение закона сохранения и превращения энергии в окончательном виде можно записать так:

$$\eta N = c\rho S v\Delta t,$$

откуда

$$v = \frac{\eta N}{c\rho S\Delta t}; \quad v = 4{,}8 \text{ м/сек}.$$

Пример 7. Санки массой $m = 5$ *кг* скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Пройдя расстояние $l = 50$ *м*, санки развивают скорость $v = 4{,}1$ *м/сек*. Вычислите количество теплоты, выделенное при трении полозьев о снег.

Решение. При движении одного тела по поверхности другого часть механической энергии идет из-за трения на увеличение внутренней энергии соприкасающихся тел. Мерой изменения энергии здесь могут служить и работа A, и количество теплоты Q. Как A, так и Q показывают, на сколько возрастет внутренняя энергия беспорядочного движения молекул при изменении энергии направленного движения, вызванном трением санок о снег. Следует заметить, что работа силы трения скольжения всегда связана с нагреванием тел. Поскольку изменение внутренней энергии тел в процессе движения санок по условию задачи не рассматривается ($\Delta U = 0$), то согласно (7.1) исходной формулой для решения задачи может служить уравнение

$$-Q = 0 + A.$$

При его записи мы учли, что тепло отводится от системы ($Q < 0$) и работа совершается санками ($A > 0$).

Работу A, совершаемую внешними силами в системе санки — Земля, можно вычислить двумя способами: или с помощью закона сохранения энергии, или с помощью второго закона Ньютона. Проще воспользоваться первым способом. В системе санки — Земля на санки действуют две внешние силы: сила трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Так как $\vec{N} \perp \vec{v}$, то работа этой силы равна нулю и изменение механической энергии происходит лишь под действием силы трения, т. е. $A = A_{тр}$.

Выбрав первое положение системы в начале движения санок, второе — в конце перемещения, можно записать:

$$A_{тр} = W_2 - W_1.$$

Так как полная механическая энергия санок в первом и втором положениях соответственно равна:

$$W_1 = mgl\sin\alpha \text{ и } W_2 = \frac{mv^2}{2},$$

то

$$A_{\text{тр}} = \frac{mv^2}{2} - mgl\sin\alpha,$$

и исходное уравнение можно переписать так:

$$Q = mgl\sin\alpha - \frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$Q \approx 1{,}19\ \text{кдж}.$$

Пример 8. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v_1 = 400$ *м/сек*, попадает в стальную плиту и отскакивает от нее со скоростью $v_2 = 300$ *м/сек*. Какая часть пули расплавится, если ее температура в момент удара была равна $t_1 = 107\ ^\circ\text{C}$ и на нагревание пули пошло $\eta = 0{,}8$ всей работы, совершаемой при ударе? Удельная теплоемкость и удельная теплота плавления свинца равны соответственно $c = 0{,}126 \cdot 10^3$ *дж/(кг · град)*, $\lambda = 25 \cdot 10^3$ *дж/кг*.

Р е ш е н и е. В процессе удара пули о плиту происходит уменьшение кинетической энергии пули, вследствие чего увеличивается ее внутренняя энергия. Пуля нагревается до температуры плавления и частично плавится без теплообмена с окружающей средой ($Q = 0$). Согласно закону сохранения и превращения энергии

$$0 = \Delta U + \eta A \quad \text{или} \quad -\eta A = \Delta U,$$

где η — коэффициент, показывающий, какая часть механической энергии пошла на нагревание и агрегатное превращение свинца.

Если в момент удара пуля обладала кинетической энергией $W_1 = \frac{mv_1^2}{2}$, а после удара $W_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ (считаем, что расплавленный свинец находится внутри пули и отлетает вместе с ней), то работа силы сопротивления плиты при ударе равна:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

При нагревании пули массой m от начальной температуры t_1 до температуры плавления $t_2 = 327\ ^\circ\text{C}$ и плавлении свинца массой Δm внутренняя энергия пули возрастает на величину

$$\Delta U = cm\,(t_2 - t_1) + \lambda\Delta m.$$

Подставляя выражения для A и ΔU в исходное уравнение, получим уравнение энергетического баланса в окончательном виде:

$$\eta\left(\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\right) = cm\,(t_2 - t_1) + \lambda\Delta m.$$

Отношение $\frac{\Delta m}{m}$, показывающее, какая часть пули расплавилась, отсюда равно:

$$\frac{\Delta m}{m} = \left[\frac{\eta\,(v_1^2 - v_2^2)}{2} - c\,(t_2 - t_1)\right]\frac{1}{\lambda};\quad \frac{\Delta m}{m} \approx 0{,}05.$$

Задачи к главе 7

7.1. Температура термометра, погруженного в воду массой 6,7 *г*, повысилась на 14,6 °С. Какова была температура воды перед измерением, если показание термометра равно 32,4 °С? Теплоемкость термометра равна 1,92 *дж/град*.

7.2. Вода может находиться при температурах, меньших 0 °С и больших 100 °С. В калориметре с теплоемкостью 1,67 *кдж/град* находится 1 *кг* переохлажденной воды при температуре —10 °С. Какая температура установится в калориметре, если в него влить 170 *г* воды, перегретой до 120 °С?

7.3. В калориметре с теплоемкостью C находится вода массой M, нагретая до температуры t_1. В калориметр опускают смесь латунных и алюминиевых опилок массой m, имеющую температуру t_2. В результате этого температура воды повышается и становится равной Θ. Определите количество латунных и алюминиевых опилок в смеси.

7.4. В литр воды при 20 °С брошен комок мокрого снега массой 250 *г*. Когда весь снег растаял, общая температура стала равной 5 °С. Определите количество воды в комке снега. Удельная теплота плавления снега 334 *кдж/кг*.

7.5. В калориметр, содержащий воду массой m при температуре t, опустили снег массой M при температуре $-t$. Спустя некоторое время τ наступило тепловое равновесие. Сколько воды окажется в калориметре через указанное время, если вода и снег будут иметь массы M и m и те же начальные температуры? Временем плавления пренебречь.

7.6. В латунный калориметр массой 125 *г* опускают кусок льда массой 100 *г*. Температура калориметра и льда равна —20 °С. Сколько воды при температуре 20 °С надо добавить в калориметр, чтобы половина льда растаяла? Удельная теплоемкость латуни 0,38 *кдж/(кг·град)*, льда 2,1 *кдж/(кг·град)*, удельная теплота плавления льда 334 *кдж/кг*.

7.7. Железный шарик радиусом R, нагретый до температуры t, положили на лед, температура которого 0 °С. На какую глубину шарик погрузится в лед? Теплопроводностью льда и нагреванием образовавшейся воды пренебречь. При расчете считать, что шарик погрузится в лед полностью.

7.8. В куске льда, находящемся при 0 °С, сделано углубление, объем которого 160 *см³*. В это углубление влито 60 *г* воды, температура которой 75 °С. Какой объем будет иметь свободное от воды углубление, когда вода остынет?

7.9. В чашке находится 500 *г* льда при 0 °С. В чашку вливают 200 *г* воды, нагретой до температуры 80 °С. Какова будет установившаяся температура и что будет находиться в чашке?

7.10. В закрытом сосуде с водой при температуре 0 °С плавает лед массой M, в который вмерзла свинцовая дробинка массой m. Сколько тепла нужно подвести к системе лед — свинец, чтобы льдинка полностью погрузилась в воду? Плотности свинца, льда и воды равны соответственно $\rho_с$, $\rho_л$ и $\rho_в$, удельная теплота плавления льда λ.

7.11. На сколько изменяется удельная теплота плавления вещества при понижении температуры плавления на Δt, если удельные теплоемкости вещества в жидкой и твердой фазе равны соответственно c_1 и c_2?

7.12. В сосуд, содержащий 200 *г* льда при температуре —15 °C, влито 500 *г* воды, переохлажденной до температуры —15 °C. Сколько получится льда и воды из такой смеси? Удельную теплоемкость воды и льда считать не зависящей от температуры.

7.13. Какое количество теплоты выделяется при замерзании 1 *г* воды, переохлажденной до —10 °C?

7.14. Какому давлению были подвергнуты 20 *г* льда, заключенного в теплонепроницаемую оболочку при 0 °C, если при этом расплавилось 1,6 *г* льда и, кроме того, известно, что при увеличении давления на $1{,}4 \cdot 10^7$ *н/м²* температура плавления понижается на 1 °C? Считать, что понижение температуры плавления пропорционально повышению давления.

7.15. В калориметр, содержащий 100 *г* льда при 0 °C, впущен пар, имеющий температуру 100 °C. Сколько воды окажется в калориметре непосредственно после того, как весь лед растает? Удельная теплота парообразования воды при 100 °C равна $2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг*.

7.16. Тонкая стеклянная пробирка, содержащая 100 *г* воды при температуре 20 °C, опущена в дьюаровский сосуд, содержащий 50 *г* эфира при температуре 10 °C. Какова будет температура оставшейся воды, когда весь эфир испарится? Что будет находиться в пробирке? Теплообменом с окружающей средой и стеклом пренебречь. Удельная теплоемкость жидкого и газообразного эфира 2,1 *кдж/(кг·град)*, его удельная теплота испарения 376 *кдж/кг*. Решите задачу при условии, что эфира было 120 *г*.

7.17. Кожух пулемета емкостью 3,88 *л* наполнен смесью воды с глицерином (75% воды по объему). Начальная температура смеси —10 °C. После какого выстрела температура смеси достигнет 100 °C? Каждый патрон содержит 3,2 *г* пороха, масса стального ствола 2,1 *кг*. На нагревание ствола пулемета и охлаждающей смеси расходуется 74% энергии. Теплота сгорания пороха $4{,}18 \times 10^6$ *дж/кг*, удельная теплоемкость глицерина 2,4 *кдж/(кг·град)*, стали — 0,46 *кдж/(кг·град)*. Плотность глицерина $1{,}26 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

7.18. 1 *г* водорода, сгорая и превращаясь в воду, выделяет 142 *кдж* тепла. Сколько угля с теплотой сгорания $2{,}93 \cdot 10^7$ *дж/кг* надо сжечь для диссоциации 1 *л* воды, если из выделяемой углем теплоты используется 50%?

7.19. Следуя по течению, пароход прошел расстояние между двумя пунктами в 150 *км* за 10 *ч* 40 *мин*. То же расстояние против течения пройдено за 18 *ч* 50 *мин*. Чему равна сила сопротивления воды движению парохода, если он сжигал 120 *кг* угля в час? Коэффициент полезного действия паровой машины 10%. Теплота сгорания угля $2{,}9 \cdot 10^7$ *дж/кг*.

7.20. Поезд массой 1500 *т* идет по горизонтальному пути со скоростью 60 *км/ч*. Паровоз сжигает при этом 1600 *кг* угля в час. Какую скорость разовьет поезд при тех же условиях на пути с уклоном вверх 0,01? Коэффициент полезного действия паровых машин паровоза равен 12%.

7.21. Какое количество тепла выделяется при полном торможении поезда, идущего со скоростью 54 *км/ч* под уклон 0,01, если масса поезда равна 2000 *т*? Силу сопротивления считать пропорциональной нормальному давлению. Коэффициент сопротивления 0,05.

7.22. Стеклянный шарик объемом 0,2 *см³* равномерно падает в воде. Сколько тепла выделится при перемещении шарика на 6 *м*? Плотность стекла 2,4 *г/см³*.

7.23. На сколько градусов нагреется медная пластинка размером 2×6 *см* при нарезании в ней резьбы с шагом 0,75 *мм*, если при нарезке к воротку нужно приложить момент силы в 4,9 *н·м*? Размером отверстия пренебречь. Плотность меди 8,9 *г/см³*, удельная теплоемкость 376 *дж/(кг·град)*.

7.24. Грузовой автомобиль, оборудованный газогенераторным двигателем мощностью 92 *квт*, имеющим коэффициент использования тепла 0,18, работает в полную нагрузку. Определите массу древесных чурок с теплотворной способностью $1{,}25 \cdot 10^7$ *дж/кг*, необходимых для пробега пути в 1 *км* со скоростью 18 *км/ч*.

7.25. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузок начинает греться. Каков его коэффициент полезного действия, если при полной мощности 60 *квт* 40 *кг* масла в течение 4 *мин* нагрелись на 20 *град*? Удельная теплоемкость масла 2,1 *кдж/(кг·град)*. Количеством тепла, идущим на нагревание металла трансформатора и его обмотки, пренебречь.

7.26. Вращающийся в подшипнике вал диаметром 10 *см* делает 200 *об/мин* и давит на подшипник с силой 12 *кн*. Определите часовой расход масла, пропускаемого для охлаждения подшипника, если температура масла при подаче равна 12, а при выходе 60 °C. Коэффициент трения 0,015, удельная теплоемкость масла 1,7 *кдж/(кг·град)*.

7.27. Заряд 305-миллиметровой пушки содержит 155 *кг* пороха. Масса снаряда 446 *кг*. Какова максимальная дальность полета снаряда, если к.п.д. орудия равен 28%? Теплота сгорания пороха $4{,}18 \cdot 10^6$ *дж/кг* сопротивление воздуха не учитывать.

7.28. Тележка с песком массой M катится без трения по горизонтальным рельсам со скоростью $\vec{v}_1$. Пуля массой m, выпущенная со скоростью $\vec{v}_2$, совпадающей по направлению с $\vec{v}_1$, попадает в тележку и застревает в ней. Сколько механической энергии перешло при ударе в тепло?

7.29. Свинцовая пуля массой 10 *г*, летящая горизонтально со скоростью 300 *м/сек*, попадает в неподвижный стальной кубик массой 100 *г*, лежащий на гладком горизонтальном столе. Какова будет температура тел после удара? Удар считать абсолютно неупругим, температура пули в момент удара 25 °C, кубика 15 °C.

Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость стали 0,46 *кдж/(кг·град)*, свинца 0,125 *кдж/(кг·град)*.

7.30. С какой скоростью должны лететь навстречу друг другу две одинаковые льдинки, имеющие температуру $t = -10$ °С, чтобы при ударе они обратились в пар? Удельные теплоемкость и теплота плавления льда равны соответственно $c = 2{,}9$ *кдж/(кг·град)* и $\lambda = 334$ *кдж/кг*. Удельная теплота парообразования воды при 100 °С $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг*. Решите задачу при условии, что массы льдинок равны m_1 и m_2.

7.31. Горизонтально летящая пуля массой m попадает в деревянный шар, лежащий на полу, и пробивает его. Определите, какая часть энергии перешла в тепло, если начальная скорость пули v_1, скорость после вылета из шара v_2, масса шара M. Трение между шаром и полом отсутствует, траектория пули проходит через центр шара.

7.32. Из винтовки произведен выстрел вертикально вверх. Свинцовая пуля массой 10 *г* вылетает со скоростью 300 *м/сек* и на высоте 500 *м* попадает в такую же пулю, летящую горизонтально со скоростью 284 *м/сек*. На сколько градусов нагреются пули после абсолютно неупругого удара и какова будет их суммарная кинетическая энергия, если в момент удара их температура была одинаковой? Сопротивлением воздуха пренебречь.

7.33. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой M_1, на которой находится брусок массой M_2. В брусок попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, и застревает в нем. Вследствие удара брусок проходит по доске некоторое расстояние и затем под влиянием сил трения перестает двигаться относительно доски. Определите механическую энергию, перешедшую в тепло из-за трения между бруском и доской.

Глава 8. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

Основные понятия, законы и формулы

1. Для большинства тел вблизи 0 °С существует температурный интервал, в пределах которого любой линейный размер тел изменяется по закону

$$l = l_0 (1 + \alpha t), \tag{8.1}$$

где l — длина или какой-либо линейный размер тела при температуре t, l_0 — при 0 °С, а α — коэффициент линейного расширения при начальной температуре.

2. Если линейные размеры тела изменяются по закону (8.1), то для каждого сечения тела

$$S = S_0 (1 + \alpha' t), \tag{8.2}$$

где S — площадь данного сечения при температуре t; S_0 — при 0 °С, а α' — средний коэффициент увеличения площади. При небольших температурах с достаточной степенью точности можно считать, что $\alpha' = 2\alpha$.

3. При увеличении линейных размеров по закону (8.1) объем тела меняется вследствие нагревания по закону

$$V = V_0 (1 + \beta t), \tag{8.3}$$

где β — средний коэффициент объемного расширения. При небольших температурах $\beta = 3\alpha$.

4. В случае теплового расширения тел их плотность изменяется по закону

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \tag{8.4}$$

где ρ — плотность тела при температуре t; ρ_0 — плотность при 0 °С.

Решение задач. Примеры

1. Решение задач о тепловом расширении тел целиком основано на применении одной из формул (8.1)—(8.4) к каждому состоянию нагреваемого тела. Если в задаче рассматривается не одно, а несколько тел, эти формулы записываются для каждого тела отдельно. Все вместе они образуют полную систему уравнений, решение которых позволяет найти искомую величину. В комбинированных задачах формулы теплового расширения являются лишь частью системы уравнений, описывающих данное явление; вторую часть, как правило, составляют формулы калориметрии и гидростатики. При составлении уравнений теплового расширения тел особое внимание нужно обратить на следующее.

а) В формулах (8.1)—(8.4) под l_0, S_0 и V_0 подразумевают значения длины, площади и объема при 0 °С, а не при начальной температуре тела, отличной от нуля; это связано с тем, что табличные коэффициенты линейного и объемного расширения определяются как изменения единицы длины или объема тела, взятого при 0 °С, при нагревании на 1 *град*. Если за начальную температуру принять не 0 °С, а произвольную температуру, относительное удлинение, рассчитанное на один градус, — коэффициент линейного расширения (а также и коэффициент объемного расширения) — в каждом случае будет разным и не таким, как при 0 °С.

Чтобы найти связь между длинами (площадями, объемами) при температурах t_1 и t_2, нужно из уравнений

$$l_1 = l_0 (1 + \alpha t_1) \text{ и } l_2 = l_0 (1 + \alpha t_2)$$

исключить l_0. В результате получим:

$$l_2 = l_1 \frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1},$$

или приближенно:

$$l_2 \approx l_1 [1 + \alpha (t_2 - t_1)] = l_1 (1 + \alpha \Delta t), \qquad (8.5)$$

если пренебречь членами, содержащими α в более высокой степени, чем первой. Практически такое приближение вполне оправдано, так как для большинства твердых тел α очень мало.

Проводя вычисления в задачах на тепловое расширение тел, нужно иметь в виду, что $\frac{1+x}{1+y} \approx 1 + (x - y)$ и $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, если $x \ll 1$ и $y \ll 1$. Использование этих формул значительно облегчает вычисления и упрощает математические выкладки. В частности, при небольших температурах t, таких, что $\beta t \ll 1$, можно с достаточной степенью точности считать, что плотность тел $\rho \approx \rho_0 (1 - \beta t)$.

б) Формулы (8.2) и (8.3) справедливы как для сплошных тел, так и для тел, в которых имеется полость или отверстие.

2. Задачи на тепловое расширение тел удобнее решать по следующей схеме:

а) Для каждого теплового состояния каждого тела записать соответствующую формулу теплового расширения.

б) Если в задаче наряду с расширением тел рассматриваются другие процессы, сопутствующие расширению, — теплообмен, изменение гидростатического давления жидкости или выталкивающей силы, то к уравнениям теплового расширения надо добавить формулы калориметрии и гидростатики.

в) Выписать значения заданных величин и, проверив число неизвестных в полученной системе уравнений, решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. Какую длину $l_{0с}$ и $l_{0м}$ при температуре 0 °С должны иметь стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре разность их длин составляла $\Delta l = 10$ *см*? Коэффициент линейного расширения стали $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$, меди $\alpha_м = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Решение. Рассмотрим два тепловых состояния стального и медного стержней: при начальной температуре $t_0 = 0$ °С и при некоторой произвольной температуре t. Обозначим длину стального стержня при температуре t через $l_с$, медного — через $l_м$, тогда

$$l_с = l_{0с} (1 + \alpha_с t); \qquad (1)$$

$$l_м = l_{0м} (1 + \alpha_м t). \qquad (2)$$

Дополнительное условие позволяет записать:

$$l_с - l_м = \Delta l,$$

в частности,

$$l_{0с} - l_{0м} = \Delta l. \qquad (3)$$

Вычитая из второго уравнения первое и раскрывая скобки, получим:

$$l_с - l_м = l_{0с} - l_{0м} + l_{0с}\alpha_с t - l_{0м}\alpha_м t,$$

откуда с учетом соотношений (3) имеем:

$$l_{0с}\alpha_с - l_{0м}\alpha_м = 0.$$

Из этого и второго равенства (3) для искомых длин получаем:

$$l_{0с} = \frac{\alpha_м}{\alpha_м - \alpha_с} \Delta l; \quad l_{0с} \approx 32 \text{ см}; \; l_{0м} = \frac{\alpha_с}{\alpha_м - \alpha_с} \Delta l; \quad l_{0м} \approx 22 \text{ см}.$$

Пример 2. Стальная и латунная полоски толщиной $h = 0{,}2$ *см* каждая склепаны на концах так, что при температуре $t_1 = 20$ °С они образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет средний радиус изгиба биметаллической пластинки при $t_2 = 100$ °С? Коэффициенты линейного расширения стали и латуни равны $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$; $\alpha_л = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

Решение. Так как коэффициенты линейного расширения латуни и стали неодинаковы ($\alpha_л > \alpha_с$), то при нагревании биметаллической пластинки латунная полоска удлинится больше стальной и вся пластинка изогнется.

Если при температуре t_1 длина средней линии латунной пластинки была равна $l_{1л}$, при температуре t_2 — $l_{2л}$, то, пользуясь приближенной формулой (8.5), можно записать:

$$l_{2л} = l_{1л} (1 + \alpha_л \Delta t), \qquad (1)$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ — приращение температуры.

Для стальной пластинки аналогично предыдущему получим:

$$l_{2с} = l_{1с} (1 + \alpha_с \Delta t), \qquad (2)$$

поскольку приращение температуры здесь то же самое.

Чтобы определить средний радиус изгиба R, будем считать, что концы пластинок при деформации не смещаются относительно друг друга и толщина их настолько мала, что ее изменением при нагревании можно пренебречь по сравнению с изменением длины.

Как видно из чертежа (рис. 8.1), $l_{2л}$ и $l_{2с}$ связаны с радиусом изгиба R уравнениями:

$$l_{2л} = \varphi \left(R + \frac{h}{2}\right); \qquad (3)$$

$$l_{2с} = \varphi \left(R - \frac{h}{2}\right), \qquad (4)$$

где φ — угол между торцевыми поверхностями биметаллической пластинки.

Составленная система уравнений полностью отражает все условия задачи и позволяет определить искомую величину.

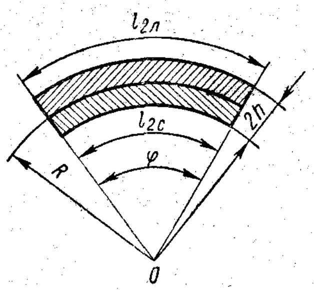


Рис. 8.1.

Решая уравнения (1)—(4) совместно относительно среднего радиуса R кривизны биметаллической пластинки, получим:

$$R = \frac{h}{2}\left[\frac{2 + (\alpha_с + \alpha_л)\,\Delta t}{(\alpha_л - \alpha_с)\,\Delta t}\right];\quad R \approx 5\ м.$$

Пример 3. Латунная шкала ртутного барометра выверена при 0 °С. При температуре $t_1 = 20$ °С барометр показывает давление $p_б = 760$ *мм рт. ст.* Каково истинное атмосферное давление $p_а$ при этой температуре? Расширением стекла пренебречь. Коэффициенты линейного расширения латуни и объемного расширения ртути соответственно равны $\alpha = 1{,}9\cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$ и $\beta = 1{,}8\cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$.

Решение. Если шкалу барометра выверить при какой-либо температуре, например при 0 °С, то при всякой другой температуре его показания не будут соответствовать наружному давлению. Объясняется это тем, что с повышением температуры плотность ртути уменьшается и при неизменном атмосферном давлении высота столба ртути в барометрической трубке возрастает. Кроме того, шкала, по которой отсчитывают высоту столба, удлиняется и цена одного деления становится больше значения, указанного на шкале. Чтобы определить истинное давление, показание барометра нужно привести к той температуре, при которой его шкала выверена, — в данном случае к 0 °С. Делается это сравнительно просто: находят число делений шкалы, в которые укладывается высота измеряемого ртутного столба, рассчитывают по формуле теплового расширения новую цену деления и по этим данным определяют действительную длину ртутного столба. Зная эту длину и плотность ртути при температуре измерений, можно вычислить и само атмосферное давление.

Если при температуре $t_1 = 20$ °С ртуть в барометрической трубке достигла высоты h_1 (n-го деления шкалы), то показания барометра равны:

$$p_б = \rho_1 gh = \rho_1\, gnl_1, \qquad (1)$$

где ρ_1 — плотность ртути при температуре t_1; l_1 — цена одного деления шкалы. Так как расстояние l_0 между двумя соседними рисками на шкале выверено и равно единице (1 *мм*) лишь при 0 °С, то l_1 будет больше цены деления l_0, указанной на шкале.

Если коэффициент линейного расширения латуни равен α, то

$$l_1 = l_0\,(1 + \alpha t_1),$$

и в единицах длины l_0 высота ртутного столба при температуре t равна:

$$h_1 = nl_0\,(1 + \alpha t_1). \qquad (2)$$

Так как по условию задачи атмосферное давление не изменяется, то $p_а = \rho_0\, gh_0$ и в то же время $p_а = \rho_1\, gh_1$, откуда

$$\rho_0 h_0 = \rho_1 h_1, \qquad (3)$$

где ρ_0 — плотность ртути при 0 °С; h_0 — высота, на которую поднялся бы столб ртути при температуре 0 °С. Плотность ртути

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta t_1}. \qquad (4)$$

Из уравнений (1)—(4) получим:

$$p_а = \rho_0\, gh_0 = p_б\,[1 + (\alpha - \beta)\, t_1];\quad p_а = 758\ мм\ рт.\ ст.$$

Пример 4. При температуре $t_1 = 10$ °С железная канистра вмещает $V_1 = 20$ *л* бензина и оказывается наполненной целиком. На сколько изменится масса канистры с бензином, если ее внести в помещение, где температура равна $t_2 = 30$ °С? Коэффициенты объемного расширения железа и бензина $\beta_ж = 3{,}6\cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$ и $\beta_б = 10^{-3}$ *град*$^{-1}$, плотность бензина $\rho_0 = 0{,}8$ *г/см*^{3}.

Решение. Вследствие теплового расширения канистры и бензина объем их при нагревании увеличивается. Коэффициент объемного расширения жидкостей всегда больше коэффициента объемного расширения твердых тел, поэтому при нагревании на одинаковое число градусов приращение объема бензина будет больше приращения объема сосуда и часть бензина из него выльется. Чтобы определить искомое изменение массы канистры с бензином, нужно вычислить массу бензина в канистре при начальной и комнатной температурах и из первого результата вычесть второй. Масса самой канистры при этом не изменится. Для нахождения массы бензина при указанных температурах необходимо найти его плотность при этих температурах, а также объем канистры.

Если при температуре t_1 канистра и, следовательно, бензин имеют объем V_1, а при температуре t_2 — объем V_2, то

$$V_2 = V_1\,\frac{1 + \beta_ж t_2}{1 + \beta_ж t_1} \approx V_1\,[1 + \beta_ж\,(t_2 - t_1)]. \qquad (1)$$

Плотность бензина при температурах t_1 и t_2 соответственно равна:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_б t_1} \approx \rho_0\,(1 - \beta_б t_1); \qquad (2)$$

$$\rho_2 \approx \rho_0\,(1 - \beta_б t_2). \qquad (3)$$

Массы бензина в канистре при этих температурах равны:

$$m_1 = \rho_1 V_1 \text{ и } m_2 = \rho_2 V_2. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1)—(4) совместно и пренебрегая членами, содержащими коэффициенты объемного расширения в степени выше первой, из-за их малости, получим:

$$\Delta m = \rho_0\,(\beta_б - \beta_ж)\,(t_2 - t_1)\,V;\quad \Delta m \approx 0{,}29\ кг.$$

Пример 5. В жидкости взвешивают стальной шарик. Первое взвешивание проводилось при температуре t_1, и вес вытесненной жидкости оказался равным P_1; второе взвешивание провели при температуре t_2 и вес вытесненной жидкости был равен P_2. Определите коэффициент объемного расширения жидкости, если коэффициент объемного расширения стали равен β_c.

Решение. Вследствие теплового расширения тел, взвешиваемых в жидкости, вес вытесненной жидкости при разных температурах будет разным. Он будет определяться плотностью жидкости при данных температурах и объемом тел, погруженных в жидкость. Если при температуре t_1 в жидкость полностью погрузить шарик объемом V_1, то вес вытесненной жидкости будет равен:

$$P_1 = \rho_1 g V_1. \tag{1}$$

Плотность жидкости ρ_1 и объем стального шарика V_1 при температуре t_1 могут быть выражены через их значения при 0 °С:

$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_ж t_1}; \tag{2}$$

$$V_1 = V_0 (1 + \beta_c t_1), \tag{3}$$

где $\beta_ж$ — коэффициент объемного расширения жидкости. Для температуры t_2 мы имеем соответственно:

$$P_2 = \rho_2 g V_2; \tag{4}$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_0}{1 + \beta_ж t_2}; \tag{5}$$

$$V_2 = V_0 (1 + \beta_c t_2). \tag{6}$$

Решая уравнения (1)—(6) относительно $\beta_ж$, находим:

$$\beta_ж = \beta_c + \frac{P_1 - P_2}{P_2 (t_2 - t_1)}.$$

Члены, содержащие коэффициенты теплового расширения в степени выше первой, здесь отброшены из-за их малости.

Задачи к главе 8

8.1. Длина стержня при температуре 0 °С равна 1000 *мм*, при температуре 100 °С — 1002 *мм*, при температуре красного каления — 1011,6 *мм*. Определите температуру красного каления.

8.2. Колесо локомотива имеет диаметр 1 *м* при 0 °С. На сколько отличаются расстояния, пройденные поездом за 1 *ч* зимой и летом при температурах —25 °С и +25 °С, если в обоих случаях двигатель развивал 480 *об/мин*? Коэффициент линейного расширения стали $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.3. При температуре t °С показание ртутного барометра с латунной шкалой равно n. Каково будет показание барометра при 0 °С? при $-t$ °С? Атмосферное давление во всех случаях одинаково. Коэффициент линейного расширения латуни α, коэффициент объемного расширения ртути β.

8.4. Два секундных маятника, первый — медный, второй — железный, отбивают секунды при температуре —2 °С. На сколько секунд отстанет в сутки медный маятник от железного, если температура помещения поднимется до 18 °С? Коэффициенты линейного расширения меди и железа равны соответственно $1{,}7 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$ и $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.5. Часы снабжены латунным маятником. Сравнивая показания этих часов с показанием точных часов, заметили, что при 0 °С они спешат на 7 *сек* в сутки, а при температуре 20 °С отстают в сутки на 9 *сек*. Определите коэффициент линейного расширения латуни, а также ту температуру, при которой маятниковые часы будут идти правильно.

8.6. При нагревании железного шара до температуры 800 °С его поверхность увеличилась на 1 *см*^{2}. Определите диаметр шара при температуре 20 °С. Коэффициент линейного расширения железа $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.7. Никелевый брусок массой 740 *г* и длиной 22,2 *см* при температуре 50 °С опущен в калориметр с теплоемкостью 21 *дж/град*, содержащий 145 *г* воды при 0 °С. Когда температура установилась, то оказалось, что длина бруска уменьшилась на 0,13 *мм*. Определите удельную теплоемкость никеля. Коэффициент линейного расширения никеля $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.8. В центре стального диска имеется отверстие, диаметр которого при 0 °С равен 4,99 *мм*. До какой температуры следует нагреть диск, чтобы в его отверстие начал проходить шарик диаметром 5,00 *мм*? Коэффициент теплового расширения стали равен $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.9. В железнодорожную цистерну при температуре +25 °С было налито 20 *т* бензина. На сколько уменьшится объем этого бензина у места слива, если температура воздуха в этом месте равна —20 °С? Коэффициент объемного расширения бензина равен 10^{-3} *град*$^{-1}$.

8.10. Емкость железного сосуда при температуре 10 °С равна 2 *л*. Какова будет масса ртути в сосуде при температуре 25 °С? Коэффициент линейного расширения железа $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути $1{,}8 \cdot 10^{-1}$ *град*$^{-1}$.

8.11. При температуре t_1 стержни с коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2 имеют одинаковую длину, при температуре t_2 одинаковыми оказываются их объемы. При какой температуре будут одинаковы площади поперечного сечения стержней?

8.12. В стеклянный цилиндр налита ртуть массой 1 *кг*. Остальную часть объема цилиндра занимает воздух, причем оказывается, что объем пространства над ртутью остается постоянным при всех температурах от 0 до 100 °С. Определите объем цилиндра. Коэффициент линейного расширения стекла равен $0{,}9 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути — $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$.

8.13. Стеклянный сосуд весит P_0. Этот же сосуд, наполненный ртутью, при 0 °С весит P_1. Если сосуд нагреть до температуры t, то часть ртути выливается и вес сосуда с ртутью оказывается P_2. Чему равен коэффициент объемного расширения стекла? Коэффициент объемного расширения ртути β.

8.14. Медный брусок, имеющий температуру t_1, сложен вместе с алюминиевым бруском, имеющим температуру t_2 и такую же массу, что и медный. Каково будет относительное изменение общего объема брусков, после того как температура выравнится?

8.15. В наполненном сосуде содержится керосин массой $M_к$ и кусок железа массой $M_ж$. Если всей системе сообщить количество теплоты Q, то из сосуда будет выливаться керосин объемом V. Определите коэффициент объемного расширения железа. Теплоемкостью и расширением сосуда пренебречь. Работой расширения пренебречь.

8.16. Стальной брусок плавает в сосуде со ртутью в вертикальном положении. При температуре 0 °С в ртуть погружена 0,577 часть всего объема бруска. На сколько изменится погруженная часть объема бруска, если систему нагреть до 100 °С? Коэффициент линейного расширения стали $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$, коэффициент объемного расширения ртути $1{,}8 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$.

8.17. Кусок латуни при 20 °С весит в керосине 0,77 *н*. Найдите объем этого куска при температуре 100 °С. Плотности латуни и керосина при 20 °С равны 8,5 *г/см*^{3} и 0,8 *г/см*^{3}, коэффициент теплового расширения латуни равен $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$.

8.18. Вес куска металла, погруженного в известную жидкость, уменьшается на P_1 при температуре t_1 и на P_2 при температуре t_2. Определите коэффициент линейного расширения металла.

8.19. Стальной шарик массой $m = 100$ *г* опущен на нити в керосин. На сколько изменится натяжение нити, если всю систему нагреть от $t_1 = 20°$ С до $t_2 = 50$ °С? Плотности стали и керосина при 0 °С равны $\rho_{0с} = 7{,}9$ *г/см*^{3}, $\rho_{0к} = 0{,}8$ *г/см*^{3}. Коэффициенты теплового расширения $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$, $\beta = 10^{-3}$ *град*$^{-1}$.

8.20. На сколько надо увеличить внешнее давление, чтобы сохранить постоянным объем ртути при нагревании ее от 0 до 10 °С если известно, что с увеличением давления на 1 *атм* объем ртути уменьшается на $3{,}9 \cdot 10^{-6}$ части того объема, который она занимала при 0 °С?

8.21. Какое количество теплоты надо затратить на единицу массы металлического шара радиусом R, чтобы увеличить его объем на z % по отношению к объему шара при 0 °С? Атмосферное давление равно p, удельная теплоемкость металла c, коэффициент линейного расширения α.

8.22. Два кубика с массами m_1 и m_2 стоят на теплопроводящей подставке. На сколько изменится общая теплоемкость кубиков, если один из них положить на другой? Первый кубик железный, второй — медный.

Глава 9. ГАЗЫ

Основные понятия, законы и формулы

1. Состояние любого тела характеризуют совокупностью нескольких физических величин, называемых параметрами состояния. Важнейшими параметрами состояния газа являются его объем V, давление p и температура T.

Состояние газа, при котором все его параметры при неизменных внешних условиях остаются постоянными сколь угодно долго, называют равновесным. Процессы, состоящие из непрерывной последовательности равновесных состояний, называют равновесными. Параметры состояния газов, находящихся в равновесных состояниях, связаны между собой уравнением состояния $f(p, V, T) = 0$.

Самый простой вид уравнение состояния имеет для идеальных газов. Идеальными называют газы, молекулы которых взаимодействуют друг с другом лишь при соударениях (отсутствует межмолекулярное притяжение и отталкивание) и объем молекул ничтожно мал по сравнению с объемом, занимаемым газом. Кроме того, предполагают, что соударение молекул происходит по законам абсолютно упругого удара. Реальные газы тем точнее подчиняются законам идеальных газов, чем меньше их давление и выше температура.

2. Для идеальных газов имеют место следующие экспериментальные законы.

Закон Бойля — Мариотта:

$$pV = \text{const при } T = \text{const и } m = \text{const}. \qquad (9.1)$$

Из этого закона вытекает, что для двух произвольных состояний газа при указанных условиях справедливо равенство:

$$p_1V_1 = p_2V_2. \qquad (9.1')$$

Закон Гей-Люссака:

$$\beta_V = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{1}{273} \text{ } град^{-1}, \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const}, \qquad (9.2)$$

если

$$p = \text{const и } m = \text{const}.$$

Согласно выражению (9.2) при соблюдении указанных ограничений для двух произвольных состояний

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \qquad (9.2')$$

Закон Шарля:

$$\beta_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{273} \text{ } град^{-1}, \text{ или } \frac{p}{T} = \text{const}, \qquad (9.3)$$

если

$$V = \text{const и } m = \text{const}.$$

Согласно закону Шарля для двух произвольных состояний:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \qquad (9.3')$$

Соотношения (9.1), (9.2) и (9.3) можно рассматривать как уравнения состояния идеального газа соответственно при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах, когда из трех параметров газа изменяются два.

3. Из опытных законов (любых двух) для идеальных газов вытекает объединенный газовый закон (уравнение Клапейрона):

$$\frac{pV}{T} = \text{const}, \text{ если } m = \text{const}, \qquad (9.4)$$

откуда следует, что при переходе газа из одного состояния в другое, когда меняются все три его параметра, должно быть:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \qquad (9.4')$$

4. Молекулярной массой M данного вещества называют массу m_x молекулы этого вещества, выраженную в углеродных единицах массы (у.е.м.). За углеродную единицу массы принята $^1/_{12}$ часть массы m_C самого легкого изотопа углерода:

$$M = \frac{m_x}{\frac{1}{12} m_C},$$

Так же определяют и атомную массу A, но только под m_x тогда подразумевают массу атома.

Киломолем называют такое количество вещества, масса которого μ в килограммах численно равна молекулярной массе ($\mu = M$) этого вещества.

Согласно закону Авогадро в одном киломоле (килоатоме) любого вещества содержится $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{26}$ молекул (атомов).

При нормальных условиях ($p = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*; $T = 273$ °K) один киломоль идеального газа занимает объем $v_0 = 22{,}4$ *м³/кмоль*.

Если газ с киломолекулярной массой μ имеет массу m и содержит N молекул, то в нем содержится число киломолей ν, равное

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}. \qquad (9.5)$$

Согласно (9.5) масса одной молекулы

$$m_1 = \frac{m}{N} = \frac{\mu}{N_A}.$$

При нормальных условиях объем идеального газа равен

$$V_0 = \nu v_0. \qquad (9.6)$$

Если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, давление смеси газов равно сумме давлений, производимых каждым газом в отдельности, если бы он один занимал весь сосуд (закон Дальтона):

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Если за первое состояние принять состояние идеального газа с параметрами p, V, T, а за второе — его состояние при нормальных условиях, то согласно уравнению (9.4′):

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}.$$

Отсюда с учетом соотношений (9.6) и (9.5):

$$\frac{pV}{T} = \frac{\nu v_0 p_0}{T_0} = \frac{m}{\mu} R = \frac{N}{N_A} R,$$

или

$$pV = \nu RT = \frac{m}{\mu} RT = \frac{N}{N_A} RT, \qquad (9.7)$$

где величина $R = \frac{v_0 p_0}{T_0}$ имеет для всех идеальных газов одинаковое значение и называется универсальной газовой постоянной. Числовое значение газовой постоянной равно:

$$R = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \frac{н}{м^2} \cdot 22{,}4 \frac{м^3}{кмоль}}{273 \text{ град}} = 8{,}3 \frac{кдж}{кмоль \cdot град}.$$

Уравнение (9.7) называют уравнением Менделеева — Клапейрона. Его можно представить в виде:

$$p = \frac{\rho}{\mu} RT,$$

где ρ — плотность газа при данной температуре T, а также

$$p = zkT,$$

где $z = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул; $k = \frac{R}{N_A}$ — постоянная Больцмана.

5. Если температура идеального газа массой m изменяется на ΔT, внутренняя энергия газа изменяется на величину

$$\Delta U = c_V m \Delta T = c_{\mu V} \nu \Delta T, \qquad (9.8)$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме и $c_{\mu V}$ — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме — теплоемкость, рассчитанная на киломоль газа.

Если при постоянном давлении p газ нагревается от температуры T_1 до температуры T_2, то его объем возрастает от V_1 до V_2 и газ совершает работу

$$A = p\,(V_2 - V_1) = p\Delta V. \tag{9.9}$$

Применяя уравнение (9.7) для каждого из двух состояний газа, формулу работы можно представить в виде:

$$A = \frac{m}{\mu} R\,(T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} R\Delta T. \tag{9.10}$$

Если в процессе расширения к газу подводится некоторое количество теплоты Q, то согласно закону сохранения и превращения энергии для изобарического процесса

$$Q = \Delta U + A = c_V m\Delta T + \begin{cases} p\Delta V \\ \dfrac{m}{\mu} R\Delta T \end{cases}. \tag{9.11}$$

Учитывая (9.8), (9.10) и (9.11) и что

$$\Delta U = \frac{c_V\mu}{R} A = \frac{c_{\mu V}}{R} A, \tag{9.12}$$

можно записать:

$$Q = \frac{c_{\mu V} + R}{c_{\mu V}} \Delta U = \frac{c_{\mu V} + R}{R} A. \tag{9.13}$$

6. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.14}$$

где Q_1 и Q_2 — соответственно тепло, полученное от нагревателя и отданное холодильнику, T_1 и T_2 — температуры нагревателя и холодильника.

Решение задач. Примеры

1. Основным уравнением, характеризующим состояние идеального газа, является уравнение Менделеева — Клапейрона. Составив это уравнение для каждого из рассматриваемых состояний газа и записав дополнительные условия в виде формул, можно сравнительно легко решить почти любую задачу на газы элементарного курса физики. Однако этот метод решения в ряде случаев усложняет решение и приводит к лишним математическим выкладкам, мало поясняющим физическую сущность явления.

Учитывая это, задачи на расчет параметров состояния газов можно разделить на две основные группы. К первой следует отнести такие задачи, где даны два или несколько состояний газа, в которых его масса остается неизменной и к которым, следовательно, применимо уравнение объединенного газового закона (9.4).

Вторую группу составляют задачи, в условии которых дана масса газа или рассматриваются такие процессы, в которых масса газа изменяется. При решении этих задач пользоваться объединенным газовым законом нецелесообразно, более удобно применять уравнение Менделеева — Клапейрона.

Решение задач на нагревание и работу газа при изохорическом и изобарическом процессе основано на первом начале термодинамики и формулах (9.9)—(9.10). При этом обычно предполагают, что необходимые расчетные формулы будут выведены самими учащимися, а это, как правило, и составляет основную трудность решения.

2. Если по условию задачи даны два состояния газа и при переходе газа из одного состояния в другое его масса не меняется, то для решения задачи можно рекомендовать следующую последовательность.

а) Прочитав условие задачи, нужно ясно представить, какой газ участвует в том или ином процессе, и убедиться, что при изменении параметров состояния газа его масса не меняется.

б) Сделать, если это возможно, схематический чертеж и, отметив каждое состояние газа, указать параметры p, V, T, характеризующие эти состояния. Определить из условия задачи, какой из этих трех параметров не меняется и какому газовому закону подчиняются переменные параметры.
В общем случае могут изменяться все три параметра p, V и T.

в) Записать уравнение объединенного газового закона Клапейрона для данных двух состояний. Если какой-либо параметр остается неизменным, уравнение автоматически переходит в одно из трех уравнений: закон Бойля — Мариотта, Гей-Люссака или Шарля.

В тех случаях, когда газ заключен в цилиндрический сосуд и объем газа меняется только за счет изменения высоты его столба, но не сечения, уравнение Клапейрона нужно сразу записывать в виде:

$$\frac{p_1 l_1}{T_1} = \frac{p_2 l_2}{T_2}.$$

г) Представить в развернутом виде параметры p_1, V_1, p_2, V_2, выразив их через заданные величины. Вполне естественно, что расшифровывать нужно только те параметры, которые заданы косвенно, но не те, что даны явно. Особое внимание здесь следует обратить на определение давления. Чтобы его найти, часто приходится использовать закон Паскаля: провести нулевой уровень через границу, отделяющую газ от жидкости, и записать уравнение равновесия жидкости.

д) Записать математически все вспомогательные условия и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

Если в задаче рассматривают процессы, связанные с изменением состояния двух или трех газов, отделенных друг от друга поршнями или входящих в состав смеси, то все указанные действия нужно проделать для каждого газа отдельно.

В задачах на газовые законы рекомендуется пользоваться только абсолютной температурой и сразу же переводить значения температуры по шкале Цельсия в значения по шкале Кельвина.

3. Если по условию задачи дано только одно состояние газа и требуется определить какой-либо параметр этого состояния или же даны два состояния с разной массой газа, то рекомендуется поступать так:

а) Установить, какие газы участвуют в рассматриваемых процессах.

б) Для каждого состояния каждого газа (если их несколько) составить уравнение Менделеева — Клапейрона. Если дана смесь газов, то это уравнение записывают для каждого компонента. Связь между значениями давлений отдельных газов и результирующим давлением смеси устанавливается законом Дальтона.

в) Записать математически дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомой величины.

В комбинированных задачах, где рассматривается движение сосуда с газом, уравнение газового состояния добавляют к уравнениям механики.

Пример 1. Для погружения и всплытия подводной лодки в ней имеются два сообщающихся между собой резервуара. В погруженном состоянии один из резервуаров емкостью V заполнен водой, во втором, емкостью V_1, находится сжатый воздух. Каково должно быть минимальное давление сжатого воздуха, чтобы при всплытии лодки с глубины H сжатый воздух полностью вытеснил воду из балластной цистерны? Атмосферное давление нормальное, изменением температуры воздуха при расширении пренебречь.

Р е ш е н и е. Если соединить резервуары между собой, то при достаточной степени сжатия воздух, заключенный во втором сосуде, начнет расширяться и вытеснит воду из балластной цистерны наружу. Так как по условию задачи масса и температура сжатого воздуха не меняются, то увеличение его объема вызовет понижение давления. Учитывая сделанные выше рекомендации, решение задачи следует построить на законе Бойля — Мариотта.

Пусть p_1 и V_1 — давление и объем сжатого воздуха до расширения, p_2 и V_2 — давление и объем воздуха в тот момент, когда он, вытеснив воду, займет оба резервуара, тогда

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Обратимся теперь к каждому из параметров и посмотрим, какие из них нужно представить в развернутом виде. Давление p_1 требуется определить по условию задачи, объем V_1 задан — он равен объему резервуара со сжатым воздухом, давление p_2 можно найти, исходя из следующего. Чтобы вытеснить воду из балластного резервуара, воздух во втором состоянии должен находиться под давлением, большим или равным гидростатическому давлению на глубине H, т. е.

$$p_2 = p_а + \rho gH,$$

где ρ — плотность морской воды. Остается выразить объем V_2, он, как нетрудно заметить, равен суммарной емкости обоих резервуаров:

$$V_2 = V_1 + V.$$

Подставляя выражения для p_2 и V_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы получим уравнение газового состояния в окончательном виде:

$$p_1V_1 = (p_а + \rho gH)(V_1 + V),$$

откуда начальное давление в резервуаре со сжатым воздухом

$$p_1 = \frac{V + V_1}{V_1}(p_а + \rho gH).$$

Пример 2. Посредине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной $h = 19{,}6$ *мм*. Если трубку поставить под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то столбик ртути переместится на $\Delta l_1 = 20$ *мм*; если поставить вертикально — на $\Delta l_2 = 30$ *мм*. До какого давления откачан воздух из трубки?

Р е ш е н и е. В задаче говорится о трех состояниях двух газов одинаковой массы, разделенных столбиком ртути (рис. 9.1). В процессе перемещения трубки из горизонтального положения в вертикальное вследствие смещения столбика ртути газ, находящийся в правой части трубки, будет расширяться, в левой — сжиматься.

Так как по условию задачи масса и температура не меняются, то для каждой пары состояний каждого газа должно иметь место уравнение закона Бойля — Мариотта. Совокупность этих уравнений полностью характеризует изотермический процесс, описываемый в данной задаче.

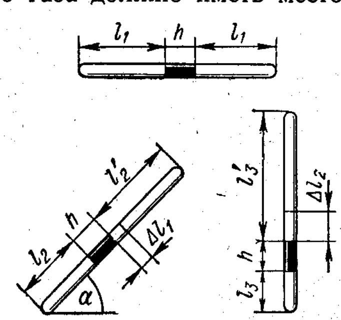


Рис. 9.1.

Состояние газа при горизонтальном положении трубки примем за первое состояние. Вторым состоянием будем считать состояние газа в наклонной трубке, третьим — состояние газа при вертикальном положении трубки.

Обозначим давление газа в левой части трубки в каждом из этих состояний через p_1, p_2, p_3, длину столбов воздуха через l_1, l_2, l_3, тогда, применяя закон Бойля — Мариотта для каждой пары состояний и учитывая, что площадь поперечного сечения трубки всюду одинакова, получим:

$$p_1 l_1 = p_2 l_2; \quad p_1 l_1 = p_3 l_3.$$

Аналогично для газа, заключенного в правой части трубки:

$$p_1 l_1 = p_2' l_2' \text{ и } p_1 l_1 = p_3' l_3',$$

так как в первом состоянии давления и объемы газа в обеих частях трубки были одинаковы.

Если при отклонении трубки от горизонтального положения на угол α столбик ртути сместится на расстояние Δl_1, при отклонении на угол 90° — на расстояние Δl_2, то, как видно из чертежа,

$$l_2 = l_1 - \Delta l_1; \; l_3 = l_1 - \Delta l_2;$$
$$l_2' = l_1 + \Delta l_1; \quad l_3' = l_1 + \Delta l_2.$$

Кроме того, при равновесии столбика ртути должно быть

$$p_2 = p_2' + \rho g h \sin\alpha \quad \text{и} \quad p_3 = p_3' + \rho g h,$$

где ρ — плотность ртути.

Подставляя в уравнения закона Бойля — Мариотта вместо l_2, l_3, l_2', l_3', p_2 и p_3 их выражения, получим:

$$p_1 l_1 = (p_2' + \rho g h \sin\alpha)(l_1 - \Delta l_1);$$
$$p_1 l_1 = (p_3' + \rho g h)(l_1 - \Delta l_2);$$
$$p_1 l_1 = p_2'(l_1 + \Delta l_1) \text{ и } p_1 l_1 = p_3'(l_1 + \Delta l_2).$$

Решая полученные уравнения относительно p_1, найдем:

$$p_1 = \frac{\rho g h}{2}\left[\sqrt{\frac{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}} - \sqrt{\frac{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}}\right];$$

$$p_1 \approx 6 \text{ мм рт. ст.}$$

Пример 3. В стеклянную манометрическую трубку, запаянную с одного конца, налита ртуть. Высота столба воздуха в запаянном колене равна $2H$, причем уровень ртути в открытом колене стоит на H выше, чем в закрытом. Манометр установлен в ракете, которая начинает подниматься вертикально вверх с ускорением $a = g$. Какова будет разность уровней ртути в коленах манометра при подъеме ракеты, если в кабине ракеты поддерживается нормальное атмосферное давление?

Р е ш е н и е. При ускоренном движении тел в вертикальном направлении на эти тела со стороны опоры действует сила нормального давления, сообщающая им ускорение $g + a$. Такая же по величине, но противоположная по направлению сила действует и на опору со стороны расположенных на ней тел. Эффект получается такой, как если бы ускорение свободного падения g возросло на

величину a. В результате вес тел, а следовательно, и удельный вес в движущейся системе возрастает и становится равным не ρg, а $\rho(g + a)$.

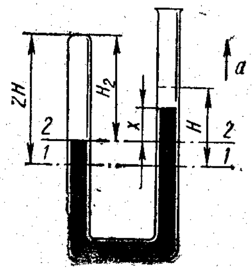


Рис. 9.2.

Аналогичное явление происходит и при подъеме манометра в ракете. Перед стартом ракеты воздух в закрытом колене манометра был сжат до такой степени, что уравновешивал атмосферное давление и давление столбика ртути в открытом колене. Как только ракета начнет подниматься вверх с ускорением a, давление столба ртути на поверхность *1 — 1* (рис. 9.2) возрастет, ртуть начнет переливаться в закрытое колено, сжимая находящийся там воздух. Разность уровней ртути будет уменьшаться до тех пор, пока упругость воздуха не достигнет величины, необходимой для равновесия.

Таким образом, при ускоренном движении ракеты происходит изотермическое сжатие воздуха в закрытом колене, вызванное увеличением удельного веса ртути.

Так как в процессе сжатия температура и масса воздуха остаются неизменными, то в этом случае справедлив закон Бойля—Мариотта.

Если в неподвижной ракете давление и высота столба воздуха в закрытом колене были равны p_1 и $2H$, а при ускоренном подъеме — p_2 и H_2, то

$$p_1 2H = p_2 H_2.$$

По условию задачи исходная высота воздушного столба задана, поэтому дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы представить в развернутом виде p_1 и p_2.

Выбрав поверхность нулевого уровня по границе *1—1*, согласно закону Паскаля запишем:

$$p_1 = p_a + \rho g H,$$

где p_a — атмосферное давление; H — разность уровней ртути в сосудах в неподвижной ракете; ρg — удельный вес ртути.

Выбирая поверхность одного уровня по границе *2—2* для каких-нибудь двух произвольных точек, лежащих на этой поверхности, при относительном равновесии жидкости в сосудах будем иметь:

$$p_2 = p_a + \rho(g + a)x,$$

где $\rho(g + a)$ — удельный вес ртути, поднимающейся вертикально вверх с ускорением a; x — разность уровней ртути в сосудах во время движения ракеты.

Высоту столба воздуха во втором состоянии можно выразить через ее начальное значение $2H$, начальную разность уровней ртути H и конечную разность x. Как видно из чертежа,

$$H_2 = 2H - \frac{H - x}{2}.$$

(Второй член правой части равенства численно равен смещению уровней ртути от начального положения.)

Подставив выражения для p_1, p_2 и H_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы и получим окончательное уравнение для определения неизвестной величины x:

$$(p_a + \rho g H)\, 2H = [p_a + \rho (g + a)\, x] \left(2H - \frac{H - x}{2}\right).$$

Или, если учесть, что $p_a = \rho g H_0$ и $a = g$, после сокращений получим:

$$4\,(H + H_0)\, H = 3HH_0 + 2x^2 + 6Hx,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{17H^2 + 2HH_0} - 3H}{2}.$$

Пример 4. Компрессор захватывает при каждом качании воздух объемом $V_к = 1$ *л* при нормальном атмосферном давлении и температуре $T_1 = 273\,°К$ и нагнетает его в автомобильный баллон, объем которого $V = 0{,}5$ *м*^{3}; температура воздуха в баллоне $T_2 = 290\,°К$. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы площадь соприкосновения покрышки с полотном дороги уменьшилась на $\Delta S = 100$ *см*^{2}, если до этого она равнялась $S = 450$ *см*^{2} и на колесо приходится нагрузка в $F = 4{,}9$ *кн*?

Р е ш е н и е. В процессе работы компрессора воздух, нагнетаемый в баллон, сжимается от объема, занимаемого им в атмосфере, до объема в автопокрышке. В результате упругость баллона возрастает и площадь его соприкосновения с дорогой уменьшается. Следует заметить, что в баллоне и до этого мог находиться воздух, именно поэтому в условиях задачи и говорится об уменьшении площади соприкосновения покрышки с дорогой, вызванном увеличением давления, но не о самой площади соприкосновения, величина которой, помимо прочего, зависит от полного давления в баллоне.

Так как при переходе воздуха из свободного состояния в сжатое изменяются его давление, объем и температура, то основным уравнением, характеризующим процесс, служит уравнение объединенного газового закона Клапейрона.

В первом состоянии (в атмосфере) параметры состояния воздуха равны соответственно p_1, V_1, T_1. Во втором состоянии (в баллоне) этот же воздух после n качаний компрессора будет сжат до давления p_2, займет объем баллона V_2 и нагреется до температуры T_2. Объем баллона считается при этом неизменным. Параметры первого и второго состояний воздуха связаны между собой уравнением

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

По условию задачи нам даны $p_1 = p_0$, $V_2 = V_1$, T_1 и T_2, поэтому нужно расшифровать V_1 и p_2.

Если при одном качании компрессор захватывает воздух в объеме $V_к$, то весь воздух, содержащийся в объеме V_1, будет перекачан из атмосферы в баллон за n качаний, т. е.

$$V_1 = nV_к.$$

Чтобы определить давление p_2, нужно учесть следующее. Если до того, как автопокрышку стали накачивать, в ней было создано начальное избыточное давление[1] $p_и$ и площадь соприкосновения покрышки с дорогой равнялась S, то

$$p_и = \frac{F}{S},$$

где F — нагрузка, приходящаяся на колесо. После того как баллон подкачали, избыточное давление в нем возросло на p_2 и стало равным $p_и + p_2$; площадь соприкосновения с полотном дороги уменьшилась на ΔS и стала равной $S - \Delta S$. Так как нагрузка на колесо осталась прежней, то

$$p_и + p_2 = \frac{F}{S - \Delta S}.$$

Исключая из последних двух равенств начальное давление $p_и$ и подставляя в исходное уравнение вместо параметров V_1 и p_2 их выражения, мы получим уравнение объединенного газового закона в окончательном виде:

$$\frac{p_1 n V_к}{T_1} = \frac{F \Delta S V_2}{S (S - \Delta S)\, T_2},$$

откуда

$$n = \frac{F \Delta S V_2 T_1}{p_1 S (S - \Delta S)\, V_к T_2} = 148.$$

Пример 5. Поршни двух одинаковых цилиндров связаны между собой жесткой тягой так, что объемы под поршнями равны. Под поршнями находится одинаковое количество газа при температуре T_0. Каково будет давление в цилиндрах, если один из них нагреть до температуры T_1, а второй охладить до температуры T_2? Чему будет равно при этом относительное изменение объема газа в каждом цилиндре? Весом поршней и тяги пренебречь, трение не учитывать, атмосферное давление p_a.

Р е ш е н и е. В задаче рассматривают два состояния двух одинаковых газов, заключенных в разные цилиндры (рис. 9.3). Поршни этих цилиндров связаны между собой жесткой тягой и могут скользить без трения. В такой системе изменение давления или объема одного из газов вызывает изменение параметров

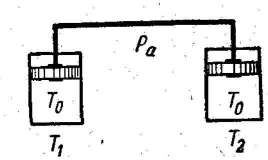


Рис. 9.3.

[1] Избыточным давлением называется давление сверх атмосферного.

состояния другого газа. Причем изменения объемов газа под поршнями будут всегда равны между собой, так как по условию задачи сами цилиндры и объемы под поршнями одинаковые, а поршни связаны друг с другом жестко. Что касается давлений газов, то они могут быть разными. На них накладывается лишь единственное ограничение: в сумме эти давления должны уравновесить давление, производимое на поршни снаружи.

При нагревании одного газа и охлаждении другого у каждого из них изменяются все три параметра состояния: давление, объем и температура.

Рассмотрим газ в левом сосуде. До нагревания он находился под давлением p_1, занимал объем V_1 и имел температуру T_0; после нагревания эти параметры имеют значения p_2, V_2 и T_1. Поскольку масса газа не менялась, то

$$\frac{p_1V_1}{T_0} = \frac{p_2V_2}{T_1}. \qquad (1)$$

До охлаждения газа в правом сосуде его давление, объем и температура имели значения p_1, V_1, T_0; после охлаждения — p_3, V_2, T_2. Масса газа при нагревании не менялась, поэтому

$$\frac{p_1V_1}{T_0} = \frac{p_3V_2}{T_2}. \qquad (2)$$

Поскольку в обоих состояниях газов поршни находятся в равновесии, то должно быть в первом случае:

$$2p_a = 2p_1,$$

во втором:

$$\left.\begin{array}{l} 2p_a = 2p_1, \\ 2p_a = p_2 + p_3. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Относительное изменение объема газа в цилиндре равно:

$$x = \frac{V_1 - V_2}{V_1}. \qquad (4)$$

Из уравнений (1)—(4) находим:

$$p_2 = \frac{2T_1}{T_1 + T_2}\,p_a;$$

$$p_3 = \frac{2T_2}{T_1 + T_2}\,p_a;$$

$$x = \frac{2T_0 - T_1 - T_2}{2T_0}.$$

Пример 6. Сосуд емкостью $2V = 2\cdot 10^{-3}$ *м*^{3} разделен пополам полупроницаемой перегородкой. В одну половину сосуда введен водород массой $m_в = 2$ *г* и азот массой $m_а = 28$ *г*, в другой половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Во время процесса поддерживается температура $T = 373$ °K. Какие давления установятся в обеих частях сосуда?

Р е ш е н и е. При заполнении одной половины сосуда смесью газов молекулы водорода будут диффундировать через перегородку в другую половину сосуда до тех пор, пока давления водорода по обе стороны перегородки не сравняются. Так как перегородка делит

сосуд на равные объемы и температура в них одна и та же, во вторую половину сосуда продиффундирует ровно половина начального количества водорода. После этого в одной части сосуда окажется смесь азота с водородом, в другой — продиффундировавший водород.

Для решения задачи нужно составить уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого компонента газа: отдельно для азота и отдельно для водорода. Эти уравнения позволят определить давление каждого газа, после чего, используя закон Дальтона, легко найти давление смеси азота с водородом.

Если объем сосуда равен $2V$, то в половине этого объема азот массой $m_а$ при температуре T будет производить давление $p_а$ и

$$p_аV = \frac{m_а}{\mu_а}RT, \qquad (1)$$

где $\mu_а$ — киломолекулярная масса азота.

В том же объеме, при той же температуре после диффузии водород массой $\frac{m_в}{2}$ будет производить давление $p_в$, причем

$$p_вV = \frac{m_в}{2\mu_в}RT. \qquad (2)$$

Согласно закону Дальтона полное давление газа в этой части сосуда станет равным

$$p = p_а + p_в. \qquad (3)$$

По другую сторону перегородки давление водорода будет равно $p_в$.

При проведении числовых расчетов в задачах с применением уравнения Менделеева — Клапейрона приходится использовать киломолекулярные массы газов. В таблицах же даются значения атомных масс элементов. Поэтому, чтобы найти молекулярную и киломолекулярную массу того или иного газа, нужно прежде всего установить, сколько атомов входит в состав его молекулы. В нашей задаче, например, дается азот и водород. В свободном состоянии молекулы азота и водорода содержат не один, а два атома. Поэтому киломолекулярные массы этих газов будут равны соответственно $\mu_а = 28$ *кг/кмоль* и $\mu_в = 2$ *кг/кмоль*. Эти значения мы и должны взять при расчете.

Из уравнений (1)—(3) находим:

$$p_в = \frac{m_в}{2\mu_в}\cdot\frac{RT}{V};\ p_в \approx 1{,}5\cdot 10^5\ н/м^2;\ p = \left(\frac{m_в}{2\mu_в} + \frac{m_а}{\mu_а}\right)\cdot\frac{RT}{V};\ p \approx 4{,}6\cdot 10^5\ н/м^2.$$

Пример 7. В откачанной ампуле объемом $V = 3$ *см*^{3} содержится радий массой $m = 5$ *г* в течение времени $\tau = 1$ *год*. В результате радиоактивного распада из радия массой $m_0 = 1$ *г* в $\tau_0 = 1$ *сек* вылетает $n_0 = 3{,}7\cdot 10^{10}$ альфа-частиц, представляющих собой ядра гелия. Какое давление будет производить гелий при температуре $T = 300$ °K?

Решение. Нам задано одно состояние гелия и дается ряд дополнительных условий, позволяющих определить массу газа. Для решения задачи нужно использовать основное уравнение газового состояния.

Если в закрытой ампуле объемом V находится ν киломолей гелия под давлением p при температуре T, то согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \nu RT.$$

Число киломолей гелия, образовавшегося в результате рекомбинации альфа-частиц, вылетающих из радия, можно найти двумя путями: используя дополнительные условия задачи, определить массу гелия и, найдя в таблицах его молекулярную массу, разделить m на μ или по тем же дополнительным данным найти число атомов гелия N, образовавшихся в ампуле к интересующему нас моменту времени, и, зная число Авогадро N_A, определить ν из формулы

$$\nu = \frac{N}{N_A}.$$

Воспользуемся вторым способом.

Если из радия массой m_0 за время τ_0 вылетает n_0 альфа-частиц, то из радия массой m за время τ вылетит число частиц, равное

$$N = \frac{n_0 m\tau}{m_0\tau_0}.$$

Число киломолей гелия, заключенного в ампуле, в этом случае равно:

$$\nu = \frac{m\tau n_0}{m_0\tau_0 N_A},$$

и уравнение состояния газа можно представить в окончательном виде так:

$$pV = \frac{m\tau n_0}{m_0\tau_0 N_A} RT.$$

Отсюда после подстановки числовых значений получим:

$$p \approx 8 \ кн/м^2.$$

Пример 8. По газопроводной трубе идет углекислый газ под давлением $p = 392 \ кн/м^2$ при температуре $T = 280 \ ^\circ К$. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если через поперечное сечение трубы, равное $S = 5 \ см^2$, за $\tau = 10 \ мин$ протекает газ массой $m = 20 \ кг$?

Решение. В задаче рассматривается одно состояние равномерно движущегося газа с известным расходом. Поэтому, какой бы слой газа мы ни выбрали в движущемся потоке, параметры его состояния должны удовлетворить уравнению Менделеева — Клапейрона.

Выделим в трубе некоторый объем V, содержащий газ массой m, который весь проходит через поперечное сечение трубы S за время τ. Если этот газ находится под давлением p и имеет температуру T,

то

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \tag{1}$$

где $\mu = 44 \ кг/кмоль$ — киломолекулярная масса углекислого газа CO_2.

Объем газа можно выразить через сечение S и высоту выделенного цилиндра: $V = Sl$. За время τ через сечение трубы проходит весь газ, заключенный в объеме этого цилиндра, поэтому при скорости v движения газа должно быть $l = v\tau$ и

$$V = Sv\tau. \tag{2}$$

Решение уравнений (1)—(2) относительно скорости движения газа дает:

$$v = \frac{mRT}{\mu p S\tau}; \quad v \approx 9 \ м/сек.$$

Пример 9. Сколько гелия потребуется для наполнения воздушного шара диаметром $d = 10 \ м$, чтобы шар мог поднять груз весом $Q = 9{,}8 \ кн$ при нормальном атмосферном давлении и температуре $T = 290 \ ^\circ К$? Объемом груза пренебречь.

Решение. Для подъема воздушного шара необходимо, чтобы вес вытесненного им воздуха $m_в g$ был больше или в крайнем случае равен весу газа $m_г g$, наполняющего оболочку шара, и весу Q его оснастки, т. е.

$$m_в g = m_г g + Q, \tag{1}$$

где $m_в$ — масса воздуха, вытесненного шаром; $m_г$ — масса газа (гелия), наполняющего оболочку.

Если бы масса воздуха $m_в$ была известна, то из этого уравнения можно было бы определить массу гелия. Чтобы найти $m_в$, воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона.

Воздух, окружающий шар, находится под атмосферным давлением $p_а$ и имеет температуру T, поэтому для воздуха, занимающего объем оболочки $V_ш$, уравнение газового состояния дает:

$$p_а V_ш = \frac{m_в}{\mu_в} RT, \tag{2}$$

где $\mu_в = 29 \ кг/кмоль$.

И наконец, последним соотношением, которое нужно использовать в решении, является формула:

$$V_ш = \frac{\pi d^3}{6}, \tag{3}$$

поскольку нам известен диаметр воздушного шара d, а не его объем.

Из уравнений (1)—(3) находим массу гелия:

$$m_г = \frac{\mu_в p_а \pi d^3}{6RT} - \frac{Q}{g}; \ m_г \approx 530 \ кг.$$

Пример 10. В цилиндре с площадью основания $S = 100 \ см^2$ находится воздух при температуре $T = 290 \ ^\circ К$. На высоте

$H = 0{,}60$ *м* от основания цилиндра расположен легкий поршень, на котором лежит гиря массой $m = 100$ *кг*. Какую работу совершит газ при расширении, если его нагреть на $\Delta T = 50°$? Атмосферное давление $p_а = 10^5$ *н/м²*.

Р е ш е н и е. В процессе нагревания газ расширяется и совершает работу по преодолению силы тяжести груза и силы атмосферного давления, действующих на поршень. Так как эти силы постоянные, то при достаточно медленном нагревании газ будет расширяться изобарически и его работу можно вычислить по формулам:

$$A = \frac{m}{\mu} R\Delta T \text{ или } A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

По условию задачи нам задан объем газа в исходном состоянии, но не указано, что это за газ. Поэтому нужно воспользоваться второй формулой.

Если при температуре T_1 газ занимал объем V_1, а после нагревания до температуры T_2 стал занимать объем V_2, то работа расширения равна:

$$A = p\,(V_2 - V_1),$$

где p — давление, производимое газом на поршень.

При равновесии поршня это давление в каждый момент времени уравновешено атмосферным давлением $p_а$ и давлением $\frac{mg}{S}$, создаваемым гирей:

$$p = p_а + \frac{mg}{S}. \tag{2}$$

Поскольку газ расширяется изобарически, параметры начального и конечного состояний газа связаны равенством:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \tag{3}$$

или

$$\frac{HS}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \tag{3'}$$

так как по условию задачи известны площадь и начальная высота цилиндра H.

Решая уравнения (1)—(3) совместно, получим:

$$A = \left(p_а + \frac{mg}{S}\right)\frac{T_2 - T_1}{T_1}HS;\; A \approx 207 \text{ дж.}$$

Пример 11. Какое количество теплоты необходимо для нагревания на $\Delta T = 16$ *град* кислорода массой $m = 7\cdot10^{-3}$ *кг*, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит груз, если теплоемкость одного киломоля кислорода при нагревании его при постоянном объеме равна $c_{\mu V} = 21$ *дж/(кмоль·град)*?

Р е ш е н и е. При изобарическом нагревании кислорода под поршнем цилиндра часть теплоты, подводимой к газу, идет на увеличение его внутренней энергии, часть — на совершение работы

по перемещению поршня. Вследствие большого теплового расширения газов количество теплоты, расходуемое на совершение работы по преодолению внешних сопротивлений, соизмеримо с количеством теплоты, идущим на увеличение внутренней энергии газа. Процесс теплопередачи при изобарическом расширении кислорода в цилиндре описывается уравнением первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

которое нам необходимо записать в развернутом виде.

Если ν киломолей кислорода нагреть на ΔT градусов, то внутренняя энергия газа увеличится на

$$\Delta U = c_{\mu V}\nu\Delta T.$$

Эту формулу можно представить иначе, выразив ν через массу кислорода m и киломолекулярную массу μ:

$$\Delta U = c_{\mu V}\frac{m}{\mu}\Delta T.$$

Так как масса, киломолекулярная масса и изменение температуры газа известны, работу газа при изобарическом процессе нужно рассчитать по формуле:

$$A = \frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

Подставляя вместо ΔU и A их выражения в исходное уравнение энергетического баланса, получим окончательную формулу для подсчета количества теплоты, необходимого для нагревания кислорода:

$$Q = (c_{\mu V} + R)\frac{m}{\mu}\Delta T;\; Q \approx 102 \text{ дж.}$$

Пример 12. Сечение поршня паровой машины равно $S = 100$ *см²*, ход поршня $l = 50$ *см*. Пар поступает в цилиндр под давлением $p_1 = 196$ *кн/м²*, которое в процессе смещения поршня на $\Delta l = 1$ *см* равномерно понижается на $\Delta p = 1{,}96$ *кн/м²*. Какую мощность развивает машина, когда вал ее делает $f = 240$ *об/мин*?

Р е ш е н и е. Если в цилиндр ввести пар при избыточном давлении p, поршень начнет перемещаться и приведет во вращение вал. Полагая, что работа расширения пара целиком идет на создание мощности машины, эту мощность можно вычислить по формуле:

$$N = \frac{A_1}{t}, \tag{1}$$

где A_1 — работа пара за один ход поршня; t — продолжительность хода.

В данном случае в отличие от ранее разобранных примеров пар расширяется не изобарически. Чтобы вычислить работу расширения газа при переменном давлении с помощью формулы $A = p\,(V_2 - V_1)$, нужно знать среднее давление $p_{ср}$. Тогда

$$A = p_{ср}\,(V_2 - V_1).$$

Если давление изменяется пропорционально смещению поршня, то

$$p_{\text{ср}} = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

где p_1 и p_2 — давления в начале и в конце рассматриваемого перемещения.

Допустим, что в крайних положениях поршня (в начале и в конце процесса расширения пара) давление и объем пара в цилиндре были равны соответственно p_1, V_1 и p_2, V_2, тогда при одном ходе поршня пар совершит работу:

$$A_1 = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1).$$

По условию задачи при перемещении поршня на единицу длины ($\Delta l = 1$ *см*) давление пара уменьшается на величину Δp, поэтому в конце хода поршня, когда смещение достигнет величины l, давление понизится на $\frac{\Delta p}{\Delta l} l$ и станет равным

$$p_2 = p_1 - \frac{l}{\Delta l}\Delta p.$$

Если сечение цилиндра равно S и ход поршня l, то максимальное приращение объема пара равно:

$$V_2 - V_1 = Sl.$$

С учетом двух последних равенств формулу работы пара за один ход можно представить в виде:

$$A_1 = \left(p_1 - \frac{l}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta p}{2}\right) Sl. \qquad (2)$$

Продолжительность одного хода поршня легко определить, зная скорость вращения вала f. За один ход поршня вал делает пол-оборота, поэтому в формуле

$$t = \frac{n}{f} \qquad (3)$$

нужно взять число оборотов $n = 0{,}5$.

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу мощности (1) и проводя вычисления, получим:

$$N = \left(p_1 - \frac{l}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta p}{2}\right) Sl \frac{f}{n}; \quad N \approx 6 \text{ квт}.$$

Задачи к главе 9

9.1. Если давление, под которым находится газ, изменить на $2 \cdot 10^5$ *н/м²*, то объем газа изменится на 3 *л*. Если давление изменить на $5 \cdot 10^5$ *н/м²*, объем изменится на 5 *л*. Каковы были начальный объем и давление газа? Температура газа во время опыта не менялась.

9.2. Вертикальный цилиндр высотой $2l$ разделен посредине легким подвижным поршнем. В поршне имеется отверстие, закрытое пробкой, по обе стороны поршня находится одинаковое количество воздуха при давлении p. На какое расстояние нужно сдвинуть поршень, чтобы вылетела пробка, если она вылетает при избыточном давлении Δp?

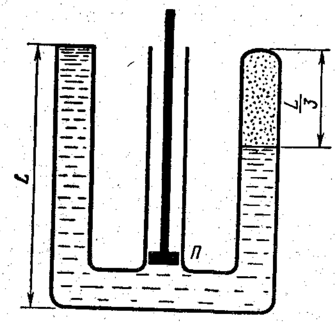


Рис. 9.4.

9.3. На какой глубине пузырьки воздуха имеют диаметр, вдвое меньший, чем у поверхности воды, если барометрическое давление на уровне воды равно $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*?

9.4. В U-образную манометрическую трубку с сечением 1 *см* налита ртуть; уровни ртути в обоих коленах одинаковы. Объем воздуха в запаянном колене 10 *см³*. Сколько ртути нужно налить в открытое колено, чтобы его наполнить? Атмосферное давление равно $1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*, оба колена манометра одинаковы.

9.5. Трубка длиной l, открытая с обоих концов, наполовину погружена в ртуть. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути, оставшегося в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H.

9.6. Ртуть в барометрической трубке стоит на 4 *см* выше уровня ртути в стакане. На сколько нужно опустить трубку, чтобы уровни ртути сравнялись, если столб воздуха над ртутью в начальном положении трубки имел высоту 19 *см*? Атмосферное давление нормальное.

9.7. Узкая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути. Когда трубка обращена закрытым концом кверху, воздух внутри нее занимает длину l_1, если же трубку перевернуть кверху открытым концом, воздух внутри нее займет длину l_2. Определите атмосферное давление, если длина ртутного столбика в трубке h.

9.8. В U-образную трубку, запаянную с одного конца, налита жидкость таким образом, что в правом колене остался воздух (рис. 9.4). Сечение всех трубок одинаково, плотность жидкости ρ, атмосферное давление p_0. На какую высоту нужно поднять поршень *П*, чтобы уровни жидкости в открытом и запаянном коленах сравнялись? Весом поршня и трением пренебречь, давление паров жидкости не учитывать.

9.9. В сосуд, имеющий форму куба с ребром 10 *см*, до половины налита вода. Через крышку сосуда проходит короткая трубка сифона, достающая дно. Длинное колено сифона опускают вертикально вниз, и конец его лежит на 170 *см* ниже уровня воды в сосуде. Сифон приводят в действие и сразу же сосуд герметически закрывают. Сколько воды вытечет из сосуда? Атмосферное давление нормальное. Объемом трубки сифона пренебречь.

9.10. Сколько качаний при постоянной температуре нужно сделать поршневым насосом, захватывающим при каждом качании воздух объемом v_0, чтобы давление в сосуде уменьшилось в k раз по сравнению с первоначальным. Начальное давление в сосуде равно p_1, объем сосуда V. Сколько качаний нужно сделать другим насосом с тем же рабочим объемом v_0, чтобы, нагнетая воздух из атмосферы, довести давление в сосуде до прежней величины? Атмосферное давление равно p_0.

9.11. Тонкий стакан массой 50 *г* ставят вверх дном на поверхность воды и медленно погружают так, что он все время остается в вертикальном положении. Высота стакана 10 *см*, площадь дна 20 *см*^{2}. На какую минимальную глубину надо опустить стакан, чтобы он утонул? Атмосферное давление нормальное, давлением паров воды в стакане и толщиной его стенок пренебречь.

9.12. Закрытый тонкостенный цилиндрический сосуд высотой H до половины залит маслом плотностью ρ_1 при атмосферном давлении p_0. Сосуд плавает в воде так, что уровень масла совпадает с уровнем воды. На дне сосуда образовалось небольшое отверстие. На сколько изменится уровень масла в сосуде к тому моменту, когда система придет в равновесие?

9.13. Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, расположена горизонтально. В трубке находится воздух, отделенный от атмосферы столбиком ртути длиной l. Длина трубки $2l$, длина столбика воздуха $l/2$, атмосферное давление $p_0 = \rho g h_0$. На какое расстояние сместится ртуть в трубке, если трубку вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый (закрытый) конец с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/l}$?

9.14. Трубка длиной l и сечением S запаяна с одного конца и подвешена к динамометру открытым концом вниз. В трубке находится воздух, запертый столбиком ртути, доходящей до открытого конца трубки. Показания динамометра F. С каким ускорением a нужно поднимать систему, чтобы показания динамометра возросли вдвое? Атмосферное давление p_0, сопротивлением воздуха и массой трубки пренебречь.

9.15. Два сосуда соединены между собой тонкой трубкой с краном. Емкость первого сосуда $2\cdot 10^{-3}$ *м*^{3}, он содержит газ под давлением $1{,}7\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Емкость второго сосуда $3{,}2\cdot 10^{-3}$ *м*^{3}, он содержит газ под давлением $0{,}55\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Какое давление установится в сосудах после того, как открыть кран соединительной трубки?

9.16. В баллоне находилось некоторое количество газа при нормальном атмосферном давлении. При открытом вентиле баллон был нагрет, после чего вентиль закрыли и газ остыл до температуры 283 °K. При этом давление в баллоне упало до $0{,}7\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. На сколько градусов нагревали баллон?

9.17. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки

при температуре 280 °K было равно 10^5 *н/м*^{2}. На сколько градусов нужно нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что из холодной бутылки без нагревания пробку можно вынуть силой 49 *н*? Сечение пробки 4 *см*^{2}.

9.18. Цилиндрическая пробирка длиной l, содержащая некоторое количество газа при температуре T_1, полностью погружена в жидкость плотностью ρ. Поверхность жидкости внутри трубки находится в ее середине. Пробирку вынимают из жидкости так, что она едва касается поверхности открытым концом. Как надо изменить температуру газа в пробирке, чтобы его объем остался тем же? Внешнее давление равно p_0.

9.19. В контейнере высотной ракеты начальное давление было равно 10^5 *н/м*^{2}. При ускоренном подъеме ракеты с ускорением, численно равным g, установленный в контейнере ртутный барометр стал показывать давление $0{,}6\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. Во сколько раз увеличилась температура внутри контейнера при взлете ракеты?

9.20. Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводящей перегородкой на две камеры. Камеры заполняют одинаковыми газами, начальные температуры и давления которых соответственно T_1, p_1 и T_2, p_2. Каково будет отношение давлений газа в камерах после того, как процесс теплообмена закончится? Теплоемкостью сосуда и перегородки пренебречь.

9.21. Сколько баллонов водорода емкостью 50 *л* при давлении $40{,}5\cdot 10^5$ *н/м*^{2} и температуре 300 °K потребуется для наполнения аэростата объемом 1000 *м*^{3}, если давление в нем при температуре 280 °K должно быть равно $9{,}8\cdot 10^4$ *н/м*^{2}? Изменится ли ответ, если водород выпускать не сразу из всех баллонов, а поочередно, сначала из одного баллона, потом из другого и т. д.?

9.22. Компрессор всасывает в 1 *мин* 3 *м*^{3} сухого воздуха при температуре 290 °K и давлении 10^5 *н/м*^{2} и нагнетает его в резервуар, объем которого 8,5 *м*^{3}. За какое время компрессор накачает воздух в резервуар до давления $7\cdot 10^5$ *н/м*^{2}? Температура в резервуаре 300 °K, перед накачиванием он был заполнен воздухом при давлении $2\cdot 10^5$ *н/м*^{2}.

9.23. Баллон емкостью 20 *л* наполнен сжатым воздухом. При 293 °K манометр показывает давление $1{,}18\cdot 10^4$ *кн/м*^{2}. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если впуск воздуха в цистерну производится на глубине 30 *м* при 288 °K? Давление столба морской воды высотой 10 *м* принять равным $9{,}8\cdot 10^4$ *н/м*^{2}.

9.24. Запаянная с одного конца трубка длиной l опущена в воду так, что над поверхностью воды выступает 1/5 ее длины и уровень воды в трубке совпадает с уровнем ее в сосуде. До какой температуры нужно нагреть воздух в трубке, чтобы из нее вышла вся вода? Атмосферное давление нормальное. Начальная температура T_1. Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

9.25. Закрытый с обоих концов вертикальный цилиндр разделен тяжелым теплонепроницаемым поршнем, который может скользить в цилиндре без трения. В обеих частях цилиндра находится одинаковое количество воздуха при температуре $T = 400$ °К, причем давление воздуха под поршнем вдвое больше, чем над поршнем. а) Во сколько раз изменятся объемы газа, если цилиндр перевернуть вверх дном? б) До какой температуры нужно нагреть воздух в нижней части сосуда, чтобы объемы газов стали одинаковыми?

9.26. U-образная трубка, запаянная с одного конца, содержит при 273 °К столбик воздуха высотой 24 *см*, запертый ртутью, доходящей до открытого конца трубки. Воздух нагревают до температуры T и затем охлаждают до первоначальной температуры, уровень ртути в открытом колене при этом понижается на 6 *см*. До какой температуры нагревали воздух в трубке? Атмосферное давление нормальное.

9.27. Вследствие того что в барометрическую трубку попал воздух при температуре 253 °К и давлении 770 *мм рт. ст.*, барометр показывает давление 765 *мм рт. ст.* Какое давление покажет барометр при нормальных условиях? Длина трубки 1 *м*, тепловое расширение ртути не учитывать.

9.28. В середине смежных баллонов, размеры которых указаны на рисунке 9.5, находятся поршни, соединенные между собой легким стержнем. Под поршнями находится воздух при атмосферном давлении и температуре T, пространство между поршнями сообщается с атмосферой. Определите: а) расстояние, на которое сместятся поршни, если воздух под большим поршнем нагреть на ΔT градусов, а под меньшим на столько же охладить; б) силу упругости F, возникающую в стержне.

9.29. В двух закрытых сообщающихся сосудах находится ртуть (рис. 9.6). Площадь поперечного сечения первого сосуда вдвое больше, чем второго. В сосудах находится воздух при температуре T и давлении p. Уровни ртути в сосудах находятся на расстоянии H от крышек. При нагревании воздуха во втором сосуде давление воздуха в первом сосуде возрастает в два раза. До какой температуры нагревался воздух во втором сосуде? Температура воздуха в первом сосуде остается все время одинаковой, плотность ртути ρ, давлением паров ртути пренебречь.

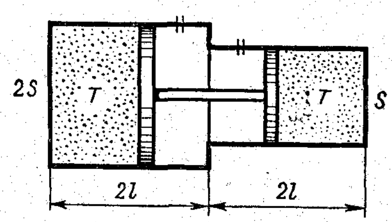


Рис. 9.5.

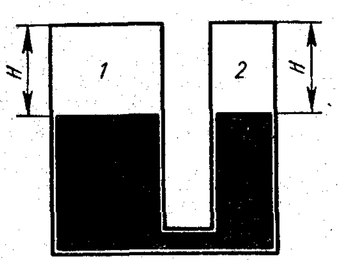


Рис. 9.6.

9.30. Воздух в пробирке (рис. 9.7) заперт ртутью. Атмосферное давление p_0, температура воздуха T_1. До какой минимальной температуры T_2 нужно нагреть воздух в пробирке, чтобы из нее вылилась вся ртуть? Какова будет высота столбика ртути в пробирке, когда температура воздуха достигнет значения T_2? Какова будет температура газа в тот момент, когда выльется вся ртуть?

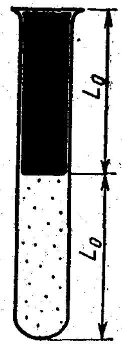


Рис. 9.7.

9.31. Для создания искусственной кометы при запуске первого спутника Земли было предусмотрено устройство, испаряющее 1 *кг* натрия. Какой объем занимали пары натрия в верхних слоях атмосферы при давлении $1{,}33 \cdot 10^3$ *н/м²* и температуре 200 °К? Атомная масса натрия 23.

9.32. В баллоне емкостью $5 \cdot 10^{-3}$ *м³* находится окись углерода. Ртутный манометр, подключенный к баллону, показывает давление $0{,}5 \cdot 10^5$ *н/м²* при наружном давлении 10^5 *н/м²*. Температура газа в баллоне 400 °К. Определите число киломолей газа в баллоне, массу газа и концентрацию молекул.

9.33. Плотность пара некоторого соединения углерода и водорода равна 2,5 *кг/м³* при температуре 283 °К и давлении $1{,}01 \times \times 10^5$ *н/м²*. Какова молекулярная формула этого соединения?

9.34. Сколько электронов заключается в одном литре кислорода при давлении 10^6 *н/м²* и температуре 473 °К?

9.35. Манометр стального баллона объемом 10 *л*, наполненного водородом, показал при температуре 288 °К давление $1{,}3 \cdot 10^7$ *н/м²*. Через некоторое время при 293 °К манометр показывал $1{,}2 \cdot 10^7$ *н/м²*. Какова масса вытекшего газа?

9.36. Сколько водорода содержал баллон, если он взорвался при температуре $T_1 = 1073$ °К и был рассчитан на хранение азота массой $m_a = 1$ *кг* при температуре $T_2 = 293$ °К при десятикратном запасе прочности?

9.37. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находятся 3 *г* водорода, с другой — 17 *г* азота. Какую часть объема цилиндра занимает водород?

9.38. Вертикальный цилиндр высотой H разделен на две равные части тонким теплонепроницаемым поршнем, который может скользить в цилиндре без трения. В нижней части цилиндра находится водород массой m при температуре T_1, в верхней — гелий массой $2\,m$ при температуре T_2. На сколько сместится поршень, если между газами начнется теплообмен и их температуры сравняются? Отношение удельных теплоемкостей газов равно k, теплоемкостью поршня пренебречь, изменение потенциальной энергии поршня не учитывать.

9.39. Два одинаковых сосуда наполнены кислородом при температуре T_1 и соединены между собой трубкой, объем которой ничтожно мал по сравнению с объемом сосудов. Во сколько раз изменится давление кислорода в сосудах, если один из них нагреть до температуры T_2, а во втором поддерживатьтемпературу постоянной?

9.40.Стакан с помощью основания S и массой M ставят вверх дном на гладкое горизонтальное стекло. До какой температуры нужно нагреть стакан, чтобы половина содержащегося в нем воздуха смогла выйти наружу? С какой силой стакан будет давить после этого на стекло, если его температуру понизить до первоначального значения, равного T_0? Атмосферное давление равно p_0.

9.41. В герметически закрытом откачанном цилиндре находится на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится такое количество газа, что он поднимается на высоту H_1 при температуре T_1. На какую высоту поднимется поршень, если количество газа под ним увеличить вдвое, а температуру повысить до T_2? Сила, действующая со стороны пружины на поршень, пропорциональна смещению поршня.

9.42. Некоторое тело находится в воздухе при нормальных условиях. При повышении температуры на $\Delta T = 10°C$ вес тела увеличился на $\Delta F_1 = 1{,}96 \cdot 10^{-2}$ *н*. Как изменится вес тела при увеличении температуры воздуха до $T_1 = 323$ °К и увеличении давления до $p_1 = 1{,}06 \cdot 10^5$ *н/м²*? Расширением тела пренебречь.

9.43. Баллон емкостью V, наполненный газом при давлении p_1 и температуре T_1, взвешивается. Его вес оказывается равным Q_1. Газ из баллона откачивается до тех пор, пока его давление не упадет до p_2, при той же температуре T_1. Вес баллона в этом случае оказывается Q_2. Определите по этим данным плотность газа ρ_0 при нормальных условиях.

9.44. В баллоне объемом $V = 10^{-2}$ *м³* содержится при температуре $T = 293$ °К водород под давлением $p = 10^7$ *н/м²*. Какое количество водорода было потеряно, если при сжигании оставшегося водорода образовалась вода массой $M = 0{,}5$ *кг*?

9.45. Воздушный шар диаметром 10 *м* удерживается веревкой, массой которой можно пренебречь. На сколько изменится натяжение веревки при понижении температуры воздуха с 300 до 270 °К? Атмосферное давление нормальное.

9.46. Шар объемом $V = 1$ *м³* наполнен гелием при температуре $T = 300$ °К и давлении $p = 1{,}2 \cdot 10^5$ *н/м²*. Определите высоту, на которой шар будет находиться во взвешенном состоянии, если его оболочка имеет массу $m_0 = 0{,}3$ *кг* и при подъеме на высоту $l = 100$ *м* давление воздуха падает на $\Delta p = 1{,}33 \cdot 10^3$ *н/м²*, а температура понижается на $\Delta T = 0{,}54$ °С. Атмосферное давление у поверхности земли нормальное.

9.47. На электрической плитке, выделяющей полезную мощность 1 *квт*, стоит чайник с кипящей водой. С какой скоростью пар выходит из носика чайника с отверстием в 1 *см²* при нормальном атмосферном давлении? Удельная теплота парообразования воды при 373 °К равна $2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг*. При решении считать, что пар из-под крышки чайника не выходит.

9.48. В камеру сгорания ракетного двигателя ежесекундно поступает водород массой m и нужное для его полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S, давление газа в сечении p, температура T. Определите силу тяги двигателя.

9.49. Гелий массой m, заключенный в цилиндре под поршнем, находится под давлением p_1 и занимает объем V_1. Вследствие изменения температуры газ бесконечно медленно переходит в состояние с параметрами p_2 и V_2, причем давление газа в процессе изменения температуры меняется с увеличением объема по закону $p = b - aV$. Какого максимального значения достигает температура гелия при переходе газа из первого состояния во второе?

9.50. Определите плотность смеси водорода массой $m_1 = 0{,}5$ *г* и кислорода массой $m_2 = 32$ *г* при температуре $T = 280$ °К и давлении $p = 0{,}93 \cdot 10^5$ *н/м²*.

9.51. Сосуд объемом 2 *л* заполнен углекислым газом и закисью азота. При температуре 400 °К давление в сосуде $4{,}14 \cdot 10^5$ *н/м²*. Определите массу каждого газа в сосуде.

9.52. Изобразите графически три изопроцесса при постоянной массе газа в координатах $p - V$, $V - T$ и $p - T$.

9.53. Начертите график изменения плотности идеального газа в зависимости от изменения температуры (объема, давления) при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах.

9.54. Каково будет относительное расположение изотерм кислорода и водорода, взятых в одинаковых количествах при одной температуре, в координатах $p - V$, $p - T$ и $V - T$? Решите эту же задачу для изобар (изохор) при условии, что одинаковы давления (объемы).

9.55. Решите предыдущую задачу при условии, что взяты две разные массы одного и того же газа.

9.56. При изотермическом расширении газа была получена зависимость p от V (рис. 9.8). Что происходило с газом в этом процессе? Как изменялась плотность газа при увеличении объема? Нарисуйте диаграмму зависимости ρ от V.

9.57. При изохорическом нагревании газа была получена зависимость p от T (рис. 9.9). Что происходило с газом? Как изменялась плотность газа при увеличении температуры?

9.58. На рисунке 9.10 указано, как изменяется давление газа при изменении его объема. Начертите диаграмму: а) как меняется температура газа при изменении объема; б) как изменяется давление при изменении температуры.

9.59. На рисунке 9.11 указано, как изменяется объем газа при изменении его температуры. Начертите диаграмму изменения давления газа при изменении его объема.

9.60. Баллон емкостью 10^{-3} *м³*, содержащий кислород при температуре 300 °К под давлением 10^7 *н/м²*, нагревается. Газ получает количество теплоты 8,35 *кдж*. Определите температуру и давление

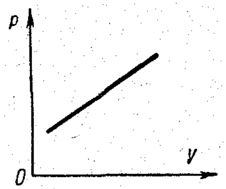


Рис. 9.8.

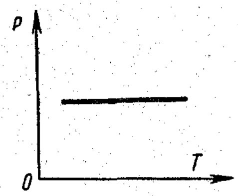


Рис. 9.9.

газа после нагревания. Теплоемкость киломоля кислорода при постоянном объеме равна 21 *кдж/(кмоль·град)*.

9.61. Азот занимает объем 2,5 *л* при давлении 10^5 *н/м²*. На сколько изменится внутренняя энергия газа при его сжатии до объема 0,25 *л*, если давление газа повысилось при этом до 20·10 *н/м²*? Теплоемкость киломоля азота при постоянном объеме равна 21*кдж/(кмоль·град)*.

9.62. В цилиндре, площадь основания которого равна 100 *см²*, находится воздух при температуре 285 °К. На высоте 38 *см* от основания цилиндра расположен поршень, на котором находится гиря массой 100 *г*. Какую работу совершит расширяющийся воздух, если его нагреть до 300 °К? Атмосферное давление нормальное. Трением и массой поршня пренебречь.

9.63. Каковы были начальная температура T_1 и объем V_1 гелия массой $m = 5$ *г*, заключенного под поршнем в цилиндре, если при охлаждении его до температуры $T_2 = 273$ °К потенциальная энергия груза массой $M = 16$ *кг*, лежащего на поршне, уменьшается на $\Delta W = 39{,}2$ *дж*. Площадь поршня $S = 200$ *см²*, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ *н/м²*.

9.64. Какая работа совершается одной грамм-молекулой идеального газа при ее изобарическом нагревании на 1 градус?

9.65. В процессе изобарического нагревания воздух совершил работу $A = 1{,}23$ *кдж*. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа и сколько тепла было затрачено на нагревание воздуха, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_V = 0{,}7 \cdot 10^3$*дж/(кг·град)*? Молекулярная масса воздуха равна 29.

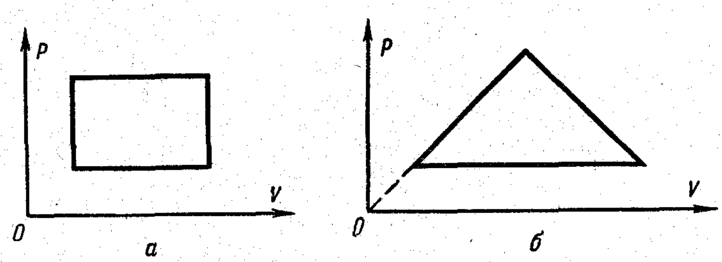


Рис. 9.10.

9.66. При изобарическом нагревании 1 *дм³* воздуха, находящегося при нормальных условиях, его внутренняя энергия возросла на 271 *дж*. Во сколько раз увеличился объем воздуха? Сколько тепла было затрачено на нагревание? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна 10^3 *дж/(кг·град)*.

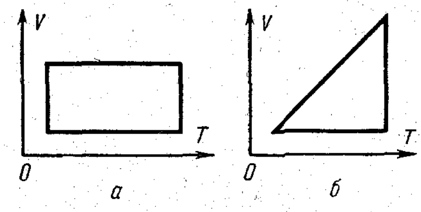


Рис. 9.11.

9.67. При нагревании от 283 °К азота массой 7 *г*, находящегося в цилиндре под тяжелым поршнем, было израсходовано 109 *дж* теплоты. До какой температуры нагрелся газ? Теплоемкость одной грамм-молекулы азота при его изохорическом нагревании 21 *дж/(моль·град)*.

9.68. Одна грамм-молекула идеального газа находится в цилиндре при нормальных условиях. Газ изобарически нагревается до температуры T_1, затем изохорически охлаждается до температуры T_2, после чего изобарически сжимается до первоначального объема и потом изохорически приводится в первоначальное состояние. Какую работу совершил газ за цикл?

9.69. Идеальный газ расширяется по закону $p = \alpha V$. Найдите работу, произведенную газом, и изменение его внутренней энергии при увеличении объема газа от V_1 до V_2. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна c.

9.70. Газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику k-ю часть теплоты, получаемой от нагревателя. Определите температуру нагревателя, если температура холодильника равна T.

9.71. Идеальная тепловая машина имеет полезную мощность $N = 73{,}5$ *квт* и работает в температурном интервале от $T_1 = 273$ °К до $T_2 = 373$ °К. Определите: а) тепловую мощность, получаемую машиной от нагревателя; б) энергию, отдаваемую холодильнику за время $\tau = 1$ *ч*.

9.72. На сколько градусов нагреется воздух в комнате объемом $V = 30$ *м³* за время $\tau = 4$ *ч* работы холодильника, если его производительность льда равна $m/\tau_0 = 2$ *кг/сут* при температуре $T_2 = 271$ °К, а охлаждение начинается с температуры $T_1 = 293$ °К. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $c_V = 0{,}7 \cdot 10^3$*дж/(кг·град)*, удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ *дж/(кг·град)*, льда $c_л = 2{,}1 \cdot 10^3$*дж/(кг·град)*. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ *дж/кг*.

Глава 10. НАСЫЩАЮЩИЕ И НЕНАСЫЩАЮЩИЕ ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ

Основные понятия, законы и формулы

1. При испарении жидкости может наступить такое состояние, при котором число молекул, вылетающих в единицу времени с открытой поверхности жидкости, будет равно числу молекул, влетающих в нее обратно. Между паром и жидкостью устанавливается подвижное — динамическое равновесие. Плотность пара над жидкостью и давление, производимое паром на стенки сосуда (упругость пара), при динамическом равновесии не меняются и имеют для данной жидкости при данной температуре максимальное значение.

Пар, давление и плотность которого имеют наибольшее значение при данной температуре, называют насыщающим. Иначе, насыщающим называют пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью.

Пар, давление и плотность которого меньше давления и плотности насыщающего пара при данной температуре, называют ненасыщающим.

2. Пары, отделенные от жидкости (при неизменной массе), обладают следующими свойствами:

а) При изотермическом увеличении объема, занимаемого насыщающим паром, или при его изохорическом нагревании насыщающий пар переходит в ненасыщающий.

б) При изотермическом сжатии ненасыщающего пара или при его изохорическом охлаждении ненасыщающий пар становится насыщающим.

Температуру, при которой пар становится насыщающим в результате изохорического охлаждения, называют точкой росы. При охлаждении пара ниже точки росы начинается конденсация пара в жидкость.

в) С достаточно хорошим приближением можно считать, что ненасыщающие пары подчиняются всем основным законам идеальных газов (9.1)—(9.4).

г) Параметры каждого состояния насыщающего пара связаны между собой уравнением Менделеева — Клапейрона.

Масса насыщающего пара $m_{н.п}$, входящая в это уравнение, зависит от температуры и для двух различных состояний не может иметь одинакового значения.

Для определения давления насыщающих паров при данной температуре, если неизвестна их плотность, или же, наоборот, для определения плотности пара, если известно его давление, пользуются таблицами давления (упругости) насыщающих паров.

д) Так как в двух различных состояниях насыщающий пар имеет различную массу, параметры этих состояний законам идеальных газов (9.1)—(9.4) не подчиняются. Если же насыщающий пар переходит в ненасыщающий и его масса при этом не изменяется, то параметры состояний подчиняются всем законам идеальных газов.

е) Согласно закону Дальтона давление воздуха, содержащего водяной пар, складывается из давления сухого воздуха $p_с$ и давления паров воды $p_п$, т. е. атмосферное давление равно:

$$p_а = p_с + p_п.$$

3. Воздух, содержащий водяной пар, называют влажным. О влажности воздуха можно судить или по величине давления, производимого паром, или по его плотности $\rho_п$. Количество водяных паров (в граммах), содержащихся в 1 $м^3$ воздуха, называют абсолютной влажностью. Отношение плотности $\rho_п$ водяного пара при данной температуре к плотности насыщенного пара $\rho_{н.п}$ при этой же температуре называют относительной влажностью. Относительную влажность воздуха выражают обычно в процентах.

$$B = \frac{\rho_п}{\rho_{н.п}} 100\% = \frac{m_п}{m_{н.п}} \cdot 100\% = \frac{p_п}{p_{н.п}} \cdot 100\%,$$

так как при одинаковой температуре

$$\frac{\rho_п}{\rho_{н.п}} = \frac{p_п}{p_{н.п}}.$$

Решение задач. Примеры

1. Задачи на пары и влажность по своему решению принципиально почти не отличаются от задач на идеальные газы. Тем не менее они вызывают у учащихся серьезные затруднения, связанные с неумением пользоваться уравнением газового состояния и попыткой искать решение путем логических рассуждений, что во многих случаях требует большой сообразительности. Особенно это относится к тем задачам, где вместо плотности насыщенного пара дается его давление.

Новым при решении задач на влажность является широкое использование таблиц упругости и плотности водяных паров и применение формулы относительной влажности. Из таблиц можно взять дополнительные данные к тем, которые известны по условию задачи, и составить вспомогательные уравнения, позволяющие вместе с основным уравнением газового состояния и законом Дальтона определить искомую величину.

Анализируя условие задачи на пары и влажность, всегда полезно иметь в виду следующее. Если задана температура насыщающего пара, то его давление и плотность при этой температуре можно найти в таблицах. Если же заданы температура и давление (плотность) насыщающего пара, то его плотность (давление) определяют из уравнения Менделеева — Клапейрона.

Давление насыщающих паров при температуре кипения жидкости равно атмосферному. Например, при температуре кипения воды (373 °К) давление ее насыщающих паров равно нормальному атмосферному давлению ($1{,}01 \cdot 10^5$ $н/м^2$).

Если известна температура насыщающего пара T_1 и его точка росы $T_р$, то с помощью таблиц можно определить абсолютную и относительную влажность воздуха при температуре T_1, так как при температуре $T_р$ это же количество пара будет полностью насыщать данное пространство. Порядок решения задач на влажность можно рекомендовать такой:

а) Установить число состояний газа, рассматриваемых в условии задачи, обратив особое внимание на то, дается ли чистый пар жидкости или смесь пара с сухим воздухом.

б) Для каждого состояния пара записать уравнение Менделеева — Клапейрона и формулу относительной влажности, если о последней что-либо сказано в условии. Составить уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого состояния сухого воздуха (если дается смесь пара с воздухом). В тех случаях, когда при переходах из одного состояния в другое масса пара не меняется, вместо уравнения Менделеева — Клапейрона можно использовать сразу объединенный газовый закон.

С учетом формулы влажности уравнение Менделеева — Клапейрона для пара можно записать в виде:

$$p_{н.п} BV = \frac{m_п}{\mu_п} RT \quad \text{или} \quad p_{н.п} B = \frac{\rho_п}{\mu_п} RT,$$

где $p_{н.п}$ — давление, которое создавал бы пар, если бы при температуре T он был насыщающим; $\rho_п$ — плотность пара.

в) Записать математически все дополнительные условия, связывающие величины, входящие в составленные ранее уравнения. Проверить число неизвестных в полученной системе уравнений и решить ее относительно искомой величины. Выписывая числовые значения заданных величин, нужно учесть сделанные выше замечания и использовать таблицу давления и плотности насыщающих паров при различных температурах.

Пример 1. Под колоколом насоса находится стакан, содержащий воду массой $m = 200$ *г*. Насос откачивает воздух из-под колокола со скоростью $u = 50$ *л/мин*. Через сколько времени вся вода испарится, если установившаяся под колоколом температура равна $T = 280$ °К?

Р е ш е н и е. Если под колокол насоса поместить стакан с водой, то, спустя некоторое время, пространство под колоколом станет насыщенным водяными парами. При заданной температуре давление $p_{н.п}$ и плотность $\rho_{н.п}$ пара можно считать известными, так как их значения могут быть найдены в таблицах.

Когда насос начнет работать, пары из-под колокола будут удаляться и их давление должно уменьшаться. Происходит это, однако, не сразу. Поскольку насыщающий водяной пар находится над водой и между молекулами воды и пара существует подвижное равновесие, уменьшение числа молекул пара, вызванное действием насоса, приводит к тому, что из жидкости начинает вылетать молекул больше, чем влетать в нее. Вследствие непрерывного испарения

воды при работе насоса убыль молекул пара все время пополняется, в результате плотность пара, а следовательно, и давление некоторое время почти не изменяются. Само собой разумеется, что температура пара должна при этом поддерживаться постоянной.

Как только вся вода испарится, давление под колоколом начнет падать. Процесс откачки пара из-под колокола насоса до полного испарения воды удобно схематически представить так.

В сосуде находится насыщающий водяной пар, масса которого равна массе воды в стакане и давление которого при работе насоса остается неизменным. Температура пара, а значит, и давление, известны, и требуется определить время, необходимое для его удаления при заданной скорости откачки. Применяя к данному воображаемому состоянию насыщающего пара уравнение Менделеева — Клапейрона, можно определить объем пара, а затем и время, необходимое для его откачки, зная производительность насоса. Нетрудно заметить, что это время и будет равно искомому времени испарения воды под колоколом.

Предположим, водяной пар массой m при температуре T насыщает пространство объемом V и производит давление $p_{н.п}$. Тогда

$$p_{н.п} V = \frac{m}{\mu_п} RT. \tag{1}$$

Если насос, откачивая пар, захватывает объем V_0 за время τ_0, то производительность насоса (скорость откачки) будет равна:

$$u = \frac{V_0}{\tau_0}, \tag{2}$$

и весь пар, находящийся в объеме V, насос откачает за время

$$\tau = \frac{V}{u}. \tag{3}$$

Это и есть время испарения всей воды.

Давление насыщающих паров при $T = 280$ °К находим из таблицы: $p_{н.п} = 7{,}5$ *мм рт. ст.* $= 10^3$ *н/м²*.

Из уравнений (1)—(3) получим искомое время:

$$\tau = \frac{mRT}{\mu_п p_{н.п} u}; \quad \tau \approx 8{,}5 \text{ ч}.$$

Пример 2. В запаянной трубке объемом $V = 0{,}4$ *л* находится водяной пар под давлением $p_п = 8{,}5 \cdot 10^3$ *н/м²* при температуре $T_п = 423$ °К. Какое количество росы выпадает на стенках трубки при охлаждении воды до температуры $T_{н.п} = 295$ °К?

Р е ш е н и е. В задаче рассматривают два состояния пара в запаянной трубке — до и после охлаждения. В первом состоянии при 423 °К пар был ненасыщающим, поэтому при его изохорическом охлаждении, начиная с некоторой температуры (точки росы), пар станет насыщающим и дальнейшее понижение температуры до 295 °К вызовет его частичную конденсацию.

Происходит ли конденсация пара при изохорическом понижении температуры от значения T_1 до T_2, если об этом не сказано в условии задачи, можно установить самим, зная плотность или давление пара. С помощью таблиц нужно только определить, будет ли температура росы $T_р > T_2$ или нет. В нашем примере это неравенство имеет место, следовательно, пар конденсируется.

Чтобы определить количество росы, выпавшей на стенках трубки, необходимо найти массу пара при каждой из заданных температур и вычесть из первого результата второй. Для нахождения самих масс удобно воспользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона, составив его для каждого из двух состояний пара.

Обозначим параметры состояния пара до его охлаждения через $p_п$, V, $T_п$ и будем считать, что его масса равна $m_п$. Тогда

$$p_п V = \frac{m_п}{\mu_п} RT_п. \quad (1)$$

После охлаждения и конденсации, когда пар в трубке будет насыщающим, его масса станет равной $m_{н.п}$, а параметры примут значение $p_{н.п}$, V и $T_{н.п}$. Для насыщающего пара

$$p_{н.п} V = \frac{m_{н.п}}{\mu_п} RT_{н.п}. \quad (2)$$

При составлении этого уравнения мы не учитывали объем, занимаемый каплями, и считали давление насыщенного пара известным, так как температура его $T_{н.п}$ дана.

Для определения массы росы, выпавшей на стенках трубки, составляем вспомогательное уравнение:

$$m = m_п - m_{н.п}, \quad (3)$$

где m — искомая масса росы. Этим уравнением условие задачи исчерпывается полностью.

Решая уравнения (1)—(3) совместно, находим:

$$m = \frac{\mu_п V}{R}\left(\frac{p_п}{T_п} - \frac{p_{н.п}}{T_{н.п}}\right); \quad m \approx 9 \text{ мг}.$$

Пример 3. В комнате размером $V = 10\times5\times3$ $м^3$ поддерживается температура $T_1 = 293$ °К; а точка росы равна $T_2 = 283$ °К. Определите относительную влажность воздуха и количество водяных паров, содержащихся в комнате.

Р е ш е н и е. Если воздух в комнате содержит некоторое количество водяных паров, то при понижении температуры до точки росы эти пары становятся насыщающими. В тех случаях, когда задана точка росы, как, например, в нашей задаче, можно рассмотреть два состояния пара в комнате: при данной температуре T_1 и температуре росы T_2. Каждое из этих состояний описывается уравнением Менделеева — Клапейрона и формулой относительной влажности. Давление насыщающих паров можно считать при этом известным, так как известна их температура (точка росы).

Допустим, что пар, находящийся в комнате объемом V, при температуре T_1 создает давление p_1 и имеет массу $m_п$; тогда

$$p_1 V = \frac{m_п}{\mu_п} RT_1. \quad (1)$$

Если при этой температуре давление насыщающих паров равно $p_{1н}$, то относительная влажность воздуха в комнате

$$B = \frac{p_1}{p_{1н}} \cdot 100\%, \quad (2)$$

поскольку истинное давление паров в комнате — p_1. В случае понижения температуры до T_2 (точки росы) пар в комнате стал бы насыщающим и его давление было бы равно $p_{2н}$. Для этого состояния пара мы могли бы записать:

$$p_{2н} V = \frac{m_п}{\mu_п} RT_2, \quad (3)$$

так как масса пара в комнате остается неизменной.

В уравнениях (1)—(3) содержится три неизвестные величины — B, $m_п$, которые требуется определить, и давление p_1. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных, получим:

$$B = \frac{p_{2н}}{p_{1н}} 100\% = \frac{T_1}{T_2} 100\%; \quad B \approx 54{,}5\%;$$

$$m_п = \frac{p_{2н} V \mu_п}{RT_2}; \quad m_п \approx 1{,}4 \text{ кг}.$$

Пример 4. 1 $м^3$ влажного воздуха при относительной влажности $B = 60\%$, температуре $T = 293$ °К и нормальном атмосферном давлении имеет массу $M = 1{,}2004$ *кг*. Определите давление насыщающего водяного пара при температуре T.

Р е ш е н и е. Влажный воздух представляет смесь сухого воздуха и водяного пара. По условию задачи даются величины, характеризующие эту смесь в целом, и требуется определить параметр одного из газов, входящих в смесь, — давление насыщающего пара.

Для решения задачи нужно рассмотреть каждый компонент газа, составив для каждого из них уравнение состояния. Кроме того, необходимо будет учесть, что масса M и давление влажного воздуха p складываются соответственно из масс и давлений сухого воздуха и пара:

$$M = m_в + m_п; \quad (1)$$

$$p = p_в + p_п. \quad (2)$$

Рассмотрим сначала воздух без пара. Обозначим параметры состояния воздуха в заданном объеме через $p_в$, V, T, тогда

$$p_в V = \frac{m_в}{\mu_в} RT, \quad (3)$$

где $\mu_в = 29$ *кг/кмоль*—киломолекулярная масса сухого воздуха.

Пар, находящийся в этом же пространстве, будет иметь давление $p_п$, объем V и температуру T. Для него

$$p_п V = \frac{m_п}{\mu_п} RT \tag{4}$$

и, кроме того,

$$B = \frac{p_п}{p_{н.п}} 100\%, \tag{5}$$

где $p_{н.п}$ — искомое давление насыщающих паров при температуре T.

Из уравнений (1)—(5) находим:

$$p_{н.п} = \left[\frac{p\mu_в V - MRT}{(\mu_в - \mu_п) V}\right] \frac{100\%}{B}; \; p_{н.п} \approx 2{,}32 \cdot 10^3 \; н/м^2.$$

Пример 5. В сосуде находится воздух, температура которого $T_1 = 283$ °К и влажность $B = 60\%$. Как изменится влажность воздуха и его давление, если воздух нагреть до $T_2 = 373$ °К и в три раза уменьшить объем? Начальное давление сухого воздуха $p_1 = 3{,}85 \cdot 10^4$ *н/м²*, давление насыщающих паров воды при 283 °К равно $p_{н1} = 1{,}2 \cdot 10^3$ *н/м²*.

Решение. Нам даны два состояния смеси сухого воздуха с паром при разных температурах. Как видно из условия задачи, в процессе нагревания сосуда меняются все три параметра состояния и воздуха, и пара. Чтобы выбрать исходные уравнения для решения задачи, надо прежде всего установить, изменяется ли масса пара при его переходе во второе состояние или нет. Сделать это можно следующим образом. С помощью объединенного газового закона надо найти давление $p_{п2}$ пара при температуре $T_2 = 373$ °К и сравнить его с давлением насыщающего пара при этой температуре $p_{н2} = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*. Так как большего давления, чем $p_{н2}$, пар при данной температуре иметь не может, то, если окажется, что $p_{п2} > p_{н2}$, это будет означать, что происходила конденсация, если же $p_{п2} \leqslant p_{н2}$, то при переходе во второе состояние масса пара не менялась — его недостаточно, чтобы создать давление $p_{н2}$. Расчет показывает (предлагаем его сделать самим читателям), что в нашем примере $p_{п2} < p_{н2}$, т. е. пар не конденсируется, и, следовательно, к параметрам пара применимо уравнение объединенного закона, поскольку масса газа остается одной и той же.

При составлении системы уравнений для нахождения изменения относительной влажности достаточно ограничиться (в данной задаче) лишь рассмотрением пара, так как все величины по условию задачи относятся только к нему.

Допустим, что в начальном состоянии при температуре T_1 пар, находящийся во влажном воздухе, имел давление $p_{п1}$ и объем V_1, а после нагревания сосуда до температуры T_2 — $p_{п2}$ и V_2. Тогда согласно объединенному газовому закону должно быть:

$$\frac{p_{п1} V_1}{T_1} = \frac{p_{п2} V_2}{T_2}. \tag{1}$$

Относительная влажность воздуха до нагревания:

$$B_1 = \frac{p_{п1}}{p_{н1}} 100\%, \tag{2}$$

после нагревания она станет равной:

$$B_2 = \frac{p_{п2}}{p_{н2}} 100\%. \tag{3}$$

Ее изменение

$$\Delta B = B_2 - B_1. \tag{4}$$

Под $p_{н1}$ и $p_{н2}$ здесь подразумевается давление насыщающего пара при температурах T_1 и T_2.

Совместное решение уравнений (1)—(4) относительно ΔB при условии, что $3V_2 = V_1$, дает:

$$\Delta B = B_2 - B_1 = B_1 \left(\frac{3p_{н1} T_2}{p_{н2} T_1} - 1\right); \; \Delta B = -57\%.$$

Знак «минус» означает, что $B_2 < B_1$, т. е. во втором состоянии влажность воздуха уменьшилась.

Изменение Δp полного давления влажного воздуха равно сумме изменений давлений сухого воздуха и пара:

$$\Delta p = (p_1 + p_{п1}) - (p_2 + p_{п2}). \tag{5}$$

Так как масса воздуха не изменялась и воздух занимает тот же объем, что и пар, то

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}, \tag{6}$$

где p_2 — давление сухого воздуха после нагревания сосуда.

Решая совместно уравнения (1), (2), (5) и (6) относительно Δp, получим:

$$\Delta p = (p_1 - p_{н1} B) \frac{T_2 - T_1}{T_1}; \; \Delta p \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \; н/м^2.$$

Задачи к главе 10

10.1. Сколько молекул ртути может содержаться в 1 *см³* воздуха в помещении, зараженном ртутью, при температуре 300 °К, если давление насыщенного пара ртути при 300 °К равно 0,36 *н/м²*?

10.2. Какое давление будет создавать водяной пар, насыщенный при 373 °К, если в момент насыщения его отделить от воды и изохорически нагреть на 298 °К?

10.3. Цилиндрический сосуд сечением 100 *см²* снабжен поршнем массой 103,3 *кг*. Непосредственно под поршнем находится 0,8 *г* воды. На какое расстояние переместится поршень, придя в равновесие, если сосуд и воду нагреть до 423 °К? Атмосферное давление нормальное, давление насыщающих паров воды при 423 °К равно $4{,}75 \cdot 10^5$ *н/м²*.

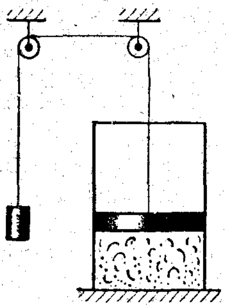


Рис. 10.1.

10.4. Сосуд, снабженный поршнем, содержит водяной пар при температуре 323 °К, который производит давление $7{,}75 \cdot 10^3$ *н/м²*. Каково будет давление в сосуде, если объем, занимаемый паром, изотермически уменьшить вдвое? Давление насыщающих паров воды при 323 °К равно $1{,}23 \cdot 10^4$ *н/м²*.

10.5. В цилиндре под поршнем площадью 100 *см²* находится 18 *г* водяного пара при температуре 373 °К. К поршню через систему блоков подвешен груз массой 50 *кг* (рис. 10.1). На какую высоту поднимется груз, если цилиндр охладить до 273 °К? Атмосферное давление нормальное, массой поршня пренебречь. Давление насыщающих паров воды при 273 °К равно $5{,}3 \cdot 10^2$ *н/м²*.

10.6. Закрытый цилиндрический сосуд высотой $H = 1{,}0$ *м* и сечением $S = 10^{-2}$ *м²*, расположенный вертикально, разделен легким поршнем, под которым находится вода массой $m_в = 0{,}2$ *г*. Над поршнем находится азот массой $m_а = 0{,}14$ *г*. Начальная температура сосуда $T_1 = 333$ °К. На сколько переместится поршень, если сосуд нагреть до $T_2 = 373$ °К? Давление насыщающих паров воды при 333 °К равно $p_{н.п} = 0{,}22 \cdot 10^5$ *н/м²*.

10.7. Запаянную с одного конца трубку, содержащую некоторое количество воздуха, опустили в резервуар с водой. Длина подводной части трубки $2H = 2$ *м*, уровень воды внутри трубки отстоит на расстоянии H от ее запаянного конца, начальная температура всей системы 273 °К. Найдите положение уровня воды в трубке после нагревания всей системы до 373 °К. Атмосферное давление нормальное, давлением паров воды при 273 °К пренебречь.

10.8. При нормальном атмосферном давлении в сосуд вводят кислород O_2 и метан CH_4 в таком количестве, что парциальные давления газов оказываются равными. Сосуд закрывают и производят взрыв: $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$. После этого сосуд охлаждают до начальной температуры. Зная, что давление насыщающих паров воды при этой температуре равно 2,24 *кн/м²*, определите установившееся давление в сосуде.

10.9. Сосуд объемом $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ *м³* содержит сухой воздух при нормальных условиях. В сосуд вводят 0,9 *г* воды, закрывают его и нагревают до 363 °К. Чему равно давление влажного воздуха в сосуде? Как изменится ответ, если взять сосуд емкостью $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ *м³*? Давление насыщающих паров воды при 363 °К равно $7 \cdot 10^4$ *н/м²*.

10.10. В сосуде объемом $V = 1$ *м³* находится смесь воздуха с парами эфира. Внесенный в сосуд барометр при температуре $T = 303$ °К показывает давление $p = 1{,}07 \cdot 10^5$ *н/м²*. Определите массу воздуха и эфира в сосуде, если известно, что конденсация паров в нем начинается при $T_0 = 273$ °К. Упругость насыщенного пара эфира при 273 °К равна $p_{0э} = 24{,}4$ *кн/м²*. Молекулярная масса эфира 74, воздуха 29.

10.11. В двух одинаковых сосудах объемом по 500 *см³* каждый находится водород и кислород при температуре 293 °К. Давление водорода 26,6 *кн/м²*, кислорода 53,2 *кн/м²*. Оба сосуда соединили между собой и, после того как газ перемешался, пропустили электрический ток, в результате чего гремучая смесь сгорела. Каким станет давление в сосудах после того, как установится первоначальная температура? Давление насыщающих паров воды при 293 °К равно 2,32 *кн/м²*.

10.12. Найдите среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при 373 °К. Во сколько раз это расстояние больше расстояния между молекулами воды при 273 °К?

10.13. В цилиндре под легким незакрепленным поршнем находится насыщенный водяной пар объемом $V = 1$ *м³*. Сколько льда, взятого при 273 °К, надо бросить в сосуд, чтобы весь пар сконденсировался? Атмосферное давление нормальное. Удельная теплота парообразования воды при 373 °К равна $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ *дж/кг*, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ *дж/кг*. Теплоемкостью и теплоотдачей цилиндра пренебречь.

10.14. В цилиндрическом сосуде под поршнем находятся пары воды в объеме $v = 2 \cdot 10^{-3}$ *м³* при температуре $T = 373$ °К и давлении $p = 10^5$ *н/м²*. При постоянном внешнем давлении поршень опускают настолько, что объем уменьшается вдвое. Какое количество тепла надо отвести от сосуда для того, чтобы температура пара осталась постоянной? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

10.15. Под невесомым поршнем в цилиндре имеется вода массой 1 *кг* при температуре 273 °К. В воду опускают кусок раскаленного железа массой 1 *кг*, после чего поршень поднимается на 64 *см*. До какой температуры было нагрето железо? Атмосферное давление нормальное, удельная теплоемкость железа 500 *дж/(кг·град)*, площадь поршня 0,1 *м²*. Теплоотдачей и теплоемкостью цилиндра пренебречь.

10.16. В цилиндре под поршнем в объеме $1{,}674 \cdot 10^{-3}$ *м³* находится насыщенный водяной пар при температуре 373 °К, масса пара 10^{-3} *кг*. Какую работу нужно совершить, чтобы изотермически сжать пар до полной конденсации в жидкость? При температуре 373 °К плотность воды, находящейся под давлением ее насыщающего пара, равна 96 *кг/м³*.

10.17. Относительная влажность воздуха в помещении 63%, температура 18 °С. До какой температуры надо охладить блестящий металлический предмет, чтобы на его поверхности можно было наблюдать осаждение водяных паров?

10.18. Температура воздуха в комнате объемом 150 *м³* равна 6 °С, относительная влажность 80%. Сколько воды нужно испарить в этой комнате, чтобы при увеличении температуры до 18 °С относительная влажность стала равна 60%?

10.19. Относительная влажность воздуха вечером при температуре 16 °С равна 60%. Ночью температура воздуха понизилась до

4 °C и выпала роса. Сколько водяного пара сконденсировалось из 1 $м^3$ воздуха?

10.20. В цилиндрическом сосуде под поршнем массой $M = 10$ *кг* находится некоторое количество влажного воздуха при температуре $T = 373$ °K. В положении равновесия поршень отстоит от дна на расстоянии $h_1 = 2{,}20$ *м*. Если цилиндр перевернуть вверх дном, поршень располагается на расстоянии $h_2 = 2{,}30$ *м* от дна. Площадь поршня $S = 5 \cdot 10^{-2}$ $м^2$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ $н/м^2$. Насколько изменится относительная влажность воздуха в сосуде?

10.21. Смешали 1 $м^3$ воздуха с влажностью 20% и 2 $м^3$ воздуха с влажностью 30%. При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем 3 $м^3$. Определите относительную влажность смешанного воздуха.

10.22. Сколько теряет в своем весе шар объемом $V = 15$ $м^3$ при увеличении относительной влажности воздуха на $\Delta B = 20\%$ при температуре $T = 288$ °K? Давление насыщающего пара при 288 °K равно $p_{н\cdot п} = 1{,}7$ $кн/м^2$.

10.23. Давление воздуха при температуре 300 °K и относительной влажности 70% равно $1{,}02 \cdot 10^5$ $н/м^2$. Чему будет равно давление, если температура понизится до 270 °K и относительная влажность станет 80% при неизменных остальных условиях? Давления насыщающего пара при указанных температурах равны соответственно $0{,}31 \cdot 10^5$ и $0{,}47 \cdot 10^5$ $н/м^2$.

10.24. Колба объемом 100 $см^3$ заполнена при 313 °K воздухом с относительной влажностью 40%. Как надо изменить объем колбы, чтобы при понижении температуры до 293 °K пар не конденсировался? Давление насыщающего пара воды при 313 °K равно 7,3 $кн/м^2$.

10.25. В сосуде объемом 0,1 $м^3$ при температуре 303 °K находится воздух с относительной влажностью 30%. Какова будет влажность воздуха в сосуде, если ввести 1 *г* воды, взятой при той же температуре? Давление насыщенных паров воды при 303 °K равно 4,2 $кн/м^2$. Решите задачу при условии, что сосуд имел объем 10^{-3} $м^3$.

10.26. Какой была относительная влажность воздуха при температуре $T_1 = 293$ °K, если при давлении $p = 6{,}06 \cdot 10^3$ $кн/м^2$ точка росы этого воздуха равна $T_2 = 373$ °K. Давление насыщающих паров воды при температуре T_1 равно $p_{н\cdot п} = 2{,}32$ $кн/м^2$.

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Глава 11. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Основные понятия, законы и формулы

1. Силу взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися на расстоянии r друг от друга в среде с диэлектрической проницаемостью ε, рассчитывают по формуле закона Кулона:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}, \qquad (11.1)$$

где k — постоянный коэффициент, зависящий от выбора системы единиц. В системе СГСЕ $k = 1$, в системе СИ

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \text{ где } \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\frac{к^2}{н \cdot м^2}.$$

2. Если система тел не обменивается зарядами с телами, не принадлежащими этой системе, то алгебраическая сумма зарядов системы есть величина *постоянная* (закон сохранения зарядов):

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}. \qquad (11.2)$$

3. Напряженность электрического поля в данной точке пространства определяют по формуле:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \qquad (11.3)$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на точечный положительный (пробный) заряд q_0, помещенный в эту точку.

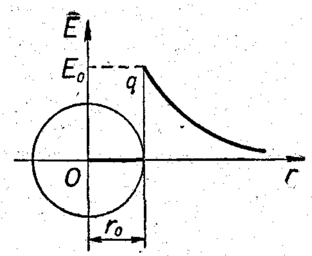


Рис. 11.1.

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, равна:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \qquad (11.4)$$

Если на поверхности проводящего шара радиусом r_0 равномерно распределен заряд q, то внутри шара напряженность поля всюду равна нулю. За пределами шара напряженность поля точно такая же, какую создавал бы заряд q, если бы он был сосредоточен в центре шара (рис. 11.1). Напряженность поля на поверхности шара при этом равна:

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0^2},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар.

Если электрическое поле однородное, то в каждой его точке

$$\vec{E}=\text{const}.$$

Бесконечно большая плоскость, по которой распределен заряд с поверхностной плотностью σ, создает в направлении нормали к поверхности однородное электрическое поле напряженностью

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad (11.5)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке пространства.

Если заряженная плоскость имеет конечные размеры, то по формуле (11.5) можно с достаточной степенью точности определить напряженность вблизи этой плоскости в области однородности поля.

Напряженность электрического поля, созданного несколькими заряженными телами, равна геометрической сумме напряженностей отдельных полей, создаваемых в данной точке пространства каждым из заряженных тел (принцип наложения полей):

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i. \qquad (11.6)$$

При перемещении заряда q в однородном электрическом поле напряженностью E силы $F_э$ поля совершают над зарядом работу:

$$A=F_э d=qEd, \qquad (11.7)$$

где d — перемещение заряда вдоль силовой линии.

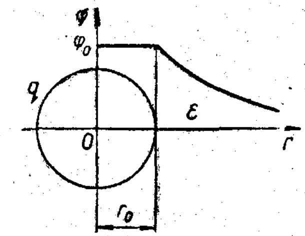


Рис. 11.2.

В зависимости от знака заряда q и направления его перемещения по силовым линиям работа сил поля может быть и положительной, и отрицательной.

4. Потенциал электрического поля в данной точке пространства определяют по формуле

$$\varphi=\frac{W_п}{q_0}, \qquad (11.8)$$

где $W_п$ — потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд q_0, вследствие его взаимодействия с полем, в данной точке пространства. Здесь предполагается, что потенциальная энергия, а следовательно, и потенциал в точках, бесконечно удаленных от источника поля, равны нулю. Потенциал электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от него, равен:

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (11.9)$$

Потенциал электрического поля на поверхности и внутри проводящего заряженного шара радиусом r_0, окруженного диэлектриком с проницаемостью ε, всюду постоянен и равен:

$$\varphi_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0}.$$

За пределами шара потенциал поля точно такой же, как потенциал поля точечного заряда, равного заряду шара, но сосредоточенного в его центре (рис. 11.2).

Потенциал поля, созданного несколькими заряженными телами, равен алгебраической сумме потенциалов отдельных полей, создаваемых в данной точке пространства каждым из заряженных тел:

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i. \qquad (11.10)$$

При перемещении заряда q_0 из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 независимо от формы пути силы электрического поля совершают над зарядом работу:

$$A=W_1-W_2=q_0(\varphi_1-\varphi_2)=q_0U, \qquad (11.11)$$

где $\varphi_1-\varphi_2=U$ — разность потенциалов (напряжение) между этими точками.

Если заряд q_0 перемещается в поле точечного заряда q, то работа сил поля равна:

$$A=\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{qq_0\Delta r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1r_2}. \qquad (11.12)$$

Всякая система зарядов обладает потенциальной энергией электрического взаимодействия. Величину ее определяют работой, которую необходимо совершить, чтобы заряженные тела, собранные в систему, удалить на бесконечно большие расстояния относительно друг друга.

Потенциальная энергия электрического взаимодействия системы n точечных зарядов q_i равна:

$$W_п = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i, \qquad (11.13)$$

где φ_i — потенциал поля в точке, где находится заряд q_i. Для системы двух точечных зарядов, удаленных на расстояние r друг от друга,

$$W_п = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

В однородном электрическом поле модуль вектора напряженности связан с разностью потенциалов уравнением:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}, \qquad (11.14)$$

где d — расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами φ_1 и φ_2.

5. Электроемкость уединенного проводника, имеющего заряд q и потенциал φ, определяют по формуле:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \qquad (11.15)$$

Емкость металлического шара радиусом r, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε, равна:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \qquad (11.16)$$

Электроемкость конденсатора — двух проводников, на которых находятся два равных по величине, но противоположных по знаку заряда q, определяют по формуле:

$$C = \frac{q}{U}, \qquad (11.17)$$

где q — заряд конденсатора (абсолютное значение заряда одного из проводников), $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между проводниками.

Емкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}, \qquad (11.18)$$

где S — площадь одной пластины, перекрывающаяся другой; d — расстояние между пластинами; ε — диэлектрическая проницаемость среды, разделяющей пластины.

Если обкладка одного конденсатора соединяется с обкладкой другого конденсатора и между ними нет разветвлений, то соединение конденсаторов называют последовательным.

При подключении к источнику с напряжением U_0 батареи конденсаторов, соединенных между собой последовательно, алгебраическая сумма напряжений U_i на отдельных конденсаторах равна напряжению на всей батарее:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_0. \qquad (11.19)$$

Заряды конденсаторов при этом равны между собой и равны заряду всей батареи:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q_0. \qquad (11.20)$$

Емкость C_0 батареи, составленной из n конденсаторов емкостью C_i, соединенных между собой последовательно, может быть рассчитана по формулам:

$$C_0 = \frac{q_0}{U_0} \text{ и } \frac{1}{C_0} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}. \qquad (11.21)$$

Если обе обкладки одного конденсатора соединить с обкладками другого, а тот, в свою очередь, таким же образом подключить к следующему конденсатору (сопротивлению или источнику), то получившееся соединение конденсаторов называют параллельным.

При подключении к источнику с напряжением U_0 батареи незаряженных конденсаторов, соединенных между собой параллельно, общий заряд q_0 батареи равен сумме зарядов q_i всех конденсаторов, т. е.

$$q_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i. \qquad (11.22)$$

Напряжение на каждом конденсаторе и на всей батарее в целом одинаково:

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U_0. \qquad (11.23)$$

Емкость C_0 батареи при параллельном соединении конденсаторов может быть рассчитана по формулам:

$$C_0 = \frac{q_0}{U_0} \text{ и } C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i. \qquad (11.24)$$

Все заряженные тела обладают электрической энергией, заключенной (локализованной) в электрическом поле, созданном этими телами. Величину энергии можно измерить работой, которую необходимо совершить, чтобы зарядить данное тело. Для уединенного заряженного тела эта работа, а следовательно, и энергия равна:

$$A = W_п = q\varphi \text{ или } W_п = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \qquad (11.25)$$

где q, φ и C — соответственно заряд, потенциал и емкость тела.

Энергия поля заряженного конденсатора равна:

$$W_п = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 Sd}{2}, \qquad (11.26)$$

где q и U — заряд и напряжение на конденсаторе емкостью C; S и d — площадь пластины и расстояние между обкладками конденсатора.

Решение задач. Примеры

1. Типичные задачи электростатики состоят в том, чтобы:

а) По заданному распределению зарядов в пространстве найти созданное ими поле — вычислить напряженность и потенциал поля в произвольной точке, или, наоборот, зная характеристики поля, найти создающие его заряды.

б) По заданному расположению и форме проводников, зная потенциал каждого проводника или их общий заряд, найти распределение зарядов в проводниках и вычислить поля, создаваемые этими проводниками.

В курсе элементарной физики, за небольшим исключением, рассматривают наиболее простые случаи: задачи о точечных зарядах, заряженных проводящих сферах, плоскостях и конденсаторах.

Иногда в эти задачи включают элементы механики, и задачи получаются комбинированными, однако главное внимание в них стараются уделять идеям электричества.

2. Задачи по электростатике в курсе элементарной физики удобно разделить на две группы. К первой группе можно отнести задачи о точечных зарядах и системах, сводящихся к ним, ко второй — все задачи о заряженных телах, размерами которых нельзя пренебречь.

Решение задач первой группы основано на применении законов механики с учетом закона Кулона и вытекающих из него следствий. Такие задачи рекомендуется решать в следующем порядке.

Расставить силы, действующие на точечный заряд, помещенный в электрическое поле, и записать для него уравнение равновесия или основное уравнение динамики материальной точки.

Выразить силы электрического взаимодействия через заряды и поля и подставить эти выражения в исходное уравнение.

Если при взаимодействии заряженных тел между ними происходит перераспределение зарядов, к составленному уравнению добавляют уравнение закона сохранения зарядов (11.2).

Далее, как обычно, надо записать вспомогательные формулы и полученную систему уравнений решить относительно неизвестной величины.

Задачи на расчет полей, созданных точечными зарядами, заряженными сферами и плоскостями,— нахождение напряженности или потенциала в какой-либо точке пространства — основаны на использовании формул (11.3)—(11.6) и (11.8)—(11.10). Особое внимание следует обращать на векторный характер напряженности $\vec{E}$ и помнить, что знак перед потенциалом φ определяется знаком заряда, создающего поле.

Вычисление работы, совершенной полем над точечным зарядом, а также энергии, которую приобретает заряд в результате действия сил поля, особых затруднений не представляет. Эти величины легко могут быть найдены с помощью формул (11.7), (11.11) — (11.13) в комбинации с формулой (11.10) и уравнения закона сохранения и превращения энергии $A = W_1 - W_2$. Как и раньше, под W_1 и W_2 здесь можно понимать только полную механическую энергию заряженного тела, под A — работу внешних сил, к которым можно отнести и силы электрического поля.

Решение задач второй группы основано на использовании формул (11.14) — (11.26).

Если по условию задачи дано одно заряженное тело, то величины, характеризующие электрические свойства тела, должны быть связаны между собой формулами (11.14) — (11.18) и (11.24) — (11.25). С учетом соотношения (11.9) они позволяют найти одну из этих величин, если другие заданы.

В задачах на систему заряженных тел (обычно плоских конденсаторов) прежде всего необходимо установить тип соединения; выяснить, какие из конденсаторов соединены между собой последовательно, какие параллельно.

Соединение элементов цепи, в том числе и конденсаторов, может не относиться ни к последовательному, ни к параллельному. Общую емкость такого сложного соединения методами элементарной физики можно найти сравнительно просто лишь в тех случаях, когда в схеме есть точки с одинаковыми потенциалами. Такие точки можно соединять и разъединять, распределение зарядов и потенциалов на конденсаторах от этого не изменяется. Соединяя или разъединяя точки с одинаковыми потенциалами, можно сложное включение конденсаторов свести к комбинации последовательных и параллельных соединений. Способы нахождения точек с одинаковыми потенциалами подробно описаны в 12-й главе, все они полностью применимы и для конденсаторов.

Когда установлен тип соединения конденсаторов и ясно, как найти их общую емкость, дальнейший расчет сведется к тому, чтобы определить связь между зарядами и напряжениями на конденсаторах и выразить через них емкости конденсаторов. В случае последовательного соединения надо составить систему уравнений (11.19) — (11.21), (11.17), в случае параллельного — (11.22) — (11.24) и (11.17).

3. При решении задач электростатики и ответах на отдельные качественные вопросы полезно иметь в виду следующее:

1°. Положительные электрические заряды, предоставленные самим себе, движутся в электрическом поле от точек с большим потенциалом к точкам, где потенциал меньше. Отрицательные заряды перемещаются в обратном направлении.

2⁰. Напряженность электрического поля внутри статически заряженного проводника равна нулю. Этот результат не зависит от того, наложено ли на проводник внешнее электрическое поле или нет. Потенциал всех точек, лежащих на проводнике, имеет при этом одинаковое значение, т. е. поверхность проводника является эквипотенциальной.

3⁰. Потенциал земли и всех тел, соединенных проводником с землей, принимается равным нулю.

4⁰. Работа сил электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

5⁰. Если два уединенных шара соединить тонким и длинным проводом, то их общая емкость будет равна сумме емкостей отдельных шаров, поскольку потенциалы шаров будут одинаковыми, а общий заряд системы равен сумме зарядов шаров. По этой же причине уединенный шар можно рассматривать как два конденсатора, соединенные между собой параллельно, с емкостями, равными $2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_ш$.

6⁰. Если конденсатор состоит из двух проводящих сфер радиусами R и r и общим центром (сферический конденсатор), то его емкость равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R - r}, \qquad (11.27)$$

где ε — проницаемость диэлектрика, разделяющего сферы. Эта формула автоматически вытекает из формул (11.15), (11.10) и (11.9).

7⁰. Если заряженный металлический шар поместить в центр проводящего сферического экрана, соединенного с землей, на экране появляется заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара. Действительно, поскольку экран соединен с землей и его потенциал равен нулю, заряд $q_э$ на экране должен удовлетворять условию:

$$\frac{q_ш}{R} + \frac{q_э}{R} = 0,$$

откуда $q_э = -q_ш$.

8⁰. Электрическое поле заряженного конденсатора можно рассматривать как результат наложения двух полей, созданных каждой обкладкой конденсатора. Если поля, создаваемые обкладками плоского заряженного конденсатора, можно считать однородными (рис. 11.3), то согласно формуле (11.5) напряженность поля в конденсаторе будет равна:

$$E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}. \qquad (11.28)$$

Здесь q — заряд конденсатора; S — площадь пластины; σ — поверхностная плотность заряда.

9⁰. В плоском конденсаторе одну пластину можно рассматривать как тело с зарядом q, помещенное в однородное электрическое поле с напряженностью E_1, созданное другой пластиной. Согласно формулам (11.3) и (11.28) со стороны первой пластины на вторую (и наоборот) будет действовать сила:

$$F = qE_1 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}. \qquad (11.29)$$

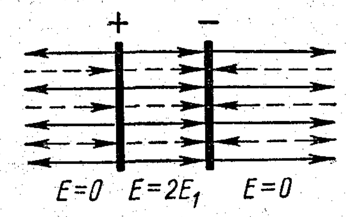


Рис. 11.3.

Если плоский конденсатор подключить к источнику питания, зарядить его и затем отключить, то при изменении емкости C конденсатора вследствие раздвижения (сближения) или смещения пластин, внесения (удаления) диэлектрика заряд на конденсаторе не меняется. Что при этом происходит с величинами q, U, E, F или W, легко установить, анализируя формулы (11.14), (11.17), (11.18). В том случае, когда между пластинами конденсатора вставляют (или вынимают) незаряженную металлическую пластинку, не замыкающую конденсатор, область поля конденсатора уменьшается на величину объема этой пластинки. Все величины будут при этом изменяться точно так же, как если бы мы сближали (или раздвигали) обкладки. Если конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то при всех указанных выше изменениях емкости конденсатора между его пластинками остается неизменным напряжение. Величины q, C, E и F могут при этом меняться.

10⁰. Если батарею конденсаторов подключить к источнику напряжения и сообщить ей некоторый заряд, то алгебраическая сумма зарядов любой группы обкладок, изолированных от источника, всегда должна быть равна нулю, поскольку заряды в этой группе пластин разделяются вследствие индукции.

11⁰. При расчете полей, возникающих в системе заряженное тело — незаряженная проводящая поверхность, удобно использовать метод зеркального изображения зарядов. Этот метод основан на следующем принципе.

Если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником, имеющим потенциал и форму этой поверхности, то электрическое поле после такой замены останется прежним. Отсюда, в частности, следует, что при помещении точечного заряда вблизи бесконечной проводящей плоскости на последней заряды перераспределяются так, что электрическое поле между плоскостью и зарядом оказывается тождественным полю, создаваемому рассматриваемым зарядом и его зеркальным изображением в проводящей плоскости.

Пример 1. Два алюминиевых шарика радиусами $R = 2$ *см* и $r = 1$ *см* соединены легкой непроводящей нитью длиной $l = 1{,}00$ *м*. Шарики находятся на гладкой горизонтальной непроводящей поверхности (рис. 11.4). У каждых $z = 10^9$ атомов большего шарика взято по одному электрону и все они перенесены на меньший шарик. Какую минимальную силу нужно приложить к системе, чтобы нить натянулась? Плотность и атомная масса алюминия равны соответ-

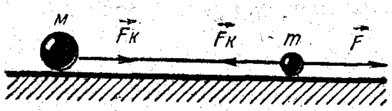


Рис. 11.4.

ственно $\rho = 2{,}7 \cdot 10^3$ *кг/м*³ и $A = 27$, заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ *к*.

Решение. Если у n атомов одного шарика отнять по одному электрону и все их поместить на другой, то первый шарик будет иметь заряд ne, второй — ne.

Между заряженными шариками возникнет сила притяжения $\vec{F}_к$, которая будет сообщать им ускорения, направленные вдоль нити, навстречу друг другу. При отсутствии внешних сил шарики стали бы сближаться. Чтобы нить оказалась на грани натяжения, к одному из них нужно приложить в горизонтальном направлении такую силу $\vec{F}$, чтобы она вместе с кулоновской силой сообщала этому шарику в противоположную сторону такое же ускорение a, с каким будет двигаться под действием только кулоновской силы второй шарик. Ускорение шариков относительно друг друга будет в этом случае равно нулю. Если значение $\vec{F}$ станет больше того, которое мы найдем, нить натянется.

Под действием одних лишь кулоновских сил шарики приобретут разные ускорения. У большего шарика ускорение окажется меньшим, у меньшего большим, поэтому для их относительного равновесия искомую минимальную силу ($F_{мин}$) нужно приложить к меньшему шарику.

Итак, допустим, мы приложили к правому шарику силу $\vec{F}$, оба тела движутся с одинаковым ускорением a и нить находится на грани натяжения. Как указывалось во введении к разделу, решение нашей задачи удобно начинать с составления основного уравнения динамики точки.

При движении правого шарика на него в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$ и сила $\vec{F}_к$. (Силы гравитационного взаимодействия шариков ничтожно малы по сравнению с электрическими силами и поэтому мы ими пренебрегаем.) Если этот шарик имеет массу m, то согласно второму закону Ньютона

$$F - F_к = ma. \qquad (1)$$

На второй, больший шарик массой M по горизонтали действует только сила $\vec{F}_к$, поэтому

$$F_к = Ma. \qquad (2)$$

Кулоновские силы и массы тел, входящие в уравнения динамики, не заданы, поэтому их надо выразить через известные величины и переписать уравнения (1), (2) в развернутом виде.

Заряженные шарики можно считать точечными зарядами, так как по условию задачи расстояние между ними во много раз больше их размеров. Сила притяжения между шариками будет в этом случае достаточно точно удовлетворять закону Кулона:

$$F_к = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{n^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \qquad (3)$$

поскольку $|q_1| = |q_2| = |ne|$.

Массы шариков можно выразить через их плотность и радиусы:

$$m = \rho V_1 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 \text{ и } M = \rho V_2 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3. \qquad (4)$$

Число атомов, находящихся в большом шарике, равно:

$$N = N_А \frac{M}{A}, \qquad (5)$$

где $N_А$ — число Авогадро.

Число электронов, взятых у большого и переданных маленькому шарику, равно:

$$n = \frac{N}{z}. \qquad (6)$$

Уравнениями (1)—(6) условия задачи исчерпываются полностью. В этих уравнениях неизвестными являются F, m, M, a, N и n. Решая их совместно относительно F и подставляя числовые значения, получим:

$$F = \frac{4\pi}{9\varepsilon_0}\left(\frac{e\rho N}{Azl}\right)^2 (R^3 + r^3) R^3; \; F \approx 735 \text{ н}.$$

Чтобы нить натянулась, нужно к шарику меньшей массы приложить силу $F_{мин} > F$.

Разобранный нами пример показывает, в частности, как велика сила электрического взаимодействия по сравнению с теми силами, которые нам встречаются в повседневной жизни. Предлагаем решить эту задачу при условии, что тела не заряжены и требуется скомпенсировать действие только гравитационных сил.

Пример 2. Три проводящих шарика радиусами r, $2r$ и $3r$, на которых находятся заряды $3q$, $-2q$ и $3q$, расположены в вершинах тетраэдра с ребром $R \gg r$. Определите напряженность и потенциал электрического поля в четвертой вершине тетраэдра, а также потенциал в центре шариков. Какой потенциальной энергией электрического взаимодействия обладают шарики?

Решение. Предположим, что шарики находятся в вершинах основания пирамиды (рис. 11.5), и надо найти напряженность поля и потенциал в точке A и потенциалы в центрах шариков B, C и D. Рассмотрим точку A. Поле в ней создается заряженными шариками. Проставляем векторы напряженности $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ полей, созданных шарами с зарядом $3q$, $-2q$ и $3q$ соответственно. Условие $R \gg r$ позволяет не учитывать смещение зарядов на шарах и считать, что они распределены по поверхности равномерно. Сразу же можно заметить, что модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны, поскольку заряды, создающие эти поля, и расстояния от них до точки A одинаковые.

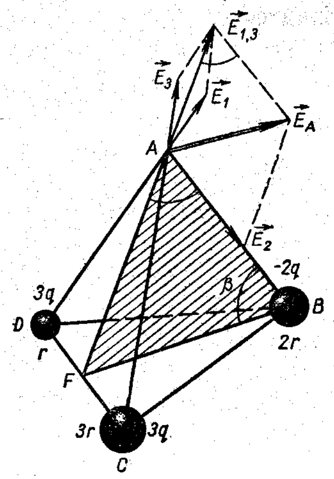


Рис. 11.5.

Проставляя векторы напряженности, следует обратить внимание на их направление. В случае положительных зарядов векторы напряженности направлены от них, в случае отрицательных — к ним.

Согласно принципу наложения полей результирующее поле в точке A равно:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Векторную сумму, стоящую в правой части равенства, проще всего найти попарным сложением векторов по правилу параллелограмма. Векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равны по величине и угол между ними равен 60°, поэтому их результирующий вектор является диагональю ромба и его модуль равен:

$$E_{1,3} = 2E_1 \cos 30°.$$

Чтобы найти $\vec{E}_A$, нам нужно сложить векторы $\vec{E}_{1,3}$ и $\vec{E}_2$. Оба эти вектора лежат в плоскости ABF (AF — высота равностороннего треугольника ACD), поэтому, применив теорему косинусов, получим:

$$E_A = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_2^2 - 2E_{1,3}E_2\cos\beta}.$$

Угол β, как видно из чертежа, равен углу между ребром и гранью пирамиды. Из треугольника ABF, поскольку он равнобедренный ($AF = BF$),

$$\cos\beta = 0{,}5\cos 30°.$$

С учетом этого, а также выражения для $E_{1,3}$ после небольших преобразований получим, что

$$E_A = \sqrt{3E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2}. \qquad (1)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого заряженным шаром за его пределами, такая, как если бы весь заряд шара был сосредоточен в его центре, поэтому

$$E_1 = E_3 = \frac{3q}{4\pi_0\varepsilon R^2}; \quad E_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1)—(2) находим:

$$E_A = \frac{q\sqrt{19}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Потенциал поля в точке A равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных заряженными шарами:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Потенциал поля шариков за их пределами равен:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R}; \quad \varphi_2 = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим:

$$\varphi_A = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал поля в центре шаров равен потенциалу на их поверхности. Последний складывается из потенциала собственного поля шара и потенциалов полей двух других шаров. Учитывая, что $R \gg r$, а также знаки зарядов на шарах, мы можем записать:

$$\varphi_C = \varphi_D = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi_B = 2\cdot\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} \approx \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциальную энергию системы находим по формуле (11.13). Поскольку $R \gg r$ и заряженные тела близки к точечным зарядам, то

$$W_п = \frac{1}{2}(3q\varphi_C + 3q\varphi_D - 2q\varphi_B) = \frac{11q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Пример 3. Протон, летящий по направлению к неподвижному ядру двукратно ионизированного атома гелия, в некоторой точке поля ядра с напряженностью $E = 100$ *в/см* имеет скорость $v = 10^4$ *м/сек*. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру? Заряд протона $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ *к*, масса протона $m = 1{,}66\cdot10^{-27}$ *кг*.

Р е ш е н и е. В состав ядра атома гелия входят два протона, поэтому летящий к нему протон будет тормозиться полем ядра и на некотором расстоянии от ядра остановится. Так как поле ядра неоднородно, то на движущийся протон действует переменная сила, поэтому для решения задачи удобно воспользоваться законом сохранения и превращения механической энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Работа внешних сил над протоном — работа сил поля равна:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

здесь φ_1 — потенциал поля ядра в той точке, где протон обладал кинетической энергией $W_1 = \frac{mv^2}{2}$; φ_2 — потенциал в той точке, где протон остановился ($W_2 = 0$). Если расстояние от ядра до указанных точек поля равно r_1 и r_2, то

$$\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} \text{ и } \varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_2},$$

так как заряд ядра равен $2q$ и $\varepsilon = 1$. Учитывая это, формулу работы можно переписать так:

$$A = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Подставляя выражения для работы и энергии в уравнение энергетического баланса, получаем:

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

Расстояние r_1, на котором находится протон от ядра в тот момент, когда его скорость равна v, можно найти из дополнительного условия, зная напряженность поля ядра E в точках, удаленных от ядра на такое расстояние:

$$E = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) определим r_1:

$$r_1 = \sqrt{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 E}}; \quad r_1 = 5{,}35 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Затем решаем уравнение (1) относительно r_2:

$$r_2 = \frac{q^2}{q^2 + \pi\varepsilon_0 r_1 m v^2}\, r_1.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$r_2 = 5{,}5 \cdot 10^{-9} \text{ м}.$$

Пример 4. Пучок электронов, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 10^4$ *в*, влетает в середину между пластинами плоского конденсатора параллельно им. Какое напряжение необходимо подать на пластины конденсатора, чтобы пучок электронов при выходе из конденсатора отклонялся от своего начального направления на максимальный угол? Длина пластин $l = 10$ *см*, расстояние между ними $d = 3$ *см*.

Р е ш е н и е. Решение задач о движении заряженных частиц в электрическом поле конденсатора или заряженной плоскости сходно с решением задач на движение тела, брошенного горизонтально. Отличие состоит лишь в том, что движение частиц происходит в однородном электрическом поле, которое сообщает им некоторое постоянное ускорение a, отличное от ускорения свободного падения. Действие силы тяжести в подобных задачах, как правило, не учитывают, поскольку гравитационные силы ничтожно малы по сравнению с электрическими. Нахождение ускорения заряженной частицы связано с применением формул электростатики, которые вместе с уравнениями движения и составляют полную систему уравнений

для определения неизвестной величины. Решение задач подобного типа рекомендуется начинать с составления кинематических уравнений.

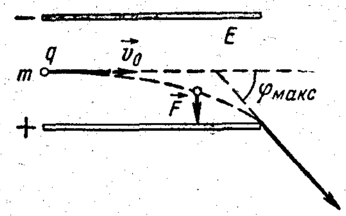


Рис. 11.6.

Если электрон влетает в электрическое поле заряженного конденсатора со скоростью $\vec{v}_0$, направленной параллельно пластинам (рис. 11.6), то под действием силы $\vec{F}$ поля он отклоняется от своего начального направления и вылетает из конденсатора под некоторым углом к этому направлению. По условию задачи электрон влетает в середину конденсатора, поэтому при максимальном отклонении он должен сместиться по вертикали на половину расстояния между пластинами.

Движение электрона в однородном поле конденсатора происходит по параболе, и его можно рассматривать как результат двух прямолинейных перемещений — равномерного со скоростью v_0 в горизонтальном направлении и равноускоренного (без начальной скорости) в вертикальном.

Если длина конденсатора l и расстояние между пластинами d, то за время прохождения поля конденсатора перемещения электрона по этим направлениям равны соответственно:

$$l = v_0 t \text{ и } \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Сила, сообщающая электрону массой m ускорение a, по второму закону Ньютона равна $F = ma$. В задачах данного типа уравнение второго закона необходимо представить в развернутом виде, выразив силу, действующую на заряженную частицу, через характеристики поля. Поскольку $F = qE$, а $E = \frac{U}{d}$, где E — напряженность поля между пластинами конденсатора и U — разность потенциалов, то $F = \frac{qU}{d}$. Тогда уравнение динамики можно записать так:

$$\frac{qU}{d} = ma. \qquad (2)$$

В задачах о движении частиц, заряд и масса которых известны (как, например, у электрона и протона), начальная скорость частицы v_0 нередко задается неявно, через ускоряющую разность потенциалов U_0. Если ускоряющее поле совершает над частицей с массой m и зарядом q работу $A = qU_0$, то частица приобретает кинетическую энергию $W = \frac{mv_0^2}{2}$. Согласно закону сохранения и превращения энергии $qU_0 = \frac{mv_0^2}{2}$. Откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}. \qquad (3)$$

Уравнения перемещения (или скорости) вместе с уравнениями (2) и (3) являются основными расчетными соотношениями в задачах на движение заряда в однородном электрическом поле. В данном случае, решая их относительно искомой разности потенциалов на пластинках конденсатора и подставляя числовые значения, получим:

$$U = \frac{2d^2}{l^2} U_0; \quad U = 1{,}8 \text{ кв}.$$

Пример 5. Небольшой металлический шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, колеблется по закону математического маятника над бесконечной равномерно заряженной непроводящей горизонтальной плоскостью с плотностью заряда σ. Определите период колебаний маятника при условии, что на шарике находится заряд $-q$.

Решение. Гармонические колебания шарика происходят в однородном электрическом поле, созданном равномерно заряженной плоскостью. Это поле действует на отрицательно заряженный шарик силой F и сообщает ему постоянное ускорение a, направленное вертикально вниз. Поскольку шарик колеблется по законам математического маятника и его смещением по вертикали можно пренебречь, с достаточной степенью точности можно считать, что под действием поля сила натяжения нити возрастет на величину F и создаваемое ею ускорение увеличится от g до $g + a$. Период колебания такого заряженного математического маятника равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g + a}}. \tag{1}$$

Ускорение a, вызванное постоянным электрическим полем, определяем из основного уравнения динамики материальной точки:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Сила, действующая на шарик с зарядом q в электрическом поле с напряженностью E, равна $F = qE$. Или, поскольку задана поверхностная плотность зарядов σ на равномерно заряженной плоскости и колебания происходят в вакууме ($\varepsilon = 1$), согласно формуле (11.5) будем иметь:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ и, следовательно, } F = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}.$$

С учетом последнего равенства основное уравнение динамики можно представить так:

$$a = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m}. \tag{2}$$

В уравнениях (1)—(2) все величины, кроме T и a, заданы. Решая их совместно относительно периода колебаний заряженного шарика, получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 ml}{2\varepsilon_0 gm + q\sigma}}.$$

Пример 6. Металлический шар радиусом $r_1 = 2$ *см*, заряженный до потенциала $\varphi_1 = 30$ *в*, соединили тонкой длинной проволокой с шаром емкостью $C_2 = 3$ *пкф*, на котором находился заряд $q_2 = 6 \cdot 10^{-10}$ *к*. а) Какова будет поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения зарядов? б) Каким станет заряд на шарах, если первый шар поместить в центр проводящей оболочки радиусом $R = 3$ *см*, соединенной с землей? в) Каковы будут заряды на шарах, если ко второму шару подключить незаряженный плоский конденсатор емкостью $C_3 = 5$ *пкф*, одна из пластин которого заземлена?

Решение. а) Если заряженные тела имеют разный потенциал, то при соединении их проводником заряды будут переходить с одного тела на другое до тех пор, пока потенциалы тел не станут одинаковыми. При равновесии зарядов на шарах, соединенных проволокой, должно быть $\varphi_1' = \varphi_2'$. Потенциалы шаров можно выразить через их емкости и заряды с помощью формулы (11.13), поэтому

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2}, \tag{1}$$

где C_1 и C_2 — емкости шаров; q_1' и q_2' — заряды на них после перераспределения.

Согласно формуле (11.15) емкости шаров связаны с их радиусами формулами:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \text{ и } C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2. \tag{2}$$

При всяком перераспределении зарядов в изолированной системе, какой являются в данном случае заряженные шары, сумма зарядов остается неизменной. Поэтому если до соединения шаров их заряды равнялись q_1 и q_2, а после соединения q_1' и q_2', то должно быть:

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2'. \tag{3}$$

Начальный заряд q_1 первого шара можно найти, зная его емкость и начальный потенциал:

$$q_1 = C_1\varphi_1. \tag{4}$$

Уравнения (1)—(4) позволяют определить q_1' и q_2'. Поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения равна:

$$\sigma_1' = \frac{q_1'}{4\pi r_1^2} \text{ и } \sigma_2' = \frac{q_2'}{4\pi r_2^2}. \tag{5}$$

В составленной системе уравнений неизвестными величинами фактически являются q_1, q_1', q_2', σ_1' и σ_2'. Исключая из уравнений заряды и подставляя числовые значения, получим:

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon_0 (4\pi\varepsilon_0 r_1 \varphi_1 + q_2)}{(4\pi\varepsilon_0 r_1 + C_2) r_1}; \quad \sigma_1 = 5{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ к/м}^2;$$

$$\sigma_2' = \frac{4\pi\varepsilon_0^2(4\pi\varepsilon_0 r_1\varphi_1 + q_2)}{(4\pi\varepsilon_0 r_1 + C_2)\,C_2};\ \sigma_2' = 4{,}2\cdot 10^{-8}\ к/м^2.$$

б) Если первый шар окружить заземленной металлической оболочкой, на ней появится индуцированный заряд, равный по величине и противоположный по знаку заряду шара. Заряд самого шара при этом не остается таким, каким он был до внесения в оболочку. Поскольку емкость системы шар — оболочка станет больше, чем емкость одного этого шара, его потенциал уменьшится и на него перейдет часть заряда со второго шара.

В том, что емкость $C_{1,0}$ первого шара с оболочкой действительно больше, чем C_1, убедиться очень легко. Поскольку она оказывается равной емкости сферического конденсатора, то должно быть:

$$\frac{C_1 C_{об}}{C_{об} - C_1} = \frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 R}{R - r_1} = C_{1,0} > C_1. \tag{6}$$

После перераспределения зарядов потенциалы шаров выравниваются. Обозначим их φ_1' и φ_2', причем $\varphi_1' = \varphi_2'$. Потенциал φ_1' на поверхности шара, заключенного в оболочку, складывается из потенциала $\varphi_ш$ поля, созданного самим шаром, и потенциала $\varphi_{об}$ поля, которое создавала бы сама оболочка в том месте, где находится шар, т. е. $\varphi_1' = \varphi_ш + \varphi_{об}$. Потенциал на поверхности оболочки при этом, разумеется, равен нулю, так как она заземлена.

Если после перетекания заряда на первом шаре оказался заряд q_1', то на оболочке появится заряд $-q_1'$ и, следовательно,

$$\varphi_ш = \frac{q_1'}{C_1};\quad \varphi_{об} = -\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал второго шара, если считать, что он достаточно удален от первого, равен:

$$\varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2},$$

где q_2' — заряд этого шара. Учитывая все это, запишем:

$$\varphi_ш + \varphi_{об} = \varphi_2' \text{ или } \frac{q_1'}{C_1} - \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q_2'}{C_2}. \tag{7}$$

Из уравнений (3), (4), (6) и (7) находим:

$$q_1' = \frac{C_{1,0}}{C_{1,0}+C_2}(C_1\varphi_1 + q_2);\ q_1' = 4{,}6\cdot 10^{-10}\ к;$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_{1,0}+C_2}(C_1\varphi_1 + q_2);\ q_2' = 2{,}0\cdot 10^{-10}\ к.$$

в) При подключении к шару незаряженного плоского конденсатора емкостью C_3, соединенного с землей, часть заряда шаров перейдет на пластину конденсатора и потенциалы на шарах и незаземленной пластинке выравнятся. На заземленной обкладке появится заряд, равный заряду первой пластинки, но противоположный ему по знаку. Разность потенциалов между обкладками конденсатора станет при этом равна разности потенциалов между шарами и землей, т. е. $U_1' = U_2' = U_3'$, или с учетом того, что потенциал земли равен нулю:

$$\frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{q_3'}{C_3}, \tag{8}$$

где q_1', q_2', q_3' — заряды на шарах и конденсаторе после того, как система придет в равновесие.

Согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' + q_3'. \tag{9}$$

Из уравнений (8), (9) и (4), считая все емкости известными и учитывая числовые значения заданных величин, находим:

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2);\ q_1' \approx 1{,}5\cdot 10^{-10}\ к;$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2);\ q_2' \approx 2{,}0\cdot 10^{-10}\ к;$$

$$q_3' = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2);\ q_3' \approx 3{,}4\cdot 10^{-10}\ к.$$

Пример 7. Конденсатор выполнен в виде двух концентрических сфер, радиусы которых равны $r = 2\ см$ и $R = 6\ см$. Внутренняя сфера испускает с каждого квадратного сантиметра поверхности $n = 10^{10}$ электронов в секунду с начальными скоростями $v_0 = 10^3\ м/сек$. Через какое время после начала испускания электронов заряд на конденсаторе перестанет возрастать? Заряд электрона и его массу считать известными.

Решение. Допустим, что в начальный момент времени, когда эмиссия электронов еще не началась, сферический конденсатор был не заряжен. Тогда при излучении электронов с поверхности внутренней сферы заряд на конденсаторе станет возрастать вследствие перераспределения электронов между обкладками. Внутренняя сфера будет заряжаться положительно, внешняя — отрицательно. По мере накопления электронов на внешней сфере электрическое поле между обкладками будет увеличиваться. Это поле направлено от меньшей сферы к большей и тормозит движение электронов. Напряженность поля и заряд на конденсаторе увеличиваются до тех пор, пока между сферами не возникнет такая тормозящая разность потенциалов, что при данной начальной скорости излучения v_0 электроны не смогут ее преодолеть.

Как только разность потенциалов достигнет величины, при которой работа сил поля окажется равной кинетической энергии испускаемых электронов, последние перестанут долетать до внешней обкладки конденсатора и перераспределение зарядов прекратится. Заряд конденсатора, достигнув некоторой величины q, будет оставаться постоянным.

Предположим, что, спустя время t после начала эмиссии, вследствие перехода части электронов с внутренней сферы на внешнюю, между сферами возникла такая разность потенциалов U, что поле совершает над электронами работу, равную их начальной кинетической энергии. Тогда

$$A = W, \text{ или } eU = \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (1)$$

где e — заряд; m — масса электрона.

Разность потенциалов U можно выразить через заряд q конденсатора и его емкость:

$$U = \frac{q}{C}.$$

Электроемкость воздушного сферического конденсатора, составленного из металлических сфер радиусами R и r, равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r}. \qquad (2)$$

Чтобы найти заряд конденсатора, необходимо учесть следующее: если заряд первой сферы в результате вылета электронов изменился на величину q, на такую же величину возрастет заряд второй сферы. Так как вначале обе сферы были не заряжены, то заряд каждой из них, а следовательно, и всего конденсатора также станет равным q. По условию задачи с элемента поверхности внутренней сферы $S_0 = 1$ *см*^{2} за время $t_0 = 1$ *сек* вылетает n электронов, поэтому при излучении электронов с поверхности сферы $S = 4\pi r^2$ в течение времени t конденсатор приобретет заряд

$$q = \frac{enSt}{S_0 t_0} = \frac{ne4\pi r^2 t}{S_0 t_0}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно неизвестного времени t и подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 S_0 t_0 R}{2e^2 nr(R - r)}; \quad t \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10} \text{ сек}.$$

Пример 8. Два одинаковых плоских конденсатора подключены к источнику с напряжением U (рис. 11.7). Пространство между пластинами конденсаторов заполнено слоями диэлектриков одинаковой толщины с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В одном конденсаторе слои расположены параллельно обкладкам, во втором — перпендикулярно. Во сколько раз отличаются: а) электроемкости этих конденсаторов и б) напряженности полей в однородных диэлектриках?

Р е ш е н и е. а) Если параллельно обкладкам плоского конденсатора ввести слои диэлектриков, заполняющих воздушную прослойку, то такой конденсатор можно рассматривать как два конденса-

тора емкостью C_1 и C_2, соединенных последовательно плоскостью контакта диэлектриков. Обкладками первого конденсатора здесь служат граничные слои диэлектрика с проницаемостью ε_1, обкладками второго — такие же слои диэлектрика с проницаемостью ε_2. Как видно из чертежа, площади обкладок этих конденсаторов одинаковы и равны площади пластин S воздушного конденсатора. Расстояние между обкладками определяется толщиной внесенных слоев диэлектриков, в данном случае оно одинаково и равно половине расстояния d между пластинами.

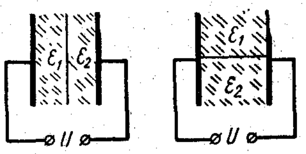


Рис. 11.7.

Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов равна:

$$C_{\text{пс}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в эту формулу выражения для

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{d} \text{ и } C_2 = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{d},$$

для общей емкости получим:

$$C_{\text{пс}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)d} = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2 C_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \qquad (1)$$

где $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость воздушного конденсатора до внесения диэлектриков.

Если слои диэлектриков расположены перпендикулярно пластинам, конденсатор можно рассматривать как систему двух конденсаторов с емкостями C_1' и C_2', соединенных между собой параллельно через сами пластины. В отличие от разобранного выше примера одинаковыми здесь будут не площади пластин, а расстояния между ними. Сами же площади определяются объемом внесенных слоев диэлектриков. В данном примере эти объемы равны, поэтому площади пластин имеют значение $S/2$. Емкость двух конденсаторов, соединенных параллельно, равна: $C_{\text{пр}} = C_1' + C_2'$. Но

$$C_1' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 S}{2d}; \quad C_2' = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 S}{2d},$$

поэтому

$$C_{\text{пр}} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)S}{2d} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)C_0}{2}. \qquad (2)$$

Из выражений для $C_{\text{пс}}$ и $C_{\text{пр}}$ видно, что емкости системы в первом и втором случаях отличаются друг от друга в число раз, равное

$$\frac{C_{\text{пс}}}{C_{\text{пр}}} = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

б) Чтобы установить, во сколько раз отличаются напряженности полей в слоях диэлектриков, нужно сначала найти значения E_1, E_2, E_1' и E_2' в каждом слое для одного и другого случая.

При последовательном соединении конденсаторов подаваемое на них напряжение U равно сумме напряжений на первом и втором слоях диэлектриков:

$$U = U_1 + U_2.$$

Поскольку поля в диэлектриках однородные, то

$$U_1 = E_1 \frac{d}{2}; \quad U_2 = E_2 \frac{d}{2}$$

и, следовательно,

$$U = (E_1 + E_2) \frac{d}{2}. \qquad (3)$$

При наложении на диэлектрики внешнего поля напряженностью E_0 напряженность в каждой среде уменьшится соответственно в ε_1 и ε_2 раз, т. е.

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \text{ и } E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_2},$$

откуда

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \qquad (4)$$

Из уравнений (3), (4) находим:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d} \text{ и } E_2 = \frac{2\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d}.$$

Если слои диэлектриков перпендикулярны пластинам, то напряжение на каждом из образовавшихся конденсаторов одинаково и равно U, поэтому

$$E_1' = \frac{U}{d}; \quad E_2' = \frac{U}{d}.$$

Напряженности полей в первой и второй среде при указанном расположении слоев диэлектриков относятся друг к другу как

$$\frac{E_1}{E_1'} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \text{ и } \frac{E_2}{E_2'} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Пример 9. Найдите разность потенциалов между обкладками конденсаторов, а также между точками b и e в схеме, изображенной на рисунке 11.8.

Р е ш е н и е. В задаче предлагается провести расчет напряжений на отдельных участках цепи, составленной из источников тока и конденсаторов. Таких участков в схеме можно выделить четыре: ab, bd, de и ea; они соединены между собой последовательно.

Расчет последовательной цепи удобно начинать с составления уравнений для напряжений и зарядов на конденсаторах.

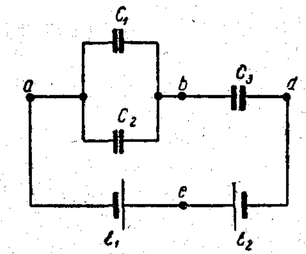


Рис. 11.8.

Обозначим напряжения на клеммах аккумуляторов через $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ ($\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$), разность потенциалов на обкладках конденсаторов через U_{ab} и U_{bd}, тогда, учитывая полярность источников, запишем:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = U_{ab} + U_{bd}, \qquad (1)$$

поскольку напряжение на всей батарее конденсаторов между точками a и d равно разности $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$.

Конденсаторы C_1 и C_2 соединены между собой параллельно, конденсатор C_3 подключен к ним последовательно. Если на этих конденсаторах находятся соответственно заряды q_1, q_2 и q_3, то должно быть:

$$q_1 + q_2 = q_3, \qquad (2)$$

так как при указанном соединении емкостей заряд на участке ab равен заряду на участке bd. Величины, входящие в первые два уравнения, связаны между собой формулами емкости:

$$C_1 = \frac{q_1}{U_{ab}}; \quad C_2 = \frac{q_2}{U_{ab}}; \quad C_3 = \frac{q_3}{U_{bd}}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно U_{ab} и U_{bd} при заданных C_1, C_2, C_3, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, находим напряжения на конденсаторах:

$$U_{ab} = \frac{C_3(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad U_{bd} = \frac{(C_1 - C_2)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Разность потенциалов между точками b и e можно определить из уравнения (1). Для этого достаточно его представить в несколько ином виде, сгруппировав значения разностей потенциалов, относящиеся к соответствующим участкам bde и eab:

$$U_{be} = \mathscr{E}_1 - U_{ab} = \mathscr{E}_2 + U_{bd}. \qquad (4)$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства (так же, как и в правой), представляет алгебраическую сумму напряжений на участках между точками b и e и является искомой разностью потенциалов U_{be}.

Подставляя в левую часть уравнения (4) вместо U_{ab} полученное для него выражение, найдем:

$$U_{be} = \mathscr{E}_1 - U_{ab} = \frac{(C_1 + C_2)\mathscr{E}_1 + C_3\mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Точно такой же результат мы имели бы при подстановке в правую часть уравнения (4) выражения для U_{bd}.

При расчете схем, составленных из конденсаторов и аккумуляторов, электроемкость источников напряжения, а следовательно, и заряд их считаются равными нулю. Записывая уравнения (1), (2), мы воспользовались этим допущением и учитывали только заряды конденсаторов. В заключение отметим, что полученный нами результат для U_{ab} и U_{bd} не зависит от чередования выделенных участков цепи. Если, например, поменять местами источник $\mathscr{E}_2$ и конденсатор C_3, ответ к задаче не изменится.

Пример 10. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 3$ *см* и площадью каждой из обкладок $S = 60$ *см*^{2} присоединен к источнику постоянного напряжения $U = 2000$ *в*. Параллельно пластинам конденсатора вводится металлическая пластинка толщиной $d_0 = 1$ *см*. а) Какую энергию расходует источник при внесении пластинки? На сколько изменяется при этом энергия конденсатора? б) Какую работу совершат силы поля и каково будет изменение энергии конденсатора, если пластинку вставлять в заряженный конденсатор, отключенный от источника?

Решение. а) При внесении незаряженной металлической пластинки в поле конденсатора пространство, занимаемое полем, уменьшается на величину объема пластинки, так как напряженность электрического поля внутри металла равна нулю. Емкость конденсатора с металлической пластинкой увеличивается по сравнению с первоначальной, как если бы его пластины сблизили. Это легко себе представить, предположив, что пластинка вводится вплотную к одной из обкладок. В таком случае мы как бы увеличиваем толщину обкладки конденсатора за счет сокращения воздушного промежутка.

Поскольку конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то увеличение электроемкости конденсатора, вызванное внесением металлической пластинки, приводит к тому, что заряды между конденсатором и источником начинают перераспределяться и по цепи проходит заряд Δq. Работа источника при прохождении через него заряда Δq (работа сторонних сил внутри аккумулятора) будет равна:

$$A_и = \Delta q U. \tag{1}$$

Величину прошедшего заряда, а следовательно, и работу батареи можно определить по изменению (увеличению) заряда конденсатора. Если первоначальный заряд на конденсаторе был q_1, а после внесения пластинки он увеличился до q_2, то

$$\Delta q = q_2 - q_1; \tag{2}$$

заряды q_1 и q_2 можно выразить через напряжение на конденсаторе U, которое остается все время постоянным, и емкости — начальную C_1 и конечную C_2 (с металлической пластинкой):

$$q_1 = C_1 U; \; q_2 = C_2 U. \tag{3}$$

Емкость плоского конденсатора в первом и втором случаях равна соответственно

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \text{ и } C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}, \tag{4}$$

поскольку во втором случае расстояние между обкладками уменьшилось на толщину пластинки.

В соотношениях (1) — (4) неизвестными являются $A_и$, Δq, q_1, q_2, C_1 и C_2. Решая их относительно искомой работы источника и подставляя числовые значения, получим:

$$A_и = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{d(d - d_0)}; \; A_и = 7 \cdot 10^{-6} \text{ дж}.$$

Изменение энергии конденсатора (энергии его электрического поля) равно:

$$\Delta W = W_2 - W_1, \tag{5}$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия конденсатора до и после перераспределения зарядов, т. е. до и после внесения пластинки.

Чтобы представить правую часть этого равенства в развернутом виде, нужно воспользоваться одной из формул для энергии конденсатора. При использовании формул (11.26) удобно брать ту из них, в которую входит лишь одна переменная величина. В нашей задаче такому условию удовлетворяет вторая формула, так как напряжение на конденсаторе, подключенном к источнику, в процессе изменения емкости остается постоянным:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}; \; W_2 = \frac{C_2 U^2}{2}. \tag{6}$$

Емкости C_1 и C_2, входящие в выражения для энергий, определяют по формулам (4).

Подставляя в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 с учетом формул (4), получим:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 S U^2 d_0}{2d(d - d_0)},$$

откуда после подстановки числовых значений заданных величин найдем $\Delta W = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ *дж*. Увеличение энергии конденсатора оказалось вдвое меньше работы источника. Рекомендуем установить самим читателям, на что израсходована вторая половина энергии.

б) При внесении в заряженный конденсатор металлической пластинки силы электрического поля начнут совершать работу по разделению зарядов внутри пластинки. В результате на одной стороне пластинки окажется положительный заряд, на второй — отрицательный, причем величина их будет одинаковой и равной величине q заряда конденсатора. Если конденсатор отключен от источника, то в процессе разделения зарядов в пластинке и изменения емкости заряд на обкладках конденсатора будет оставаться одним и тем же. По мере увеличения разделенного заряда напряженность результирующего поля внутри пластинки уменьшается от значения E (равного значению напряженности в конденсаторе емкостью C_1) до нуля.

Когда заряд на поверхностях пластинки достигнет значения q и $-q$, силы поля на расстоянии d_0, равном толщине пластинки, совершат над зарядом работу

$$A_п = qE_{ср}d_0, \tag{1}$$

где $E_{ср}$ — среднее значение напряженности поля внутри пластинки. Легко показать, что напряженность поля внутри пластинки меняется с увеличением разделенного заряда по линейному закону и поэтому

$$E_{ср} = \frac{E}{2}. \tag{2}$$

Согласно формуле (11.5) напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе равна:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}. \tag{3}$$

Заряд на конденсаторе, а следовательно, и равный ему заряд на поверхности пластинки можно выразить через начальную емкость конденсатора и начальное напряжение на нем:

$$q = C_1U = \frac{\varepsilon_0 S}{d}U. \tag{4}$$

Исключая из выражений (1)—(4) неизвестные q, $E_{ср}$, E и подставляя числовые значения, получим для работы силы поля:

$$A_п = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \ A_п = 1{,}17 \cdot 10^{-6} \ дж.$$

Если до внесения пластинки конденсатор обладал энергией W_1, после внесения W_2, то изменение (уменьшение) энергии конденсатора

$$\Delta W = W_1 - W_2. \tag{5}$$

Как и в первом случае, правую часть равенства нужно представить в развернутом виде, выразив энергию конденсатора через заданные величины. Поскольку в этом примере неизменным остается заряд на конденсаторе, то, применив третью формулу (11.26), получим:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}; \ W_2 = \frac{q^2}{2C_2}. \tag{6}$$

Входящий в выражения для энергии (6) заряд q определяют по формуле (4); емкости до и после внесения пластинки равны соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \ и \ C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}. \tag{7}$$

Подставив в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 через заданные величины с учетом их числовых значений, получим:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \ \Delta W = 1{,}17 \cdot 10^{-6} \ дж.$$

Сравнивая выражения для изменения энергии и работы сил поля, мы видим, что $\Delta W = A_п$, т. е. разделение зарядов в пластинке (увеличение их потенциальной энергии) происходит за счет уменьшения энергии внешнего поля — поля конденсатора.

Задачи к главе 11

11.1. С какой силой будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика диаметром 1 *см*, расположенные на расстоянии 1 *м* друг от друга, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и все эти электроны перенести на второй шарик?

11.2. На двух одинаковых каплях масла радиусом $8{,}22 \cdot 10^{-3}$ *см* находятся одинаковые одноименные заряды. Определите величину этих зарядов, если сила кулоновского отталкивания уравновешивает силу притяжения капель. Расстояние между каплями значительно больше их линейных размеров.

11.3. Два маленьких заряженных шарика, одинаковых по размеру, притягиваются друг к другу с некоторой силой. После того как шарики были приведены в соприкосновение и раздвинуты на расстояние, в n раз большее, чем прежде, сила взаимодействия между ними уменьшилась в m раз. Какова была величина заряда первого шарика до соприкосновения, если второй имел заряд q?

11.4. N заряженных шариков одинакового радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Опуская шарики в жидкий диэлектрик, заметили, что угол отклонения нитей от вертикали в воздухе и в диэлектрике остается одним и тем же. Зная плотность материала шариков ρ_1 и диэлектрика ρ_2, определите его диэлектрическую проницаемость.

11.5. Три одинаковых заряда по 10^{-6} *к* каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Где и какой заряд нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии?

11.6. Четыре маленьких шарика соединены тонкими непроводящими нитями так, что в натянутом состоянии они образуют ромб. Чему равен угол между нитями, если шарики, находящиеся в противоположных вершинах ромба, имеют заряды Q, Q и q, q?

11.7. Две частицы, имеющие массу m и заряд q, находятся в вершинах равностороннего треугольника, составленного из легких нитей длиной l (рис. 11.9). Систему поднимают вертикально вверх с ускорением, численно равным g. Определите натяжение нити, соединяющей частицы.

11.8. Небольшой грузик, имеющий массу m и заряд q, вращается на непроводящей нити длиной l (рис. 11.10). Определите период обращения грузика и натяжение нити, если неподвижный точечный заряд q находится: а) в точке подвеса нити; б) в центре окружности, описываемой грузиком; в) на оси конуса на расстоянии l от грузика.

11.9. На оси заряженного проволочного кольца по обе стороны от его центра находятся два одинаковых точечных заряда q. Если заряды поместить в точках, находящихся от центра кольца на расстояниях, равных радиусу, то система оказывается в равновесии. Чему равен заряд кольца? Будет ли равновесие устойчивым?

11.10. Две частицы массой m и M, имеющие заряды соответственно $-q$ и Q, движутся как одно целое вдоль силовой линии одно-

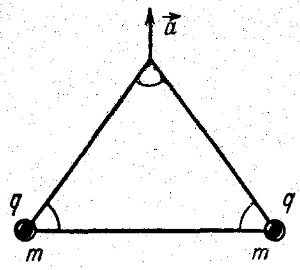


Рис. 11.9.

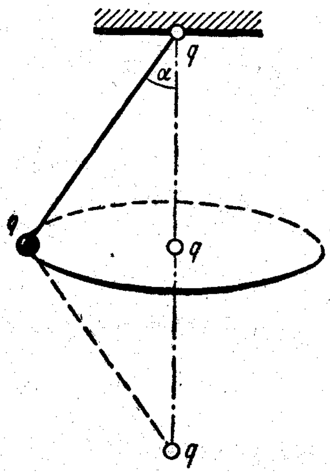


Рис. 11.10.

родного электрического поля с напряженностью E. Определите: а) расстояние x между частицами, при котором возможно такое движение; б) ускорение частиц.

11.11. Электроны влетают в пространство между двумя горизонтальными плоскими сетками длиной 5 *см* под углом 30° к поверхности сеток, а вылетают под углом 10°. Определите первоначальную энергию электронов, если напряженность поля между сетками 600 *в/см*. Решите задачу при условии, что сетки расположены вертикально и расстояние между ними равно 5 *см*.

11.12. Маленький шарик массой m, обладающий зарядом q, подвешен на легкой непроводящей нити длиной l. На шарик наложено однородное электрическое поле напряженности E, направленное вертикально вниз (горизонтально). Шарик отклонили от положения равновесия в горизонтальное положение и затем отпустили. Определите: а) максимальное натяжение нити; б) период малых колебаний шарика около его положения равновесия.

11.13. На вертикальной плоскости распределен заряд с поверхностной плотностью $4 \cdot 10^{-9}$ *к/см*^{2}. К плоскости прикреплена нить, на конце которой находится заряженный шарик массой 1 *г*. При равновесии системы нить образует с плоскостью угол 13°. Определите заряд шарика.

11.14. Капля массой 10^{-10} *г*, на которой находится заряд, равный 10 зарядам электрона, поднимается вертикально вверх с ускорением 2,2 *м/сек*^{2} между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора. Определите поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора. Сопротивлением воздуха пренебречь.

11.15. Два маленьких шарика, имеющие заряды q и $-q$, соединены между собой легким непроводящим стержнем длиной l. Стержень расположен вдоль силовых линий однородного электрического поля, созданного большой заряженной плоскостью, по которой равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть стержень на угол $\alpha = 180°$? Решите задачу при условии, что вначале стержень был расположен перпендикулярно силовым линиям поля.

11.16. Три тонкие металлические пластинки, расположенные параллельно друг другу, имеют заряды q, $2q$ и $-3q$. Расстояние между пластинками равно d, площадь каждой пластинки S. Определите разность потенциалов между крайними пластинками и силу, действующую на среднюю пластинку.

11.17. Через блок переброшена легкая проводящая струна длиной l. На концах струны находятся два металлических груза массами M и m. Предоставленная самой себе, система приходит в ускоренное движение. Определите разность потенциалов между грузами. Трением на блоке и размерами грузов пренебречь.

11.18. Металлический диск радиусом R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите напряженность электрического поля в диске и показания вольтметра, соединенного с контактами, один из которых касается диска в центре, а другой — с краю. Отношение заряда электрона к его массе равно γ.

11.19. Маленький шарик массой m, имеющий заряд q_1, скользит с высоты h по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд q_2. Определите скорость шарика у основания наклонной плоскости. Трением пренебречь.

11.20. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить точечный заряд 10^{-7} *к* внутрь металлической заряженной сферы радиусом 0,15 *м*, имеющей заряд $^2/_3 \cdot 10^{-7}$ *к*, из точки, находящейся на расстоянии 0,24 *м* от поверхности сферы? Чему будет равна работа при перенесении заряда с поверхности сферы в точку, удаленную от нее на 5 *см*? В обоих случаях считать, что заряд распределен по сфере равномерно.

11.21. Спутники Земли непрерывно облучаются космическими лучами, состоящими главным образом из протонов больших энергий. Средняя кинетическая энергия W протонов в космических лучах равна нескольким миллиардам электронвольт; интенсивность потока протонов, достигающих земной поверхности, составляет примерно $I = 1 \frac{\text{частица}}{\text{см}^2 \cdot \text{сек}}$. Оцените время, необходимое для того, чтобы космические протоны подняли потенциал спутника настолько, чтобы его заряд перестал возрастать. Чему будет равен при этом заряд спутника? При решении считать, что спутник имеет форму шара радиусом 2*м*.

11.22. Два полых металлических шара, радиусы которых 0,05 и 0,15 *м*, находятся на расстоянии 2,40 *м* друг от друга. Первому шару сообщен заряд $^4/_3 \cdot 10^{-8}$ *к*, второму — заряд $-4 \cdot 10^{-8}$ *к*. Определите потенциал в центре шаров и в середине линии, соединяющей их центры.

11.23. Внутри шарового металлического слоя, внутренний и внешний радиусы которого соответственно равны r и R, на расстоянии x от центра находится точечный заряд q. Чему равен потенциал в центре слоя? Как изменится этот потенциал, если слой заземлить?

11.24. Две проводящие концентрические сетки радиусом R и r имеют заряды соответственно Q и q. Пространство между сетками заполнено средой с проницаемостью ε. а) Определите напряженность и потенциал поля как функцию расстояния x, отсчитываемого от центра сфер, и постройте соответствующие графики; б) найдите вид функций $E(x)$ и $\varphi(x)$ при условии, что заземлили внешнюю (внутреннюю) сетку; в) какой заряд перейдет с одной сетки на другую, если их соединить между собой проводником?

11.25. Проводящий шар радиусом a имеет заряд q. а) Каков будет потенциал в центре шара, если на расстоянии $3a$ от центра шара поместить точечный заряд q? б) Какова напряженность поля на поверхности шара в точке, наиболее близкой к точечному заряду? в) С какой силой взаимодействуют шар и точечный заряд?

11.26. Кольцо диаметром 10 *см* из тонкой проволоки равномерно заряжено зарядом $^5/_3 \cdot 10^{-8}$ *к*. Определите напряженность и потенциал поля в центре кольца и в точке, лежащей на его оси на расстоянии 5 *см* от центра. Каковы будут напряженность и потенциал в этих точках, если вырезать четверть кольца, оставив линейную плотность неизменной?

11.27. Четыре одинаковых проводящих шара радиусом r каждый расположены в вершинах тетраэдра с ребром $a \gg r$. Одному из шаров сообщили заряд q и затем его на некоторое время поочередно соединяли с каждым из незаряженных шаров. Чему равно изменение потенциальной энергии системы после перераспределения зарядов? Какой станет энергия системы, если после перераспределения зарядов первый шар заземлить? Объясните, за счет чего произошло увеличение (уменьшение) энергии в обоих случаях.

11.28. Восемь бусинок, имеющих заряд q и массу m, находятся в вершинах куба с ребром l. Какова будет максимальная скорость бусинок, если их предоставить самим себе?

11.29. Две частицы, имеющие массу m и заряд q, летят из бесконечности навстречу друг другу со скоростями v_1 и $v_2 > v_1$. На какое минимальное расстояние x сблизятся частицы и как они будут двигаться после этого?

11.30. Между пластинами *1* и *2* конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения U, на расстоянии l от второй пластины находится сетка C. Пластина *2* испускает электроны с начальными скоростями v. Какое напряжение необходимо приложить между сеткой и пластиной *2*, чтобы электроны не долетали до пластины *1*? Расстояние между пластинами конденсатора d, заряд электрона и его масса известны.

11.31. Катод и анод двухэлектродной лампы выполнены в виде плоского конденсатора и расположены вертикально в поле тяжести. Катод испускает электроны с ничтожно малыми начальными скоростями. Определите вертикальное смещение электронов и расстояние, которое они пролетают за время движения между электродами, если расстояние между электродами равно d, напряжение между катодом и анодом U, отношение заряда электрона к его массе γ.

11.32. Электроны в осциллографе, проходя разность потенциалов 600 *в*, разгоняются и влетают в середину плоского конденсатора параллельно его пластинам. К пластинам приложено напряжение 60 *в*; длина их 4 *см*, расстояние между ними 1 *см*. Определите величину отклонения светового пятна на экране, если расстояние между точкой выхода электронов из конденсатора и экраном осциллографа равно 10 *см*. При каком минимальном напряжении на пластинах электроны не будут вылетать из конденсатора?

11.33. Диэлектрик плоского конденсатора состоит из слоя слюды толщиной 1 *мм* и слоя парафина толщиной 2 *мм*. Определите напряженность поля в каждом слое диэлектрика и разность потенциалов на них, если к конденсатору приложено напряжение 700 *в*. Диэлектрическая проницаемость слюды равна 6, парафина 2.

11.34. Шар наэлектризован так, что поверхностная плотность заряда равна σ. На расстоянии l от поверхности шара потенциал поля равен φ. Какова емкость шара?

11.35. Найдите емкость конденсатора, состоящего из двух шариков радиусом r, находящихся в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между центрами шаров $R \gg r$. При решении считать, что заряды на поверхности шаров распределены равномерно.

11.36. Два металлических шара радиусами 6 и 3 *см* соединены тонкой проволокой. Шары заряжены до потенциала 1500 *в*. Как распределяются заряды на шарах, если: 1) первый шар наполовину погрузить в керосин; 2) в керосин погрузить оба шара наполовину; 3) в керосин погрузить оба шара полностью; 4) один шар погрузить в керосин, второй оставить в воздухе? Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2,1.

11.37. Определите емкость сферы радиусом $r = 10$ *см*, окруженной концентрической сферой радиусом $R = 15$ *см*. Каков будет потенциал первой сферы, если на нее поместить заряд $q = 2 \cdot 10^{-7}$ *к*, а поверхность второй сферы заземлить? Пространство между сферами заполнено парафином. Диэлектрическая проницаемость парафина 2,1.

11.38. Металлический шар радиусом r, на котором находится заряд q, окружен сферической сеткой радиусом R, соединенной с землей. Внутренний шар испускает электроны с ничтожно малыми начальными скоростями, которые летят в направлении сетки. Зная отношение заряда электрона к его массе γ, определите скорость электронов, вылетевших за пределы сетки.

11.39. N шаровых капель радиусом r заряжены до одинакового потенциала φ. Все капли соединяются в одну большую. Определите потенциал, плотность заряда на поверхности большой капли и изменение электрической энергии.

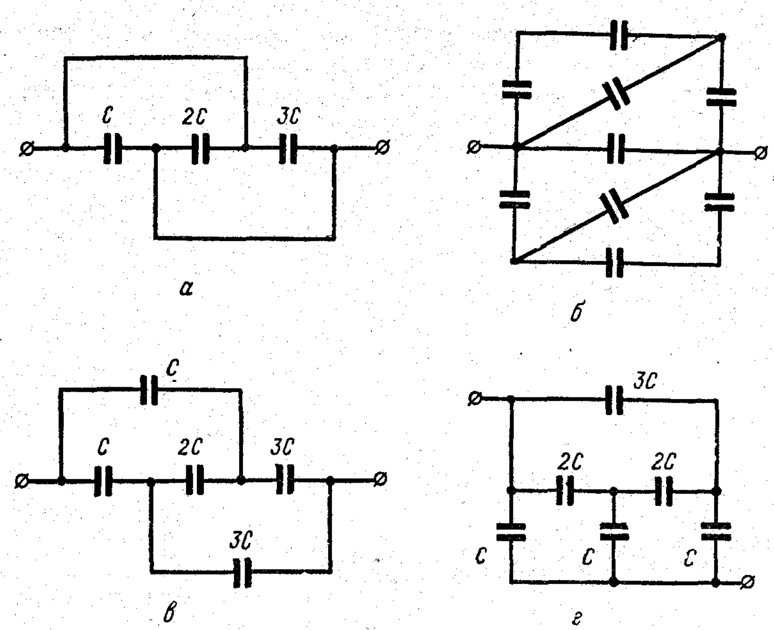


Рис. 11.11.

11.40. Шар радиусом 60 *см*, заряженный до потенциала 150 *в*, соединен тонкой проволокой с шаром, имевшим заряд $3 \cdot 10^{-8}$ *к* и обладающим электрической энергией 180 *эрг*, и с незаряженным шаром емкостью 5 *пкф*. Определите потенциал шаров, изменение заряда на каждом шаре и изменение их общей энергии после соединения.

11.41. К пластинам конденсатора, каждая из которых имеет площадь 100 $см^2$, приложена разность потенциалов 280 *в*. Напряженность поля в конденсаторе 560 *в/см*. Определите поверхностную плотность заряда, емкость конденсатора, его энергию и силу притяжения пластин.

11.42. Секундный математический маятник, состоящий из непроводящей нити и металлического шарика массой m, совершает колебания с периодом T_1 в поле заряженного плоского конденсатора емкостью C. Определите заряд шарика, если известны заряд конденсатора Q и расстояние между его пластинами d. Задачу решите для (а) горизонтального и (б) вертикального расположения пластин конденсатора.

11.43. Конденсаторы соединили так, как показано на рисунке 11.11, *а*, *б*, *в*, *г*. Чему равна емкость батареи? Емкость каждого конденсатора в схеме *б* равна C.

11.44. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый включены в ребра проволочного каркаса, имеющего форму октаэдра. Какова будет емкость системы, если ее подключить к источнику напряжения вершинами октаэдра, лежащими на ее оси симметрии? Емкостью соединительных проводов пренебречь. Решите задачу при условии, что конденсаторы включены в ребра тетраэдра, куба. Рассмотрите все возможные случаи подключения этих каркасов в цепь.

11.45. Плоский конденсатор с площадью каждой пластины S и расстоянием между пластинами d подключен к источнику постоянного напряжения U. Как изменится заряд на конденсаторе, если в него ввести пластинку толщиной $2/3\, d$ с диэлектрической проницаемостью ε?

11.46. Конденсатор, имеющий заряд q, площадь каждой пластины S и расстояние между пластинами d, погружают в керосин на 2/3 его объема. Каково будет напряжение на погруженном конденсаторе?

11.47. Два конденсатора емкостью C_1 и C_2 подключили к источнику постоянного напряжения и затем отключили. Электростатическим вольтметром измерили напряжение сначала на первом конденсаторе, затем на втором. Оно оказалось равным соответственно U_1 и U_2. а) Каково было начальное напряжение на конденсаторах? б) Чему равна емкость вольтметра?

11.48. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику с постоянной э.д.с. Во сколько раз изменится напряженность поля в одном из конденсаторов, если в другой внести пластинку с проницаемостью ε так, чтобы диэлектрик заполнял все пространство между обкладками конденсатора?

11.49. Два плоских конденсатора с емкостями $2/3 \cdot 10^3$ и $5/3 \cdot 10^3$ *пф* с изолирующим слоем из прессшпана толщиной 2 *мм*, соединенные последовательно, пробиваются при напряжении 5,6 *кв*. Определите напряженность поля, при которой происходит пробой прессшпана.

11.50. Конденсатор емкостью C подключен к батарее с э.д.с. $\mathscr{E}$. Вплотную с одной из обкладок конденсатора расположена тонкая металлическая пластинка. Какими станут заряды на обкладках конденсатора, если пластинку сдвинуть параллельно обкладкам в середину конденсатора, не снимая с нее заряда?

11.51. Три плоских конденсатора емкостью C, $2C$, $3C$ заряжены до разности потенциалов U, $2U$, $3U$ соответственно. Конденсаторы соединили последовательно разноименно заряженными пластинками. Определите заряды на конденсаторах.

11.52. Два плоских конденсатора емкостью C_1 и C_2 соединили последовательно, наложили на них разность потенциалов U и отключили от источника. Какой будет разность потенциалов между пластинами конденсаторов, если их пересоединить параллельно? Какая энергия выделится при перезарядке конденсаторов? Решите задачу при условии, что конденсаторы подключались к источнику порознь и затем соединялись между собой: а) одноименно заряженными пластинами; б) разноименно заряженными.

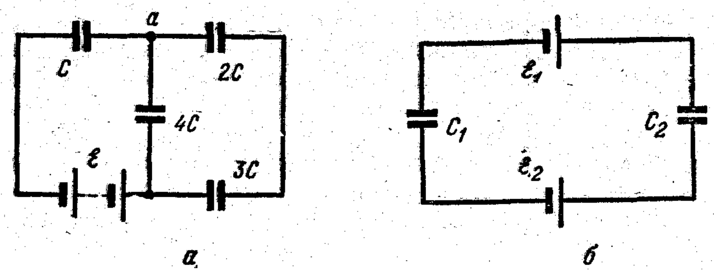


Рис. 11.12.

11.53. В схемах, изображенных на рисунке 11. 12, *а*, *б*, найдите заряд на конденсаторах.

11.54. Какой заряд пройдет через сечения *1*, *2* в схемах, представленных на рисунке 11.13, *а*, *б*, если батарею конденсаторов отключить от источника э.д.с. $\mathscr{E}$ и затем замкнуть ключ K_2? Если замкнуть ключ K в схеме рисунка 11.13, *в*, *г*?

11.55. Как изменится заряд на конденсаторах C_1 и C_2 в схеме, показанной на рисунке 11.14, при включении между точками A и B конденсатора емкостью C? $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$; $C_1 = \frac{1}{2}C_2 = \frac{1}{3}C$.

11.56. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с э.д.с. $\mathscr{E}$, состоит из двух пластин, находящихся друг от друга на расстоянии $2d$. Площадь каждой пластины S. Конденсатор опускают в металлическую коробку с жидким диэлектриком проницаемостью ε. Пластины конденсатора параллельны стенкам коробки и отстоят от них на расстоянии, равном d и $3d$ (рис. 11.15, слева). Определите заряд, прошедший через источник при погружении конденсатора. Решите задачу при условии, что в коробку опущена одна пластина (рис. 11.15, справа).

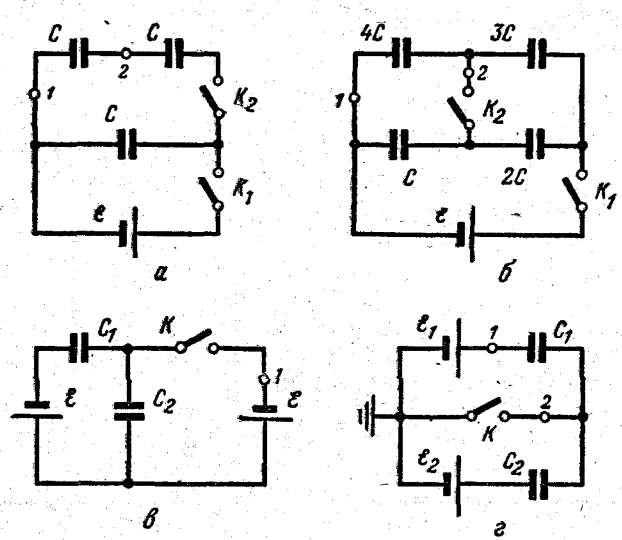


Рис. 11.13.

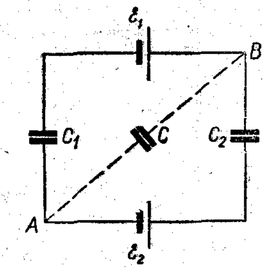


Рис. 11.14.

11.57. Верхняя пластина плоского конденсатора площадью S висит на пружине, жесткость которой k. Какую разность потенциалов нужно приложить к пластинам конденсатора, чтобы они сблизились до расстояния d_1? Начальное расстояние между пластинами равно d_0.

11.58. Тонкая стеклянная пластинка пробивается при напряженности поля $E = 5000$ *кв/см*. Какое давление испытывает пластинка перед пробоем? Чему равна плотность связанных зарядов, находящихся на поверхности диэлектрика, перед пробоем? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

11.59. Две прямоугольные металлические пластинки длиной a и шириной b расположены параллельно друг другу на расстоянии d. Пластинки подключили к источнику постоянного напряжения с э.д.с. $\mathscr{E}$ и затем отключили. В пространство между пластинками вставлен диэлектрик с электрической проницаемостью ε_1, как показано на рисунке 11.16. Определите результирующую силу, действующую на диэлектрик со стороны поля в зависимости от расстояния x. Решите задачу при условии, что конденсатор не отключен от источника напряжения.

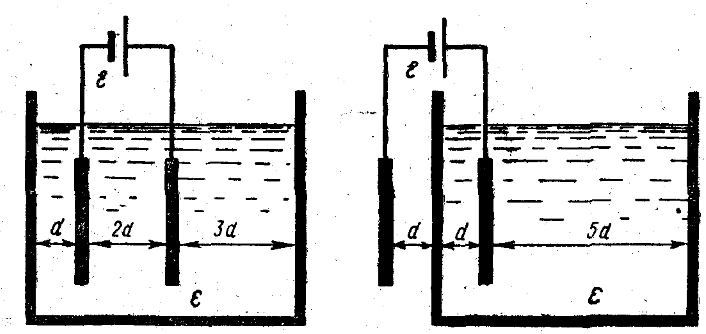


Рис. 11.15.

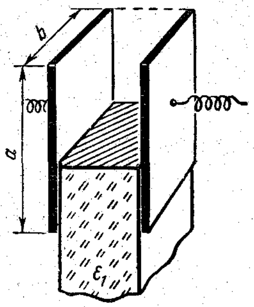


Рис. 11.16.

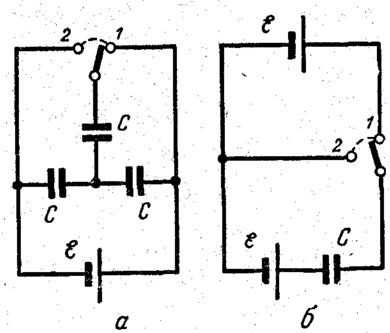


Рис. 11.17.

11.60. Какое количество теплоты выделится в цепи, изображенной на рисунке 11.17, при переключении ключа из положения *1* в положение *2*?

11.61. Расстояние между пластинами плоского конденсатора, присоединенного к полюсам батареи с э.д.с. $\mathscr{E} = 180$ *в*, увеличивают с $d_1 = 5$*мм* до $d_2 = 12$ *мм*. Площадь пластин конденсатора $S = 174$ *см*^{2}. Какая работа произведена при этом против сил поля?

11.62. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых пластин площадью $S = 625$ *см*^{2}, подключенных к источнику постоянного напряжения так, что их потенциалы относительно земли все время равны $\varphi_1 = +5$ *кв* и $\varphi_2 = -5$ *кв*. Расстояние между пластинами $d = 25$ *мм*. Посредине между обкладками конденсатора параллельно им устанавливают тонкую металлическую пластинку, соединенную с землей. Какую работу нужно совершить, чтобы передвинуть эту пластинку на расстояние $x = 5$ *мм* к одной из обкладок?

11.63. Вычислите энергию слоистого конденсатора, рассмотренного в задаче 11.33, если площадь его обкладок будет равна 100 *см*^{2}.

11.64. Маленький шарик, масса которого ничтожно мала, имеет заряд q и находится на расстоянии R от очень большой проводящей пластины. Какую силу нужно приложить к шарику, чтобы он находился в равновесии? Чему равны напряженность и потенциал электрического поля в точках, лежащих на перпендикуляре, проведенном через шарик к поверхности пластины, и удаленных от шарика на расстояние R? Какова напряженность и потенциал поля в точках на поверхности пластины, удаленных от основания перпендикуляра на расстояние R?

11.65. Заряд q расположен на высоте h над проводящей плоскостью. Какую работу нужно совершить против сил поля, чтобы удалить этот заряд в бесконечность?

11.66. Определите емкость шара радиусом R, находящегося на расстоянии H от поверхности земли, при условии, что $H \gg R$.

Глава 12. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Основные понятия, законы и формулы

1. Среднюю силу электрического тока определяют по формуле:

$$I = \frac{q}{t}, \tag{12.1}$$

где q — заряд, прошедший через данное сечение за время t. Плотность тока, проходящего через проводник с площадью поперечного сечения S, равна:

$$j = \frac{I}{S}. \tag{12.2}$$

При равномерном движении потока заряженных частиц со скоростью v плотность тока

$$j = nqv,$$

где n — концентрация заряженных частиц в потоке; q — заряд одной частицы.

2. Если на участке цепи, не содержащем э.д.с. и имеющем сопротивление R, поддерживать постоянную разность потенциалов (напряжение) $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, то согласно закону Ома по участку течет ток

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \tag{12.3}$$

За направление тока принимают направление движения положительных зарядов, отрицательные заряды движутся навстречу току.

Сопротивление однородного проводника длиной l с постоянным сечением S равно:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \tag{12.4}$$

где ρ — удельное сопротивление материала.

Для большинства металлов вблизи 0 °С существует температурный интервал, в пределах которого

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \tag{12.5}$$

где ρ — удельное сопротивление при температуре t; ρ_0 — при 0 °С; α — термический коэффициент сопротивления.

3. При последовательном соединении проводников конец предыдущего проводника соединяется с началом последующего и между проводниками ток не разветвляется.

Если n проводников сопротивлением $R_1, R_2, \ldots, R_n$ соединены между собой последовательно, то через проводники течет одинаковый ток и напряжение U_0 на концах соединения равно сумме напряжений на отдельных проводниках:

$$\left.\begin{aligned} &I_0 = I_1 = I_2 = \ldots = I_n, \\ &U_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.6)$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома для всего участка и для отдельных сопротивлений, мы получим исходную систему уравнений для расчета последовательной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что общее сопротивление проводников, соединенных последовательно, равно:

$$R_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i. \qquad (12.6')$$

Если начала проводников соединены в одной точке (узле), а концы в другой, соединение проводников называют параллельным. При параллельном соединении

$$\left.\begin{aligned} &U_0 = U_1 = U_2 = \ldots = U_n, \\ &I_0 = I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома для всего участка и для каждого сопротивления, мы получим исходную систему уравнений для расчета параллельной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что величина, обратная общему сопротивлению при параллельном соединении проводников, равна сумме обратных величин их сопротивлений:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \qquad (12.7')$$

При параллельном соединении n проводников с одинаковым сопротивлением R_1 их общее сопротивление равно:

$$R_0 = \frac{R_1}{n}. \qquad (12.7'')$$

4. Если шкала амперметра содержит α_0 одинаковых делений и рассчитана на максимальный ток I_0, то при отклонении стрелки амперметра на α делений через него проходит ток

$$I = \frac{I_0}{\alpha_0}\alpha = C_I\alpha, \qquad (12.8)$$

где C_I — цена одного деления.

Чтобы расширить пределы измерения тока в n раз и измерять токи до значений $I > I_0$, параллельно амперметру нужно присоединить шунт с сопротивлением

$$R_ш = \frac{I_0 R_0}{I - I_0} = \frac{R_0}{n-1}, \qquad (12.9)$$

где R_0 — внутреннее сопротивление прибора.

Показание магнитоэлектрического вольтметра равно падению напряжения на сопротивлении прибора:

$$U_V = I_V R_V,$$

и в то же время

$$U_V = \frac{U_0}{\alpha_0}\alpha = C_V\alpha, \qquad (12.10)$$

где U_0 — напряжение на зажимах прибора, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу; C_V — цена деления шкалы вольтметра.

Чтобы расширить пределы измерения напряжения в n раз и измерять напряжения до значений $U > U_0$, последовательно вольтметру нужно присоединить добавочное сопротивление

$$R_д = \frac{(U - U_0) R_0}{U_0} = (n-1) R_0, \qquad (12.11)$$

где R_0 — внутреннее сопротивление вольтметра.

5. В замкнутой цепи, состоящей из сопротивления R и элемента с э.д.с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, течет ток

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \qquad (12.12)$$

Э.д.с. приписывают направление, совпадающее с направлением действия сторонних (неэлектрических) сил, действующих на свободные заряды внутри источника — от отрицательного к положительному полюсу элемента.

Напряжение на зажимах источника, замкнутого внешним сопротивлением R, равно:

$$U = IR = \frac{\mathscr{E}R}{R + r} = \mathscr{E} - Ir. \qquad (12.13)$$

Если $R = 0$, точнее, $R \ll r$ (случай короткого замыкания), то ток короткого замыкания и напряжение на зажимах источника равны:

$$I_{к.з} = \frac{\mathscr{E}}{r}; \; U = 0.$$

Если $R = \infty$, точнее, $R \gg r$ (цепь разорвана), то

$$I = 0; \quad U = \mathscr{E}.$$

6. При последовательном соединении нескольких источников тока э.д.с. всей батареи равна алгебраической сумме э.д.с. отдельных источников:

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathscr{E}_i.$$

Внутреннее сопротивление батареи

$$r_0 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Э.д.с. источников, которые сами создавали бы ток того же направления, что и ток, идущий в цепи, берут со знаком «плюс», э.д.с. источников, которые давали бы ток противоположного направления, считают отрицательными.

Если источники с э.д.с. $\mathscr{E}_i$ и внутренним сопротивлением r_i соединены между собой последовательно и замкнуты на сопротивление R, то в цепи идет ток

$$I = \frac{\sum \mathscr{E}_i}{R + \sum r_i}. \qquad (12.14)$$

При последовательном соединении одинаковых источников разноименными полюсами ток в цепи

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + nr_1} = \frac{\mathscr{E}_1}{\frac{R}{n} + r_1}, \qquad (12.14')$$

где $\mathscr{E}_1$ и r_1 — соответственно э.д.с. и внутреннее сопротивление одного элемента; n — число элементов.

Из формул (12.13) и (12.14) вытекает, что напряжение на неразветвленном участке цепи, содержащем э.д.с., равно:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_{\text{уч}} \mp I_{\text{уч}}\, r_{\text{уч}}, \qquad (12.15)$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы начала и конца участка в направлении тока; $\mathscr{E}_{\text{уч}}$ — общая э.д.с. участка; $I_{\text{уч}}$ и $r_{\text{уч}}$ — сила тока и полное сопротивление участка.

В формуле (12.15) предполагается, что э.д.с. направлена от φ_2 к φ_1, т. е. начало и конец участка примыкают соответственно к положительному и отрицательному полюсу источника.

Знак «минус» перед $I_{\text{уч}}$ берется в тех случаях, когда ток по участку течет от φ_2 к φ_1 (внутри источника от отрицательного полюса к положительному), знак «плюс», когда ток идет от φ_1 к φ_2 (внутри источника от положительного полюса к отрицательному). Последнее возможно при условии, что на других участках данной цепи содержатся э.д.с., включенные навстречу э.д.с. рассматриваемого участка.

При параллельном соединении нескольких источников тока батарею аккумуляторов можно заменить одним источником, кото-

рый будет создавать во внешней цепи сопротивлением R такой же ток, как и данная батарея. Внутреннее сопротивление $r_э$ и э.д.с. $\mathscr{E}_э$ эквивалентного элемента можно найти из формул:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_э} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}, \\ \frac{\mathscr{E}_э}{r_э} &= \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2} + \ldots + \frac{\mathscr{E}_n}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathscr{E}_i}{r_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

При составлении алгебраической суммы (12.16) правило знаков перед $\mathscr{E}_i$ сохраняется таким же, как и в случае последовательного соединения элементов.

Согласно закону Ома ток во внешнем сопротивлении R при параллельном соединении источников равен:

$$I = \frac{\mathscr{E}_э}{R + r_э}.$$

При параллельном соединении n одинаковых источников одноименными полюсами сила тока во внешней цепи равна:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1}{R + \frac{r_1}{n}} = \frac{n\mathscr{E}_1}{nR + r_1}. \qquad (12.17)$$

Если из n одинаковых элементов с э.д.с. $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 составить m групп, соединенных между собой последовательно, и в каждую группу включить k источников, соединенных параллельно одноименными полюсами, то при подключении к батарее сопротивления R через него пойдет ток:

$$I = \frac{m\mathscr{E}_1}{R + \frac{m}{k} r_1} = \frac{\mathscr{E}_1}{\frac{R}{m} + \frac{mr_1}{n}}, \qquad (12.18)$$

поскольку $n = km$.

Добавляя к знаменателю последнего равенства и вычитая из него выражение $2\sqrt{\frac{r_1 R}{n}}$, знаменатель можно привести к виду

$$\left(\sqrt{\frac{m}{n} r_1} - \sqrt{\frac{R}{m}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{r_1 R}{n}},$$

откуда следует, что при $m^2 r_1 = nR$ ($mr_1 = kR$) он имеет наименьшее значение и, значит, в цепи идет максимальный ток:

$$I_{\text{макс}} = \frac{m\mathscr{E}_1}{2R} = \frac{k\mathscr{E}_1}{2r_1}. \qquad (12.18')$$

7. При прохождении заряда q по участку цепи электрическое поле совершает над зарядом работу

$$A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t. \qquad (12.19)$$

Первые две формулы справедливы для любого участка цепи, на концах которого поддерживается разность потенциалов U, последние две — если на участке нет э.д.с.

Работа тока за единицу времени — мощность тока — в этом случае равна:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \qquad (12.20)$$

Если источник с э.д.с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на сопротивление R, то полная мощность, развиваемая источником, равна:

$$P_0 = I\mathscr{E} = I^2(R + r) = \frac{\mathscr{E}^2}{R + r}. \qquad (12.21)$$

На внешнем сопротивлении при этом выделяется мощность

$$P = IU = \frac{U^2}{R} = I\mathscr{E} - I^2r = \frac{\mathscr{E}^2R}{(R + r)^2}, \qquad (12.22)$$

где I — ток в цепи; U — напряжение на зажимах источника.

Как видно из третьего уравнения (12.22) и графика зависимости $P = f(I)$ (рис. 12.1), при токах $I_1 = 0$ и $I_2 = \frac{\mathscr{E}}{r}$ мощность во внешней цепи не выделяется ($P = 0$); при токе $I = \frac{\mathscr{E}}{2r}$ она имеет наибольшее значение, равное $P_{\text{макс}} = \frac{\mathscr{E}}{4r}$. Согласно закону Ома для полной цепи ток, соответствующий максимальной мощности во внешней цепи, идет в том случае, когда $R = r$.

Коэффициент полезного действия источника тока равен:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{U}{\mathscr{E}} = \frac{R}{R + r}. \qquad (12.23)$$

8. При прохождении тока I по участку цепи с сопротивлением R в нем за время t выделяется количество теплоты

$$Q = I^2Rt \text{ (закон Джоуля — Ленца)}. \qquad (12.24)$$

Если участок цепи не содержит источников тока, то количество теплоты, выделяющееся на этом участке, можно определять по формулам:

$$Q = IUt \quad \text{и} \quad Q = \frac{U^2}{R}t, \qquad (12.25)$$

где U — напряжение, подводимое к участку.

9. В общем случае при движении электрических зарядов по замкнутой цепи за счет мощности, развиваемой источником, про-

исходит нагревание проводников, совершается механическая работа (сближение пластинок конденсатора, движение проводников в магнитном поле и т.д.), осуществляются химические реакции, сопутствующие току в жидкостях:

$$I\mathscr{E} = I^2R + N_{\text{мех}} + N_x. \qquad (12.26)$$

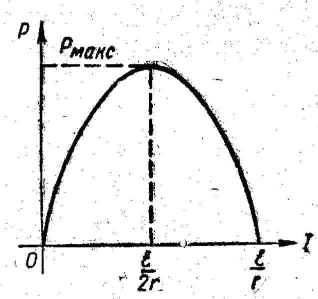


Рис. 12.1.

10. Явление выделения составных частей растворенных в жидкости веществ при прохождении через нее электрического тока называют электролизом. Растворы, проводящие ток, называют электролитами.

Если за время t через электролит прошел заряд q и к каждому электроду подошло N ионов массой m_1, то на катоде откладывается вещество массой

$$m = Nm_1.$$

Масса иона равна:

$$m_1 = \frac{A}{N_A},$$

где A — килоатомная масса; N_A — число Авогадро.

Число ионов

$$N = \frac{q}{q_{\text{и}}} = \frac{q}{ne},$$

где $q_{\text{и}}$ — заряд иона; n — валентность вещества; e — заряд электрона. Учитывая все это, получим:

$$m = \frac{Aq}{eN_A n}. \qquad (12.27)$$

Постоянное для всех веществ произведение $eN_A = F$ называют числом Фарадея, постоянные для данного вещества отношения

$$\frac{A}{n} = x \quad \text{и} \quad \frac{A}{Fn} = k$$

называют соответственно химическим и электрохимическим эквивалентами вещества. Связь между этими константами дает формула:

$$k = \frac{1}{F}x \quad \text{(второй закон Фарадея)}. \qquad (12.27')$$

Учитывая это, формулу (12.27) можно переписать в виде:

$$m = \frac{A}{nF}q = kq = kIt \quad \text{(первый закон Фарадея)}, \qquad (12.27'')$$

где I — сила тока в электролите.

При вычислении массы осевшего на катоде вещества в формулу (12.27″) подставляют полный ток в электролите, равный сумме токов положительных и отрицательных ионов. Объясняется это тем, что перемещение отрицательных зарядов к аноду эквивалентно току положительных зарядов к катоду, поскольку в целом электролит нейтрален. Если от катода к аноду ежесекундно уходит N отрицательных зарядов, то при этом у катода остается такое же количество положительных ионов, которые вместе с прибывшими за это время положительными ионами оседают на катоде. Результат получается такой, как если бы к катоду шел только ток, равный удвоенному току положительных ионов. Он и равен суммарному току в электролите.

Решение задач. Примеры

1. Задачи о движении электрических зарядов по проводникам и о явлениях, связанных с этим движением, удобно разделить на три типа: задачи на вычисление сопротивлений, токов или напряжений на каком-либо участке цепи; задачи на работу, мощность и тепловое действие тока и задачи на электролиз. Из задач первого типа можно выделить вспомогательную группу — задачи на вычисление сопротивлений отдельных проводников и различных соединений из них. С этой вспомогательной группы задач мы и начнем разбор.

2. Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, или приводятся сведения о его геометрических размерах или массе, то для нахождения неизвестной величины, от которой зависит сопротивление проводника, нужно воспользоваться формулой сопротивления и соотношением между массой, плотностью и объемом проводника. Следует при этом иметь в виду, что, пользуясь представлениями электронной теории, удельное сопротивление можно выразить через величины, характеризующие свойства и движение элементарных зарядов.

Задачи о температурной зависимости сопротивлений, как правило, не представляют большой трудности, их легко решать с помощью уравнений (12.4), (12.5) и тех указаний, которые были сделаны к задачам о линейном расширении тел.

При вычислении общего сопротивления какого-либо контура, составленного из нескольких проводников, необходимо прежде всего установить, есть ли в нем проводники, соединенные между собой последовательно или параллельно, или в схеме таких подключений нет.

В первом случае решение задачи основано на использовании формул (12.6) и (12.7), во втором — нужно применять другие методы расчета, в которых формулы сопротивления играют уже не главную, а вспомогательную роль.

Решение задач на вычисление сопротивлений сложных соединений нужно начинать с анализа схемы и отыскания в ней каких-нибудь двух проводников, соединенных друг с другом последовательно или параллельно. При этом все время надо следить за тем,

чтобы в случае последовательного соединения ток между проводниками не разветвлялся, а в случае параллельного — их концы соединялись непосредственно. Если в схеме удается найти такие проводники, их следует заменить одним эквивалентным сопротивлением, используя формулы (12.6) и (12.7), и получить упрощенную схему. В схемах, представляющих собой комбинацию последовательно и параллельно включенных проводников, этот прием нужно применять несколько раз и таким образом найти общее сопротивление.

Если в схеме не окажется ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, для вычисления общего сопротивления используют следующие два свойства электрической цепи:

1°. Во всякой электрической цепи точки с одинаковым потенциалом можно соединить и разъединить. Режим тока от этого не нарушается, поскольку ток между такими точками не идет.

2°. Работа по перемещению единичного заряда из одной точки однородной цепи в другую не зависит от сопротивлений проводников, по которым проходит заряд, а определяется только разностью потенциалов между этими точками.

Иными словами, какой бы мы ни выбрали путь движения заряда по однородной цепи, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках этой цепи равна разности потенциалов между начальной и конечной точками:

$$\sum U_i = \sum R_i I_i = U_0,$$

где I_i и R_i — токи и сопротивления отдельных участков. Следует при этом помнить, что такое утверждение справедливо лишь в тех случаях, когда на заряды действуют только электрические силы и на участках нет э.д.с.

Установив, что в схеме нет последовательно и параллельно соединенных проводников, нужно попытаться найти точки с одинаковыми потенциалами. Точки с одинаковым потенциалом всегда есть в схемах, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек подключения источника питания. Здесь можно различать два случая.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), проходящей через точки входа и выхода тока (имеется продольная плоскость симметрии), то точки одного потенциала находятся на концах симметричных сопротивлений, поскольку по ним идут одинаковые токи.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), перпендикулярной линии, на которой лежат точки входа и выхода тока — в схеме имеется поперечная ось (плоскость) симметрии, то одинаковым потенциалом обладают все точки, лежащие на пересечении этой оси (плоскости) с проводниками. Это почти очевидное обстоятельство вытекает из того, что работа электрических сил над зарядами не зависит от формы пути.

Найдя в схемах точки с одинаковым потенциалом, нужно соединить их (если они были разъединены) или разъединить (если точки были соединены), после чего мы получим эквивалентную схему, составленную из последовательно и параллельно соединенных сопротивлений.

В общем случае, когда нет точек с равным потенциалом, обычно поступают так. Проставляют токи на каждом сопротивлении и указывают их предполагаемое направление. Обозначив затем через I_0 суммарный ток, проходящий через данный контур (он равен току, подходящему к контуру), составляют уравнение токов для каждой точки разветвления (узла): сумма токов, подходящих к узлу, должна равняться сумме токов, исходящих из узла. Затем выбирают все возможные пути прохождения заряда между точками подключения контура и составляют для каждого из них уравнение падения напряжения вида:

$$I_0R_0 = I_1R_1 + I_2R_2 + \ldots + I_n R_n,$$

где R_0 — общее сопротивление всего контура, которое требуется найти. Эти уравнения составляются на основании того, что падение напряжения I_0R_0 на всем контуре равно алгебраической сумме падений напряжения на отдельных сопротивлениях, замыкающих цепь. Если оказывается, что по какому-либо проводнику, входящему в рассматриваемую часть цепи, ток идет в направлении, противоположном начальному току участка, то падение напряжения на этом проводнике берут со знаком «минус»; в остальных случаях — со знаком «плюс». Так как неизвестным является сопротивление R_0, то число уравнений токов и напряжений должно быть на одно больше числа токов, введенных в решение. Исключая из этих уравнений все токи, находят R_0.

3. При решении задач на определение силы тока, напряжения или сопротивления на каком-либо участке цепи надо:

а) Начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, сопротивления и конденсаторы.

б) Установить, если схема дана в готовом виде, какие элементы цепи включены последовательно, какие — параллельно.

в) Расставить токи и напряжения на каждом участке цепи и записать для каждой точки разветвления (если они есть) уравнения токов и уравнения, связывающие напряжения на участках цепи. При составлении таких уравнений для схем, в которых нет ни последовательных, ни параллельных соединений, следует руководствоваться указаниями п. 2.

г) Используя закон Ома (или формулу для напряжения на участке, содержащем э.д.с.), установить связь между токами, напряжениями и э.д.с. В результате получится система уравнений, полностью отражающая условия задачи и позволяющая определить искомую величину. Если в схеме делают какие-либо переключения сопротивлений или источников, уравнения составляют для каждого режима работы цепи.

При расчетах шунтов или добавочных сопротивлений к гальванометру можно использовать готовые формулы (12.9) и (12.11).

д) Составляя зависимости между заданными и искомыми величинами, характеризующими элементы цепи и режим ее работы, нужно стараться не вводить в решение дополнительные величины, которые не даны и которые не требуется находить по условию задачи. Решение большинства задач на ток построено на применении закона Ома. Этот закон можно записать в обычном, наиболее распространенном виде $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ и в форме $U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$. В общем случае эти выражения не эквивалентны друг другу, второе из них имеет известное ограничение — оно справедливо, если на участке нет э.д.с. Тем не менее очень часто расчеты значительно сокращаются, если использовать именно вторую формулу, а не первую. Обычно, когда составляют простую цепь, то известными являются элементы цепи: э.д.с. и сопротивления, и требуется найти на каком-либо участке ток или напряжение. При некотором навыке вторая из указанных формул позволяет легко и быстро находить напряжение на отдельных участках цепи, не используя токи. Для этого нужно все сопротивления или их группы, соединенные последовательно с сопротивлением рассматриваемого участка $R_{уч}$, внести во внутреннее сопротивление источника и считать его равным не r, а $r + R_0$, где R_0 — общее сопротивление внешней цепи без сопротивления $R_{уч}$. Нетрудно заметить, что после этого участок, на котором требуется найти напряжение, оказывается подключенным к зажимам источника и согласно формуле (12.13) напряжение на нем будет равно:

$$U_{уч} = \frac{\mathcal{E}R_{уч}}{R_{уч} + r + R_0}.$$

Зная напряжение на участке, можно найти и ток в нем по закону Ома для участка цепи.

е) Большие затруднения у учащихся вызывают задачи на расчет цепей, содержащих несколько источников тока, соединенных между собой последовательно или параллельно.

В первом случае можно рекомендовать такую последовательность действий. Найти общую э.д.с. контура $\mathcal{E}_0$ (первая формула п. 6), найти общее сопротивление контура, найти ток в контуре I_0 по формуле (12.14) (он будет одинаковый на всех участках) и затем применить для рассматриваемого участка формулу разности потенциалов (12.15).

Во втором случае удобно поступать так. Расставить токи, протекающие через элементы цепи (иногда направление токов можно предвидеть заранее; если же этого сделать не удается, то их направление ставится наугад), записать уравнение токов для узлов и после этого использовать формулу (12.15) для параллельных ветвей, содержащих э.д.с. Так как ветви соединены параллельно, напряжение на них будет одинаковым. Чаще всего этими уравнениями условия задачи математически исчерпываются полностью.

При расчетах тока или напряжения на внешнем сопротивлении, подключенном к батарее параллельно соединенных аккумуляторов, можно использовать готовую формулу (12.16) для эквивалентной э.д.с., если известно, как она выводится.

Указанная последовательность действий при решении всех задач рассматриваемой группы будет правильной всегда, но она не всегда обязательна. При достаточном навыке в решении задач многие промежуточные выкладки можно опускать и записывать лишь наиболее важные соотношения, которые нужны непосредственно для определения искомой величины.

4. Задачи на работу, мощность и тепловое действие тока в свою очередь можно разбить на три группы. К первой группе относятся задачи на расчет электрической цепи, аналогичные тем, что рассматривались выше. Для их решения составляют те же уравнения закона Ома, но к ним добавляют формулы мощности (12.19)—(12.22). Если по условию задачи даны значения мощности, выделяемой в проводниках, и требуется найти силу тока, напряжение или сопротивление проводников, то эти формулы играют вспомогательную роль. Если же значение мощности нужно определить, эти формулы можно рассматривать как основное расчетное соотношение и начинать решение с их составления.

Особое внимание здесь нужно обратить на выбор исходной формулы мощности. Анализируя условия задачи, необходимо прежде всего установить, идет ли речь о мощности, выделяемой на участке цепи (формулы 12.20), или о мощности, развиваемой источником — полной мощности в цепи (формулы 12.21), или же о мощности во внешней цепи источника (формулы 12.22). В каждом из этих случаев нужно, в свою очередь, обратить внимание на то, какие из величин даны и какие требуется найти, и подобрать соответствующее расчетное соотношение. В большинстве случаев удачное использование этих формул бывает достаточным для решения.

Решая задачи на мощность, выделяемую во внешней цепи, желательно помнить, что она будет максимальной, когда внешнее сопротивление цепи равно сопротивлению источника. Этим результатом можно пользоваться как готовым и значительно сократить вычисления.

Ко второй группе относятся задачи на тепловое действие тока. Основным расчетным соотношением в них является закон Джоуля—Ленца. Перед тем как приступать к составлению уравнений, необходимо установить, какую из формул (12.24) или (12.25) принять за исходную. Обе формулы можно применять в том случае, когда участок цепи не содержит источников тока; если же на участке имеются э.д.с., в качестве основной расчетной формулы надо взять формулу (12.24). Если в уравнении закона Джоуля—Ленца окажется два и более неизвестных, к нему нужно добавить формулы теплоты и сопротивления.

В задачах на сравнение количества теплоты, выделяемой в разных проводниках, при выборе исходных уравнений можно руководствоваться следующим.

Если при переходе от одного участка цепи к другому или при подключении и выключении сопротивлений сила тока в проводниках остается одинаковой, удобно брать формулу (12.24) и составлять уравнение закона Джоуля — Ленца для каждого участка. Если же при переходе от участка к участку или подключении сопротивлений одинаковым оказывается напряжение на проводниках, удобнее воспользоваться формулой (12.25).

На задачи третьей группы следует обратить особое внимание, хотя их сравнительно мало. Эту группу составляют задачи о превращении электрической энергии в механическую, тепловую и химическую при работе электромашины постоянного тока. Решение таких задач основано на применении уравнения закона сохранения и превращения энергии (12.26).

Проанализировав условия и установив, на каких участках цепи электрическая энергия превращается в теплоту и механическую энергию, необходимо записать исходное уравнение (12.26) для каждого режима работы цепи. В простейших случаях этого достаточно, в более сложных задачах к основному уравнению приходится добавлять формулы законов постоянного тока и механики.

5. Решение задач на электролиз всегда удобно начинать с составления уравнения обобщенного закона Фарадея (12.27″). В большинстве случаев все величины, входящие в это уравнение, кроме одной, заданы и нахождение неизвестного не представляет почти никакого труда. Если даны два вещества или более, уравнение (12.27″) составляют для каждого из них. Для решения более сложных задач нужно воспользоваться вспомогательными формулами для нахождения m, q или I и, используя уравнение закона Фарадея, составить формулу, в которую входили бы величины, связанные с электролизом, но не входящие в основное уравнение. Ими могут быть, например, толщина слоя металла, выделившегося на катоде, скорость роста этого слоя, расход электроэнергии на единицу массы получаемого металла, отношение заряда иона к его массе. Эти формулы нет надобности запоминать, но знать о их существовании необходимо. Они будут выведены при разборе задач.

Если в задаче рассматривается выделение газа при электролизе, то следует иметь в виду, что масса газа входит и в формулу закона Фарадея, и в уравнение состояния идеального газа Менделеева — Клапейрона и через нее можно установить связь между всеми остальными величинами, входящими в эти формулы.

Пример 1. Электрическая лампочка накаливания потребляет ток $I = 0{,}2$ *а*. Диаметр вольфрамового волоска $d = 0{,}02$ *мм*, температура волоска при горении лампы $t = 2000$ °С. Определите напряженность E электрического поля в волоске. Удельное сопротивление вольфрама $\rho_0 = 0{,}056 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*, термический коэффициент сопротивления $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ *град*$^{-1}$.

Р е ш е н и е. Для решения задачи нужно использовать закон Ома для участка цепи и формулу сопротивления. Особенность решения состоит в том, чтобы связать напряженность электрического поля внутри проводника с силой тока, сечением и удельным сопротивлением проводника.

Допустим, что по проводнику, имеющему длину l и сечение S, течет ток I, тогда напряжение на концах проводника $U = IR$.

Так как $E = \frac{U}{l}$ и $R = \rho\frac{l}{S}$, то, подставляя в закон Ома вместо U и R их выражения, получим:

$$E = \frac{I}{S}\rho.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что с увеличением температуры проводника при неизменной плотности тока напряженность поля в проводнике возрастает, поскольку с ростом температуры возрастает ρ.

Вспомогательным соотношением служит формула зависимости сопротивления от температуры, позволяющая определить удельное сопротивление ρ вольфрамового волоска в нагретом состоянии. При температуре накала t оно равно:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t).$$

Теперь формулу для напряженности электрического поля в раскаленном волоске можно окончательно переписать так:

$$E = \frac{I}{S}\rho_0(1 + \alpha t).$$

Подставляя сюда числовые значения, получим: $E \approx 360$ *в/м*.

Пример 2. Вычислите общее сопротивление цепи в схемах, указанных на рисунке 12.2, *а, б, в, г*. Сопротивление каждой стороны и диагонали квадрата, а также всех ребер куба равно r.

Р е ш е н и е. 1. Рассматривая попарное соединение отдельных проводников в схеме, изображенной на рисунке 12.2, *а*, нетрудно установить, что два из них ab и bc соединены между собой последовательно. Кроме этой пары, в контуре больше нет двух проводников, которые были бы соединены последовательно или параллельно. Очень часто неправильно считают, что последовательно включены сопротивления ad и cd, не учитывая, что между ними есть токоподводящий провод и, следовательно, ток между проводниками может разветвляться.

Заменив эти два сопротивления одним эквивалентным сопротивлением $r_1 = 2r$, мы видим, что оно оказывается включенным параллельно проводнику ac. Находим общее сопротивление r_2 проводников r_1 и r (контура $abca$ при подключении его в точках a и c):

$$r_2 = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2}{3}r.$$

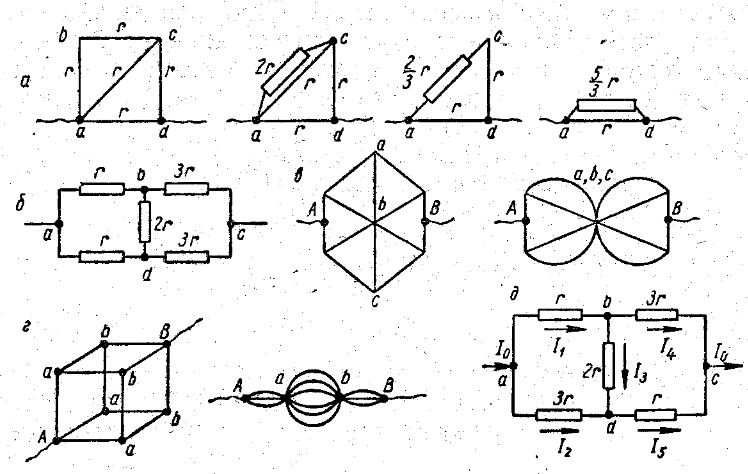


Рис. 12.2.

Весь этот контур (сопротивление r_2) соединен последовательно с проводником cd, и его общее сопротивление

$$r_3 = \frac{2}{3}r + r = \frac{5}{3}r.$$

После замены сопротивлением r_3 сопротивления участка $abcd$ (включая проводник ac) схема оказывается предельно упрощенной, так как сразу же видно, что сопротивление r_3 подключено параллельно к сопротивлению участка ad. Их общее сопротивление, а следовательно, и искомое сопротивление всей цепи получается равным:

$$R_0 = \frac{\frac{5}{3}r \cdot r}{\frac{5}{3}r + r} = \frac{5}{8}r.$$

2. Рассмотрим теперь вторую схему (рис. 12.2,*б*). В ней на первый взгляд нет ни последовательных, ни параллельных соединений. Сопротивления r и $3r$ нельзя считать соединенными последовательно, поскольку между ними включено сопротивление $2r$; сопротивления r и r (или $3r$ и $3r$) нельзя считать параллельными, так как точки b и d замкнуты сопротивлением $2r$.

Нетрудно заметить, что в данной схеме сопротивления включены симметрично — в схеме есть продольная ось симметрии, проходящая через точки a и c. Поэтому для вычисления общего сопротивления контура нужно найти точки с одинаковыми потенциалами и, разъединив их (или соединив), свести задачу к типу предыдущей. Если ток подойдет к узлу a (или c), он разветвится на две

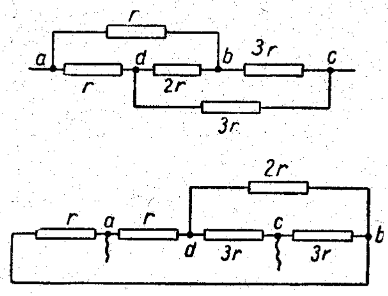


Рис. 12.3.

равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви до точки c будут идентичны. Потенциалы в точках b и d будут одинаковые, так как падение напряжения на сопротивлениях r и r одинаково, и потенциал проводников в точке a один и тот же. Разность потенциалов между точками b и a равна нулю, поэтому ток по сопротивлению $2r$ не идет, поэтому, не нарушая режима работы цепи, эти точки можно разъединить, выбросив проводник $2r$.

После такого упрощения схемы проводники r и $3r$ оказываются соединенными последовательно, верхняя и нижняя ветви — параллельно. Общее сопротивление всей цепи равно:

$$R_0 = \frac{r + 3r}{2} = 2r.$$

Следует обратить внимание на то, что точки b и d можно разъединить, выбрасывая включенный между ними проводник, только в тех случаях, когда схема симметрична. Если, например, в одной из ветвей поменять местами сопротивления r и $3r$, то разность потенциалов между точками b и d не будет равна нулю; по проводнику $2r$ пойдет ток, и указанным методом расчета воспользоваться будет нельзя.

Схему рисунка 12.2, *б* часто изображают в том виде, как указано на рисунке 12.3. Разумеется, общее сопротивление цепи остается при этом неизменным.

3. В шестиугольнике с перемычками (рис. 12.2, *в*) точки входа и выхода тока и проволочные сопротивления расположены симметрично оси ac — в схеме имеется поперечная ось симметрии, поэтому точки a, b и c имеют одинаковый потенциал и их можно соединить в одну, выбросив проводники ab и bc, по которым ток не идет. После этого схема упрощается, и ее сопротивление легко вычислить как комбинацию последовательно и параллельно соединенных проводников. Как видно из чертежа, это сопротивление, а следовательно, и сопротивление исходного контура равно:

$$R_0 = \frac{2\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right)}{2} = r.$$

4. Перейдем теперь к определению сопротивления каркаса куба, составленного из проволочек с одинаковым сопротивлением r (рис. 12.2, *г*).

Если подвести напряжение к точкам A и B, то легко сообразить, что ток в них разветвится на три равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви из точки A в B идентичны. На

сопротивлениях Aa падение напряжения будет одинаковым, в трех вершинах куба a потенциалы будут равны φ_a.

Токи, идущие по проводникам Aa, в свою очередь разветвятся на равные части в вершинах куба и пойдут по проводникам ab. В точках b они сливаются и идут через сопротивления bB к узлу B. Так как проводники ab и токи в них одинаковы, то падение напряжения на них будет одним и тем же и потенциалы в вершинах куба b будут равны φ_b.

Поскольку потенциалы во всех трех точках a, точно так же как и в точках b, одинаковы, эти точки можно соединить, вытянув каркас куба вдоль диагонали AB. В результате получится простая эквивалентная схема, представляющая комбинацию последовательно и параллельно соединенных сопротивлений. Сопротивление участка Aa равно $r/3$, участка ab — $r/6$, участка bB — $r/3$. Все три участка соединены между собой последовательно, и их общее сопротивление, а следовательно, и сопротивление каркаса куба будет равно:

$$R_0 = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6} r.$$

5. В схеме, представленной на рисунке 12.2, *д*, нет ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, нет в ней также и точек с равными потенциалами, поскольку она несимметрична. Для нахождения полного сопротивления цепи здесь нужно использовать общий метод расчета.

Допустим, что к узлу a подходит ток I_0 и разветвляется в нем на токи I_1 и I_2, т. е.

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Предположим, что в точке b ток I_1 разветвляется на токи I_3 и I_4:

$$I_1 = I_3 + I_4. \qquad (2)$$

В точке d токи I_2 и I_3 сливаются в один ток I_5, который, дойдя до точки c, сливается с током I_4 в ток I_0, т. е.

$$I_5 = I_2 + I_3; \qquad (3)$$
$$I_0 = I_4 + I_5. \qquad (4)$$

Данная схема содержит 4 узла (точки a, b, c и d), и мы получили 4 уравнения токов. В этих уравнениях имеется 6 неизвестных величин — все токи, введенные в решение.

Составление второй группы уравнений основано на том, что работа электрических сил по перемещению заряда из точки a в точку c не зависит от формы пути (по контуру abc, adc, $abdc$ или $adbc$). Если через R_0 обозначить общее сопротивление цепи, то согласно сказанному должно быть:

для контура abc:

$$I_0 R_0 = I_1 r + I_4 3r, \qquad (5)$$

для контура adc:

$$I_0R_0 = I_2 3r + I_5 r, \qquad (6)$$

для контура $abdc$:

$$I_0R_0 = I_1 r + I_3 2r + I_5 r, \qquad (7)$$

так как падение напряжения на каждом сопротивлении численно равно работе по перемещению единичного заряда по этому сопротивлению и работы складывают алгебраически.

Составленных уравнений достаточно для определения сопротивления R_0, однако можно составить еще одно уравнение — для перемещения заряда по контуру $adbc$:

$$I_0R_0 = I_2 3r - I_3 2r + I_4 3r. \qquad (8)$$

В уравнениях (1) — (8) неизвестными являются все токи (их шесть) и общее сопротивление контура.

Решая относительно R_0 семь любых уравнений из восьми составленных, получим:

$$R_0 = \frac{7}{4} r.$$

Пример 3. При подключении к гальванометру шунта сопротивлением $R_1 = 100$ *ом* стрелка гальванометра отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи $I_1 = 3$ *а*. При подключении к гальванометру добавочного сопротивления $R_2 = 300$ *ом* шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять, чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при токе во внешней цепи, равном $I_2 = 7{,}5$ *а*?

Р е ш е н и е. В задаче рассматривают три случая подключения к гальванометру разных сопротивлений: дважды в качестве шунта и один раз как добавочного сопротивления.

При включении шунта с сопротивлением R_1 стрелка отклоняется на всю шкалу при токе в неразветвленной части цепи I_1. По гальванометру в этом случае проходит допустимый для него ток $I_г$. Обозначим внутреннее сопротивление гальванометра $R_г$, тогда

$$R_1 = \frac{R_г I_г}{I_1 - I_г}. \qquad (1)$$

При включении последовательно гальванометру только добавочного сопротивления шкала прибора становится в n раз грубее. Ток в гальванометре, а стало быть, и падение напряжения на нем уменьшаются в n раз, и, следовательно, добавочное сопротивление должно удовлетворять условию:

$$R_2 = (n - 1)R_г. \qquad (2)$$

Чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при токе в цепи I_2, параллельно гальванометру нужно подключить такое сопротивление R_3, чтобы через гальванометр проходил максимально допустимый ток $I_г$, т. е.

$$R_3 = \frac{R_г I_г}{I_2 - I_г}. \qquad (3)$$

Находя из уравнений (2) и (1) $R_г$ и $I_г$ и подставляя их в формулу (3), с учетом числовых значений получим:

$$R_3 = \frac{I_1 R_1 R_2}{I_1 R_1 + I_2 (R_2 - R_1) + (I_2 - I_1) n R_1};$$

$$R_3 = 25 \text{ ом}.$$

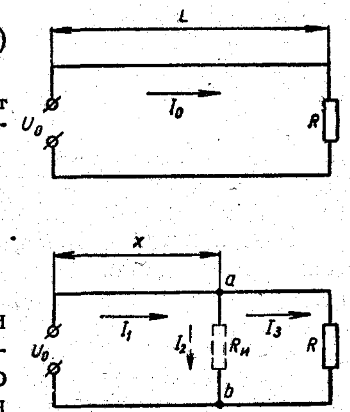


Рис. 12.4.

Пример 4. В двухпроводной линии электропередачи, на одном конце которой находится источник постоянного напряжения, а к другому подключен потребитель с сопротивлением R, повредилась изоляция. Вследствие повреждения ток через источник возрос в два раза, а ток через нагрузку упал в 8 раз. На каком расстоянии x от источника произошло повреждение изоляции, если сопротивление единицы длины провода равно ρ, а длина линии L? Чему равно сопротивление $R_и$ изоляции в месте повреждения линии?

Р е ш е н и е. Сделаем схематический чертеж (рис. 12.4) электрической цепи до и после повреждения изоляции. В случае нарушения изоляции проводников на расстоянии x от источника в месте повреждения начнется утечка тока из одного провода в другой. Режим работы цепи будет таким, как если бы в месте повреждения провода́ оказались соединенными между собой сопротивлением $R_и$. Это сопротивление, как видно из чертежа, оказывается включенным параллельно участку aRb. В результате сопротивление участка (вместе с $R_и$) и всей цепи уменьшится, сила тока в неразветвленной части цепи возрастет.

Если до нарушения изоляции в цепи шел ток I_0, а после нарушения на участках, отмеченных на чертеже, идут токи I_1, I_2 и I_3, то

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, эти токи сразу же выразим через ток I_0, используя условия задачи. Легко заметить, что ток в источнике, а следовательно, и в линии до точки повреждения равен $I_1 = 2I_0$, ток через нагрузку $I_3 = I_0/8$, поэтому ток через изоляцию

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{15}{8} I_0.$$

Допустим, что потребитель находится на расстоянии L от источника и сопротивление одного провода всей линии равно R_0. Предположим, что сопротивление провода от источника до точки a равно R_1, от a до потребителя — R_2 и напряжение на клеммах источника равно U_0.

Тогда согласно закону Ома для неповрежденной линии:

$$U_0 = I_0 2R_0 + I_0 R, \qquad (1)$$

поскольку общее сопротивление подводящих проводов равно $2R_0$.

Для поврежденной линии:

$$U_0 = I_1 2R_1 + I_3 R_{ab}, \qquad (2)$$

где произведение $I_3 R_{ab}$ есть падение напряжения на участке aRb (без сопротивления изоляции); R_{ab} — сопротивление этого участка. Как видно из чертежа,

$$R_{ab} = 2(R_0 - R_1) + R. \qquad (3)$$

Для составления уравнения, в которое входило бы искомое сопротивление изоляции, надо рассмотреть отдельно участки aRb и $aR_иb$. Эти участки соединены между собой параллельно, напряжение на них одинаково, поэтому

$$I_2 R_и = I_3\,[2(R_0 - R_1) + R]. \qquad (4)$$

Полученные уравнения нужно представить в развернутом виде, выразив входящие в них сопротивления через длину линии L, расстояние до места повреждения x и сопротивление ρ единицы длины провода. Нетрудно заметить, что

$$R_0 = L\rho; \quad R_1 = x\rho. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) — (5), с учетом выражений для токов I_1, I_2 и I_3 через I_0, находим расстояние x от источника тока до места повреждения изоляции и ее сопротивление $R_и$:

$$x = \frac{7}{15}\left(L + \frac{R}{2\rho}\right); \; R_и = \frac{8}{225}(2L\rho + R).$$

Пример 5. Плоский конденсатор с пластинами размером 16×16 *см* и расстоянием между ними $d = 4$ *мм* присоединен к полюсам батареи с э.д.с. $\mathscr{E} = 250$ *в*. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 3$ *мм/сек* вдвигают стеклянную пластинку толщиной 4 *мм*. Какой ток пойдет по цепи? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Решение. Если увеличивать или уменьшать электроемкость конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, то заряд на конденсаторе будет возрастать или уменьшаться, переходя из источника на обкладки конденсатора или стекая с них в источник. И в том и в другом случае по соединительным проводам идет ток. Среднюю силу тока можно найти, зная величину начального q_1 и конечного q_2 зарядов на конденсаторе и время t, в течение которого произошло изменение заряда:

$$I = \frac{q_2 - q_1}{t}. \qquad (1)$$

Причины изменения электроемкости могут быть разными: внесение или удаление диэлектрика между обкладками конденсатора,

сближение или раздвижение пластин, изменение величины перекрывающейся площади пластин. Во всех этих случаях принципиальное решение задачи одинаковое: оно основано на использовании формулы (1).

До внесения стеклянной пластинки в плоский конденсатор его электроемкость C_1 была равна:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}, \qquad (2)$$

где l — длина; l^2 — площадь обкладки конденсатора (поскольку она квадратна). Так как конденсатор подключен к источнику с электродвижущей силой $\mathscr{E}$, на конденсаторе находится заряд

$$q_1 = C_1\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 l^2 \mathscr{E}}{d}. \qquad (3)$$

При внесении стеклянной пластинки с диэлектрической проницаемостью ε емкость конденсатора увеличивается и становится равной

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2}{d}, \qquad (2')$$

так как по условию задачи диэлектрик заполняет все пространство между пластинами. Заряд на конденсаторе при этом окажется равным

$$q_2 = C_2\mathscr{E} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2 \mathscr{E}}{d}. \qquad (3')$$

Электрический ток в цепи проходит только в процессе изменения заряда конденсатора, вызванного движением стеклянной пластинки, поэтому время этого изменения можно найти, зная скорость v движения пластинки и расстояние, которое она проходит, перекрывая пластины. Это расстояние равно высоте пластины и, следовательно,

$$t = \frac{l}{v}. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1), (3), (3)′ и (4) относительно I и подставляя числовые значения, получим:

$$I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)\, l v \mathscr{E}}{d}; \quad I \approx 1{,}6 \cdot 10^{-9} a.$$

Пример 6. Найдите заряд на конденсаторе в схеме, изображенной на рисунке 12.5. ($R_1 = R$; $R_2 = 2R$; $R_3 = 3R$; $R_4 = 4R$).

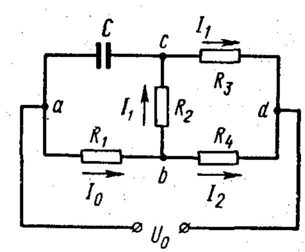


Рис. 12.5.

Решение. Рассчитывая схемы, содержащие воздушный конденсатор, включенный в цепь постоянного напряжения, необходимо обратить внимание на то, что постоянный ток через конденсатор не проходит и в ветви, где он включен, тока нет. В предложенной схеме ток I_0, идущий от источника с напряжением U_0, протечет через сопротивление R и разветвится в точке B на токи I_1 и I_2, не заходя в ветвь aCc.

Чтобы определить заряд на конденсаторе, нужно найти разность потенциалов на его обкладках. Она, как видно из чертежа, равна разности потенциалов U_{ac} между точками a и c, равной в свою очередь сумме падений напряжений U_1 и U_2 на сопротивлениях R и $2R$. К нахождению U_{ac} фактически и сводится вся задача.

Заряд на конденсаторе равен:

$$q = CU_{ac}, \tag{1}$$

где

$$U_{ac} = U_1 + U_2.$$

Эту сумму можно найти, используя правила расчета последовательной и параллельной цепи. Как видно из чертежа,

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3, \tag{2}$$

где U_3 — падение напряжения на сопротивлении $3R$.

Поскольку необходимо вычислить сумму $U_1 + U_2$ при заданном значении U_0, дальнейшие расчеты сводятся к отысканию падения напряжения U_3 на участке cd.

Применим закон Ома ко всей цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{R + \frac{(2R+3R)4R}{2R+3R+4R}} = \frac{9}{29}\frac{U_0}{R}. \tag{3}$$

Для параллельных ветвей bcd и $b4Rd$ можно записать:

$$U_2 + U_3 = U_4; \; I_0 = I_1 + I_2,$$

где

$$U_2 = I_1 2R; \; U_3 = I_1 3R; \; U_4 = I_2 4R.$$

Исключив из этих уравнений токи I_1 и I_2, введенные в решение для составления вспомогательных связей, получим одно уравнение

$$U_3 = \frac{I_0 \cdot 3R \cdot 4R}{2R+3R+4R} = \frac{4}{3}\frac{I_0}{R}, \tag{4}$$

позволяющее вместе с уравнениями (1)—(3) определить заряд на конденсаторе.

Исключая из уравнений (3) и (4) силу тока, находим:

$$U_3 = \frac{12}{29}U_0.$$

Согласно уравнению (2) напряжение на конденсаторе равно:

$$U_{ac} = U_1 + U_2 = U_0 - U_3 = \frac{17}{29}U_0.$$

Подставляя это выражение в исходную формулу, получим:

$$q = \frac{17}{29}U_0 C.$$

Пример 7. Плоский конденсатор емкостью C заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Расстояние между пластинами равно d. Через сопротивление R конденсатор подключен к источнику постоянного тока с э.д.с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Определите напряженность электрического поля в диэлектрике.

Решение. Материалы, которые являются обычно диэлектриками, в той или иной степени обладают электропроводностью. Если к источнику постоянного тока подключить конденсатор, заполненный проводящим диэлектриком, в цепи пойдет электрический ток (ток утечки). Между пластинами конденсатора будет существовать электрическое поле, напряженность которого E можно определить, зная напряжение U_C на обкладках конденсатора и расстояние между ними. Так как конденсатор является проводником, то это напряжение не равно э.д.с. подключенного источника: чтобы его найти, нужно знать сопротивление конденсатора.

Если плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ, то емкость и сопротивление конденсатора равны соответственно:

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S}{d} \text{ и } R_C = \frac{\rho d}{S}.$$

Эти формулы можно объединить в одну, исключив из них отношение $\frac{S}{d}$:

$$R_C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \rho}{C}. \tag{1}$$

Зная сопротивление конденсатора, можно найти напряжение U_C на конденсаторе при подключении его через сопротивление R к аккумулятору. Если R включить во внутреннее сопротивление источника, то напряжение на конденсаторе можно рассматривать как напряжение на зажимах источника с внутренним сопротивлением $R + r$ и согласно формуле (12.13) записать:

$$U_C = \frac{\mathscr{E} R_C}{R_C + R + r}. \tag{2}$$

Электрическое поле в конденсаторе считается однородным, поэтому

$$E = \frac{U_C}{d}. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно напряженности поля, находим:

$$E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \rho \mathscr{E}}{[\varepsilon_0 \varepsilon \rho + (R + r) C] d}.$$

Пример 8. Амперметр и вольтметр, подключенные к аккумулятору последовательно, показывают соответственно $I_1 = 0{,}1$ *а* и $U_1 = 10$*в*. Соединенные параллельно и подключенные к тому же источнику, они показывают соответственно $I_2 = 1$*а* и $U_2 = 1$*в*. Определите ток короткого замыкания.

Решение. В задаче рассматривают два режима работы аккумулятора. Первый, когда он замкнут двумя приборами, соединенными последовательно, при втором режиме приборы соединены параллельно. Зная показания приборов, нужно определить э.д.с. $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r источника, после чего, разделив одно на другое, найти ток короткого замыкания.

Предположим, что амперметр и вольтметр обладают внутренним сопротивлением R_A и R_V, тогда при их последовательном соединении с аккумулятором все величины, характеризующие цепь и режим ее работы, будут связаны между собой формулой закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_A + R_V + r}. \tag{1}$$

Кроме того, поскольку приборы включены последовательно и ток через вольтметр равен току через амперметр, их показания будут связаны формулой закона Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_V}. \tag{2}$$

При параллельном соединении приборов показание вольтметра равно напряжению на зажимах источника, поэтому согласно формуле (12.13)

$$U_2 = \frac{\mathscr{E}\dfrac{R_A R_V}{R_A + R_V}}{\dfrac{R_A R_V}{R_A + R_V} + r}.$$

С другой стороны, учитывая, что напряжение на амперметре равно напряжению на вольтметре, по закону Ома для участка цепи имеем:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_A}. \tag{4}$$

Ток короткого замыкания

$$I_{к.з} = \frac{\mathscr{E}}{r}. \tag{5}$$

Уравнения (1) — (5) содержат пять неизвестных величин: сопротивления приборов, $\mathscr{E}$, r и $I_{к.з}$.

Провести вычисления до конца в общем виде в данной задаче нецелесообразно, так как ответ получится очень громоздким. Поэтому, прежде чем начинать алгебраические выкладки и исключать из уравнений неизвестные, следует обратить внимание на то, что формулы (2) и (4) позволяют сразу же найти сопротивление приборов и тем самым считать их известными при решении оставшихся уравнений (1), (3), (5).

Подставляя в уравнения (2) и (4) числовые значения, получим: $R_V = 100$ *ом*; $R_A = 1$ *ом*. После этого находим:

$$I_{к.з} = \frac{I_1 U_2 (R_V^2 + R_A R_V + R_A^2)}{R_A R_V [I_1 (R_A + R_V) - U_2]}; \quad I_{к.з} \approx 1{,}01 а.$$

Пример 9. В конце зарядки батареи аккумуляторов током $I_1 = 3$*а* присоединенный к ней вольтметр показывал напряжение $U_1 = 4{,}25$*в*. В начале разрядки батареи током $I_2 = 4$*а* тот же вольтметр показывал напряжение $U_2 = 3{,}9$ *в*. Определите э.д.с. и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, можно пренебречь.

Решение. При зарядке аккумулятора его положительный полюс соединяется с положительным полюсом генератора, отрицательный — с отрицательным. Э.д.с. генератора больше э.д.с. аккумулятора, и ток через батарею идет в сторону, противоположную току, который она дает при разрядке.

Если э.д.с. батареи $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r и от положительного полюса к отрицательному через батарею идет зарядный ток I_1, то вольтметр, подключенный к зажимам батареи, показывает напряжение

$$U_1 = \mathscr{E} + I_1 r \text{ (см. формулу 11.15).} \tag{1}$$

Если эта же батарея подключена после зарядки к такому сопротивлению, что при токе в цепи I_2 вольтметр показывает на ее зажимах напряжение U_2, то

$$U_2 = \mathscr{E} - I_2 r. \tag{2}$$

В отличие от предыдущего случая здесь источник расходует свою энергию, ток идет в сторону э.д.с., поэтому перед I_2 стоит знак «минус».

Из уравнений (1) — (2) с учетом числовых значений токов и напряжений находим э.д.с. и внутреннее сопротивление батареи:

$$\mathscr{E} = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2}; \quad \mathscr{E} = 4{,}1 в; \quad r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}; \quad r = 0{,}05 \text{ ом}.$$

Пример 10. Найдите разность потенциалов между точками A и C и B и D в схеме, изображенной на рисунке 12.6.

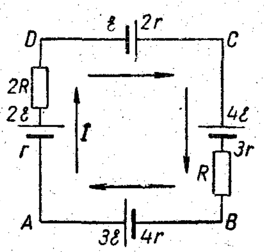


Рис. 12.6.

Р е ш е н и е. В задаче дано последовательное соединение четырех аккумуляторов и требуется определить напряжение на участках, содержащих э.д.с. Решение задач этого типа начинают с нахождения общей э.д.с. контура и силы тока в нем. Как видно из чертежа, источник с э.д.с. $4\mathscr{E}$ включен навстречу остальным источникам, у которых суммарная э.д.с. больше $4\mathscr{E}$. Общая, или, как ее называют, действующая, э.д.с. контура в этом случае равна:

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E} + 2\mathscr{E} + 3\mathscr{E} - 4\mathscr{E} = 2\mathscr{E},$$

и в цепи в направлении, указанном на чертеже, течет ток I:

$$I = \frac{2\mathscr{E}}{3R + 10r}. \qquad (1)$$

Напряжение на участке, содержащем э.д.с., в общем случае определяется по формуле (12.15). Между точками A и C его можно найти двумя путями: рассматривая или участок ABC, или участок ADC.

Э.д.с. участка ABC равна $\mathscr{E}_{ABC} = 4\mathscr{E} - 3\mathscr{E} = \mathscr{E}$, сопротивление $R_{ABC} = R + 7r$, и, следовательно, напряжение на этом участке равно:

$$U_{AC} = \mathscr{E} + I(R + 7r). \qquad (2)$$

Знак «плюс» здесь поставлен потому, что ток по участку идет не в том направлении, как его давала бы э.д.с. этого участка (участок заряжается).

Подставляя в уравнение (2) вместо I его значение, после несложных преобразований получаем:

$$U_{AC} = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\,\mathscr{E}.$$

Это же выражение можно получить иначе. Э.д.с. участка ADC равна $\mathscr{E}_{ADC} = 3\mathscr{E}$, его сопротивление $R_{ADC} = 2R + 3r$, направление тока совпадает с направлением э.д.с. участка (участок «разряжается»), следовательно,

$$U_{AC} = 3\mathscr{E} - I(2R + 3r) = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\,\mathscr{E},$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Аналогично находим напряжение между точками B и D. Э.д.с. на участке BAD и его сопротивление равны соответственно $5\mathscr{E}$ и $2R + 5r$, ток по участку идет в направлении э.д.с., поэтому

$$U_{BD} = 5\mathscr{E} - I(2R + 5r) = \frac{11R + 40r}{3R + 10r}\,\mathscr{E}.$$

На участке BCD э.д.с. равна $3\mathscr{E}$, сопротивление $(R + 5r)$, ток по участку идет против э.д.с., следовательно,

$$U_{BD} = 3\mathscr{E} + I(R + 5r) = \frac{11R + 40r}{3R + 10r}\,\mathscr{E},$$

что совпадает с напряжением, рассчитанным по контуру BAD.

Пример 11. Генератор постоянного тока с э.д.с. $\mathscr{E}_1 = 12\,в$ и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}2$ *ом* заряжает батарею аккумуляторов с э.д.с. $\mathscr{E}_2 = 10\,в$ и внутренним сопротивлением $r_2 = 0{,}6$ *ом*. Параллельно батарее включена лампочка с сопротивлением $R = 3$ *ом*. Определите силу тока в батарее аккумуляторов и лампочке.

Р е ш е н и е. В данном примере источники с разными э.д.с. и лампочка соединены параллельно. Расчет такой цепи может быть основан на том очевидном факте, что напряжение на каждом элементе цепи одинаково и его можно выразить через э.д.с., сопротивления и токи участков с помощью формулы (12.15).

Учитывая, что в процессе зарядки аккумулятора его полюса соединяются с одноименными полюсами генератора, делаем схематический чертеж (рис. 12.7) и указываем на нем все элементы цепи и их характеристики.

Расставляем токи I_1, I_2, I в каждой ветви. Если нет полной уверенности в правильности выбора, току можно приписывать такое направление, какое давала бы э.д.с. данной ветви. Если при этом окажется, что направление тока выбрано правильно, то при вычислении сила тока получится положительной, если нет — отрицательной.

В нашем примере направление токов очевидно, поскольку аккумулятор заряжается, и уравнение токов для одного из узлов схемы дает:

$$I_1 = I_2 + I. \qquad (1)$$

Если пренебречь сопротивлением подводящих проводов, то напряжения на зажимах генератора $U_г$, батареи $U_б$ и лампочки $U_л$ можно считать одинаковыми:

$$U_г = U_б; \quad U_г = U_л.$$

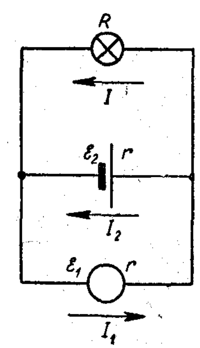


Рис. 12.7.

В то же время, учитывая направление токов в параллельных ветвях, согласно формуле (12.15) будем иметь:

$$U_г = \mathscr{E}_1 - I_1 r_1; \; U_л = IR \text{ и } U_б = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2,$$

поскольку мы предположили, что ток через аккумулятор идет против его э.д.с.

Приравнивая попарно выражения, стоящие в правой части этих уравнений, получим:

$$\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 = \mathscr{E}_2 + I_2 r_2; \qquad (2)$$

$$\mathscr{E}_1 - I_1 r_1 = IR. \qquad (3)$$

10*

Задачи, аналогичные данной, встречаются сравнительно часто, и уравнения (1) — (3) носят поэтому довольно общий характер. Из них можно определить любые три величины, если остальные заданы. Решая эти уравнения относительно искомых токов и подставляя числовые значения, получаем:

$$I_2 = \frac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)R - \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R};\ I_2 \approx 1{,}6\ a;$$

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R};\ I \approx 3{,}6\ a.$$

Пример 12. Для создания тока $I_1 = 8\ a$ в цепи было взято минимальное количество одинаковых аккумуляторов, соединенных в смешанную батарею. Какой ток можно получить в цепи, соединив эти аккумуляторы последовательно? Э.д.с. одного аккумулятора $\mathscr{E}_1 = 2\ в$, внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2\ ом$.

Р е ш е н и е. Если n аккумуляторов соединить последовательно и замкнуть их на сопротивление R, то ток в цепи будет равен:

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + nr_1}\ \text{(см. формулу 12.14}'\text{).} \qquad (1)$$

Величину тока I можно найти при условии, что известно число n аккумуляторов в батарее. Для нахождения n в задаче дано дополнительное условие — при смешанном соединении этих аккумуляторов в том же сопротивлении R можно получить максимальный ток I_1.

Если из n одинаковых аккумуляторов с э.д.с. $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 составить m последовательно соединенных групп по k элементов в каждой группе, то через сопротивление R будет идти наибольший ток

$$I_1 = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + \frac{m}{k} r_1} = \frac{m\mathscr{E}_1}{R + \frac{m^2}{n} r_1}$$

в том случае, когда $m^2 r_1 = nR$ (см. п. 5 введения к разделу).

Найдя из последнего равенства m и подставив его выражение в формулу закона Ома, для максимального тока при смешанном соединении источников получим:

$$I_1 = \sqrt{\frac{n}{4Rr_1}} \cdot \mathscr{E}_1. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) — (2) относительно искомого тока, получаем:

$$I = \frac{4I_1^2 \mathscr{E}_1 r_1}{\mathscr{E}_1^2 + 4I_1^2 r_1^2};\ I \approx 7{,}2\ a.$$

Пример 13. Напряжение на шинах электростанции равно $U_0 = 10\ кв$, расстояние до потребителя $l = 500\ км$. Станция должна передать потребителю мощность $P = 100\ квт$. Потери напряжения

в проводах не должны превышать $z = 4\%$. Вычислите массу медных проводов на участке электростанция — потребитель. Плотность и удельное сопротивление меди равны соответственно $D = 8{,}9 \cdot 10^3\ кг/м^3$ и $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ ом \cdot м$. Какой должна быть масса проводов, если напряжение увеличить в два раза?

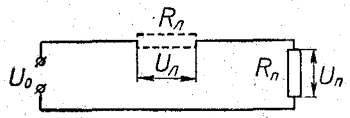


Рис. 12.8.

Р е ш е н и е. Массу провода m_1 можно определить, зная материал провода, его сопротивление R и длину l линии. Действительно, если плотность материала провода равна D, удельное сопротивление ρ, то

$$m_1 = D \cdot 2lS \text{ и } R = \rho \frac{2l}{S},$$

так как длина провода вдвое больше расстояния l. Исключив из этих формул площадь S сечения, получим:

$$m_1 = \frac{4D\rho l^2}{R}. \qquad (1)$$

В задаче все величины, входящие в равенство (1), кроме R, известны, поэтому дальнейшее решение сводится к нахождению сопротивления проводов.

Делаем чертеж (рис. 12.8), на котором отмечаем: сопротивление $R_п$ потребителя, сопротивления $R_л$ проводов линии электропередачи, напряжения на этих сопротивлениях $U_п$ и $U_л$, а также напряжение U_0 на шинах электростанции. Поскольку оба сопротивления соединены между собой последовательно, то

$$U_0 = U_п + U_л. \qquad (2)$$

Используя закон Ома для участка цепи и условие, что потери напряжения не должны превышать $z\%$, для проводов можно записать:

$$U_л = IR_л \text{ и } U_л = \frac{z}{100\%} U_0. \qquad (3)$$

Для потребителя вспомогательным уравнением является формула мощности

$$P = IU_п. \qquad (4)$$

Найдя R из уравнений (2) — (4) и подставив его выражение в (1) с учетом числовых значений, будем иметь:

$$m_1 = \frac{4D\rho l^2 P}{\left(1 - \frac{z}{100\%}\right) U_0^2};\ m_1 \approx 3{,}94 \cdot 10^6\ кг.$$

Из полученного выражения видно, что при увеличении напряжения в 2 раза массу проводов линии передачи можно уменьшить в 4 раза и, следовательно,

$$m_2 = \frac{m_1}{4} = 9{,}85 \cdot 10^5\ кг.$$

Пример 14. Электроплитка, рассчитанная на напряжение U_0, при включении в сеть с этим напряжением потребляет мощность $P_1 = 250$ *квт*. Какую мощность будут потреблять две такие плитки, включенные в сеть последовательно и параллельно, если номинальная мощность плитки $P_0 = 300$ *вт*? Изменением сопротивления плиток вследствие нагревания пренебречь.

Решение. Если электроплитку, рассчитанную на напряжение U_0, включить в сеть с таким напряжением, то часть напряжения источника падает на внутреннем сопротивлении источника и подводящих проводах. Напряжение на самой плитке окажется меньше расчетного, и потребляемая ею мощность P_1 будет меньше номинальной: $P_1 < P_0$.

При включении в сеть двух плиток, соединенных последовательно или параллельно, суммарная мощность, потребляемая плитками, будет различной. В обоих случаях она не равна $2P_1$, поскольку из-за изменения внешнего сопротивления меняется напряжение, подводимое непосредственно к плиткам. Чтобы найти мощность, потребляемую двумя плитками при разных способах включения, нужно рассмотреть режимы работы цепи при различных нагрузках.

Если сопротивление подводящих проводов отнести к внутреннему сопротивлению источника и рассматривать две плитки, соединенные последовательно, как сопротивление $2R$, подключенное к зажимам источника, то согласно последней формуле (12.20) потребляемая ими мощность равна:

$$P_{\text{пс}} = \frac{U_0^2 \cdot 2R}{(2R + r)^2}, \tag{1}$$

где r — сопротивление подводящих проводов и источника тока.

При параллельном соединении плиток их общее сопротивление становится равным $R/2$, и выделяемая в них суммарная мощность равна:

$$P_{\text{пр}} = \frac{U_0^2 \cdot 2R}{(R + 2r)^2}. \tag{2}$$

Как видно из уравнений (1)—(2), для нахождения $P_{\text{пс}}$ и $P_{\text{пр}}$ необходимо знать сопротивление плитки и сопротивление остальной цепи. Эти сопротивления можно определить, зная номинальную P_0 и фактически потребляемую мощность P_1 при включении одной плитки.

Если бы на плитку было подано расчетное напряжение U_0, она потребляла бы номинальную мощность

$$P_0 = \frac{U_0^2}{R}. \tag{3}$$

Если же напряжение U_0 подается на сопротивление $R + r$, то на сопротивлении плитки будет выделяться мощность

$$P_1 = \frac{U_0^2 R}{(R + r)^2}. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (1) — (4) сопротивления и подставляя числовые значения P_1 и P_0, находим:

$$P_{\text{пс}} = \frac{2P_0^2 P_1}{(P_0 + \sqrt{P_0 P_1})^2}; \quad P_{\text{пс}} \approx 136 \text{ вт};$$

$$P_{\text{пр}} = \frac{2P_0^2 P_1}{(2P_0 - \sqrt{P_0 P_1})^2}; \quad P_{\text{пр}} \approx 420 \text{ вт}.$$

Пример 15. Электропечь должна за время $\tau = 10$ *мин* выпаривать воду массой $m = 1$ *кг*, взятой при температуре $t_1 = 20$ °С. Какой должна быть длина нихромовой проволоки сечением $S = 0{,}5$ *мм*^{2}, используемой в качестве нагревателя, если печь предназначена для напряжения $U = 120$ *в* и ее к.п.д. равен $\eta = 80\%$. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*, удельные темплоемкость и теплота кипения воды равны соответственно $c = 4{,}2$ *кдж/(кг · град)* и $r = 2{,}26 \cdot 10^3$ *кдж/кг*.

Решение. Из условия задачи следует, что для расчета теплового действия тока в данном примере удобно применить формулу (12.23). Если спираль электропечи имеет сопротивление R и включается в сеть с напряжением U, то за время τ к воде подводится энергия, равная

$$Q = \eta \frac{U^2}{R} \tau. \tag{1}$$

Чтобы нагреть воду массой m от температуры t_1 до температуры $t_2 = 100$ °С и затем обратить ее в пар, необходимо затратить количество теплоты

$$Q = cm\,(t_2 - t_1) + rm. \tag{2}$$

При изготовлении нагревателя сопротивлением R из проволоки сечением S длина ее l должна быть такой, чтобы

$$R = \rho \frac{l}{S}. \tag{3}$$

Подставляя в исходные уравнения вместо Q и R их выражения (2) и (3), получим:

$$m\,[c\,(t_2 - t_1) + r] = \eta \frac{U^2 S \tau}{\rho l}.$$

Выразив отсюда длину проволоки и подставив числовые значения, получим:

$$l = \frac{\eta U^2 S \tau}{\rho m\,[c\,(t_2 - t_1) + r]}; \quad l \approx 1{,}2 \text{ м}.$$

Пример 16. В сеть, состоящую из медного провода сечением $S = 5$ *мм*^{2}, надо включить свинцовый предохранитель. Какое сечение должен иметь предохранитель, чтобы при нагревании сети более чем на $\Delta t_1 = 10$ градусов он расплавился? Начальная температура свинца $t = 27$ °С, температура плавления свинца $t_{пл} = 327$ °С.

Решение. Плавкие предохранители включают в сеть последовательно, и ток в них идет такой же, как и в проводах сети. Размеры предохранителя можно подобрать так, что он будет перегорать, как только температура проводов превысит допустимую.

Основным расчетным соотношением, позволяющим вычислить сечение предохранителя, служит уравнение закона Джоуля—Ленца. В данной задаче им нужно воспользоваться дважды: применить уравнение к медному проводу и свинцовому предохранителю. Поскольку в проводнике и предохранителе сила тока одна и та же, для расчета теплового действия тока удобнее взять формулу (12.24).

Допустим, что по проводам идет ток I, сопротивление медной проволоки R_1 и за время τ она нагревается на Δt_1 *град*, тогда на нагревание проводов будет израсходована электрическая энергия

$$Q_{отд} = I^2 R_1 \tau.$$

Внутренняя энергия проводов возрастет при этом на величину

$$Q_{получ} = c_1 m_1 \Delta t_1,$$

где c_1 — удельная теплоемкость меди; m_1 — масса проводов. Так как $Q_{отд} = Q_{получ}$, то

$$c_1 m_1 \Delta t_1 = I^2 R_1 \tau. \qquad (1)$$

Обозначим плотность меди D_1, удельное сопротивление ρ_1, длину провода l_1 и сечение S_1, тогда масса провода и его сопротивление будут равны соответственно:

$$m_1 = D_1 S_1 l_1;\ R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу закона Джоуля—Ленца, после сокращения на l_1 получим:

$$c_1 D_1 S_1 \Delta t_1 = I^2 \frac{\rho_1 \tau}{S_1}. \qquad (1')$$

Рассмотрим теперь предохранитель, обладающий массой m_2 и сопротивлением R_2. По нему идет такой же ток I, и за то же время τ в нем выделится количество теплоты

$$Q_{отд} = I^2 R_2 \tau,$$

которое идет на нагревание и плавление предохранителя:

$$Q_{получ} = c_2 m_2 \Delta t_2 + \lambda m_2.$$

Здесь c_2 и λ — удельная теплоемкость и удельная теплота плавления свинца: $\Delta t_2 = t_{пл} - t$ — разность конечной и начальной температур свинца. Так как $Q_{отд} = Q_{получ}$, то

$$m_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 R_2 \tau. \qquad (2)$$

Обозначим плотность свинца D_2, удельное сопротивление ρ_2, длину предохранителя l_2 и сечение S_2, тогда масса и сопротивление предохранителя равны соответственно:

$$m_2 = D_2 S_2 l_2;\ R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим:

$$D_2 S_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 \frac{\rho_2 \tau}{S_2}. \qquad (2')$$

Разделив уравнение (2') на (1'), после несложных преобразований и подстановки числовых значений, взятых из условия задачи и таблиц, найдем:

$$S_2 = S_1 \sqrt{\frac{D_1 c_1 \rho_2 \Delta t_1}{D_2 \rho_1 (c_2 \Delta t_2 + \lambda)}};\ S_2 = 3{,}9 \cdot 10^{-6}\ м^2 = 3{,}9\ мм^2.$$

Пример 17. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 120$ *в* напряжение на клеммах распределительного щита падает на $z = 20\%$. Сопротивление подводящих проводов вместе с сопротивлением генератора составляет $R = 14$ *ом*. Какую полезную мощность развивает электромотор, если его к.п.д. $\eta = 0{,}65$.

Решение. При работе электромотора, включенного в сеть постоянного тока, электрическая энергия превращается в механическую и внутреннюю энергию. С внутренней энергией связано нагревание проводников, составляющих электрическую цепь, с механической — вращение якоря электромотора.

Основное уравнение, характеризующее процесс перераспределения энергии, — уравнение закона сохранения и превращения энергии (12.24), отнесенное к единице времени.

Предположим, что мотор подключен непосредственно к распределительному щиту и сопротивление подводящих проводов в сумме с сопротивлением его обмотки ничтожно мало по сравнению с сопротивлением R остальной линии. Если при включенном моторе по цепи идет ток I, то согласно закону сохранения энергии за счет мощности IU, развиваемой источником, происходит нагревание проводов ($I^2 R$) и создается механическая мощность ($N_{мех}$):

$$IU = I^2 R + N_{мех}. \qquad (1)$$

За счет механической мощности преодолевается трение и совершается полезная работа. Если к.п.д. электромотора η, то полезная мощность равна:

$$N_п = \eta N_{мех}. \qquad (2)$$

По условию задачи напряжение на клеммах распределительного щита падает при включении мотора на $z\%$. Если рассматривать эти клеммы как зажимы источника, а всю проводку как его внутреннее сопротивление, то можно записать, что

$$U_з = \frac{z}{100\%} U, \tag{3}$$

$$U_з = U - IR. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) найдем силу тока I в цепи и, подставив ее с учетом выражения (2) в формулу (1), после несложных преобразований и вычислений получим:

$$N_п = \frac{\eta z (100\% - z) U^2}{(100\%)^2 R}; \ N_п \approx 110 \ вт.$$

Пример 18. При серебрении пластинки через раствор азотнокислого серебра проходит ток плотностью $j = 0,2$ *а/см²*. С какой средней скоростью растет толщина серебряного покрытия пластинки? Атомная масса, валентность и плотность серебра равны соответственно $A = 108$, $n = 1$, $\rho = 10,5 \cdot 10^3$ *кг/м³*.

Решение. При прохождении электрического тока через раствор азотнокислого серебра за время t на катоде откладывается масса серебра, равная

$$m = \frac{A}{nF} It,$$

где F — число Фарадея; I — сила тока в растворе.

Если слой серебра плотностью ρ осаждается равномерно по всей поверхности пластинки площадью S и толщина слоя h, то масса выделившегося серебра равна:

$$m = \rho Sh.$$

С учетом этого формулу закона Фарадея можно переписать так:

$$\rho Sh = \frac{A}{nF} It,$$

откуда

$$\rho \frac{h}{t} = \frac{A}{nF} \cdot \frac{I}{S}, \text{ или } \rho v = \frac{A}{nF} j,$$

где $\frac{h}{t} = v$ — скорость роста толщины покрытия; j — плотность тока в растворе электролита. Последняя формула является основным расчетным соотношением в данной задаче. Для средней скорости v получаем:

$$v = \frac{Aj}{nF\rho},$$

откуда после подстановки числовых значений:

$$v = 2,5 \cdot 10^{-7} \ м/сек = 0,25 \ мкм/сек.$$

Пример 19. Сколько электроэнергии нужно затратить для получения из подкисленной воды водорода, имеющего при температуре $T = 300$ °К и давлении $p = 10^5$ *н/м²* объем $V = 2,5 \cdot 10^{-3}$ *м³*, если электролиз ведется при напряжении $U = 5$ *в*, а к.п.д. установки равен $\eta = 0,75$.

Решение. Согласно закону Фарадея масса m водорода, выделившегося при электролизе подкисленной воды при к.п.д. установки η, равна:

$$m = \eta k I t,$$

где $k = 1,0 \cdot 10^{-8}$ *кг/к* — электрохимический эквивалент водорода.

Если при электролизе к электродам приложена разность потенциалов U и их поляризацией можно пренебречь (э.д.с. поляризации очень мала), то для получения данного количества газа необходимо затратить электроэнергию, равную

$$W = IUt.$$

Учитывая это, формулу закона Фарадея можно представить в виде:

$$m = \eta k \frac{W}{U}. \tag{1}$$

Массу водорода, полученного при электролизе, можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона через параметры состояния газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \tag{2}$$

Исключая из уравнений (1)—(2) массу и подставляя числовые значения, находим:

$$W = \frac{\mu p V U}{\eta k R T}; \ W \approx 134 \ кдж.$$

Задачи к главе 12

12.1. Ток в проводнике в течение времени t равномерно возрастает от 0 до I_1, затем в течение такого же промежутка времени остается постоянным и затем равномерно уменьшается до нуля за время t. Какой заряд прошел через проводник за время $3t$?

12.2. В электростатическом генераторе Ван-де-Граафа прорезиненная лента шириной 0,30 *м* движется со скоростью 20 *м/сек*. Около нижнего шкива ленте сообщается поверхностный заряд такой величины, что по обеим сторонам ленты образуется электрическое поле с напряженностью 1200 *кв/м*. Чему равен ток, обусловленный механическим перемещением заряда?

12.3. Катушка диаметром 0,20 *м* намотана медным проводом сечением 2 $мм^2$. Катушка вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 62,8 $сек^{-1}$ и затем резко останавливается. Какой заряд пройдет при этом по проводу, если концы его будут замкнуты?

12.4. По медному проводу сечением $S = 1$ $мм^2$ течет ток $I = 10$ *ма*. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов, полагая, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

12.5. К источнику постоянного напряжения через сопротивление R подключен конденсатор емкостью C с расстоянием между пластинами d. Воздух в пространстве между пластинами конденсатора ионизируется рентгеновскими лучами, вследствие чего в цепи идет ток и падение напряжения на сопротивлении R оказывается равным U. Полагая, что заряд иона равен заряду электрона, определите, сколько пар ионов образуется за 1 *сек* в 1 $см^3$ воздуха.

12.6. Через двухэлектродную лампу с плоскими электродами идет ток I при напряжении на лампе U. С какой силой действуют на анод ударяющие в него электроны? Отношение заряда электрона к его массе γ считать известным, начальной скоростью электронов пренебречь.

12.7. Две проволоки — медная и алюминиевая — имеют одинаковую массу. Длина медной проволоки в 10 раз больше длины алюминиевой. Во сколько раз отличаются их сопротивления? Плотность меди в 3,3 раза больше плотности алюминия, удельное сопротивление в 1,65 раза меньше.

12.8. Угольный стержень соединен последовательно с железным стержнем такого же сечения. При каком соотношении длин сопротивление этой системы не зависит от температуры? Температурные коэффициенты сопротивления угля и железа равны соответственно $8 \cdot 10^{-4}$ и $6 \cdot 10^{-3}$ $град^{-1}$, их удельные сопротивления $4 \cdot 10^{-3}$ и $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ *ом · см*.

12.9. При 0 °С один проводник имеет сопротивление, в n раз большее другого. Температурные коэффициенты сопротивления проводников равны α_1 и α_2. Чему будут равны температурные коэффициенты сопротивления проводника, составленного из первых двух: а) при их последовательном соединении; б) параллельном соединении?

12.10. Разность потенциалов на концах проволоки длиной 5 *м* равна 4,2 *в*. Определите плотность тока в проволоке при температуре 120 °С.

12.11. Определите удельное сопротивление металла, если известно, что в каждом кубическом сантиметре металла находится n свободных электронов, а время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки равно τ. Заряд электрона e и его масса m считаются известными, соударения электронов неупругие.

12.12. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление n таких конденсаторов, соединенных параллельно, если емкость одного конденсатора равна C?

12.13. В стеклянной трубке, размеры которой указаны на рисунке 12.9, находится ртуть. В трубку вставляют медный стержень такой длины, что при полном погружении стержня его конец совпадает с уровнем ртути в трубке. Во сколько раз изменится сопротивление системы, если стержень вынуть из ртути и расположить так, чтобы он касался ее поверхности? Напряжение на систему подается в точках, лежащих на верхнем конце стержня и нижнем уровне ртути.

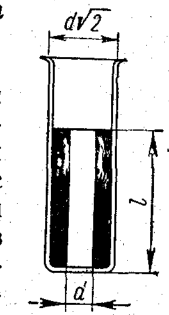


Рис. 12.9.

12.14. Проволока имеет сопротивление 36 *ом*. Когда ее разрезали на несколько равных частей и соединили эти части параллельно, то получилось сопротивление 1 *ом*. На сколько частей разрезали проволоку?

12.15. Вычислите сопротивление контуров, представленных на рисунке 12.10, *а*, *б*, *в*.

12.16. Как изменится сопротивление контура, изображенного на рисунке 12.11, если между точками a и b подключить сопротивление r?

12.17. Контур составлен из сопротивлений так, как показано на рисунке 12.12. Чему будет равно его сопротивление, если источник напряжения подключить к точкам A и B, C и D, E и F?

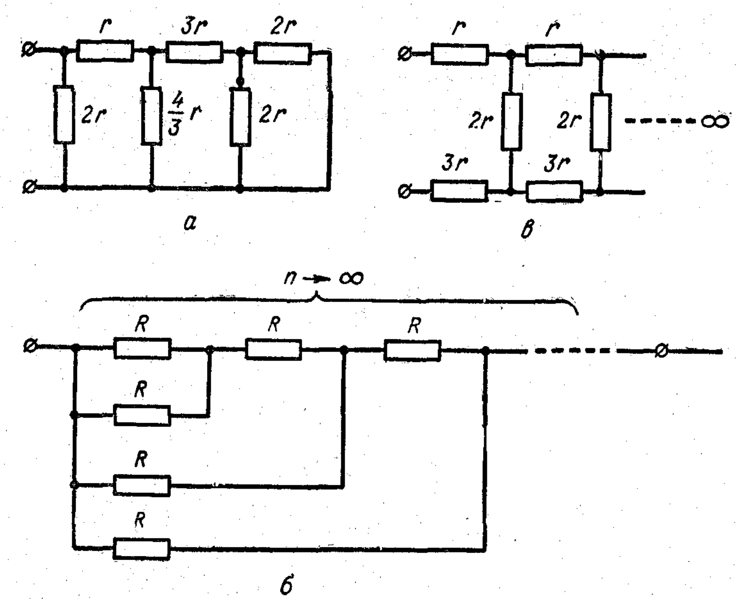


Рис. 12.10.

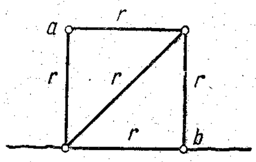


Рис. 12.11.

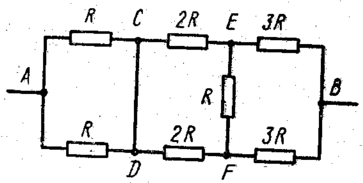


Рис. 12.12.

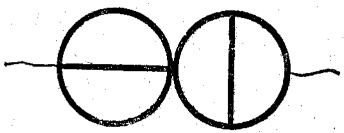


Рис. 12.13.

12.18. Из проволоки, сопротивление которой равно 4,14 *ом*, сделали два кольца с перемычками (рис. 12.13). Определите сопротивление контура.

12.19. N точек соединены попарно сопротивлением R. Чему равно общее сопротивление такой схемы?

12.20. Найдите общее сопротивление контуров (рис. 12.14, *а*, *б*, *в*, *г*), составленных из одинаковых сопротивлений. Контуры подключены к электрической цепи в точках A и B.

12.21. Из однородной проволоки сделаны каркасы в форме октаэдра и тетраэдра. Сопротивление каждого ребра r. Какое сопротивление покажет омметр, если его подключить к разным углам каркасов?

12.22. Из однородной проволоки сделали каркас в форме куба. Ребро куба имеет сопротивление r. Как велико сопротивление этого каркаса при подключении его в разных углах? Дайте все возможные ответы.

12.23. Двумерная бесконечная сетка с квадратными ячейками составлена из одинаковых сопротивлений r. В каждом узле сетки соединяются концы четырех сопротивлений. Каково будет показание омметра, если его подключить к концам одного из сопротивлений?

12.24. Определите показания вольтметра с внутренним сопротивлением 150 *ом* в схеме, показанной на рисунке 12.15.

12.25. Все нити накала пятилампового приемника и добавочное гасящее сопротивление включены последовательно. Для нормального накала всех нитей требуется ток 0,3 *а*. Напряжение накала одной из ламп 30 *в*, остальных 6 *в*. Какое добавочное сопротивление

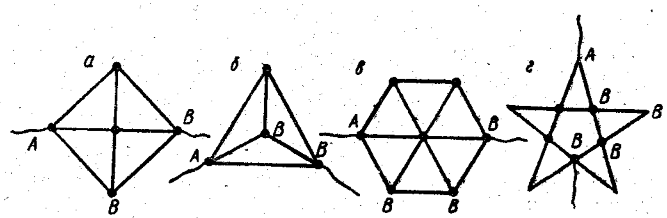


Рис. 12.14.

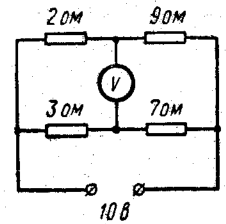


Рис. 12.15.

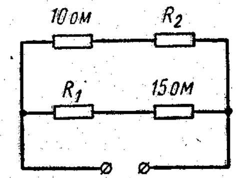


Рис. 12.16.

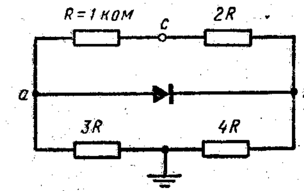


Рис. 12.17.

нужно включить, если напряжение источника питания 120 *в*? Как и какие сопротивления нужно включить в цепь, чтобы все лампы работали в заданном режиме при соединении всех шестивольтовых ламп в параллельную группу?

12.26. Амперметр, включенный последовательно с сопротивлением R, показывает ток I. Подключенный к этому же сопротивлению вольтметр показывает напряжение U. Чему равно внутреннее сопротивление вольтметра?

12.27. К потенциометру с сопротивлением R_0, имеющему длину обмотки l, приложено напряжение U. Между концом потенциометра и движком включен вольтметр с сопротивлением R_V. По какому закону будут изменяться показания вольтметра в зависимости от положения движка на потенциометре?

12.28. Чтобы определить место повреждения изоляции двухпроводной телефонной линии длиной 4 *км*, к одному ее концу присоединили батарею с э.д.с. 15 *в*. При этом оказалось, что, если провода у другого конца разомкнуты, ток через батарею равен 1 *а*, а если замкнуты накоротко, то ток через батарею равен 1,8 *а*. Найдите место повреждения и сопротивление изоляции в месте повреждения. Сопротивление каждого провода линии равно 5 *ом*.

12.29. Найдите величину сопротивлений R_1 и R_2 в схеме, показанной на рисунке 12.16, если при подключении источника с напряжением 110 *в* падение напряжения на этих сопротивлениях равно соответственно 10 и 15 *в*.

12.30. Определите силу тока на участке ab в схеме, представленной на рисунке 12.17, если известно, что потенциал точки c равен 100 *в*.

12.31. Какое напряжение будет показывать вольтметр в схеме, показанной на рисунке 12.18?

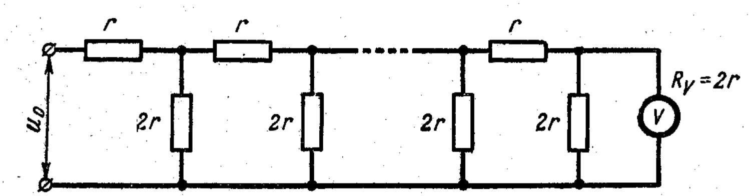


Рис. 12.18.

12.32. Милливольтметр, соединенный последовательно с добавочным сопротивлением 800 *ом*, показывает напряжение 12 *мв*. Сколько покажет тот же милливольтметр при том же внешнем напряжении, если его соединить последовательно с добавочным сопротивлением 300 *ом*? Сопротивление прибора 1,2 *ком*.

12.33. Гальванометр с внутренним сопротивлением $r_г$, шунтированный сопротивлением $R_ш$ и соединенный последовательно с добавочным сопротивлением R, используется в качестве вольтметра. При напряжении 1 *в* стрелка гальванометра отклоняется на одно деление. Каким нужно взять добавочное сопротивление, чтобы стрелка гальванометра отклонилась на одно деление при напряжении 10 *в*?

12.34. Гальванометр с внутренним сопротивлением 50 *ом* имеет цену деления шкалы 50 *мка*. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до 200 *в* или амперметр для измерения токов до 800 *ма*, если шкала прибора разбита на 100 делений?

12.35. Если к вольтметру присоединить некоторое добавочное сопротивление, пределы измерения прибора возрастают в m раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает пределы измерения в n раз. Во сколько раз увеличится предел измерения вольтметра, если оба эти сопротивления соединить между собой параллельно и затем подключить к вольтметру последовательно?

12.36. К амперметру A подсоединены два шунта по схеме, представленной на рисунке 12.19. Шкала амперметра содержит 100 делений. Если амперметр включить в цепь, пользуясь клеммами 1 и 2, цена деления шкалы амперметра окажется равной 0,01 *а/дел.*; если пользоваться клеммами 2—3, цена деления равна 0,02 *а/дел.* Какой ток можно измерять амперметром, подключив его клеммами 1—3?

12.37. Гальванометр включен последовательно с термопарой, чувствительность которой 120 *мкв* на 1 *град*, и дает отклонение в 112 делений при помещении одного из спаев термопары в печь. При введении в цепь дополнительного сопротивления в 15 *ом* отклонение уменьшилось на 40%. Чему равна температура печи, если стрелка гальванометра отклоняется на одно деление при токе $3 \cdot 10^{-6}$ *а*? Второй спай термопары имеет температуру 0 °С.

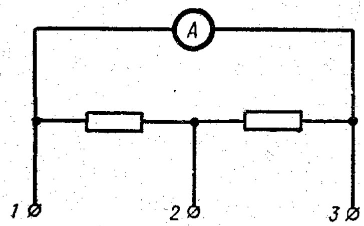


Рис. 12.19.

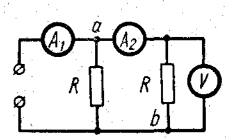


Рис. 12.20.

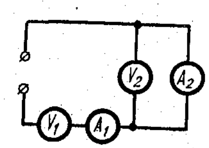


Рис. 12.21.

12.38. Как изменятся показания приборов в схеме, показанной на рисунке 12.20, если между точками a и b подключить сопротивление, равное R? Сопротивлением источника и подводящих проводов пренебречь.

12.39. В схему, показанную на рисунке 12.21, включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Микроамперметр A_1 показывает ток $I_1 = 200$ *мка*, вольтметры показывают напряжения $U_1 = 100$ *в* и $U_2 = 2$ *в*. Найдите показания микроамперметра A_2. Сопротивлением проводов пренебречь.

12.40. При подключении амперметра последовательно с сопротивлением 20 *ом* непосредственно к батарее стрелка амперметра отклоняется на всю шкалу. Если амперметр вместе с сопротивлением подключить к батарее через потенциометр с сопротивлением 100 *ом* так, чтобы параллельно амперметру и сопротивлению была подсоединена часть потенциометра сопротивлением 60 *ом*, то амперметр будет показывать ток, втрое меньший. Чему равно сопротивление амперметра?

12.41. К аккумулятору подключены два одинаковых сопротивления, соединенные последовательно. При измерении напряжения на одном сопротивлении и двух вместе показания вольтметра оказались равными 49 и 100 *в*. Что будет показывать вольтметр, если его включить в цепь последовательно с сопротивлениями? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

12.42. Электрическая цепь питается от источника постоянного напряжения 220 *в*. Если к некоторому участку цепи подключить вольтметр с внутренним сопротивлением 3000 *ом*, он покажет напряжение 98 *в*. Подключенный к этому же участку цепи вольтметр с внутренним сопротивлением 6000 *ом* показывает напряжение 100 *в*. Определите сопротивление измеряемого участка и силу тока в магистрали до подключения вольтметров.

12.43. Плоский конденсатор емкостью C заполнен проводящим диэлектриком с электрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ρ. Расстояние между обкладками конденсатора d. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения и в цепи идет ток I. Определите: напряженность поля в диэлектрике, плотность связанных зарядов на границе сред в конденсаторе, силу электростатического взаимодействия между пластинками.

12.44. Какие заряды находятся на плоских электродах, опущенных в раствор медного купороса, если между ними идет ток 0,5 *а*? Диэлектрическая проницаемость раствора 81, удельное сопротивление 50 *ом · см*.

12.45. Из вертикально расположенного плоского конденсатора равномерно вытекает заполнявший его керосин. В цепи, соединяющей конденсатор с батареей, имеющей э.д.с. 100 *в*, протекает при этом ток $2 \cdot 10^{-5}$ *мка*. Через сколько времени вытечет весь керосин? Пластины конденсатора квадратные с площадью 100 *см*^{2}, зазор между ними 1 *мм*. Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2.

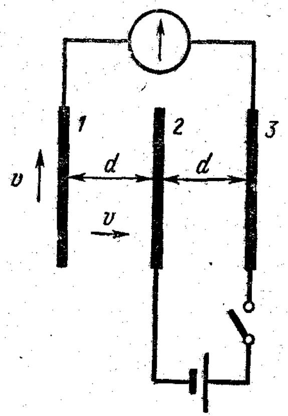


Рис. 12.22.

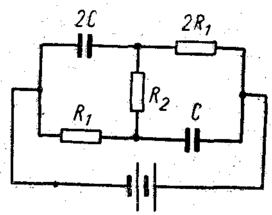


Рис. 12.23.

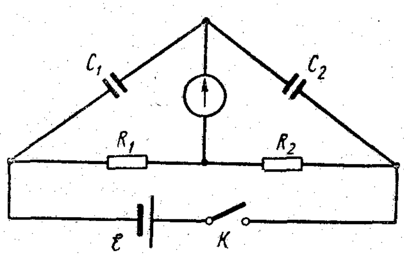


Рис. 12.24.

12.46. Два одинаковых плоских конденсатора с площадью пластин S соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов U. Пластины одного из конденсаторов начинают сближать так, что расстояние между ними меняется с течением времени по закону

$$d = d_0 \frac{t_0 - t}{t_0 + t},$$

где d_0—начальное расстояние между пластинами. Какой ток пойдет в проводах, соединяющих конденсаторы, при сближении пластин?

12.47. Три квадратные металлические пластинки площадью 10^{-3} *м*² каждая находятся в воздухе на расстоянии 10^{-3} *м* друг от друга (рис. 12.22). К крайним пластинкам подключен гальванометр с ничтожно малой емкостью. На пластины 2 и 3 подали напряжение 200 *в* и затем источник отключили. Какой максимальный ток пойдет через гальванометр, если: а) пластинку 1 смещать влево со скоростью $v=1$ *м/сек*; б) если смещать пластинку 1 со скоростью v параллельно пластинке 2 так, чтобы расстояние между ними не изменилось?

12.48. Найдите э. д. с. батареи в схеме, изображенной на рисунке 12.23, если заряд на конденсаторах $2C$ и C равен соответственно $3q$ и $2\,q$. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

12.49. Какой заряд пройдет через гальванометр в схеме, показанной на рисунке 12.24, если замкнуть ключ K? При каком соотношении между элементами схемы заряд через гальванометр при замыкании ключа проходить не будет? Внутреннее сопротивление источника r.

12.50. При замыкании элемента на сопротивление 1,8 *ом* в цепи идет ток 0,7 *а*, при замыкании на сопротивление 2,3 *ом* ток в цепи равен 0,56 *а*. Чему равен ток короткого замыкания?

12.51. Определите э.д.с. батареи, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления, замыкающего элемент, в n раз

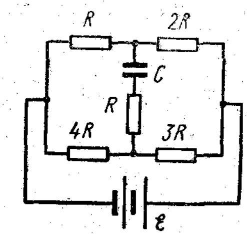


Рис. 12.25.

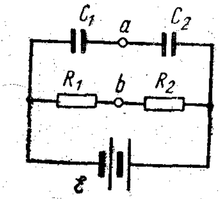


Рис. 12.26.

разность потенциалов на зажимах источника увеличивается с U_1 до U_2.

12.52. Определите заряд на конденсаторе в схеме, показанной на рисунке 12.25.

12.53. Найдите разность потенциалов между точками a и b в схеме, изображенной на рисунке 12.26. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

12.54. Через аккумулятор с э.д.с. 10 *в* и внутренним сопротивлением 2 *ом* течет ток 6 *а*. Найдите напряжение на зажимах источника.

12.55. Полностью разряженный аккумулятор емкостью 60 *а · ч* должен заряжаться от сети с напряжением 8 *в* в течение 50 *ч*. Его внутреннее сопротивление 1 *ом*. Какова электродвижущая сила аккумулятора?

12.56. К батарее через переменное сопротивление R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, показания вольтметра возрастут в два раза. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление R уменьшить до нуля?

12.57. Два вольтметра, соединенные последовательно, при подключении к источнику тока показывают напряжение 6 и 3 *в*. Один вольтметр, подключенный к источнику, показывает 8 *в*. Чему равна э.д.с. источника?

12.58. Батарея элементов замкнута двумя одинаковыми проводниками по 4 *ом* каждый, соединенными между собой параллельно. Вольтметр, подключенный к зажимам источника, показывает напряжение 6 *в*. Если одно из сопротивлений выключить, показания вольтметра возрастут до 8 *в*. Определите э.д.с. и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, пренебречь.

12.59. Амперметр, зашунтированный сопротивлением 0,2 *ом* и присоединенный к полюсам гальванического элемента с э.д.с. 1 *в* и внутренним сопротивлением 0,1 *ом*, показывает ток 5 *а*. Каково будет показание амперметра, если отключить шунт?

12.60. В цепь, состоящую из аккумулятора и сопротивления 10 *ом*, включают вольтметр — сначала последовательно, а затем параллельно. Внутреннее сопротивление аккумулятора 0,1 *ом*. Определите внутреннее сопротивление вольтметра, если его показания в обоих случаях оказались одинаковы.

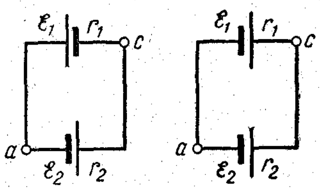


Рис. 12.27.

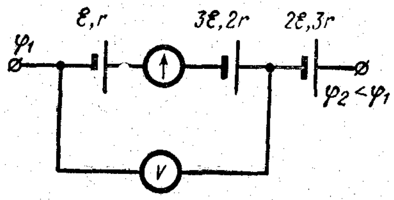


Рис. 12.28.

12.61. Аккумулятор замкнут на некоторое сопротивление. Если в цепь включить два амперметра, соединенных между собой параллельно, они покажут токи 2 и 3 *а*. Если амперметры включить в цепь последовательно, они показывают ток 4 *а*. Какой ток течет в цепи при отсутствии приборов?

12.62. К источнику с внутренним сопротивлением $r = 1$ *ом* подключены два сопротивления $R = 1$ *ом* и $2R$, соединенные между собой параллельно. Каким должно быть внутреннее сопротивление амперметра, включенного в ветвь меньшего сопротивления, чтобы погрешность измерений тока в этом сопротивлении не превышала $z = 4\%$?

12.63. К источнику с небольшим внутренним сопротивлением подключены последовательно два сопротивления 5 и 10 *ком*. Каким должно быть внутреннее сопротивление вольтметра, чтобы при подключении его к большему сопротивлению погрешность измерений не превышала 2%?

12.64. «Черный ящик» имеет четыре вывода. Если между выводами 1 и 2 включить батарею с напряжением 2 *в*, напряжение между точками 3 и 4 оказалось равным 1 *в* (7 *в*). Если между точками 3 и 4 включить батарею с напряжением 2 *в* (10 *в*), то между точками 1 и 2 напряжение оказывается равным $^2/_3$ *в* (3 *в*). Нарисуйте несколько возможных схем «черного ящика» для двух указанных случаев.

12.65. Определите разность потенциалов между точками *a* и *c* в схемах, показанных на рисунке 12.27, при условии, что $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$. Каким будет ответ, если $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2$ и $r_1 = r_2$.

12.66. Определите силу тока через гальванометр и показания электростатического вольтметра в схеме, показанной на рисунке 12.28. Сопротивлением гальванометра пренебречь.

12.67. Две батареи, э.д.с. которых равны 1,7 и 2,8 *в*, соединены разноименными полюсами. Чему равно отношение внутренних сопротивлений батарей, если разность потенциалов на зажимах источников равна 0,8 *в*? Сопротивлением проводов пренебречь.

12.68. В схеме, изображенной на рисунке 12.29, реохорд AB имеет сопротивление R и длину l. Э.д.с. батарей равны $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, их внутреннее сопротивление r_1 и r_2. При каком расстоянии между точкой A и движком C ток через гальванометр проходить не будет?

12.69. N одинаковых аккумуляторов соединены последовательно, причем k из них включены навстречу другим. Какой ток уста-

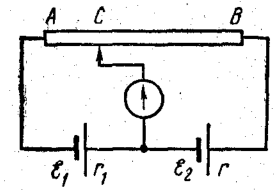


Рис. 12.29.

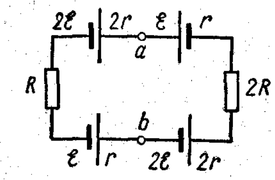


Рис. 12.30.

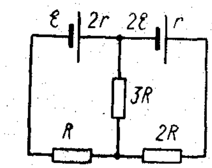


Рис. 12.31.

новится в цепи, если батарею замкнуть на сопротивление R? Э.д.с. каждого элемента равна $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r.

12.70. Замкнутая цепь состоит из n одинаковых источников с э.д.с. $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, соединенных между собой последовательно разноименными полюсами. Чему равна разность потенциалов между двумя произвольными точками цепи? Решите задачу при условии, что источники имеют э.д.с. $\mathscr{E}$, $2\mathscr{E}, \ldots, n\mathscr{E}$ и внутренние сопротивления r, $2r$, ..., nr соответственно. Зависит ли результат от того, в какой последовательности включены источники?

12.71. Определите разность потенциалов между точками *a* и *b* в схеме, показанной на рисунке 12.30.

12.72. Определите силу тока в сопротивлении $3R$ в схеме, показанной на рисунке 12.31.

12.73. Три гальванических элемента с э.д.с. $\mathscr{E}_1 = 1{,}3$ *в*, $\mathscr{E}_2 = 1{,}4$ *в* и $\mathscr{E}_3 = 1{,}5$ *в*, обладающие внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ *ом*, $r_2 = 0{,}2$ *ом* и $r_3 = 0{,}3$ *ом* вместе с сопротивлением $R = \frac{104}{110}$ *ом* образуют электрическую цепь (рис. 12.32). Определите ток через сопротивление R и первый источник.

12.74. При каких условиях сила тока в цепи, подключенной к батарее, составленной из последовательно соединенных одинаковых элементов, равна силе тока, даваемой батареей из тех же элементов, соединенных параллельно?

12.75. Батарея составлена из 12 элементов, имеющих э.д.с. 1,08 *в* и внутреннее сопротивление 0,6 *ом*. Батарея состоит из 4 групп, по три элемента в каждой. Элементы в группе соединены параллельно, а группы между собой — последовательно. Определите силу тока в каждом элементе, если батарею замкнуть сопротивлением 11,2 *ом*.

12.76. Батарея из n элементов с э.д.с. $\mathscr{E} = 1{,}84$ *в* и внутренним сопротивлением $r = 0{,}5$ *ом* состоит из нескольких групп, соединенных последовательно. В каждой группе содержится по $m = 4$ элемента, соединенных параллельно. Внешнее сопротивление цепи $R = 3$ *ом*. При этой группировке во внешнем участке цепи получается наибольший ток. Определите этот ток и число элементов в батарее.

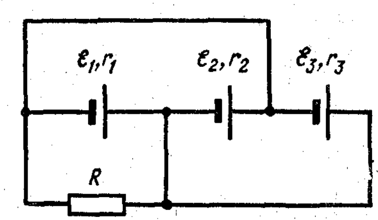


Рис. 12.32.

12.77. Из 16 элементов нужно составить такую батарею, чтобы при внешнем сопротивлении 4 *ом* по нему проходил наибольший ток. Из скольких групп должна состоять батарея и какое число элементов должно войти в каждую группу, если группы соединить последовательно, а элементы в них — параллельно? Внутреннее сопротивление одного элемента 0,25 *ом*.

12.78. Сколько электронов проходит ежесекундно через волосок лампы накаливания, если при напряжении 220 *в* лампа потребляет мощность 150 *вт*?

12.79. Линия имеет сопротивление 300 *ом*. Какое напряжение должен иметь генератор, чтобы при передаче потребителю мощности 25 *квт* потери в линии не превышали 4% передаваемой мощности?

12.80. Какую мощность можно передать потребителю по медным проводам сечением 18 $мм^2$, имеющим общую длину 1,5 *км*, если напряжение на электростанции 230 *в*, а допустимые потери напряжения в проводах не должны превышать 10%?

12.81. Во сколько раз нужно повысить напряжение источника тока, чтобы потери мощности в подводящих проводах снизить в 100 раз? Мощность, отдаваемую генератором, считать постоянной.

12.82. Электроэнергия генератора мощностью P передается потребителю по проводам, общее сопротивление которых R. Напряжение генератора U. Определите к.п.д. линии передачи, т. е. отношение мощности, выделяемой на полезной нагрузке, к мощности генератора. Сопротивлением генератора пренебречь.

12.83. Какой ток пойдет по подводящим проводам при коротком замыкании, если на плитках с сопротивлением $R_1 = 200$ *ом* и $R_2 = 500$ *ом* выделяется при поочередном их включении одинаковая мощность $P = 200$ *вт*?

12.84. Две лампочки с номинальной мощностью — одна $P_1 = 40$ *вт*, другая $P_2 = 60$ *вт*, рассчитанные на одинаковое напряжение, включены последовательно в сеть с тем же напряжением. Какие мощности будут потреблять лампочки? Какая из них будет гореть ярче?

12.85. Определите э.д.с. и внутреннее сопротивление аккумулятора, если при токе $I_1 = 5$ *а* он отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ *вт*; если же сопротивление внешней цепи $R_2 = 0{,}225$ *ом*, отдаваемая мощность $P_2 = 14{,}4$ *вт*.

12.86. Если к источнику напряжения с внутренним сопротивлением 2 *ом* подключить сопротивление 4 *ом*, то напряжение на его зажимах упадет до 6 *в*. Какую полную мощность развивает источник?

12.87. Элемент замыкают один раз сопротивлением 4 *ом*, другой — сопротивлением 9 *ом*. В том и другом случае во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. При каком внешнем сопротивлении она будет наибольшей?

12.88. Элемент дает во внешнюю цепь ток 3 *а* при напряжении на зажимах источника 2 *в*. Определите к.п.д. элемента, если его внутреннее сопротивление 0,02 *ом*.

12.89. При увеличении внешнего сопротивления с 3 до 10,5 *ом* к.п.д. источника увеличивается вдвое. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

12.90. К.п.д. аккумулятора с одним подключенным сопротивлением равен 60%. Если это сопротивление заменить другим, к.п.д. аккумулятора станет равным 80%. Каким будет к.п.д. аккумулятора, если оба сопротивления соединить с аккумулятором последовательно? параллельно?

12.91. При зарядке аккумуляторов была затрачена энергия 0,8 *квт · ч*. При разрядке на сопротивлении 8 *ом* э.д.с. аккумулятора равномерно убывала с 22 до 18 *в* в течение 10 *ч*. Вычислите полезную емкость аккумулятора и его к.п.д. Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

12.92. При замыкании на сопротивление 5 *ом* батарея элементов дает ток 1 *а*. Ток короткого замыкания батареи равен 6 *а*. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

12.93. Нагреватель кипятильника состоит из четырех секций, каждая из которых имеет сопротивление 1 *ом*. Нагреватель питается от батареи с э.д.с. 8 *в* и внутренним сопротивлением 1 *ом*. Как нужно соединить элементы нагревателя, чтобы вода в кипятильнике нагрелась как можно скорее? Каковы при этом полная мощность, расходуемая аккумулятором, и его к.п.д.?

12.94. Сколько витков никелиновой проволоки надо намотать на фарфоровый цилиндр диаметром 1,5 *см*, чтобы сделать кипятильник, в котором за 10 *мин* закипает 1,2 *л* воды, взятой при начальной температуре 10 °C? К.п.д. установки 60%, диаметр проволоки 0,2 *мм*, напряжение на ней 100 *в*. Удельное сопротивление никелина $0{,}42 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*.

12.95. На изготовление кипятильника израсходована нихромовая проволока объемом $V = 10\ см^3$. Сколько воды можно нагревать ежеминутно этим кипятильником от 10 до 100 °C при плотности тока в кипятильнике $j = 3\ а/мм^2$? К.п.д. кипятильника $\eta = 70\%$. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*.

12.96. Электрический чайник с 0,6 *л* воды при 10 °C включили и забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода в чайнике выкипит? Сопротивление обмотки чайника 14,4 *ом*, напряжение в сети 120 *в*, к.п.д. чайника 60%.

12.97. Электрический чайник, содержащий 1 *л* воды, подключен к генератору с э.д.с. 120 *в* и внутренним сопротивлением 4 *ом*. На сколько градусов нагреется вода за 1 *мин*, если вольтметр, подключенный к зажимам генератора, показывает напряжение 110 *в*? К.п.д. чайника 70%, током через вольтметр пренебречь.

12.98. Электрическая плитка включена в цепь генератора с э.д.с. 110 *в* и внутренним сопротивлением 4 *ом*. Амперметр, включенный последовательно с плиткой, показывает ток 2,5 *а*. Чему

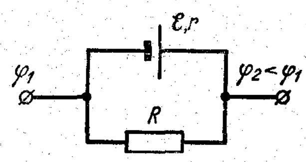


Рис. 12.33.

равен к.п.д. плитки, если 1 *л* воды на ней можно вскипятить за 0,5 *ч*? Начальная температура воды 4 °С.

12.99. Аккумулятор с э.д.с. $\mathscr{E}=2{,}2$ *в* и внутренним сопротивлением $r=0{,}1$ *ом* замкнут медной проволокой, масса которой равна $m = 30{,}3$ *г*. Сопротивление проволоки подобрано так, что во внешней цепи выделяется наибольшая мощность. На сколько градусов нагреется проволока в течение времени $t = 5$ *мин*? Удельная теплоемкость меди равна $c = 378$ *дж/(кг · град)*.

12.100. Батарея с э.д.с. 4 *в* и внутренним сопротивлением 1 *ом* входит в состав неизвестной цепи. К полюсам батареи присоединен вольтметр так, что его положительная клемма подключена к отрицательному полюсу батареи. Вольтметр при этом показывает напряжение 2 *в*. Какое количество теплоты выделяется на внутреннем сопротивлении батареи за 1 *сек*? Решите задачу при условии, что положительная клемма вольтметра подключена к положительному полюсу батареи.

12.101. Какая тепловая мощность выделяется на участке цепи, показанном на рисунке 12.33?

12.102. Нагреватель в электрическом чайнике состоит из двух одинаковых секций. При включении одной секции вода закипает через 25 *мин*. Через сколько времени закипит вода, если обе секции включить последовательно? параллельно?

12.103. Электрическая кастрюля и чайник, потребляющие мощность $P_1=600$ *вт* и $P_2=300$ *вт*, включены в сеть параллельно, и вода в них закипает одновременно через $t = 20$ *мин*. Через сколько времени закипит вода в кастрюле и чайнике, если их включить в цепь последовательно?

12.104. Чему равно сопротивление подводящих проводов от генератора с напряжением 120 *в*, если при коротком замыкании предохранитель из свинцовой проволоки сечением 1 *мм*^{2} и длиной 2 *см* плавится за 0,03 *сек*? Удельная теплота плавления и удельное сопротивление свинца равны соответственно $2{,}52 \cdot 10^4$ *дж/кг* и $0{,}21 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*.

12.105. К концам свинцовой проволоки длиной 1 *м* приложена разность потенциалов 10 *в*. Сколько времени пройдет с начала пропускания тока до момента, когда свинец начнет плавиться? Начальная температура свинца 27 °С. Удельная теплоемкость свинца $0{,}125 \cdot 10^3$ *дж/(кг · град)*.

12.106. При напряжении в сети $U_1 = 120$ *в* вода в электрическом чайнике закипает через $t_1 = 20$ *мин*, при напряжении $U_2 = 110$ *в* — через $t_2 = 28$ *мин*. Через сколько времени закипит вода, если напряжение в сети упадет до $U_3 = 100$ *в*? Потери тепла от чайника в окружающее пространство пропорциональны времени нагревания, начальная температура и масса воды во всех случаях одинаковы.

12.107. Электрическая печь имеет две обмотки, сопротивления которых отличаются друг от друга в n раз. При параллельном включении обмоток печь нагревается на ΔT *град* выше комнатной температуры. Полагая, что теплопередача прямо пропорциональна разности температур печи и окружающей среды, определите, на сколько градусов нагреется печь при последовательном соединении секций и неизменном напряжении.

12.108. При длительном пропускании тока силой 1,4 *а* через проволочное сопротивление оно нагрелось на 55 *град*, при силе тока 2,8 *а* — до 160 °С. До какой температуры нагреется проволока, если силу тока увеличить еще в два раза? Теплоотдача пропорциональна разности температур проволоки и окружающего воздуха, температура воздуха не меняется, изменением сопротивления проволоки вследствие нагревания пренебречь.

12.109. В проводнике, изготовленном из материала с известной плотностью ρ и атомной массой A, создано электрическое поле напряженностью E. Полагая, что на каждый атом приходится один электрон проводимости и что соударение электронов с ионами решетки происходит неупруго с интервалом τ, определите мощность тепловых потерь в единице объема проводника. Заряд и масса электрона считаются известными.

12.110. Генератор с э.д.с., равной U, заряжает аккумулятор с начальной э.д.с., равной $\mathscr{E}$. Чему равна полезная мощность, расходуемая на зарядку аккумулятора? Какая мощность расходуется на выделение тепла в аккумуляторе? Внутреннее сопротивление аккумулятора r, внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

12.111. Один конец провода трамвайной линии находится под постоянным напряжением U. На каком расстоянии от этого конца линии находится трамвай, снабженный двумя одинаковыми двигателями, и с какой скоростью он движется, если при последовательном включении двигателей ток в линии равен I_1, при параллельном — I_2 и скорость трамвая при таком переключении не меняется? Сила трения между колесами трамвая и рельсами F, сопротивление единицы длины провода ρ, полное сопротивление обмотки каждого из двигателей — R.

12.112. Два плоских конденсатора, обкладки которых имеют размеры 25×25 *см* и расстояние между которыми 1,8 *мм*, соединены между собой через сопротивление 54 *ом*. В конденсаторы вставлены пластины из диэлектрика с проницаемостью, равной 5. Пластины выдвигаются из конденсатора с постоянной скоростью за 5 *сек*, один раз одновременно, второй — поочередно. На сколько будут отличаться совершенные при этом механические работы, если начальная разность потенциалов на пластинах конденсаторов равнялась 500 *в*? Колебание тока в цепи не учитывать.

12.113. Какую э.д.с. развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R_1 = 300$ *ом* на вращение ротора затрачивается мощность $P_1 = 50$ *вт*? Потери мощности на трение составляют 4%. Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затратить при сопротивлении цепи $R_2 = 60$ *ом*?

12.114. Электромотор питается от источника с э.д.с. 24 *в*. При токе в цепи 8 *а* мощность на валу мотора составляет 96 *вт*. Какой ток пойдет по цепи, если затормозить якорь?

12.115. Какую максимальную мощность может развивать электромотор, включенный в сеть постоянного тока напряжением 120 *в*, если полное сопротивление цепи равно 20 *ом*? Какой ток протекает при этом по цепи?

12.116. При включении электромотора в сеть постоянного тока в начальный момент времени, когда якорь еще не вращается, ток в цепи (пусковой ток) равен I_1. В установившемся режиме ток снижается до I_2. Чему равен к.п.д. электромотора?

12.117. На горизонтальный вал мотора радиусом r равномерно наматывается нитка с грузом массой M на конце. Мотор питается от источника постоянного тока с э.д.с. $\mathscr{E}$, полное сопротивление цепи равно R, ток в цепи I. Чему равна скорость вращения вала мотора?

12.118. Требуется покрыть электролитическим путем металлическое изделие слоем серебра толщиной 20 *мкм*. Сколько времени надо пропускать ток силой 0,5 *а*, если площадь поверхности изделия 200 *см*^{2}? Плотность серебра $1{,}05 \cdot 10^4$ *кг/м*^{3}; электрохимический эквивалент — $1{,}118 \cdot 10^{-6}$ *кг/к*.

12.119. При получении алюминия в расплавленном криолите проходит ток $2 \cdot 10^4$ *а* при разности потенциалов на электродах 5 *в*. Через сколько времени будет выделена 1 *т* алюминия и сколько электрической энергии будет при этом израсходовано? Электрохимический эквивалент алюминия равен $0{,}093 \cdot 10^{-6}$ *кг/к*.

12.120. При какой плотности тока в растворе азотнокислого серебра толщина отложившегося слоя серебра растет со скоростью 1 *мм/ч*?

12.121. Через раствор медного купороса пропускают ток, изменяющийся в течение 50 *сек* по закону $I = 0{,}1t$ *а*, далее в течение 50 *сек* ток остается постоянным, и затем он изменяется по закону $I = (5 - 0{,}02\ t)$ *а* в течение 100 *сек*. Сколько меди выделится на катоде за все это время? Электрохимический эквивалент меди $0{,}33 \cdot 10^{-6}$ *кг/к*.

12.122. За какое время ток в 1 *а* разложит 1 *г* воды?

12.123. Минимальное напряжение на электродах, при котором может происходить электролиз воды, равно 1,47 *в*. Какая энергия выделяется при взрыве гремучего газа на каждый грамм прореагировавшего водорода?

12.124. Сколько грамм-атомов и сколько атомов железа и хлора отложится в ванне с раствором хлористого железа при пропускании через электролит тока 1 *а* в течение 1 *ч*? Валентность железа 2, хлора 1.

12.125. Батарея из 12 соединенных последовательно элементов с э.д.с. 1,85 *в* и внутренним сопротивлением 0,3 *ом* каждый подключена к электродам ванн с азотнокислым серебром и хлорным золотом. Ванны соединены между собой последовательно и имеют сопротивление 12 и 18 *ом* соответственно. Сколько золота и серебра выделится на катодах в течение 1 *ч*? Как изменится ответ, если ванны включить параллельно? Атомные массы золота и серебра равны соответственно 197 и 108, их валентность 3 и 1.

12.126. При электролизе раствора азотносеребряной соли в течение 1 *ч* выделилось 9,4 *г* серебра. Определите э.д.с. поляризации, если напряжение на зажимах ванны равно 4,2 *в*, а сопротивление ванны 1,5 *ом*.

12.127. При электролизе воды через ванну протекло 5000 *к*. Какова температура выделившегося кислорода, если он находится в объеме $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ *м*^{3} под давлением $1{,}27 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}?

12.128. Сколько времени нужно производить электролиз подкисленной воды, чтобы полученным водородом наполнить при нормальных условиях воздушный шар с подъемной силой 1960 *н*? Ток при электролизе равен $I = 100$ *а*. Среднюю молекулярную массу воздуха принять равной 29, массой оболочки пренебречь.

12.129. Какой ток нужно пропускать через подкисленную воду, чтобы в течение времени $\tau = 30$ *мин* выделился гремучий газ, занимающий объем $V = 1{,}73 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3} при температуре $T = 294$ °K и давлении $p = 1{,}05 \cdot 10^5$ *н/м*^{2}?

Глава 13. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Основные понятия, законы и формулы

1. При движении электрических зарядов в пространстве, окружающем эти заряды, возникает магнитное поле.

Опытом установлено (закон Ампера), что на проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле, действует распределенная по проводнику сила

$$F = IlB \sin\alpha, \tag{13.1}$$

где I — ток в проводнике; l — длина проводника; B — индукция магнитного поля; α — острый угол между направлением магнитного поля и направлением тока (направлением движения положительных зарядов).

Связь между направлениями силы, тока и индукции устанавливается по правилу левой руки, причем всегда вектор силы $\vec{F}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежит ток и вектор индукции $\vec{B}$.

Согласно формуле (13.1) B—это физическая величина, численно равная максимальной силе, с которой магнитное поле действует на единичный проводник с током, помещенный в данную точку поля. Численно $B = F_{\text{макс}}$, если $Il = 1$.

2. На виток с током, находящийся в однородном магнитном поле (рис. 13.1), действует вращающий момент пары сил поля, равный $M = Fa\sin\varphi$, или с учетом выражения (13.1) для F:

$$M = ISB\sin\varphi, \tag{13.2}$$

где $S = la$ — площадь витка; φ — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к плоскости витка. Формула (13.2) носит общий характер и справедлива для плоской рамки любой формы.

Силовое действие магнитного поля на проводник с током вызвано действием сил поля на элементарные носители электричества, обусловливающие ток в проводнике. Если ток в проводнике вызван движением частиц, каждая из которых имеет заряд q и скорость v, и в единичном объеме проводника содержится N частиц, то ток в проводнике равен:

$$I = \frac{Nq}{t}.$$

Подставив это выражение для тока в формулу (13.1), легко установить, что на каждый элементарный носитель заряда, движущийся в магнитном поле, со стороны поля действует сила (сила Лоренца), равная

$$F_л = \frac{F}{N} \text{ или } F_л = qvB\sin\alpha. \tag{13.3}$$

В каждой точке траектории заряженной частицы сила Лоренца перпендикулярна векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$. При движении положительных зарядов связь между направлениями $\vec{F}$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ устанавливается по правилу левой руки, при движении отрицательных — по правилу правой руки.

3. Если по прямому проводнику длиной l течет ток силой I,

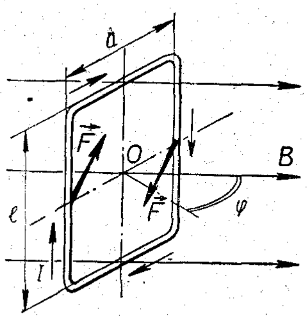


Рис. 13.1.

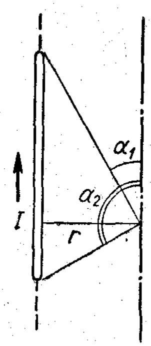


Рис. 13.2.

то в точке, удаленной от проводника на расстояние r (рис. 13.2), индукция магнитного поля равна:

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \tag{13.4}$$

где μ — магнитная проницаемость вещества — величина, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля, созданного током в данной среде, больше, чем индукция, созданная тем же током в вакууме; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{в \cdot сек}{а \cdot м}$ — магнитная постоянная.

В центре кругового витка с током I индукция магнитного поля равна:

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2R}, \tag{13.5}$$

где R — радиус витка.

Индукция магнитного поля в центре однослойной цилиндрической катушки (соленоида), радиус которой значительно меньше ее длины, равна:

$$B = \frac{\mu_0\mu nI}{l}, \tag{13.6}$$

где n — число витков; I — сила тока; l — длина соленоида, по которой распределена обмотка. Формулы (13.4) — (13.6) записаны в системе СИ.

4. Согласно соотношениям (13.1) и (13.4) на каждый элемент длиной l бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 действует сила

$$F = \frac{\mu_0\mu I_1I_2l}{2\pi d}, \tag{13.7}$$

где d — расстояние между проводниками.

5. Поток вектора индукции однородного магнитного поля через плоскую поверхность площадью S равен:

$$\Phi = BS\cos\alpha, \tag{13.8}$$

где α — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к площади S.

Магнитный поток, связанный с катушкой площадью S, имеющей n витков (поток сцепления), равен:

$$\Phi_c = n\Phi. \tag{13.8'}$$

6. При движении проводника (или контура) с током I в однородном магнитном поле силы поля совершают над проводником (контуром) работу, равную

$$A = I\Phi, \tag{13.9}$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий поверхность, описанную проводником при плоскопараллельном перемещении (изменение магнитного потока через контур). Формула (13.9) вытекает из определения работы постоянной силы и закона Ампера (13.1) с учетом формулы (13.8).

7. При изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в контуре возникает э.д.с. индукции (наведенная э.д.с.), величина которой пропорциональна скорости изменения магнитного потока (основной закон электромагнитной индукции):

$$\mathscr{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{13.10}$$

Возникновение э.д.с. индукции в замкнутом контуре приводит к появлению индукционного тока. Согласно закону Ленца индукционный ток имеет такое направление, при котором создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему индукционный ток. Математически это учитывается знаком «минус» в формуле (13.10).

Из уравнения (13.10) следует:

а) При изменении магнитного потока, пронизывающего катушку, состоящую из n витков, в катушке возникает э.д.с. индукции

$$\mathscr{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{13.10'}$$

так как все витки соединены между собой последовательно.

б) Количество электричества, индуцированного в контуре сопротивлением R при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$, равно:

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R},$$

поскольку $\mathscr{E} = IR$ и $I\Delta t = q$.

в) Если при равномерном движении проводника длиной l в однородном магнитном поле с индукцией B проводник перемещается на расстояние Δx за время Δt (рис. 13.3), то он пересекает магнитный поток (число силовых линий):

$$\Delta\Phi = l\Delta x B \sin\alpha.$$

Подставляя это выражение в формулу закона электромагнитной индукции и учитывая, что $\frac{\Delta x}{\Delta t} = v$ — скорости движения проводника в направлении, перпендикулярном $\vec{B}$, для э.д.с., возникающей на концах проводника, получим:

$$\mathscr{E} = lvB\sin\alpha. \tag{13.11}$$

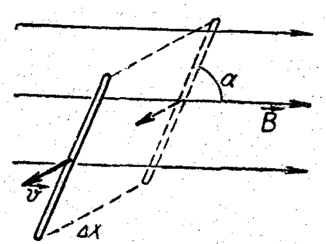


Рис. 13.3.

Направление индукционного тока (а следовательно, и полярность возникающей э.д.с.) определяют по правилу правой руки.

8. Явление возникновения э. д. с. индукции в контуре при изменении магнитного потока, создаваемого током самого контура, называют самоиндукцией. При неизменной конфигурации контура сцепленный с контуром магнитный поток пропорционален току в контуре:

$$\Phi_c = LI, \tag{13.12}$$

где L — индуктивность контура.

Как показывают формулы (13.6), (13.7) и (13.12), индуктивность длинного соленоида малого диаметра равна:

$$L = \frac{\mu_0\mu n^2 S}{l} = \mu_0\mu w^2 lS, \tag{13.13}$$

где $w = \frac{n}{l}$ — число витков, приходящихся на единицу длины катушки; l — ее длина; S — площадь поперечного сечения; μ — магнитная проницаемость сердечника соленоида.

Если в процессе изменения тока контур не деформируется и магнитная проницаемость сердечника остается постоянной, э.д.с. самоиндукции согласно формуле (13.10) равна:

$$\mathscr{E}_c = -\frac{\Delta\Phi_c}{\Delta t} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{13.14}$$

9. При равномерном вращении плоской рамки в однородном магнитном поле магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется с течением времени по закону $\Phi = nSB\cos\omega t$, где n — число витков; S — площадь рамки; B — индукция поля; ω — угловая скорость вращения рамки. За время Δt магнитный поток изменяется на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = nSB[\cos\omega(t + \Delta t) - \cos\omega t].$$

Если Δt очень мало, то $\cos\omega(t+\Delta t) - \cos\omega t = (\omega\sin\omega t)\Delta t$, поскольку в этом случае можно считать, что $\cos(\omega\Delta t) \approx 1$ и $\sin(\omega\Delta t) \approx \omega\Delta t$.

Учитывая это, для изменения магнитного потока получим:

$$\Delta\Phi = nSB\omega(\sin\omega t)\Delta t.$$

Согласно (13.10) э.д.с. индукции, возбуждаемая в рамке при ее равномерном вращении в магнитном поле, изменяется с течением времени по закону

$$\mathscr{E} = nSB\omega\sin\omega t, \tag{13.15}$$

или

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\sin\omega t,$$

где

$$\mathscr{E}_0 = nSB\omega \tag{13.15'}$$

— максимальное (амплитудное) значение электродвижущей силы.

10. Для преобразования механической энергии в электрическую применяются электрические машины — генераторы. В соответствии с законом сохранения и превращения энергии при работе генератора

$$N_{мех} = P_{эл} \text{ или } N_{мех} = I\mathscr{E}, \tag{13.16}$$

где $\mathscr{E}$ — э.д.с. генератора; I — сила тока в цепи якоря.

Для генератора с постоянными магнитами величина $\mathscr{E}$ определяется формулой (13.15). Напряжение U на зажимах генератора равно:

$$U = \mathscr{E} - IR,$$

где R — сопротивление якоря.

Для преобразования электрической энергии в механическую служат электрические машины — электродвигатели.

При работе электродвигателя электрическая мощность, развиваемая источником питания, расходуется частично на нагревание цепи, частично на вращение якоря. Если э.д.с. источника питания U, сила тока в цепи I, сопротивление цепи R, то

$$IU = I^2R + N_{мех}, \tag{13.17}$$

где $N_{мех}$ — механическая мощность, развиваемая двигателем. Эта мощность в свою очередь равна:

$$N_{мех} = M\omega = I\mathscr{E},$$

где M — вращающий момент на валу мотора; ω — угловая скорость вращения якоря.

Э.д.с. индукции $\mathscr{E}$, возникающая в обмотке якоря, равна:

$$\mathscr{E} = U - IR. \tag{13.18}$$

В случае работы шунтового двигателя под R в формулах (13.17) и (13.18) подразумевают сопротивление якоря, при работе сериесного — сопротивление всей цепи двигателя.

11. Если э.д.с. в цепи меняется с течением времени по закону синуса (или косинуса), то при отсутствии в цепи емкости или индуктивности напряжение в цепи $U_R = \mathscr{E}$ и по тому же закону изменяется сила тока: $I = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathscr{E}_0 \sin \omega t}{R} = I_0 \sin \omega t.$

Сопротивление R электрической цепи, не содержащей емкости и индуктивности, называют активным (омическим) сопротивлением.

Все цепи переменного тока с активным сопротивлением рассчитывают точно так же, как и при постоянном токе.

Если в цепь переменного тока с очень малым активным сопротивлением включен конденсатор емкостью C и э.д.с. в цепи, а следовательно, и напряжение U_C (на конденсаторе) изменяются по закону $\mathscr{E} = U_C = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$, заряд на конденсаторе будет меняться по закону:

$$q = CU_C = C\mathscr{E}_0 \sin \omega t = q_0 \sin \omega t.$$

При изменении напряжения электроны переходят с одной обкладки на другую и вызывают тем самым ток в проводах, соединяющих конденсатор с источником тока. Если за время Δt заряд на конденсаторе изменяется на величину Δq, то средняя сила тока в цепи равна: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$.

Изменение заряда при синусоидальном напряжении равно:

$$\Delta q = q_2 - q_1 = q_0 [\sin \omega(t + \Delta t) - \sin \omega t].$$

При достаточно малом Δt можно считать $\cos(\omega\Delta t) \approx 1$, $\sin(\omega\Delta t) \approx \omega t$, тогда

$$\Delta q = q_0\omega (\cos \omega t)\Delta t.$$

Учитывая это, для тока в контуре получим:

$$I = q_0 \omega \cos \omega t = C\mathscr{E}_0\omega \cos \omega t = I_0 \cos \omega t,$$

где $I_0 = C\mathscr{E}_0\omega$ — амплитуда тока.

Из сравнения выражений для силы тока и напряжения следует, что напряжение на обкладках конденсатора и сила тока в цепи сдвинуты по фазе на угол $\pi/2$, так что ток опережает напряжение на четверть периода.

Применяя для амплитуд напряжения и тока закон Ома, находим:

$$R_C = \frac{C\mathscr{E}_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}. \tag{13.19}$$

Сопротивление R_C участка цепи, содержащего емкость, называют емкостным сопротивлением.

Если в цепи переменного тока включен контур с индуктивностью L и э.д.с. в цепи (а следовательно, и напряжение U_L на контуре) изменяется по закону $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$, то ток в цепи будет равен:

$$I = \frac{\mathscr{E}_0 \sin \omega t - \mathscr{E}_c}{R},$$

где $\mathscr{E}_c$ — э.д.с. самоиндукции контура; R — полное активное сопротивление цепи.

При достаточно малом R (точнее, $R = 0$) $\mathscr{E}_c = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ и, следовательно (с учетом формулы 13.14),

$$U_L = \mathscr{E}_0 \sin \omega t = L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Переменный ток, проходящий по цепи, изменяется с той же частотой, что и э.д.с.; по фазе эти величины отличаются друг от друга.

Пусть сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_0 \times \sin(\omega t + \varphi)$, где φ — сдвиг фаз между током и э.д.с. Тогда за время Δt ток в цепи возрастет (уменьшится) на величину

$$\Delta I = I_2 - I_1 = I_0 \{\sin[\omega(t + \Delta t) + \varphi] - \sin(\omega t + \varphi)\}.$$

При достаточно малом Δt можно считать $\sin(\omega\Delta t) \approx \omega\,\Delta t$;

$$\cos(\omega\Delta t) \approx 1;\ \Delta I \approx [\omega I_0 \cos(\omega t + \varphi)]\,\Delta t$$

и, следовательно,

$$U_L = \mathscr{E}_0 \sin \omega t = L\omega I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Последнее равенство возможно лишь при условии, что $\varphi = -\pi/2$ и ток в цепи отстает по фазе от э.д.с. на угол $\pi/2$.

Так как $\mathscr{E}_0 = \omega L I_0$, то, применив закон Ома $I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{R_L}$, получим, что сопротивление участка, содержащего индуктивность (индуктивное сопротивление), равно:

$$R_L = \omega L. \tag{13.20}$$

Если все три сопротивления: активное R, индуктивное R_L и емкостное R_C — соединить последовательно, то полное сопротивление цепи переменному току будет равно:

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \tag{13.21}$$

Амплитудное значение тока в цепи равно:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{Z}.$$

Угол сдвига фаз между э.д.с. и током определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{13.22}$$

12. При последовательном соединении нагрузок R, C и L среднее за период значение мощности, развиваемой источником переменного синусоидального тока, равно:

$$P = \frac{I_0 \mathscr{E}_0 \cos\varphi}{2}. \tag{13.23}$$

Согласно этой формуле, на индуктивности и емкости мощность не выделяется, поскольку для них $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$. Мощность, выделяемая на активном сопротивлении и, следовательно, во всей внешней цепи, равна:

$$P = \frac{I_0 U_0}{2} = \frac{I_0^2 R}{2}, \tag{13.24}$$

где U_0 — амплитуда напряжения на R.

Силу постоянного тока, при которой в цепи с активным сопротивлением выделяется та же мощность, что и при переменном токе, называют действующим значением данного переменного тока. Значение постоянного напряжения, соответствующего действующему значению тока, называют действующим значением напряжения. В случае синусоидального тока

$$I_д = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \qquad U_д = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \tag{13.25}$$

13. Коэффициент трансформации равен:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2},$$

где n_1 — число витков в первичной обмотке трансформатора; n_2 — во вторичной; $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — э.д.с. индукции, возникающие соответственно в первичной и вторичной обмотках.

Если падение напряжения в первичной цепи трансформатора ничтожно мало по сравнению с напряжением U_1, подаваемым на трансформатор, с достаточной степенью точности можно считать, что $\mathscr{E}_1 = U_1$. При этом же условии для вторичной цепи $\mathscr{E}_2 = U_2$ и, следовательно,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2}. \tag{13.26}$$

У понижающего трансформатора при большом токе во вторичной цепи падением напряжения на вторичной обмотке пренебречь нельзя. В этом случае $\mathscr{E}_2 = U_2 + I_2 r_2$ и

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2 + I_2 r_2},$$

где I_2 — ток во вторичной цепи; r_2 — ее сопротивление.

Решение задач. Примеры

1. В задачах по элементарному курсу электромагнетизма можно выделить три основные группы: а) задачи о силовом действии магнитного поля на проводники с током и заряженные частицы; б) задачи на закон электромагнитной индукции и в) задачи на закон сохранения и превращения энергии в применении к процессам, протекающим при работе электрических машин. Многие из этих задач не требуют применения высшей математики и решаются сравнительно просто.

2. Решение задач расчетного характера о силах, действующих на проводники с током в однородном магнитном поле, удобно проводить по следующей схеме:

а) Сделать схематический чертеж, на котором указать контур с током и направление силовых линий поля. Отметить углы между направлением поля и отдельными элементами контура, если последний состоит из нескольких прямых проводников.

б) Используя правило левой руки, определить направление сил поля, действующих на каждый элемент контура, и проставить векторы этих сил на чертеже.

в) В тех случаях, когда задача сводится к нахождению одной из величин, входящих в выражение для сил, действующих на отдельные проводники контура (или вращающих моментов, создаваемых этими силами), дальнейшее решение состоит в том, чтобы записать уравнение (13.1) или (13.2) и найти из него искомую величину.

Если в задаче рассматривают равновесие проводника или контура с током в магнитном поле, то, помимо силы Ампера, нужно указать и все остальные силы, действующие на проводник, и записать условие его равновесия $\Sigma\vec{F} = 0$ (или $\Sigma M = 0$ — для рамки с током). Затем с помощью формул (13.1) и (13.2) следует расшифровать значение сил (моментов), входящих в уравнение равновесия, и подставить в него вместо $F(M)$ их выражения. В результате получается окончательное уравнение для определения искомой величины.

3. Особое место в задачах первой группы занимают задачи о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Их решение в большинстве случаев основано на составлении основного уравнения динамики материальной точки с учетом сил, действующих на заряженную частицу со стороны магнитного и электрического полей.

Схема решения этих задач во многом сходна с предыдущей.

а) Нужно сделать чертеж, указать на нем силовые линии магнитного и электрического полей, проставить вектор начальной скорости частицы и отметить знак ее заряда.

б) Если скорость частицы направлена под углом к линии индукции магнитного поля, ее следует разложить на две составляющие, одна из которых должна быть направлена перпендикулярно вектору $\vec{B}$, вторая параллельно ему. Такое разложение позволяет представить сложное движение в виде двух более простых и в значительной мере упрощает задачу, поскольку вдоль магнитного поля сила Лоренца не действует.

в) Изобразить силы, действующие на заряженную частицу. Обычно во всех задачах, где нет специальных оговорок, действие силы тяжести на элементарные частицы не учитывают, поскольку эта сила ничтожно мала по сравнению с силами электромагнитного поля. При нахождении направления силы Лоренца следует обратить особое внимание на знак заряда частицы, так как в одном случае нужно воспользоваться правилом левой руки, в другом — правой. Очень удобно силу Лоренца определять по направлению тока.

г) Указав силы, нужно попытаться определить вид траектории частицы. Иногда это удается сделать сравнительно просто, иногда нахождение вида траектории представляет основное содержание задачи.

Силы, действующие на заряженную частицу, следует разложить вдоль направления магнитного поля и по направлению, ему перпендикулярному. Делается это с той целью, чтобы установить причины изменения составляющих скорости $\vec{v}_\parallel$ и $\vec{v}_\perp$. Затем необходимо составить основное уравнение динамики материальной точки по каждому из направлений разложения сил.

Записав уравнения динамики, нужно подставить в них выражения сил, используя для этого формулы электростатики и формулу

силы Лоренца. В большинстве задач после такой подстановки получаются уравнения, из которых искомую величину определяют непосредственно, в ряде случаев к уравнениям динамики приходится добавлять формулы кинематики.

4. Решая задачи на закон электромагнитной индукции, удобно пользоваться следующими рекомендациями.

а) Анализируя условия задачи, необходимо прежде всего установить причины изменения магнитного потока, связанного с контуром, и определить, какая из величин B, S или α, входящих в выражение для Φ, изменяется с течением времени. После этого нужно записать основное расчетное соотношение (13.10) или (13.10′). Если в задаче речь идет о поступательном движении прямого проводника, то э.д.с. индукции определяют по формуле (13.11), вытекающей из закона электромагнитной индукции.

б) Затем выражение для Φ надо представить в развернутом виде. Для этого выбирают два момента времени t_1 и t_2 и для каждого из них определяют потоки Φ_1 и Φ_2, связанные с данным контуром. Изменение магнитного потока за время $\Delta t = t_2 - t_1$, в зависимости от условия задачи, будет равно или $\Delta\Phi = (B_2 - B_1) \times S\cos\alpha$, если изменяется магнитная индукция поля, в котором находится контур, или $\Delta\Phi = BS(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, если изменяется положение рамки в поле, или, наконец, $\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha$, где ΔS — площадь, описанная в пространстве движущимся проводником.

в) Далее надо подставить выражение для $\Delta\Phi$ в исходную формулу закона электромагнитной индукции и, записав дополнительные условия, решить полученные уравнения совместно относительно искомой величины. Наибольшие затруднения возникают обычно при расчете электрических цепей, содержащих аккумуляторы, когда на одном из участков цепи возникает э.д.с. индукции, вызванная движением проводника в магнитном поле. Решение в этом случае нужно начинать с определения величины и направления этой э.д.с., после чего задача сведется к расчету обычной цепи постоянного тока с несколькими источниками э.д.с., соединенными между собой последовательно или параллельно.

5. Решение задач о работе электрических машин постоянного тока основано на составлении уравнения закона сохранения и превращения энергии. В простейших случаях этого уравнения вполне достаточно для нахождения искомой величины; в более сложных задачах к уравнению энергетического баланса необходимо добавить вспомогательные уравнения, позволяющие представить в развернутом виде ту или иную величину, входящую в основное уравнение. Обычно для этого нужно воспользоваться формулами (13.16), (13.17) и (13.18).

Пример 1. Контур в виде квадрата с диагональю, изготовленный из медной проволоки сечением $S = 1$ *мм*^{2}, подключен к источнику постоянного напряжения $U = 110$ *в*, как показано на рисунке 13.4. Плоскость квадрата расположена параллельно магнитно-

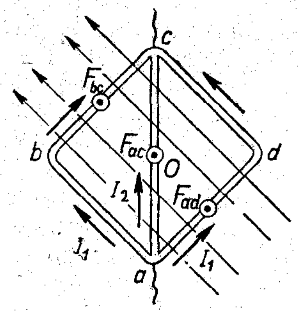


Рис. 13.4.

му полю с индукцией $B=1{,}7\cdot 10^{-2}$ *тл*. Определите величину и направление силы, действующей на контур со стороны поля.

Решение. Чтобы найти равнодействующую сил, действующих со стороны магнитного поля на контур с током, нужно найти величину и направление сил, действующих на отдельные элементы контура, и затем их сложить. По расположению элементов контура относительно поля в контуре можно выделить пять прямолинейных проводников ab, bc, cd, ad и ac. По этим проводникам протекают токи I_1 и I_2, величину которых можно определить из закона Ома для участка цепи. Так как напряжение подводится к точкам a и c, длина стороны квадрата равна l, площадь сечения проволоки и ее удельное сопротивление равны соответственно S и ρ, то

$$I_1 = \frac{U}{R_{abc}} = \frac{US}{2\rho l}; \qquad I_2 = \frac{US}{\rho l\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Проводники ab и cd расположены параллельно полю, поэтому $F_{ab}=0$ и $F_{cd}=0$, так как $\sin\alpha=0$. Проводники bc и ad перпендикулярны полю ($\alpha=90°$ и $\sin\alpha=1$), и на них действуют параллельные силы, равномерно распределенные по проводу, равнодействующая которых

$$F_{bc} = F_{ad} = I_1 lB. \tag{1}$$

Приложены эти силы в середине проводников и направлены перпендикулярно плоскости чертежа (на нас).

Проводник ac составляет с вектором индукции $\vec{B}$ угол $\alpha=45°$, его длина $l\sqrt{2}$, следовательно, со стороны поля на него действует сила

$$F_{ac} = I_2 l\sqrt{2}\,B\sin 45°, \tag{3}$$

направленная в ту же сторону, что и силы $\vec{F}_{bc}$ и $\vec{F}_{ad}$. Результирующая этих трех параллельных сил равна:

$$F = 2F_{bc} + F_{ac} = (2I_1 + I_2)\,lB, \tag{4}$$

точка ее приложения совпадает с центром контура — точкой O.

Решая уравнения (1)—(4) относительно F и подставляя числовые значения, получим:

$$F = \frac{(2+\sqrt{2})\,USB}{2\rho}; \qquad F \approx 190\ н.$$

Пример 2. Плоская рамка, состоящая из $n=50$ витков тонкой проволоки, подвешена на бронзовой ленточке между полюсами

электромагнита. При пропускании через рамку тока силой $I=1$ *а* рамка повернулась на угол $\alpha_1=15°$. Определите индукцию магнитного поля в том месте, где находится рамка, если известно, что при закручивании ленточки на угол $\varphi_0=1°$ возникает момент сил упругости $M_0=0{,}98\cdot 10^{-5}$ *н · м*. При отсутствии тока плоскость рамки составляла с направлением поля угол $\alpha_0=30°$, площадь рамки $S=10$ *см*^{2}.

Решение. На рамку с током, подвешенную в магнитном поле, действуют два вращающих момента: момент M_1, созданный силами поля, и противодействующий момент M_2, вызванный закручиванием упругого подвеса, на котором находится рамка. При равновесии рамки должно быть

$$M_1 = M_2. \tag{1}$$

Если по рамке проходит ток I, площадь рамки S, число витков n и при равновесии нормаль к плоскости рамки составляет угол α с вектором индукции $\vec{B}$, то

$$M_1 = nISB\sin\alpha. \tag{2}$$

По условию задачи момент сил упругости пропорционален углу закручивания подвеса:

$$M_2 = k\varphi,$$

где k — постоянный коэффициент, зависящий от геометрических размеров (формы, сечения) и материала подвеса. В данной задаче он определяется из условия, что при угле закручивания φ_0 возникает момент M_0, т. е. $M_0 = k\varphi_0$ и, стало быть,

$$M_2 = \frac{M_0}{\varphi_0}\varphi. \tag{3}$$

В свободном состоянии рамки, до включения тока, плоскость рамки составляла с направлением поля угол α_0 (рис. 13.5). Поэтому при переходе рамки во второе равновесное положение она повернется на угол

$$\varphi = \alpha_1. \tag{4}$$

На такой же угол закрутится нить, и нормаль к рамке будет составлять с направлением поля угол

$$\alpha = 90° - (\alpha_0 + \alpha_1). \tag{5}$$

С учетом формул (2), (3), (4) и (5) уравнение равновесия (1) можно представить в окончательном виде так:

$$\frac{M_0}{\varphi_0}\alpha_1 = nISB\cos(\alpha_0+\alpha_1).$$

Найдя отсюда индукцию магнитного поля и подставив

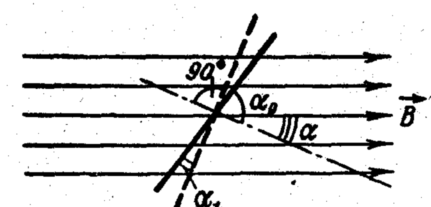


Рис. 13.5.

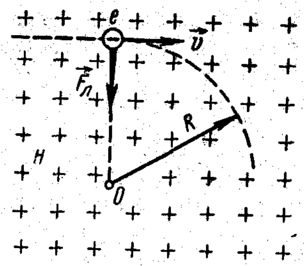


Рис. 13.6.

числовые значения, получим:

$$B = \frac{M_0\alpha_1}{nlS\varphi_0\cos(\alpha_0+\alpha_1)}; \quad B \approx 4\cdot 10^{-3}\ тл.$$

Пример 3. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1000\,в$, влетает в вакууме в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}\,тл$ перпендикулярно силовым линиям. Определите радиус окружности, описываемой электроном в поле. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot 10^{-9}\,к$, его масса $m = 9\cdot 10^{-31}\,кг$.

Решение. Заряженная частица, влетающая в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции, под действием силы Лоренца (всегда перпендикулярной вектору скорости) приобретает нормальное ускорение и начинает описывать окружность в плоскости, перпендикулярной направлению поля.

Если в магнитное поле, направленное перпендикулярно плоскости чертежа (от нас), влетает электрон со скоростью $\vec{v}$ (рис. 13.6), то на него будет действовать сила $\vec{F}_л$, направление которой определяется правилом правой руки, поскольку заряд электрона отрицательный. Согласно формулам (13.3) и (13.4) величина этой силы равна:

$$F_л = evB \tag{1}$$

($\sin\alpha = 1$, так как $\vec{v} \perp \vec{B}$). При $|\vec{B}| = \text{const}$ величина силы Лоренца будет оставаться неизменной, и если пренебречь действием силы тяжести, то можно считать, что электрон описывает окружность некоторого радиуса R. Согласно второму закону Ньютона

$$F_л = \frac{mv^2}{R}. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) служат основными соотношениями при решении всех задач на движение заряженных частиц в однородном магнитном поле; записав их, следует составить вспомогательные уравнения, исходя из дополнительных условий задачи. В данном случае скорость электрона задана через ускоряющую разность потенциалов U.

По закону сохранения и превращения энергии работа сил поля eU равна изменению кинетической энергии электрона. Пролетев между точками поля с разностью потенциалов U, электрон приобрел энергию

$$\frac{mv^2}{2} = eU \tag{3}$$

(кинетической энергией в начале разгона мы пренебрегем). Этим равенством условия задачи исчерпываются полностью. В системе

уравнений (1)—(3) неизвестными являются R, $F_л$ и v. Решая уравнения относительно искомого неизвестного R и подставляя числовые значения, получим:

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{m}{e}2U}; \quad R \approx 0{,}01\ м.$$

Пример 4. Протон влетает со скоростью $v = 10^3\ м/сек$ в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60°$ к силовым линиям. Определите радиус и шаг спиральной линии, по которой будет двигаться протон, если индукция поля равна $B = 10^{-3}\ тл$.

Решение. Если заряженная частица влетает в однородное магнитное поле так, что ее вектор скорости $\vec{v}$ направлен под углом α к вектору индукции $\vec{B}$ и действие всех сил, кроме силы Лоренца, ничтожно мало, частица начинает двигаться по винтовой линии. В этом нетрудно убедиться, разложив вектор скорости по направлению поля и направлению, ему перпендикулярному, на составляющие $\vec{v}_\parallel = \vec{v}\cos\alpha$ и $\vec{v}_\perp = \vec{v}\sin\alpha$ (рис. 13.7). При том направлении векторов $\vec{B}$ и $\vec{v}$, какое указано на чертеже, $\vec{F}_л$ действует на протон перпендикулярно плоскости чертежа (на нас) и непрерывно изменяет направление составляющей $\vec{v}_\perp$, сообщая частице в плоскости, перпендикулярной полю, нормальное ускорение $\vec{a}_н$. В результате протон описывает в этой плоскости окружность некоторого радиуса R, поскольку $\vec{B} = \text{const}$ и $v_\perp = \text{const}$. Если масса и заряд протона равны соответственно m и q, то

$$F_л = qv_\perp B = qvB\sin\alpha \tag{1}$$

и в то же время по второму закону Ньютона

$$F_л = \frac{mv_\perp^2}{R} = \frac{mv^2\sin^2\alpha}{R}. \tag{2}$$

Вдоль поля на протон никакие силы не действуют, следовательно, в этом направлении он движется прямолинейно с неизменной скоростью $v\cos\alpha$. В результате наложения прямолинейного движения на круговое протон описывает в пространстве винтовую линию. Шаг этой линии — расстояние, на которое смещается частица вдоль поля за один оборот, — равен:

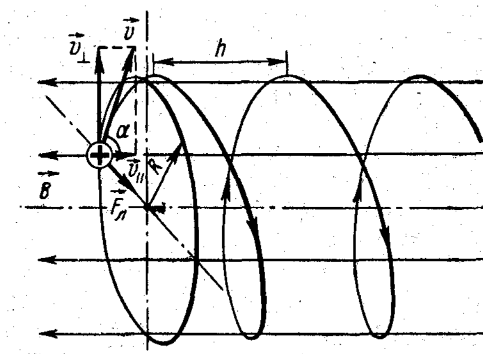


Рис. 13.7.

$$h = v_\parallel T = v\cos\alpha T, \tag{3}$$

где T — период обращения протона по кругу радиусом R. Этот период равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha}. \qquad (4)$$

В уравнениях (1) — (4) неизвестными являются $F_л$, R, h и T. Табличные значения $m = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ *кг*, $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*. Решая уравнения относительно искомых неизвестных R и h и подставляя числовые значения, получим:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}; \quad R \approx 9 \cdot 10^{-3}\ м; \quad h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{qB}; \quad h \approx 3{,}2 \cdot 10^{-2}\ м.$$

Пример 5. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 6 \cdot 10^{-2}$ *тл* находится соленоид диаметром $d = 8$ *см*, имеющий $n = 80$ витков медной проволоки сечением $\sigma = 1$ *мм*^{2}. Соленоид поворачивают на угол $\alpha = 180°$ за время $\Delta t = 0{,}2$ *сек* так, что его ось остается направленной вдоль поля. Определите среднее значение электродвижущей силы, возникающей в соленоиде, и индукционный заряд. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ *ом · м*.

Решение. Изменить магнитный поток, пронизывающий контур, и возбудить в нем э.д.с. индукции можно различными способами. Наиболее просто это сделать, повернув контур в магнитном поле так, чтобы изменился угол между нормалью к плоскости контура и направлением поля. Этот случай и разбирается в данной задаче.

При изменении магнитного потока, пронизывающего соленоид, состоящий из n витков, на $\Delta\Phi$ за время Δt в нем индуцируется э.д.с.

$$\mathscr{E} = -n \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Если в исходном положении катушка была расположена так, что ось ее составляла с направлением поля угол α_1, то при повороте оси на угол α_2 магнитный поток, пронизывающий соленоид, изменится на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS \cos(\alpha_1 + \alpha_2) - BS \cos \alpha_1, \qquad (2)$$

где S — площадь поперечного сечения соленоида. По условию задачи ось катушки в исходном положении совпадала с направлением поля ($\alpha_1 = 0$), а угол поворота $\alpha_2 = 180°$. Изменение магнитного потока в этом случае будет максимальное и равное

$$\Delta\Phi = -2BS.$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что сечение соленоида $S = \frac{\pi d^2}{4}$, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\mathscr{E} = \frac{\pi d^2 nB}{2\Delta t}; \quad \mathscr{E} \approx 0{,}24\ в.$$

При изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ в соленоиде индуцируется заряд

$$q = \frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad (3)$$

Сопротивление обмотки соленоида

$$R = \frac{n\pi\rho d}{\sigma}. \qquad (4)$$

Из соотношений (2) — (4) после подстановки числовых значений заданных величин находим:

$$q = \frac{\sigma dB}{2\rho}; \quad q = 1{,}4\ к.$$

Индуцированный заряд не зависит от скорости изменения магнитного потока и количества витков в соленоиде.

Пример 6. В магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ *тл* вращается стержень длиной $l = 0{,}2$ *м* с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ *сек*$^{-1}$. Найдите э.д.с. индукции, возникающей в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно силовым линиям магнитного поля.

Решение. Появление сторонних сил внутри стержня и возникновение разности потенциалов на его концах вызвано действием силы Лоренца на заряды, находящиеся в проводнике, пересекающем магнитные силовые линии. Если стержень вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω и перпендикулярно пересекает линии индукции под прямым углом (рис. 13.8), то под действием силы Лоренца электроны начнут смещаться вдоль стержня к одному из его концов. При том направлении поля и вращения, какое указано на чертеже, $\vec{F}_л$ направлена к оси вращения и туда же смещаются электроны. Движение электронов происходит до тех пор, пока возникающее внутри проводника электрическое поле не достигнет величины, при которой силы электрического отталкивания уравновешивают силы Лоренца.

В результате перемещения электронов на одном конце стержня оказывается их избыток, на другом — недостаток и между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \qquad (1)$$

где $\Delta\Phi$ — величина магнитного потока, пересекаемого стержнем за время Δt.

При вращении стержня под прямым углом к силовым линиям магнитного поля $\Delta\Phi = B\Delta S$, где ΔS — площадь сектора, описываемого стержнем.

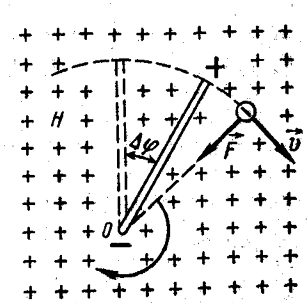


Рис. 13.8.

За время Δt стержень поворачивается на угол $\Delta\varphi$ и площадь сектора получается равной:

$$\Delta S = \frac{\Delta\varphi l^2}{2} = \frac{\omega l^2 \Delta t}{2}.$$

Учитывая это, для изменения магнитного потока найдем:

$$\Delta\Phi = \frac{B\omega l^2}{2}. \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) получим:

$$\mathscr{E} = \frac{B\omega l^2}{2},$$

или, после подстановки числовых значений, $\mathscr{E} = 2 \cdot 10^{-2}$ *в*.

Пример 7. Две параллельные шины, подключенные к аккумулятору с э.д.с. $\mathscr{E}_0$ и внутренним сопротивлением r, находятся в однородном магнитном поле с индукцией B. Шины замкнуты проводником длиной l и сопротивлением R, который перемещается по шинам без нарушения контакта перпендикулярно полю, со скоростью v. Пренебрегая сопротивлением шин, определите напряжение на зажимах источника, мощность тепловых потерь в проводнике, а также механическую мощность, подводимую к проводнику.

Р е ш е н и е. Допустим, что при том подключении аккумулятора к шинам и направлении магнитного поля, какое показано на рисунке 13.9, проводник перемещают равномерно слева направо. При своем движении проводник пересекает линии индукции поля и в нем возникает э.д.с. индукции $\mathscr{E}_и$ — источник тока, включенный последовательно с аккумулятором. В зависимости от направления поля и направления движения проводника $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}_и$ действуют или в одну, или в противоположные стороны. В первом случае ток в цепи аккумулятора усилится, во втором — ослабнет. В нашем примере, используя правило правой руки, нетрудно установить, что индукционный ток шел бы от b к a, уменьшая ток аккумулятора, т. е. э.д.с. $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}_и$ направлены навстречу друг другу. Поскольку проводник ab движется перпендикулярно полю ($\alpha = 90°$), величина э.д.с. индукции согласно формуле (13.11) равна:

$$\mathscr{E}_и = evB. \qquad (1)$$

Дальнейшее решение сводится к расчету цепи постоянного тока, содержащей два последовательно включенных элемента с разными э.д.с.

Пользуясь общими правилами такого расчета, находим общую э.д.с. контура (предполагая, что $\mathscr{E}_0 > \mathscr{E}_и$):

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_и, \qquad (2)$$

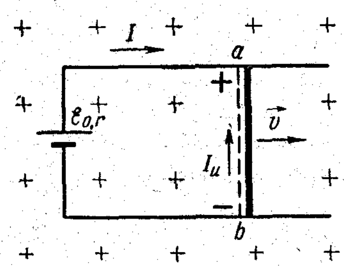


Рис. 13.9.

и ток в контуре:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r}. \qquad (3)$$

Поскольку аккумулятор разряжается и ток через него идет в естественном направлении, для напряжения на его зажимах получаем:

$$U = \mathscr{E}_0 - Ir. \qquad (4)$$

Мощность тепловых потерь, выделяемая на проводнике, равна:

$$P = I^2 R. \qquad (5)$$

Так как по проводнику ab, движущемуся в магнитном поле, идет ток, то со стороны поля на него действует сила F_A, направленная (согласно правилу левой руки) вправо. По закону Ампера

$$F_A = IlB. \qquad (6)$$

Чтобы проводник двигался равномерно, к нему должна быть приложена сила F, равная по величине силе F_A, но направленная в противоположную сторону. Механическая мощность в этом случае будет равна:

$$N = F_A v. \qquad (7)$$

Исключая из уравнений (1) — (7) неизвестные $\mathscr{E}_и$, $\mathscr{E}$, I и F_A, получим для искомых величин окончательные выражения:

$$U = \frac{\mathscr{E}_0 R + lvBr}{R + r}; \quad P = \frac{(\mathscr{E}_0 - lvB)^2 R}{(R + r)^2}; \quad N = \frac{(\mathscr{E}_0 - lvB)\, lvB}{R + r}.$$

Пример 8. Электромотор, включенный в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ *в* при полном сопротивлении цепи $R = 20$ *ом*, передает приводу мощность $N = 160$ *вт*. Какую э.д.с. разовьет этот мотор, если его использовать как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, какую он имел, работая как двигатель?

Р е ш е н и е. При работе электрической машины в качестве мотора основным уравнением, связывающим параметры электрической цепи, служит уравнение закона сохранения и превращения энергии.

Если источник дает постоянное напряжение U, полное сопротивление цепи R и электромотор развивает механическую мощность N, то согласно формуле (13.17)

$$IU = I^2 R + N, \qquad (1)$$

где I — сила тока в цепи.

При перемещении контура с током I в магнитном поле силы поля совершают над проводником работу $A = I\Delta\Phi$.

Развиваемая при этом механическая мощность за время Δt равна $N = I\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Поскольку в контуре при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ возникает э.д.с. индукции $\mathscr{E}_и = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, то должно быть

$$N = I\mathscr{E}_и. \qquad (2)$$

Величина э.д.с. индукции в якоре пропорциональна скорости его вращения (13.15′), поэтому, если использовать электромашину как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, что и при работе электромотора, э.д.с. генератора $\mathscr{E}$ будет равна э.д.с. индукции в электромоторе:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_и. \tag{3}$$

Этим уравнением условия задачи исчерпываются полностью. Исключая из уравнений (1) —(3) неизвестные I и $\mathscr{E}_и$, получим для определения искомой величины $\mathscr{E}$ уравнение

$$\mathscr{E}^2 - U\mathscr{E} + NR = 0,$$

из которого находим:

$$\mathscr{E} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}}{2}.$$

Подставляя сюда числовые значения, будем иметь:

$$\mathscr{E}_1 = 80 \text{ в} \quad и \quad \mathscr{E}_2 = 40 \text{ в}.$$

Двузначность полученного результата объясняется следующим. Если исключить из уравнений (1) и (2) силу тока I, то после простых преобразований получается квадратное уравнение относительно э.д.с. индукции якоря:

$$\mathscr{E}_и^2 - U\mathscr{E}_и + NR = 0,$$

которое при постоянных U и R можно рассматривать как зависимость механической мощности N от $\mathscr{E}_и$. Эта зависимость квадратичная, поэтому в общем случае одному значению N соответствуют два значения $\mathscr{E}_и$. График зависимости $N = f(\mathscr{E}_и)$ представлен на рисунке 13.10. Из анализа квадратного уравнения (или графика) следует, что $N = 0$, когда $\mathscr{E}_и = 0$ и $\mathscr{E}_и = U$ (и в том и в другом случае ток в цепи отсутствует).

Максимальную мощность мотор развивает при $\mathscr{E}_и = \frac{U}{2}$. Подставляя это значение $\mathscr{E}_и$ в исходное уравнение и решая его относительно N, получим:

$$N = N_{макс} = \frac{\mathscr{E}_и^2}{R} = \frac{U^2}{4R}.$$

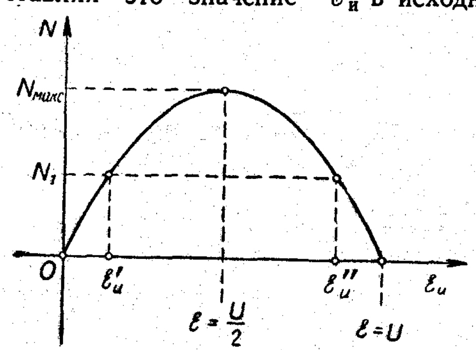


Рис. 13.10.

Пример 9. С какой частотой вращается якорь электромотора с постоянным магнитом, подключенный к источнику с напряжением U, если, работая в качестве генератора, он развивает э.д.с. $\mathscr{E}_2$, делая f_2 оборотов в секунду? Момент сил трения на валу мотора равен M, полное сопротивление цепи электромотора R. Какой ток будет проходить по цепи и какова будет скорость вращения якоря при $M = 0$?

Решение. При подключении электромотора к источнику с постоянным напряжением U за счет мощности IU, развиваемой источником, происходит нагревание цепи и совершается механическая работа Nt. Согласно закону сохранения и превращения энергии

$$IU = I^2R + N. \tag{1}$$

Механическую мощность можно выразить через момент сил трения на валу мотора M и частоту вращения якоря f_1:

$$N = M\omega_1 = M \cdot 2\pi f_1. \tag{2}$$

С другой стороны, эта же мощность равна:

$$N = I\mathscr{E}_1, \tag{3}$$

где $\mathscr{E}_1$ — э.д.с. индукции, возникающая во вращающемся якоре.

Согласно формуле (13.15′)

$$\mathscr{E}_1 = nSB\omega_1 = kf_1, \tag{4}$$

где $k = 2\pi nSB$.

Работая как генератор, мотор развивает э.д.с. $\mathscr{E}_2$, делая f_2 оборотов в секунду, следовательно,

$$\mathscr{E}_2 = kf_2. \tag{5}$$

Составленная система уравнений содержит пять неизвестных величин: I, N, $\mathscr{E}_1$, k и f_1. Требуется определить f_1. Из уравнений (1) — (3) находим:

$$IU = I^2R + 2\pi f_1 M \quad и \quad U = IR + \mathscr{E}_1.$$

Исключая отсюда I и проводя упрощения, получим:

$$\mathscr{E}_1^2 - U\mathscr{E}_1 + 2\pi f_1 RM = 0.$$

Из уравнений (4) и (5) после исключения k имеем:

$$\mathscr{E}_1 = \frac{f_1}{f_2}\mathscr{E}_2.$$

Подставляя в предыдущее уравнение вместо $\mathscr{E}_1$ его выражение и решая полученное уравнение относительно f_1, находим:

$$f_1 = \frac{(U\mathscr{E}_2 - 2\pi f_2 RM)}{\mathscr{E}_2^2} f_2.$$

Из этой формулы вытекает, что при $M = 0$ частота вращения якоря электромотора равна:

$$f_1 = \frac{U}{\mathscr{E}_2} f_2.$$

Из уравнения (1) с учетом (2) следует, что при $M = 0$ должно быть $N = 0$. В этом случае $I = 0$ (холостой ход), или $I = \frac{U}{R}$ (якорь полностью заторможен).

Пример 10. Сколько времени будет гореть неоновая лампочка в течение 1 *мин* при подключении ее в сеть переменного синусоидального тока с действующим значением напряжения $U_д = 120$ *в* и частотой $f = 50$ *гц*, если лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U = 84$ *в*?

Решение. При включении лампочки в сеть переменного тока напряжение на ее электродах меняется с течением времени по закону

$$U = U_0 \sin 2\pi f t, \qquad (1)$$

где U_0 — максимальное значение напряжения.

Максимальное значение синусоидального напряжения связано с действующим равенством

$$U_0 = U_д \sqrt{2}. \qquad (2)$$

Так как лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U_1 < U_0$, то в течение одного полупериода она будет гореть в течение времени

$$\Delta t = t_2 - t_1, \qquad (3)$$

где t_1 и t_2 — интервалы времени, прошедшего от начала периода T до момента вспышки и гашения. Всего за время $t_0 = 1$ *мин* лампочка горит в течение времени

$$t_x = 2ft_0\,\Delta t, \qquad (4)$$

поскольку в интервале t_0 будет содержаться $2\frac{t_0}{T} = 2ft_0$ промежутков Δt.

В уравнении (1) после подстановки выражения (2) все величины, кроме t, будут известны, и из полученного уравнения можно определить значения t_1 и t_2. Подставляя числовые значения $U = U_{заж} = U_{гаш}$ и $U_д$, найдем: $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}$, откуда в пределах $\frac{T}{2}$:

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6}; \quad t_1 = \frac{T}{12}; \quad \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5}{6}\pi; \quad t_2 = \frac{5}{3}T.$$

Следовательно, $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{3}$; $\Delta t = \frac{1}{150}$ *сек.*

Подставляя после этого числовые значения в уравнение (4), найдем время горения неоновой лампочки за 1 *мин*:

$$t_x = 40 \text{ сек}.$$

Пример 11. В сеть переменного синусоидального тока включены последовательно конденсатор емкостью $C = 100$ *мкф* и катушка индуктивности диаметром $d = 10$ *см*, состоящая из $n = 1000$ витков медной проволоки сечением $S = 1$ *мм*^{2}, вплотную

прилегающих друг к другу. Какая средняя тепловая мощность выделяется на активном сопротивлении катушки индуктивности за 1 период колебания тока в цепи, если амплитудное значение напряжения в сети равно $U_0 = 120$ *в*? При какой частоте тока эта мощность будет максимальной? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ *ом* · *м*.

Решение. Если в сеть синусоидального напряжения включены емкость, индуктивность и активное сопротивление, то рассеивание мощности P происходит на активном сопротивлении, где она выделяется в виде тепла. В нашем примере активным сопротивлением R является сопротивление проводов катушки индуктивности. Поскольку напряжение на этом сопротивлении совпадает по фазе с током и $\varphi = 0$, то согласно формуле (13.23)

$$P = \frac{I_0 U_0}{2}, \qquad (1)$$

где I_0 — амплитудное значение тока в цепи.

По закону Ома

$$I_0 = \frac{U_0}{Z}, \qquad (2)$$

где Z — полное сопротивление цепи переменному току.

Поскольку сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, Z состоит из активного сопротивления катушки R, сопротивления конденсатора R_C и сопротивления индуктивности R_L. Согласно формуле (13.21)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}, \qquad (3)$$

где f — частота тока в городской сети, равная 50 *гц*.

Активное сопротивление обмотки из медной проволоки с удельным сопротивлением ρ и сечением S равно:

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{\pi n \rho D}{S}, \qquad (4)$$

где n — число витков; D — средний диаметр катушки. Учитывая, что длина катушки $l = nd = 2n\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ и витки вплотную прилегают друг к другу, для ее индуктивности получим:

$$L = \frac{\pi\mu_0 n D^2}{8}\sqrt{\frac{\pi}{S}} \text{ (см. формулу 13.13)}. \qquad (5)$$

Последовательно подставляя числовые значения в формулы (5), (4) и (3), находим:

$$L \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ гн}; \quad R = 5{,}34 \text{ ом}; \quad Z = 5{,}36 \text{ ом}.$$

После этого из соотношений (1) и (2) найдем:

$$P = \frac{U_0^2 R}{2Z^2}; \quad P \approx 1{,}34 \text{ квт}.$$

Из последней формулы видно, что мощность тепловых потерь максимальна в том случае, когда полное сопротивление цепи минимально. Согласно выражению (3) $Z = Z_{мин} = R$, если выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Это возможно при частоте

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}};\quad f \approx 5{,}6\ кгц.$$

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении при такой частоте, равна:

$$P_0 = \frac{U_0^2}{2R};\quad P_0 = 1{,}35\ квт.$$

Задачи к главе 13

13.1. Медный провод сечением S, согнутый в виде трех сторон квадрата, прикреплен своими концами к горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, вектор которой направлен вертикально вверх. На какой угол от вертикали отклонится плоскость контура при прохождении по нему тока I? Решите задачу при условии, что провод согнут в виде трех сторон правильного треугольника и шарнирно закреплен в одной из вершин.

13.2. Деревянный цилиндр массой 0,25 *кг* и длиной 0,10 *м* расположен на наклонной плоскости. На цилиндр намотано 10 витков тонкой проволоки так, что плоскость каждого витка проходит через ось цилиндра параллельно наклонной плоскости. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 *тл*, вектор которой направлен вертикально вверх. Какой минимальный ток нужно пропустить через рамку, чтобы цилиндр не скатывался с наклонной плоскости? Трение скольжения между цилиндром и наклонной плоскостью велико.

13.3. Зеркальный гальванометр имеет рамку площадью 1,5 $см^2$, состоящую из 300 витков тонкой проволоки. Рамка подвешена на нити, в которой при закручивании нити на угол в один радиан возникает момент упругости, равный 0,98 $н \cdot м$. Рамка находится в магнитном поле с индукцией 0,1 *тл*, направленном радиально к оси вращения рамки. Шкала гальванометра с делениями в 1 *мм* расположена на расстоянии 1 *м* от зеркала. При каком токе в рамке гальванометра указатель на шкале сместится на 1 деление?

13.4. Плоскость медного диска радиусом R расположена перпендикулярно магнитному полю с индукцией $\vec{B}$ (рис. 13.11). При пропускании тока I между скользящими контактами a и b диск начинает вращаться со скоростью n *об/сек*. Определите вращающий момент действующий на диск, и мощность, развиваемую таким двигателем.

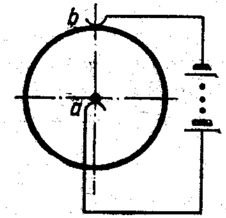


Рис. 13.11.

13.5. По проволочному кольцу радиусом R течет ток I. Кольцо находится в однородном магнитном поле с индукцией B, силовые линии которого перпендикулярны плоскости кольца. Какой должна быть минимальная прочность кольца, чтобы оно при растяжении не разорвалось?

13.6. По проволоке, согнутой в виде правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, пропускается ток I. Найдите индукцию магнитного поля на оси многоугольника как функцию расстояния x от его центра и исследуйте полученное выражение. Рассмотрите случай, когда

$$n = 3 \text{ и } x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \text{ (тетраэдр)},$$
$$n = 4 \text{ и } x = R,\quad n = \infty \text{ (кольцо)}.$$

13.7. По трем длинным параллельным проводам, удаленным друг от друга на одинаковое расстояние $r = 0{,}4$ *м*, идут токи $I = 10$ *а*, I и $-2I$. а) Найдите геометрическое место точек в пространстве, где индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю. б) Какую силу нужно приложить к каждому метру проводника с током $2I$, чтобы он находился в равновесии?

13.8. Квадратная рамка со стороной 10 *см* расположена около длинного провода с током 100 *а* так, что две стороны рамки параллельны проводу и отстоят от него на расстоянии 20 *см*. Чему будет равен вращающий момент, действующий на рамку, если по ней пропускать ток 10 *а*?

13.9. В центре витка радиусом 30 *см* находится компас, установленный в горизонтальной плоскости. При отсутствии тока в контуре магнитная стрелка лежит в плоскости витка. Если по витку пропустить ток 5 *а*, стрелка поворачивается на угол 30°. Определите горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли.

13.10. Предполагая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите радиусом $0{,}53 \cdot 10^{-8}$ *см*, определите период обращения электрона вокруг ядра и индукцию магнитного поля, создаваемого движущимся электроном в центре его орбиты.

13.11. Сколько медного провода понадобится для изготовления соленоида, в котором можно было бы получить магнитное поле с индукцией $5 \cdot 10^{-2}$ *тл* при питании катушки от источника постоянного напряжения 110 *в*? Допустимую плотность тока для меди считать равной 20 $а/мм^2$, витки прилегают друг к другу плотно.

13.12. Внутри соленоида, имеющего 400 витков, распределенных по длине в 40 *см*, находится виток радиусом 2 *см*, по которому течет ток 0,1 *а*. Какой максимальный вращающий момент может действовать на виток, если через соленоид пропустить ток 10 *а*?

13.13. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $2 \cdot 10^{-5}$ *тл* перпендикулярно линиям индукции магнитного поля. Сколько оборотов будет делать в магнитном поле протон за 1 *сек*?

13.14. Для определения отношения заряда электрона к его массе пучок электронов разгоняют между катодом и анодом электроннолучевой трубки. При наложении магнитного поля на трубку так, чтобы оно было направлено перпендикулярно пучку, светлое пятно на экране смещается на 5 *см*. Зная напряжение между анодом и катодом, равное 10 *кв*, расстояние от анода до экрана 10 *см* и индукцию магнитного поля $5 \cdot 10^{-4}$ *тл*, определите это отношение.

13.15. Частица, имеющая заряд электрона, влетает в однородное магнитное поле под углом 45° к линиям индукции и движется по винтовой линии с шагом 2 *см*. Определите импульс частицы, если индукция поля равна 10^{-2} *тл*.

13.16. Электрон, движущийся со скоростью v, попадает во взаимно перпендикулярные однородные электрическое и магнитное поля, напряженность и индукция которых $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Скорость электрона перпендикулярна обоим полям. Как будет двигаться электрон? При каком условии электрон будет двигаться равномерно и прямолинейно? Опишите движение первоначально покоившегося электрона во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

13.17. Через плоский конденсатор, помещенный в магнитное поле с индукцией B, длительное время пропускают поток электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов U. Пластины конденсатора параллельны полю, скорость электронов перпендикулярна вектору $\vec{B}$, площадь обкладок S, отношение заряда электрона к его массе равно γ. Какой заряд накопится на конденсаторе?

13.18. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью 10 $см^2$, расположенный перпендикулярно силовым линиям. Какой ток потечет по витку, если поле будет убывать с постоянной скоростью 10^{-2} *тл/сек*, сопротивление витка 1 *ом*? Чему равна напряженность электрического поля в витке?

13.19. Тонкий медный обруч массой m расположен в однородном магнитном поле с индукцией B. Плоскость обруча перпендикулярна направлению поля. Как нужно повернуть обруч, чтобы в нем индуцировался максимальный заряд, протекающий в одном направлении? Какова величина этого заряда? Какое количество электричества пройдет по проводнику, если обруч, потянув в диаметрально противоположных точках, вытянуть в линию?

13.20. Прямоугольную рамку, сделанную из проволоки сопротивлением $R = 1$ *ом*, перемещают с постоянной скоростью через область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}5$ *тл* (рис. 13.12). При какой скорости v в рамке выделится количество теплоты $Q = 10^{-3}$ *дж*, если $l_1 = 0{,}10$ *м*, $l_2 = 0{,}05$ *м* и $l_3 > l_2$?

13.21. Стержень OA сопротивлением R и длиной l скользит по полукольцу, сопротивление которого ничтожно мало (рис.

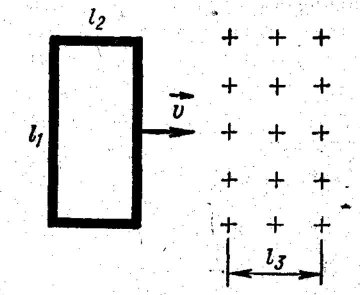


Рис. 13.12.

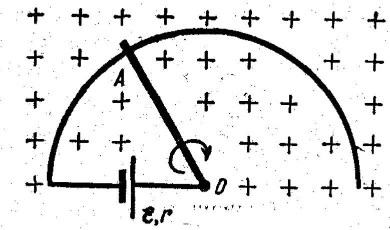


Рис. 13.13.

13.13). На контур наложено однородное магнитное поле с индукцией B, э.д.с. источника $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r, угловая скорость вращения стержня ω. Найдите ток в стержне и разность потенциалов на его концах. При каком значении ω ток в стержне равен нулю?

13.22. Для измерения индукции магнитного поля между полюсами электромагнита поместили плоскую катушку сечением 2 $см^2$, состоящую из 40 витков. Катушку расположили перпендикулярно направлению магнитного поля и подключили к гальванометру, цепь которого имеет сопротивление 800 *ом*. Известно, что стрелка гальванометра отклоняется на 4 деления при прохождении через рамку прибора заряда 10^{-8} *к*. При выдергивании катушки из поля стрелка гальванометра отклонилась на 20 делений. Определите индукцию магнитного поля. Какое отклонение даст гальванометр, если катушку повернуть на 180°?

13.23. Самолет летит горизонтально со скоростью 800 *км/ч*. Чему равна разность потенциалов, возникающая на концах крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $5 \cdot 10^{-5}$ *тл*? Размах крыльев равен 20 *м*. Чему равна максимальная э.д.с., которая может возникнуть при полете самолета? Горизонтальная составляющая поля Земли $2 \cdot 10^{-5}$ *тл*.

13.24. Проводник длиной 10 *см* перемещают в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 *тл* так, что его ось составляет угол 60° с направлением поля. Как нужно двигать проводник, чтобы разность потенциалов на концах проводника возрастала равномерно на 1 *в* за 1 *сек*?

13.25. Металлический стержень массой 0,1 *кг* и длиной 1 *м* подвешен за середину к пружине с коэффициентом упругости 9,8 *н/м*. Стержень совершает гармонические колебания с амплитудой 10 *см* в однородном магнитном поле с индукцией 10^{-2} *тл*, направленном перпендикулярно плоскости колебаний. Определите максимальную разность потенциалов, возникающую на концах стержня.

13.26. Плоскость прямоугольной проволочной рамки перпендикулярна однородному магнитному полю с индукцией 0,1 *тл*. Одна сторона рамки bc подвижна и может скользить по двум другим. Между точками a и d включена лампочка с сопротивлением 50 *ом*. Какую силу нужно приложить к подвижной части рамки, имеющей длину 0,2 *м*, чтобы перемещать ее со скоростью 1 *м/сек*, не нарушая контакта? Сопротивлением проволоки пренебречь.

13.27. Две параллельные медные шины, расположенные вертикально на расстоянии 1 *м* друг от друга, замкнуты вверху на сопротивление 1 *ом* и помещены в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 *тл*, перпендикулярное плоскости шин. Вдоль шин падает проводник массой 0,1 *кг*. Пренебрегая сопротивлением шин и проводника, определите установившееся значение скорости падения. Трение не учитывать.

13.28. В условии предыдущей задачи шины замкнуты на конденсатор емкостью 100 *см*. Определите ускорение проводника.

13.29. В однородное магнитное поле с индукцией 1 *тл* помещен проводник длиной 0,1 *м* и сопротивлением 1 *ом*. Проводник соединен с источником тока, э.д.с. которого 10 *в* и внутреннее сопротивление 0,1 *ом*. Проводник перемещают перпендикулярно силовым линиям со скоростью 10 *м/сек*. Определите наибольшую силу тока, который может проходить по проводнику, и напряжение на нем. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

13.30. В центре кругового витка перпендикулярно его плоскости создается переменный магнитный поток. Какова будет разность потенциалов между двумя произвольно взятыми точками витка? Изменится ли ответ, если между этими точками подключить магнитоэлектрический вольтметр? Будет ли при этом сказываться положение проводников, которыми подключен вольтметр, на его показаниях?

13.31. Переменное магнитное поле, сосредоточенное вблизи оси кольца и имеющее ось симметрии, проходящую через центр кольца, создает в кольце э.д.с. индукции $\mathscr{E}$. На кольце выбран участок, равный трети длины кольца, и к нему параллельно подключен проводник сопротивлением R, расположенный вне магнитного поля. Чему равен ток в этом проводнике, если сопротивление провода, из которого сделано кольцо, равно $2R$?

13.32. Из изолированной проволоки сделана петля в форме восьмерки, радиусы колец равны r и R. Определите разность потенциалов между точками соприкосновения провода, если перпендикулярно плоскости петли наложено магнитное поле, индукция которого меняется с течением времени по закону $B = kt$, где k — постоянный коэффициент.

13.33. Проволочная рамка с током 2 *а* расположена в однородном магнитном поле перпендикулярно его силовым линиям. Какую работу против сил поля нужно совершить, чтобы повернуть рамку на 90° вокруг оси, проходящей через диаметр рамки? Площадь рамки 200 *см*^{2}, индукция магнитного поля 10^{-2} *тл*. Каков будет ответ, если рамку повернуть на 180°?

13.34. Катушка с немагнитным сердечником имеет 1000 витков, длина катушки 40 *см*, сечение 10 *см*^{2}. С какой скоростью нужно менять ток в катушке, чтобы в ней возникала э.д.с. самоиндукции 1 *в*?

13.35. По однослойной катушке с индуктивностью 50 *мгн* течет ток 5 *а*. Какое количество электричества индуцируется в катушке при выключении тока, если длина ее 100 *см*, а диаметр медной проволоки обмотки 0,6 *мм*?

13.36. Катушку с ничтожно малым сопротивлением и индуктивностью 3 *гн* подключают к источнику постоянного напряжения с э.д.с. 1,5 *в*. Через сколько времени ток в катушке достигнет 50 *а*? Сопротивлением источника пренебречь.

13.37. Э.д.с. самоиндукции, возникающая в цепи с индуктивностью 2 *гн*, изменяется с течением времени по закону $\mathscr{E} = 10 + 4t$. По какому закону изменяется ток в цепи?

13.38. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, разряжается на катушку с индуктивностью L. Сколько тепла выделится в катушке к тому моменту, когда ток в ней достигнет наибольшего значения I?

13.39. Легкая пружина длиной l и радиусом r имеет n витков. Коэффициент упругости пружины k. К пружине подвешивают груз массой m. На какое максимальное расстояние может сместиться груз, если по пружине пропустить ток I? Нагреванием пружины пренебречь.

13.40. Ротор генератора, имеющего 12 пар полюсов, делает 240 *об/мин*. Максимальная э.д.с. генератора 10 *в*. По какому закону изменяется величина электродвижущей силы с течением времени?

13.41. Электродвигатель, включенный в сеть с напряжением 120 *в*, развивает полезную мощность 1,47 *квт*. Используя мотор в качестве генератора, при той же скорости вращения якоря, что и в первом случае, можно получить э.д.с. 80 *в*. Чему равно сопротивление цепи?

13.42. Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с э.д.с. 24 *в*, при полном сопротивлении цепи 20 *ом* и токе 0,2 *а* делает 600 *об/мин*. Какую э.д.с. разовьет этот мотор, работая в качестве генератора при 1500 *об/мин*?

13.43. Электрический двигатель при напряжении 120 *в* развивает мощность 160 *вт*, делая 100 *об/мин*. Каким будет максимальное число оборотов двигателя при этом напряжении, если сопротивление цепи якоря 20 *ом* и двигатель развивает ту же мощность? Какое число оборотов разовьет такой двигатель при холостом ходе? Трение не учитывать.

13.44. В шунтовом генераторе постоянного тока напряжение на зажимах равно 120 *в* и ток во внешней цепи равен 48 *а*. Ток в индукторе 2 *а*, сопротивление цепи якоря 0,15 *ом*. Найдите э.д.с. индукции и коэффициент полезного действия генератора.

13.45. Работая в качестве электродвигателя, мотор при напряжении 120 *в* потребляет ток 20 *а*, делая 100 *об/мин*. С какой скоростью нужно вращать якорь мотора, чтобы, работая как генератор, он

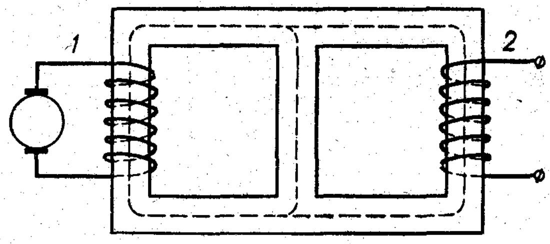


Рис. 13.14.

давал напряжение 80 *в*? Какую механическую мощность нужно при этом подводить к генератору? Полное сопротивление цепи в обоих случаях равно 5 *ом*.

13.46. Груз массой m, подвешенный на нити, намотанной на ось генератора с постоянным магнитом, замкнутым на сопротивление R, опускается со скоростью v. С какой скоростью будет подниматься вверх тот же груз, если генератор включить в цепь постоянного тока с э.д.с. $\mathscr{E}$ и тем же сопротивлением цепи?

13.47. Плоский контур с индуктивностью L и сопротивлением R вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B. Площадь контура S. Определите силу тока в контуре. Какую мощность необходимо затрачивать, чтобы вращать контур?

13.48. Индуктивность, емкость и активное сопротивление соединены между собой последовательно. Действующие напряжения на них равны соответственно U_L, U_C и U_R. Чему равно действующее напряжение на всем участке?

13.49. Лампочку мощностью 60 *вт*, рассчитанную на напряжение 120 *в*, нужно включить в сеть переменного тока напряжением 220 *в*. Какой конденсатор нужно включить последовательно с лампочкой, чтобы она горела полным накалом? Какой индуктивностью можно заменить конденсатор?

13.50. Участок цепи состоит из активного и индуктивного сопротивлений, соединенных между собой параллельно. Величина этих сопротивлений равна соответственно 60 и 80 *ом*. К участку подводится синусоидальное напряжение с амплитудой в 120 *в*. Чему равно сопротивление контура? Решите задачу при условии, что активное сопротивление заменено емкостным сопротивлением, имеющим такую же величину.

13.51. На симметричный железный сердечник, показанный на рисунке 13.14, намотаны две катушки. При включении первой катушки в сеть переменного тока напряжение на клеммах второй катушки оказывается равным 13,6 *в*. Если включить в ту же сеть вторую катушку, то напряжение на клеммах первой будет равно 120 *в*. Чему равно отношение витков катушек? Считать, что магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и распределяется между его разветвлениями на две равные части.

13.52. Автотрансформатор, содержащий в первичной обмотке 300 витков, включен в сеть с напряжением 220 *в*. Во вторичную цепь трансформатора, имеющую 165 витков, включен безындукционный потребитель сопротивлением 50 *ом*. Какой ток идет во вторичной цепи, если падение напряжения на ней равно 50 *в*?

ЧАСТЬ IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Глава 14. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА

Основные понятия, законы и формулы

1. При описании многих явлений, связанных с распространением световых волн, удобнее использовать более простое геометрическое представление, чем волна, — световой луч.

Световым лучом называют бесконечно узкий пучок электромагнитных волн, совпадающий с направлением распространения волны. Световая волна, падающая на поверхность раздела двух сред, частично отражается от нее, возвращаясь в первую среду, частично проходит во вторую.

Тела или системы тел, преобразующие ход лучей света, называют оптическими системами.

Если расходящийся пучок лучей, идущий от светящейся точки предмета, преобразуется оптической системой в сходящийся пучок, изображение точки, получающееся на месте пересечения преобразованных лучей, называют действительным.

Если расходящийся пучок лучей, выходящий из светящейся точки предмета, преобразуется оптической системой так, что он остается расходящимся, изображение точки предмета, получающееся на месте пересечения продолжений преобразованных лучей, называют мнимым.

2. Всякая отражающая поверхность преобразует падающие на нее лучи так, что угол падения луча всегда равен углу отражения и лучи, падающий и отраженный, лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восставленным из точки падения.

Если лучи, падающие на плоскую поверхность раздела двух сред параллельным пучком, после отражения остаются параллельными, отражение называют зеркальным, а саму поверхность — плоским зеркалом.

Пучок лучей, падающий из светящейся точки A (рис. 14.1) на плоское зеркало, преобразуется зеркалом так, что: а) все отраженные лучи будут пересекаться своим продолжением в точке A_1, яв-

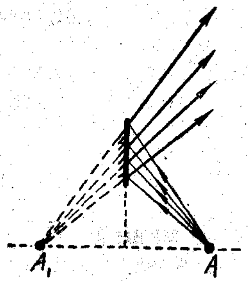


Рис. 14.1.

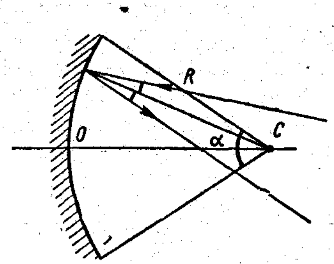


Рис. 14.2.

ляющейся мнимым изображением точки A. Глазу наблюдателя, расположенному в отраженном потоке, будет казаться, что лучи выходят не из точки A, а из точки A_1; б) расстояние от изображения до плоскости зеркала равно расстоянию от этой плоскости до предмета; в) изображение протяженного предмета в плоском зеркале равно по размерам самому предмету и расположено симметрично относительно плоскости зеркала.

3. Если зеркально отражающая поверхность представляет собой часть шаровой поверхности (рис. 14.2), то такое зеркало называют сферическим. Центр шара — точку C — называют оптическим центром зеркала, его радиус R — радиусом зеркала. Вершину шарового сегмента O называют полюсом зеркала, угол α, под которым этот сегмент виден из оптического центра — угловым отверстием (апертурой) зеркала. Прямую, проходящую через оптический центр и полюс зеркала, называют главной оптической осью; всякую другую прямую, проходящую через оптический центр, называют побочной оптической осью зеркала.

Согласно законам отражения луч, падающий на сферическое зеркало, и луч отраженный составляют с радиусом зеркала одинаковые углы и лежат вместе с ним в одной плоскости.

4. Для вогнутых зеркал с большим радиусом кривизны (чем он больше, тем точнее) справедливо следующее.

а) Если на зеркало падает узкий пучок параллельных лучей, то после отражения все лучи пересекаются в одной точке, называемой фокусом зеркала. Фокус, лежащий на главной оптической оси, называется главным, фокус, лежащий на побочной оси, — побочным. Фокусы вогнутого зеркала являются действительными. Геометрическое место всех фокусов представляет часть сферической поверхности, называемой фокальной поверхностью. Радиус фокальной поверхности равен $\frac{R}{2}$. Расстояние от фокальной поверхности до поверхности зеркала называют фокусным расстоянием.

б) Фокусное расстояние F зеркала радиусом R равно:

$$F = \frac{R}{2}.$$

в) При построении изображений и расчетах высотой сферического сегмента зеркала можно пренебречь по сравнению с R.

г) Если светящаяся точка (небольшой по сравнению с R протяженный предмет) находится на расстоянии d от зеркала и ее изображение получается на расстоянии f от него, то

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \tag{14.1}$$

В формуле (14.1) все расстояния от зеркала до мнимых точек берутся со знаком «минус», до действительных — со знаком «плюс». Это правило относится как к f, так и к d. Случай мнимого предмета может иметь место, когда сам предмет является изображением, полученным от другого зеркала или линзы. Фокусное расстояние вогнутого зеркала всегда положительно.

Если расстояния от предмета и изображения до главного фокуса равны соответственно l_0 и l, формулу зеркала можно представить в виде:

$$F^2 = \frac{R^2}{4} = l_0 l. \tag{14.2}$$

д) При построении изображения светящейся точки в вогнутом зеркале из всего потока лучей, падающих на зеркало, используют два из следующих четырех.

Луч, идущий от точки предмета параллельно какой-либо оптической оси, после отражения проходит через фокус, лежащий на этой оси.

Луч, проходящий через оптический центр зеркала, после отражения идет по тому же направлению назад (поскольку угол падения, а следовательно, и угол отражения равен нулю).

Луч, идущий от какой-либо точки предмета в направлении полюса зеркала; как и любой луч, он отразится от зеркала под углом, равным углу падения, который в этом случае можно построить сравнительно точно.

Луч, проходящий через фокус, лежащий на какой-либо оси, после отражения идет параллельно оптической оси, на которой лежит этот фокус.

Чаще всего при построении используют первые два луча.

е) Если предмет высотой H_0 расположен перпендикулярно главной оптической оси и высота его изображения оказывается равной H, то линейное увеличение (уменьшение предмета), даваемое зеркалом, равно:

$$k = \frac{H}{H_0} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d - F}. \tag{14.3}$$

5. Выпуклые зеркала с большим радиусом кривизны обладают следующими свойствами.

а) Если пучок параллельных лучей падает на зеркало, то после отражения лучи идут так, что своим продолжением пересекаются в одной точке, называемой фокусом. Фокусы выпуклого зеркала мнимые. Геометрическое место всех фокусов выпуклого зеркала — фокальная поверхность — представляет собой часть сферы радиусом $\frac{R}{2}$.

б) Формула выпуклого зеркала имеет вид:

$$-\frac{1}{F}=-\frac{2}{R}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \qquad (14.4)$$

Правую часть этого уравнения всегда берут со знаком «минус», поскольку фокус выпуклого зеркала мнимый. Перед остальными членами уравнения ставят знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, является ли изображение или предмет действительным или мнимым.

Связь между l_0, l и F дается тем же уравнением (14.2).

в) При построении изображения светящейся точки в выпуклом зеркале используются те же характерные лучи, что и в вогнутом.

г) Линейные размеры изображения, получаемого в выпуклом зеркале, можно определить по формуле:

$$k=\frac{H}{H_0}=\frac{f}{d}=\frac{F}{d+F}. \qquad (14.5)$$

Решение задач. Примеры

1. Задачи на законы отражения — это задачи на определение размеров и взаимного расположения изображений, предметов и зеркал. Их можно разделить на две основные группы: задачи, связанные с нахождением изображения в зеркале, и задачи на системы зеркал. И в той и в другой группе различают задачи, где требуется провести только графическое построение, и задачи расчетные.

В первой группе можно выделить отдельно задачи о плоском, вогнутом и выпуклом зеркалах.

Вторая группа задач фактически является комбинацией задач первой группы.

Рассмотрим каждую группу отдельно.

2. Решение почти всех задач по оптике, в том числе и расчетного характера, начинают с выполнения построений. Для этого нужно изобразить зеркало, его главную оптическую ось, если речь идет о сферическом зеркале, и, отметив на ней фокус и центр, указать сам предмет, руководствуясь числовыми значениями заданных величин. На расположение предмета относительно характерных точек сферического зеркала следует всегда обращать особое внимание, так как от этого зависят положение и размеры изображения.

В общем случае для построения изображения предмета достаточно найти изображение двух его крайних точек, поскольку мы рассматриваем только такие зеркала, в которых всякая прямая линия преобразуется в прямую. Изображение точек предмета строят при помощи двух характерных лучей.

Чаще всего бывает затруднительно построить точки, лежащие на главной оптической оси. Чтобы найти их изображение, один луч берут проходящим через центр зеркала (он отразится по тому же направлению, что и падал), второй выбирают произвольно. Ход второго луча после отражения определяется так: нужно провести нормаль к поверхности зеркала в точку падения луча (она совпадает с радиусом зеркала) и, построив по углу падения угол отражения, провести сам луч. В том месте, где пересекутся оба отраженных луча, и находится искомое изображение точки. Графическое построение, безусловно, не является точным, поэтому, рисуя отраженные лучи, нужно заранее предвидеть, где они примерно должны пересечься, т. е. знать, где находится изображение относительно характерных точек зеркала.

Ход отраженного луча, падающего под произвольным углом на сферическое зеркало, можно определить и с помощью побочной оптической оси. Для этого параллельно падающему лучу надо начертить побочную оптическую ось, найти на ней побочный фокус (точку пересечения фокальной поверхности с осью) и через него провести отраженный луч.

Построив изображение предмета и обозначив расстояния от предмета и изображения до зеркала, можно перейти к составлению расчетных уравнений. Их записывают на основании формулы зеркала и формулы увеличения. Составляя уравнение, связывающее d, f и F, особое внимание нужно обратить на знаки перед ними, помня, что все расстояния до мнимых точек надо брать со знаком «минус».

Если в задаче даются дополнительные условия, то, записав основные уравнения, к ним следует добавить вспомогательные. Эти уравнения, как правило, связывают расстояния, входящие в основные уравнения, и могут быть легко получены из анализа чертежа.

Если в задаче рассматривают не одно, а два или более положений одного и того же предмета, строить изображения и составлять уравнения надо для каждого случая отдельно.

Записав основные и вспомогательные уравнения, решают их совместно относительно искомой величины.

3. Задачи, связанные с расчетами и построениями в системах зеркал, сравнительно трудны и требуют не только твердых знаний основного материала, но и определенных навыков решения. Принципиально они не отличаются от задач на одно зеркало. Как правило, в них требуется найти изображение предмета после двукратного отражения лучей сначала от одного Z_1, а затем от другого зеркала Z_2. Особенность решения состоит лишь в том, что здесь ход лучей, падающих на второе зеркало после их отражения от первого, приходится отыскивать по промежуточному изображению, даваемому первым зеркалом. Все расчеты и построения основываются на том, что в силу обратимости хода лучей изображение, даваемое первым

зеркалом, можно рассматривать как предмет для второго, изображение, даваемое вторым, как предмет для первого и т. д. Следует обратить особое внимание на некоторую формальность такого метода и учитывать, что промежуточный предмет — изображение для следующего зеркала может быть и действительным (в формуле зеркала d нужно брать со знаком «плюс»), и мнимым (d — со знаком «минус»).

Второй случай имеет место, когда изображение, даваемое первым зеркалом, получается за вторым зеркалом. При графическом отыскании мнимого предмета задача состоит в построении предмета по его изображению.

Независимо от того, из каких зеркал состоит оптическая система (плоское — плоское, вогнутое — вогнутое, выпуклое — выпуклое и т. д.), решение задач данного типа имеет много общего, и его во всех случаях удобно проводить по следующей схеме:

а) Сделать чертеж и, указав на нем зеркала, главные оптические оси (они, как правило, совпадают), фокусы и центры, отметить расстояние L между зеркалами и расстояние d от предмета A_0 до первого зеркала. При этом нужно все время руководствоваться числовыми значениями заданных величин, так как лишь по ним можно сделать чертеж, соответствующий условиям задачи, и правильно расположить зеркала и предмет.

б) Построить точку A_1 — изображение предмета в первом зеркале Z_1 (как если бы второго зеркала Z_2 не было) и, найдя f_1 по формуле зеркала, определить расстояние d_2 между точкой A_1 и вторым зеркалом.

в) Независимо от того, каким будет изображение A_1 в первом зеркале — действительным или мнимым, точку A_1 можно рассматривать как предмет для второго зеркала.

Лучи, отраженные от Z_1 и дающие изображение A_1, могут падать при этом на второе зеркало так, как если бы они выходили из светящегося предмета, расположенного на месте изображения. Точка A_1 должна находиться в этом случае перед вторым зеркалом ($f_1 < L$), лучи от нее идут на Z_2 расходящимся пучком, и она фактически служит предметом для этого зеркала. A_1 здесь можно считать действительным предметом для Z_2, удаленным от него на расстояние $d_2 = L - f_1$, и найти его изображение A_2 обычным путем.

Может случиться, что изображение A_1 попадет за второе зеркало Z_2 ($f_2 > L$), тогда это изображение удобно рассматривать как мнимый предмет для Z_2, находящийся от него на расстоянии $d_2 = f_1 - L$. Нетрудно заметить, что в этом случае лучи, отраженные от Z_1, падают на Z_2 сходящимся пучком.

В зависимости от радиуса второго зеркала и положения точки A_1 относительно второго зеркала (расстояния d_2) лучи, идущие на Z_2 сходящимся пучком, могут отразиться от него или сходящимся, или расходящимся, или параллельным пучком. В первом случае отраженный поток даст действительную точку пересечения лучей и второе изображение (точка A_2) будет действительным. Положение

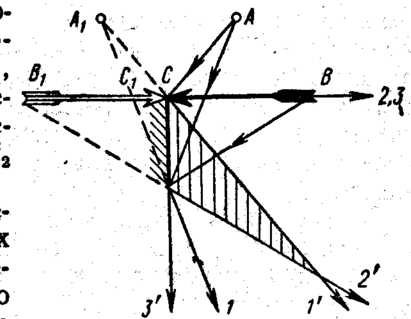


Рис. 14.3.

изображения A_2 относительно второго зеркала определяется по формуле (14.1) или (14.4) при условии, что предмет (точка A_1) мнимый (перед d_2 знак «минус») и изображение действительное (перед f_2 знак «плюс»).

Во втором случае точка пересечения лучей находится на их продолжении и искомое изображение A_2 оказывается мнимым. Это явление можно наблюдать только в выпуклом зеркале. Положение A_2 относительно второго зеркала определяется по формуле выпуклого зеркала, в которой все расстояния берут отрицательными.

Если на второе зеркало падает пучок параллельных лучей (точка A_0 помещена в фокусе первого зеркала), изображение A_2 будет находиться или в фокусе этого зеркала, если оно сферическое, или в бесконечности, если зеркало плоское.

Увеличение, даваемое системой зеркал при двукратном отражении лучей, равно:

$$k = \frac{H_2}{H_0} = \frac{H_1 H_2}{H_0 H_1} = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} = k_1 k_2,$$

где H_0 — высота предмета; H_1 — высота изображения, даваемого лучами, отраженными от первого зеркала; H_2 — высота изображения, даваемого этими лучами после отражения от второго зеркала; k_1 и k_2 — увеличение, даваемое каждым зеркалом.

Пример 1. Определите графически, при каких положениях глаза наблюдатель сможет видеть в плоском зеркале одновременно изображение точки A и отрезка прямой BC, расположенных относительно зеркала так, как показано на рисунке 14.3.

Р е ш е н и е. Чтобы видеть изображение какой-либо точки предмета в зеркале, необходимо, чтобы в отраженном потоке лучей, идущих из этой точки на зеркало, нашлись бы лучи, попадающие в глаз наблюдателя. В данном примере в глаз должны отразиться лучи, выходящие из точек A, B и C.

Лучи, идущие на зеркало из точки A, отражаются расходящимся пучком $1 - 1'$ и дают на своем продолжении изображение A_1.

Лучи, падающие на зеркало из крайних точек предмета BC, идут расходящимися пучками $2 - 2'$ и $3 - 3'$, давая соответственно мнимые изображения концов предмета B_1 и C_1. От остальных точек предмета лучи будут располагаться в пространстве, ограниченном лучами $2 - 3'$.

Чтобы одновременно видеть изображение точки A и крайних точек предмета B и C, а следовательно и весь предмет, глаз наблю-

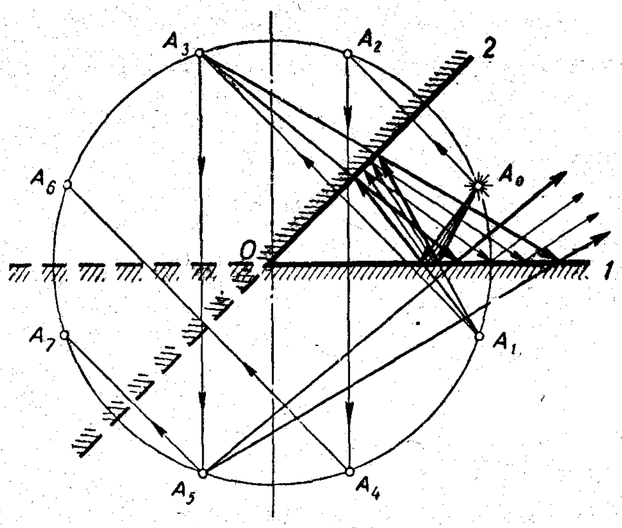


Рис. 14.4.

дателя следует расположить так, чтобы в него могли попасть лучи, дающие изображения A_1, B_1 и C_1. Как видно из чертежа, пространство, в каждой точке которого встречаются лучи, удовлетворяющие такому условию, заключено внутри заштрихованного треугольника. В одной из точек этого пространства и должен находиться глаз.

Пример 2. Сколько изображений получается от светящейся точки, находящейся между двумя плоскими зеркалами, расположенными под углом 45° друг к другу?

Решение. Если между зеркалами *1* и *2* поместить светящуюся точку A (рис. 14.4), выходящие из нее лучи будут попадать на зеркала, многократно отражаться от них расходящимися пучками, давая всякий раз на своем продолжении мнимые изображения.

Вычертить ход лучей и построить все изображения даже в таком простом случае, как наш, практически невозможно, поскольку чертеж получается очень громоздким. Однако для решения можно ограничиться схематическим построением, учитывая то, что мнимое изображение, даваемое одним зеркалом, можно считать предметом для второго.

Рассмотрим пучок лучей, падающих из точки A_0 на зеркало *1*. После отражения он идет к зеркалу *2* так, как если бы выходил из точки A_1, являющейся изображением предмета A_0 в первом зеркале. Кроме отраженного пучка, на второе зеркало падает пучок лучей, выходящих непосредственно из A_0 (на рисунке он не указан). Оба эти пучка отразятся так, что на их продолжении получатся точки A_2 и A_3, которые являются изображением точек A_0 и A_1 в зеркале 2.

Лучи, отраженные от второго зеркала, вновь попадают на первое, отражаются от него, давая изображения A_4 и A_5, для которых предметами являлись точки A_2 и A_3. Для наглядности и удобства построений плоскости зеркал на чертеже продолжены за линию их пересечения.

Точки A_4 и A_5 можно рассматривать как предмет для второго зеркала. Их изображениями служат симметричные точки A_6 и A_7, находящиеся по другую сторону зеркала *2*.

Нетрудно заметить, что при расположении зеркал под углом 45° друг к другу полученные изображения будут последними. Отраженные от второго зеркала лучи, на продолжении которых получаются точки A_6 и A_7, идут таким образом, что при своем отражении дают изображения, совпадающие с ранее полученными.

Всего в зеркалах, установленных под углом 45° друг к другу, получается семь изображений.

Точка A_0 и все ее изображения расположены по кругу радиуса OA_0 с центром в точке пересечения зеркал O. В этом легко убедиться, доказав равенства $OA_0 = OA_1 = \ldots = OA_n$.

На основании проведенных построений, обобщая полученный результат на случай, когда зеркала поставлены друг к другу под углом α (α есть целый делитель 360°), формулу для числа изображений предмета, помещенного между зеркалами, можно записать так:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1.$$

Для $\alpha = 45°$ эта формула дает:

$$n = \frac{360°}{45°} - 1 = 7.$$

При $\alpha = 180°$, когда зеркала развернуты и фактически представляют одно зеркало, $n = 1$. Если $\alpha = 0$ (зеркала расположены параллельно друг другу), изображений получается бесконечно много: $n = \infty$.

Пример 3. Изображение, даваемое вогнутым сферическим зеркалом, в k раз больше самого предмета. Если зеркало передвинуть на расстояние l вдоль главной оптической оси, изображение оказывается во столько же раз больше предмета, как и в первом случае. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение. В задаче рассматривают два положения предмета, находящегося на разных расстояниях от вогнутого зеркала, причем оба раза изображения получаются увеличенными в одинаковое число раз. Легко догадаться, что это возможно лишь в том случае, когда предмет помещен между фокусом и центром зеркала (изображение увеличенное, действительное) и когда он находится между зеркалом и фокусом (изображение увеличенное, мнимое). Если предположить, что изображение было действительным в первом случае, то для получения такого же по величине мнимого изображения зеркало нужно сдвинуть ближе к предмету.

Делаем чертеж (рис. 14.5), и для каждого из двух положений предмета строим изображения H_1 и H_2. Отмечаем расстояния от

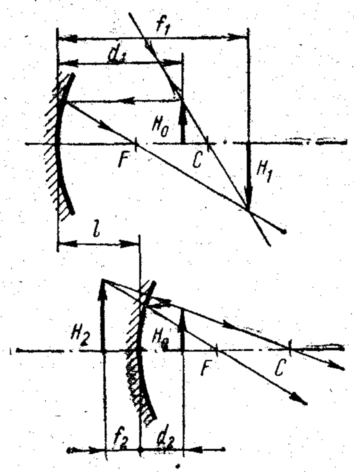


Рис. 14.5.

предмета и изображения до зеркала d_1, d_2, f_1, f_2, а также расстояние l.

Если радиус зеркала равен R, то для первого положения предмета, когда изображение получается действительным, формула зеркала и формула увеличения дают :

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \quad \text{и} \quad k = \frac{f_1}{d_1}. \tag{1}$$

Для второго случая — мнимого изображения:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} \quad \text{и} \quad k = \frac{f_2}{d_2}. \tag{2}$$

Вспомогательное условие позволяет записать:

$$d_1 - d_2 = l. \tag{3}$$

По условию задачи нам известно увеличение k и перемещение зеркала l. Требуется определить радиус зеркала R. Исключая из уравнений (1)—(3) неизвестные d_1, d_2, f_1 и f_2 и решая их относительно R, находим:

$$R = kl.$$

Пример 4. Диаметр отверстия выпуклого сферического зеркала радиусом R равен D. С какого минимального расстояния человек может видеть себя во весь рост, если рост его равен H?

Р е ш е н и е. В любом, даже самом маленьком зеркале можно построить изображение очень большого предмета. Однако из этого не следует, что все изображение можно увидеть. Размеры той части предмета, изображение которой можно рассмотреть, не изменяя положения глаз, зависят от предельного угла зрения и размеров зеркала. Предельный угол зрения для каждого человека имеет определенное значение, однако во всех задачах предполагается, что видимая часть изображения определяется лишь размерами зеркала.

Чтобы в зеркале минимальных размеров было видно изображение предмета AB, нужно, чтобы в глаз наблюдателя попадали лучи, дающие изображение его концов A_1 и B_1. Это возможно при условии, что края зеркала лежат на прямой, соединяющей крайние точки изображения с центром наблюдения. Если размеры зеркала будут больше оптимальных, часть зеркала, выходящая за эти границы, будет лишней. Если же зеркало окажется меньше, то часть изображения увидеть невозможно. При заданных размерах выпуклого зеркала, расположенного на уровне глаз, человек может видеть себя во весь рост только с некоторого минимального расстояния, при котором лучи, дающие изображение головы и ног, попадают в глаз. Если к зеркалу подойти ближе, изображение человека станет боль-

ше, крайние точки выйдут за пределы оптимальных границ (рис. 14.6). Допустим, что человек (предмет $AB = H$) находится перед выпуклым зеркалом радиусом R и диаметром отверстия D на таком расстоянии d, что из точки A он видит себя во весь рост. Тогда мнимое изображение человека $A_1B_1 = H_1$ должно быть расположено от зеркала на таком расстоянии f, чтобы точки A, M, A_1 и A, N, B_1 лежали на прямых линиях.

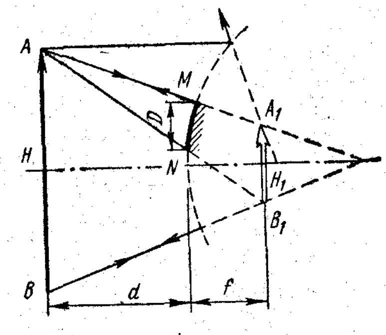


Рис. 14.6.

Обратите внимание, как сделано построение изображения. Из точки B проведен только один луч, поскольку известно, что изображение предмета A_1B_1 перпендикулярно главной оптической оси. Для отыскания луча, идущего параллельно этой оси, зеркало достроено, так как любой луч, выходящий из A, после отражения попадает своим продолжением в A_1.

Сделав построение, можно записать основные уравнения для выпуклого зеркала, учитывая знаки отрезков:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f} \quad \text{и} \quad \frac{H_1}{H} = \frac{f}{d}. \tag{1}$$

Дополнительное уравнение составляем, исходя из того, что треугольники AA_1B_1 и AMN подобны. (Малой кривизной зеркала MN пренебрегаем.) Поскольку высоты в этих треугольниках равны d и $d + f$, то

$$\frac{D}{H_1} = \frac{d}{d+f}. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) — (2) относительно искомого расстояния d, находим:

$$d = \frac{H - 2D}{D} F.$$

Пример 5. Радиус вогнутого сферического зеркала (рис. 14.7) равен $R = 40$ *см*. На главной оптической оси зеркала помещен точечный источник света на расстоянии $d = 30$ *см* от зеркала. На каком расстоянии от вогнутого зеркала нужно поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от вогнутого, а затем от плоского зеркала, вернулись в точку, где находился источник?

Р е ш е н и е. По условию задачи светящаяся точка лежит между фокусом и центром, поэтому ее изображение A_1 будет расположено где-то за центром на расстоянии f от зеркала Z_1.

Изображение A_1 получено в точке действительного пересечения лучей, отраженных от вогнутого зеркала, поэтому, если на их пути

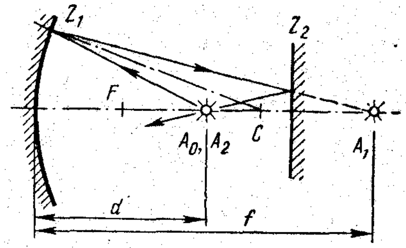


Рис. 14.7.

поставить плоское зеркало Z_2, лучи упадут на него сходящимся пучком, после отражения пойдут тоже сходящимся пучком и дадут на своем пересечении изображение A_2. Используя принцип обратимости лучей, точку A_1 можно рассматривать как мнимый предмет для плоского зеркала; ее изображение A_2 в этом случае будет действительным и расположенным относительно плоскости Z_2 симметрично A_1. Поскольку плоскость зеркала делит расстояние между предметом и его изображением пополам и по условию задачи изображение A_2 должно попасть в то место, где находится предмет, легко сообразить, что зеркало Z_2 нужно поставить посредине между светящейся точкой A_0 и ее промежуточным изображением A_1. Расстояние f определяется из формулы вогнутого зеркала:

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Если плоское зеркало помещено между точками A_0 и A_1, то от вогнутого зеркала оно должно находиться на расстоянии

$$L=\frac{d+f}{2}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) — (2) совместно относительно L и подставляя числовые значения d и R, получим:

$$L=\frac{d^2}{(2d-R)};\ L=45\ см.$$

Пример 6. В центре вогнутого сферического зеркала (рис. 14.8) с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ *см* находится выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ *см*. Между фокусом и центром вогнутого зеркала на расстоянии $d = 28$ *см* от его полюса поставлен предмет высотой $H_0 = 2$ *см* перпендикулярно главной оптической оси. Определите величину и положение изображения в выпуклом зеркале, даваемого лучами, отраженными от вогнутого зеркала.

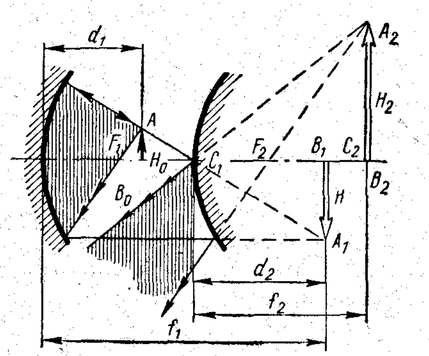


Рис. 14.8.

Р е ш е н и е. По условию задачи радиусы зеркал одинаковы и предмет высотой $A_0B_0 = H_0$ расположен между фокусом и центром вогнутого зеркала. Изображение предмета высотой

$A_1B_1 = H_1$, даваемое первым зеркалом, должно находиться за его центром на расстоянии f_1 от этого зеркала.

Это изображение построено лучом, проходящим через C_1 и F_1. Ход таких лучей после отражения от второго зеркала проследить особенно просто.

Построив изображение, записываем основные уравнения для первого зеркала:

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1} \quad и \quad H_1=H_0\frac{f_1}{d_1}.$$

Чтобы найти положение изображения A_1B_1 относительно второго зеркала, нужно вычислить f_1. Подставляя в первое из этих уравнений числовые значения F_1 и d_1, находим: $f_1 = 70$ *см*. Изображение получалось бы за вторым зеркалом на расстоянии

$$d_2 = f_1 - 2F_1 = 30\ см,$$

потому что полюс второго зеркала находится в центре первого.

Для построения изображения в выпуклом зеркале считаем A_1B_1 для него мнимым предметом. Из чертежа и проведенных расчетов видно, что лучи, дающие изображение точки A_1, падают на выпуклое зеркало сходящимся пучком. Определить их ход после отражения от второго зеркала можно по расположению изображения A_1B_1 относительно характерных точек выпуклого зеркала.

Учитывая обратимость хода лучей, нетрудно заметить, что, если какая-нибудь точка изображения, например A_1, оказалась между полюсом и фокусом второго зеркала, отраженные от него лучи шли бы сходящимся пучком и давали действительное изображение — точку A_2. Лучи, вышедшие из точки A_2, как из действительного предмета, давали бы в этом случае мнимое изображение, лежащее между зеркалом и фокусом. Если бы точка A_1 попала на фокальную поверхность второго зеркала, то сходящийся пучок лучей был бы при отражении преобразован зеркалом в параллельный.

И наконец, когда изображение A_1B_1 оказывается дальше F_2, сходящийся пучок преобразуется выпуклым зеркалом в расходящийся. Именно это мы и имеем в данной задаче. Так как $F_2 < d_2 < 2F_2$, расходящийся пучок лучей, отраженный от второго зеркала, дает в нем мнимое изображение A_2B_2 мнимого предмета A_1B_1. Построение этого изображения видно из чертежа. Его можно выполнить очень просто, если считать второе зеркало вогнутым с отражающей поверхностью с правой стороны. Этот прием очень удобен, и им можно всегда пользоваться как для построения, так и для расчетов изображения мнимого предмета в выпуклом зеркале.

Обратите внимание: при графическом построении изображения A_2B_2 мнимого предмета A_1B_1 мы по заданному изображению A_1B_1 строили предмет A_2B_2.

Зная расстояние от A_1B_1 до выпуклого зеркала и его радиус, составляем уравнение для определения искомого расстояния f_2 между изображением A_2B_2 и зеркалом.

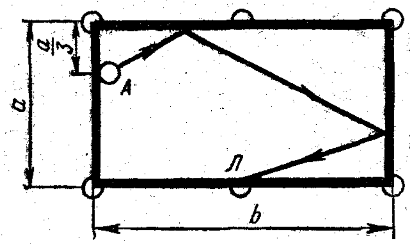


Рис. 14.9.

Поскольку и фокус, и предмет, и его изображения мнимые, то

$$-\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1'},$$

или

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2},$$

откуда

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2};$$

$$f_2 = 60\ см.$$

Величина мнимого изображения во втором зеркале будет равна $H_2 = H_1 \frac{f_2}{d_2}$ или с учетом выражения для H_1:

$$H_2 = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} H_0;\quad H_2 = 10\ см.$$

Задачи к главе 14

14.1. Солнечные лучи, падающие под некоторым углом на плоское горизонтальное зеркало, отражаясь, попадают на вертикальный экран. На зеркале стоит непрозрачная пластинка высотой H. Определите размеры тени на экране.

14.2. Человек высотой 1,6 *м*, стоящий на берегу озера, видит Луну в небе по направлению, составляющему угол 60° с горизонтом. На каком от себя расстоянии человек видит отражение Луны в озере?

14.3. Гладкий шар лежит в точке A у борта биллиардного стола, как показано на рисунке 14.9. а) Под каким углом φ нужно ударить по шару, чтобы он после удара о два борта попал в среднюю лузу $Л$? Размеры стола указаны на чертеже. Удары шара о борта считать идеально упругими; б) как нужно ударить по шару, чтобы он, ударившись о три борта стола, возвратился в точку A? Покажите, что время возвращения шара в точку A не зависит от направления вектора начальной скорости.

14.4. Точечный источник света находится между двумя плоскими зеркалами, образующими двугранный угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. а) На

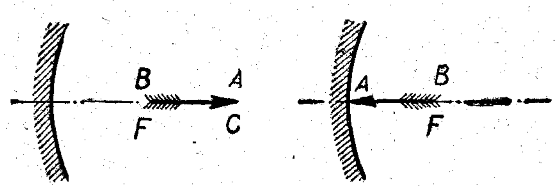


Рис. 14.10.

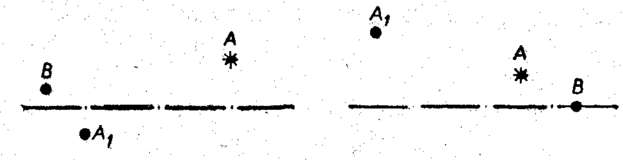


Рис. 14.11.

каком расстоянии друг от друга находятся изображения, даваемые лучами, идущими непосредственно от источника, если источник находится на расстоянии l от линии пересечения зеркал? б) Как будут двигаться эти изображения, если зеркала станут поворачиваться со скоростью f вокруг оси, проходящей через двугранный угол? в) определите число изображений, даваемых зеркалами. Рассмотрите случай, когда n — целое число и когда — любое число. При каком условии задача имеет определенное решение?

14.5. Два плоских зеркала поставлены под углом α друг к другу. На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Определите угол между направлением падающего луча и направлением луча, отраженного от обоих зеркал.

14.6. Две свечи A и B расположены на расстоянии 30 *см* друг от друга. Два плоских зеркала — одно на расстоянии 20 *см* от A, другое на расстоянии 25 *см* от B — стоят так, что изображения свечей A_1 и B_1 совпадают. Определите величину угла α между зеркалами.

14.7. На рисунке 14.10 показано положение предмета AB перед вогнутым зеркалом. Постройте изображение предмета.

14.8. На рисунке 14.11 показано положение предмета A, его изображения A_1 и главной оптической оси вогнутого зеркала. Постройте изображение предмета B.

14.9. На рисунке 14.12 показан ход луча *1*. Как пойдет после отражения луч *2*?

14.10. Предмет и его изображение отстоят от главного фокуса вогнутого сферического зеркала на расстояниях 8 и 72 *см*. Определите радиус зеркала и линейное увеличение предмета.

14.11. Точечный источник света находится на оси вогнутого (выпуклого) сферического зеркала. Расстояние между источником и центром зеркала равно l, расстояние между источником и его изображением равно L. Чему равен радиус зеркала?

14.12. Сходящиеся лучи падают на вогнутое зеркало с радиусом 60 *см* так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала на расстоянии 15 *см* за зеркалом. На каком расстоянии от него сойдутся эти лучи после отражения от зеркала?

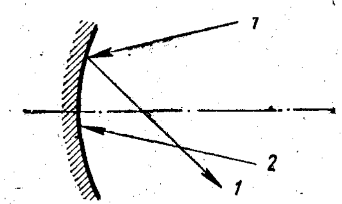


Рис. 14.12.

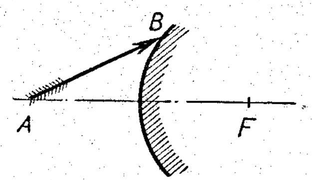


Рис. 14.13.

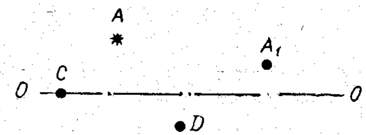


Рис. 14.14.

14.13. На рисунке 14.13 показано положение предмета AB перед выпуклым зеркалом. Постройте изображение предмета.

14.14. На рисунке 14.14 показано положение главной оптической оси зеркала OO, предмета A и его изображения A_1. Определите построением положение изображения предметов C и D.

14.15. На рисунке 14.15 показан ход луча *1*. Как шел луч *2* до отражения?

14.16. Чему равна величина изображения Солнца в шариковом подшипнике диаметром 4 *см* и каковы его угловые размеры, если диаметр Солнца равен $1{,}4 \cdot 10^6$ *км*, а расстояние до него $1{,}5 \times \times 10^8$ *км*?

14.17. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало с радиусом кривизны 60 *см* так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала в точке на расстоянии $l = 60$ *см* за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала будут пересекаться продолжения этих лучей после отражения от зеркала? Решите задачу при условии, что $l = 45$ *см*, 30 *см* и 15 *см*.

14.18. Человек, находящийся на расстоянии 2 *м* от вогнутого сферического зеркала, видит в нем изображение лица в полтора раза большим, чем в плоском зеркале, находящемся от лица на том же расстоянии. Чему равен радиус зеркала?

14.19. Два одинаковых вогнутых зеркала поставлены друг против друга так, что их фокусы совпадают. На расстоянии 50 *см* от первого зеркала на общей оси зеркал помещен точечный источник света. Где получится изображение источника после отражения лучей от обоих зеркал? Радиус зеркала 80 *см*.

14.20. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала стоят друг против друга так, что их центры совпадают. Найдите изображения источника, если он помещен в фокусе одного из зеркал.

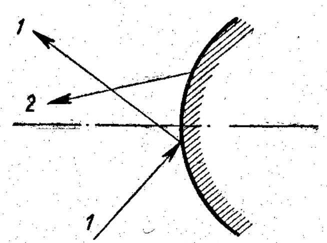


Рис. 14.15.

14.21. Вогнутое и выпуклое зеркала, обращенные друг к другу, расположены таким образом, что их главные оси совпадают. Радиус каждого зеркала R, расстояние между ними $2R$. На каком расстоянии от вогнутого зеркала на главной оси нужно поместить светящуюся точку S, чтобы лучи, отраженные сначала вогнутым, а затем выпуклым зеркалом, вернулись обратно в точку S?

Глава 15. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

Основные понятия, законы и формулы

1. Отношение скорости распространения света в вакууме к скорости распространения света в данной среде называют абсолютным показателем преломления данной среды:

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1}.$$

Чем меньше скорость света в данной среде по сравнению со скоростью света в вакууме (чем больше n_1), тем оптически более плотной считается данная среда по сравнению с вакуумом.

Если луч света идет из среды с абсолютным показателем преломления n_1 в среду с абсолютным показателем преломления n_2, то показатель преломления второй среды относительно первой равен:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}. \tag{15.1}$$

При этом

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{n_2}{n_1}, \tag{15.2}$$

где α — угол падения; β — угол преломления луча.

Если луч идет из среды оптически менее плотной в оптически более плотную, то $n_1 < n_2$ и согласно формуле (15.2) $\beta < \alpha$ (преломленный луч отклоняется от своего первоначального направления к перпендикуляру, восставленному из точки падения луча).

Если луч идет из оптически более плотной среды в менее плотную, то $n_1 > n_2$ и $\beta > \alpha$ (преломленный луч отклоняется к границе раздела сред).

В частности, при падении лучей под предельным углом α_0 угол преломления $\beta = 90°$, и по закону преломления

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}. \tag{15.3}$$

2. Тонкие линзы — двояковыпуклые (радиусы сферических поверхностей которых $+R_1$ и $+R_2$), плоско-выпуклые ($R_1 = \infty$ и $+R_2$) и выпукло-вогнутые ($+R_1$ и $-R_2$ при $|R_1| < |R_2|$) — обладают следующими свойствами:

а) Лучи, падающие параллельным пучком на линзу, после преломления идут сходящимся пучком и пересекаются в одной точке, называемой фокусом. (Такие линзы поэтому называют собирающими.) Геометрическое место фокусов представляет собой плоскость, параллельную плоскости основания шаровых сегментов, ограничивающих линзу — плоскости линзы. Расстояние между фокальной плоскостью и плоскостью линзы называют главным фокусным расстоянием F; величину, обратную этому расстоянию, — оптической силой линзы $D = \frac{1}{F}$.

Фокус, расположенный со стороны лучей, падающих на линзу, называют передним, фокус, находящийся в пространстве преломленных лучей, называют задним. Точку линзы, через которую лучи проходят не преломляясь, называют оптическим центром. Прямые, проходящие через оптический центр, называют оптическими осями. Оптическую ось, проходящую через вершины сферических поверхностей, ограничивающих линзу, называют главной оптической осью. Остальные оси, как и лежащие на них фокусы, называют побочными.

б) Лучи, падающие на линзу параллельно какой-либо оптической оси, после преломления проходят через фокус, лежащий на этой оси.

в) Для тонкой собирающей линзы имеют место те же формулы (14.1) — (14.3), что и для вогнутого зеркала, с теми же правилами знаков перед d и f.

г) При построении изображения светящейся точки (предмета) из всего потока лучей, падающих на линзу, выбирают два из следующих четырех характерных лучей:

луч, проходящий через оптический центр линзы. Этот луч проходит через линзу не преломляясь.

Луч, идущий параллельно какой-либо оптической оси. После преломления этот луч должен пройти через фокус, лежащий на этой оптической оси. (Если светящаяся точка лежит на главной оптической оси, для построения изображения нужно провести побочную оптическую ось.)

Луч, проходящий через передний фокус линзы. В силу обратимости хода лучей такой луч после преломления должен идти параллельно главной оптической оси.

Луч, проходящий через передний двойной фокус линзы. После преломления этот луч проходит через задний двойной фокус.

Ход этих четырех лучей проследить наиболее просто. Все остальные лучи, падающие на линзу из светящейся точки (предмета), проходят через линзу так, что попадают в ту же точку (изображение), где пересекаются лучи, с помощью которых сделано построение. Чаще всего при построении изображений используют первые два луча.

д) Линейное увеличение предмета, даваемое собирающей линзой, определяют по формуле (14.3). Площадь изображения предмета оказывается при этом увеличенной в число раз, равное

$$k_S = \frac{S}{S_0} = \frac{f^2}{d^2} = k^2. \qquad (15.4)$$

3. Тонкие двояковогнутые (с радиусом сферических поверхностей $-R_1$ и $-R_2$), плоско-вогнутые ($R_1 = \infty$ и $-R_2$) и вогнуто-

выпуклые линзы ($-R_1$ и $+R_2$ при $|R_1| < |R_2|$) обладают следующими основными свойствами:

а) Если лучи падают на линзу параллельным пучком, то после преломления они расходятся так, что их продолжения пересекаются в одной точке, называемой фокусом. Геометрическое место точек фокусов представляет собой плоскость, параллельную плоскости линзы. Все фокусы у рассеивающей линзы мнимые, оптические оси расположены так же, как у собирающих линз.

б) Если лучи падают на рассеивающую линзу параллельно какой-либо оптической оси, то после преломления они идут так, что своим продолжением попадают в фокус, лежащий на этой оси.

в) Для тонкой рассеивающей линзы имеют место те же формулы (14.4) и (14.5), что и для выпуклого зеркала, с теми же правилами знаков перед d и f.

г) При построении изображения точки в рассеивающей линзе пользуются лучом, идущим параллельно какой-либо оптической оси (после преломления он своим продолжением проходит через фокус, лежащий на этой оси), и лучом, проходящим через оптический центр (он идет не преломляясь). Все остальные лучи, падающие на линзу из точки-предмета, проходят через линзу так, что их продолжение попадает в ту же точку (изображение), где пересекаются продолжения характерных лучей.

4. Если F — главное фокусное расстояние линзы, $n_л$ — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза, $n_{ср}$ — показатель преломления среды, в которой находится линза, R_1 и R_2 — радиусы кривизны одной и другой поверхности линзы, то

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (15.5)$$

Радиус кривизны выпуклой поверхности берут со знаком «плюс», вогнутой — со знаком «минус», для плоской — $R = \infty$.

5. Если две линзы (допустим, обе собирающие) с фокусными расстояниями F_1 и F_2 поставлены на расстоянии l друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают (рис. 15.1), то изображение предмета и фокусное расстояние системы можно найти следующим образом.

Пусть точка A_0 находится на расстоянии d от первого стекла, которое дает изображение A_1 на расстоянии f_1 от линзы, тогда

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}.$$

Рассматривая точку A_1 как предмет для второго стекла, удаленный от него на расстояние $d_2 = l - f_2$, можно записать:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{l - f_1} + \frac{1}{f_2},$$

где f_2 — расстояние от второго стекла до изображения. Исключая

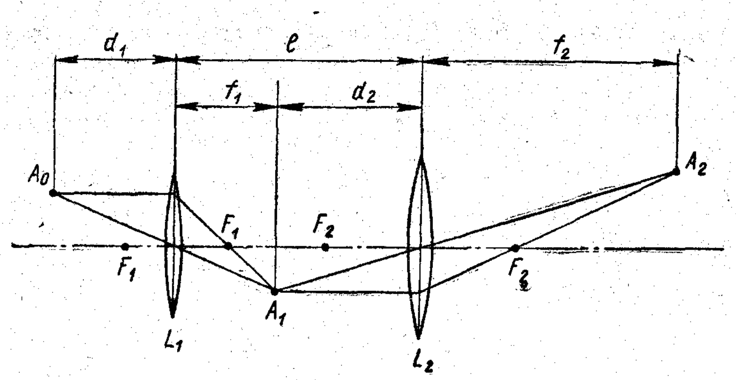


Рис. 15.1.

из составленных уравнений f_1, получим зависимость между величинами d и f_2, характеризующими положение предмета и изображения, и величинами F_1, F_2 и l, характеризующими данную оптическую систему:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{l - \frac{F_1 d}{d - F_1}}. \tag{15.6}$$

Чтобы определить фокусное расстояние системы, нужно положить в этом уравнении $d = \infty$, тогда можно считать, что $f_2 = F$ и, стало быть,

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1 - l} + \frac{1}{F_2}. \tag{15.7}$$

Если тонкие линзы сложены вплотную, то $l = 0$ и

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \quad \text{или} \quad D = D_1 + D_2. \tag{15.8}$$

Формулы (15.6) — (15.8) справедливы для любых тонких линз — и собирающих, и рассеивающих. Оптическую силу собирающих линз берут в них со знаком «плюс», рассеивающих — со знаком «минус». Правило знаков перед d и f здесь такое же, как и в случае одиночной линзы. Нетрудно заметить, что формулу (15.7) нельзя использовать для нахождения положения изображения предмета, поставленного перед системой, формулу (15.8) — можно. Во втором случае имеет место равенство:

$$\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

6. Если предмет находится на расстоянии d от невооруженного глаза с недостатком зрения, d_0 — расстояние, на котором мы хотели

бы видеть предмет в очках без особого напряжения, $F_л$ — фокусное расстояние очковой линзы, $F_х$ — фокусное расстояние хрусталика глаза, $F_с$ — фокусное расстояние системы хрусталик — линза, δ — расстояние от сетчатки до хрусталика, то при расположении линзы вплотную к глазу

$$\frac{1}{F_х} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta}; \quad \frac{1}{F_с} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{\delta}; \quad \frac{1}{F_с} = \frac{1}{F_л} + \frac{1}{F_х},$$

откуда

$$F_л = \frac{d d_0}{d - d_0}. \tag{15.9}$$

В том случае, когда $d = 25$ *см*, $d = d_0$, $F_л = \infty$, мы имеем плоскопараллельную пластинку (очков не нужно). Если $d < d_0$ (близорукий глаз), то $F_л < 0$ (необходима рассеивающая линза). Если $d > d_0$ (дальнозоркий глаз), то $F_л > 0$ (необходима собирающая линза).

Если не учитывать расстояние между глазом и линзой, то линейное увеличение, даваемое лупой с фокусным расстоянием F, будет равно:

$$k = \frac{f}{F} + 1. \tag{15.10}$$

В частном случае, когда предмет расположен так, что его изображение получается на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза, должно быть

$$f = d_0 = 25 \text{ см}.$$

Увеличение, даваемое микроскопом, равно:

$$k = \frac{F_1 (F_2 + d_0)}{F_2 (d - F_1)}, \tag{15.11}$$

где d — расстояние предмета от объектива микроскопа; F_1 — его фокусное расстояние; F_2 — фокусное расстояние окуляра и d_0 — расстояние от окончательного изображения предмета до глаза наблюдателя.

Расстояние L между окуляром и объективом (длина тубуса микроскопа) может быть найдено из формулы:

$$L = \frac{F_1 d}{d - F_1} + \frac{F_2 d_0}{d_0 + F_2}. \tag{15.12}$$

Если известны длина тубуса и фокусные расстояния линз объектива и окуляра, увеличение, даваемое микроскопом (для нормального глаза), можно определить по приближенной формуле:

$$k \approx \frac{L d_0}{F_1 F_2}. \tag{15.13}$$

Для наблюдения изображений удаленных предметов под углом зрения бóльшим, чем угол, под которым предмет виден невооруженным глазом, применяют зрительные трубы.

Труба Кеплера состоит из двух собирающих линз: длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра. Окуляр помещают относительно объектива так, что его передний фокус находится вблизи заднего фокуса объектива. Уменьшенное изображение предмета, даваемое объективом, рассматривается в окуляр, как в лупу.

Увеличение, даваемое трубкой Кеплера, равно:

$$k = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_1}{F_2}, \qquad (15.14)$$

где α — угол зрения на далекий предмет; β — угол, под которым видно его изображение.

В трубе Галилея объективом служит собирающая линза, а окуляром — рассеивающая. Окуляр располагают так, чтобы его задняя фокальная плоскость находилась вблизи задней фокальной плоскости объектива. Изображение предмета, даваемое объективом, попадает за фокус объектива и служит для окуляра мнимым предметом. Фокусное расстояние окуляра подбирают так, чтобы падающий на него сходящийся пучок лучей был преобразован в слегка расходящийся и окончательное изображение предмета рассматривалось ненапряженным глазом. Увеличение, даваемое трубой Галилея, определяется по той же формуле (15.14).

Решение задач. Примеры

1. Задачи на преломление света удобно разделить на три группы. К первой группе можно отнести задачи о преломлении света на плоской границе раздела двух сред, включая сюда задачи о прохождении лучей через плоскопараллельные пластинки и призмы. Ко второй — задачи на построение и расчеты изображений в одиночных линзах. В третью группу входят все задачи на оптические системы, состоящие из нескольких линз или линз и зеркал.

2. Задачи первой группы сравнительно просты. Их решают на основании общей формулы второго закона преломления с использованием тригонометрии и геометрии. При решении задачи нужно прежде всего сделать чертеж, где указать ход лучей, идущих из одной среды в другую. В точке падения луча на границу раздела сред, там, где он преломляется, следует провести нормаль и отметить углы падения и преломления. Перед тем как чертить преломленный луч, необходимо установить, переходит ли он из оптически менее плотной среды в более плотную или наоборот. В зависимости от этого луч или приближается к нормали в точке падения, или удаляется от нее. Особого внимания заслуживает второй случай, так как здесь может наблюдаться явление полного внутреннего отражения и луч вообще не войдет во вторую среду. (Чтобы не сделать ошибки и правильно изобразить дальнейший ход падающего луча, необходимо знать числовые значения относительного показателя преломления наиболее распространенных веществ и значения предельных углов.) После того как сделан чертеж, нужно записать формулу закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую и составить вспомогательные уравнения, связывающие углы и расстояния, используемые в задаче. Затем остается решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

3. Задачи на построение изображения в одиночных линзах и расчеты, связанные с этим изображением, решаются почти так же, как и задачи на зеркала. Для каждого положения предмета нужно построить изображение и записать формулу линзы и формулу увеличения. Добавив к основным уравнениям вспомогательные (обычно они устанавливают дополнительные связи между расстоянием от линзы до предмета и изображения), нужно решить полученную систему уравнений. Новым здесь является следующее.

а) При построении изображения чаще всего берут лучи, параллельные главной оптической оси (преломляясь в линзе, они проходят через главный фокус сами или своим продолжением), и лучи, идущие через оптический центр линзы (их направление не меняется).

б) Для определения хода лучей, падающих на линзу под произвольным углом (например, это могут быть лучи, идущие из светящихся точек, расположенных на главной оптической оси), используют побочные оптические оси. Проведя такую ось параллельно лучу, ход которого требуется проследить, необходимо найти на ней побочный фокус. Для этого проводят фокальную плоскость линзы и находят точку пересечения плоскости с данной осью, эта точка и является побочным фокусом.

В случае собирающей линзы луч, идущий параллельно данной оптической оси, после преломления должен пройти через побочный фокус; в случае рассеивающей — через побочный фокус проходит продолжение преломленного луча. При построении изображения в собирающих линзах используют только задний фокус линзы, в рассеивающих — передний.

в) К формулам линзы, аналогичным формулам зеркала, добавляется формула (15.5), связывающая фокусное расстояние линзы с ее радиусами и показателями преломления материала линзы и среды. В задачах, требующих построения изображения в линзе с заданными радиусами кривизны, формула (15.5) является вспомогательной, она позволяет определить фокусное расстояние линзы. После того как F найдено, дальнейшее решение задачи проводят по уже известному плану (см. п. 3).

4. В заключение остановимся на решении задач третьей группы. Наиболее простые из них — это задачи на оптические системы, состоящие из тонких линз, сложенных вплотную. Если найти фокусное расстояние такой системы, все дальнейшее решение задачи ничем не будет отличаться от решения задач на одиночную линзу. Для нахождения фокусного расстояния применяют формулу (15.8). С ее написания и рекомендуется начинать решение задач этого типа.

Задачи на построение изображения в оптических системах, составленных из двух (или более) линз, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии, весьма сходны с задачами на системы зеркал. Как и в случае зеркал, ход лучей через систему линз проще всего установить по промежуточным изображениям, даваемым отдельными линзами системы. Расчет величины и положения окончательного изображения здесь также основан на принципе обратимости лучей, из которого следует, что изображение, даваемое первой линзой, можно рассматривать как предмет для второй и т. д.

Решают задачи этой группы следующим образом. Надо сделать схематический чертеж в соответствии с условием задачи, отметить на нем линзы и предмет и указать характерные точки линз и заданные расстояния. После этого нужно построить изображение предмета в первой линзе, считая, что второй линзы нет. Используя формулу линзы и формулу увеличения (если требуется определить размеры изображения, даваемого системой), необходимо найти из них расстояние от этого изображения сначала до первой, а затем и второй линзы. При этом нужно сразу же находить числовые значения этих расстояний, поскольку именно они позволяют судить о том, как то или иное изображение (предмет) расположено относительно второй линзы.

Считая первое изображение предметом для второй линзы, аналогично предыдущему находим построением и расчетом положение и величину второго изображения. Точно так же рассчитывают последующие изображения, если линз несколько.

При построениях и расчетах всякий раз следует различать случаи, когда на вторую линзу лучи падают расходящимся или сходящимся пучком. В первом случае изображение точки нужно рассматривать как действительный предмет для второй линзы, во втором — как мнимый. Последовательность действий и расчетные формулы здесь такие же, как и для зеркал. Главное, что требует особого внимания при составлении формул, — это правильный выбор знаков перед d и f. Если при составлении формул знаки были учтены, то в полученные выражения при числовых расчетах нужно подставлять абсолютные значения входящих в них величин. При построении мнимых предметов их нужно считать для соответствующей линзы изображением и по нему строить предмет — искомое изображение в системе.

В оптических системах, составленных из линзы и зеркала, независимо от того, сложены ли они вместе (линзы с посеребренной поверхностью) или отстоят на некотором расстоянии, преобразование светового потока происходит трижды. Лучи в этой системе идут следующим образом: от светящегося предмета они падают на линзу, преломляются в ней и идут на зеркало. Отражаясь от зеркала, они вновь падают на линзу и, вторично преломившись, дают окончательное изображение. Это изображение может быть и действительным, и мнимым.

Порядок расчета в системах, состоящих из линз и зеркал, такой же, как и в системах, составленных только из линз. Если сферическое зеркало и линза с одинаковыми радиусами кривизны сложены вместе, фокусное расстояние $F_с$ системы определяют при помощи формул:

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{F_л}+\frac{1}{f} \text{ и } \frac{1}{F_л}=\frac{1}{f}+\frac{1}{F_с},$$

из которых следует, что оптическая сила системы равна:

$$\frac{1}{F_с}=\frac{2}{F_л}+\frac{2}{R}=\frac{2}{F_л}+\frac{1}{F_з}. \tag{15.15}$$

$F_л$ и $F_з$ в эту формулу входят со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, являются ли линза или зеркало собирающими или рассеивающими.

При расчете изображений в такой системе d и f определяют из уравнения

$$\frac{1}{F_с}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \tag{15.16}$$

Для вычисления размеров изображения в оптических системах к уравнениям, составленным на основании формулы линзы (зеркала), добавляют формулу увеличения. В случае нескольких линз (линз и зеркал) полное увеличение, даваемое системой, равно произведению увеличений отдельных линз (зеркал):

$$k = k_1 k_2 \dots k_n. \tag{15.17}$$

Пример 1. Светящуюся точку, находящуюся в среде с показателем преломления n_1, рассматривают невооруженным глазом из среды с показателем преломления n_2. Каково будет кажущееся расстояние точки до границы раздела сред, если точка находится от этой границы на расстоянии h_0, а глаз расположен так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами?

Решение. Рассмотрим два случая: а) когда $n_1 > n_2$ (глаз расположен в оптически менее плотной среде) и б) когда $n_1 < n_2$ (глаз помещен в среде оптически более плотной, чем среда, где находится источник).

а) Допустим, что светящаяся точка A_0 (рис. 15.2) находится в среде с показателем преломления n_1 и глаз наблюдателя расположен над предметом в среде с показателем преломления n_2 так, что в него попадают лучи, идущие под малыми углами к нормали N. Выберем из пучка лучей, попадающих в глаз наблюдателя, два луча A_0C и A_0D. Первый луч падает перпендикулярно границе раздела сред и идет во вторую среду не преломляясь. Второй луч, переходя во вторую оптически менее плотную среду, отклоняется от своего начального направления, удаляясь от нормали в точке D, и идет по направлению *1*. Лучи, вышедшие из точки A_0, кажутся наблюдателю выходящими из точки A_1. Эта точка является мнимым изображением предмета A_0, ее расстояние h_1 от границы раздела сред определяют следующим образом.

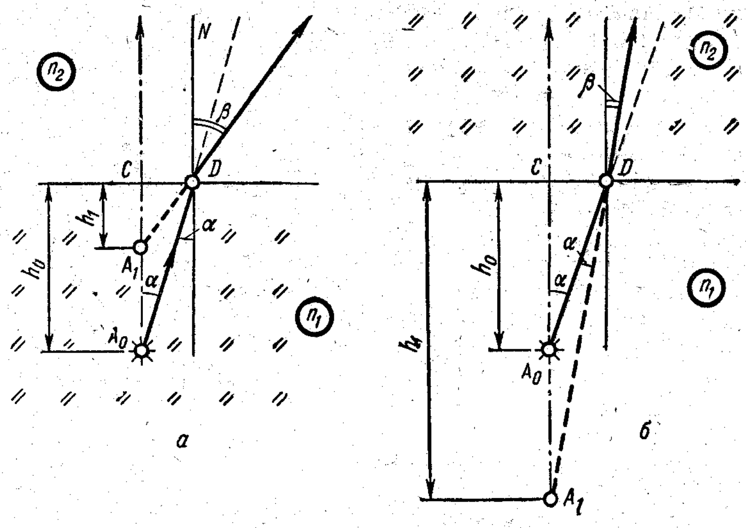


Рис. 15.2.

Обозначим угол падения луча в точке D через α, а угол преломления через β. Из чертежа видно, что в треугольниках A_0DC и A_1DC сторона CD является общей. Поэтому можно записать

$$CD = h_0 \operatorname{tg} \alpha = h_1 \operatorname{tg} \beta,$$

откуда

$$h_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} h_0.$$

Поскольку лучи падают на границу раздела сред под небольшими углами, то вследствие малости углов α и β тангенсы этих углов можно заменить их синусами:

$$h_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} h_0 \quad .$$

Но по закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$, следовательно, $h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0$. Если, в частности, смотреть из воздуха ($n_2 = 1$) на предмет, находящийся в воде ($n_1 = 4/3$), то $h_1 = 3/4\ h_0$.

б) Рассмотрим второй случай, когда луч A_0D от светящегося предмета идет в оптически более плотную среду. В точке D он отклонится от своего начального направления к нормали. Наблюдателю будет казаться, что лучи A_0C и A_0D вышли из точки A_1, которая служит изображением предмета A_0. Из треугольников A_0DC и A_1DC аналогично предыдущему находим расстояние h_1 от точки A_1 до границы раздела сред:

$$h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0.$$

В частном случае, если рассматривать из воды ($n_1 = 4/3$) предмет, находящийся в воздухе ($n_2 = 1$), то $h_1 = 4/3\ h_0$.

Как показывают приведенные расчеты и построения, светящийся предмет A_0 будет казаться наблюдателю ближе к поверхности раздела ($h_1 < h_0$), если вторая среда менее плотная ($n_1 > n_2$). Если же смотреть на светящуюся точку из среды оптически более плотной, то она будет казаться дальше, чем находится на самом деле, поскольку при $n_2 > n_1$ $h_1 > h_0$.

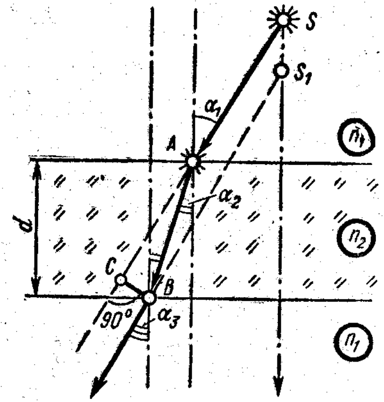


Рис. 15.3.

Пример 2. Плоскопараллельная пластинка толщиной d (рис. 15.3) с показателем преломления n_2 находится в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Луч света из точки S падает на пластинку под углом α_1. Чему равен угол между падающим и преломленным лучом, вышедшим из пластинки? Каково боковое смещение луча, прошедшего через пластинку? На сколько ближе будет казаться точка S, если ее рассматривать через пластинку под малым углом к нормали N?

Решение. Так как по условию задачи $n_2 > n_1$, то, переходя из первой среды во вторую, луч приближается к нормали в точке падения. При выходе из пластинки он отклоняется от нормали.

Отметив на чертеже углы падения и преломления α_1, α_2, α_3 и боковое смещение x луча, записываем формулу второго закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую в точках A и B:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}; \qquad \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{1}$$

В этих уравнениях известен угол падения α_1 и все показатели преломления, поэтому, решая систему уравнений относительно α_3, получим ответ на первый вопрос задачи: $\alpha_3 = \alpha_1$. Равенство углов означает, что, пройдя через пластинку, луч выйдет из нее параллельно своему начальному направлению. (Этот вывод справедлив для любого числа пластин.)

Как видно из чертежа, боковое смещение луча $x = BC$. Из треугольника ABC получим:

$$BC = AB \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

но $AB = \frac{d}{\cos \alpha_2}$, следовательно,

$$x = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\, d}{\cos \alpha_2}. \tag{2}$$

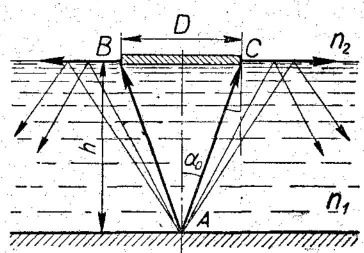


Рис. 15.4.

Исключая из уравнений (1) — (2) угол α_2, после несложных преобразований для бокового смещения луча получим выражение:

$$x = d\sin\alpha_1 - \frac{n_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_1}}\, d.$$

Пройдя через пластинку, рассматриваемый луч идет так, как если бы он вышел из точки S_1. Как видно из чертежа, расстояние $SS_1 = y = \frac{x}{\sin\alpha_1}$. С учетом выражения для x получим:

$$y = d - \frac{n_1 \cos\alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha}}\, d,$$

откуда вытекает, что при малых углах наблюдения плоскопараллельная пластинка дает смещение светящейся точки, равное

$$y = \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) d.$$

Пример 3. На дне сосуда, наполненного водой до высоты h, находится точечный источник света (рис. 15.4). На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находится над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды?

Решение. Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком, переходя из оптически более плотной среды в менее плотную. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного, отразятся в воду, испытывая полное внутреннее отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса с диаметром основания D и вершиной в точке A. Если на воду положить непрозрачную пластинку диаметром D, то ни один луч в воздух не попадет. Диаметр пластинки легко определить, если найти α_0 с помощью законов преломления, поскольку глубина h, на которой находится источник, известна.

Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать:

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (1)$$

где n_1 — показатель преломления воды; n_2 — показатель преломления воздуха.

Диаметр пластинки служит основанием равнобедренного треугольника ABC, поэтому

$$D = 2h \operatorname{tg}\alpha_0. \qquad (2)$$

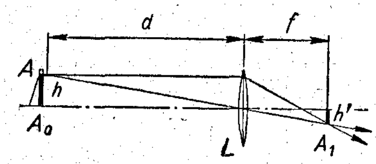


Рис. 15.5.

В уравнениях (1) — (2) все величины, кроме D и α_0, известны. Решая их совместно относительно диаметра пластинки, получим:

$$D = \frac{2h\, n_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Полагая в этой формуле показатель преломления воды $n_1 = 4/3$, воздуха $n_2 = 1$, находим:

$$D = \frac{6\sqrt{7}}{7} h.$$

Пример 4. Какую выдержку нужно делать при фотографировании спортсмена в момент его погружения в воду при прыжке с вышки высотой $H = 8$ *м*, если допустимая размытость изображения на негативе не должна превышать $h' = 0{,}4$ *мм*? Фотоаппарат установлен на расстоянии $d = 10$ *м* от места погружения, фокусное расстояние объектива $F = 10$ *см* (рис. 15.5.).

Решение. При фотографировании какой-либо точки движущегося предмета ее изображение на пленке может получиться размытым — в виде линии. Изображение всего объекта оказывается в этом случае не резким. Величина размытости зависит от того, какая выдержка сделана при съемке. Если выдержка слишком велика, то за время, пока открыт затвор, фотографируемая точка сместится на значительное расстояние. Длина изображения ее следа h' на пленке окажется больше допустимой, и снимок получится некачественным. Чтобы h' не превышало допустимых размеров, время экспозиции t нужно выбрать таким, чтобы след h, прочерченный движущейся точкой, за время t давал изображение, длина которого не больше h'.

Допустим, что одна из крайних точек предмета (спортсмена), свободно падающего с высоты H, попадает в поле зрения объектива и в некоторый момент времени находится в точке A, удаленной от фотоаппарата на расстояние d. Предположим далее, что за время t (при правильно подобранной выдержке) край предмета попадает в точку B, пройдя расстояние h с некоторой средней скоростью $v_{ср}$; тогда след, прочерченный каждой точкой предмета, будет равен:

$$h = v_{ср} t. \qquad (1)$$

На пленке, помещенной вблизи главного фокуса объектива, где получается изображение предмета (поскольку d обычно берется много больше F), след h будет спроецирован линзой в уменьшенный отрезок h', равный

$$h' = \frac{f}{d} h. \qquad (2)$$

(Для простоты отрезок h поставлен перпендикулярно главной оптической оси.) Поскольку изображение действительное, связь между d и f дается уравнением

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad (3)$$

Среднюю скорость движения предмета можно найти из условия, что в точку A предмет попадает, пролетев расстояние H. Так как время выдержки обычно мало и $h \ll H$, можно считать, что на перемещении h скорость предмета почти не меняется, т. е.

$$v_{\text{ср}} = v_A = \sqrt{2gH}. \qquad (4)$$

Уравнения (1)—(4) содержат неизвестные h, $v_{\text{ср}}$, f и t. Решая их относительно t и подставляя числовые значения, находим:

$$t = \frac{(d-F)\,h'}{F\sqrt{2gH}}; \qquad t \approx 3 \cdot 10^{-3}\ сек.$$

Пример 5. На расстоянии $d_1 = 1$ *м* от собирающей линзы параллельно ее плоскости поставлен подсвечиваемый предмет. При таком расположении линзы и предмета площадь изображения на экране равна $S_1 = 400$ *см*^{2}. Если линзу передвинуть на $l = 30$ *см* от предмета, площадь резкого изображения становится равной 9/16 площади предмета. Определите площадь предмета S_0 и оптическую силу D линзы.

Решение. Если в первом положении линза находилась от предмета на расстоянии d_1, от экрана — на расстоянии f_1 и площадь изображения равнялась S_1, то

$$D = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \qquad (1)$$

и

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{f_1^2}{d_1^2}. \qquad (2)$$

Во втором положении линзы, когда ее сместили на расстояние l от предмета и передвинули экран так, что на нем снова получилось четкое изображение, предмет и экран оказались удаленными от линзы на расстояние d_2 и f_2. Площадь изображения уменьшилась и стала равной $S_2 = \frac{9}{16}S_0$. Для этого положения:

$$D = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2}; \qquad (3)$$

$$\frac{S_2}{S_0} = \frac{f_2^2}{d_2^2}. \qquad (4)$$

К основным уравнениям (1) — (4) следует добавить вспомогательное соотношение:

$$d_2 = d_1 + l. \qquad (5)$$

Подставляя выражение для d_2 в уравнения (3) — (4) и исключая f_2, найдем:

$$D = \frac{\sqrt{S_0/S_2} + 1}{d_1 + l}.$$

Считая D известной величиной, из уравнений (1) — (2) находим

$$S_0 = S_1\,(Dd_1 - 1)^2; \; S_0 = 250\ см^2.$$

Пример 6. Если точечный источник света поместить на расстоянии d_1 (рис. 15.6) от рассеивающей линзы диаметром D_0, вставленной в оправу, то на экране, находящемся на расстоянии l за линзой, получится светлое пятно диаметром D_1. Каков будет диаметр пятна на экране, если источник поместить в фокусе линзы?

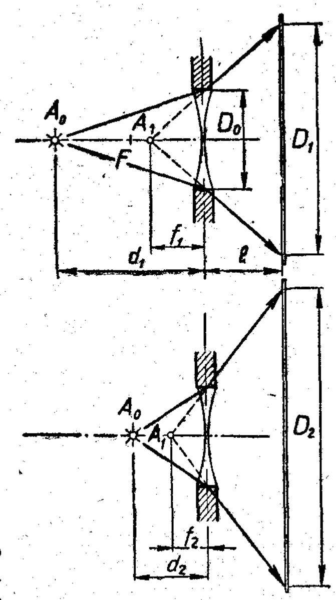


Рис. 15.6.

Решение. Допустим, что в первом положении светящаяся точка A_0 находится от рассеивающей линзы на расстоянии $d_1 > F$. Лучи, вышедшие из точки A_0, падают на линзу расходящимся пучком, преломляются в ней, и, рассеявшись, дают на экране светлое пятно диаметром D_1. Как видно из чертежа, лучи, образующие это пятно, идут на экран так, словно они выходят из светящейся точки A_1, являющейся изображением предмета A_0.

Во втором положении, когда светящаяся точка находится в фокусе линзы, диаметр светлого пятна на экране увеличивается, поскольку здесь лучи падают на линзу под большим углом. Они освещают экран так, как если бы шли из точки A_1, являющейся изображением точки A_0. Изображение предмета, расположенного в фокальной плоскости рассеивающей линзы, находится посредине между этой плоскостью и линзой.

Диаметр светлого пятна D_2, получающегося при внесении источника в фокус линзы, легко найти, зная фокусное расстояние линзы F. Для его определения рассмотрим первое положение системы.

Если f_1 — расстояние от мнимого изображения A_1 до рассеивающей линзы, то

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников можно записать:

$$\frac{D_1}{D_0} = \frac{f_1 + l}{f_1}. \qquad (2)$$

Для второго положения источника формула рассеивающей линзы дает

$$f_2 = \frac{F}{2}, \qquad (3)$$

так как $d_2 = F$.

Аналогично равенству (2) мы имеем:

$$\frac{D_2}{D_0} = \frac{f_2 + l}{f_2}. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1)—(4) относительно D_2, получим:

$$D_2 = 2D_1 - \frac{2l + d_1}{d_1} D_0.$$

Пример 7. Воздушная полость в стекле имеет форму плоско-выпуклой линзы. Найти фокусное расстояние этой линзы, если известно, что фокусное расстояние линзы из стекла, которое совпадает по форме с полостью, равно в воздухе F_0.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (15.5) плоско-выпуклая линза ($R_1 = \infty$, $R_2 = R$) может быть и собирающей и рассеивающей в зависимости от того, что больше, показатель преломления материала линзы или показатель преломления среды, в которой находится линза. В первом случае, когда воздушная линза находится в стекле ($n_л = 1$, $n_{ср} = n$), ее оптическая сила равна:

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{1}{R}. \qquad (1)$$

Во втором случае, когда стеклянная линза находится в воздухе ($n_л = n$, $n_{ср} = 1$),

$$\frac{1}{F_0} = (n - 1)\frac{1}{R}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1)—(2) находим:

$$F_1 = -nF_0.$$

Пример 8. Из плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовили три линзы (рис. 15.7). Фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $-F'$, фокусное расстояние линз *2* и *3* равно $-F''$. Определите фокусное расстояние каждой линзы.

Р е ш е н и е. Как видно из рисунка, первая и третья линзы плоско-выпуклые, их оптические силы $\frac{1}{F_1}$ и $\frac{1}{F_3}$, вторая линза двояковогнутая, ее оптическая сила равна $-\frac{1}{F_2}$.

Если три линзы сложены вместе и образуют плоскопараллельную пластинку, оптическая сила системы равна нулю, так как обе поверхности у нее плоские ($R_1 = \infty$ и $R_2 = \infty$). Для этого случая формула (15.8) дает:

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} = -\frac{1}{F'}. \qquad (2)$$

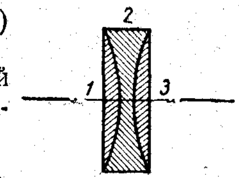


Рис. 15.7.

При сложении второй линзы с третьей фокусное расстояние оптической системы оказывается равным $-F''$, следовательно,

$$-\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = -\frac{1}{F''}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1)—(3) совместно, находим:

$$F_1 = F''; \quad F_2 = \frac{F'F''}{F' + F''}; \quad F_3 = F'.$$

Пример 9. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ *см* и $F_2 = 15$ *см*, сложенные вплотную, дают четкое изображение предмета на экране, если предмет находится на расстоянии $d = 15$ *см* от первой линзы. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы на нем получилось четкое изображение предмета, если вторую линзу отодвинуть от первой на $l = 5$ *см*?

Р е ш е н и е. Если перед оптической системой, состоящей из двух тонких линз, сложенных вместе, расположить предмет на таком расстоянии d, чтобы его действительное изображение четко проецировалось на экран, удаленный от линз на расстояние f_1, то должно выполняться равенство:

$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

В этом уравнении $\frac{1}{F_c}$ представляет оптическую силу двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2, сложенных вплотную, поэтому

$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}. \qquad (2)$$

Если, не меняя положения предмета, вторую линзу отодвинуть на расстояние l, фокусное расстояние системы изменится, и при том же положении предмета четкое изображение получится на расстоянии f_2 от второй линзы. Чтобы это изображение попало на экран, экран придется передвинуть на некоторое расстояние x, которое нам и требуется определить. Для случая раздвинутых линз формула (15.6) дает:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{l - \frac{F_1 d}{d - F_1}}, \qquad (3)$$

где F_2 — фокусное расстояние линзы, находящейся ближе к экрану.

Предположим, что экран нужно приблизить ко второму стеклу, тогда должно быть

$$x = f_1 - f_2 - l. \qquad (4)$$

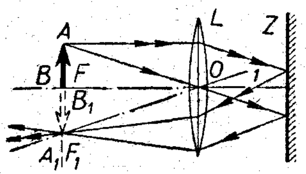


Рис. 15.8.

Из уравнений (1)—(2) после подстановки числовых значений находим:

$$f_1 = \frac{F_1F_2d}{(F_1+F_2)\,d - F_1F_2} = 20\ см.$$

Из уравнения (3) имеем:

$$f_2 = \frac{F_2ld - F_1F_2\,(l+d)}{F_1F_2 - F_1\,(l+d) + d\,(l-F_2)} = 19{,}5\ см,$$

после чего в соответствии с формулой (4) для x получаем: $x = -4{,}5$ *см.*

Знак «минус» показывает, что наше предположение о направлении смещения экрана было неправильным и экран нужно отодвинуть от второй линзы.

Пример 10. В фокусе собирающей линзы (рис. 15.8) расположен предмет высотой H. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало. Где получится изображение предмета и каков размер этого изображения?

Решение. Выберем из пучка лучей, падающих на линзу из точки A предмета, два луча: проходящий через оптический центр (он отмечен одной стрелкой) и идущий параллельно главной оптической оси (он отмечен двумя стрелками). Точка A расположена в фокальной плоскости линзы, поэтому все лучи, выходящие из этой точки и попадающие на линзу, после преломления пойдут параллельным пучком. Падая на плоское зеркало, такой пучок отразится и пойдет на линзу также параллельным пучком, под тем же углом, под которым он падал на зеркало.

Чтобы проследить ход пучка после вторичного преломления в линзе, проведем побочную оптическую ось 1, параллельную отраженным лучам, и найдем на ней побочный фокус F_1. Преломившись в линзе, лучи должны пройти через точку F_1 и дать в ней действительное изображение точки A. Как видно из чертежа, в прямоугольных треугольниках AOB и A_1OB_1 сторона OB общая и $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, поэтому эти треугольники равны и, следовательно, величина изображения равна величине предмета.

Таким образом, изображение получается действительным, обратным, равным предмету и находится в той же фокальной плоскости, в которой расположен предмет. Этот результат, как нетрудно заметить, не зависит от положения зеркала, лишь бы оно стояло перпендикулярно главной оптической оси.

Пример 11. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием F посеребрена. На расстоянии d_1 от линзы со стороны вогнутой поверхности расположен точечный источник света (рис. 15.9). Где будет находиться изображение источника?

Решение. Допустим, что на плоско-вогнутую линзу с фокусным расстоянием F падает пучок лучей, выходящий из точки A_0, расположенной на главной оптической оси на расстоянии d_1 от линзы.

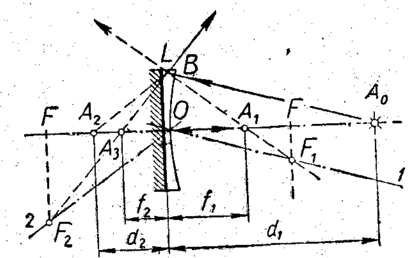


Рис. 15.9.

Выберем из этого потока два луча: идущий на оптический центр и произвольный луч A_0B — и проследим их ход в данной системе.

Первый луч пройдет через линзу не преломляясь, упадет на посеребренную поверхность и отразится назад по тому же направлению. Второй луч, преломившись в линзе, падает на посеребренную поверхность (зеркало) так, как если бы он выходил из точки A_1, являющейся мнимым изображением предмета A_0. Графически положение точки A_1 находится с помощью побочной оптической оси 1, проведенной параллельно лучу A_0B. После преломления луч должен своим продолжением попасть в побочный фокус F_1. Там, где продолжение луча пересекается с главной оптической осью, и находится точка A_1. Аналитически расстояние f_1 от точки A_1 до линзы определяется из уравнения:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Пройдя через линзу, луч A_0B сразу же отразится от зеркальной поверхности под тем же углом, под которым он падал. Направление отраженного луча таково, как если бы он выходил из точки A_2, являющейся изображением точки A_1 в плоском зеркале. Нетрудно заметить, что точка A_2 лежит слева от линзы на расстоянии

$$d_2 = f_1. \qquad (2)$$

Далее отраженный луч еще раз преломится в линзе и даст окончательное изображение A_3 в точке пересечения его продолжения с продолжением луча A_0O. Ход этого луча построен с помощью побочной оси 2. Чтобы найти расстояние f_2 от точки A_3 до линзы, нужно использовать еще раз формулу рассеивающей линзы, считая промежуточное изображение A_2 в зеркале как действительный предмет для рассеивающей линзы. Лучи будут падать на линзу расходящимся пучком так, как если бы в точке A_2 был расположен действительный источник:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) находим:

$$f_2 = \frac{d_1F}{2d_1 + F}.$$

Из построения видно, что при любом положении A_0 ее окончательное изображение — точка A_3 — будет всегда мнимым, поскольку промежуточное изображение A_2 всегда оказывается за линзой.

Полученный нами результат сразу же вытекает из формул для посеребренной линзы (15.15) и (15.16). Полагая в них $F_л = -F$, $F_з = \infty$, будем иметь:

$$-\frac{2}{F} = \frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_2}, \quad \text{откуда} \quad f_2 = \frac{d_1 F}{2d_1 + F}.$$

Пример 12. Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, объектив и окуляр которого имеют фокусные расстояния, соответственно равные $F_{об} = 2$ *м* и $F_{ок} = 5$ *см*. На сколько нужно раздвинуть трубу, чтобы получить изображение Луны на экране на расстоянии $f'_2 = 25$ *см* от окуляра? Какова будет при этом величина изображения Луны, если невооруженным глазом ее видно под углом $\alpha = 30'$?

Р е ш е н и е. Если лучи, идущие от удаленного предмета, попадают в трубу Кеплера, то в зависимости от расстояния между ее объективом и окуляром окончательное изображение объекта может получиться или мнимым, или действительным. В первом случае изображение можно увидеть глазом, во втором — спроецировать на экран. Если линзы объектива L_1 и окуляра L_2 установлены так, что изображение Луны рассматривают нормальным глазом с расстояния наилучшего зрения, то ее промежуточное изображение A_1B_1 практически находится в фокальной плоскости объектива (при $d_1 \gg F_{об}$, $f_1 \approx F_{об}$). Оно будет действительным, перевернутым и сильно уменьшенным (рис. 15.10). Для простоты построения изображения трубу удобно расположить так, чтобы весь предмет лежал по одну сторону от главной оптической оси, как показано на рисунке. Для построения промежуточного изображения удаленных предметов в зрительных трубах достаточно использовать лишь луч, проходящий через оптический центр объектива, учитывая, что положение изображения в этом случае всегда известно — практически оно находится в фокальной плоскости.

Промежуточное изображение, даваемое объективом, можно рассматривать как предмет для окуляра, поскольку от этого изображения, например от точки A_1, лучи идут на вторую линзу расходящимся пучком, как если бы они выходили из действительного источника.

Чтобы окончательное изображение Луны A_2B_2 оказалось мнимым и находилось на расстоянии наилучшего зрения $f_2 = 25$ *см*, окуляр нужно расположить так, чтобы A_1B_1 попадало между $F_{ок}$ и L_2. Расстояние d_2 между окуляром и изображением A_1B_1 должно при этом удовлетворять уравнению:

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \tag{1}$$

Для проецирования изображения Луны на экран линзу окуляра нужно сместить от промежуточного изображения A_1B_1 так, чтобы оно попало между фокусом и двойным фокусом окуляра (рис. 15.10, *б*).

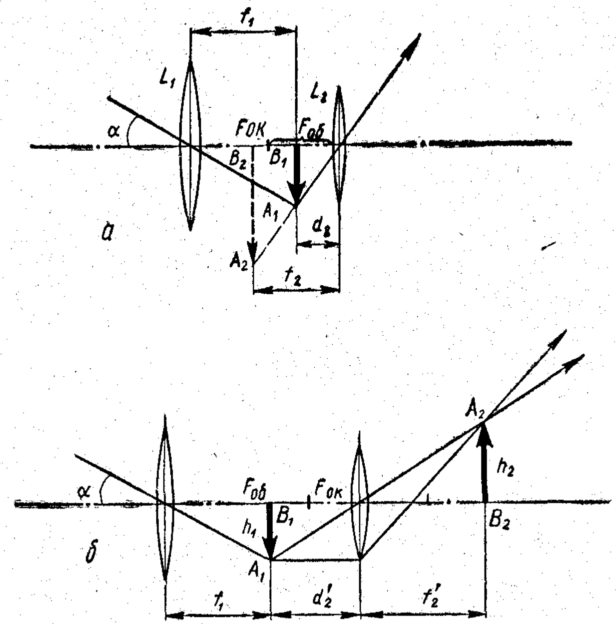


Рис. 15.10.

Если резкое изображение A_2B_2 проецируется на экран, отстоящий от линзы L_2 на расстоянии f'_2, окуляр нужно отодвинуть от объектива настолько, чтобы предмет A_1B_1 находился от линзы L_2 на расстоянии d'_2, удовлетворяющем уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d'_2} + \frac{1}{f'_2}. \tag{2}$$

Как видно из чертежа, окуляр для этого необходимо передвинуть вправо от начального положения на расстояние

$$x = d'_2 - d_2. \tag{3}$$

Линейные размеры изображения Луны на экране можно определить из формулы увеличения линзы, зная угол α, под которым Луну видно невооруженным глазом, и фокусное расстояние объектива $F_{об}$:

$$h_2 = \frac{f'_2}{d'_2} h_1.$$

Но $h_1 = F_{об} \operatorname{tg} \alpha \approx F_{об}\alpha$ (поскольку угол α очень мал), поэтому высота изображения Луны на экране будет равна:

$$h_2 \approx \frac{f'_2}{d'_2} F_{об}\alpha. \tag{4}$$

Решая уравнения (1)—(4) совместно относительно неизвестных d_2 и d_2' и подставляя числовые значения, получим:

$$d_2 = \frac{f_2 F_{ок}}{f_2 + F_{ок}} = 4{,}16\ см; \quad d_2' = \frac{f_2' F_{ок}}{f_2' - F_{ок}} = 6{,}25\ см.$$

После этого будем иметь: $x = 6{,}25\ см - 4{,}16\ см \approx 2\ см$; $h_2 = 7\ см$.

Пример 13. Зритель с нормальным зрением смотрит через театральный бинокль на сцену, находящуюся от него на значительном расстоянии. Оптическая сила объектива $\frac{1}{F_{об}} = 5\ дптр$, окуляра $\frac{1}{F_{ок}} = -25\ дптр$. На каком расстоянии должны быть расположены объектив и окуляр бинокля, чтобы зритель четко видел сцену? На сколько нужно сместить окуляр, чтобы сцену можно было рассматривать глазом, аккомодированным на бесконечность?

Решение. Чтобы зритель с нормальным зрением хорошо видел в театральный бинокль действие, происходящее на сцене, необходимо, чтобы окончательное изображение предмета, даваемое системой линз трубы Галилея, получалось на расстоянии наилучшего зрения. Так как сцена находится на очень большом расстоянии от зрителя ($d_1 \gg F_{об}$), то изображение A_1B_1, даваемое объективом L_1, получается на ничтожно малом расстоянии от фокальной плоскости линзы ($f_1 \approx F_{об}$) (рис. 15.11).

В трубе Галилея рассеивающая линза окуляра ставится перед фокальной плоскостью объектива, поэтому лучи, которые давали бы изображение A_1B_1, падают на линзу L_2 сходящимся пучком и A_1B_1 можно рассматривать как мнимый предмет для окуляра, отстоящий от него на расстоянии

$$d_2 = F_{об} - l_1, \tag{1}$$

где l_1 — расстояние между линзами бинокля.

После преломления в окуляре лучи, идущие в точку A_1, пойдут расходящимся пучком и на своем продолжении дадут окончательное мнимое изображение A_2. Из всего пучка лучей, идущих от предмета на объектив, на чертеже указан лишь один, поскольку положение изображения известно.

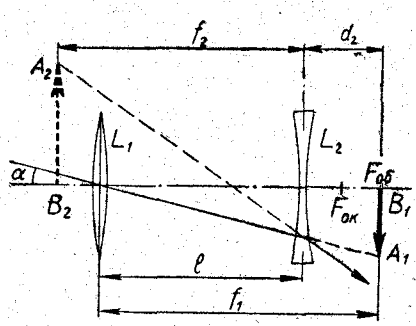


Рис. 15.11.

Расстояние d_2, а следовательно, и расстояние l_1 должны быть при этом подобраны так, чтобы изображение сцены A_2B_2 получалось в окуляре на расстоянии $f_2 = 25\ см$. Изображение мнимого предмета A_1B_1 в окуляре является мнимым, поэтому формула рассеивающей линзы для этого случая дает

$$-\frac{1}{F_{ок}} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \tag{2}$$

Из уравнений (1)—(2) находим:

$$d_2 = \frac{f_2 F_{ок}}{f_2 - F_{ок}} = 4{,}76\ см; \quad l_1 = F_{об} - d_2 = 15{,}24\ см.$$

Чтобы видеть сцену глазом, аккомодированным на бесконечность, линзы бинокля необходимо установить таким образом, чтобы изображение A_2B_2 получилось не на расстоянии наилучшего зрения, а очень далеко. Этого можно добиться, изменяя расстояние l между объективом и окуляром. Полагая в уравнении (2) $f_2 = \infty$, получим: $d_2 = F_{ок}$, и согласно формуле (1) будем иметь:

$$l_2 = F_{об} - F_{ок} = 16\ см.$$

В этом случае фокальные плоскости объектива и окуляра должны быть совмещены. По сравнению с первым расположением линзы нужно раздвинуть на расстояние

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 0{,}76\ см.$$

Пример 14. В микроскопе главное фокусное расстояние объектива равно $F_{об} = 5{,}4\ мм$, окуляра $F_{ок} = 20\ мм$. Каково будет увеличение предмета, находящегося от объектива на расстоянии $d_1 = 5{,}6\ мм$, если его рассматривать глазом с нормальным зрением? Какова будет при этом длина тубуса?

Решение. Если предмет AB поместить на расстоянии d_1 от объектива микроскопа (между $F_{об}$ и $2F_{об}$, ближе к $F_{об}$), его изображение A_1B_1 будет находиться от объектива на расстоянии f_1, удовлетворяющем уравнению

$$\frac{1}{F_{об}} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Изображение предмета будет увеличено при этом в

$$k = \frac{f_1}{d_1}\ \text{раз}. \tag{2}$$

Окуляр располагают относительно изображения A_1B_1 так, чтобы оно рассматривалось через него как через лупу. Окончательное изображение A_2B_2 будет мнимым и будет отстоять от окуляра на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза $f_2 = 25\ см$, если расстояние d_2 от окуляра до промежуточного изображения — предмета A_1B_1 подобрано так, что оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \tag{3}$$

Увеличение изображения A_1B_1, даваемое окуляром, при этом окажется равным:

$$k_2 = \frac{f_2}{d_2}. \tag{4}$$

Полное увеличение оптической системы, состоящей из двух линз, равно произведению увеличений, даваемых каждой линзой в отдельности, поэтому увеличение микроскопа равно произведению увеличений окуляра и объектива:

$$k = k_{об}k_{ок}. \tag{5}$$

Расстояние между линзами — длина тубуса микроскопа — равно:

$$l = f_1 + d_2. \tag{6}$$

Составленная система уравнений является основной системой для расчета увеличения микроскопа. В данной задаче k_1, k_2, k, d_2 и f_1 неизвестны, величины $F_{об}$, $F_{ок}$, d_1 и f_2 заданы. Решая уравнения (1)—(6) относительно искомых неизвестных — увеличения микроскопа и длины тубуса, после подстановки числовых значений получим:

$$k = \frac{F_{об}(f_2 + F_{ок})}{F_{ок}(d_1 - F_{об})} = 365; \qquad l = \frac{d_1F_{об}}{d_1 - F_{об}} + \frac{f_2F_{ок}}{f_2 + F_{ок}} = 17\ см.$$

Задачи к главе 15

15.1. Показатели преломления алмаза и стекла равны соответственно 2,42 и 1,5. Каково должно быть отношение толщин этих веществ, чтобы время распространения света в них было одинаковым?

15.2. На границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 падает луч света. Определите угол падения, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

15.3. На поверхность слоя четыреххлористого углерода толщиной 4 *см* налит слой воды толщиной 2 *см*. Показатели преломления CCl_4 и воды равны соответственно 1,46 и 1,33. На какой глубине будет казаться расположенным дно сосуда, в который налиты жидкости, если смотреть на поверхность воды под малым углом к нормали?

15.4. Стеклянная пластинка толщиной 3,2 *мм* имеет на передней и задней сторонах риски. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней риски на нижнюю его тубус пришлось опустить на 2 *мм*? Углы, которые получаются между падающим лучом и осью микроскопа, можно считать малыми.

15.5. Найдите построением и аналитически положение изображения предмета, расположенного на расстоянии 4 *см* от передней поверхности плоскопараллельной стеклянной пластинки с показателем преломления 1,5 и толщиной 3 *см*, задняя сторона которой посеребрена.

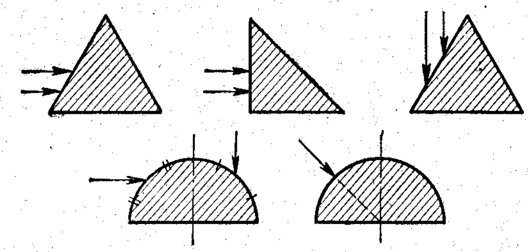


Рис. 15.12.

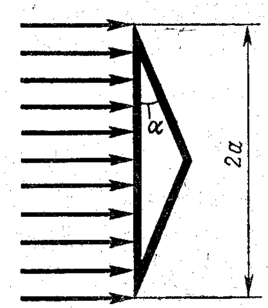


Рис. 15.13.

15.6. Перед вогнутым зеркалом с оптической силой $D = 2$ *дптр* на главной оптической оси находится точечный источник света, удаленный от вершины зеркала на расстояние $d = 102$ *см*. Между зеркалом и источником поставили плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1,5$. Какова должна быть толщина x пластинки, чтобы изображение совпало с самим источником?

15.7. В водоем на некоторую глубину помещают источник белого света. Показатель преломления воды для красных лучей 1,328, для фиолетовых 1,335. Вычислите отношение радиусов кругов, в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей в воздух.

15.8. На шар радиусом R, изготовленный из материала с меньшим показателем преломления n_2, чем показатель преломления n_1 окружающей среды, падает пучок параллельных лучей. Определите радиус светового пучка, который может проникнуть в шар.

15.9. Луч света падает на стеклянную призму (рис. 15.12). Каков дальнейший ход падающих лучей?

15.10. Луч света входит в стеклянную призму под углом 2α и выходит под углом $\beta = \alpha$. Преломляющий угол призмы равен $\alpha/2$. Определите угол отклонения луча от его первоначального направления и показатель преломления материала призмы.

15.11. Равнобедренная стеклянная призма с малыми преломляющими углами α помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально на ее основание (рис. 15.13). Коэффициент преломления стекла 1,57, размер основания $2a = 50$ *см*. Найдите величину преломляющего угла, если в середине экрана, расположенного на расстоянии 1 *м* от призмы, образуется темная полоса шириной 1 *см*.

15.12. Преломляющий угол стеклянной призмы равен 60°. Определите угол наименьшего отклонения преломленного луча. Известно, что меньше всего преломленный луч отклоняется от своего

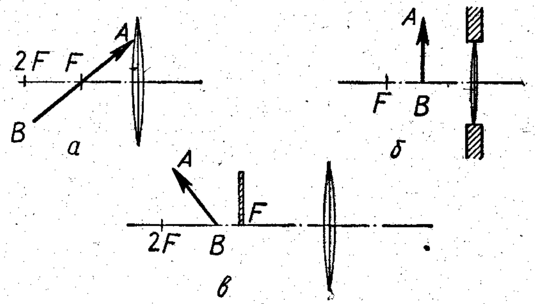


Рис. 15.14.

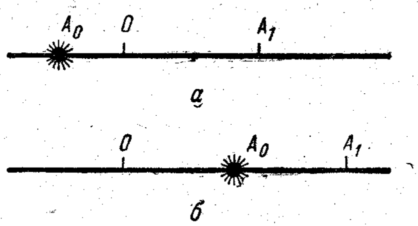


Рис. 15.15.

начального направления, если угол входа луча в призму равен углу выхода.

15.13. Стеклянный сосуд с тонкими стенками имеет форму призмы. Сосуд наполнен жидкостью с неизвестным показателем преломления. На боковую грань призмы направляют луч так, что угол входа луча оказывается равным углу выхода. Определите показатель преломления жидкости, если преломляющий угол призмы равен 24°, угол отклонения луча от начального направления 16°.

15.14. Сечение стеклянной призмы имеет форму равнобедренного треугольника. Одна из равных граней призмы посеребрена. Луч света падает на непосеребренную грань параллельно основанию призмы и после двух отражений выходит через основание под прямым углом к нему. Определите углы призмы.

15.15. Светящаяся точка находится в воздухе на расстоянии $s = 0{,}60$ *м* от выпуклой поверхности стекла радиусом $R = 7{,}5$ *см*. а) Определите расстояние между изображениями точки, которые образуются лучами, отраженными и преломленными поверхностью. Коэффициент преломления стекла $n = 1{,}50$. б) Решите задачу при условии, что поверхность стекла вогнутая.

15.16. На дне аквариума, имеющего форму шара радиусом R, находится рыбка. Где увидит рыбку наблюдатель, смотрящий на нее сверху, если показатель преломления воды равен n? Стенки сосуда очень тонкие.

15.17. На рисунке 15.14, *а*, *б* показано положение предмета AB, а на рисунке 15.14, *в* — положение предмета и непрозрачного экрана Э перед собирающей линзой. Постройте изображения предметов.

15.18. На рисунке 15.15 показано положение главной оптической оси, оптического центра, светящейся точки A_0 и ее изображения A_1. Определите фокусное расстояние линзы.

15.19. На рисунке 15.16 показано положение главной опти-

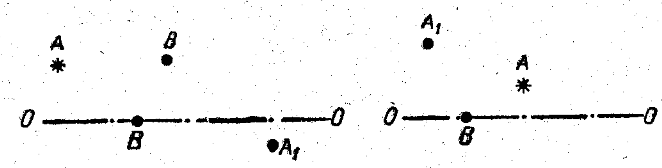


Рис. 15.16.

ческой оси, предмета A и его изображения A_1. Определите положение линзы и ее фокуса. Постройте изображение точки B.

15.20. На рисунке 15.17 показан ход луча *1*. Как шел луч *2*?

15.21. Точечный источник света находится на оси тонкой собирающей (рассеивающей) линзы. Расстояние между источником и ближайшим к нему фокусом равно l, расстояние между источником и его изображением L. Определите фокусное расстояние линзы.

15.22. Линза дает прямое, в k раз увеличенное изображение предмета, находящегося на расстоянии d от линзы. Чему равна оптическая сила линзы?

15.23. Изображение предмета получено на расстоянии 10 *см* от линзы в ее фокальной плоскости. Высота изображения 2 *см*. Определите положение предмета и его размеры.

15.24. Диск радиусом 1,5 *см* расположен перпендикулярно оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 *см*. Расстояние от предмета до линзы 40 *см*, диаметр линзы 6 *см*. Чему равен диаметр изображения диска на экране?

15.25. Расстояние между источником света и экраном равно L. Линза, помещенная между ними, дает на экране четкое изображение источника при двух положениях, расстояние между которыми равно l. Определите фокусное расстояние линзы.

15.26. Тонкая собирающая линза дает изображение предмета на экране высотой H_1 и H_2 при двух положениях линзы между предметом и экраном и неизменном между ними расстоянии. Чему равна высота предмета?

15.27. Наблюдатель рассматривает через короткофокусную линзу удаленное здание, держа ее на расстоянии 55 *см* от глаза. Каково фокусное расстояние линзы, если при перемещении ее к глазу на 25 *см* видимые размеры изображения увеличиваются вдвое?

15.28. Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 *см* вырезана по диаметру ее центральная часть шириной 1 *см*. Обе части линзы после этого были сдвинуты в плоскости линзы

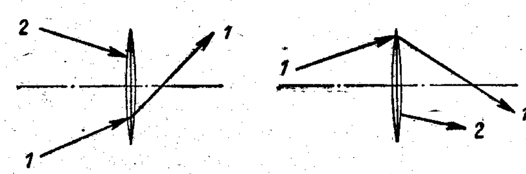


Рис. 15.17.

до соприкосновения. На главной оптической оси неразрезанной линзы на расстоянии 15 *см* от линзы находился точечный источник света S. а) Определите расстояние между изображениями источника, которые получатся в этой системе. б) Решите задачу при условии, что линза была разрезана по диаметру на две части и затем обе половинки раздвинуты на расстояние 1 *см*.

15.29. Объектив кинопроекционного аппарата имеет фокусное расстояние 5 *см*. Размер кадра на пленке 18×24 *мм*. Изображение кадра проецируется на экран размером 100×120 *см*. На каком расстоянии от экрана следует расположить аппарат, чтобы на экране получить максимальный размер изображения всего кадра? Какая часть экрана (по площади) будет при этом занята изображением?

15.30. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата с расстояния 15 *м* получилось высотой 60,6 *мм*, а с расстояния 9 *м* — 101,6 *мм*. Найдите фокусное расстояние объектива линзы.

15.31. Расстояние от предмета до переднего фокуса втрое меньше, чем расстояние от его изображения до заднего фокуса. На сколько изменится расстояние между предметом и его изображением, если предмет приблизить к линзе на расстояние l? Фокусное расстояние линзы F.

15.32. На некотором расстоянии от тонкой собирающей линзы помещен предмет, и на экране получено его изображение. При этом линейное увеличение оказалось равным k_1. Затем предмет приблизили к линзе на расстояние l. Перемещая экран, на нем снова получили четкое изображение и измерили линейное увеличение, оно оказалось равным k_2. Определите фокусное расстояние линзы.

15.33. Источник света находится на расстоянии 1,5 *м* от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное изображение источника. Затем экран отодвигают на 3 *м* и снова получают увеличенное изображение источника. Чему равны фокусное расстояние линзы и размер источника, если размер изображения в первом случае 18 *мм*, а во втором 96 *мм*.

15.34. На рисунке 15.18, *а* показано расположение предмета AB, а на рисунках 15.18, *б* и *в* — положение предмета и непрозрачного экрана $Э$. Постройте изображения предметов.

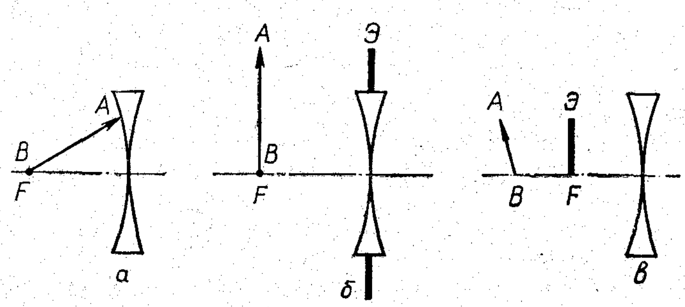


Рис. 15.18.

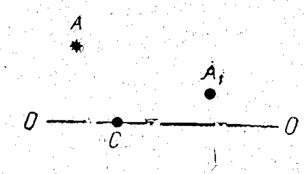


Рис. 15.19.

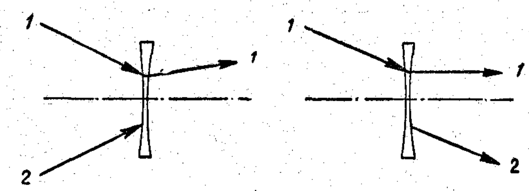


Рис. 15.20.

15.35. На рисунке 15.19 показаны главная оптическая ось, предмет A и его изображение A_1. Определите положение линзы и ее фокуса. Постройте изображение точки C.

15.36. На рисунке 15.20 изображен луч *1*. Как шел луч *2*?

15.37. Предмет, поставленный перпендикулярно главной оптической оси двояковогнутого сферического стекла, дал мнимое изображение, величина которого в 2 раза меньше предмета. Если предмет отодвинуть на 100 *см* от линзы, изображение уменьшится втрое. Где находился предмет вначале и каково фокусное расстояние линзы?

15.38. Цилиндрический пучок лучей падает на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси, имея диаметр 5 *см*. Пройдя через линзу, пучок дает на экране пятно диаметром 7 *см*. Каков будет диаметр светлого пятна, если рассеивающую линзу заменить собирающей с тем же фокусным расстоянием?

15.39. Собирающая линза дает четкое изображение предмета на экране. Между линзой и экраном на расстоянии 15 *см* от экрана помещают рассеивающую линзу, вследствие чего изображение удаляется и оказывается на расстоянии 25 *см* от рассеивающей линзы. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы?

15.40. Оптическая сила тонкой линзы в воздухе и в жидкости с неизвестным показателем преломления равна соответственно D_0 и $-D_1$. Чему равен показатель преломления жидкости, если у стекла линзы он равен n?

15.41. В куске стекла с показателем преломления n имеется воздушная полость в виде двояковыпуклой (двояковогнутой) тонкой линзы с радиусами кривизны поверхностей R. На оптической оси этой линзы внутри куска стекла на расстоянии d от линзы находится песчинка. На каком расстоянии от линзы получается изображение песчинки?

15.42. Тонкая плоско-вогнутая (плоско-выпуклая) линза опущена в воду в горизонтальном положении вогнутой поверхностью вниз. Радиус вогнутой поверхности равен 15 *см*. На оси линзы, на расстоянии 15 *см* от нее, под водой находится светящаяся точка. Где будет находиться изображение этой точки? На сколько сместится это изображение, если линзу перевернуть?

15.43. На экране в плоскости главного фокуса двояковыпуклой линзы получают изображение Солнца. Диаметр изображения оказывается равным 7 *мм*. Определите радиус сферических поверхностей линзы, если невооруженным глазом диаметр Солнца виден под углом 32′. Показатель преломления стекла 1,63.

15.44. Лупа, ограниченная сферическими поверхностями, радиусы которых равны 6 и 8 *см*, дает увеличение в 4,75 раза. На каком расстоянии от линзы находится предмет? Показатель преломления стекла 1,6.

15.45. Перед собирающей линзой на главной оптической оси на расстоянии $d = 60$ *см* от линзы находится светящаяся точка. В главном фокусе по другую сторону линзы помещен экран, где образуется светлый кружок радиусом $r = 4{,}3$ *см*. Центральный угол, стягиваемый дугой стекла, $\alpha = 60°$. Радиус сферических поверхностей линзы равен $R = 25$ *см*. Определите показатель преломления стекла.

15.46. На плоско-вогнутую линзу, изготовленную из стекла с показателем преломления 1,7, падает цилиндрический пучок лучей, параллельных главной оптической оси. Диаметр пучка равен 5 *см*. За линзой на расстоянии 20 *см* поставлен экран, где получается светлое пятно диаметром 15 *см*. Определите радиус сферической поверхности линзы.

15.47. Определите положение фокуса и главных плоскостей стеклянного шара радиусом R. Показатель преломления стекла равен n, свет идет узким пучком в направлении одного из диаметров.

15.48. Две тонкие плоско-выпуклые линзы, фокусные расстояния которых в воздухе равны F, помещены в оправу так, что их выпуклые поверхности соприкасаются. Определите фокусное расстояние системы в воде с показателем преломления n. Считать, что внутрь оправы вода не попадает. Как изменится ответ, если вода попадет между линзами?

15.49. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями 40 и 80 *см* установлены на расстоянии 20 *см* друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет помещен на расстоянии 60 *см* от первого стекла. Где будет находиться его изображение? Решите задачу графически и аналитически. Что будет происходить с изображением, если линзы сдвигать? раздвигать?

15.50. Источник света находится на расстоянии 30 *см* от собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 *см*. По другую сторону линзы на расстоянии 40 *см* расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием —12 *см*. Где находится изображение источника?

15.51. Две тонкие линзы, установленные на расстоянии 12 *см* друг от друга, образуют телескопическую систему, которая дает увеличение, равное —5. Какова будет оптическая сила системы этих линз, если их сложить вплотную? Как нужно изменить расстояние между линзами, чтобы они образовывали телескопическую систему в воде? Каким будет тогда увеличение системы? Показатель преломления стекла 1,5.

15.52. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 установлены на расстоянии l друг от друга. а) На каком расстоянии от первой линзы нужно поставить предмет высотой H_0, чтобы получить прямое изображение высотой H? б) Рассмотрите случай, когда обе линзы рассеивающие, и установите, при каких значениях l задача имеет решение.

15.53. На систему, состоящую из двух линз с равными по абсолютной величине фокусными расстояниями, одна из которых собирающая, другая рассеивающая, падает свет от бесконечно удаленного источника и собирается в точке на некотором расстоянии от второй линзы. Если линзы поменять местами, изображение сместится на 20 *см*. Определите фокусное расстояние линз.

15.54. Три линзы с фокусными расстояниями F, F и $-F$ расположены на одной оси друг за другом так, что расстояния между ними равны F. Источник света находится на расстоянии $2F$ перед собирающей линзой. Найдите его изображение. Где будет находиться изображение, если предмет поместить на расстоянии $2F$ от рассеивающей линзы? Каков будет ответ, если рассеивающая линза будет находиться между собирающими?

15.55. К вогнутому зеркалу приложена вплотную небольшая собирающая линза с той же кривизной, что и зеркало. Без линзы действительное изображение предмета получается на расстоянии 50 *см*, с линзой — на расстоянии 10 *см* от зеркала. Найдите главное фокусное расстояние линзы.

15.56. Одна сторона двояковогнутой симметричной стеклянной линзы посеребрена. Показатель преломления стекла равен 1,6, радиус кривизны поверхности линзы 20 *см*. На расстоянии 50 *см* от линзы находится предмет высотой 5 *см*. Определите величину изображения, даваемого оптической системой.

15.57. Вогнутая сторона выпукло-вогнутой линзы посеребрена. Лучи от небольшого источника падают на выпуклую поверхность линзы и дают действительное изображение предмета. На каком расстоянии от линзы нужно поместить источник, чтобы его изображение совпало с предметом? Фокусное расстояние непосеребренной линзы равно 18 *см*, радиус вогнутой поверхности 40 *см*. Сделайте построение.

15.58. Человек с нормальным зрением рассматривает свой зрачок в плоском зеркале. Во сколько раз изменятся угловые размеры изображения зрачка, если его рассматривать через лупу с оптической силой 10 *дптр*? На какое расстояние нужно при этом передвинуть зеркало, чтобы изображение было отчетливым? Каким будет увеличение зрачка при аккомодации глаза на бесконечность?

15.59. На тонкую рассеивающую линзу падает параллельный пучок лучей от удаленного источника, расположенного на главной оптической оси линзы. За линзой перпендикулярно ее оптической оси установлено плоское зеркало. Перемещая линзу, находят такое расстояние a между линзой и зеркалом, при котором через линзу видно яркую светящуюся точку, лежащую в плоскости зеркала. Определите фокусное расстояние линзы.

15.60. На главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии 50 *см* от нее находится светящийся предмет. По другую сторону линзы на расстоянии l от стекла перпендикулярно оси линзы установлено плоское зеркало. а) На каком расстоянии от линзы получится изображение предмета, даваемое лучами, отраженными от зеркала и вновь прошедшими через линзу? Фокусное расстояние линзы 30 *см*. Исследуйте результат в зависимости от l. б) Решите задачу при условии, что зеркало было вогнутым (выпуклым) с радиусом 60 *см*.

15.61. Чему равен предел зрения невооруженного глаза дальнозоркого человека, если, надев очки с оптической силой в 2,5 *дптр*, человек может отчетливо видеть предметы, находящиеся на расстоянии не менее 20 *см*?

15.62. Максимальное расстояние, на котором близорукий человек достаточно хорошо различает мелкие детали без чрезмерного утомления глаз, равно 15 *см*. Какой оптической силы очки должен носить такой человек, чтобы ему было удобно читать? Расстоянием между линзой и глазом пренебречь.

15.63. Близорукий человек, пределы аккомодации глаза которого лежат между 12 и 60 *см*, носит очки, с помощью которых он хорошо видит удаленные предметы. На каком минимальном расстоянии он должен держать книгу при чтении в очках?

15.64. На каком максимальном расстоянии от выпуклого зеркала радиусом 16 *см* близорукий человек без очков будет четко видеть изображение далеких предметов в этом зеркале, если обычно он пользуется очками с оптической силой —5 *дптр*? С какого расстояния он четко увидит свое изображение в зеркале?

15.65. Фотоаппарат с оптической силой объектива 5 *дптр* наведен на предмет, находящийся на расстоянии 4 *м*. До какого диаметра нужно задиафрагмировать объектив, чтобы размытость изображения предметов, находящихся на расстоянии 5 *м* от аппарата, не превышала 0,2 *мм*?

15.66. Поверхность Земли фотографируют со спутника, запущенного на высоту 100 *км*. Объектив фотокамеры имеет фокусное расстояние 10 *см*. Минимальный размер видимых деталей изображения на пленке (разрешающая способность пленки) 10^{-2} *мм*. Определите: а) минимальные размеры предметов, находящихся на Земле, которые будут видны на пленке; б) время экспозиции, при котором орбитальное движение спутника не влияет на качество изображения.

15.67. При фотографировании резкий негатив получился, когда предмет находился в 2 *м* от объектива. На каком расстоянии нужно поместить тот же предмет, чтобы получить резкий негатив, если вплотную к объективу приложить линзу с оптической силой 0,5 *дптр*?

15.68. При фотографировании предмета аппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние F_1, размер изображения получается равным H. Каков будет размер изображения, если на объектив надеть насадочную рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $-F_2$ ($|F_1| < |F_2|$). Расстояние от предмета до объектива в обоих случаях одинаково и равно d.

15.69. Телеобъектив фотоаппарата состоит из линзы с фокусным расстоянием 6 *см*, обращенной к объекту, и линзы с фокусным расстоянием —2,5 *см*. Расстояние между линзами 4 *см*. На каком расстоянии от второй линзы должна находиться пленка при фотографировании удаленных предметов?

15.70. Чтобы рассматривать предметы, удаленные на расстояние 100 *м*, в трубу, настроенную для наблюдения Луны, нужно придвинуть окуляр на расстояние 2,5 *см*. Определите фокусное расстояние объектива.

15.71. В зрительную трубу с фокусными расстояниями объектива и окуляра, равными 50 и 10 *см*, рассматривают удаленный предмет, который виден невооруженным глазом под углом 30′. Под каким углом виден этот предмет в трубу, если труба установлена так, что далекие предметы наблюдаются через нее глазом, аккомодированным на бесконечность?

15.72. Объектив и окуляр зрительной трубы Галилея имеют фокусные расстояния, соответственно равные 57 и —4 *см*. На расстоянии 12 *см* от окуляра расположен экран. При каком расстоянии между объективом и окуляром на экране получится четкое изображение Солнца? Каков будет диаметр этого изображения, если угловой диаметр Солнца равен 30′?

15.73. Объектив зрительной трубы имеет фокусное расстояние 34 *см* и диаметр 40 *мм*, а окуляр — фокусное расстояние 4 *см*. Труба установлена на бесконечность так, что удаленные предметы наблюдаются в трубу глазом, аккомодированным на бесконечность. Если за окуляром поместить матовое стекло, то при некотором его положении освещенный кружок на матовом стекле имеет наименьшие размеры и резко ограниченные края. Определите расстояние от матового стекла до окуляра и диаметр кружка?

15.74. В театральный бинокль наблюдают сцену, отстоящую на 15 *м* от зрителя, для которого расстояние наилучшего зрения равно 15 *см*. Фокусное расстояние объектива 20 *см*, окуляра — 3 *см*. Найти увеличение трубы и расстояние между линзами бинокля.

15.75. Микроскоп дает увеличение в 640 раз. Предмет отстоит от объектива на 0,41 *см*, фокусное расстояние объектива 0,4 *см*. Определите фокусное расстояние окуляра и длину тубуса микроскопа, если изображение получается на расстоянии 24 *см*.

Глава 16. ФОТОМЕТРИЯ

Основные понятия, законы и формулы

Фотометрия — это раздел оптики, изучающий законы распределения световой энергии и методы ее измерения.

Световой поток Φ, излучаемый источником, определяется из формулы:

$$\Phi = \frac{W}{t}, \tag{16.1}$$

где W — величина полной энергии излучения; t —время излучения.

Сила света точечного источника определяется по формуле:

$$I = \frac{\Phi}{\omega}, \tag{16.2}$$

где Φ — световой поток; ω — телесный угол. (Телесный угол измеряют отношением: $\omega = \frac{S}{r^2}$, где S — площадь основания конуса с вершиной в центре сферы радиусом r. Полный телесный угол равен $\omega_0 = 4\pi$ стерадиан.)

Полный световой поток точечного источника света силой I равен:

$$\Phi_0 = 4\pi I. \tag{16.3}$$

Освещенность, создаваемая световым потоком Φ, равномерно распределенным по площади S, определяется по формуле:

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{W}{St}. \tag{16.4}$$

Освещенность, создаваемая точечным источником света силой I на бесконечно малой площадке, удаленной на расстояние r от источника, равна:

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha, \tag{16.5}$$

где α — угол падения луча на площадку.

Решение задач. Примеры

1. Задачи по фотометрии можно разделить на задачи об освещенности, создаваемой одним или несколькими точечными источниками на бесконечно малой площадке, и задачи на использование законов фотометрии в комбинации с законами отражения и преломления света.

2. Задачи, в которых требуется вычислить освещенность, созданную лучами, непосредственно идущими от точечных источников, или по известной освещенности найти силу света источника, решают на основании формулы (16.5).

Сделав чертеж и указав на нем источники света и заданные расстояния, нужно начертить ход лучей, попадающих в точку, где требуется вычислить освещенность, изобразить нормаль в точке падения и указать угол падения лучей. (Если при этом освещается сферическая поверхность, перпендикуляр в точке падения совпадает с направлением радиуса сферы — угол падения заключен между падающим лучом и продолжением радиуса.) После этого записывают исходное уравнение для расчета освещенности. Если освещенность создается несколькими источниками, то она равна:

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

Входящие в это уравнение освещенности E_i, даваемые отдельными источниками, приходится, как правило, заменять их выражениями через I, r и тригонометричекие функции углов падения, используя формулу (16.5). Иногда нужно использовать вспомогательные соотношения. Обычно они служат для нахождения расстояний r от источников до освещаемой точки, косинусов углов падения и силы света источника. Силу света I можно задать при этом косвенно через полный световой поток.

Полученные выражения для E_i, r_i и тригонометрических функций нужно подставить в исходное уравнение и решить его относительно искомой величины.

3. В задачах второй группы чаще всего требуется определить освещенность в какой-либо точке или на площадке экрана, создаваемую лучами, идущими от точечного источника света после их отражения от зеркала или преломления линзой.

а) Чтобы вычислить освещенность в какой-либо точке экрана с учетом того, что в нее попадают лучи, отраженные от зеркала, необходимо прежде всего построить изображение источника в зеркале и определить его силу света. Это изображение можно рассматривать как второй источник, создающий на экране добавочную освещенность. В случае плоского зеркала источник-изображение расположен симметрично источнику-предмету, в сферических зеркалах его положение находится по формулам вогнутого или выпуклого зеркала. С отыскания положений источников-изображений и рекомендуется начинать решение.

Силу света таких источников рассчитывают следующим образом. Если выбрать на зеркале очень маленькую площадку ΔS, перпендикулярную главной оптической оси зеркала, то при отсутствии поглощения света можно считать, что световой поток Φ_1, отраженный от площадки, равен световому потоку Φ_0, падающему на нее из точечного источника. Отраженный поток можно рассматривать как поток, исходящий из изображения источника.

Поскольку $\Phi_1 = \Phi_0$, то согласно формуле (16.2) $I_1\omega_1 = I_0\omega_0$, где I_1 и I_0 — силы света источника и его изображения; ω_1 и ω_0 —

телесные углы, под которыми ΔS видна из точек, в которых находятся источник и изображение. Так как ΔS мала, то

$$\omega_0 = \frac{\Delta S}{d^2}; \quad \omega_1 = \frac{\Delta S}{f^2},$$

где d и f — расстояния от источника и его изображения до зеркала. Из закона сохранения светового потока вытекает, что сила света источника-изображения равна:

$$I_1 = I_0\left(\frac{f}{d}\right)^2. \tag{16.6}$$

Для плоского зеркала $f = d$, следовательно, $I_1 = I_0$, т. е. сила света источника-изображения равна силе света самого предмета.

Если источник находится в фокусе вогнутого зеркала, отраженные от зеркала лучи идут параллельным пучком и создаваемая ими освещенность экрана у главной оптической оси будет точно такая же, как на поверхности зеркала у его полюса.

После того как найдены положения дополнительных источников, дальнейший порядок действий сохраняется таким, какой указан в п. 2, — нужно составить уравнение освещенности для случая, когда не было зеркала, и с зеркалом.

Составляя уравнение освещенности для той или иной точки экрана, необходимо иметь в виду, что, говоря об освещенности в точке, мы подразумеваем освещенность на бесконечно малой площадке, поэтому на нее будут попадать лучи, идущие от точечных источников, даже в тех случаях, когда они лежат на одном перпендикуляре к этой площадке. Иными словами, при расчете освещенности можно полагать, что точечные источники друг друга не загораживают.

б) Расчет освещенности площадки экрана и изменения этой освещенности вследствие преобразования начального пучка лучей линзами или зеркалами независимо от того, является источник точечным или протяженным, основан на уравнении закона сохранения светового потока. Если в какую-либо часть пространства источник излучает световой поток Φ, то, какие бы преобразования лучей, связанных с этим потоком, ни происходили, если не учитывать поглощения и рассеивания света линзами и зеркалами, всегда будет иметь место равенство:

$$\Phi = ES = \text{const}. \tag{16.7}$$

Из него, в частности, следует, что для двух площадок S_1 и S_2, на которые падает этот поток, должно быть:

$$\Phi = E_1S_1 = E_2S_2. \tag{16.7'}$$

Равенство (16.7′) служит исходным уравнением для решения задач данного типа. В случае точечных источников света E здесь будет средним значением освещенности на площадке S.

После того как составлено уравнение (16.7′), дальнейшие выкладки сводятся обычно к выражению величин, входящих в это

уравнение, через те величины, которые в данной задаче считаются известными.

в) Если световые лучи преобразуются линзой, то за начальный световой поток принимают поток, падающий на поверхность линзы. Величину этого потока можно вычислить, зная силу света источника I_0 и телесный угол ω_0. Телесный угол в свою очередь может быть выражен через диаметр линзы и ее расстояние d от источника, если оно велико по сравнению с диаметром линзы и, следовательно, площадь $S_л$ поверхности линзы можно с достаточной степенью точности принять за площадь сферы, на которую опирается телесный угол $\omega_0 = \frac{S_л}{d^2}$. Зная величину начального светового потока $\Phi_0 = I_0\omega_0$, идущего из светящейся точки на линзу, и положение экрана, нетрудно определить среднюю освещенность площадки экрана, на которую фокусируется этот поток или известная часть его.

Для нахождения площади $S_э$ светлого пятна на экране, полученного после прохождения лучей через линзу, нужно найти положение изображения источника, после чего из геометрических построений найти $S_э$.

Как показывает формула (16.7′), отношение освещенностей можно считать известным, если известно отношение площадей линзы и освещенной части экрана, поскольку

$$\Phi_0 = E_э S_э = E_л S_л.$$

Пример 1. Полусфера радиусом R (рис. 16.1) освещается двумя одинаковыми лампами, подвешенными на высоте $2R$ над поверхностью Земли и отстоящими друг от друга на таком же расстоянии $2R$. Определите освещенность в точках полусферы, находящихся на минимальном расстоянии от одного из источников, если полный световой поток, создаваемый каждой лампой, равен Φ.

Р е ш е н и е. Прежде всего найдем точку на поверхности полусферы, расположенную на минимальном расстоянии от источника A. Нетрудно заметить, что такому условию удовлетворяет точка C, лежащая на прямой, соединяющей источник A с центром полусферы O. Если первый источник находится от точки C на расстоянии r_1, второй — на расстоянии r_2 и лучи AC и BC падают в точку C под углами α_1 и α_2, то искомая освещенность равна:

$$E_C = \frac{I}{r_1^2}\cos\alpha_1 + \frac{I}{r_2^2}\cos\alpha_2, \tag{1}$$

где I — сила света источников.

Поскольку полный световой поток Φ, создаваемый каждым источником, известен, то

$$I = \frac{\Phi}{4\pi}. \tag{2}$$

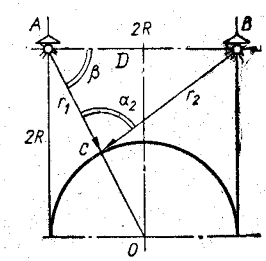


Рис. 16.1

Дальнейшее решение задачи сводится к геометрическому определению расстояний и углов, входящих в основное уравнение. Так как луч BC идет по направлению радиуса полусферы и совпадает с направлением нормали в точке падения, то $\alpha_1 = 0$. Из прямоугольного треугольника AOD находим r_1:

$$r_1 = AO - R = \sqrt{4R^2 + R^2} - R = 1{,}24\, R.$$

Чтобы найти расстояние r_2 и угол падения луча α_2, рассмотрим треугольники AOD и ACB. Из треугольника AOD

$$\cos\beta = \frac{AD}{AO} = \frac{R}{R\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Из треугольника ACB по теореме косинусов имеем:

$$r_2^2 = r_1^2 + 4R^2 - 4r_1 R\cos\beta.$$

Подставляя сюда вместо r_1 и $\cos\beta$ их выражения, после преобразований получим:

$$r_2^2 = 6\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)R^2 = 3{,}08\, R^2.$$

Применяя после этого теорему косинусов еще раз, найдем:

$$\cos\alpha_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - 4R^2}{2r_1 r_2} = 0{,}142.$$

С учетом составленных выражений для I, r и функций углов формулу (1) для освещенности в точке C можно окончательно переписать так:

$$E_C = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{1{,}54R^2} + \frac{0{,}142}{3{,}08R^2}\right) \approx 0{,}056\,\frac{\Phi}{R^2}.$$

Пример 2. Точечный источник света находится на расстоянии $d = 20$ *см* от вогнутого сферического зеркала радиусом $R = 50$ *см* (рис. 16.2). Найти освещенность в центре A экрана, расположенного перпендикулярно главной оптической оси зеркала на расстоянии $l_1 = 60$ *см* от вершины, если при удалении экрана на $l_2 = 100$ *см* от зеркала освещенность в его центре оказывается равной $E_{2A} = 300$ *лк*?

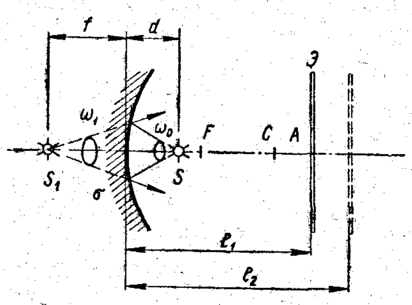


Рис. 16.2.

Решение. Если около источника света S поместить вогнутое зеркало, как показано на рисунке, освещенность в точке экрана A увеличится и станет равной сумме освещенностей E_0 и E_1, создаваемых лучами, идущими непосредственно от источника, и лучами, отраженными от зеркала:

$$E_A = E_0 + E_1.$$

Для вычисления этой освещенности нужно определить положение изображения S_1. Расстояние f от зеркала до изображения можно найти из формулы собирающего зеркала, учитывая, что предмет S находится между фокусом и зеркалом и его изображение будет мнимым:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Чтобы определить силу света I_1 изображения источника, выберем на поверхности зеркала маленькую площадку σ. Поток световой энергии, распространяющийся от источника в телесном угле ω_0, после отражения идет в телесном угле ω_1, вершина которого находится в точке S_1. Так как площадка σ мала, то можно считать, что

$$\omega_0 = \frac{\sigma}{d^2}; \quad \omega_1 = \frac{\sigma}{f^2}.$$

По условию задачи потери световой энергии при отражении не учитываются, поэтому из закона сохранения световой энергии получим:

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1,$$

откуда с учетом предыдущего равенства

$$I_1 = \frac{f^2}{d^2} I_0. \qquad (2)$$

Так как в первом положении экран находится от вершины зеркала на расстоянии l_1, то освещенность в середине экрана будет равна:

$$E_{1A} = \frac{I_0}{(l_1 - d)^2} + \frac{I_1}{(l_1 + f)^2}. \qquad (3)$$

Если экран отодвинуть от зеркала на расстояние l_2, освещенность в центре экрана станет равной:

$$E_{2A} = \frac{I_0}{(l_2 - d)^2} + \frac{I_1}{(l_2 + f)^2}. \qquad (4)$$

Из уравнения (1) находим $f_1 = 1$ *м*, из уравнений (2) и (4) — силу света источника и изображения: $I_0 = 38{,}4$ *св*, $I_1 = 960$ *св*.

Подставляя числовые значения величин, входящих в формулу (3), получим:

$$E_{1A} = 615 \text{ лк}.$$

Пример 3. При падении солнечных лучей перпендикулярно поверхности Земли освещенность поверхности равна приблизительно $E_0 = 10^5$ *лк*. Какова будет освещенность изображения Солнца, даваемого тонкой линзой с диаметром $D = 5$ *см* и фокусным расстоянием $F = 10$ *см*? Угловой диаметр Солнца равен $\alpha = 30'$.

Решение. Если на пути лучей, падающих нормально на поверхность Земли (рис. 16.3), поставить собирающую линзу так, чтобы она давала изображение Солнца, световой поток, распреде-

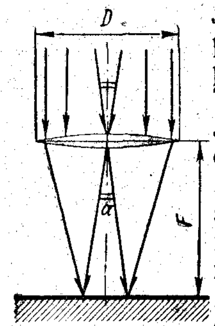


Рис. 16.3.

лявшийся ранее по площади поверхности Земли, равной площади линзы $S_л$, будет сконцентрирован на площадь изображения Солнца $S_и < S_л$. Так как лучи падают на линзу почти параллельным пучком, изображение Солнца получается приблизительно в фокальной плоскости.

Если не учитывать поглощения света линзой, можно считать, что поток $\Phi_л$, падающий на линзу, равен потоку $\Phi_и$, падающему на площадь изображения Солнца, т. е. $\Phi_л = \Phi_и$ или $E_л S_л = E_и S_и$, где $E_л$ и $E_и$ — освещенности поверхости линзы и изображения Солнца. В свою очередь $E_л = E_0$, и закон сохранения светового потока можно записать так:

$$E_0 S_л = E_и S_и. \qquad (1)$$

Угол α между лучами, идущими от крайних точек Солнца через оптический центр линзы, равен углу, под которым диаметр Солнца виден с поверхности Земли (угловому диаметру), поэтому, как видно из чертежа, площадь изображения

$$S_и = \pi r_и^2 = \pi F^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \approx \pi \left(\frac{\alpha F}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Поскольку угол α мал, можно считать $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$. Учитывая, что площадь линзы равна $S_л = \frac{\pi D^2}{4}$, и подставляя в уравнение (1) вместо $S_л$ и $S_и$ их выражения, получим окончательно:

$$E_0 \frac{\pi D^2}{4} = E_и \pi \left(\frac{\alpha F}{2}\right)^2.$$

Откуда освещенность $E_и$ с учетом числовых значений заданных величин получается равной:

$$E_и = E_0 \left(\frac{D}{\alpha F}\right)^2; \qquad E_и \approx 3{,}3 \cdot 10^8 \text{ лк}.$$

Пример 4. Какую экспозицию нужно сделать при фотографировании чертежа с линейным увеличением k_1, если при фотографировании чертежа с линейным увеличением k_2 время правильно подобранной выдержки равняется t_2? Диаметр объектива считать малым по сравнению с его фокусным расстоянием (рис. 16.4).

Р е ш е н и е. При фотографировании предмета с различных расстояний негатив получается одинаковым при условии, что на единицу площади пленки, где получается изображение объекта, приходится одинаковая световая энергия.

Если при съемке предмета с расстояния d_1 площадь изображения получается равной S_1 и за время правильной экспозиции t_1 на нее приходится энергия W_1, а при съемке того же предмета с расстояния d_2 эти величины равны соответственно S_2, t_2 и W_2, то для одинаковых негативов должно быть

$$\frac{W_1}{S_1} = \frac{W_2}{S_2}.$$

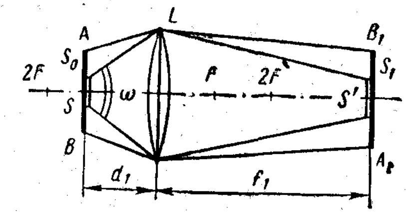


Рис. 16.4.

Отсюда с учетом формулы (16.4) получаем:

$$E_1 t_1 = E_2 t_2, \qquad (1)$$

где E_1 и E_2 — освещенности изображения в первом и втором случае. Уравнение (1) позволяет сравнить время двух экспозиций, если будет найдено отношение освещенностей изображений.

По условию задачи фотографируются мелкие детали предмета, поэтому его нужно расположить между фокусом и двойным фокусом линзы. Изображение предмета AB на пленке получается в этом случае увеличенным в k_1 раз и удаленным от линзы на расстояние f_1. Если пренебречь потерями светового потока и считать, что весь поток Φ_1, падающий от предмета на линзу, попадает на изображение, то его освещенность будет равна $E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1}$, где S_1 — площадь изображения.

Основная трудность решения задач, где рассматриваются протяженные источники, состоит в нахождении Φ_1. Здесь приходится применять несколько искусственный прием, дающий удовлетворительную точность лишь при условии, что диаметр объектива мал по сравнению с его фокусным расстоянием.

Выберем ничтожно малый элемент ΔS поверхности предмета, лежащий на главной оптической оси объектива, и предположим, что в единичный телесный угол ежесекундно излучается энергия w. По условию задачи диаметр линзы мал по сравнению с фокусным расстоянием F (а следовательно, и с d), поэтому при подсчете телесных углов, под которыми линзу видно из различных точек предмета, их можно считать равными друг другу, причем

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \frac{S_л}{d_1^2},$$

где $S_л$ — площадь линзы, d_1 — расстояние между предметом и линзой. Учитывая это, для светового потока, идущего на линзу от элементарной площадки предмета, получим:

$$\Delta \Phi_0 = w \frac{S_л}{d^2} \Delta S.$$

Полный световой поток, падающий на линзу со всей площади предмета S_0, будет равен:

$$\Phi_1 = \sum \Delta \Phi_0 = w \frac{S_л}{d_1^2} S_0.$$

Подставляя выражение потока в формулу освещенности изображения, получим:

$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \varpi \frac{S_л}{d_1^2} \cdot \frac{S_0}{S_1}. \tag{2}$$

Расстояние d_1, на которое нужно поместить предмет, чтобы получить данное увеличение чертежа k_1, а также отношение площади изображения к площади предмета, определяем из основных формул собирающей линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}; \qquad k_1 = \frac{f_1}{d_1}; \qquad \frac{S_1}{S_0} = k_1^2. \tag{3}$$

Исключая из уравнения (2) с помощью формул (3) величины d_1, S_0 и S_1, получим окончательное выражение для освещенности изображения при экспозиции t_1:

$$E_1 = (k_1 + 1)^2 \varpi F^2 S_л. \tag{4}$$

Проведя аналогичные рассуждения для второго положения предмета, мы нашли бы

$$E_2 = (k_2 + 1)^2 \varpi F^2 S_л. \tag{5}$$

Подставляя выражения (4) и (5) в уравнение (1), после сокращений находим:

$$t_1 = \left(\frac{k_2 + 1}{k_1 + 1}\right)^2 t_2.$$

Задачи к главе 16

16.1. Полный световой поток, излучаемый прямой нитью накала длиной 6 *см*, равен 132 *лм*. Определите наибольшую освещенность плоской поверхности, расположенной параллельно нити на расстоянии 50 *см* от нее. Считать, что яркость нити всюду одинакова.

16.2. Солнечные лучи проходят через круглое отверстие в стене и освещают расположенный за ней белый экран. Диаметр отверстия 20 *мм*. На каком расстоянии от стены нужно поставить экран, чтобы освещенность в его центре была втрое меньше освещенности, создаваемой лучами в плоскости отверстия? Угловой диаметр Солнца $\alpha = 30'$.

16.3. На столбах высотой 5 и 8 *м* горят две лампы силой 1000 и 750 *св*, расстояние между столбами 20 *м*. Какая точка между основаниями столбов освещается обоими источниками одинаково?

16.4. На высоте 2 *м* над серединой круглого стола диаметром 3 *м* висела лампа в 100 *св*. Ее заменили лампой в 25 *св*, изменив расстояние до стола так, что освещенность середины стола осталась прежней. Как изменилась освещенность края стола?

16.5. Два точечных источника света расположены на расстоянии 2 *м* друг от друга. На перпендикуляре, восставленном к линии, соединяющей источники, в ее середине, расположена под углом α к перпендикуляру небольшая площадка на расстоянии 1 *м* от этой линии. При $\alpha = 15°$ освещенности обеих сторон площадки одинаковы и равны 20 *лк*. Определите силы света источников.

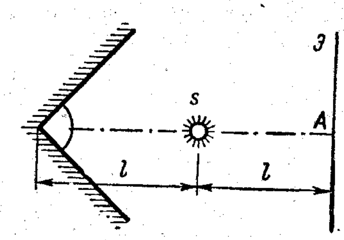


Рис. 16.5.

16.6. Три лампочки стоят в углах равностороннего треугольника со стороной l. Центр треугольника находится на расстоянии l от внутренней поверхности цилиндрического экрана. Две лампочки потушили. Где нужно поставить оставшуюся лампочку, чтобы освещенность в точке экрана, лежащей ближе всего к этой лампочке, осталась неизменной?

16.7. Картину фотографируют сначала целиком с большого расстояния, затем отдельные ее детали в натуральную величину. Каким должно быть время экспозиции при съемке деталей, если при съемке картины оно равнялось t?

16.8. Точечный источник света S находится на расстоянии l от экрана. Во сколько раз изменится освещенность точки A на экране, если около светящейся точки поместить два плоских зеркала, составляющих двугранный угол в 90° (рис. 16.5).

16.9. В сосуд с зеркальным дном налит слой воды толщиной $2H$. На глубине H находится точечный источник света силой I. На высоте H над водой на одной вертикали с источником расположена пластинка радиусом $r \ll H$. Пренебрегая потерями света при отражении и поглощением, определите среднюю освещенность пластинки.

16.10. На оси выпуклого сферического зеркала радиусом R находится точечный источник света. Расстояние между зеркалом и источником равно $R/2$. Определите освещенность площадки, находящейся на расстоянии $2R$ от зеркала, если освещенность площадки на расстоянии R равна E.

16.11. Точечный источник света находится на расстоянии 40 *см* от вогнутого сферического зеркала радиусом 50 *см*. На расстоянии 200 *см* от вершины зеркала перпендикулярно главной оптической оси поставлен экран. Определите максимальную освещенность экрана, если сила света лампы 100 *св*. Какова будет максимальная освещенность экрана, если источник поставить в фокус зеркала?

16.12. На расстоянии l от небольшого экрана находится точечный источник света. Когда посредине между экраном и источником поместили тонкую собирающую линзу, то оказалось, что освещенность экрана не изменилась. Чему равно фокусное расстояние линзы?

16.13. Экран стоит на расстоянии $L = 100$ *см* от светящегося шарика. Помещая между шариком и экраном тонкую собирающую линзу, можно получить изображение шарика на экране при двух положениях линзы, отстоящих друг от друга на расстоянии $l = 20$ *см*. Во сколько раз отличаются яркости изображения шарика? Решите задачу при условии, что вместо L и l даны увеличения изображения шарика $k_1 = 5$ и $k_2 = 2$.

16.14. Точечный источник света находится на расстоянии $F/2$ от идеально отражающего плоского зеркала. На расстоянии $2F$ с другой стороны от источника расположен экран. Во сколько раз изменится освещенность в центре экрана, если посредине между экраном и источником поместить тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F?

16.15. Проекционный аппарат имеет оптическую силу объектива 20 *дптр*. Какой световой поток должен пропускать диапозитив площадью 10 *см*^{2}, находящийся на расстоянии 5,1 *см* от линзы, чтобы освещенность изображения диапозитива на экране получалась не менее 4 *лк*? Рассеиванием светового потока пренебречь.

16.16. При фотографировании лунного диска в полнолуние объективом со светосилой 10^{-2} на пленку с чувствительностью 1 *лк · сек* качественная фотография была получена при выдержке 0,1 *сек*. Угловой размер Луны 0,01 *рад*. Какую освещенность создает Луна на Земле в полнолуние?

16.17. Изображение Солнца получено на экране с помощью системы из двух одинаковых линз с фокусным расстоянием F, расположенных на расстоянии $F/2$ друг от друга. Во сколько раз освещенность изображения Солнца лучами, прошедшими систему линз, больше освещенности экрана прямыми солнечными лучами? Угловой диаметр Солнца равен α, диаметр линз равен D.

16.18. Солнце расположено под углом 30° к оси вогнутого сферического зеркала. Какова должна быть площадь зеркала, чтобы максимальная освещенность изображения Солнца была в k раз больше максимальной освещенности, создаваемой у поверхности Земли при нормальном падении лучей. Фокусное расстояние зеркала F, угловой диаметр Солнца $\beta = 30'$.

16.19. Человек рассматривает лунный серп через очковое стекло с оптической силой $+5$ *дптр*, держа его на расстоянии 60 *см* от глаза. Будет ли казаться объект прямым или перевернутым; увеличенным или уменьшенным (во сколько раз); более или менее ярким по сравнению с тем, когда его рассматривают невооруженным глазом?

16.20. Протяженный источник находится на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F. Во сколько раз изменится освещенность изображения, если расстояние между источником и линзой увеличить вдвое?

16.21. Диаметр лупы 0,78 *см*, главное фокусное расстояние 3 *см*. Предмет, освещенность которого равна 50 *лк*, рассматривают в эту лупу глазом, для которого расстояние наилучшего зрения 30 *см*. Определите освещенность изображения, если диаметр зрачка равен 1,5 *мм*.

16.22. Объектив зрительной трубы Галилея [illegible] 6 *см*. Увеличение трубы равно 60. С какого максимального [illegible] $\approx$ 3,1 *сек*. [illegible]ния можно увидеть с помощью этой трубы свет зажженной спички, если невооруженным глазом это можно сделать с расстояния 1 *км*? Диаметр зрачка принять равным 3 *мм*. Потерями света пренебречь. При каком увеличении трубы β освещенность изображения объекта на сетчатке глаза будет не меньше, чем в отсутствии трубы? Как изменится ответ, если трубу Галилея заменить трубой Кеплера?

16.23. Объективом зрительной трубы Кеплера служит линза с фокусным расстоянием 50 *см*. Диаметр линзы 75 *мм*. Каково фокусное расстояние окуляра, если при наблюдении Луны в зрительную трубу яркость изображения оказывается в четыре раза меньшей, чем при наблюдении невооруженным глазом? Диаметр зрачка 3 *мм*.

16.24. Источник света в виде светящегося диска диаметром 8 *мм*, помещенный на расстояние 1 *м* от белого экрана, дает в точке экрана, ближайшей к источнику, освещенность 100 *лк*. С помощью линзы с фокусным расстоянием 21 *см* и диаметром 3 *см* на экране получают увеличенное изображение источника. Какова будет освещенность изображения?

16.25. На двойном фокусном расстоянии от равномерно светящейся плоскости большого размера находится собирающая линза диаметром D. Чему равна освещенность в центре светлого пятна экрана, находящегося на расстоянии d от линзы, если светящаяся плоскость излучает за 1 *сек* с 1 *см*^{2} поверхности в единицу телесного угла энергию Φ_0? Считать, что $2F > d \gg D$.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1. КИНЕМАТИКА

1.2. 9,7 *км/ч*; 8,3 *км/ч*; 8,6 *км/ч*. 1.3. $v_1 = \dfrac{s_1 v_2}{s_1 + v_2 t_1}$. 1.4. 40 *км/ч*. 1.5. 25 *км/ч*. 1.6. 340 *м/сек*; 10 *м/сек*. 1.7. 1,5 *м/сек*; 0,5 *м/сек*. 1.8. 1 *ч* 50 *мин*. 1.9. Решение

$$s = (v_л + v)t_1 \ (1); \ s = (v_л - v)t_2 \ (2);$$

$$s = \sqrt{v_л^2 - v^2}\,\frac{t_3}{2} \ (3); \quad \frac{t_1 + t_2}{t_3} = n \ (4).$$

Из (1)—(4)

$$v_л = \frac{nv}{\sqrt{n^2-1}} = 4{,}8 \ км/ч.$$

1.10. 30 *км/ч*; на юго-восток. 1.11. $2l/v$; $2l$. 1.12. Под углом $\alpha = \arcsin \dfrac{v_0 - u}{v_1} \times \times \dfrac{l}{s}$ к начальному направлению на катер. Относительно воды минимальная скорость равна $(v_0 - u)\dfrac{l}{s}$, относительно берега $-\dfrac{1}{s}\sqrt{u^2(s^2 - l^2) + v_0^2 l^2}$.

1.13. $\dfrac{v_2 b}{a(v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha)}$; $\dfrac{v_2 b}{a(v_2 \cos\alpha - v_1 \sin\alpha)}$

1.14. 585 *м/сек*. 1.15. $\approx$ 1 *сек*. 1.16. 7,94 *м/сек*; 18 *м/сек*. 1.17. 90 *км/ч*. 1.18. 25 *см*. 1.19. 5,9 *м/сек*. 1.20. $\dfrac{(a_1 \pm a_2)t^2}{4}$. 1.25. $\dfrac{\pi v_1 t_1}{4}$; $\dfrac{3\pi v_1 t_1}{16}$; $\dfrac{5\pi v_1}{6}$. 1.28. 30,6 *м*. 1.29. 5,2 *м*; 2,45 *м/сек*. 1.30. 4,9 *м*; 6,12 *м*; 9,8 *м*; 4,9 *м*; 3,7 *м*; 0; 0; 4,9 *м/сек*; 9,8 *м/сек*; 0. 1.31. $\sqrt{2gh}$; $(2 + \sqrt{2})\sqrt{\dfrac{h}{g}}$; $2\sqrt{gh}$. 1.32. 28,5 *м*. 1.33. $\dfrac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh_1}$. 1.34. $\dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$; $\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$. 1.35. Решение. $s = v_0(n-1)\Delta t - \dfrac{g(n-1)\Delta t^2}{2}$ (1); $\Delta t = \dfrac{2v_0}{ng}$ (2). Из (1)—(2) $v_0 = \sqrt{\dfrac{sgn^2}{2(n-1)}} \approx \approx 8{,}9$ *м/сек*. 1.36. $v_1 t + \dfrac{gt^2}{2}$. 1.37. 19,6 *м*; $\approx 63{,}5^0$. 1.38. 29,4 *м*. 1.39. $h_0 - \dfrac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{tg}^2\alpha$. 1.40. $0{,}49\dfrac{v_0^2}{g\sin\alpha}$. 1.41. 47 *км/ч*. 1.42. 8,5 *м/сек*; 3,7 *м*. 1.43. 76^0. 1.44. $\dfrac{gt^2}{8}$;

$\dfrac{gt^2}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. 1.45. $\alpha = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{4h}{l}$; $v_0 = \sqrt{g(l^2/8h + 2h)}$. 1.46. $\approx$ 11,5 *м*; $\approx$ 3,1 *сек*. 1.47. 19,2 *м/сек*; 38°40′. 1.48. Решение. $s = v_0 \cos\alpha t$ (1); $h = v_0 \sin\alpha t - \dfrac{gt^2}{2}$ (2); $v = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$ (3); $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$ (4). Из (1) — (4)

$$s = \frac{\left(\sqrt{v_0^2 - 2gH}\right)\left[\sqrt{2H} + \sqrt{2(H-h)}\right]}{\sqrt{g}} = 23{,}7 \ м; \ v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 15{,}3 \ м/сек.$$

1.49. $\approx 31^0$; $\approx$ 1670 *м*. 1.50. Решение. а) $n_1 = \dfrac{s}{d} = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{d}\,t$; $L = v_0 \sin\alpha\, t + \dfrac{gt^2}{2}$, откуда $n_1 = \dfrac{v_0 \cos\alpha}{d} \cdot \dfrac{\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gL} - v_0 \sin\alpha}{g}$; б) $n_2 = \dfrac{L}{s} = \dfrac{L}{v_0 \cos\alpha\, t}$

$d = v_0 \sin\alpha\, t - \dfrac{gt^2}{2}$, откуда $n_2 = \dfrac{Lg}{v_0 \cos\alpha\left(v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gd}\right)}$.

1.51. а) $x_1 = \dfrac{4v_0^2}{g}\sin\alpha$; б) $x_2 = 4x_1$; в) $x_3 = \dfrac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}(\sin\alpha - \cos\alpha)^3$.

1.52. Решение. Выберем оси координат OX и OY вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней. Тогда, разложив по этим осям вектор скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{g}$, получим: $l_1 = v_0 \sin\alpha t + \dfrac{g \sin\alpha t^2}{2}$; $0 = v_0 \cos\alpha t - \dfrac{g\cos\alpha t^2}{2}$, откуда $t = \dfrac{2v_0}{g}$ и $l_1 = 8h \sin\alpha$. В момент второго удара $v_y = v_0 \cos\alpha$; $v_x = v_0 \sin\alpha + g \sin\alpha t = 3v_0 \sin\alpha$; и, следовательно, аналогично предыдущему $l_2 = 2l_1$; $l_3 = 3l_1$ и $l_n = nl_1$; $L = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i = l_1(1 + 2 + \ldots + n) = \dfrac{n(n+1)}{2}l_1$, отсюда

$$n = \sqrt{2\frac{L}{l} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{L}{h\sin\alpha}} - 1\right) = 5.$$

1.53. $2v_0 t \cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}$; $2v_0 \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. 1.54. Решение. а) Выберем оси OX и OY вдоль и перпендикулярно течению реки в точке начала движения, тогда $y = vt$ (1); $u = u_0 + ky$ (2). Из (1) и (2) следует, что вдоль течения лодка движется равноускоренно и, следовательно, до середины реки $\left(y = \dfrac{s}{2}\right)$ проходит расстояние $x_1 = u_0 t + \dfrac{kvt^2}{2}$ (3). б) Выберем оси координат по тем же направлениям, но с началом в точке, лежащей на середине реки, тогда $y = vt$ (1′); $u = u_1 - ky$ (4), где $u_1 = u_0 + \dfrac{ks}{2}$ (5) — скорость лодки на середине реки. Из (1′) и (4) следует, что от середины реки до берега лодка движется равнозамедленно и проходит расстояние

$$x_2 = u_1 t - \frac{kvt^2}{2} \quad (6).$$

За время переправы течение сносит лодку на $x = x_1 + x_2$ (7). Из уравнений (1)—(7)

$$x = \frac{u_0}{v} s + \frac{k}{4v} s^2.$$

Чтобы найти уравнение траектории лодки, нужно из уравнений (1) и (3), (1') и (6) исключить время.

$$x_1 = \frac{u_0}{v} y + \frac{k}{2v} y^2 \text{ и } x_2 = \left(\frac{u_0}{v} + \frac{ks}{2v}\right) y - \frac{k}{2v} y^2,$$

т. е. в обоих случаях лодка движется по параболе.

Чтобы переплыть в противоположную точку берега, составляющая скорости лодки по направлению, перпендикулярному движению, должна равняться скорости течения $v \cos\alpha = u_0 \pm ks$, откуда

$$\cos\alpha = \frac{u_0}{v} \pm \frac{k}{v} s,$$

где α — угол между скоростью лодки относительно воды и берегом.

1.55. $v = \omega\left(R - \frac{\omega h}{2\pi} t\right)$. **1.56.** $\frac{2l}{n}$; $\frac{2l}{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

1.57. 840 *км/ч* на запад. **1.58.** 0,4 *м/сек*; 8 $сек^{-1}$; 1 $сек^{-2}$. **1.59.** 2 *сек*; 2,8 *сек*. **1.60.** 12,5 *м/сек*. **1.61.** $\approx 6{,}2$ $м/сек^2$; $\approx 7{,}6$ $м/сек^2$; $9{,}8\ м \leqslant R \leqslant 78{,}4\ м$. **1.62.** 0,2 *м/сек*; 19 *об/мин*. **1.63.** $\frac{\omega_1 R \pm \omega_2 r}{R - r}$; $\frac{\omega_1 R \mp \omega_2 r}{2}$.

1.64. а) $\frac{v_1 \mp \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha}}{2}$; б) $\frac{v_1 \pm \sqrt{v_2^2 - v_1^2 \cos^2\alpha}}{2l}$.

1.65. 4 *м/сек*; 0; 2,8 *м/сек*; 5,6 $м/сек^2$; 4 $м/сек^2$; 6,3 $м/сек^2$; 2,8 $м/сек^2$.

Глава 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. 353 *м*. **2.2.** 8,6 *сек*. **2.3.** 2,45 *кг*. **2.4.** 98 *н*; 115 *н*. **2.5.** 15 *м*. **2.6.** 17,5 *м*. **2.7.** 0,7 *м*. **2.8.** $l = 2/\tau \sqrt{2gh}$. **2.9.** 3,3 *н*; 4,9 *н*. **2.10.** $\frac{NmgF}{(N-1)mg - F}$; $\frac{N}{N-1} F$. **2.11.** а) 0,015; 6,55 *н*; 2,35 *н*; б) 0,76 $м/сек^2$; 0,28 *м/сек*; 3,58 *м*; в) 7,95 $м/сек^2$. **2.12.** 0,3 *кг*; 1,77 *н*; 3,54 *н*. **2.13.** $\approx 1{,}67$ *кн*; 0,56 *кн*. **2.14.** $g/6$; 4,1 *н*; 8,2 *н*; 5,2 *н*. **2.15.** 134 *н*; 104 *н*. **2.16.** ≈ 59 *н*. **2.17.** $\frac{3}{4} h$; $\frac{7}{6} h$. **2.18.** 2,45 *сек*. **2.19.** $\frac{g\sqrt{H(2R-H)}}{R-H}$. **2.20.** $M \frac{3g^2 - a^2}{2g}$.

2.21. $\operatorname{ctg}\varphi_1 = \operatorname{ctg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{a\cos\alpha}$. **2.22.** $\operatorname{tg}\alpha - \frac{l}{gt^2\cos\alpha}$. **2.23.** а) $\frac{M}{m} = \operatorname{tg}\alpha$; $M > m \operatorname{tg}\alpha$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + f\operatorname{tg}\alpha} < \frac{M}{m} < \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f\operatorname{tg}\alpha}$; в) $N = \frac{mM}{m+M} g\ [(1 - f_1)\sin\alpha + (1 + f_1)\cos\alpha]\sqrt{2}$. **2.24.** $\approx 1{,}4$ *сек*. **2.25.** 1,78 $м/сек^2$. **2.26.** $F = 2\sqrt{2} mg \sin\alpha$; $a = 2\sqrt{2}\, g \sin\alpha$. **2.27.** Решение.

1. $F\cos\alpha - fN_1 = 0$ (1); $N_1 = mg - F\sin\alpha$ (2); $F\cos\frac{\alpha}{2} - fN_2 = ma$ (3); $N_2 = mg - F\sin\frac{\alpha}{2}$ (4). Из первых двух уравнений

$$f = \frac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} \approx 0{,}3,$$

из последних двух

$$a = \frac{F}{m}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + f\sin\frac{\alpha}{2}\right) - fg = 1\ м/сек^2.$$

2. Для максимального ускорения аналогично предыдущему

$$a_{макс} = \frac{F}{m}(\cos\beta + f\sin\beta) - fg,$$

где β — угол, под которым нужно приложить силу, чтобы ускорение было наибольшим. Полагая $f = \operatorname{tg}\varphi$, получим:

$$\cos\beta + f\sin\beta = \cos\beta + \operatorname{tg}\varphi\sin\beta = \frac{\cos(\beta - \varphi)}{\cos\varphi}.$$

При максимальном ускорении должно быть $\cos(\beta - \varphi) = 1$ и, следовательно,

$$\cos\beta + f\sin\beta = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + f^2},$$

откуда $\operatorname{tg}\beta = f$ и $\beta \approx 17°$. С учетом всего этого для максимального ускорения получим:

$$a_{макс} = \frac{F}{m}\sqrt{1 + f^2} - fg \approx 1{,}1\ м/сек^2.$$

2.28. а) Нить установится по нормали к траектории движения тележки. б) Отклонится вперед от нормали; займет вертикальное положение; отклонится вперед от нормали. **2.29.** $fMg\cos\alpha$. **2.30.** ≈ 2330 *н*. **2.31.** $\frac{m+M}{M} g \sin\alpha$.

2.32. $v_2 = \frac{mg(v_1 + v_т)\sin\alpha}{F - mg\sin\alpha} + v_т \approx 2{,}5$ *км/ч*. **2.33.** $\frac{l - x}{l} m(a + g\sin\alpha + fg\cos\alpha)$.

2.34. $a = \frac{(M - m)g\sin\alpha - 2fg(2m + M)\cos\alpha}{M + m}$; $\frac{m}{M} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 2f}{\operatorname{tg}\alpha + 4f}$. **2.35.** $\frac{3H}{2\pi R} mg$.

2.36. Решение. Уравнения 2-го закона Ньютона для кубика и клина дают:

$$N_1\cos\alpha - fN_2 = Ma_1;\ N_2 - Mg - N_1\sin\alpha = 0;$$
$$mg - 2N_1\sin\alpha = ma_2.$$

Поскольку клин не отрывается от кубиков, $a_1 = a_2 \operatorname{tg}\alpha$. Решая уравнения совместно, находим:

$$a_1 = \frac{m\operatorname{ctg}\alpha - 2fM - fm}{m\operatorname{ctg}^2\alpha + 2M - fm\operatorname{ctg}\alpha} g.$$

2.37. Решение. Предположим, что больший груз опускается, а остальные два поднимаются; тогда

$$T - mg = ma_1;\ 2T - 2mg = 2ma_2;\ 3mg - T = 3ma_3;\ a_2 = \frac{a_3 - a_1}{2}.$$

Решая уравнения совместно, находим: $a_1 = a_2 = 0{,}2g$; $a_3 = 0{,}6g$. **2.38.** а) 27,4 *н*;

13,7 н; 27,4 н; 54,8 н; б) $\frac{16}{7}$ кг. 2.39. $t=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}$. 2.40. $\frac{f+\operatorname{tg}\alpha}{1-f\operatorname{tg}\alpha}Mg$.

2.41. $a_1=2,45$ м/сек²; $a_2=7,35$ м/сек². 2.42. $f=0,2$; $a_1=\frac{3}{7}g$; $a_2=0,35g$; $a_3=0,485g$.

2.43. а) $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{F}{2(m+M)}$ при $F<F_0$; $\left.\begin{matrix} a_1=a_2=\frac{F-2fmg}{2m}\\ a_3=a_4=\frac{fmg}{M}\end{matrix}\right\}$ при $F>F_0$,

где $F_0=2fmg\frac{M+m}{M}$; б) $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{F}{2(m+M)}$ при $F<F_1$;

$\left.\begin{matrix}a_1=a_2=a_3=\frac{fmg}{(2m+M)}\\ a_4=\frac{F-fmg}{M}\end{matrix}\right\}$ при $F>F_1$, где $F_1=\frac{2f(m+M)mg}{(2m+M)}$.

2.44. $a_c=\frac{(M-m)(Mg-mg-F)t}{(M+m)^2}$; $\Delta K=(m+M)a_c t$.

2.45. а) $0,5g$; $0,33g$; б) $0,5g$; $-0,55g$. 2.46. а) $4Mg$; б) $11Mg$; $2,25\,Mg$. в) $\frac{2-3f}{3+2f}6\,Mg$.

2.47. Решение. а) $mg-fMg=(m+M)a$ (1). Если переносное ускорение системы a_1, относительное a_0, то уравнение 2-го закона Ньютона для груза $T-mg=m(a_1-a_0)$ (2); для бруска $T-fN=Ma_0$ (3) и $N-Mg=Ma_1$ (4). Полное ускорение груза $a_г=a_1-a_0$ (5), бруска $a_б=\sqrt{a_0^2+a_1^2}$ (6).
Из уравнений (1)—(6) находим: $a_г\approx1,46$ м/сек²; $a_б\approx2,3$ м/сек²; $T=11,2$ н; б) $a_г\approx2,66$ м/сек²; $a_б\approx2,24$ м/сек²; $T\approx7$ н.

2.48. $\frac{m}{3}(a+g)$. 2.49. а) $t\sqrt{\frac{a+g}{g}}$; б) $t\sqrt{\frac{g+a}{g-a}}$.

2.50. Решение. Выбрав оси координат вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней, получим: а) $mg\sin\alpha-fN=ma_1\cos\alpha$ (1) и $N-mg\cos\alpha=ma_1\sin\alpha$ (2), откуда $a_1=\frac{\sin\alpha-f\cos\alpha}{\cos\alpha+f\sin\alpha}g=4,4$ м/сек²; б) $mg\sin\alpha+fN=ma_2\cos\alpha$ (1); $N-mg\cos\alpha=ma_2\sin\alpha$ (2), откуда $a_2=\frac{\sin\alpha+f\cos\alpha}{\cos\alpha-f\sin\alpha}g=7,1$ м/сек²; в) $\approx3,3$ м/сек². 2.51. $a=\frac{0,5(1-f^2)\sin2\alpha+f\cos2\alpha}{1-f\sin2\alpha+(1+f^2)\sin^2\alpha}g$; $\frac{(1-f^2)\sin2\alpha-4f\cos^2\alpha}{2f}$. 2.52. $F=1,96$ н; $f=\sqrt{3}$. 2.53. $v=0,58\sqrt{gh}$.

2.54. 3,7 м. 2.55. $(\sqrt{n}-1)R_З$. 2.56. Уменьшить в 2,4 раза. 2.57. 255 кг. 2.58. ≈265 м/сек². 2.59. $\approx0,04\frac{\gamma M^2}{R^2}$; $\approx0,05\frac{\gamma M^2}{R^2}$.

2.60. $\frac{16}{9}\pi^2\gamma\rho_1\rho_2\frac{r^6}{L^2}$; $\frac{16}{9}\pi^2\gamma\rho_1^2\frac{r^6}{L^2}$. 2.61. $mg_0\frac{r}{R_З}$. 2.62. $\frac{4}{3}\pi\gamma\rho rm$. 2.63. $\sqrt{4^2+(1+4t)^2}$ н;

$\approx6,5$ н. 2.64. ≈70 н. 2.65. $\frac{m_2l}{m_1+m_2}$; $\frac{m_1l}{m_1+m_2}$; $\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\omega^2l$. Грузы начнут двигаться в сторону смещения их общего центра тяжести—от оси вращения. 2.66. 0,25 м; 13,25 н; 1,25 м; 61,2 н. 2.67. ≈100 н. 2.68. 72 км/ч; 76°40′.

2.69. $N=(1,77-0,96\cos\alpha)$ н; 0,8 н; 2,72 н; 1,77 н; 1,77 н. 2.70. $0,14\sqrt{\frac{zgR}{100\%}}$.

2.71. ≈175 м. 2.72. 16,5 сек. 2.73. $\omega=\sqrt{gr/Rh}$; $F_{тр}=mg\frac{r}{h}$. 2.74. 3,1 м/сек.

2.75. $\sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{2}\frac{g}{l}}$. 2.76. 7,2 км/сек; 2 ч. 2.77. $\approx42\,500$ км; 2,6 км/сек.

2.78. 27,4 сут. 2.79. $\approx5,9\cdot10^{25}$ кг. 2.80. Решение. $N_1=mg$; $mg-N_2=\frac{m4\pi^2R}{T^2}$; $N_2=\frac{N_1}{2}$; $g=\gamma\frac{M}{R^2}=\frac{4}{3}\pi\gamma\rho R$.

Решая уравнения совместно, получим: $\rho=\frac{6\pi}{\gamma T^2}\approx3,6\cdot10^3$ кг/м³.

2.81. $m\left(\gamma\frac{M}{R^2}-\frac{4\pi^2R}{T^2}\right)$; $m\sqrt{\gamma^2\frac{M^2}{R^4}+\frac{4\pi^4R^2}{T^4}-\gamma\frac{2\pi^2M}{RT^2}}$ 2.82. $\sqrt{\frac{F}{6\pi mR}}$.

2.83. $\sqrt{\frac{f+\operatorname{tg}\alpha}{f(1-f\operatorname{tg}\alpha)}}$.

2.84. Решение. Раскладывая силы, действующие на тело по горизонтальному и вертикальному направлениям, получим: $N\cos\alpha-fN\sin\alpha=m\omega^2R\cos\alpha$ и $fN\cos\alpha+N\sin\alpha=mg$. Отсюда

$$f=\frac{g\cos\alpha-0,5\omega^2R\sin2\alpha}{g\sin\alpha+\omega^2R\cos^2\alpha}.$$

Для второго случая

$$f=\frac{g\cos\alpha+0,5\omega^2R\sin2\alpha}{g\sin\alpha-\omega^2R\cos^2\alpha}.$$

2.85. $\frac{2(kl+mg\operatorname{ctg}\alpha)}{2k-m\omega^2}$. 2.86. $\varphi=\arccos\left(\frac{3g}{5\omega^2l}\right)$. 2.87. $\frac{(a+g)(\cos\alpha+f\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha-f\cos\alpha)}$.

2.88. а) $\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{\omega^2}$; б) $\frac{mg}{\cos\alpha}$. 2.89. 4,55 н. 2.90. $v=\frac{mu-Ft}{m+M}$; $s=\frac{l(2Mu^2+mu^2+Fl)}{2(m+M)}$.

2.91. 0,026 н·сек; 105° к начальному направлению. 2.92. $2m(v\cos\alpha+u)$; $\operatorname{tg}\varphi=2\operatorname{ctg}\alpha+\frac{u}{v\sin\alpha}$. 2.93. $\frac{2}{9}\cdot\frac{v^2}{gf}$. 2.94. $\frac{Mv+ma}{M+m}$; $\frac{\sqrt{(Mv)^2+(mu)^2}}{M+m}$. 2.95. $\operatorname{tg}\varphi=2\operatorname{tg}\alpha$. 2.96. $\sqrt{v_1^2-v_0^2}$; $\frac{v_1\pm\sqrt{v_1^2-v_0^2}}{g}$. 2.97. $2(n+1)s$. 2.98. ≈10 км.

2.99. Решение.

$h=v_0t+\frac{at^2}{2}$ (1); $m\sqrt{2gh}=(2M+m)v_0$ (2); $mg=(2M+m)a$ (3).

Из (1)—(3)

$$t=\left(\sqrt{2\frac{M+m}{m}}-1\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

2.100. $\frac{(mv-M\sqrt{2gh})^2}{2gm^2}$. 2.101. $\frac{\sqrt{(2Mv)^2+(mu)^2}}{M}$; $\frac{\sqrt{[2(M-m)v]^2+(mu)^2}}{M+m}$; $\frac{2\sqrt{[(M\pm m)u]^2+(mv)^2}}{M+m}$. 2.102. 0,83 *м/сек*; 1,16 *м/сек*.

2.103. $\sqrt{2gl(\sin\alpha-f\cos\alpha)+2\frac{m}{M}u\sin\alpha\sqrt{gl(\sin\alpha-f\cos\alpha)}+\frac{m^2}{M^2}u^2\sin\alpha}$.

2.104. $\sqrt{2gH+2\frac{m}{M}u\sqrt{gH}\sin\alpha+\left(\frac{mu}{M}\right)^2}$.

2.105. а) Р е ш н и е. Дальность прыжка равна:

$$l=(v_0\cos\alpha-v_л)\frac{2v_0\sin\alpha}{g}\quad(1).$$

Согласно закону сохранения импульса

$$m(v_0\cos\alpha-v_л)=Mv_л.\quad(2).$$

Из (1)—(2)

$$l=\frac{M}{m+M}\cdot\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\approx 1{,}65\ м;$$

б) $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{M}{m+M}$. 2.106. $\frac{m}{m+M}l$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m+M}{M}\cdot\frac{h}{l}$. 2.107. $\frac{l}{v_0}$; $\frac{v_0}{2}$; 0; mg.

2.108. $\frac{Ml+(M+m)h}{M+m}$. 2.109. а) $\frac{Mv+m(v\mp u)}{(M+m)u}l$; б) $l\sqrt{\left(\frac{m}{m+M}\right)^2+\left(\frac{v}{u}\right)^2}$; в) $\left(1+\frac{M}{m}\right)v$.

Глава 3. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

3.1. 29,4 *дж*. 3.2. $m(gh+v\Delta v)$. 3.3. $mgh+\frac{(mg)^2}{2k}$.

3.4. Р е ш е н и е. $A=3A_1=3\frac{F_1^2}{2k}$; $F_1=\frac{F}{2\cos 30^\circ}$; $F_0=ks_0$.

Решая уравнения совместно, находим: $A=\frac{3F^2s_0}{8F_0\cos^2 30^\circ}=1{,}22$ *дж*.

3.5. 1,5 *Fa*. 3.6. 535 *квт*; 1070 *квт*. 3.7. $\frac{(N_1+N_2)v_1v_2}{N_1v_2+N_2v_1+fmgv_1v_2}$. 3.8. 9 *км/ч*.

3.9. 65,6 *квт*.

3.10. Р е ш е н и е.

Согласно второму закону Ньютона $mg=Ma=M\frac{v}{t}$; $N_{макс}=mgv$, откуда $t=\frac{MN_{макс}}{m^2g^2}=0{,}78$ *сек*.

$$A=N_{ср}t=\frac{N_{макс}}{2}t=141\ дж.$$

3.11. $mgv\sin\alpha+\frac{mgh}{l}$; $mgv\sin\alpha$. 3.12. 9,6 *кн*. 3.13. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{f}$; $\frac{N}{mg\sqrt{1+f^2}}$.

3.14. 4200 *квт*. 3.15. $mg(0{,}5L+D)+0{,}5MgD$. 3.16. 3,5 *дж*. 3.17. 25,5 *м*.

3.18. 20,4 *м*. 3.19. 1,85 *кдж*. 3.20. $2fmgl$. 3.21. $\frac{\operatorname{tg}\alpha-f}{\operatorname{tg}\alpha+f}h$. 3.22. 2,1 *м/сек*; 1,1 *сек*.

3.23. 12 *н*; 24 *дж*. 3.24. 324 *дж*; 263 *дж*; 216 *вт*. 3.25. $\approx 0{,}86\sqrt{gl}$; $\approx 0{,}51\sqrt{gl}$.

3.26. $\frac{7}{3}g$. 3.27. 1,25 *кн*. 3.28. $0{,}5\left(l+\frac{v^2}{fg}\right)$. 3.29. 2,5 *м*. 3.30. $\sqrt{2gh+\frac{mg^2}{k}}$.

3.31. а) $s=\frac{F_0(l_0-l_1)^2}{x_0mg}=100$ *м*; б) $H=50$ *м*. 3.32. $m\sqrt{g^2+\frac{kv_0^2}{m+M}}$.

3.33. а) $\frac{7}{12}mgl$; б) $\sqrt{2gl}$; 3.34. 1,2 *м*; 208 *дж*. 3.35. $\cos\beta=1-\frac{1}{2gl}\left(\frac{mv\cos\alpha}{m+M}\right)^2$.

3.36. 1. Р е ш е н и е. Величина скорости в момент удара определяется из уравнения:

$$mg\sqrt{l_2^2-l_1^2}=\frac{mv_0^2}{2}\quad(1).$$

При отражении вектор $\vec{v}_0$ направлен под углом α к горизонту, его проекция на касательную к траектории

$$v_1=v_0\cos 2\alpha=\frac{l_2^2-2l_1^2}{l_2^2}v_0\quad(2).$$

Высоту подъема шарика после отражения можно найти из уравнения:

$$\frac{mv_1^2}{2}+mg\left(l_2-\sqrt{l_2^2-l_1^2}\right)=mgh\ (3).\quad \cos\varphi=\frac{l_2-h}{l_2}\ (4).$$

Из (1)—(4)

$$\cos\varphi=\frac{4l_1^2}{l_2^2}\sqrt{\left(\frac{l_2^2-l_1^2}{l_2^2}\right)^3}.$$

2. $\frac{l_1(l_2^2-2l_1^2)}{l_2^2}$. 3.37. ≈ 120 *м/сек*.

3.38. Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{kx^2}{2}=\frac{(m+M)v_2^2}{2}+(m+M)gx.$$

По закону сохранения количества движения $mv_1=(m+M)v_2$;

$$x=\frac{1}{k}\left[(m+M)g+\sqrt{(m+M)^2g^2+\frac{km^2v^2}{m+M}}\right]=8{,}2\ см.$$

3.39. $\frac{m_2}{m_1+m_2}2\pi R$; $\pi R\sqrt{\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)W_0}}$. 3.40. $\frac{18mg}{k}$; $\frac{9mg}{2k}$. 3.41. 20 *м/сек*; 10 *м/сек*; 0. 3.42. $\frac{(\sqrt{mM_1M_2(M_1+M_2)}-mM_1)v}{M_1(M_1+M_2)}$; $\frac{(\sqrt{mM_1M_2(M_1+M_2)}-mM_2)v}{M_2(M_1+M_2)}$.

3.43. $\frac{4\sqrt{3}}{7}v_0$; $\frac{v_0}{7}$; $\frac{\sqrt{7}}{4}v_0$. 3.44. $m=\frac{4W}{v_1^2+v_2^2}$; $W_0=\frac{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}{v_1^2+v_2^2}\cdot\frac{W}{2}$.

3.45. 6,85 *кн*; 16,2 *кн*. 3.46. $\frac{1}{2g}\left(\frac{Mv}{m}\right)^2$. 3.47. $\frac{45}{49}$ *см*; $\frac{80}{49}$ *см*. 3.48. $\frac{Mv^2}{2g(m+M)}$; $\frac{9Mv^2}{2g(m+M)}$. 3.49. ≈ 595 *дж*; $\approx 0{,}3$ *квт*.

3.50. Решение. Поскольку шнур абсолютно упругий, взаимодействие тел в момент натяжения нити происходит по законам упругого удара. Скорость шара в начале взаимодействия определяется из уравнения

$$v_1^2=v_0^2-2gl \quad (1).$$

Для абсолютно упругого удара законы сохранения дают:

$$2Mv_1=2Mv_2+Mu \quad (2); \qquad 2Mv_1^2=2Mv_2^2+Mu^2 \quad (3).$$

Если тела встречаются на расстоянии x от точки бросания спустя время t после начала движения шара, то

$$t=t_1+t_2 \quad (4); \qquad l=\frac{v_0+v_1}{2}t_1 \quad (5); \qquad l-x=v_2t_2+\frac{gt_2^2}{2} \quad (6); \qquad x=ut_2-\frac{gt_2^2}{2} \quad (7).$$

Из (1)—(7)

$$t=\frac{v_0-\sqrt{v_0^2-2gl}}{g}+\frac{l}{\sqrt{v_0^2-2gl}}; \quad x=\left[\frac{4}{3}-\frac{gl}{2(v_0^2-2gl)}\right]l.$$

3.51. $\approx 2{,}1$ *км/сек*. 3.52. 60°; 1,56 *н*; $\approx 39°50'$. 3.53. 30°. 3.54. $6mg$. 3.55. $\sqrt{5gl}$. 3.56. $N=0{,}98(2-3\cos\alpha)$ *н*. 3.57. $F_{\text{макс}}=4mg$; $h=\frac{13}{54}l$. 3.58. $\frac{mg}{R}(3h-5R)$; 0; $5mg$. 3.59. $\frac{2}{3}R+\frac{1}{3g}\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2$; $\frac{m+M}{m}\sqrt{gR}$. 3.60. $\frac{Rl}{4hb}$. 3.61. 0; $\sqrt{\frac{3}{5}gl}$; $\sqrt{\frac{12}{5}gl}$; $\sqrt{2gl}$; 3.62. $\sqrt{\frac{4m+5M}{M}gR}$; $\frac{mM(2m+3M)g}{(m+M)^2}$. 3.63. $2q(l+\pi r)v^2$.

Глава 4. СТАТИКА

4.1. 455 *н*; 525 *н*; 29,4 *н*; 0. 4.2. 0,75. 4.3. 312 *н*; 127 *н*. 4.4. 0,25. 4.5. ≈ 1 *м*. 4.6. $\frac{2\cos\alpha-1}{\sin\alpha}m$; $\frac{(2\cos 2\alpha-\cos\alpha)}{\sin\alpha}mg$. 4.7. $8{,}15\cdot 10^{-2}$ *н*; радиус, проведенный к меньшему грузу, составляет с вертикалью угол 56°20′. 4.8. $(N-1)\left(l+\frac{Nfmg}{2k}\right)$. 4.9. $F=\frac{1+f+f^2}{1+f^2}\cdot 2mg=21{,}6$ *н*. 4.10. $f=\operatorname{ctg}\alpha$; $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

4.11. $7mg\sin\frac{\alpha}{2}$; $\left(3+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)mg$. 4.12. $f=1$. 4.13. 294 *н*; 0,375. 4.14. $\sin\varphi=\frac{k_2-k_1}{2k_1k_2}qg$ на расстоянии $x=\frac{k_2l}{k_12}$ от середины стержня. 4.15. 1,2 *кн*. 4.16. 600 *н*; 100 *н*. 4.17. $F=\frac{(\sin\alpha+f\cos\alpha)mg}{f\sin\beta+\cos\beta}$; $\beta=\arccos\left[\left(1+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}\right)\frac{r}{R}\cos\alpha\right]-\alpha$. 4.18. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2fh-l}{fl}\right)$; $\frac{fmg}{2(l-fh)}\sqrt{1+\left(\frac{2fh-l}{fl}\right)^2}$. 4.19. 6. Если не учитывать кривизну поверхности Земли, то на бесконечно большое. 4.20. $\frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha$; $[M\sin^2\alpha+0{,}5(M-m)\cos^2\alpha]g$. 4.21. Коэффициент трения между бревнами должен быть не меньше 0,27, а между бревнами и землей не меньше 0,1.

4.22. $2m\frac{R-r}{R}$. 4.23. $a<l<a\sqrt{1+f^2}$. 4.24. $\approx 2{,}6$ *м*.

4.25. $\frac{Fl(7-4\sin\alpha)-(M+2mgl)}{4l}$; $\frac{Fl(12\sin\alpha-3)+(M+2mgl)}{4l}$.

4.26. 0,495 *н*; 0,99 *н*; 0,099 *н*. 4.27. На расстоянии 1 *см* и 1,5 *см* от катетов.

4.28. $\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}$. 4.29. $\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt{15}}{30}\cdot\frac{M-m}{M+m}\right]$; $\frac{\sqrt{15}}{30}(M-m)g$. 4.30. $\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

4.31. Центр тяжести сместится к основанию треугольника на 0,67 *см*.

4.32. $0{,}5fMgL\alpha$; $0{,}25fMg$. 4.33. $\frac{mR}{m+M}$; $\frac{MR}{m+M}$; $\frac{MR\sqrt{2}}{m+M}$. 4.34. $m_x=\frac{m+(2^n-1)q}{2^n}$

4.35. ≈ 590 *н*; 30%. 4.36. 590 *н*. 4.37. $\approx 12{,}7$ *н*.

Глава 5. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

5.1. $2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$. 5.2. 0,55 *м*; нет. 5.3. $\approx 1{,}12$ *м*; ≈ 15 *сек*; $\approx 0{,}115\pi$; $\approx 0{,}47$ *м/сек*; $\approx 0{,}195$ *м/сек*^{2}.

5.4. 1,2 *н*; $1{,}8\cdot 10^{-2}$ *дж*; 0,8 *н*. 5.5. $2m\left(\frac{\pi l}{T}\right)^2\cos^2\frac{2\pi}{T}t$; $ml\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\sin^2\frac{2\pi}{T}t$.

5.6. $\approx 8\cdot 10^{-3}$ *рад*; $\approx 5\cdot 10^{-3}$ *дж*. 5.7. 12,6 *кн*. 5.8. $A=\frac{kg}{4\pi^2 l^2}=0{,}40$ *м*.

5.9. $A=v\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $a_{\text{макс}}=v\sqrt{\frac{k}{m}}$. 5.10. $x=5\sin 14t$.

5.11. $T_1/T_2=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}\sqrt{k_1k_2}$. 5.12. $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho gS}{m}}$. 5.13. $2\pi\sqrt{\frac{m}{3\rho gS}}$. 5.14. $\approx 1{,}22$ *сек*.

5.15. а) $x_1=\frac{2}{3}\frac{mg}{k}\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$; $x_2=\frac{x_1}{2}$; б) $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $A=\frac{v_0}{4}\sqrt{\frac{m}{k}}$.

5.16. 1,4 *сек*; 1,6 *сек*. 5.17. $\frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$. 5.18. На 7500. 5.19. 6,28 *см/сек*; 40 *см/сек*^{2}.

5.20. $\frac{36gt^2}{\pi^2}$. 5.21. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$. 5.22. Увеличится в 1,16 раза. 5.23. $T_1=1{,}96$ *сек*; нет; $T_2=2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+v^2/R}}}$.

5.24. В обоих случаях $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$.

5.25. Относительно ракеты будет покоиться. 5.26. Решение. $\frac{t}{t_м}=\frac{T_м}{T}$ (1); $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (2); $T_м=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ (3); $h=\frac{at^2}{2}$ (4).

Из (1)—(4) $h=\frac{agt_м^2}{2(g+a)}=352$ *м*. 5.27. $\approx 1{,}7h$. 5.28. $M=\frac{g}{-g+4\pi^2 l/\nu^2}\,m$.

Глава 6. ГИДРОМЕХАНИКА

6.1. $1{,}42\cdot10^5$ *кн/м²*. 6.2. $\Delta p=\rho l\frac{v}{t}=63$ *н/м²*. 6.3. 2 *м/сек*. 6.4. $\approx 79{,}5$ *кн*.

6.5. 5,3 *кн/м²*. 6.6. 730 *н*. 6.7. $\frac{sS\rho gl}{S-s}$; $\rho gS\sqrt{\frac{S}{\pi}}$.

6.8. $\frac{MR^2-(m+M)r^2}{\pi\rho R^2(R^2-r^2)}$; $\frac{MR^2-(2m+M)r^2}{\pi\rho R^2(R^2-r^2)}$. 6.9. $\pi\rho ghR^2-mg$. 6.10. $Q=\frac{\pi}{3}\rho_a(r^2+rx+x^2)+mg=20{,}6$ *н*, где $x=r+\frac{\rho_a}{\rho g}\cdot\frac{R-r}{L}\approx 0{,}98$ *см*; 28,7 *н*. 6.11. 18,6 *см*. 6.12. $\frac{S_1}{S_1+S_2}h$. 6.13. 6,4 *мм*; 11,2 *мм*.

6.14. $\approx 0{,}8$ *см*; $1{,}03\cdot10^5$ *н/м²*. 6.15. $\frac{\rho_2kh}{\rho_1+\rho_2}$. 6.16. Понизится приблизительно на 11 *мм*. 6.17. $0{,}9\cdot10^5$ *н/м²*; $1{,}15\cdot10^5$ *н/м²*.

6.18. $\frac{\rho(g\pm a)l}{2}$; $\frac{\rho gl^3}{2}$; $\frac{\rho(g\pm a)l}{2}$; $\frac{\rho(g\pm a)l^3}{2}$; $\frac{\rho(g\pm a)l^3}{4}$.

6.19. Решение. $F=m\omega^2\frac{x}{2}$ (1); $m=\rho xS$ (2); $F=\rho ghS$ (3). Из (1)—(3) $h=\frac{\omega^2}{2g}x^2$;

$\Delta h=h_2-h_1=\frac{\omega^2}{2g}[(l-x)^2-x^2]=\frac{\omega^2}{2g}(l^2-2lx)$. 6.20. $3\rho gh$. 6.21. $\frac{h}{2l}\rho gy$.

6.22. 10 *кдж*. 6.23. $\frac{n-1}{n}$. 6.24. $0{,}736V$. 6.25. $\frac{n}{n-1}\rho$. 6.26. 2 *г/см³*. 6.27. 2,2 *н*.

6.28. Пробку. Уменьшить в 6,35 раза. 6.29. 4,38 *кг*; 39,2 *н*. 6.30. $0{,}86\cdot10^3$ *см³*; понизится на 1,73 *мм*. 6.31. $h=h_0+\frac{\rho_в}{\rho_{ст}}\Delta h=30{,}8$ *см*. 6.32. 0,90 *кг*. 6.33. $0{,}54V$.

6.34. Уменьшится на 4 *мм*. 6.35. $\frac{4f\rho_0+(1+3f)\rho_0ga}{(1-f)ga}$. 6.36. $\frac{lD^2-(H+l)d^2}{lD^2}\rho_в$.

6.37. $\frac{\rho_2P_1-\rho_1P_2}{\rho_2-\rho_1}$; $\frac{\rho_2P_1-\rho_1P_2}{P_1-P_2}$. 6.38. 440,6 *г*. 6.39. $\frac{H\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2(L^2-H^2)-\rho_1L^2}}$.

6.40. $h<\rho_0\sqrt{\frac{S}{6\rho_1(\rho_0-\rho_1)}}=22{,}2$ *см*. 6.41. $\cos\varphi=\frac{h}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}$; $l<h\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}}$.

6.42. $\frac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1-\rho_2}v$. 6.43. 77 *м³*. 6.44. $\approx 21{,}2$ *н*. 6.45. $\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_1-\rho_0)\omega^2R$. 6.46. 4 *м*; 1 *м*; $3{,}3\cdot10^{-2}$ *дж*. 6.47. Если палочка вся выходит из воды, то $H=\frac{2\rho_2-3\rho_1}{\rho_1}l$.

Если палочка не полностью выходит из воды, то

$$H=\frac{\sqrt{(\rho_2-\rho_1)(2\rho_2-\rho_1)}-\rho_1}{\rho_2}\,2l.$$

6.48. $A=\frac{(S\sqrt[3]{V}-V)\rho gV}{8S}=6{,}7\cdot10^{-4}$ *дж*. 6.49. $\frac{\pi(4\rho_1-\rho_0)g(D^2-d^2)H^2d^2}{8D^2}$.

6.50. 3,8 *см/мин*. 6.51. 15 *кг*. 6.52. 20,6 *н*. 6.53. Решение. $\vec{F}t=m(\vec{v}_2-\vec{v}_1)$ (1); $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|=v$ (2); $m=\rho Sv$ (3); $|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=v\sqrt{2}$ (4).

Из (1)—(4) $F=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{m}{t}\right)^2}{\rho S}$.

6.54. 34,8 *квт*. 6.55. В 8 раз. 6.56. 4,5 *квт*. 6.57. $N_{мин}=\frac{\rho gHV}{t}+\frac{\rho V^3}{2S^2t^3}=103$ *квт*.

6.58. $\sqrt{2g\left(H+\frac{\rho_2}{\rho_1}h\right)}$. 6.59. $\frac{H}{2}(\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha})\cos\alpha$. 6.60. $\frac{h}{2}$; h; $\frac{\rho gSh^2}{2}$. 6.61. $S_1S_2\sqrt{\frac{2gh}{S_2^2-S_1^2}}$. 6.62. $m=\frac{\pi\rho t}{4}\sqrt{\frac{2gl}{d_2^4-d_1^4}}\approx 0{,}45$ *кг*.

Глава 7. ТЕПЛОТА

7.1. 33,4 °C. 7.2. ≈ 4 °C. 7.3. $m_л=\frac{(C+c_вM)(\theta-t_1)}{(c_л-c_а)(t_2-\theta)}-\frac{mc_а}{c_л-c_а}$; $m_а=\frac{mc_м}{c_л-c_а}-\frac{(C+c_вM)(\theta-t_1)}{(c_л-c_а)(t_2-\theta)}R$. 7.4. 78 *г*. 7.5. $M+\frac{mc_вt}{c_лt+\lambda}$. 7.6. 261 *г*.

7.7. $\frac{4\rho_жc_жt+\rho_л\lambda}{3\rho_л\lambda}R$. 7.8. ≈ 106 *см³*. 7.9. 0 °C; 400 *г* воды и 300 *г* льда.

7.10. $\left[M-\frac{\rho_л}{\rho_с}\left(\frac{\rho_с-\rho_в}{\rho_в-\rho_л}\right)m\right]\lambda$. 7.11. Решение. $mc_2\Delta t+m\lambda_2=mc_1\Delta t+m\lambda_1$, отсюда $\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1=(c_1-c_2)\Delta t$. 7.12. 207 *г* льда и 493 *г* воды. 7.13. 314 *дж*. 7.14. $1{,}77\cdot10^8$ *н/м²*. 7.15. 112,5 *г*. 7.16. 0 °C; 28 *г*; 72 *г*; 100 *г* льда при −4 °C. 7.17. После 146-го. 7.18. 1,08 *кг*. 7.19. 32 *кн*. 7.20. 23 *км/ч*. 7.21. $2{,}8\cdot10^5$ *кдж*. 7.22. $1{,}68\cdot10^{-2}$ *дж*. 7.23. 10,3°.

7.24. $\approx 8{,}1$ *кг.* 7.25. 88%. 7.26. 8,3 *кг.* 7.27. 83,1 *км.* 7.28. $\frac{mM(v_1-v_2)^2}{2(m+M)}$.

7.29. 24,1 °C. 7.30. $\approx 2{,}4$ *км/сек*; $v=(m_1+m_2)\sqrt{\frac{\lambda+r+c_л 10°+c_в 100°}{m_1m_2}}$.

7.31. $\frac{v_1^2-v_2^2-\frac{m}{M}(v_1-v_2)^2}{v_1^2}$. 7.32. 160°; 402 *дж.*

7.33. Решение. Согласно закону сохранения импульса и закону сохранения энергии

$$mv=(m+M_2)v_1\ (1);\ (m+M_2)v_1=(m+M_1+M_2)v_3\ \ (2);$$

$$(m+M_2)\frac{v_1^2}{2}=(m+M_1+M_2)\frac{v_3^2}{2}+Q\ (3).$$

Из (1)—(3)

$$Q\approx\frac{M_1(mv)^2}{2M_2(M_1+M_2)}.$$

Глава 8. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

8.1. 540°C. 8.2. ≈ 54 *м.* 8.3. $n[1-(\beta\pm\alpha)t]$. 8.4. 4,3 *сек.* 8.5. $1{,}8\cdot 10^{-5}$ *град*$^{-1}$; 8,8°C. 8.6. 2.18 *см.* 8.7. 460 *дж/(кг·град).* 8.8. До 182°C. 8.9. 1,28 *м*^{3}. 8.10. 267 *н.*

8.11. $\frac{3t_2-t_1}{2}$. 8.12. 490 *см*^{3}. 8.13. $\frac{P_2-P_1+(P_1-P_0)\beta t}{P_1-P_0}$.

8.14. Решение. $x=\frac{\Delta V_а+\Delta V_м}{V_{1а}+V_{1м}}$ (1); $\Delta V_а=V_{1а}3\alpha_а(\theta-t_1)$ (2); $V_{1а}=\frac{m}{\rho_а}$ (3);

$\Delta V_м=V_{1м}3\alpha_м(t_2-\theta)$ (2′); $V_{1м}=\frac{m}{\rho_м}$ (3′); $mc_а(\theta-t_1)=mc_м(t_2-\theta)$. (4).

Из (1)—(4)

$$x=\frac{3(c_а\rho_а\alpha_м-c_м\rho_м\alpha_а)(t_2-t_1)}{(\rho_а+\rho_м)(c_а+c_м)}.$$

8.15. $\beta_ж=\frac{\rho_{oж}(c_жM_ж+c_кM_к)V}{QM_ж}-\frac{\rho_{oж}M_к}{\rho_{oк}M_ж}\beta_к$. 8.16. На 0,8%. 8.17. 10,25 *см*^{3}.

8.18. $\frac{1}{3}\left[\frac{P_2(1-\beta_жt_2)-P_1(1+\beta_жt_1)}{P_1(1+\beta_жt_1)t_2-P_2(1+\beta_жt_2)t_1}\right]$.

8.19. Решение.

При изменении температуры на $t_2-t_1=30$ °C сила натяжения изменяется на $\Delta F=\Delta\rho_к gV_c+\rho_к g\,\Delta V_c$ (1); $\Delta\rho_к=-\rho_{1к}\beta(t_2-t_1)\approx-\rho_{oк}\beta(t_2-t_1)$ (2);

$\Delta V=V_1 3\alpha(t_2-t_1)$ (3); $V_1=\frac{m}{\rho_{1c}}=\frac{m}{\rho_{oc}}(1+3\alpha t_1)$ (4).

Из (1)—(4)

$$\Delta F=\frac{\rho_{oк}}{\rho_{oc}}mg(3\alpha-\beta)(t_2-t_1)\approx 2{,}94\cdot 10^{-3}\ н.$$

8.20. 460 *н/м*^{2}. 8.21. $\frac{z}{100\%}\left(\frac{c}{3\alpha}+\frac{p}{\rho}+\frac{gR}{3}\right)$. 8.22. $\alpha_1 m_2 g\sqrt[3]{\frac{m_1}{\rho_1}}$.

Глава 9. ГАЗЫ

9.1. 9 *л* и $4\cdot 10^5$ *н/м*^{2}; 21 *л* и $16\cdot 10^5$ *н/м*^{2}. 9.2. $\left(\sqrt{\left(\frac{p}{\Delta p}\right)^2+1}-\frac{p}{\Delta p}\right)l$.

9.3. 72,3 *м.* 9.4. 150 *г.* 9.5. $\frac{H+l-\sqrt{H^2+l^2}}{2}$. 9.6. 5 *см.* 9.7. $\frac{l_1+l_2}{l_1-l_2}\rho gh$.

9.8. $\frac{3p_0+2\rho gl}{9p_0}l$. 9.9. $\approx 0{,}10$ *кг.* 9.10. $\lg k\left[\lg\left(\frac{v_0+V}{V}\right)\right]^{-1}$; $\frac{k-1}{k}\left(\frac{p_1V}{p_0v_0}\right)$.

9.11. ≈ 30 *м.* 9.12. $\frac{(\rho_0-\rho_1)gH^2}{2[2p_0+(\rho_0-\rho_1)gH]}$. 9.13. $\frac{\sqrt{4h_0^2+4h_0l+9l^2}-2h_0-l}{4}$.

9.14. $\frac{3F-p_0S-\rho glS}{F-p_0S+\rho glS}g$. 9.15. 10^5 *н/м*^{2}. 9.16. 122°. 9.17. 70°. 9.18. $T_2=\frac{2p_0-\rho gl}{2p_0+\rho gl}T_1$. 9.19. В 1,2 раза. 9.20. $\frac{p_1T_2}{p_2T_1}$. 9.21. 530. 9.22. 14 *мин.* 9.23. 550 *л.*

9.24. $\frac{(5p_0+4\rho gl)T_1}{p_0}$. 9.25. а) Объем над поршнем уменьшится в 4/3 раза, под поршнем увеличится в 1,5 раза; б) $T_2=7/4T_1=700$ °К. 9.26. ≈ 375°К.

9.27. 755 *мм рт. ст.* 9.28. а) $\frac{\Delta T}{T}l$; б) 0. 9.29. $(4p+3\rho gH)\frac{T}{p}$. 9.30. $\frac{9}{8}T_1$; $1{,}5l_0$; T_1. 9.31. 54 *м*^{3}. 9.32. 0,15; $6{,}5\cdot 10^{-3}$ *кг*; $1{,}8\cdot 10^{25}$ *м*$^{-3}$. 9.33. C_4H_{10}.

9.34. $2{,}5\cdot 10^{24}$. 9.35. 10 *г.* 9.36. 0,195 *кг.* 9.37. $0{,}71V$. 9.38. $\frac{mR\theta}{\mu gM}+\sqrt{\left(\frac{2mR\theta}{\mu gM}\right)^2+H^2}$, где $\theta=\frac{kT_1+T_2}{k+1}$; $M=\frac{2mR(T_1-T_2)}{\mu gH}$ — масса поршня. 9.39. $\frac{2T_2}{T_1+T_2}$. 9.40. $2T_0$; $Mg+\frac{p_0S}{2}$. 9.41. $H_1\sqrt{\frac{2T_2}{T_1}}$.

9.42. Решение. $\Delta F_1=(\rho_0-\rho_1)gV$ (1); $\rho_0=\frac{p_0\mu}{RT_0}$ (2); $\rho_1=\frac{p_0\mu}{R(T_0+\Delta T)}$ (3);

$\Delta F_2=(\rho_0-\rho_2)gV$ (4); $\rho_2=\frac{p_1\mu}{RT_1}$ (5).

Из (1)—(5)

$$\Delta F_2=\frac{(T_0+\Delta T)(p_0T_1-p_1T_0)}{p_0T_1\Delta T}\Delta F_1\approx 5{,}9\cdot 10^{-2}\ н.$$

9.43. $\frac{(Q_2-Q_1)p_0T_1}{(p_1-p_2)gVT_0}$.

9.44. Решение. $\Delta m=m_1-m_2$ (1); $m_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}M$ (2); $pV=\frac{m_1}{\mu_1}RT$ (3).

Из (1)—(3) $\Delta m=\frac{pV\mu_1}{RT}-\frac{\mu_1}{\mu_2}M\approx 27{,}5$ *г.* 9.45. 670 *н.* 9.46. Решение. Шар будет находиться во взвешенном состоянии, когда $m_в=m_г+m_о$ (1); $p_1V=\frac{m_г}{\mu_г}RT_1$ (2); $p_2V=\frac{m_в}{\mu_в}RT_2$ (3); $p_2=p_0-\frac{H}{l}\Delta p$ (4); $T_2=T_1-\frac{H}{l}\Delta T$ (5).

Из (1)—(2) $m_г = \frac{\mu_г p_1 V}{RT_1} = 195$ *г*; $m_в = 495$ *г*.

Из (3)—(5) $H = \frac{\mu_в p_0 V - m_в R T_1}{\mu_в \Delta p V - m_в R \Delta T}$ $l = 4670$ *м*. **9.47.** 7,65 *м/сек*.

9.48. $\frac{9}{2} \frac{m^2 RT}{pS} + pS$. **9.49.** Решение. $p = b - aV$ (1); $pV = \frac{m}{\mu} RT$ (2). Из (1)—(2) $\mu a V^2 - \mu b V + mRT = 0$ (3). Когда газ имеет наибольшую температуру при изменяющемся объеме V, дискриминант квадратного уравнения (3) равен нулю, т. е. при $T = T_{\text{макс}}$ должно быть $\mu^2 b^2 - 4\mu a m R T_{\text{макс}} = 0$, откуда $T_{\text{макс}} = \frac{\mu b^2}{4amR}$ (4). Постоянные a и b определяются из условий: $p_1 = b - aV_1$ и $p_2 = b - aV_2$; $a = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}$; $b = \frac{p_2 V_1 - p_1 V_2}{V_1 - V_2}$. С учетом этого $T_{\text{макс}} = \frac{\mu (p_2 V_1 - p_1 V_2)^2}{4mR(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)}$.

9.50. 1,04 *кг/м³*. **9.51.** 6 *г* и 5 *г*. **9.60.** 400°К; $1{,}33 \cdot 10^{7}$ *н/м²*. **9.61.** 625 *дж*. **9.62.** $\approx 39{,}2$ *дж*. **9.63.** Решение. $-\Delta W = A_0 - A_г$ (1); $\Delta W = \frac{F}{S} \Delta V$ (2); $A_0 = p_0 \Delta V$ (3); $A_г = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1)$ (4); $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ (5), где $p_1 = p_0 + \frac{F}{S}$ (6).

Из (1)—(4) $T_1 = T_2 + \frac{(F + p_0 S) \mu \Delta W}{mRF} = 324$ °К.

Из (5)—(6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu \left(p_0 + \frac{F}{S}\right)} \approx 0{,}031$ *м³*. **9.64.** 8,3 *дж*. **9.65.** Решение.

$Q = \Delta U + A$ (1); $\Delta U = c_V m \Delta T$ (2); $A = \frac{m}{\mu} R \Delta T$ (3). Из (1) — (2) $\Delta U = \frac{c_V \mu}{R} A = 3$ *кдж*; $Q = \left(\frac{c_V \mu}{R} + 1\right) A = 4{,}23$ *кдж*. **9.66.** В $\approx 2{,}1$ раза; 380 *дж*. **9.67.** ≈ 298°К. **9.68.** $\frac{(T_1 - T_2)(T_1 - T_0)}{T_1} R$. **9.69.** $\frac{\alpha (V_2^2 - V_1^2)}{2}$; $\frac{\alpha c (V_2^2 - V_1^2)}{2R}$. **9.70.** T/k. **9.71.** 274 *квт*; ≈ 200 *квт · ч*. **9.72.** Решение.

Если производительность холодильника $\frac{m}{\tau_0}$, то при замерзании воды и охлаждении полученного льда массой m выделяется количество теплоты

$$Q_1 = [c_в m (T_1 - T_0) + \lambda m + c_л m (T_0 - T_2)] \frac{\tau}{\tau_0} \quad (1),$$

где T_1 и T_2 — начальная температура воды и конечная температура льда. Для изохорического нагревания воздуха на ΔT° нужно затратить количество теплоты

$$Q_2 = c_V M \Delta T \ (2); \quad pV = \frac{m}{\mu} RT_1 \quad (3).$$

Считая холодильник идеальной тепловой машиной, можно записать:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (4).$$

Из (1) — (4) $\Delta T = \frac{mR\tau [c_в (T_1 - T_0) + \lambda + c_л (T_0 - T_2)]}{c_V \mu p V \tau_0} = 6°$.

Глава 10. НАСЫЩАЮЩИЕ И НЕНАСЫЩАЮЩИЕ ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ

10.1. $8{,}7 \cdot 10^{13}$. **10.2.** $1{,}07 \cdot 10^5$ *н/м²*. **10.3.** 7,7 *см*. **10.4.** 1,23 *н/м²*. **10.5.** 6,1 *м*. **10.6.** Решение.

При температуре T_1 пар будет насыщающим с упругостью p_1, поэтому

$$p_1 V = \frac{m_а}{\mu_а} RT_1 \ (1); \quad h_1 = \frac{V_1}{S} \ (2),$$

где V_1 — объем, занимаемый азотом. Из (1)—(2) $h_1 = 0{,}68$ *м*. При температуре T_2 пар будет ненасыщающим:

$$p_1' V_1' = \frac{m_а}{\mu_а} RT_2 \ (3); \quad p_1' V_2' = \frac{m_в}{\mu_в} RT_2 \ (4); \quad V_1' + V_2' = V = HS \quad (5).$$

Из (3) — (5) $h_1' = \frac{V_1'}{S} = \frac{m_а \mu_в H}{m_а \mu_в + m_в \mu_а} = 0{,}3$ *м*; $\Delta h = h_1 - h_1' = 0{,}37$ *м*.

10.7. 4,52 *м*. **10.8.** $1{,}03 \cdot 10^5$ *н/м²*. **10.9.** $2{,}1 \cdot 10^5$ *н/м²*; $1{,}94 \cdot 10^5$ *н/м²*. **10.10.** ≈ 925 *г*; ≈ 805 *г*. **10.11.** $\approx 0{,}22 \cdot 10^5$ *н/м²*. **10.12.** $3{,}7 \cdot 10^{-7}$ *см*; 12.

10.13. Решение. $Q = \Delta U + A$ (1). Пар находится под давлением $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ *н/м²*, следовательно, его температура равна 373°К. При конденсации пара

$$\Delta U = rM \ (2); \quad pV = \frac{M}{\mu} RT \quad (3).$$

При конденсации всего пара внешнее давление совершит работу

$$A = pV \ (4).$$

При плавлении льда и нагревании образовавшейся воды она нагреется не свыше 373°К, поэтому $Q = \lambda m + cm\Delta T$ (5).

Из (1) — (5) $m = \frac{(\mu r + RT) pV}{(\lambda + c\Delta T) RT} = 1{,}9$ *кг*.

10.14. 14,2 *кдж*. **10.15.** 1373°К. **10.16.** ≈ 160 *дж*. **10.17.** До 10,5°С. **10.18.** $\approx 0{,}51$ *кг*. **10.19.** 1.76 *г*. **10.20.** 2,3 *г*. **10.21.** 27%. **10.22.** $\approx 0{,}38$ *н*. **10.23.** $0{,}89 \cdot 10^5$ *н/м²*. **10.24.** Увеличить до $1{,}37 \cdot 10^3$ *см³*. **10.25.** 60%; 100%. **10.26.** 72%.

Глава 11. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

11.1. $6{,}9 \cdot 10^{16}$ *н*. **11.2.** $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *к*. **11.3.** $\frac{2n^2 - m \pm 2n\sqrt{n^2 - m}}{m} q$.

11.4. $\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}$. **11.5.** $\frac{\sqrt{3}}{3} q$; в центре треугольника. **11.6.** $2\operatorname{arctg}\left(\frac{Q}{q}\right)^{\frac{2}{3}}$.

11.7. $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} mg$. **11.8.** а) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos\alpha}{g}}$; $F_н = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} + \frac{mg}{\cos\alpha}$;

б) $T = 2\pi l \sin\alpha \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 ml \sin 2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mgl^2 \sin^3\alpha - q^2\cos\alpha}}$; $F_н = \frac{mg}{\cos\alpha}$;

в) $T = 2\pi l \sin\alpha \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 ml}{2\pi\varepsilon_0 mgl^2 \operatorname{tg}\alpha \sin\alpha - q^2}}$; $F_н = \frac{mg}{\cos\alpha} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha}$.

11.9. $\frac{\sqrt{2}}{2}q$; равновесие неустойчивое. 11.10. а) $\sqrt{\frac{qQ(m+M)}{4\pi\varepsilon_0 E(mQ+Mq)}}$;

б) $\frac{(Q-q)E}{m+M}$.

11.11. $8\cdot10^{-16}$ *дж*; $19\cdot10^{-16}$ *дж*. 11.12. а) $3(mg+qE)$; $3\sqrt{(mg)^2+(qE)^2} - 2qE$;

б) $2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg+qE}}$; $2\pi\sqrt{\frac{ml}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}}$. 11.13. 10^{-9} *к*. 11.14. $6,6\times10^{-6}$ *к/м²*. 11.15. $\frac{q\sigma l}{\varepsilon_0}$; $\frac{q\sigma l}{2\varepsilon_0}$. 11.16. $\frac{4qd}{\varepsilon_0 S}$; $\frac{4q^2}{\varepsilon_0 S}$. 11.17. $\frac{m_э}{e}\left(\frac{M-m}{M+m}\right)l$.

11.18. $E=\frac{\omega^2R}{\gamma}$; $U=\frac{(\omega R)^2}{2\gamma}$. 11.19. $\sqrt{2gh+2(1-\operatorname{tg}\alpha)\frac{q_1q_2}{mh}}$. 11.20. $2,5\times10^{-8}$ *дж*; 10^{-2} *дж*. 11.21. $\approx 10^5$ лет. 11.22. 2,26 *кв*; $-2,35$ *кв*; -185 *в*.

11.23. $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{r} + \frac{1}{R}\right)$. 11.24. а) $E_1(x)=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$; $\varphi_1(x)=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$ $(R<x<\infty)$. $E_2(x)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$; $\varphi_2(x)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[Q+q\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}+\frac{R}{\varepsilon x}\right)\right]$ $(r<x<R)$; $E_3=0$; $\varphi_3=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[Q+q\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}+\frac{R}{\varepsilon r}\right)\right]$ $(0<x<r)$;

б) $E_1=0$; $\varphi_1=0$.

$E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}$; $\varphi_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}\left(\frac{R}{x}-1\right)$; $E_3=0$; $\varphi_3=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}$;

в) $\Delta q=-q$.

11.25. а) $\frac{q}{3\pi\varepsilon_0 a}$; б) $\frac{q}{12\varepsilon_0 a^2}$; в) $\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4^4-3^4}{3^3 4^3}\right)$.

11.26. 0; 3 *кв*; 21 *кв/м*; 2,13 *кв*. 1127. $\frac{21}{64}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$; $\frac{7}{32}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{7}{2}\frac{r}{a}\right)$.

11.28. $\frac{q}{4}\sqrt{\frac{22,8}{\pi\varepsilon_0 lm}}$. 11.29. $\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m(v_1+v_2)^2}$. 1130. $\frac{l}{d}U - \frac{mv^2}{2e}$. 11.31. $\frac{gd^2}{\gamma U}$; $d\sqrt{1+\left(\frac{gd}{\gamma U}\right)^2}$. 11.32. 2,4 *см*; 75 *в*. 11.33. 100 *кв/м*; 300 *кв/м*; 100 *в*; 600 *в*.

11.34. $\frac{2\pi\varepsilon_0^2\varphi}{\sigma}\left(1+\sqrt{1+\frac{4\sigma l}{\varepsilon_0\varphi}}\right)$. 11.35. $\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r(R-r)}{R-2r}$. 11.36. $1,125\cdot10^{-8}$ *к*

и $0,375\cdot10^{-8}$ *к*; 10^{-8} *к* и $0,5\cdot10^{-8}$ *к*; $1,2\cdot10^{-8}$ *к* и $0,3\cdot10^{-8}$ *к*.

11.37. Решение. $C=\frac{q}{U}$ (1); $U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ (2). Из (1)—(2) $C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R-r}=67$ *пкф*; $\varphi_1=U=\frac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon Rr}\approx 3$ *кв*. 11.38. $\sqrt{\frac{2\gamma q(R-r)}{rR}}$.

1139. $\varphi\sqrt[3]{N^2}$; $\frac{\varphi}{4\pi r}\sqrt[3]{N}$; $\frac{N}{2}\left(\sqrt[3]{N^2}-1\right)r\varphi^2$. 11.40. -207 *в*; $2,4\cdot10^{-8}$ *к*; $2,5\times10^{-8}$ *к*; $0,1\cdot10^{-8}$ *к*; $0,166\cdot10^{-4}$ *дж*. 11.41. $4,95\cdot10^{-7}$ *к/м²*; ≈ 35 *пкф*; $6,95\times10^{-7}$ *дж*; $1,4\cdot10^{-4}$ *н*. 1142. а) $\frac{\pm mgCd}{Q}\left(\frac{T_0^2}{T_1^2}-1\right)$; б) $\frac{mgCd}{Q}\sqrt{\frac{T_0^4}{T_1^4}-1}$.

11.43. а) $6C$; б) $\frac{11}{5}C$; в) $1,5C$; г) $\frac{31}{14}C$. 11.44. а) $2C$; б) $2C$; в) $\frac{6}{5}C$; $\frac{12}{7}C$; $\frac{4}{3}C$.

1145. $\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon-1)SU}{(\varepsilon+2)d}$. 1146. $\frac{2qd}{3\varepsilon_0 S}$ или $\frac{3qd}{5\varepsilon_0 S}$. 11.47. а) $\frac{C_1(U_1-U_2)+C_2U_2}{C_1(U_1-U_2)+C_2U_1}U_1$;

б) $\frac{C_1C_2(U_2-U_1)}{(C_1+C_2)U_1-C_1U_2}$.

11.48. $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}$. 11.49. 2000 *кв/м*. 11.50. $0,5\mathscr{E}$; $-1,5C\mathscr{E}$. 11.51. $\frac{25}{11}CU$; $\frac{8}{11}CU$; $\frac{63}{11}CU$.

11.52. $\frac{2C_1C_2U}{(C_1+C_2)^2}$; $\frac{C_1C_2(C_1-C_2)^2U^2}{2(C_1+C_2)^3}$ или 0 и $\frac{C_1C_2U^2}{2(C_1+C_2)}$; U; 0; $\frac{(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)}U$; $\frac{2C_1C_2U^2}{C_1+C_2}$. 11.53. $\frac{26}{31}C\mathscr{E}$; $\frac{20}{31}C\mathscr{E}$; $\frac{6}{31}C\mathscr{E}$. 11.54. а) $\frac{2}{3}C\mathscr{E}$; б) $\frac{4}{21}C\mathscr{E}$; $\frac{10}{21}C\mathscr{E}$; в) $C_2\mathscr{E}$; г) $\frac{C_1(C_2\mathscr{E}_2-C_1\mathscr{E}_1)}{C_1+C_2}$; $C_1\mathscr{E}_1-C_2\mathscr{E}_2$. 1155. $\frac{C(2\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_1)}{18}$; $\frac{C(2\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_1)}{9}$. 11.56. $\frac{\varepsilon_0(3\varepsilon-5)S\mathscr{E}}{4d}$; $\frac{\varepsilon_0(6\varepsilon-5)S\mathscr{E}}{2(6\varepsilon+5)d}$. 11.57. $\sqrt{\frac{2k(d_0-d_1)d_1^2}{\varepsilon_0 S}}$.

11.58. Решение.

а) $p=\frac{F}{S}=\frac{qE}{2S}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}=7,75\cdot10^6$ *н/м²*; б) $E=E_0-E_{св}$ (1); $E_0=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ (2); $E_{св}=\frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0}$ (3); $E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon}$ (4).

Из (1)—(4)

$\sigma_{св}=\varepsilon_0(\varepsilon-1)E\approx 0,26$ *к/м²*. 11.59. $\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)ab^2\mathscr{E}^2}{2[a+(\varepsilon-1)x]^2 d}$; $\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)b\mathscr{E}^2}{2d}$.

11.60. $\frac{1}{3}C\mathscr{E}^2$; $2C\mathscr{E}^2$. 11.61. $2,9\cdot10^{-7}$ *дж*. 11.62. $\approx 1,5\cdot10^{-5}$ *дж*. 11.63. $\approx 1,9\times10^{-5}$ *дж*. 11.64. $\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0R^2}$; $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0R^2}$; 0; $\frac{2q}{9\pi\varepsilon_0R^2}$; $\frac{q}{6\pi\varepsilon_0R}$; $\frac{q\sqrt{2}}{8\pi\varepsilon_0R^2}$; 0.

11.65. $\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 h}$. 11.66. $\frac{8\pi\varepsilon_0 RH}{2H-R}$.

Глава 12. ПОСТОЯННЫЙ ТОК

12.1. $2I_1t$. 12.2. $\approx 0{,}13$ *ма*. 12.3. $\approx 10^{-9}$ *к*. 12.4. Решение. $I=\frac{q}{t}=\frac{Ne}{t}$ (1); $N=\frac{m}{A}N_A$ (2); $m=\rho lS$ (3); $v=l/t$ (4). Из (1)—(4) $v=\frac{AI}{N_A e\rho S}\approx 7{,}4\cdot 10^{-7}$ *м/сек*. 12.5. $\frac{\varepsilon_0 U}{eRCd^2}$. 12.6. $l\sqrt{\frac{2U}{\gamma}}$. 12.7. В 200 раз. 12.8. $l_ж \approx 44 l_у$. 12.9. $\frac{n\alpha_1+\alpha_2}{n+1}$; $\frac{\alpha_1+n\alpha_2}{n+1}$. 12.10. 4 *а/мм²*. 12.11. $\frac{2m}{ne^2\tau}$. 12.12. $\frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho}{nC}$. 12.13. Решение.

$R_1=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}=\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}\cdot\frac{4l}{\pi d^2}$ (1); $R_2=r_1+r_2=(4\rho_1+\rho_2)\frac{l}{\pi d^2}$ (2).

Из (1)—(2) $\frac{R_2}{R_1}=\frac{(\rho_1+\rho_2)(4\rho_1+\rho_2)}{4\rho_1\rho_2}\approx 15{,}3$. 12.14. 6. 12.15. а) r; в) $\approx 5{,}46\,r$. 12.16. Уменьшится в 1,25 раза. 12.17. $3R$; 0; $\frac{12}{17}R$. 12.18. $\approx 0{,}6$ *ом*. 12.19. $2\frac{R}{N}$. 12.20. а) $\frac{2}{3}r$; $\frac{8}{15}r$; б) $\frac{r}{2}$; в) $\frac{4}{5}r$; $\frac{3}{4}r$; $\frac{11}{20}r$; г) $\frac{5}{6}r$; $\frac{19}{30}r$; $\frac{6}{5}r$; $\frac{31}{30}r$. 12.21. а) $\frac{r}{2}$; $\frac{r}{2}$; $\frac{5}{12}r$; б) $\frac{r}{2}$. 12.22. $\frac{5}{6}r$; $\frac{7}{12}r$; $\frac{3}{4}r$. 12.23. $\frac{r}{2}$.

12.24. $\approx 1{,}1$ *в*. 12.25. 220 *ом*; 70 *ом* и 33 *ом*. 12.26. $\frac{RU}{IR-U}$. 12.27. $\frac{R_VUl(l-x)}{l^2R_V+lR_Vx-R_0x^2}$. 12.28. 2 *км*; 10 *ом*; 12.29. 1,5 *ом*; 1,58 *ом*. 12.30. 4 *а*. 12.31. $\frac{U_0}{n+1}$. 12.32. 16 *мв*. 12.33. $\frac{9R_шr_г}{R_ш+r_г}+10R$. 12.34. 40 *ком*; 0,31 *ом*. 12.35. $\frac{mn-1}{m+n+2}$. 12.36. $\frac{2}{3}$ *а*. 12.37. 63° *С*. 12.38. Ток в амперметре A_1 увеличится в 1,5 раза, показания остальных приборов не изменятся. 12.39. 196 *мка*. 12.40. 10 *ом*. 12.41. 92,5 *в*. 12.42. ≈ 269 ом; $\approx 0{,}44$ *а*. 12.43. $\frac{\varepsilon_0\varepsilon\rho I}{Cd}$; $\frac{(\varepsilon_0\varepsilon\rho I)^2}{2Cd}$. 12.44. $1{,}8\times 10^{-10}$ *к*. 12.45. 7,4 *мин*. 12.46. $\frac{\varepsilon_0 SU}{t_0d_0}$. 12.47. а) $\approx 0{,}9$ *мка*; б) $2{,}8\cdot 10^{-2}$ *мка*. 12.48. $\frac{5q}{2C}$. 12.49. $\frac{(R_1C_1-R_2C_2)\mathscr{E}}{R_1+R_2+r}$, если $R_1C_1=R_2C_2$. 12.50. 7*а*. 12.51. $\frac{(n-1)U_1U_2}{nU_1-U_2}$. 12.52. $\frac{5}{21}C\mathscr{E}$. 12.53. $\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{C_2}{C_1+C_2}\right)\mathscr{E}$. 12.54. 2*в* или 22 *в*. 12.55. 6,8 *в*. 12.56. В 4 раза. 12.57. 9,6 *в*. 12.58. 12 *в*; 2 *ом*; 12.59. 6 *а*. 12.60. 1000 *ом*. 12.61. 5,4 *а*. 12.62. $\frac{zR(2R+3r)}{(100\%-z)(2R+r)}\approx 0{,}07$ *ом*. 12.63. 163 *ком*. 12.65. $\frac{\mathscr{E}_1r_2\mp\mathscr{E}_2r_1}{r_1+r_2}$; 0; $\mathscr{E}$. 12.66. $\frac{\mathscr{E}}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{6r}$; $\frac{2\mathscr{E}+\varphi_2-\varphi_1}{2}$. 12.67. 1,25.

12.68. $\frac{(\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_1R-\mathscr{E}_2r_1)}{(\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2)R}\,l$. 12.69. $\frac{(N-2k)\mathscr{E}}{R+Nr}$. 12.70. 0; 0; нет. 12.71. $\frac{5R+12r}{3R+6r}\mathscr{E}$. 12.72. $\frac{3\mathscr{E}r}{11R^2+14rR+2r^2}$. 12.73. 0,6 *а*; $\approx 7{,}3$ *а*. 12.74. Если $R=r$. 12.75. 0,12 *а*. 12.76. 7,36 *а*; 96. 12.77. 16; 1. 12.78. $4{,}25\cdot 10^{18}$. 12.79. 14 *кв*. 12.80. 3,36 *квт*. 12.81. В 10 раз. 12.82. $\frac{U^2-RP}{U^2}$. 12.83. $I=\sqrt{\frac{P}{R_1}}+\sqrt{\frac{P}{R_2}}=1{,}63$ *а*. 12.84. $P_1'=\frac{P_1P_2^2}{(P_1+P_2)^2}=14{,}4$ *вт*; $P_2'=\frac{P_2P_1^2}{(P_1+P_2)^2}=9{,}6$ *вт*. 12.85. $\mathscr{E}=\frac{P_1-I_1^2R_2}{I_1-I_1^2\sqrt{\frac{R_2}{P_2}}}\approx 2$ *в*; $r=\frac{P_1\sqrt{R_2}-I_1R_2\sqrt{P_2}}{I_1\sqrt{P_2}-I_1^2\sqrt{R_2}}\approx 0{,}03$ *ом*. 12.86. 13,5 *вт*. 12.87. 6 *ом*. 12.88. 97%. 12.89. 7 *ом*. 12.90. 85%; 52%. 12.91. 25 *а · ч*; 62,5%. 12.92. 9 *вт*. 12.93. 32 *вт*; 50%. 12.94. 13. 12.95. ≈ 10 *г*. 12.96. 44 *мин*. 12.97. $\approx 2{,}8°$. 12.98. 89%. 12.99. $\Delta\theta=\frac{\mathscr{E}^2t}{4rcm}\approx 320°$. 12.100. 36 *дж*; 4 *дж*. 12.101. $\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R}+\frac{2\mathscr{E}(\varphi_1-\varphi_2)+\mathscr{E}^2}{r}$. 12.102. 50 *мин*; 12,5 *мин*. 12.103. $t_1=\left(\frac{P_1+P_2}{P_2}\right)^2t=3ч$; $t_2=\left(\frac{P_1+P_2}{P_1}\right)^2t=45$ *мин*. 12.104. 0,56 *ом*. 12.105. 1 *сек*. 12.106. $t_3=\frac{(U_1^2-U_2^2)t_1t_2}{U_2^2t_1-U_2^2t_2+U_3^2(t_2-t_1)}=44$ *мин*. 12.107. $\frac{n\Delta T}{(n+1)^2}$. 12.108. 820° *С*. 12.109. $\frac{e^2N_A\mathscr{E}^2d\tau}{2Am}$. 12.110. $\frac{(U-\mathscr{E})\mathscr{E}}{r}$; $\frac{(U-\mathscr{E})^2}{r}$. 12.111. $x=\frac{2(I_2-I_1)U-(I_2^2-4I_1^2)R}{2(I_2^2-I_1^2)\rho}$; $v=\frac{I_1U-I_1^2(2R+\rho x)}{F}$. 12.112. $5{,}6\cdot 10^{-9}$ *дж*. 12.113. $\mathscr{E}=\sqrt{\left(1-\frac{z}{100\%}\right)P_1R_1}=120$ *в*; $P_2=\frac{R_1}{R_2}P_1=250$ *вт*. 12.114. 16 *а*. 12.115. 180 *вт*; 3 *а*. 12.116. $\frac{I_1-I_2}{I_1}$. 12.117. $\frac{I(\mathscr{E}-IR)}{2\pi rMg}$. 12.118. 2 *ч* 5 *мин*. 12.119. 149 *ч*; $1{,}49\cdot 10^4$ *квт · ч*. 12.120. 2600 *а/м²*. 12.121. $2{,}56\cdot 10^{-4}$ *кг*. 12.122. 3 *ч*. 12.123. ≈ 144 *кдж*. 12.124. $1{,}8\cdot 10^{-2}$; $1{,}1\cdot 10^{22}$; $3{,}7\cdot 10^{-2}$; $2{,}2\cdot 10^{22}$. 12.125. 2,66 *г*; 1,62 *г*; 4,75 *г*; 2,01 *г*. 12.126. 0,7 *в*. 12.127. 299° К. 12.128. ≈ 165 сут. 12.129. $I=\frac{pV}{\left(\frac{k_1}{\mu_1}+\frac{k_2}{\mu_2}\right)R\tau T}=5{,}3$ *а*.

Глава 13. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

13.1 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{2\rho g S}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3IB}{4\rho g S}$. 13.2. 2,45 *а*. 13.3 $2{,}2 \cdot 10^{-6}$ *а*. 13.4. $\frac{IBR^2}{2}$; $n\pi IBR^2$. 13.5. IRB. 13.6. $B_n = \dfrac{\mu_0 n I R^2 \sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi\left(x^2 + R^2\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{x^2+R^2}}$;

$B_3 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \frac{\mu_0 I}{R}$; $B_4 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\mu_0 I}{R}$; $B_\infty = \dfrac{\mu_0 I R^2}{2\left(x^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. 13.7. 10^{-4} *н*.

13.8. $9.7 \cdot 10^{-6}$ *н · м*. 13.9 $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ *т л*. 13.10. $1{,}5 \cdot 10^{-16}$ *сек*; 12,5 *т л*. 13.11. 14,5 *кг*. 13.12. $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ *н · м*. 13.13. 300 *об/сек*. 13.14. $1{,}76 \cdot 10^{11}$ *к/кг*. 13.15. $7{,}2 \cdot 10^{-24}$ *кг · м/сек*. 13.16. Если $E = vB$. 13.17. $\varepsilon_0 BS\sqrt{2\gamma U}$. 13.18. 10^{-5} *а*; $0{,}89 \cdot 10^{-4}$ *в/м*. 13.19. $\Delta q_{\text{макс}} = \frac{mB}{\rho D}$; $\Delta q = \frac{\Delta q_{\text{макс}}}{2}$ 13.20. 4 *м/сек*.

13.21. $I = \frac{2\mathscr{E} \pm \omega B l^2}{2(r+R)}$; $U = \frac{\omega B r l^2 - 2\mathscr{E}R}{2(r+R)}$; $\omega = \frac{2\mathscr{E}}{Bl^2}$. 13.22. $5 \cdot 10^{-3}$ *тл*; 40 дел. 13.23. $\approx 0{,}22$ *в*; 0,24 *в*; 13.24. 11,8 g. 13.25. 0,01 *в*. 13.26. $0{,}8 \cdot 10^{-5}$ *н*. 13.27. 98 *м/сек*. 13.28. 9,8 *м/сек*^{2}. 13.29. 10 *а*; 9 *в*. 13.30 0; да. 13.31. 0. 13.32. $U = \pi k r_1 r_2$. 13.33. $4 \cdot 10^{-4}$ *дж*; $8 \cdot 10^{-4}$ *дж*. 13.34. 318 *а/сек*. 13.35. $6 \cdot 10^{-3}$ *к*. 13.36. 100 *сек*. 13.37. $I = I_0 + 5t + t^2$. 13.38. $\frac{CU^2 - LI^2}{2}$.

13.39. $x = \frac{\pi\mu_0}{k}\left(\frac{nrI}{l}\right)^2 - \frac{2mg}{k}$. 13.40. $\mathscr{E} = 10\sin(96\pi t)$ *в*. 13.41. 2,2 *ом*. 13.42. 50 *в*. 13.43. 200 *об/мин*; 300 *об/мин*. 13.44. 127,5 *в*; 90%. 13.45. 1,3 *квт*; 400 *об/мин*. 13.46. $\frac{\mathscr{E}\sqrt{v} - v\sqrt{mgR}}{\sqrt{mgR}}$. 13.47. $I = \frac{\omega SB\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$; $P = \frac{(\omega SB)^2 R}{2(R^2 + \omega^2 L^2)}$. 13.48. $\sqrt{U_R^2 + (U_L - U_G)^2}$. 13.49. $C = \dfrac{P}{2\pi f U_R\sqrt{U^2 - U_R^2}} = 8{,}6$ *мкф*; 1,17 *гн*.

13.50. 48 *ом*; 240 *ом*. 13.51. 3. 13.52. 1,4 *а*.

Глава 14. ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА

14.1. $2H$. 14.2. 0,92 *м*. 14.3. а) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{9b}{8a}$; б) $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. 14.4. а) $x = l\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)}$, где n — целое число;

б) будут двигаться по окружности радиуса l со скоростью $v = 2\omega l$;

в) если n — целое число, то число изображений $k = n - 1$. Если $n = 2i \pm \xi$, где i — целое число, а $\xi < 1$, то число изображений $k = 2i$. 14.5. 2α. 14.6. $\approx 143^0$. 14.10. 48 *см*; 3. 13.11. $R = \frac{2lL}{L \pm l}$; $R = \frac{2lL}{L + l}$.

14.12. 10 *см*. 14.16. $\approx 10^{-2}$ *см*. 14.17. —60 *см*; —90 *см*; ∞; + 30 *см*. 14.18. 6 *м*. 14.19. 30 *см* (от второго зеркала). 14.20. $f = \frac{2n-1}{n}F$. При $n = 2k - 1$ f — расстояние до первого зеркала, при $n = 2k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) f — расстояние до второго зеркала. 14.21. $x \approx 0{,}67R$.

Глава 15. ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

15.1. 0,62. 15.2. $\operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$. 15.3. 3,56 *см*. 15.4. 1,6. 15.5. На расстоянии 12 *см* от источника. 15.6. $x = \frac{n(d-R)}{n-1} = 6$ *см*. 15.7. 0,98. 15.8. $\frac{n_2}{n_1}R$. 15.10. $\gamma = 2{,}5\alpha$; $n = 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\left(2\cos\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}$. 15.11. $\alpha \approx 3°$. 15.12. 37°.

15.13. 1,63. 15.14. $\alpha = \operatorname{arcctg} n$. 15.15. а) $x = \frac{(nd - nR - R)Rd}{(2d - R)(R + nd)} \approx 26{,}5$ *см*; б) $x = 14{,}0$ *см*.

15.16. На расстоянии $\frac{nR}{2-n}$ от центра шара. 15.21. $F = \sqrt{lL} \pm l$. 15.22. $\frac{k-1}{kd}$.

15.23. 5 *см*; 1 *см*; 15.24. 0,3 *м*. 15.25. $\frac{L^2 - l^2}{4L}$. 15.26. $\sqrt{H_1 H_2}$. 15.27. 5 *см*.

15.28. а) 1,5 *см*; б) 1,5 *см*. 15.29. $\approx 2{,}5$ *м*; 90%. 15.30. 13,2 *см*.

15.31. $\Delta l = \frac{3l + 2\sqrt{3}F}{3l - \sqrt{3}F}l$. 15.32. $\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1}l$. 15.33. 32 *см*; 0,8 *см*.

15.37. 100 *см*. 15.38. 3 *см*. 15.39. 37,5 *см*. 15.40. $\frac{nD_0}{D_0 - (n-1)D_1}$.

15.41. $\frac{nRd}{\pm d \pm nd - nR}$. 15.42. 10 *см*; 1,7 *см*. 15.43. 1,22 *м*. 15.44. 7,8 *см*.

15.45. $n = 1 + \dfrac{R^2\sin\frac{\alpha}{2}}{2rd} = 1{,}6$. 15.46. — 7 *см*. 15.47. $\frac{nR}{2(n-1)}$ при $n < 2$; $\frac{R}{n-1}$ при $n > 2$. 15.48. $\frac{nF}{2}$; $\frac{(n_c - 1)nF}{2(n_c - n)}$.

15.49. На расстоянии 44,5 *см* от второй линзы. 15.50. На расстоянии 30 *см* перед собирающей линзой. 15.51. — 26,6 *дптр*; увеличить в 4 раза.

15.52. а) $d = \frac{(H_0 - H)F_2 + lH}{H(l - F_1 - F_2)}F_1$; б) $d = \frac{(H_0 - H)F_2 - lH}{H_0(l + F_1 + F_2)}F_1$ при $l < \frac{H_0 - H}{H}F_2$.

15.53. 10 *см*. 15.54. На расстоянии $F/3$ от рассеивающей линзы; на расстоянии $5/2F$ от собирающей линзы; на расстоянии $3/5F$ от собирающей линзы. 15.55. 25 *см*. 15.56. ≈ 5 *мм*. 15.57. 32,8 *см*. 15.58. 3,5; 8,93 *см*; 2,5. 15.59. $-a\sqrt{2}$.

15.60. $f=\dfrac{a(l-b)}{l-c}$; $f=\dfrac{a(l^2-2bl-2ab)}{l^2-2cl-a^2}$;

$f=\dfrac{a[l^2-2(a+b)l+2ab]}{[l^2-(a+c)l-a(2c+a)]}$, где $a=30$ *см*; $b=37{,}5$ *см*; $c=52{,}5$ *см*.

15.61. 40 *см*. **15.62.** —2,66 *дптр*. **15.63.** 15 *см*. **15.64.** 12 *см*; ≈ 15 *см*. **15.65.** 1,9 *см*.

15.66. 10 *м*; $\approx 1{,}25\cdot10^{-3}$ *сек*. **15.67.** 1 *м*. **15.68.** $\dfrac{HF_2(d-F_1)}{(F_2-F_1)d-F_1F_2}$.

15.69. 10 *см*. **15.70.** $\approx 1{,}6$ *м*. **15.71.** 2,5°. **15.72.** 54 *см*; 2 *см*; **15.73.** 4,47 *см*; 0,47 *см*.

15.74 $\approx 5{,}4$; 16,5 *см*. **15.75.** 1,6 *см*; 17,9 *см*.

Глава 16. ФОТОМЕТРИЯ

16.1. 700 *лк*. **16.2.** 2,50 *м*. **16.3.** На расстоянии ≈ 9 *м* от более высокого столба.

16.4. $E_2=\dfrac{1}{3}E_1$. **16.5.** 80 *св*; 46 *св*. **16.6.** 0,39 *l*. **16.7** 4*t*. **16.8.** $\dfrac{E_2}{E_1}\approx 1{,}47$.

16.9. $\dfrac{2l}{H^2}\left[\dfrac{n^2+4n+5}{(n^2+4n+3)^2}\right]$. **16.10.** $\approx 0{,}55\ E$. **16.11.** ≈ 156 *лк*; 665 *лк*.

16.12. $l/3$. **16.13.** $\left(\dfrac{L+l}{L-l}\right)^2=2{,}25$; $\left[\dfrac{k_1(k_2+1)}{k_2(k_1+1)}\right]^2=1{,}56$. **16.14.** В 5,55 раза.

16.15. 0,4 *лм*. **16.16.** 0,1 *лк*. **16.17.** $\dfrac{9D^2}{4\alpha^2F^2}$. **16.18.** $\dfrac{2\pi k\beta^2F^2}{3\sqrt{3}}$. **16.19.** Будет казаться перевернутым, уменьшенным вдвое, яркость не изменится.

16.20. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2d-F}{d-F}\right)^2$. **16.21.** ≈ 11 *лк*. **16.22.** 3 *км*; 20. **16.23.** 1 *см*.

16.24. 2870 *лк*. **16.25.** $\dfrac{\pi\Phi D^2}{4d^2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вячеслав Анатольевич Балаш

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ
И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Редактор *В. А. Обменина*
Переплет *Б. Л. Николаева*
Художественный редактор *В. М. Прокофьев*
Технический редактор *Е. К. Полукарова*
Корректоры *В. Г. Соловьёва,*
К. А. Иванова

Сдано в набор 18/V 1973 г. Подписано к печати 12/III 1974 г. $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 27,0. Уч.-изд. л. 26,93. А 05065. Тираж 80 тыс. экз. Зак. 6726.

Издательство «Просвещение» Государственного комитета Совета Министров РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с готовых матриц в типографии им. Смирнова Смолоблуправления издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2.

Цена без переплета 73 коп., переплет 21 коп.