545

Берегите книгу!

Загрязненная книга—источникъ заразы.

Порча книгъ требуетъ расходовъ на починку, что **препятствуетъ** пополненію библіотеки **новыми книгами,** въ виду чего **убѣдительно просятъ** гг. читателей:

Обращаться съ книгами **бережно** и **опрятно.**

Не смачивать пальцевъ **слюною** при перелистываніи, во избѣжаніе **заразы.**

Въ случаѣ **заразной болѣзни** въ квартирѣ, **заявлять** объ этомъ въ библіотекѣ при возвращеніи книги.

Не дѣлать надписей, не подчеркивать строкъ, не перегибать книгу черезъ корешокъ.

ТИП. П. С. РУБЕНЧИКА ОДЕССА

Гг. абоненты, не заявившіе
при взятіи [illegible] о порчѣ ея,
вслу[illegible]ніи таковой
при возвра[illegible]ніи книги, упла-
чиваютъ сто[illegible]сть поврежде-
нія по оцѣнкѣ библіотекаря.

4951
66-23
51
H 72

НОВЫЯ ИДЕИ ВЪ МАТЕМАТИКѢ.

51
H 766

Неперіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора **А. В. Васильева**.

4951

СБОРНИКЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Добав. залогъ Руб. 200

Ученіе о числѣ.

4951
1-50
О. Д. О. В.
ім. Леніна
ПЕРЕІНВЕНТАРИЗАЦІЯ
1957 р.
15302
Абонемент О. О. Д. Б.
№ 34613
НБ ПНУС
545

Изд-ство „ОБРАЗОВАНІЕ" СПБ.

1913.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

Тип. Е. М. Малаховскаго. Петерб. стор., Большой пр., 17.

1913.

Одесская Общественная Библіотека

В. Вундтъ.

Числа и ихъ символы [1])

а. Цыфровая система.

Начала числовой символики простираются дальше въ прошлое, чѣмъ всѣ наши прочіе письменные символы, употребляемые для другихъ понятій. Эта числовая символика является, въ свою очередь, источникомъ всей системы знаковъ математики, такъ значительно отклоняющейся отъ обыкновеннаго языка. Первоначально особые числовые символы отличаются отъ другихъ письменныхъ символовъ лишь внѣшнимъ преимуществомъ—своей краткостью. Только въ томъ, почти повсемѣстно принятомъ правилѣ, что въ случаѣ совокупности изъ нѣсколькихъ чиселъ большее предшествуетъ меньшему [2]), можно распознать непосредственное вліяніе ариѳметическихъ дѣйствій. Такъ какъ каждое число возникло изъ прибавленія единицъ, то оно выражается ровно столькими суммами, сколько необходимо для его написанія числовыхъ символовъ. Такъ, напримѣръ, *CLIII* обозначаетъ три суммы: 100, 50 и 3. Такъ какъ при этомъ меньшая сумма является остаткомъ, оставшимся по окончаніи счета большей суммы, то естественно, что она слѣдуетъ за ней. И дѣйствительно, обратный порядокъ можетъ имѣть мѣсто лишь тамъ, гдѣ для образованія числовыхъ на-

---

[1]) W. Wundt. Logik, 3 Aufl. т. II, стр. 147—165.

[2]) H. Hankel. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter.

именованій служитъ не сложеніе, а вычитаніе или умноженіе, какъ это бываетъ иногда, напримѣръ, въ латинской рѣчи и письмѣ. Но такъ какъ при образованіи чиселъ исходятъ въ дѣйствительности изъ сложенія, то подобныя обратныя расположенія числовыхъ знаковъ могли происходить лишь въ видѣ исключенія, ради сокращенія. При каждой раціонально проведенной цыфровой системѣ они должны были уступить мѣсто требованію единообразнаго порядка.

Цыфровая система получила свой специфически математическій характеръ лишь при превращеніи ея въ чистую позиціонную систему. Эта система отличается отъ предшествующихъ ей системъ правильнаго расположенія тѣмъ, что въ ней не величина числа опредѣляетъ его мѣсто, а, наоборотъ, мѣсто числа опредѣляетъ его величину. Это остроумное измѣненіе отношенія коренится въ томъ же самомъ законѣ суммированія, изъ котораго возникла прежде зависимость мѣста отъ величины. Но оно стало возможно лишь благодаря изобрѣтенію нуля. Благодаря этому изобрѣтенію и можно только придавать цыфрамъ двоякое числовое значеніе: одно, связанное съ символомъ, какъ таковымъ, и другое, зависящее отъ его мѣста. Мѣсто указываетъ тотъ общій классъ, куда слѣдуетъ причислять данную цыфру. Отношенія классовъ между собой по величинѣ сами по себѣ произвольны и условны; но благодаря имъ устанавливается количество отдѣльныхъ символовъ, необходимыхъ для выраженія существующихъ въ каждомъ классѣ чиселъ. Такъ, десятеричная система основывается на томъ принципѣ, что низшій классъ содержитъ въ себѣ девять простыхъ единицъ, а каждый высшій классъ—девять составныхъ единицъ, изъ которыхъ каждая равна десяти единицамъ непосредственно слѣдующаго низшаго класса. Если въ какомъ-нибудь классѣ нѣтъ вообще единицъ, то это выражается десятымъ знакомъ,—нулемъ. Мысль облегчить работу счета путемъ образованія группъ единицъ и разсматриванія ихъ, какъ новыхъ единицъ, сама по себѣ очень естественна. Она была осуществлена еще задолго до образованія всякой цыфровой символики, которая поэтому и воспользовалась ею. Но изобрѣтенная индусскими математиками позиціонная система провела систематически эту мысль по принципу десятичнаго метода. При этомъ она добилась того огромнаго преимущества, что обходится съ возможно малымъ количествомъ знаковъ, пользуясь, помимо нуля, лишь столькими цыфровыми символами, сколько единицъ содержится въ низшемъ классѣ. Что при этомъ преимущество досталось десятичной системѣ, это—какъ уже сказано нами—дѣло условнаго соглашенія. Можно признать, что она удовлетворяетъ практическимъ потребностямъ счета, занимая золотую середину между обиліемъ знаковъ и недостаткомъ ихъ. Если бы еще болѣе ограничили число символовъ и, значитъ, единицъ каждаго класса, какъ въ пятеричной системѣ многихъ дикихъ народовъ, то уже при небольшихъ суммахъ пришлось бы имѣть дѣло со слишкомъ многими классами. А если бы остановились на двадцатеричной или шестидесятеричной системахъ, то обиліе знаковъ стало бы мѣшать ихъ различенію другъ отъ друга. Почти тѣ же преимущества, что и десятеричная система, имѣетъ и двѣнадцатеричная система, намекъ на которую имѣется въ нашемъ раздѣленіи дня; къ тому же она имѣла бы еще и то важное для дѣленія преимущество, что единицы высшихъ классовъ можно было бы разложить на большее количество множителей, чѣмъ въ случаѣ десяти и его степеней. Но объективныя условія раздѣленія дня и года, изъ которыхъ могла развиться двѣнадцатеричная система, не были особенно принудительнаго характера; къ тому же ихъ можно было свести къ отношеніямъ цѣлыхъ чиселъ только приблизительнымъ образомъ. Поэтому верхъ должна была взять десятеричная система, основывающаяся на неизмѣнныхъ свойствахъ самого человѣка, на количествѣ пальцевъ, которыми пользуются въ простѣйшихъ случаяхъ счета.

Въ позиціонной системѣ—не говоря о той спеціальной формѣ, которую она приняла въ качествѣ десятеричной системы—любое число выражается вообще рядомъ вида:

$$\ldots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a,$$

въ которомъ a, b, c, d ... означаютъ величины единицъ слѣдующихъ другъ за другомъ классовъ, а β - количество цифровыхъ символовъ, употребляемыхъ въ данной системѣ. Слѣдовательно, въ десятеричной системѣ $\beta = 10$, а буквы a, b, c, d... могутъ обозначать любую изъ цыфръ 0,1 .... 9. Рядъ этотъ ясно показываетъ математическій характеръ позиціонной системы: каждое число благодаря ей разлагается на рядъ суммъ, расположенныхъ по нисходящимъ степенямъ основного числа системы. Такъ какъ рядъ можетъ быть продолженъ до любой степени β, то онъ не ограниченъ никакимъ числомъ, и при этомъ можно вполнѣ обходиться даннымъ небольшимъ запасомъ цыфровыхъ символовъ. Такимъ образомъ позиціонная система удовлетворила требованію, поставленному наличностью безграничнаго множества чиселъ. Дѣйствительно, уже индусскіе математики замѣтили, что хотя безконечное число, понятіе котораго заключается въ указанномъ выше требованіи, и не можетъ быть выражено никакимъ реальнымъ рядомъ суммъ, но оно можетъ быть выражено съ помощью того самаго символа, который обозначаетъ отсутствіе какой-нибудь единицы, въ видѣ дѣленія вида $\frac{a}{o}$ [1]).

[1]) M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, стр. 523.

Иначе обстоитъ дѣло съ нижней границей чиселъ. Можно, конечно, выразить числа, меньшія единицы и сколь угодно малыя, съ помощью правильныхъ дробей. Но такъ какъ знаменатели этихъ дробей могутъ имѣть всевозможныя значенія, то первоначальные естественные методы счета *лишены* принципа, дѣлающаго сравнимыми всѣ подобныя числа. Позиціонная система даетъ этотъ принципъ, продолжая попросту въ противоположномъ направленіи построеніе числа въ видѣ ряда суммъ. Числа, большія единицы, выражаются въ ней съ помощью образованія новыхъ единицъ, растущихъ прямо пропорціонально возрастающимъ степенямъ основного числа системы. Такимъ же точно образомъ числа, меньшія единицы, выражаются съ помощью новыхъ единицъ, обратно пропорціональныхъ возрастающимъ степенямъ основного числа. Такъ возникаетъ въ десятеричной системѣ дополненіе ея съ помощью десятичныхъ дробей; и въ общемъ видѣ любое число можетъ быть выражено рядомъ

$$\ldots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a + \frac{b'}{\beta} + \frac{c'}{\beta^2} + \frac{d'}{\beta^3} + \frac{e'}{\beta^4} + \ldots$$

при чемъ рядъ этотъ можетъ безконечно расти по обѣ стороны, указывая тѣмъ на оба понятія безконечно большого и безконечно малаго числа. Благодаря этому расширенію позиціонная система приспособилась къ тѣмъ обобщеніямъ первоначальнаго понятія числа, которыя оно получило вслѣдствіе развитія дробныхъ и въ особенности ирраціональныхъ чиселъ.

b. Числовые виды и числовыя системы.

Благодаря простымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ и ихъ повторенію изъ первоначальной системы цѣлыхъ положительныхъ чиселъ возникаютъ новыя понятія о числахъ, которыя можно въ то же время приложить къ

Одесская Общественная Библиотека

геометрическимъ или любымъ другимъ величинамъ. Вообще имѣется двоякаго рода возможность для порожденія новыхъ понятій о числахъ. Эти понятія могутъ возникнуть, во-первыхъ, благодаря примѣненію принципа перманентности къ результатамъ ариѳметическихъ дѣйствій, при чемъ предполагается, что съ этими результатами можно производить всегда тѣ же самыя дѣйствія, что̀ и съ первоначальными числами. Во-вторыхъ, ихъ можно образовать посредствомъ примѣненія принципа постоянства къ любымъ, даннымъ въ наглядномъ представленіи, объектамъ, при чемъ допускаютъ, что надъ каждымъ предметомъ, подходящимъ вообще подъ понятіе величины, можно производить такое же измѣреніе съ помощью чиселъ, какъ и надъ дискретными объектами. Эти, исторически слѣдующія другъ за другомъ, формы возникновенія вторичныхъ понятій о числахъ носятъ съ логической точки зрѣнія—каждая по своимъ особеннымъ основаніямъ—характеръ случайности. Въ первомъ случаѣ разсматриваніе въ качествѣ чиселъ результатовъ счета, которые не могутъ быть выражены числами, представляется какимъ то произвольнымъ актомъ. Во второмъ же случаѣ новыя понятія возникаютъ изъ эмпирическихъ свойствъ нашего чувственнаго воспріятія, и они поэтому могли бы быть совсѣмъ иными, если бы эти свойства измѣнились. Поэтому можно считать правомѣрной попытку замѣнить обѣ эти внѣшнія формы развитія понятія числа внутренней формой, имманентной самому первоначальному понятію числа.

Но эта третья форма порожденія—которую, въ отличіе отъ ариѳметической и геометрической, мы назовемъ логической—можетъ привести къ цѣли лишь въ томъ случаѣ, если она включитъ уже въ первоначальное понятіе числа тѣ логическіе признаки, которые обнаруживаются во вторичныхъ понятіяхъ числа. Самый простой путь къ этому заключается въ введенiи, помимо понятiя единицы и совокупности единицъ, или количества, еще понятiя элемента, при чемъ заранѣе оставляютъ открытой возможность того, что единица состоитъ изъ расположенныхъ любымъ образомъ, но разложимыхъ сами далѣе, элементовъ, которые называются также „ариѳметическими точками". Логическое отличiе отъ указанныхъ ранѣе видоизмѣненiй первоначальнаго понятiя числа путемъ примѣненiя принциповъ перманентности и постоянства заключаются въ томъ, что это первоначальное понятiе числа само уже подводится подъ понятiе многообразiя, изъ котораго послѣдовательно путемъ детерминацiи развиваются его логически возможныя формы [1]). Среди этихъ формъ должны неизбѣжнымъ образомъ оказаться и различныя понятiя числа. Такимъ образомъ указываемое общее понятiе содержитъ въ себѣ двѣ составныя части, варьированiе которыхъ даетъ начало различнымъ линiямъ развитiя: 1) понятiе послѣдняго, абсолютно неразложимаго, не имѣющаго никакой величины, элемента и 2) понятiе единицы или отдѣльнаго, заключающаго въ себѣ какое-нибудь содержанiе, но абстрагирующаго отъ объективнаго состава этого содержанiя, акта мысли. Варьированiю перваго изъ этихъ понятiй соотвѣтствуютъ различiя цѣлыхъ и дробныхъ, рацiональныхъ и иррацiональныхъ чиселъ; изъ измѣненiя второго возникаютъ различiя положительныхъ, отрицательныхъ, мнимыхъ и комплексныхъ чиселъ. Обѣ линiи развитiя имѣютъ совершенно различное значенiе. Благодаря первой измѣняется внутреннее строенiе, благодаря второй — внѣшняя форма понятiя числа. Первая относится къ виду счисленiя, вторая—къ направленiю его. Поэтому представляется цѣлесообразнымъ отличить обѣ формы числа и различ-

---

[1]) О понятiи многообразiя вообще см. мою—System der Philosophie [3], I, стр. 233 и сл.

ными названіями; мы назовемъ первыя **числовыми видами** (Zahlarten), вторыя—**числовыми системами** (Zahlsysteme). Такъ какъ указанныя выше измѣненія понятій могутъ происходить независимо другъ отъ друга, то, впрочемъ, въ каждой числовой системѣ возможны различные числовые виды [1]).

Простѣйшій числовой видъ представляютъ **цѣлыя числа**, потому что въ этомъ случаѣ понятія единицы и элемента покрываютъ другъ друга. Ихъ ближайшей реализаціей въ интуиціи является временная послѣдовательность актовъ мысли, такъ какъ единица соотвѣтствуетъ акту мысли при абстрагированіи отъ всякаго содержанія. Но и, допуская эту психологическую основу понятія числа, не слѣдуетъ какъ это сдѣлалъ В. Р. **Гамильтонъ**—выводить также **логически** число изъ времени [2]). Если при извѣстныхъ обстоятель-

[1]) Среди математиковъ широко распространено воззрѣніе—особенно ярко выраженное Л. Кронекеромъ—согласно которому всѣ эти видоизмѣненія понятія числа разсматриваются, какъ преобразованія его, возникшія изъ примѣненія его къ предметамъ нагляднаго представленія, и чужды чисто логическому понятію числа (ср. Kroneker. Über den Zahlbegriff, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik, т. 101, стр. 337 и сл., и Philosophische Aufsätze, Ed. Zeller zu seinem 50jährigen Doktor-Jubiläum gewidmet, стр. 265). Но при этомъ забываютъ, что уже въ случаѣ первоначальнаго понятія количества, какъ и при всѣхъ дальнѣйшихъ формахъ его, слѣдуетъ отличать **эмпирическое** происхожденіе и абстрактно **логическое** содержаніе. Если принять это въ разсчетъ, то отношеніе понятія къ его интуитивной основѣ по существу такое же въ случаѣ ирраціональныхъ и мнимыхъ чиселъ, какъ и въ случаѣ простыхъ цѣлыхъ чиселъ. Если Кронекеръ думаетъ, что когда-нибудь удастся „ариѳметизировать" все содержаніе другихъ математическихъ дисциплинъ, т. е., „обосновать исключительно и цѣликомъ на понятіи числа, взятомъ въ самомъ узкомъ смыслѣ слова, и, значитъ, устранить всѣ модификаціи и расширенія этого понятія", то путемъ, на которомъ уже произошло это „ариѳметизированіе" всѣхъ понятій величины, является имманентно присущее именно первоначальному понятію числа, логическое дальнѣйшее развитіе въ другіе числовые виды и числовыя системы.

[2]) W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin, 1853. Preface. Гамильтонъ ссылается при этомъ—но безъ всякаго основанія—на Канта. Кантъ постоянно сводитъ понятіе числа черезъ посредство функціи счета къ функціи времени, но всегда предпо-

ствахъ мы уже психологически можемъ вообразить себѣ одновременными нѣсколько актовъ мысли, то логически вообще нѣтъ нужды принимать какъ бы то ни было въ разсчетъ временнýю послѣдовательность единицъ. Здѣсь необходима только одна предпосылка, именно, что единицы вообще соединяются въ нѣкое цѣлое. Поэтому съ логической точки зрѣнія число есть понятіе sui generis, которое нельзя свести къ времени, какъ нельзя свести его и къ пространству. Если бы это было иначе, то было бы непонятно, какъ возможно развить логически понятіе числа независимо отъ этихъ наглядныхъ представленій въ его различныхъ формахъ.

Въ случаѣ дробныхъ чиселъ понятія единицы и элемента уже не соотвѣтствуютъ болѣе другъ другу. Здѣсь опредѣленныя единицы разлагаются на элементы, масса которыхъ измѣняется въ зависимости отъ того, что требуется: числитель дроби содержитъ количество соединяемыхъ вмѣстѣ элементовъ, знаменатель же указываетъ на то, сколько элементовъ содержится въ единицѣ. Такъ какъ это послѣднее количество можетъ быть опять-таки выражено числомъ, то элементы образуютъ новыя единицы, удовлетворяющія тому условію, что первоначальныя единицы дѣлятся на нихъ. Поэтому дробное число выражаетъ не только нѣкоторую, выразимую числами, величину, но также и отношеніе, въ которомъ стоятъ другъ къ другу оба эти рода единицъ. Такъ, напримѣръ, дробь $^6/_5$ означаетъ, что слѣдуетъ представить себѣ число, образованное изъ соединенія 6 единицъ, каждая изъ которыхъ получается путемъ дѣленія первоначальной единицы на пять. Такъ какъ отношеніе этихъ единицъ можетъ измѣняться произвольнымъ образомъ, то дробныя числа представляютъ про-

---

лагаетъ наличность пространственнаго субстрата для дѣятельности этой функціи. Поэтому Кантъ представляетъ возникновеніе понятій о числахъ нагляднымъ образомъ на примѣрѣ множествъ точекъ.

извольно измѣняющееся, но вообще не одинаково сгущенное, расположеніе элементовъ нѣкотораго многообразія.

Изъ этого свойства вытекаетъ логическое требованіе, въ случаѣ пополненія котораго можетъ возникнуть третій и послѣдній числовой видъ. Требованіе это состоитъ въ предположеніи, что элементы многообразія расположены разъ навсегда такъ, что благодаря имъ становится возможнымъ любое дѣленіе. Благодаря этому, къ закону дѣленія, приложимому къ цѣлому числу, закону, который остается приложимымъ самъ по себѣ и для этого новаго числоваго вида, присоединяется второй законъ дѣленія, который состоитъ въ обращеніи перваго. Согласно первоначальному закону дѣленія, любое число a изъ ряда цѣлыхъ чиселъ дѣлитъ всѣ числа на два класса, изъ которыхъ первый содержитъ только числа $< a$, второй—числа $> a$, между тѣмъ какъ a можно отнести либо къ первому, либо ко второму классу. Если же ввести требованіе произвольной дѣлимости, то это a означаетъ, что полносиленъ и противоположный принципъ, т. е. что если производятъ какое-нибудь дѣленіе даннаго многообразія, то благодаря этому возникаетъ каждый разъ опредѣленное число a, раздѣляющее рядъ чиселъ на два класса, обладающихъ вышеуказанными свойствами. Числа, удовлетворяющія этому требованію, суть ирраціональныя числа, а многообразія, соотвѣтствующія имъ, обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что они дѣлимы до безконечности и что въ любой, произвольно-малой, части ихъ элементы одинаково сгущены [1]). Съ помощью ирраціональныхъ чиселъ можно измѣрить любую, данную въ наглядномъ представленіи, непрерывную величину и измѣрить любое отношеніе подобныхъ величинъ. Но это еще не

---

[1]) Ср. Dedekind. Stetigkeit u. irrationale Zahlen, 1872, и G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Lpz. 1883 (Math. Annalen, т. 15—21).

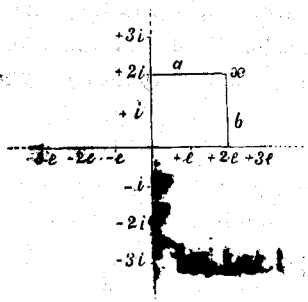
означаетъ нисколько, что вышеуказанное опредѣленіе является также—какъ это принимаютъ Дедекиндъ и Канторъ—опредѣленіемъ непрерывной величины. Оно скорѣе является лишь опредѣленіемъ той числовой системы, которая—благодаря предпосылкѣ о раздѣленіи первоначальныхъ единицъ на безконечное множество повсюду одинаково сгущенныхъ элементовъ—дозволяетъ вполнѣ исчерпывающее ариѳметическое измѣреніе непрерывной величины. Вѣдь понятіе числового многообразія содержитъ само всегда лишь понятія единицы и элемента. Какъ бы ни устанавливать отношеніе обоихъ этихъ понятій другъ къ другу, всякое такое установленіе можетъ относиться лишь къ расположенію и сгущенности элементовъ, но не можетъ устранить логическаго различія между ними. Если, чтобы добиться этого, дополняютъ данное выше ариѳметическое опредѣленіе тѣмъ требованіемъ, что элементы должны непрерывно переходить другъ въ друга или что они могутъ быть приведены въ однозначное сопряженіе съ точками какого-нибудь даннаго въ наглядномъ представленіи непрерывнаго многообразія, напримѣръ, прямой линіи, то подобныя характеристики всегда получаются лишь изъ нагляднаго представленія и никогда не могутъ быть получены путемъ какой-нибудь детерминаціи первоначальнаго понятія числа. Такъ какъ въ своихъ ариѳметическихъ измѣреніяхъ мы связаны съ первоначальной формой понятія числа, то мы не можемъ также выразить ирраціональныхъ чиселъ съ помощью особыхъ числовыхъ формъ; намъ остается лишь выражать приближенныя значенія ихъ съ помощью дробей. Въ виду неограниченной дѣлимости послѣднихъ мы можемъ приближаться до какой угодно границы къ дѣйствительному значенію ирраціональныхъ чиселъ.

Если изъ варьированія условій, касающихся элементовъ числового многообразія, возникаютъ числовые виды, то изъ допущенія различныхъ предпосылокъ насчетъ единицъ чиселъ получаются числовыя системы. Если мы обозначимъ первоначальную единицу черезъ e, то значеніе a какого-нибудь числа означаетъ, что должно взять e a разъ. Такое простое полаганіе связи единицъ мы называемъ положительнымъ числомъ, а неограниченное многообразіе подобныхъ чиселъ—системой положительныхъ чиселъ. Числа другихъ системъ могутъ отклоняться отъ нея съ логической точки зрѣнія двоякимъ образомъ. Во-первыхъ, они могутъ быть образованы изъ различныхъ единицъ, такъ что какое-нибудь число должно быть представлено произведеніемъ $a.e'$, гдѣ e означаетъ отклоняющуюся единицу. Подобныя числовыя системы сходны съ обычными системами въ томъ, что онѣ просты: для всякаго числа a обычной системы существуетъ соотвѣтствующее ему равновеликое число новой числовой системы, отличающееся отъ перваго лишь качествомъ единицы. Во-вторыхъ, новыя числовыя системы могутъ получиться отъ того, что группы различныхъ единицъ соединяются въ новыя числа. Группы, состоящія изъ одинаковыхъ единицъ, какъ, напр., $a.e$ и $b.e$, могутъ съ помощью сложенія быть соединены всегда въ простыя числа $(a+b)\,e$. Группы же изъ различныхъ единицъ, какъ, напримѣръ, $a.e$ и $b.e'$, не могутъ быть сложены, ибо единицы e и e' не могутъ быть соединены. Образованное такимъ образомъ число можетъ быть представлено лишь въ видѣ соединеннаго путемъ сложенія аггрегата $a.e+b.e'$. Система, построенная изъ подобныхъ чиселъ, называется комплексной числовой системой. Въ частности, когда каждое число содержитъ двоякаго рода единицы, она называется двояко-протяженной, когда же каждое число содержитъ троякаго рода единицы, она называется трояко-протяженной, и т. д. Отсюда ясно, что множество мыслимыхъ числовыхъ системъ, какъ простыхъ, такъ и комплексныхъ, неограничено. ✕

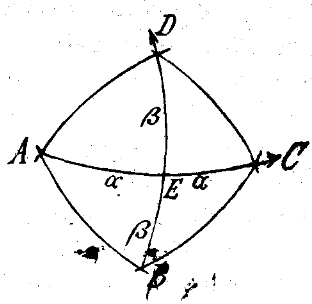
Если мы обратимъ вниманіе на приложенія полученныхъ такимъ образомъ числовыхъ системъ къ объектамъ нагляднаго представленія, то мы увидимъ, что существенное различіе между первоначальными положительными числами и выведенными изъ нихъ числами заключается, очевидно, въ слѣдующемъ: первыя относятся исключительно къ самимъ объектамъ счета, вторыя же опредѣляютъ наряду съ этимъ взаимныя отношенія объектовъ. Лишь подъ вліяніемъ этихъ новыхъ понятій и положительныя числа получаютъ на-ряду со своимъ непосредственнымъ значеніемъ, также и относительное значеніе. Но при этомъ они остаются все-таки тѣми твердыми опорными пунктами, къ которымъ приходится относить другіе роды чиселъ, разъ дѣло идетъ о дѣйствительномъ численномъ измѣреніи объектовъ и ихъ отношеній. Для этого замѣняютъ единицы другихъ числовыхъ системъ положительными единицами, придавая послѣднимъ операціонные символы, показывающіе способъ происхожденія остальныхъ единицъ изъ положительныхъ единицъ. Такимъ образомъ на мѣстѣ второй единицы e появляется знакъ вычитанія, на мѣстѣ третьей i, заимствованный изъ геометрической пропорціи $+1 : i = i : -1$, знакъ $\sqrt{-1}$; для выраженія четвертой единицы i, служитъ знакъ $-\sqrt{-1}$, происшедшій изъ соединенія дѣйствій вычитанія и извлеченія корня изъ отрицательной единицы. Если сохранить для выраженія положительныхъ единицъ различныхъ родовъ знаки e и i, то всѣ единицы распадаются на антитетическія пары: $+e$ и $-e$, $+i$ и $-i$. А такъ какъ i есть средняя геометрическая между $+e$ и $-e$, то ихъ можно представить съ помощью двухъ перпендикулярныхъ прямыхъ, пересѣкающихся въ нулевой точкѣ (см. фиг. 1). Логическое значеніе отрицательныхъ, мнимыхъ и выведенныхъ непосредственно изъ послѣднихъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ состоитъ, согласно этому, въ томъ, что они опредѣляютъ, на-ряду съ чисто метрическими отношеніями величинъ, и ихъ различныя отношенія въ смыслѣ направленія. При этомъ понятія направленія и протяженія слѣдуетъ понимать здѣсь въ общемъ логическомъ смыслѣ, при которомъ пространственныя отношенія являются только частнымъ случаемъ. Съ перенесеніемъ отношеній направленія на понятіе числа связаны также, благодаря теоріи мнимыхъ чиселъ, важнѣйшія приложенія анализа въ новѣйшей математикѣ.

Обыкновенная комплексная числовая система ограничивается двояко - протяженнымъ многообразіемъ. Но здѣсь возникаетъ вопросъ, не возможно ли образовать съ помощью новыхъ единицъ еще другія числовыя системы. Геометрическая интуиція требуетъ, повидимому, такого же численнаго опредѣленія положенія въ пространствѣ, какое дается обыкновенными комплексными числами въ случаѣ плоскости. И, однако, это требованіе оказывается неисполнимымъ. Наоборотъ, всякая попытка ввести какую-нибудь новую форму мнимыхъ чиселъ приводитъ обратно къ обыкновеннымъ мнимымъ и комплекснымъ числамъ. Логическое основаніе этого кроется въ ариѳметическомъ происхожденіи различныхъ формъ единицъ. Подобно тому, какъ прямая со своими двумя направленіями соотвѣтствуетъ первой ступени простыхъ ариѳметическихъ дѣйствій, сложенію и вычитанію, такъ плоскость, опредѣляемая двумя прямыми, соотвѣтствуетъ дѣйствіямъ второй ступени, умноженію и дѣленію. Слѣдовательно, новыя формы мнимыхъ единицъ были бы возможны лишь въ томъ случаѣ, если бы или существовали иныя основныя ариѳметическія дѣйствія или же если бы можно было, по крайней мѣрѣ, производить наличныя дѣйствія различнымъ образомъ, т. е., если бы можно было указать, напримѣръ, на нѣсколько формъ умноженія и дѣленія, имѣющихъ различное значеніе. О первомъ изъ этихъ случаевъ не можетъ быть и рѣчи по самой природѣ понятія числа. Наоборотъ, второй случай представляется самъ по себѣ вполнѣ возможнымъ, такъ какъ при каждомъ дѣйствіи любыя два числа могутъ быть соединены между собой въ двухъ различныхъ формахъ: въ сложенія въ формахъ $a+b$ и $b+a$, въ случаѣ умноженія въ формахъ $a.b$ и $b.a$. Поэтому, если допустить, что эти формы не эквивалентны, то каждое дѣйствіе распадается на ровно столько подвидовъ, сколько возможно перемѣщеній между членами какой-нибудь суммы или множителями какого-нибудь произведенія Итакъ, если предположить, что умноженіе представляетъ многозначное дѣйствіе, то—такъ какъ число множителей въ произведеніи можетъ быть безконечнымъ можно получить произвольное множество видовъ мнимыхъ единицъ, а съ помощью ихъ—неограниченное количество комплексныхъ числовыхъ системъ высшаго порядка.

Реальное значеніе эти формальныя условія могутъ получить, разумѣется, лишь тогда, когда въ дѣйствительномъ наглядномъ представленіи найдутся поводы для примѣненія соотвѣтствующихъ числовыхъ понятій. Но здѣсь легко замѣтить, что если мы возьмемъ полемъ построенія не плоскость, а шаровую поверхность, то получится случай, отличный отъ обычной комплексной числовой системы. Какую-нибудь расположенную въ плоскости точку x (фиг. 1), положеніе которой опредѣляется комплекснымъ числомъ $a+bi$, можно разсматривать, какъ конецъ діагонали параллелограмма, стороны котораго a и bi. Съ точки зрѣнія конечнаго результата безразлично, достигнемъ ли мы x, слѣдуя по пути $2e+b$ или $2i+a$. Отсюда мы заключаемъ, что $a+bi=$ $=bi+a$ или что къ плоской комплексной числовой системѣ примѣнимъ перемѣстительный законъ. На шаровой поверхности (фиг. 2) можно построить фигуру, которая соотвѣтствуетъ плоскому параллелограмму въ томъ отношеніи, что какая-нибудь сторона *BC* можетъ быть совмѣщена со стороной *AD*, если ее повернуть вокругъ центра шара въ направленіи *BA* на величину третьей стороны. Но ясно, что обѣ эти параллельныя стороны сферическаго параллелограмма равны другъ другу по величинѣ, но не по направленію: поэтому въ данномъ случаѣ движеніе по сторонѣ *AD*, равное по величинѣ движенію по сторонѣ *BC*, не будетъ эквивалентно ему. Проведемъ діагональные большіе круги; тогда по-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

лучатся четыре сферическихъ треугольника съ общей вершиной *E*. Въ каждомъ такомъ треугольникѣ сторону, противолежащую углу *E*, можно получить путемъ вращенія нѣкотораго, начинающагося въ центрѣ шара, вектора на два угла $\alpha = EC$ и $\beta = BE$. Результатъ комбинированнаго вращенія равняется въ этомъ случаѣ произведенію обоихъ простыхъ вращеній. Положимъ векторъ равнымъ 1 и назовемъ α и β верзорами; тогда дуга *BC* равна произведенію $\alpha . \beta$ обоихъ ея верзоровъ. Но ясно, что произведеніе это, въ виду только что указанныхъ свойствъ сферическаго параллелограмма, будетъ имѣть различное значеніе, въ зависимости отъ того, написано ли оно въ формѣ $\alpha . \beta$ или $\beta . \alpha$ и имѣетъ ли оно передъ собой знакъ плюсъ или минусъ. Согласимся считать вращенія въ указанномъ стрѣлками направленіи положительными. Тогда произведеніе $+\alpha.\beta$ означаетъ одновременныя вращенія EC и BE; такъ какъ β здѣсь множимое, то вращенія эти происходятъ въ такомъ порядкѣ, что нѣкоторая точка, удаленная отъ вершины E на уголъ β, переводится на уголъ α; слѣдовательно, $+\alpha.\beta = BC$. Точно также произведеніе $+\beta.\alpha$ можетъ означать лишь ту дугу, для которой данъ начальный уголъ α и $\beta = 0$, т. е., AD. Аналогичнымъ образомъ получимъ $AB = -\alpha.\beta$ и $DC = -\beta.\alpha$.

Эти разсужденія можно перенести на любую фигуру въ пространствѣ, измѣряя каждый отрѣзокъ сперва въ отношеніи его величины съ помощью нѣкотораго вещественнаго числа и затѣмъ опредѣляя съ помощью особыхъ мнимыхъ единицъ дугу, указывающую направленіе отрѣзка. Если мы обозначимъ три проведенныхъ изъ центра шара и взаимно перпендикулярныхъ радіуса— единицы символами i, j и k, [illegible]но разсматривать, какъ боковыя другъ относительно друга и относительно вещественныхъ единицъ величины, связанныя отношеніями:

$$i.i = -1,\ j.j = -1,\ k.k = -1,\ i.j = k.$$

Число α, вполнѣ опредѣляющее геометрическій отрѣзокъ по его величинѣ и направленію въ пространствѣ, принимаетъ тогда форму

$$\alpha = a + bi + cj + dk.$$

Эти четырехчленныя числа, заключающія одну вещественную и три мнимыхъ единицы, были названы ихъ творцомъ, В. Р. Гамильтономъ, **кватерніонами**. Благодаря имъ, удается окольнымъ путемъ перенести понятіе числа на пространство, чего невозможно получить съ помощью обыкновенной системы комплексныхъ чиселъ въ виду однозначности основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Окольный путь заключается здѣсь въ томъ, что разсматриваютъ величину и направленіе, какъ обособленныя свойства отрѣзка, и сводятъ направленіе къ вращеніямъ мнимаго шара. Результатомъ этого обособленія является то, что кватерніоны содержатъ въ себѣ не двѣ, а три мнимыхъ единицы. И здѣсь, разумѣется, понятія направленія и отрѣзка можно разсматривать въ болѣе общемъ смыслѣ, абстрагируя отъ пространственныхъ отношеній. Ясно, во всякомъ случаѣ, что полученныя такимъ образомъ числа, въ отличіе отъ обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ, возникли не съ внутренней необходимостью изъ расширенія понятія числа; они получились путемъ примѣненія особой уловки, которая, несмотря на свою практическую плодотворность, носитъ характеръ чего то случайнаго.

Развитіе новыхъ понятій о комплексныхъ числахъ получаетъ болѣе строгій, съ логической точки зрѣнія— хотя и менѣе плодотворный въ смыслѣ конкретныхъ примѣненій — характеръ тогда, когда вообще абстрагируютъ отъ возникновенія ихъ изъ ариѳметическихъ дѣйствій и за исходный пунктъ берутъ лишь формальныя свойства обыкновенныхъ комплексныхъ чиселъ. Эту линію развитія можно продолжать до безконечности по двумъ направленіямъ: 1) можно безконечно умножать количество членовъ какого-нибудь комплекснаго числа, 2) на мѣсто линейнаго выраженія, къ которому сводятся обыкновенныя комплексныя числа, можно поставить высшія степени. Поэтому съ логической точки зрѣнія всѣ эти спекуляціи теоріи чиселъ сводятся къ повторному примѣненію принципа перманентности.

Различныя формы развитія понятія числа показываютъ такимъ образомъ слѣдующее: хотя первоначальный источникъ ихъ заключается въ наглядномъ представленіи и въ берущихъ въ немъ начало операціяхъ надъ понятіями, но все же повсюду на мѣсто этихъ интуитивныхъ мотивовъ можно подставить чисто логическій принципъ порожденія, имѣющій преимущество большей всеобщности. Разъ принятъ этотъ принципъ, то всѣ остальныя формы образованія чиселъ становятся простыми слѣдствіями и примѣненіями его, такъ что при случаѣ можно совершенно абстрагировать отъ нихъ. Но это не слѣдуетъ понимать такимъ образомъ, будто логическій принципъ порожденія появляется болѣе поздно лишь въ силу случайныхъ причинъ или будто мыслимо такое интеллектуальное развитіе, при которомъ положеніе вещей было бы обратнымъ. Это предположеніе опровергается наличностью вспомогательнаго понятія, безъ котораго невозможно логическое порожденіе новыхъ понятій о числахъ, между тѣмъ какъ другія формы развитія числа не нуждаются въ немъ—именно вспомогательнаго понятія многообразія или, что по существу одно и то же, ариѳметическаго элемента. Понятіе многообразія возникло сперва путемъ абстракціи изъ такихъ данныхъ въ наглядномъ представленіи многообразій, какъ время, пространство, произвольно распредѣленные моменты времени или данныя въ пространствѣ множества точекъ и т. п. Своей ариѳметической всеобщности оно достигло благодаря примѣненію принципа перманентности, въ силу котораго стали признавать не только отношенія сгущенности элементовъ, но и направленіе ихъ расположенія, вполнѣ неограниченными по своему существу и поэтому независящими отъ реальныхъ условій нагляднаго представленія. Кромѣ того, въ силу принципа постоянства, предполагаютъ наличность точной аналогіи у законовъ, управляющихъ различными многообразіями этого рода. Но основой этихъ логическихъ построеній остается наглядное представленіе. Оно остается ею и въ томъ смыслѣ, что здѣсь, какъ и повсюду, наглядныя представленія должны функціонировать всегда въ качествѣ замѣстителей понятій. Отличіе отъ обѣихъ другихъ формъ порожденія числа заключается по существу лишь въ томъ, что у нихъ къ первоначальному понятію положительнаго цѣлаго числа примѣняются въ одномъ случаѣ принципъ перманентности, въ другомъ — принципъ постоянства лишь впослѣдствіи. Между тѣмъ въ случаѣ логическаго порожденія числа оба принципа примѣняются одновременно до вывода понятія числа, а затѣмъ устанавливается вообще понятіе многообразія, достаточно общее, чтобы можно было вывести изъ него самыя различныя мыслимыя числовыя системы и числовые виды. Ясно, что пріемъ этотъ, заключающій въ себѣ первые два, какъ свои составныя части, логически болѣе совершененъ. Это подтверждается и тѣмъ, что числовыя понятія, къ которымъ приходятъ такимъ путемъ, сами по себѣ неисчерпаемы, и что между ними обнаруживаются логическія отношенія, которыя остаются незамѣченными въ случаѣ болѣе спеціальныхъ способовъ порожденія.

c. Числовые предѣлы.

Цѣлыя положительныя числа образуютъ безграничный рядъ, въ началѣ котораго находится отсутствіе всякаго числа, нуль, а въ концѣ—величина, превосходящая всякое мыслимое число, безконечность. Это свойство присуще и всѣмъ прочимъ числовымъ видамъ и числовымъ системамъ. Поэтому символы 0 и ∞ означаютъ собственно не сами числа, а оба предѣла понятія числа. Но это не мѣшаетъ имъ имѣть нѣкоторыя общія съ числами свойства, а также и тому, что при извѣстныхъ условіяхъ они принимаютъ характеръ дѣйствительныхъ чиселъ. 0 и ∞, какъ и всѣ собственныя числа (за исключеніемъ единицы), возникаютъ прежде всего благодаря основнымъ ариѳметическимъ дѣйствіямъ. Такъ, ∞ получается путемъ безграничнаго сложенія единицъ (или другихъ положительныхъ чиселъ), путемъ безграничнаго умноженія цѣлыхъ чиселъ, за исключеніемъ единицы, или же путемъ дѣленія какого-нибудь

Одесская Общественная Библиотека

числа на 0. Нуль же получается путемъ вычитанія другъ изъ друга двухъ равныхъ чиселъ или же путемъ дѣленія какого-нибудь числа на ∞. Уже при сравненіи этихъ различныхъ способовъ возникновенія 0 и ∞ мы замѣчаемъ, что каждый изъ обоихъ этихъ символовъ можетъ имѣть различныя значенія. Яснѣе всего это видно въ случаѣ нуля, какъ это вытекаетъ изъ слѣдующихъ простыхъ равенствъ:

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = \frac{0}{0} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a-a}{b-b} = \frac{0}{0} = 0.$$

Поэтому каждое изъ обоихъ этихъ предѣльныхъ понятій можетъ имѣть двоякое значеніе. Во-первыхъ, оно можетъ означать предѣлъ нѣкоторой перемѣнной величины, непрерывно возрастающей или убывающей; во-вторыхъ, оно можетъ означать то, что превосходитъ всѣ предѣлы измѣримыхъ величинъ,—или потому, что оно не обладаетъ вовсе никакой величиной, или же потому, что величина его не можетъ быть исчерпана рядомъ всѣхъ чиселъ, даже если бы рядъ этотъ былъ завершенъ. Дѣло идетъ здѣсь о формѣ понятій нуля и безконечности, возникшей въ первомъ случаѣ изъ разсмотрѣній измѣненія величины, во второмъ—изъ идеи объ абсолютномъ значеніи величины. Обѣ формы нуля достаточно охарактеризованы указанными выше способами возникновенія. Нуль, полученный путемъ вычитанія $a-a$, означаетъ абсолютное отсутствіе всякой величины; частное же $\frac{a}{\infty}$ показываетъ, что a уменьшается благодаря дѣленію, но что это уменьшеніе должно быть безконечнымъ, такъ какъ дѣлитель здѣсь—величина безконечная. Нѣсколько отличны въ своемъ способѣ происхожденія обѣ формы верхняго предѣльнаго понятія, *ибо вообще не можетъ возникнуть* абсолютной безконечности на пути какихъ-нибудь ариѳметическихъ дѣйствій. Вѣдь съ помощью дѣйствія сложенія (соотвѣтствующаго дѣйствію вычитанія въ случаѣ нуля) здѣсь можетъ получиться только перемѣнное предѣльное понятіе, такъ какъ для полученія безконечной суммы здѣсь нельзя довольствоваться, какъ въ случаѣ вычитанія $a—a$, конечнымъ числомъ членовъ, а приходится производить сложеніе безконечнаго множества членовъ $a + a + a + a + \ldots$ Поэтому понятіе абсолютной безконечности можетъ быть вообще мыслимо лишь въ формѣ постулата, совершенно абстрагирующаго отъ порождающихъ его дѣйствій. Математическое изученіе конечныхъ величинъ можетъ дать поводъ къ установленію подобнаго постулата. Вѣдь для установленія нѣкоторыхъ понятій, обладающихъ абсолютнымъ значеніемъ и недоступныхъ изложенію съ помощью опредѣленныхъ конечныхъ величинъ, можетъ понадобиться постулировать это постоянное или абсолютное понятіе безконечности. Когда, напримѣръ, мы говоримъ, что точка пересѣченія двухъ параллельныхъ прямыхъ находится въ безконечности, то мы имѣемъ здѣсь въ виду абсолютную безконечность. Въ качествѣ точки пересѣченія она означаетъ нѣкоторое единственное, вполнѣ опредѣленное, мѣсто въ пространствѣ; а такъ какъ предполагается, что параллелизмъ прямыхъ данъ, а не есть что-то, только возникающее, то ее нельзя представить себѣ какъ точку, къ которой безъ конца стремятся прямыя. Наоборотъ, мы представляемъ себѣ, что линіи продолжаютъ оставаться параллельными и за всякой измѣримой границей. Поэтому, пока мы имѣемъ въ виду лишь первую форму понятія безконечности, т. е. предѣлъ перемѣнной величины, невозможно реализовать въ данномъ случаѣ понятія точки пересѣченія. Эти разсужденія касаются частнаго случая пространственныхъ величинъ. Но аналогичныя предпосылки можно выставить и для случая наиболѣе общихъ величинъ, чиселъ. Благодаря неограниченной свободѣ

Одесская Общественная Библиотека

математическаго образованія понятій на основѣ принципа перманентности, возможно сдѣлать допущеніе, что существуетъ нѣкоторое абсолютное значеніе $\omega = \infty$, которое не просто означаетъ предѣлъ, къ которому безъ конца стремится рядъ чиселъ, но въ которомъ реально достигнутъ этотъ предѣлъ. И дѣйствительно, въ ариѳметическія спекуляціи ввели эту фикцію и стали производить съ ея помощью изслѣдованіе свойствъ чиселъ, расположенныхъ за предѣлами этой абсолютной величины $\omega = \infty$. При этомъ оказывается, напримѣръ, что къ этимъ „трансфинитнымъ" числамъ непримѣнимъ уже перемѣстительный законъ сложенія: $1 + \omega$ здѣсь $= \omega$, между тѣмъ $\omega + 1 > \omega$, слѣдовательно, $1 + \omega$ *не* равно $\omega + 1$ [1]). Если мы возьмемъ какую-нибудь безконечную, ограниченную съ одной стороны, прямую въ ея абсолютной цѣльности, и если мы мысленно удлинимъ ее передъ ея началомъ въ безконечности на нѣкоторый отрѣзокъ, то ея величина благодаря этому измѣнится; если же мы прибавимъ этотъ самый отрѣзокъ со стороны ея границы въ конечной части пространства, то прямая остается безконечной величиной того же размѣра, что и прежде.

Въ математикѣ и философіи нерѣдко смѣшивали обѣ разсмотрѣнныя здѣсь формы предѣльныхъ понятій; многіе изъ такъ называемыхъ „парадоксовъ безконечности" имѣютъ своимъ источникомъ это смѣшеніе [2]). А если даже нѣкоторые авторы и сознавали отчасти существующія здѣсь различія, то это нерѣдко соединялось у нихъ съ неодинаковой оцѣнкой обоихъ понятій, благодаря которой одно какое-нибудь изъ нихъ считалось правомѣрнымъ, другое же отвергалось. Особенно жаркій споръ происходилъ по поводу верхняго предѣльнаго понятія;

---

[1]) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, стр. 39.

[2]) Ср. Bolzano, Paradoxien der Unendlichkeit, 1851.

понятіе нуля, въ случаѣ котораго ариѳметическія приложенія показывали правомѣрность обѣихъ формъ, оставалось почти не затронуто этимъ споромъ. Математики употребляли символъ ∞ почти исключительно въ смыслѣ безпредѣльно растущей величины; наоборотъ, Гегель называлъ эту безконечность математиковъ дурной и противопоставлялъ ей абсолютную безконечность, какъ истинную[1]). Однако, нельзя признать правильнымъ лежащее въ основѣ этого различенія представленіе, будто въ случаѣ первой формы дѣло идетъ въ дѣйствительности о конечныхъ, хотя и неизмѣримо большихъ или малыхъ величинахъ. Хотя оно имѣетъ своимъ источникомъ развитіе основныхъ понятій исчисленія безконечно-малыхъ, но оно, очевидно, возникло въ немъ не самостоятельнымъ образомъ, а перешло въ него изъ прежнихъ методовъ приближенія и исчерпыванія. Безконечность есть отрицаніе конечной величины, и, какъ таковое, она примѣнима къ обѣимъ формамъ верхняго предѣльнаго понятія. Все различіе заключается лишь въ лежащемъ въ основѣ принципѣ порожденія. Этотъ принципъ заключается въ первомъ случаѣ въ томъ, что безконечность происходитъ изъ конечной величины путемъ безграничнаго роста; во второмъ же случаѣ ее мыслятъ, какъ готовое понятіе, которое съ самаго начала лишено присущаго конечнымъ величинамъ признака ограниченности. Правильнѣе выражаютъ эти различныя условія возникновенія понятій о безконечности названія „лишенное конца“ (Endlose) и „сверхконечное“ или употребленные впервые Г. Канторомъ термины „инфинитное“ и „трансфинитное“.

Смѣшеніе этихъ различныхъ предѣльныхъ понятій имѣло своимъ результатомъ еще другое неудобство. Въ

---

[1]) Hegel, Logik, I, стр. 263 и сл. Въ аналогичномъ смыслѣ Канторъ различаетъ (цит. соч. стр. 13) несобственную безконечность и собственную.

тѣхъ случаяхъ, гдѣ правомѣрнымъ оказывалось само по себѣ лишь одно изъ этихъ понятій, оно вызвало, благодаря привлеченію другого понятія, ложное раздвоеніе представленій. Слѣдуетъ замѣтить, что понятіе абсолютной или трансфинитной безконечности можетъ быть введено въ математику только ради цѣлей теоріи чиселъ или геометрическихъ цѣлей; тамъ же, гдѣ дѣло идетъ о математическомъ представленіи физическихъ, т. е. опредѣленныхъ съ помощью опыта, понятій, тамъ возможно лишь понятіе инфинитной безконечности.

Не надо также забывать, что оба эти понятія безконечнаго носятъ характеръ логическихъ постулатовъ. Мы можемъ постулировать, чтобы рядъ положительныхъ цѣлыхъ чиселъ былъ какъ бы сжатъ въ одномъ единственномъ числѣ $\omega = \infty$ или чтобы какая-нибудь величина безпредѣльно возрастала; мы можемъ даже, благодаря логической свободѣ математическаго мышленія, допустить, что всѣ эти постулаты удовлетворены, и затѣмъ развивать вытекающія отсюда слѣдствія. Но такъ какъ наше мышленіе не въ состояніи создать объективную реальность, а способно въ лучшемъ случаѣ лишь воспроизвести ее въ субъективныхъ, подчиненныхъ условіямъ познанія духа, понятіяхъ, то эти предпосылки суть сами по себѣ не что иное, какъ логическіе постулаты; реальное значеніе эти постулаты получаютъ лишь въ тотъ моментъ, когда они оказываются пригодными для логическаго изображенія дѣйствительности.

Перев. П. Юшкевичъ.

Ж. Таннри и Ж. Молькъ.

Основные принципы ариѳметики [1]).

Понятіе натуральнаго числа.

I. Количественное число. Натуральное число можно разсматривать съ двухъ точекъ зрѣнія: количественное число (доля, quotité) отвѣчаетъ на вопросъ „сколько?“; порядковое число (номеръ) означаетъ „мѣсто по порядку“ („rang“) какого-нибудь предмета [1]).

Идея количественнаго числа предполагаетъ идею раздѣльныхъ предметовъ, соединенныхъ въ одно цѣлое, въ одинъ комплексъ, отличный отъ того, чтó не есть онъ, при чемъ комплексъ этотъ можетъ содержать хотя бы лишь одинъ предметъ. Число, соединяемое съ нѣкоторымъ комплексомъ, есть не что иное, какъ сама идея этого комплекса, когда абстрагируютъ отъ природы раздѣльныхъ предметовъ, составляющихъ его [2]). Благодаря тому, что абстрагируютъ отъ всего того, чтó различаетъ каждый изъ этихъ предметовъ—за исключеніемъ того, что каждый изъ нихъ отличенъ отъ другихъ,—предметы, составляющіе комплексъ, или единицы, принимаются за эквивалентные [3]). Часть какого-нибудь комплекса представляетъ нѣкоторый комплексъ, называемый частичнымъ. Элементами послѣдняго являются нѣкоторые—но не всѣ—предметы перваго комплекса.

Сказать, что какому-нибудь предмету нѣкотораго комплекса соотвѣтствуетъ какой-нибудь опредѣленный предметъ другого комплекса, это значитъ утверждать, что мысль о предметѣ перваго комплекса вы-

---

[1]) Изъ Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées.

зываетъ мысль о предметѣ второго комплекса. Если взаимно мысль объ этомъ опредѣленномъ предметѣ второго комплекса вызываетъ единственно мысль о томъ же самомъ предметѣ перваго комплекса, то объ этихъ двухъ предметахъ говорятъ, что они соотвѣтствуютъ взаимно другъ другу. Когда всякому предмету каждаго изъ обоихъ комплексовъ соотвѣтствуетъ такимъ образомъ одинъ единственный предметъ другого комплекса и когда — предполагая, что A есть какой-нибудь предметъ одного изъ этихъ комплексовъ, а A′ есть соотвѣтствующій ему предметъ въ другомъ комплексѣ—оба предмета A и A′ взаимно соотвѣтствуютъ другъ другу, то говорятъ, что соотвѣтствіе между обоими комплексами совершенное (одно—однозначное, uniunivoque, eineindeutig) или что оба комплекса совершенно соотвѣтствуютъ другъ другу. Два комплекса имѣютъ одно и то же число (или, если угодно, равныя числа), если между ними можно установить совершенное соотвѣтствіе.

2. Конечные или безконечные комплексы. Комплексъ можетъ быть конечнымъ или безконечнымъ. Довольно трудно опредѣлить оба эти слова. Если предполагать, что значеніе перваго намъ дано опытомъ, то можно считать, что второе опредѣляется отрицательнымъ образомъ. Конечный комплексъ не можетъ имѣть того же числа, что̀ одна изъ его частей. Наоборотъ, можно установить совершенное соотвѣтствіе между безконечнымъ комплексомъ и одной изъ его частей [4]), такъ что, согласно предыдущему опредѣленію, безконечный комплексъ имѣетъ то же число, что̀ и одна изъ его частей. Ничто не мѣшаетъ предположить, что это послѣднее предложеніе какъ бы содержитъ въ себѣ положительное опредѣленіе слова безконечный [5]): комплексъ безконеченъ, когда имѣется часть этого комплекса, совершенно соотвѣтствующая ему. Но въ этомъ случаѣ слово „конечный" опредѣляется отрицательнымъ образомъ: комплексъ конеченъ, когда не имѣется части этого комплекса, совершенно соотвѣтствующей ему.

Согласно Ч. Пирсу [6]), комплексъ конеченъ, если, какимъ бы образомъ ни переходить отъ одного предмета къ другому, отъ этого другого къ третьему, . . , мы неизбѣжно возвращаемся къ одному изъ встрѣченныхъ раньше предметовъ. Чтобы опредѣленіе это имѣло положительный смыслъ, слѣдовало бы умѣть убѣдиться въ томъ, что, дѣйствительно, испробованы всѣ способы перехода и что, значитъ, установлено, что число этихъ способовъ конечно [7]).

Въ этой статьѣ рѣчь будетъ идти лишь о конечныхъ числахъ.

3. Натуральный рядъ чиселъ. Нуль.—Если два конечныхъ комплекса не равны по числу, то это значитъ, что можно установить соотвѣтствіе между единицами одного изъ нихъ и единицами части другого: о числѣ послѣдняго говорятъ, что оно больше, чѣмъ число перваго, о которомъ говорятъ, что оно меньше. Если расположить числа въ такомъ порядкѣ, что каждое изъ нихъ больше предыдущаго и меньше слѣдующаго то они образуютъ непосредственный рядъ натуральныхъ чиселъ [8]) или натуральный рядъ чиселъ [9]).

Въ качествѣ знака какого-нибудь числа можно взять комплексъ реальныхъ предметовъ, которые легко изобразить или которыми легко оперировать: параллельныя черточки, повторяющееся слово „одинъ", счетныя марки, камешки или условные символы: слова устной нумераціи, цифры и группы цифръ. Эти знаки или эти символы тоже называются числами [10]). Считать предметы какого-нибудь комплекса, перечислять эти предметы—это значитъ опредѣлить тотъ знакъ, который, согласно принятымъ соглашеніямъ, представляетъ число этихъ предметовъ [11]).

Нуль означаетъ отсутствіе всякаго предмета въ комплексѣ, который такимъ образомъ пустъ и, собственно говоря, не существуетъ. Но нуль, какъ и любое другое число, представляетъ отвѣтъ на вопросъ „сколько?“ и съ этой точки зрѣнія долженъ разсматриваться, какъ число. Но обыкновенно его не включаютъ въ натуральный рядъ чиселъ. Если бы его туда включили, онъ долженъ былъ бы фигурировать во главѣ этого ряда [12]). Въ дальнѣйшемъ нуль не будетъ разсматриваться, какъ натуральное число.

4. Порядковое число.—Натуральный рядъ чиселъ включаетъ въ себѣ понятіе мѣста по порядку. Если принимать это понятіе за первичное, то оно приводитъ къ понятію порядковаго числа [13]), которое иные математики разсматриваютъ, какъ предшествующее понятію количественнаго числа, являющемуся съ этой точки зрѣнія производнымъ понятіемъ. Числа, или номера, разсматриваются тогда, какъ рядъ различныхъ и притомъ произвольныхъ знаковъ. Этотъ рядъ имѣетъ первый знакъ, номеръ одинъ. За каждымъ номеромъ слѣдуетъ другой номеръ, отличный отъ всѣхъ предыдущихъ. Каждому номеру—за исключеніемъ перваго—предшествуетъ другой номеръ. За этотъ рядъ знаковъ можно взять, напр., символы 1, 2, 3, . . . , 9, 10, 11, . . . , 99, 100, 101, . . . , имѣя въ виду, что цыфры являются простыми письменными знаками, которые слѣдуютъ другъ за другомъ въ неизмѣнномъ порядкѣ и собираются затѣмъ въ опредѣленномъ систематическомъ порядкѣ (согласномъ, напр., съ привычками десятеричной нумераціи), позволяющемъ специфицировать символъ, слѣдующій за какимъ-нибудь даннымъ символомъ. Образованный такимъ образомъ рядъ есть натуральный рядъ чиселъ, который такимъ образомъ опредѣленъ съ порядковой точки зрѣнія.

Чтобы получить количественное число какого-нибудь комплекса, перенумеровываютъ послѣдовательно каждый предметъ комплекса въ опредѣленномъ порядкѣ, приписывая послѣдовательно различнымъ предметамъ номера натуральнаго ряда. Послѣдній употребленный номеръ и есть количественное число комплекса [14]). Ничто не мѣшаетъ обозначить его тѣмъ же знакомъ, что̀ и послѣдній употребленный номеръ [15]).

Съ порядковой точки зрѣнія нѣтъ мѣста для опредѣленія равенства: два равныхъ числа это—одно и то же число натуральнаго ряда. Понятіе неравенства, кромѣ того, не включаетъ никакого сравненія величины. Поэтому здѣсь предпочтительнѣе будутъ говорить низшій или предыдущій, чѣмъ меньшій, и высшій или послѣдующій, чѣмъ бо́льшій [16]). Съ этой точки зрѣнія комплексъ конеченъ, когда онъ имѣетъ число. Безконечный комплексъ не можетъ имѣть никакого числа.

5. Введеніе числа, согласно Дедекинду и Пеано.— Вмѣсто того, чтобы, какъ въ предыдущемъ, основывать опредѣленіе порядковаго числа на идеѣ мѣста по порядку, можно, вмѣстѣ съ Р. Дедекиндомъ [17]), основывать его на идеѣ соотвѣтствія [18]). Этой идеи, разсматриваемой, какъ первичная, и идеи цѣпи, которую можно вывести изъ нея, достаточно, чтобы охарактеризовать натуральный рядъ чиселъ [19]).

Пеано [20]) формулировалъ съ помощью особой системы символовъ теорію, представляющую нѣкоторыя аналогіи съ теоріей Дедекинда. За первичныя понятія онъ принимаетъ идею нуля, идею цѣлаго числа и идею числа, слѣдующаго за другимъ числомъ. Онъ принимаетъ затѣмъ слѣдующія аксіомы: 1) нуль есть число; 2) за всякимъ числомъ слѣдуетъ число; 3) два числа, за которыми слѣдуетъ одно и то же число, равны;

4) нуль не слѣдуетъ ни за какимъ числомъ; 5) если какое-нибудь положенiе вѣрно для числа нуль и если, будучи вѣрнымъ для любого числа, оно также вѣрно для слѣдующаго числа, то оно вѣрно для всѣхъ чиселъ. Это послѣднее предложенiе, установленное, впрочемъ, Дедекиндомъ, есть принципъ полной индукцiи.

К. Бурали-Форти предложилъ номинальное [21]) опредѣленiе числа и вывелъ изъ него аксiомы Пеано.

6. Инварiантность числа.—Если стать на точку зрѣнiя *порядковой* теорiи числа, то вопросъ объ инварiантности [22]) числа ставится яснымъ образомъ: „получается ли тотъ же самый номеръ, въ какомъ бы порядкѣ ни перенумеровать предметы какого-нибудь комплекса?“ Л. Кронекеръ и Г. Гельмгольцъ полагали, что они доказали это [23]).

Если стать на точку зрѣнiя количественной теорiи числа, то обыкновенно устраняютъ вопросъ въ виду эквивалентности предметовъ комплекса. Но даже съ этой точки зрѣнiя сомнительно, чтобы имѣли право устранить его, какъ только приступаютъ къ фактическому перечисленiю какого-нибудь комплекса, ибо для выполненiя этого перечисленiя безусловно необходимо различить предметы комплекса.

7. Критика понятiя числа.—Разъ принято понятiе натуральнаго числа, то ариѳметика можетъ быть построена чисто логическимъ образомъ безъ всякаго постулата [24]). Мы увидимъ, что это понятiе допускаетъ рядъ расширенiй [25]) идеи числа, которымъ можно приписать практическую цѣль сдѣлать число пригоднымъ для представленiя мѣры величинъ. Впрочемъ, точки зрѣнiя философовъ, пытавшихся различить психологическiе элементы идеи числа (какъ натуральнаго, такъ и обобщеннаго), замѣтно разнятся другъ отъ друга. Ограничимся здѣсь краткимъ обзоромъ ихъ.

Для В. Гамильтона, согласно съ ученіемъ Канта[26]), время, разсматриваемое, какъ форма нагляднаго представленія, есть основаніе идеи числа. Алгебра есть для него наука „порядка въ прогрессіи", или наука „чистаго времени"[27]).Таково же ученіе Шопенгауэра[28]). Гельмгольцъ[29]) выражаетъ то же мнѣніе; аналогично и В. Бриксъ[30]).

Наоборотъ, Гербартъ[31]) утверждаетъ, что число не имѣетъ ничего общаго съ временемъ. Ю. Бауманъ[32]) и Ф. Ланге[33]) думаютъ, что число относится скорѣе къ пространству, чѣмъ ко времени: понятіе числа параллельно понятію пространства[34]); раньше порядковаго числа появляется количественное число, образованное съ помощью синтеза, производимаго нами въ пространствѣ. Каждый элементъ нѣкотораго множества, съ одной стороны, и совокупность этихъ элементовъ, съ другой стороны, привлекаютъ наше вниманіе. Аксіомы алгебры, какъ и аксіомы геометріи, основываются на присущемъ намъ наглядномъ представленіи пространства[35]). Фреге близокъ по своимъ воззрѣніямъ къ Гербарту. Для него число выражаетъ нѣкоторое объективное свойство понятія; по существу его опредѣленіе количественнаго числа, принадлежащаго къ нѣкоторому опредѣленному понятію, не отличается отъ опредѣленія, даннаго А. Рёсселемъ въ болѣе яркой формѣ: если мы назовемъ подобными два класса, между элементами которыхъ можно установить однозначное и взаимное соотвѣтствіе, то количественное число есть классъ подобныхъ классовъ[36]).

Р. Дедекиндъ[37]) и Л. Кронекеръ[38]) полагаютъ, что идея числа совершенно не зависитъ отъ нашего представленія пространства или времени, и думаютъ, что числа суть свободныя творенія человѣческаго духа. Уже К. Гауссъ утверждалъ[39]), что число есть чистый продуктъ нашего духа въ противоположность пространству, которое обладаетъ реальностью внѣ нашего духа.

Нерѣдко, но ошибочно, предполагали, что Аристотель первый опредѣлилъ число и извлекъ это опредѣленіе изъ понятія времени. Напротивъ, онъ опредѣляетъ время числомъ и говоритъ въ своей „Физикѣ“ [40]), что время есть число движенія [41]). Зато платоновскій эпиномисъ утверждаетъ, что небесныя движенія научили людей считать [42]). Опредѣленіе Аристотеля [43]), мало разнящееся отъ опредѣленія Эвдокса, аналогично, если не тождественно, опредѣленію, данному позже Эвклидомъ [44]) „Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος“, которое впослѣдствіе такъ часто повторялось.

Нумерація.

8. Первыя системы нумераціи. Чтобы выразить числа, можно пользоваться любыми сходными предметами (пальцами, шариками, проведенными на доскѣ или бумагѣ). Народы, не знающіе письма, пользуются для счета камешками или раковинами. Часто для этого пользуются насѣчками на бамбукѣ (древніе китайцы или на стволахъ деревьевъ. Этруски и древніе римляне каждый годъ вбивали гвоздь въ особомъ священномъ мѣстѣ [45]). Соотвѣтствіе между предметами, которые желаютъ сосчитать, и выбранными условными знаками составляетъ нумерацію. Она называется первобытной, когда она ограничивается повтореніемъ того знака, который соотвѣтствуетъ одному предмету. Современные цивилизованные народы пользуются еще первобытной нумераціей для костей, домино и картъ. Повтореніе часами, когда они бьютъ часы, одного и того же звука составляетъ тоже первобытную нумерацію.

Первобытной нумераціи не приходится обучать: она понятна сама собой. Но она не позволяетъ легко различать [46]) болѣе или менѣе значительныя числа. Употребленіе ска́лы сокращающихъ знаковъ, изъ которыхъ первый замѣняетъ опредѣленное число n единицъ (или, вѣрнѣе, знаковъ, соотвѣтствующихъ каждый одному предмету), второй замѣняетъ n первыхъ знаковъ и т. д., есть существенный признакъ того, что̀ называютъ системой нумераціи [47]) съ основаніемъ n. Самой распространенной всегда была, безъ сомнѣнія, система нумераціи съ основаніемъ десять (десятеричная нумерація) [48]).

Въ самой глубокой древности вавилоняне [49]) имѣли систему съ основаніемъ шестьдесятъ (шестидесятеричная нумерація). Это основаніе дѣлится на первыя числа и должно было быть удобнымъ для приближеннаго вычисленія нѣкоторыхъ астрономическихъ явленій. Вавилоняне писали числа, располагая ихъ двухъ подлѣ друга, и имѣли особенные (клинообразные) символы для 1, 10, 100; они имѣли особенныя имена для 60, 3600 и 600; они иногда употребляли для изображенія 60 и 3600 тотъ же символъ, что̀ и для изображенія единицы. Они, кажется, разсматривали лишь числа меньше одного милліона [50]).

Въ своемъ іероглифическомъ письмѣ египтяне изображали девять первыхъ чиселъ одной, двумя, ... девятью черточками, Въ іератическомъ и демотическомъ письмахъ эти группы черточекъ были соединены, видоизмѣнены, упрощены и образовали такимъ образомъ специальные знаки. Каждая изъ первыхъ степеней 10 изображена въ іероглифическомъ письмѣ особеннымъ знакомъ и носитъ спеціальное названіе; любое число изображается путемъ повторенія и рядоположенія [51]).

Древніе греки писали названіе чиселъ сполна словами и этотъ обычай господствовалъ вплоть до III вѣка до Р. Х. Они употребляли также [52]) начальныя буквы Π, Δ словъ πέντε δέκα для обозначенія числа 5, 10 и букву Н для изображенія числа 100. Они ихъ писали рядомъ, чтобы образовать другія числа [53]) Позже [54]) они придумали десятеричную систему нумераціи, значительно разнящуюся отъ нашей. Эта система состояла въ томъ, чтобы изобразитъ 9 первыхъ чиселъ, 9 первыхъ десятковъ и 9 первыхъ сотенъ [55]) 27 буквами (24 буквами ихъ алфавита и 3 древними буквами восточнаго происхожденіи, называвшимися episemon). Числа отъ единицы до тысячи изображались простымъ рядоположеніемъ буквъ, означающихъ сотни, десятки и единицы, причемъ сверху надъ всѣмъ проводилась горизонтальная черта [56]) Буквы отъ ,α до ,ϑ со значкомъ, налѣво подъ буквой изображали тысячекратное значеніе буквъ отъ α до ϑ. Для 10000 (миріада) часто писали M или Mυ (μυριάς); иногда также простая . замѣняла этотъ символъ [57]). Числа, кратныя отъ 10000, давали новыя единицы высшихъ порядковъ [58]). Въ астрономіи греки пользовались шестидесятеричной системой нумераціи, заимствованной у вавилонянъ [59]).

Въ своей системѣ нумераціи, заимствованной ими въ значительной степени у этрусковъ [60]), римляне сначала пользовались способомъ, аналогичнымъ способу дикихъ народовъ. Они изображали числа отъ одного до девяти съ помощью повторныхъ черточекъ и употребляли спеціальные знаки, принявшіе, въ концѣ-концовъ, форму X, C, M для обозначенія десяти, десяти разъ десяти, десяти разъ десяти разъ десяти черточекъ. Позже они ввели спеціальные знаки [61]) для пяти— V, для пятидесяти—L, для пятисотъ—D и отмѣчали умноженіе числа на тысячу, проведя горизонтальную черту надъ этимъ числомъ, а умноженіе—на сто тысячъ тѣмъ, что заключали, сверхъ того, число между двумя чертами [62]). Но ихъ нумерація осталась аддитивной.

Китайцы употребляли девять знаковъ для девяти первыхъ чиселъ и одиннадцать знаковъ для одиннадцати первыхъ степеней 10. Ихъ нумерація называется мультипликативной: если знакъ одного изъ девяти первыхъ чиселъ помѣщенъ передъ знакомъ 10 или его степеней, то онъ его умножаетъ; если онъ помѣщенъ послѣ, то онъ складывается [63]). Между прочимъ, они не писали своихъ чиселъ сверху внизъ, но слѣва направо, какъ мы [64]).

Абаки (ἄβαξ) представляли раму со столбиками, на которыхъ передвигали счетныя марки [65]). Пользованіе этими марками [66]) основывается на томъ же принципѣ нумераціи, что и римская система. Абаки были въ ходу у народовъ Востока, у грековъ, у римлянъ, и также въ средніе вѣка во всѣхъ христіанскихъ странахъ. Греки, однако, пользовались ими меньше, чѣмъ римляне ввиду того, что ихъ система письменной нумераціи была легче для счета. Въ древнихъ абакахъ n марокъ въ x-омъ столбикѣ равняется $n.\ 10^{x-1}$ марокъ. Чтобы облегчить чтеніе, римляне раздѣляли абаку на верхнюю и нижнюю часть и считали, что марка, помѣщенная въ верхней части столбика, равнялась 5 маркамъ, помѣщеннымъ въ нижней части столбика. Въ концѣ XV-го вѣка появляются вдругъ абаки съ горизонтальными линіями, въ которыхъ марка, помѣщенная на какой-нибудь линіи, въ десять разъ больше той же марки, помѣщенной на линіи, находящейся непосредственно ниже, и въ 5 разъ больше этой марки, помѣщенной между двумя линіями. Эти абаки съ линіями исчезли лишь во второй половинѣ XVIII-го вѣка.

Въ серединѣ XIII вѣка появляется мода украшать счетныя марки какимъ-нибудь девизомъ или выпуклой рѣзьбой [67]). Мода эта зародилась, безъ сомнѣнія, во Франціи. Во Франціи же она и существовала дольше всего. Употребленіе марокъ исчезало лишь весьма медленно. Въ эпоху Людовика XIV оно еще было въ ходу для провѣрки счетовъ, по крайней мѣрѣ, во Франціи [68]), и всякій, вѣроятно, вспомнитъ въ связи съ этимъ первую сцену „Мнимаго больного" [69]). Академія надписей должна была, согласно своимъ статутамъ [70]), устанавливать на каждый годъ девизы для счетныхъ марокъ. Въ 1777 году Г. Леклеръ, графъ де Бюффинъ [71]) расхваливаетъ еще ихъ удобство для женщинъ и тѣхъ, кто не умѣетъ или не желаетъ писать. Лишь къ концу XVIII вѣка ими перестаютъ пользоваться во Франціи [72]) для счета; ихъ употребляютъ лишь для игры.

Такимъ же точно образомъ въ теченіе долгаго времени на западѣ пользовались римскими цыфрами. Разсчетная палата ихъ употребляла еще въ XVIII вѣкѣ [73]). Въ настоящее время эти цыфры употребляются только для обозначенія датъ на надписяхъ, часовъ на нашихъ часахъ, томовъ какого-нибудь произведенія.

9. Десятеричное счисленіе. Позиціонный принципъ.— Наша письменная десятеричная нумерація основана на употребленіи девяти значковъ или цыфръ, представляющихъ числа одинъ, два, три... девять, затѣмъ на весьма важномъ принципѣ, именно, принципѣ значенія этихъ цыфръ въ зависимости отъ занимаемаго ими положенія (позиціоннаго принципа) и на введеніи нуля, знака, замѣняющаго отсутствующія цыфры. Она представляетъ рѣшительный шагъ впередъ, такъ какъ дозволяетъ написать любое число съ помощью 9 выбранныхъ цыфръ и нуля [74]). Наша устная десятеричная система слѣдуетъ довольно близко за нашей письменной десятеричной системой [75]).

Очевидно, можно примѣнить позиціонный принципъ къ любой системѣ нумераціи [76]). Чтобы представить себѣ число въ системѣ съ основаніемъ n, достаточно ввести, помимо нуля, $n—1$ цыфръ [77]). Бинарная (или діадическая) система, имѣющая основаніемъ 2, пользуется лишь нулемъ и цыфрой, представляющей единицу [78]). Если стать на точку зрѣнія механизма ариѳметическихъ дѣйствій, то это—наипростѣйшая изъ всѣхъ системъ нумерацій [79]). Ученые отмѣтили [80]) выгоды, которыя представляли бы или съ теоретической точки зрѣнія или для счета различныя основанія [81]), въ частности [82]), основанія 4 и 8, изъ которыхъ второе было бы очень удобно для музыкальнаго обозначенія [83]).

Среди индусовъ Аріабхата (Aryabhata, род. въ 475 г.), кажется, зналъ уже позиціонный принципъ нумераціи [84]). Со временъ Брамагупты (Brahmagupta, род. въ 598 г.) навѣрное ввели нуль, какъ число, и пытались подчинить опредѣленнымъ правиламъ вычисленія, производимыя съ этимъ числомъ [85]). Но до сихъ поръ не удалось встрѣтить цыфры 0 ни въ одномъ индусскомъ документѣ, предшествующемъ VIII вѣку [86]). Индусы называли нуль „kha“ или „Soûnya“, что́ означаетъ „пространство (пустое)“ или „пустое (не быть ничѣмъ)“.

Начиная съ завоеваній Александра, греческое вліяніе на индусскія сочиненія безспорно. Съ другой стороны, безспорно и то, что нуль употреблялся греками въ ихъ шестидесятеричной системѣ во второмъ вѣкѣ до Р. Х., чтобы указать отсутствіе градусовъ, минутъ или секундъ. Не невѣроятно поэтому, что индусы заимствовали нуль у грековъ. Тѣмъ не менѣе то, что они ввели его въ десятеричную систему, составило значительный шагъ впередъ [87]).

Чтобы обозначить нуль въ своей шестидесятеричной системѣ [88]), греки употребляли теперешній знакъ его [89]) ихъ „омикронъ“—можетъ быть, какъ начальную букву слова „οὐδὲν“ (ничего). Такъ какъ греки заимствовали у вавилонянъ ихъ шестидесятеричную систему, то не невозможно, что употребленіе нуля возникло у вавилонянъ [90]). Ассиріологамъ, во всякомъ случаѣ, до сихъ поръ не удалось найти еще никакого слѣда этого. Но трудно, кажется, допустить, чтобы вавилоняне могли всегда обходиться безъ него.

Начиная со второй половины VIII в., восточные арабы познакомились съ позиціонной нумераціей [91]). Они усвоили ее лишь медленно [92]). Однако, въ X вѣкѣ употребленіе ея было уже очень распространено среди купцовъ. Арабы называли [93]) нуль „aṣ-ṣifr". Возможно [94]), что „ṣifr" происходитъ отъ ṣaphira, арабскаго перевода санскритскаго слова soûnya. Безъ сомнѣнія, это арабское слово ṣifr дало начало вульгарно латинскому zefirum (которымъ пользовался Леонардъ Пизанскій), откуда — итальянская форма zefiro, которая, въ свою очередь, путемъ сокращенія дала начало слову zéro (нуль), введеніе коего относится къ XV вѣку [95])...

Кажется, твердо установлено, что позиціонная нумерація вмѣстѣ съ употребленіемъ нуля проникла въ латинскую Европу лишь въ XII вѣкѣ благодаря переводу арабскихъ трактатовъ по ариѳметикѣ, въ частности, благодаря переводу [96]) искусства счета (Algoritmi de numero Indorum) (Alkhovaresmî) (первая половина IX вѣка).

Но уже въ XI вѣкѣ встрѣчаются въ манускриптахъ 9 цыфръ [97]) Гербертъ [98]) и абакисты [99]) пользовались ими еще до переводовъ арабскихъ трактатовъ, въ особенности, чтобы помѣтить счетныя марки абака. Система абакистовъ отличалась отъ системы алгориѳмиковъ [100]), учениковъ арабовъ, въ томъ отношеніи, что у нихъ не было нуля. Они, какъ и послѣдніе, примѣняли позиціонный принципъ, но столбцы, начерченные напередъ и носившіе названія единицы, десятка, сотни..., заполнялись счетными марками, помѣченными цыфрами 1, 2, 3 . . . 9. Поэтому въ ихъ системѣ, чтобы писать числа, были необходимы столбцы. Въ XII вѣкѣ [101]) этотъ методъ былъ еще наиболѣе распространеннымъ. Но, начиная съ XIII вѣка, пользованіе имъ уменьшается, а въ XIV онъ совершенно исчезаетъ. Происхожденіе этого метода неизвѣстно. Во всякомъ случаѣ, не невозможно, что въ X вѣкѣ знали уже на латинскомъ Западѣ коечто объ арабскомъ методѣ и что, не понимая всего его значенія, пытались преобразовать римскія абаки, къ которымъ привыкли, въ абаки съ цыфрами.

Позиціонная нумерація была извѣстна [102]) въ Византіи еще задолго до того, какъ греческій монахъ Максимъ Плануди [103]) написалъ свою „Ариѳметику“ [104]). Пользованіе ею было, однако, менѣе распространено, чѣмъ на Западѣ.

Вопросъ о происхожденіи формы нашихъ цыфръ далеко не разъясненъ. Усложняетъ его въ особенности то, что у всѣхъ народовъ форма цыфръ замѣтно измѣнялась [105]) и что она стала, приблизительно, окончательной [106]) лишь послѣ открытія книгопечатанія. Извѣстно только то, что наши теперешнія цыфры происходятъ, повидимому, отъ особыхъ знаковъ, апексовъ (apices) [107]), которыми пользовались абакисты, и что эти апексы и цыфры, называвшіяся gobâr, которыми пользовались западные арабы въ концѣ X вѣка, представляютъ большое сходство. Цыфры gobâr имѣютъ нѣкоторыя общія черты съ цыфрами восточныхъ арабовъ. Впрочемъ, эти послѣднія заимствовали свои цыфры у индусовъ. Но индусы, кажется, пользовались цыфрами лишь въ эпоху, когда они должны были навѣрное быть въ соприкосновеніи съ греческой цивилизаціей [109]).

Такъ же темно происхожденіе названій цыфръ. Извѣстно только, что названія апексовъ восточнаго происхожденія.

Слово цыфра само означало первоначально „нуль“. Какъ и соотвѣтствующее нѣмецкое слово „Ziffer“; оно, очевидно, происходитъ отъ арабскаго слова „ṣifr“. Лишь начиная съ XVI вѣка [110]), слово „цыфра“ получило теперешнее болѣе широкое значеніе. Прежде наши цыфры назывались „фигурами“ (figures, figurae, Figuren).

Какъ и у арабовъ, позиціонная нумерація лишь медленно распространилась въ христіанскихъ странахъ. Самая старинная монета [111]), на которой встрѣчаются наши цыфры, а не римскіе цыфры—это, кажется, одна маленькая серебряная монета отъ 1458 г. Лишь съ конца XVI вѣка начинаютъ встрѣчаться наши цыфры въ церквахъ, на надгробныхъ надписяхъ [112]). Пагинація книгъ съ помощью нашихъ цыфръ встрѣчается, можетъ быть, впервые въ одномъ изданіи Петрарки [113]), напечатанномъ въ Кельнѣ въ 1471 году. Въ концѣ XV вѣка и особенно въ XVI значительно возрастаетъ число людей, умѣющихъ писать. Лишь тогда начинаетъ дѣйствительно укрѣпляться въ нашихъ странахъ наша позиціонная нумерація.

Прямыя и обратныя дѣйствія.

10. Общія замѣчанія насчетъ дѣйствій. Наука, занимающаяся отношеніями чиселъ между собой, называется ариѳметикой [114]). Исчислять [115]) (calculer) это значитъ выводить [116]) изъ чиселъ, данныхъ въ нѣкоторой системѣ нумераціи съ даннымъ основаніемъ, искомыя числа, написанныя въ той же системѣ.

Въ ариѳметикѣ удобно обозначать любое число нѣкоторой буквой, полагая, что эта буква будетъ обозначать одно и то же единственное число въ предѣлахъ даннаго вопроса. Первые слѣды ариѳметическаго исчисленія съ помощью буквъ встрѣчаются у грековъ [117]). Ихъ встрѣчается больше у индусовъ [118]). Арабы въ этомъ отношеніи сдѣлали лишь мало успѣховъ по сравненію со своими предшественниками. У восточныхъ арабовъ употребленіе символовъ датируетъ съ эпохи появленія трактата Aljebr walmoukâbala, составленнаго Алховаресми (Alkhovaresmî) [119]). У западныхъ арабовъ символы появляются лишь въ ту же эпоху, что̀ у западныхъ христіанъ (XII вѣкъ). Въ XV вѣкѣ Алкалсади (Alkalşâdi) [120]) увеличиваетъ число этихъ символовъ.

Исчисленіе въ собственномъ смыслѣ слова съ помощью буквъ, означающихъ какъ извѣстныя количества, такъ и неизвѣстныя количества, употребленіе знака [121]) равенства [122]) $=$, знаковъ [123]) неравенства $>$, $<$ и знаковъ дѣйствія восходятъ до XV вѣка и сперва распространились въ Германіи (Регіомонтанусъ) и въ Италіи. Рѣшительный шагъ былъ сдѣланъ Франсуа Віетой [124]), который систематически замѣщалъ алгебру чиселъ алгеброй символовъ. Его преемники ограничились лишь тѣмъ, что замѣнили его довольно сложныя обозначенія болѣе простыми, болѣе практичными и болѣе изящными обозначеніями [125]). Начиная съ Л. Эйлера, ариѳметическій символизмъ остался почти неизмѣннымъ.

Мы уже говорили о равенствѣ двухъ натуральныхъ чиселъ и о дѣйствіяхъ [116]) исчисленія надъ этими числами [126]). Идеи равенства и дѣйствій распространяются и на другіе предметы, помимо натуральныхъ чиселъ. Замѣтимъ, что всякое опредѣленіе равенства [127]) должно удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) $a=a$; 2) равенство $a=b$ влечетъ за собой равенство $b=a$; 3) равенства $a=c$, $b=c$ влекутъ за собой $a=b$. При послѣдовательныхъ расширеніяхъ понятія числа необходимо удовлетворить этимъ условіямъ [128]).

Всякое дѣйствіе состоитъ въ томъ, чтобы вывести изъ нѣсколькихъ данныхъ предметовъ какой-нибудь предметъ или какую-нибудь систему предметовъ. Дѣйствіе называется однозначнымъ (univoque), когда оно имѣетъ лишь одинъ результатъ. Всѣ дѣйствія, которыя опредѣляютъ въ ариѳметикѣ, однозначны. Слѣдовательно, каждое изъ нихъ допускаетъ лишь одинъ результатъ и должно дать равные результаты, если замѣнить наши данныя равными данными [129].

Пусть знакъ $\uparrow$ означаетъ какое-нибудь дѣйствіе, производимое надъ двумя какими-нибудь количествами a, b, результатъ котораго есть нѣкоторое опредѣленное количество. Это дѣйствіе называется коммутативнымъ, когда мы имѣемъ $a \uparrow b = b \uparrow a$. Оно называется ассоціативнымъ, когда—полагая, что c означаетъ какое-нибудь третье количество—мы имѣемъ $[a \uparrow b] \uparrow c = a \uparrow [b \uparrow c]$, причемъ подъ каждой скобкой мы разумѣемъ результатъ дѣйствія, указаннаго въ скобкѣ. Пусть далѣе $\downarrow$ означаетъ какое-нибудь другое дѣйствіе. Тогда это послѣднее называется дистрибутивнымъ по отношенію къ первому, если мы имѣемъ $[a \uparrow b] \downarrow c = [a \downarrow c] \uparrow [b \downarrow c]$. Первое дѣйствіе будетъ дистрибутивнымъ по отношенію ко второму, если мы имѣемъ: $[a \downarrow b] \uparrow c = [a \uparrow c] \downarrow [b \uparrow c]$.

Легко, впрочемъ, понять, что можно составить теорію дѣйствій [130], удовлетворяющихъ предыдущимъ законамъ или нѣкоторымъ изъ нихъ и примѣнимыхъ или къ числамъ, понимаемымъ шире, чѣмъ мы это дѣлали до сихъ поръ, или къ другимъ предметамъ, помимо чиселъ. Это и дѣлаютъ въ частности въ формальной ариѳметикѣ, логическомъ исчисленіи и алгебрѣ понятій [131]. Можно, напр., условиться, что $a \uparrow b$ означаетъ все то, что есть одновременно a и b, $a \downarrow b$ означаетъ все то, что̀ есть или a, или b. Законъ дистрибутивности имѣетъ тогда мѣсто здѣсь въ обоихъ приведенныхъ выше видахъ.

11. Принципъ перманентности. Допустимъ, что мы опредѣлили нѣкоторый классъ A чиселъ или предметовъ и опредѣлили для предметовъ этого класса A равенство, неравенство и нѣкоторыя однозначныя дѣйствія. Пусть $a \uparrow b$ означаетъ одно какое-нибудь изъ этихъ дѣйствій, которое, будучи произведено надъ двумя любыми предметами a, b класса A, имѣетъ всегда результатомъ нѣкоторый предметъ c того же самаго класса A. Это дѣйствіе будетъ называться **возможнымъ** относительно класса A.

Теперь, если намъ данъ результатъ c дѣйствія и одно изъ двухъ чиселъ a, b, то можно поставить себѣ задачей найти другое число. Отсюда получаются **два обратныхъ** дѣйствія по отношенію къ данному дѣйствію, разсматриваемому, какъ **прямое**. Если, напр., намъ даны c и b, то можно представить дѣйствіе, дающее a, символомъ $c \downarrow b$. Иными словами, дѣйствіе $c \downarrow b$ опредѣляется равенствомъ $[c \downarrow b] \uparrow b = c$.

Прямое дѣйствіе можетъ быть всегда возможнымъ, и все-таки обратное дѣйствіе можетъ оказаться таковымъ лишь при извѣстныхъ условіяхъ. Въ томъ случаѣ, когда оно невозможно, мы можемъ сохранить то же самое символическое обозначеніе $c \downarrow b$, которое служитъ для обозначенія результата его, когда оно возможно,—можемъ далѣе составить изъ этихъ символическихъ обозначеній и изъ чиселъ или предметовъ класса A новый классъ чиселъ или предметовъ B,—можемъ затѣмъ опредѣлить, каково равенство, неравенство и дѣйствія надъ предметами класса B такимъ образомъ, что эти опредѣленія сводятся къ опредѣленіямъ касательно элементовъ класса A, когда мы оперируемъ этими элементами, а не символами, дополняющими классъ B. При выборѣ этихъ опредѣленій мы руководимся, кромѣ того, тѣмъ соображеніемъ, чтобы по мѣрѣ возможности сохранить формальные законы, примѣняемые къ элементамъ класса A.

Когда предметы класса A суть **числа**, то часто соглашаются называть также **числами** всѣ предметы класса B, и тогда говорятъ—правильно или неправильно,—что **расширили** идею числа. Можно, поступая такимъ же образомъ и дальше, получить послѣдовательныя расширенія идеи числа.

Этотъ пріемъ получилъ названіе принципа перманентности [133]).

Дѣйствія порядка одинъ.

12. Сложеніе. Количественное число, разсматриваемое, какъ нѣкоторое наглядное представленіе, предполагаетъ понятіе сложенія. Пусть даны два комплекса (чиселъ). Можно представить себѣ, что каждая единица остается отдѣльной отъ другихъ единицъ, а комплексы эти соединены въ одинъ единственный комплексъ, частями котораго являются первоначальные комплексы. Полученный такимъ образомъ комплексъ (который не можетъ быть численно равенъ одной изъ своихъ частей) есть сумма первоначальныхъ комплексовъ. Его число есть сумма данныхъ чиселъ [134]). Съ этой точки зрѣнія считаютъ очевиднымъ, что сумма не зависитъ отъ порядка своихъ частей. Она больше, чѣмъ каждая изъ ея частей, и каждая часть меньше, чѣмъ сумма.

Любой конечный комплексъ можно составить, соединяя предметы по одному, или уничтожить, отнимая предметы по одному. Натуральный рядъ чиселъ мы получаемъ, исходя изъ числа одинъ [135]). Слѣдующее число есть одинъ и одинъ... Каждое число мы получаемъ, прибавляя одинъ къ предыдущему числу. Каждое число есть часть слѣдующихъ за нимъ чиселъ. Каждое число больше, чѣмъ предшествующія ему числа.

Чтобы указать, что нѣкоторое число c есть сумма двухъ чиселъ a и b, пишутъ $c = a + b$. О знакѣ $+$, отдѣляющемъ оба члена a и b суммы c, можно предполагать, что онъ заключаетъ въ себѣ идею послѣдовательности. Онъ произносится „плюсъ“ [136]).

Изъ постулата инваріантности числа, заключеннаго въ идеѣ счета, вытекаетъ, съ одной стороны, что существуетъ лишь одна сумма двухъ чиселъ (однозначность сложенія), а съ другой, что $a + b$ равно $b + a$

(**коммутативность**[137]) сложенія)[138]). Изъ опредѣленія неравенства (бо̀льшій и меньшій) и изъ опредѣленія сложенія непосредственно вытекаетъ, что сумма больше, каждой изъ своихъ частей (она больше на число единицъ, содаржащихся въ другой части). Когда a больше, чѣмъ b, то a можно разсматривать, какъ сумму двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно есть b. Подобно тому, какъ существуетъ одна лишь сумма двухъ чиселъ a и b, подобно этому существуетъ лишь одно число b, которое, прибавленное къ числу a, даетъ въ суммѣ число c, большее, чѣмъ a.

Идея счета влечетъ за собой равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$, гдѣ скобки[139]) означаютъ, что предварительно сложили заключенныя въ нихъ числа. Выражаемый этимъ равенствомъ законъ называется **ассоціативнымъ**[140]).

Если къ суммѣ двухъ чиселъ a_1, a_2 прибавляютъ третье число a_3; если къ полученной такимъ образомъ суммѣ прибавляютъ четвертое число a_4, и т. д. любое конечное число разъ, то послѣдняя сумма $s=\{[(a_1+a_2)+a_3]+\ldots\}+a_n$ не зависитъ отъ порядка, въ которомъ взяли числа $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$. Это доказываютъ, примѣняя вмѣстѣ оба закона ассоціативности и коммутативности. Такимъ образомъ ничто не мѣшаетъ назвать черезъ s **сумму** всѣхъ чиселъ $a_1, a_2, \ldots a_n$. Эту сумму обозначаютъ просто символомъ $s=a_1+a_2+\ldots a_n$. Каждое изъ чиселъ $a_1, a_2 \ldots a_n$ есть **членъ** суммы.

Можно также опредѣлить сложеніе и установить его свойства, становясь на порядковую точку зрѣнія. Въ этомъ случаѣ исходнымъ пунктомъ является натуральный рядъ. Прибавить 1 къ числу a,—это значитъ замѣнить a слѣдующимъ за нимъ **номеромъ**. Поэтому, если знаютъ, что такое a, то знаютъ также, что такое $a+1$. Если предположить, что опредѣлена сумма $a+b$,

Одесская Общественная Библіотека

полученная черезъ прибавленіе числа a къ числу b, то суммой, полученной черезъ прибавленіе числа $b+1$ къ a, будетъ, по опредѣленію, число, слѣдующее за $a+b$. Иными словами, мы имѣемъ по опредѣленію $a+(b+1) = (a+b)+1$.

Согласно съ этимъ [141]), каково бы ни было число b, сумма $a+b$ опредѣлится, переходя отъ одного члена къ слѣдующему. Изъ этихъ опредѣленій выводятъ путемъ индукціи теоремы, выражаемыя равенствами:

$$a+b=b+a,\quad a+(b+c)=(a+b)+c.$$

Въ натуральномъ ряду чиселъ не фигурируетъ знакъ 0. Но ничто не мѣшаетъ поставить его во главѣ этого ряда и примѣнить къ опредѣленію $0+a$ общій пріемъ, благодаря которому можно разсматривать a, какъ результатъ дѣйствія $0+a$. Къ этому опредѣленію можно затѣмъ присоединить другое опредѣленіе, выражаемое равенствомъ $a+0=a$, имѣющимъ силу даже, когда a есть 0.

Словомъ, предложенія, касающіяся коммутативности и ассоціативности, составляютъ основныя свойства сложенія.

13. Ариѳметическая прогрессія [142]**).** Ариѳметической прогрессіей называется послѣдовательность чиселъ

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n,$$

изъ которыхъ каждое равно предыдущему числу, увеличенному на одно и то же число, называемое разностью прогрессіи. Если обозначить эту разность черезъ r, то для $i=2, 3, \ldots, n$, имѣемъ:

$$a_i = a_{i-1} + r = a_1 + (i-1)\, r.$$

Если обозначить черезъ s_n сумму n членовъ a_1, $a_2, \ldots a_n$ ариѳметической прогрессіи, имѣющей разность r, то получимъ:

$$s_n = \frac{1}{2} n\,(a_1 + a_n) = n\left[a_1 + \frac{1}{2}(n-1)\,r\right].$$

Въ частномъ случаѣ, когда $a_1 = 1$, говорятъ (по причинѣ соотвѣтственной геометрической интерпретаціи), что s_n есть n-ое многоугольное число съ $r+2$ сторонами. Вообще это число означается символомъ $P_n^{(r+2)}$. Такъ n-ое треугольное число есть $P_n^{(3)} = \frac{1}{2} n(n+1)$; n-ое квадратное число $P_n^{(4)} = n^2$; n-ое пятиугольное число $P_n^{(5)} = \frac{1}{2} n(3n-1)$; n-ое шестиугольное число $P_n^{(6)} = n(2n-1)$ . . .
Вообще n-ое многоугольное число съ r сторонами будетъ

$$P_n^{(r)} = n + \frac{1}{2}(n-1)(r-2).$$

Въ томъ случаѣ, когда n отрицательно или равно нулю, это равенство [143]) служитъ для опредѣленія $P_n^{(r)}$ при всякомъ цѣломъ $r \geqq 3$.

Фигурными числами порядка 1 называютъ натуральныя числа 1, 2, 3, . . .; фигурными числами порядка 2 называютъ треугольныя числа 1, 3, 6, . . .; сумма n первыхъ фигурныхъ чиселъ порядка 1 есть n-ое фигурное число порядка 2. Такимъ же образомъ говорятъ, что сумма n первыхъ фигурныхъ чиселъ порядка 2 представляетъ n-ое пирамидальное, или, точнѣе, тетраэдральное число, или, еще иначе, n-ое фигурное число порядка 3, и затѣмъ послѣдовательно опредѣляютъ тѣмъ же самымъ способомъ фигурныя числа любого (цѣлаго положительнаго) порядка m, называя n-ымъ фигурнымъ числомъ порядка m сумму n первыхъ фигурныхъ чиселъ порядка $m-1$.

14. Вычитаніе. Вычитаніе есть обратное дѣйствіе. Его задача заключается въ томъ, чтобы при данныхъ числахъ a, b найти неизвѣстное число x, удовлетворяющее равенству $a = b + x$.

Подобное равенство, содержащее одну или нѣсколько буквъ, какъ x въ данномъ случаѣ, которыя представляютъ числа съ неизвѣстнымъ значеніемъ [144]), равенство, вѣрное лишь для нѣкоторыхъ значеній этихъ неизвѣстныхъ, называютъ уравненіемъ. Рѣшить уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ это значить опредѣлить значеніе, которое должно дать этой неизвѣстной, чтобы удовлетворить уравненію. Напротивъ того, если равенство вѣрно для всѣхъ значеній входящихъ въ него буквъ, представляющихъ числа, значеніе которыхъ неизвѣстно, то оно называется тождествомъ.

Проблема вычитанія возможна лишь въ томъ случаѣ, когда a больше b. (Если вводятъ 0, какъ число, то должно сказать: проблема вычитанія возможна лишь въ томъ случаѣ, когда a больше или равно b, и въ этомъ послѣднемъ случаѣ x равно 0). Проблема, когда она возможна, допускаетъ лишь одно рѣшеніе: это—разность между пассивнымъ числомъ a и активнымъ числомъ b. Она изображается черезъ $a - b$. Знакъ—произносится „минусъ“ [145]). Число $a - b$ опредѣляется формулой

$$b + (a - b) = a.$$

Изъ опредѣленія вычитанія и его однозначности выводятъ равенство $(a + b) - b = a$.

Символъ $a - b$, когда a меньше b, не имѣетъ для насъ пока никакого смысла. Равенства

$$a = b + c, \quad a - b = c, \quad a - c = b$$

имѣютъ одинъ и тотъ же смыслъ; если одно изъ чиселъ a, b, c неизвѣстное, то это неизвѣстное можетъ быть такимъ образомъ изолировано.

15. Сочетаніе сложенія съ вычитаніемъ. Если къ свойствамъ сложенія (ассоціативность, коммутативность) присоединить опредѣленіе вычитанія, то можно установить три формулы

$$a + (b - c) = (a + b) - c\,; \quad a - (b + c) = (a - b) - c\,;$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c\,;$$

Здѣсь, конечно, предполагается, что $b-c$ имѣетъ смыслъ въ первой формулѣ, $a-(b+c)$ во второй и $b-c$, $a-b$ въ третьей. Если принять эти допущенія, то указываемыя равенства можно читать или слѣва направо, или справа налѣво. Если къ нимъ прибавить формулу ассоціативнаго закона для сложенія, то получаются либо правила для прибавленія къ какому-нибудь числу (или отниманія отъ него) суммы или разности, либо правила для прибавленія какого-нибудь числа къ суммѣ или разности (или отниманія его отъ нихъ). Отсюда мы заключаемъ, что если требуется рядъ сложеній или вычитаній, то дѣйствія можно произвести въ любомъ порядкѣ, лишь бы они были возможны въ этомъ порядкѣ. Наконецъ, выводятся правила относительно неравенства, которое можно получить путемъ почленнаго вычитанія, либо изъ равенства и неравенства, либо изъ двухъ неравенствъ.

При записи формулъ ариѳметики установилась—по отношенію къ дѣйствіямъ сложенія и вычитанія—привычка писать числа и знаки дѣйствій въ томъ порядкѣ, въ какомъ желаютъ ихъ производить, идя слѣво направо, не употребляя скобокъ. Знакъ $+$ или $-$, поставленный передъ скобками, означаетъ, что дѣйствія надъ количествами, заключенными въ скобкахъ, должны быть произведены до сложенія или вычитанія, указываемаго этимъ знакомъ [148]). Поэтому законъ ассоціативности и три предыдущія формулы должны писаться

$$a+(b+c)=a+b+c;\quad a+(b-c)=a+b-c$$
$$a-(b+c)=a-b-c;\quad a-(b-c)=a-b+c.$$

16. Нуль. Если нуль не ввели, какъ число, то его можно ввести, примѣняя принципъ перманентности (№ **11**).

Замѣтимъ сперва—взявъ тотъ случай, когда классъ A № **11** состоитъ изъ натуральныхъ чиселъ,—что изъ законовъ сложенія и вычитанія легко вывести, когда a, b, n означаютъ такія натуральныя числа, что $a > b > n$, формулу

$$a - b = (a \pm n) - (b \pm n),$$

гдѣ знаки соотвѣтствуютъ взаимно другъ другу. Если желать продолжать писать эту формулу, когда b равно a, то слѣдуетъ принять, что $(a \pm n) - (a \pm n)$ равно $(a - a)$ и, слѣдовательно, что всѣ символы $(a - a)$ равны между собою, каково бы ни было a. Это опредѣленіе удовлетворяетъ всѣмъ условіямъ, требуемымъ отъ опредѣленія равенства. Естественна мысль представить всѣ эти символы, равные $(a - a)$, однимъ и тѣмъ же знакомъ. За знакъ этотъ [147]) берутъ 0, соглашаются называть его также числомъ и ему даютъ наименованіе нуля.

Такимъ образомъ мы получили классъ чиселъ B, болѣе обширный, чѣмъ классъ A натуральныхъ чиселъ. Нуль въ этомъ классѣ B считается меньшимъ всѣхъ натуральныхъ чиселъ, которыя разсматриваются, какъ большія, чѣмъ онъ.

Если желаютъ—въ томъ случаѣ, когда b равно c—продолжать писать формулу

$$a + (b - c) = a + b - c,$$

то слѣдуетъ опредѣлить сумму $a + (b - b)$ или $a + 0$, какъ равную $a + b - b$, т. е., a. Если желать продолжать примѣнять законъ коммутативности, то слѣдуетъ опредѣлить сумму $(b - b) + a$ или $0 + a$, какъ равную a. Въ этихъ формулахъ a есть натуральное число. Въ силу принципа перманентности ихъ продолжаютъ писать, когда a есть нуль. Если, наконецъ, желать продолжать писать формулу, опредѣляющую вычитаніе, то слѣдуетъ писать $a - 0 = a$, причемъ a можетъ означать либо натуральное число, либо нуль.

17. Отрицательныя числа. Принципъ перманентности позволяетъ также ввести отрицательныя числа. Обозначимъ для этого сначала черезъ A классъ, образованный изъ однихъ лишь чиселъ 0, 1, 2, 3... Будемъ на время пользоваться буквами a, b. . . . лишь для обозначенія такихъ чиселъ. Предположимъ, что для этихъ чиселъ установлены свойства сложенія и вычитанія, и возьмемъ опять для знаковъ $+$, $-$ значеніе, относящееся къ этимъ дѣйствіямъ. Символъ $a-b$ имѣетъ смыслъ лишь тогда, когда a больше или равно b. Затѣмъ соглашаются—независимо отъ того, больше ли a, равно ли, или меньше b—называть *числомъ* запись $a-b$, образованную въ дѣйствительности съ помощью двухъ конститутивныхъ чиселъ a, b, которыя, впрочемъ, не играютъ одной и той же роли. *Къ этимъ числамъ новаго вида должны быть примѣнены всѣ опредѣленія.*

Сперва расширяютъ понятіе равенства. Когда два символа $a-b$, $a'-b'$ имѣютъ смыслъ, то изъ предложеній, касающихся сложенія и вычитанія, легко вывести, что равенство $a+b'=a'+b$ есть необходимое и достаточное условіе того, чтобы оба эти символа представляли одно и то же число. Естественна мысль *опредѣлить* во всѣхъ случаяхъ этимъ условіемъ равенство символовъ $a-b$, $a'-b'$, замѣтивъ, что это опредѣленіе удовлетворяетъ условіямъ, требуемымъ отъ всякого опредѣленія равенства. Отсюда слѣдуетъ, что если $b-a$ и $b'-a'$ равны одному и тому же числу c (причемъ a, a' соотвѣтственно меньше b, b'), то оба новыхъ числа $a-b$, $a'-b'$ равны. Они равны $0-c$. Вмѣсто $0-c$ соглашаются писать $-c$, и въ этой сокращенной формѣ могутъ быть представлены новыя числа, которыя называютъ *отрицательными числами* [148]). Такимъ же образомъ на мѣсто $0+c$ или c пишутъ $+c$. Такимъ числамъ, какъ c или $+c$, придаютъ въ противоположность отрицательнымъ числамъ названіе положительныхъ чиселъ. Изъ всѣхъ положительныхъ и отрицательныхъ чиселъ и числа 0 образуютъ классъ B, элементы котораго называются **ц ѣ л ы м и ч и с л а м и** [149]).

Сумма двухъ чиселъ $a - b$, $a' - b'$ есть число $a'' - b''$, конститутивныя числа котораго суть $a'' = a + a'$, $b'' = b + b'$. Чтобы это опредѣленіе было правомѣрнымъ [150]), оно должно непосредственно быть дополненнымъ замѣчаніемъ, что если въ какой - нибудь суммѣ замѣняютъ члены равными членами, то получаютъ равную сумму: сложеніе остается однозначнымъ и, какъ легко видѣть, коммутативнымъ и ассоціативнымъ.

Въ силу этихъ соглашеній, означая черезъ c разность между бо́льшимъ и меньшимъ изъ двухъ чиселъ a, b, всякое число $a-b$ можно будетъ написать въ видѣ $+c$ или $-c$, въ зависимости отъ того, больше ли a, чѣмъ b, или меньше. Въ обоихъ случаяхъ c есть **а б с о л ю т н о е з н а ч е н і е** $a-b$. О двухъ числахъ $+c$ и $-c$ говорятъ, что они **р а в н ы и с ъ о б р а т н ы м и з н а к а м и**, или лучше, 0, что они **с и м м е т р и ч н ы**. Число, симметричное съ 0, есть 0; $+0$ и -0 имѣютъ тотъ же смыслъ, что 0.

Чтобы ярко выдвинуть противоположность между абсолютнымъ значеніемъ цѣлыхъ чиселъ и самими этими цѣлыми числами, о послѣднихъ говорятъ, что они **о т н о с и т е л ь н ы** (или также **к а ч е с т в е н н ы**).

Знаки $+$, $-$ сначала разсматривались, какъ знаки дѣйствія. Теперь же ихъ разсматриваютъ, какъ **с в я з а н н ы е** (attachés) [151]) съ абсолютнымъ значеніемъ разсматриваемыхъ чиселъ [152]). Такъ, согласно предыдущему, можно во всѣхъ случаяхъ разсматривать $a-b$, какъ сумму a и $-b$. Отсюда слѣдуетъ, что если мы имѣемъ такое выраженіе, какъ $a-b+c-d$, то его можно разсматривать, какъ сумму, полученную отъ прибавленія къ a отрицательнаго числа $-b$, прибавленія къ результату положительнаго числа c и, наконецъ, прибавленія къ новому результату отрицательнаго числа $-d$. Такое выраженіе называется **алгебраической суммой**, а члены ея суть a,—b, c,—d. Въ алгебраической суммѣ можно измѣнить порядокъ членовъ.

До сихъ поръ буквы представляли у насъ лишь натуральныя числа или нуль. Желательно умѣть представить буквой (безъ знака) любое относительное цѣлое число[153]). Если a представляетъ подобное число, то соглашаются представлять черезъ +a то же самое число, что́ a, и это соглашеніе сообразно съ тѣмъ, что́ было сказано выше въ томъ случаѣ, когда a есть натуральное число. Напротивъ, a представляетъ число, симметричное съ числомъ a. Абсолютное значеніе a изображаетъ [154]) черезъ [a]. Знаки + и —, фигурирующіе въ символахъ +a и —a, суть **видимые знаки** (Signes apparents) чиселъ +a и —a. Они также **истинные знаки** (signes vrais), если a есть натуральное число или положительное число. Напротивъ, если a отрицательное, то числа +a и —a представляютъ соотвѣтственно отрицательное и положительное число, и ихъ истинные знаки суть соотвѣтственно — и +.

Чтобы изобразить сумму нѣсколькихъ относительныхъ цѣлыхъ чиселъ данныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ, пишутъ символы чиселъ, которыя складываютъ, ставя знакъ + передъ тѣми изъ этихъ символовъ, которые не имѣютъ видимаго знака. Но установилась привычка не употреблять видимаго знака перваго символа, когда этотъ знакъ есть +. Такимъ образомъ a—b+c означаетъ сумму, полученную отъ прибавленія къ числу a или +a числа —b, а затѣмъ числа +c къ результату. Въ томъ случаѣ, когда a, b, c означаютъ абсолютныя числа и когда дѣйствія въ указываемомъ порядкѣ возможны, этотъ самый символъ означаетъ также, какъ мы видимъ, результатъ ряда дѣйствій, которыя должно произвести надъ этими абсолютными числами. Но здѣсь нечего опасаться путаницы, разъ

Одесская Общедоступная Библиотека

отожествляютъ абсолютныя числа и числа положительныя. Такъ, въ выраженіи $a+b$, если связать знакъ $+$ съ символомъ b, то мы имѣемъ дѣло съ суммой $+a$ и $+b$. Если же разсматривать знакъ $+$, какъ знакъ сложенія, то мы имѣемъ дѣло съ суммой a и b.

Теорія сложенія относительныхъ цѣлыхъ чиселъ позволяетъ также вернуть знаку $+$ его значеніе знака дѣйствія. Теорія вычитанія относительныхъ цѣлыхъ чиселъ позволяетъ такимъ же образомъ вернуть знаку $-$ его значеніе знака дѣйствія. Въ данномъ пунктѣ нашего изслѣдованія $a-b$ означаетъ сумму a и $-b$.

Если a и b суть два относительныхъ цѣлыхъ числа, то ихъ разность, по опредѣленію, есть такое число x, что мы имѣемъ: $a=b+x$. Прибавивъ $-b$ къ обоимъ членамъ этого уравненія, мы замѣчаемъ, что x можетъ быть лишь $a-b$. Затѣмъ мы замѣчаемъ, что $a-b$ дѣйствительно удовлетворяетъ уравненію $a=b+x$. Вычитаніе относительныхъ цѣлыхъ чиселъ всегда возможно и оно однозначно. Чтобы изъ какого-нибудь числа b вычесть какое-нибудь число a, къ b прибавляютъ число симметричное съ a. Число, симметричное съ какой-нибудь алгебраической суммой, получается, складывая числа, симметричныя со всѣми членами этой суммы. Сообразно съ соглашеніями, принятыми для значенія $+a$, $-a$, символъ, образованный съ помощью скобокъ, заключающихъ какое-нибудь число, первой изъ которыхъ предшествуетъ знакъ $+$ или знакъ $-$, означаетъ число, заключенное въ скобкахъ, или число, симметричное съ нимъ. Въ алгебраической суммѣ, въ которой фигурируютъ члены въ скобкахъ, можно уничтожить тѣ скобки, которымъ предшествуетъ знакъ $+$, а, измѣнивши знаки заключенныхъ въ нихъ чиселъ, также тѣ, которымъ предшествуетъ знакъ $-$. Такимъ образомъ, получаются правила, касающіяся сложенія и вычитанія алгебраическихъ суммъ.

Объ относительномъ цѣломъ числѣ *a* говорятъ, что оно больше относительнаго цѣлаго числа b, когда разность a — b положительна. Это опредѣленіе удовлетворяетъ условіямъ, требуемымъ отъ опредѣленія неравенства, и влечетъ за собой заключенія касательно сложенія или вычитанія неравенствъ [155]).

Отвлеченныя относительныя цѣлыя числа можно ввести также съ помощью именованныхъ относительныхъ чиселъ, пытаясь различить такія количества, какъ долгъ и имущество, или же равные промежутки времени, отсчитываемые въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, начиная отъ какого-нибудь начальнаго момента. Для этого передъ числомъ, измѣряющимъ разсматриваемое количество, ставятъ различный знакъ, напр., + или — въ зависимости отъ того, къ какому виду принадлежитъ это количество. Число называется положительнымъ или отрицательнымъ, въ зависимости отъ того, предшестуетъ ли ему знакъ + или знакъ —. Абсолютное значеніе какого-нибудь числа это — натуральное число, полученное, если отбросить знакъ, предшествующій этому числу. Два числа равны, когда равны ихъ абсолютныя значенія и когда имъ предшествуетъ одинъ и тотъ же знакъ. Съ этой точки зрѣнія сумма двухъ относительныхъ чиселъ есть, по опредѣленію, такое относительное число, абсолютнымъ значеніемъ котораго является сумма абсолютныхъ значеній этихъ чиселъ, если они одного знака, разность между бо́льшимъ и меньшимъ изъ этихъ абсолютныхъ значеній, если числа различныхъ знаковъ, 0, если числа a, b симметричны. Въ первомъ случаѣ знакъ суммы это—знакъ, общій a, b. Во второмъ случаѣ, это — знакъ того изъ обоихъ чиселъ a, b, которое имѣетъ большее абсолютное значеніе. Если одно изъ двухъ чиселъ a, b есть 0, то ихъ сумма равна другому числу. Опредѣленное такимъ образомъ дѣйствіе, очевидно, коммутативно. Можно доказать, что оно ассоціативно, какъ сложеніе абсолютныхъ чиселъ. Цѣлесообразность принятыхъ опредѣленій оправдывается непосредственно путемъ приложенія ихъ къ конкретнымъ величинамъ. Кромѣ того, эти опредѣленія легко связать съ натуральнымъ рядомъ. Но только вмѣсто того, чтобы принимать за начало этого ряда число 1 или $+1$, а самый рядъ разсматривать, какъ неопредѣленно продолжающійся путемъ возрастающихъ значеній, его разсматриваютъ, какъ безконечный въ обоихъ направленіяхъ, причемъ $+1$ предшествуетъ число 0, этому послѣднему предшествуетъ число -1, этому послѣднему число -2,... Въ этомъ случаѣ легко обобщить доказательства, касающіяся коммутативности или ассоціативности.

Дѣйствія порядка два.

18. Умноженіе. Допустимъ сперва, что мы имѣемъ дѣло съ натуральными числами. Сложеніе, въ которомъ всѣ складываемыя числа равны, называется умноженіемъ. Одно какое-нибудь изъ этихъ равныхъ чиселъ называется множимымъ, число разъ, которое оно фигурируетъ въ этой суммѣ, называется множителемъ [156]. Сама же сумма, результатъ дѣйствія, называется произведеніемъ (множимаго, пассивнаго числа, на множитель, активное число). Множитель и множимое представляютъ оба сомножителя произведенія. Когда множитель равенъ 1, то произведеніе равно множимому [157].

Если желать классифицировать дѣйствія, то умноженіе можно разсматривать, какъ дѣйствіе втораго порядка, между тѣмъ какъ сложеніе и обратное ему дѣйствіе, вычитаніе, разсматриваются, какъ дѣйствія перваго порядка.

Произведеніе представляютъ, написавъ сперва множимое, затѣмъ множитель и отдѣливъ ихъ точкой . или знакомъ $\times$ [158]) или еще безъ всякаго знака [159]). Когда оба числа написаны цыфрами, необходимо поставить знакъ. Такимъ образомъ, символы $a.b$, $a\times b$, ab представляетъ каждый сумму $a+a+a\ldots+a$ изъ b чиселъ, равныхъ каждое a. Символы 23.12, 23×12 представляютъ каждый сумму 12 чиселъ, равныхъ каждое 23.

Это опредѣленіе предполагаетъ по существу, что b есть натуральное число; оно имѣетъ смыслъ, каково бы ни было a, лишь бы было опредѣлено сложеніе, и этотъ смыслъ и будетъ принятъ для опредѣленія произведенія какого-нибудь числа на натуральное число b.

Свойства сложеніи влекутъ за собой свойства дистрибутивности [160]), выражаемыя равенствами:

$$a(b+c)=(ab)+(ac),\ (a+b)c=(ac)+(bc).$$

Сообразуясь съ установившимся обычаемъ, можно уничтожить скобки въ правыхъ частяхъ обоихъ этихъ равенствъ. Свойства эти непосредственно обобщаются на тотъ случай, когда либо множимое, либо множитель представляютъ сумму изъ 3, 4 .... чиселъ. Изъ этихъ самыхъ дистрибутивныхъ свойствъ легко, между прочимъ, вывести, что умноженіе коммутативно, иными словами, что мы имѣемъ $ab=ba$, и что оно ассоціативно, т. е., что мы имѣемъ $a(bc)=(ab)c$.

Произведеніе трехъ чиселъ a, b, c получается, умножая произведеніе первыхъ двухъ на третье. Оно пишется $a.b.c$, $a\times b\times c$ или abc, что сообразно съ правиломъ Шрёдера [146]). Произведеніе четырехъ чиселъ получается, умножая произведеніе первыхъ трехъ на четвертое, и т. д. Числа, которыя умножаются такимъ образомъ, суть множители произведенія. Въ произведеніи изъ какого-нибудь числа множителей можно измѣнить порядокъ множителей, замѣнить извѣстное число множителей ихъ произведеніемъ, или обратно.

Согласно общему опредѣленію, произведеніе a на натуральное число b равно 0, когда a есть нуль. Чтобы сохранить коммутативный характеръ дѣйствія, слѣдуетъ разсматривать произведеніе какого-нибудь числа на 0, какъ равное нулю. Въ такомъ случаѣ всякое произведеніе, въ которомъ фигурируетъ нулевой множитель, есть нуль: для подобныхъ произведеній сохраняются основныя свойства умноженія.

Если a, b означаютъ относительныя числа, то ихъ произведеніе будетъ относительнымъ числомъ, абсолютное значеніе котораго есть произведеніе абсолютныхъ значеній a, b и (истинный) знакъ котораго есть $+$ или $-$, въ зависимости отъ того, имѣютъ ли оба числа a, b одинъ и тотъ же (истинный) знакъ или же различные знаки. Отсюда и изъ предыдущихъ правилъ слѣдуетъ п р а в и л о з н а к о в ъ:

$$(+a)\ (+b) = +\ (ab) \qquad (+a)\ (-b) = -\ (ab)$$
$$(-a)\ (+b) = -\ (ab) \qquad (-a)\ (-b) = +\ (ab)$$

Въ выраженіяхъ $+(ab)$, $-(ab)$ обыкновенно откидываютъ скобки и пишутъ $+ab$, или ab, и $-ab$.

Эти опредѣленія могутъ быть связаны съ принципомъ перманентности [161]), если замѣтить сперва, что, такъ какъ положительныя числа должны быть отожествлены съ своими абсолютными значеніями, то опредѣленіе произведенія какого-нибудь числа на положительное число вытекаетъ изъ общаго опредѣленія. Что же касается далѣе опредѣленій произведенія въ случаѣ умноженія на отрицательное число, то они вытекаютъ изъ того, что желаютъ сохранить коммутативный характеръ дѣйствія. Ассоціативный характеръ дѣйствія также сохраняется.

Формула дистрибутивности $a\ (b + c) = ab + ac$ — которую въ силу коммутативности достаточно разсматривать въ этомъ видѣ—примѣнима въ силу предыдущихъ опредѣленій независимо отъ того, абсолютны ли числа a, b, c, нулевыя ли [162]) или относительныя. Она влечетъ за собой формулу

$$a(b-c) = ab - ac.$$

Эти формулы, если считаться съ законами коммутативности и читать ихъ слѣва направо или справа налѣво, содержатъ правила для умноженія какого-нибудь числа на сумму или разность, для умноженія суммы или разности на какое-нибудь число, или для выведенія какого-нибудь числа въ видѣ множителя за скобки въ суммѣ или разности произведеній, въ которыхъ это число фигурируетъ въ качествѣ множителя.

Чтобы умножить алгебраическую сумму на алгебраическую сумму, умножаютъ каждый членъ первой суммы на каждый членъ второй суммы и складываютъ частныя произведенія. Знакъ (+ или —) каждаго члена множимаго должно разсматривать, какъ связанный съ этимъ членомъ, и для всякаго частнаго произведенія должно соблюдать правило знаковъ. Когда имѣютъ дѣло съ произведеніемъ, въ которомъ одинъ изъ множителей представляетъ сумму, заключенную въ скобкахъ, то говорятъ, что *раскрываютъ скобку*. Обратная операція называется *заключеніемъ въ скобки*.

Изъ этихъ правилъ легко получаются тѣ, которыя касаются умноженія неравенствъ.

Кратными какого-нибудь числа a называются всѣ тѣ числа, которыя получаются отъ умноженія a на какое-нибудь натуральное число.

Умноженіе (прямое дѣйствіе) не вводитъ новаго вида чиселъ.

Геометрической прогрессіей называютъ всякую послѣдовательность чиселъ вида

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots\ aq^{n-1};$$

a называется *первымъ членомъ*, q—*знаменателемъ* прогрессіи. Если черезъ s_n обозначить сумму членовъ геометрической прогрессіи, то имѣемъ

$$(1-q)\ s_n = a\ (1-q^n).$$

Эта формула позволяетъ вычислить s_n, за исключеніемъ того случая, когда $q=1$. Въ этомъ случаѣ прямо видно, что

$$s_n = na.$$

19. Дѣленіе. Слово дѣленіе имѣетъ два весьма различныхъ смысла. Въ первомъ смыслѣ, когда даны два числа a (дѣлимое, пассивное число) и b (дѣлитель, активное число), дѣленіе имѣетъ цѣлью представить a въ видѣ $bq+r$, гдѣ r—одно изъ чиселъ $0, 1, 2, .., b-1$, меньше, чѣмъ b. Въ этомъ опредѣленіи предполагается, что число b есть натуральное число (за исключеніемъ 0); *a* можетъ быть натуральнымъ числомъ или относительнымъ числомъ. Въ проблемѣ этой имѣется два неизвѣстныхъ q, r, изъ которыхъ первое называется частнымъ (quotient), второе—остаткомъ (или вычетомъ). Она всегда допускаетъ рѣшеніе и только одно рѣшеніе. Когда дѣлимое есть натуральное число, то частное указываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, сколько разъ онъ можетъ быть отнятъ отъ дѣлимаго, откуда его названіе по французски (quotient отъ лат. quoties—сколько разъ). Остатокъ r указываетъ тогда результатъ этого вычитанія. Можно сказать также, что bq есть наибольшее кратное b, содержащееся въ a (меньшее или равное a). Когда r равно нулю, то это показываетъ, что a есть кратное b. Говорятъ также въ этомъ случаѣ, что дѣленіе совершается нацѣло и что a дѣлимо (нацѣло) на b или еще, что b есть (точный) дѣлитель a. Разсмотрѣніе вычетовъ играетъ огромную роль въ теоріи чиселъ.

Если два числа a, a' даютъ для одного и того же дѣлителя или модуля b одинъ и тотъ же вычетъ, то говорятъ, что они сравнимы по модулю b и пишутъ согласно Гауссу

$$a \equiv a' \pmod{b}.$$

Опредѣленіе сравненія удовлетворяетъ условіямъ, требуемымъ отъ всякаго опредѣленія равенства; замѣняя въ суммѣ, въ разности, въ произведеніи числа числами, сравнимыми съ ними по опредѣленному модулю, не измѣняютъ вычетовъ результатовъ, взятыхъ по тому же самому модулю. Это понятіе можно обобщить, замѣнивъ модуль системой модулей: два числа a, a' сравнимы по системѣ модулей $b_1, b_2 \ldots b_n$, если ихъ разность есть сумма чиселъ, представляющихъ кратныя чиселъ $b_1, b_2 \ldots b_n$. Тогда пишутъ:

$$a \equiv a' \ (\mathrm{modd}\,.\, b_1,\ b_2 \ldots b_n\ ).$$

Можно также попытаться выразить a въ видѣ $bq_1 - r_1$, причемъ r_1 есть одно изъ чиселъ $0, 1, 2 \ldots b-1$. То изъ двухъ чиселъ r и $-r_1$, абсолютная величина котораго меньше, называется наименьшимъ вычетомъ [164]).

Лагранжъ называлъ внутреннимъ дѣленіемъ [165]) то дѣленіе, въ которомъ наименьшій вычетъ положителенъ, и внѣшнимъ дѣленіемъ то, въ которомъ этотъ вычетъ отрицателенъ, потому что во внутреннемъ дѣленіи произведеніе изъ частнаго на дѣлитель заключается внутри дѣлимаго, между тѣмъ какъ во внѣшнемъ дѣленіи оно заключается внѣ его.

Можно также смотрѣть на дѣленіе, какъ на дѣйствіе, обратное умноженію. Тогда говорятъ, что оно ставитъ себѣ задачей найти такое число q, которое, будучи умножено на b, даетъ a. Дѣлимое a и дѣлитель b могутъ быть натуральными числами или относительными числами, исключая случай $b = 0$. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ проблема невозможна, если только a не равно нулю. Въ томъ случаѣ, когда имѣютъ $a = 0$, $b = 0$, всякое число q удовлетворяетъравенству $a = bq$. Этотъ случай долженъ быть исключенъ, если желаютъ, чтобы дѣйствіе было однозначнымъ (№ **10**). Въ общемъ случаѣ дѣйствіе возможно (№ **11**) лишь тогда, когда a есть кратное b.

Результатъ его q, сохраняющій названіе **частнаго** (quotient), представляютъ символомъ $\frac{a}{b}$, иногда $a : b$ или a/b. Эти символы [166]) имѣютъ для насъ пока смыслъ лишь тогда, когда a есть кратное b. Въ этомъ случаѣ дѣйствіе однозначно и, согласно опредѣленію умноженія, (истинный) знакъ частнаго есть $+$, если оба числа a, b имѣютъ одинъ и тотъ же (истинный) знакъ, — въ противномъ случаѣ. Если a равно нулю, то частное равно нулю.

Въ дальнѣйшемъ — если только нѣтъ спеціальной оговорки — слово дѣленіе берется въ этомъ второмъ смыслѣ, и разъ навсегда подразумѣвается, что дѣлитель не будетъ никогда равенъ нулю.

Опредѣленіе дѣленія даетъ равенство $\frac{a}{b}\, b = a$, когда b отлично отъ нуля. Въ частности $\frac{a}{1} = a$. Оттого, что какое-нибудь число умножается и дѣлится на другое число, оно не измѣняется, **лишь бы послѣднее число не равнялось нулю**. Формулы

$$ab = c,\quad a = \frac{c}{b},\quad b = \frac{c}{a}$$

имѣютъ одинъ и тотъ же смыслъ, лишь бы a, b, c не равнялись нулю. Если одно изъ чиселъ a, b, c есть неизвѣстное, то это неизвѣстное можетъ быть такимъ образомъ изолировано.

20. Сочетаніе дѣленія съ сложеніемъ, вычитаніемъ и умноженіемъ. Опредѣленіе дѣленія приводитъ непосредственно къ слѣдующимъ формуламъ:

$$1)\ \frac{(a+b)}{m} = \left(\frac{a}{m}\right) + \left(\frac{b}{m}\right); \qquad 2)\ \left(\frac{a-b}{m}\right) = \left(\frac{a}{m}\right) - \left(\frac{b}{m}\right);$$

$$3)\ a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{(ab)}{c}; \qquad 4)\ \frac{a}{(bc)} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c};$$

$$5)\ \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)c; \qquad 6)\ \frac{a}{b} = \frac{(am)}{(bm)};$$

$$7) \quad \frac{a}{b} = \frac{\left(\frac{a}{n}\right)}{\left(\frac{b}{n}\right)}.$$

Можно, не опасаясь никакой путаницы, отбросить въ формулахъ 1), 2), 3), 6), 7) скобки. Хотя въ формулахъ 4) и 5) занимаемое чертой мѣсто указываетъ въ извѣстной мѣрѣ порядокъ, въ которомъ должно производить дѣйствія, все-таки въ этихъ формулахъ не слѣдуетъ рекомендовать уничтоженія скобокъ.

Во всѣхъ этихъ формулахъ предполагаютъ, что символы дѣленія имѣютъ смыслъ. Въ формулахъ 1), 2) и 7) первый членъ имѣетъ смыслъ, если всѣ дѣленія, указанныя во вторыхъ членахъ, имѣютъ его. Для формулъ 3) и 4) имѣетъ мѣсто обратное. Если одинъ изъ членовъ формулы 6) имѣетъ смыслъ, то его имѣетъ и другой. Когда буквы означаютъ относительныя числа, то формулы 1) и 2) содержатся одна въ другой. Эти формулы 1) и 2), эквивалентныя формуламъ дистрибутивности для умноженія, показываютъ, какъ дѣлятъ алгебраическую сумму на какое-нибудь число, или, обратно, какъ превращаютъ въ одно единственное частное алгебраическую сумму частныхъ, у которыхъ одинъ и тотъ же дѣлитель. Если бы дѣлители были различны, то формула 6) позволила бы замѣнить частныя равными частными съ однимъ и тѣмъ же дѣлителемъ. Формула ассоціативности для умноженія и формулы 3), 4) и 5), если читать ихъ въ одномъ порядкѣ или въ другомъ, показываютъ, какъ умножаютъ какое-нибудь число на произведеніе или на частное и также, какъ умножаютъ или дѣлятъ произведеніе или частное на какое-нибудь число. Множители и дѣлители могутъ быть взяты въ любомъ порядкѣ. Конечный результатъ отъ этого не измѣняется.

Изъ этихъ формулъ легко вывести правила касательно дѣленія неравенствъ.

Одесская Общественная Библиотека

21. Дробныя числа. Принципъ перманентности позволяетъ ввести также дробныя числа. Возьмемъ за исходный пунктъ классъ A, образованный изъ натуральныхъ чиселъ и нуля. Для облегченія словоупотребленія мы будемъ говорить въ этомъ параграфѣ, что нуль есть кратное всякаго натуральнаго числа.

Символъ $\frac{a}{b}$, гдѣ a обозначаетъ какое нибудь число класса A и b—какое-нибудь натуральное число, имѣетъ смыслъ лишь тогда, когда a есть кратное b. Когда a не есть кратное b, то соглашаются продолжать называть *числомъ* этотъ символъ $\frac{a}{b}$, образованный въ дѣйствительности изъ двухъ конститутивныхъ чиселъ a, b, которыя, впрочемъ, не играютъ одной и той же роли. Это новое число называется[167]) *дробнымъ числомъ* или *дробью*. Конститутивныя числа a, b называются: первое—„*числителемъ*“, второе—„*знаменателемъ*“ дроби $\frac{a}{b}$. Горизонтальная черта[168]), отдѣляющая числитель отъ знаменателя, произносится „дѣленное на“. Классъ B (№ **11**) образованъ изъ чиселъ класса A и изъ дробныхъ чиселъ. Мы будемъ говорить о каждомъ изъ чиселъ этого класса B, что оно есть *абсолютное раціональное число* (безъ знака).

Сперва распространяютъ понятіе равенства на числа класса B. Легко замѣтить, что когда a есть кратное b, a a'—кратное b', то равенство $ab'=a'b$ есть необходимое и достаточное условіе для того, чтобы оба символа $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ представляли одно и то же число. Естественна мысль опредѣлить этимъ условіемъ равенство новыхъ чиселъ $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, замѣтивъ, что это опредѣленіе удовлетворяетъ условіямъ, требуемымъ отъ всякаго опредѣленія равенства. Кромѣ того, соглашаются отожествлять съ ихъ числителемъ дроби, знаменатель которыхъ равенъ 1. Поэтому, если въ дроби $\frac{a}{b}$ числитель представляетъ кратное знаменателя, то должно разсматривать эту дробь, какъ равную получающемуся отъ дѣленія частному (или нулю, когда a нулевое). При этихъ условіяхъ сохраняются всѣ формулы отъ 1-й до 7-й № **20**. Въ частности получаются правило для приведеніи къ одному и тому же знаменателю и правило для сокращенія дробей, заключающееся въ томъ, чтобы уничтожить всѣхъ множителей, общихъ обоимъ членамъ. Дробь называется неприводимой (простой), когда (помимо 1) нѣтъ никакого общаго дѣлителя. Члены всякой дроби представляютъ равныя кратныя членовъ неприводимой дроби, которая ей равна.

Чтобы сравнить двѣ неравныя дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, ихъ приводятъ къ одному и тому же знаменателю. О дроби, у которой числитель больше, говорятъ, что она больше, чѣмъ другая дробь. Это правило примѣнимо и къ тому случаю, когда одна изъ двухъ дробей есть натуральное число.

Правильная дробь[169])—это дробь, меньшая, чѣмъ 1, т. е. такая, въ которой числитель меньше знаменателя. Кантьемъ (un quantième)—это дробь, числитель которой есть 1.

Согласно съ правиломъ сокращенія дробей и съ равенствомъ 1) № **20**, можно опредѣлить сумму двухъ дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, какъ дробь $\frac{ab'+a'b}{bb'}$, замѣтивъ сейчасъ же, что опредѣленное такимъ образомъ дѣйствіе однозначно. Основныя свойства сложенія сохранены.

Если $a > b$, то a можно представить въ видѣ $bq + r$ (гдѣ $r < b$) и дробь $\frac{a}{b}$ есть сумма цѣлаго числа q и правильной дроби $\frac{r}{b}$. Такимъ образомъ, дробь, которая неравна цѣлому числу, заключается между двумя послѣдовательными цѣлыми числами, изъ которыхъ одно меньше, другое—больше дроби.

Вычитаніе, опредѣленное, какъ дѣйствіе, обратное сложенію, приводитъ къ правилу, выражаемому равенствомъ:

$$\frac{a}{b}-\frac{a'}{b'}=\frac{ab'-a'b}{bb'}.$$

Общее опредѣленіе умноженія, когда множитель есть натуральное число, примѣнимо къ случаю, когда множимое есть дробь. Оно показываетъ въ частности, что любую дробь можно разсматривать, какъ равную произведенію изъ ея числителя на кантьемъ съ тѣмъ же знаменателемъ, что̀ она, и что произведеніе дроби на ея знаменатель равно ея числителю. Отсюда вытекаетъ, что понятіе дробного числа дѣлаетъ всегда возможнымъ (за исключеніемъ случая, когда b нулевое) рѣшеніе уравненія $a=bx$,—даже тогда, когда цѣлое a не есть кратное b. Это рѣшеніе есть $x=\frac{a}{b}$. Поэтому говорятъ, что дробь представляетъ точное частное [170]) отъ дѣленія ея числителя на ея знаменатель.

Когда множитель есть дробь $\frac{a'}{b'}$, то принимаютъ опредѣленіе:

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'},$$

опредѣленіе, которое согласно съ непосредственнымъ слѣдствіемъ изъ формулъ 3), 4), 5, № **20** и которое сохраняетъ однозначный характеръ дѣйствія, равно какъ и его основныя свойства. Дѣленіе и здѣсь разсматривается, какъ дѣйствіе, обратное умноженію. Оно заключается въ томъ, чтобы найти неизвѣстную дробь, которая, будучи умножена на дробь—дѣлитель, воспроизводитъ дробь—дѣлимое. Проблема допускаетъ рѣшеніе, за исключеніемъ случая, когда дробь-дѣлитель есть 0. Это рѣшеніе получается, если умножить дробь-дѣ-

5

лимое на дробь, обратную [171]) дроби-дѣлителю, такъ что

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{a'b}.$$

22. Относительныя раціональныя числа. Можно образовать классъ чиселъ, охватывающій всѣ предыдущіе классы, придавъ раціональнымъ числамъ (за исключеніемъ нуля) знакъ + или знакъ — и отожествивъ числа, имѣющія знакъ + съ абсолютными раціональными числами. Всѣ образованныя такимъ образомъ числа, включая и 0, называются раціональными числами[172]). Тѣ числа, которыя имѣютъ знакъ +, это положительныя раціональныя числа, тѣ же, которыя имѣютъ знакъ —, это отрицательныя раціональныя числа. Желая противоставить эти раціональныя числа разсмотрѣннымъ прежде абсолютнымъ раціональнымъ числамъ, ихъ называютъ относительными раціональными числами.

Любое раціональное число можно изобразить одной буквой. Сама дробь, независимо отъ ея знака, есть абсолютное значеніе созданнаго такимъ образомъ относительнаго числа. Если α представляетъ какое-нибудь раціональное число, то его абсолютное значеніе можно представить черезъ $|\alpha|$.

Для опредѣленій равенства, неравенства (бóльшій и меньшій) и дѣйствій, опредѣленій, въ которыхъ, конечно, абсолютныя цѣлыя числа замѣнены абсолютными раціональными числами, повторяютъ mutatis mutandis то, что̀ было сказано въ № **17** по поводу отрицательныхъ чиселъ.

Символъ дроби $\frac{a}{b}$, гдѣ a и b суть относительныя раціональныя числа (которыя могутъ быть также цѣлыми), разсматривается, какъ относительное раціональное число, абсолютное значеніе котораго есть абсолютное раціональное число, получаемое отъ примѣненія правила дѣленія къ абсолютнымъ значеніямъ a и b, и (истинный) знакъ котораго есть + или −, въ зависимости отъ того, имѣютъ ли a и b одинъ и тотъ же знакъ, или нѣтъ. При этихъ условіяхъ сохраняются основныя свойства дѣйствій и въ частности всѣ равенства отъ 1-го до 7-ого № **20**, если условиться разсматривать фигурирующія въ нихъ буквы, какъ любыя— абсолютныя или относительныя—раціональныя числа, съ тѣмъ единственнымъ ограниченіемъ, что дѣленіе на 0 всегда исключается.

Важно замѣтить, что вышеопредѣленныя дѣйствія (дѣйствія порядка одинъ и порядка два), если ихъ производить надъ раціональными числами, приводятъ всегда лишь къ раціональнымъ числамъ. Обратныя дѣйствія порядка три, о которыхъ рѣчь будетъ нѣсколько далѣе, побуждаютъ къ новому расширенію идеи числа.

23. Конкретное происхожденіе понятія дроби. Исторически [173]) дроби возникли, когда захотѣли измѣрить непрерывныя величины, напр., длины, такія, что ихъ нельзя было разсматривать, какъ составленныя изъ соединенія извѣстнаго числа единицъ. Въ этомъ случаѣ единица (величины) дѣлится на извѣстное число равныхъ частей, и, если одна изъ этихъ частей содержится цѣлое число разъ въ разсматриваемой величинѣ, то мы имѣемъ мѣру этой послѣдней, выраженную съ помощью двухъ натуральныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно, знаменатель, показываетъ, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, другое, числитель, показываетъ, сколько такихъ частей содержитъ измѣряемая величина. Эта мѣра называется также отношеніемъ измѣряемой величины къ величинѣ, принятой за единицу.

Числитель пишутъ [174]) надъ знаменателемъ, отдѣляя его чертой. Образованный такимъ образомъ при посредствѣ двухъ цѣлыхъ чиселъ символъ $\frac{a}{b}$ разсматриваютъ, абстрагируя отъ его происхожденія, какъ число (дробь, дробное число). Если бы единица величины содержалась цѣлое число a разъ въ измѣряемой величинѣ, то получился бы символъ $\frac{a}{1}$, который пишутъ просто a.

Само собой разумѣется, что къ этому новому виду чиселъ нужно сызнова примѣнить всѣ опредѣленія [175]. При выборѣ опредѣленій можно съ этой точки зрѣнія руководиться конкретнымъ происхожденіемъ дробей, такъ что равныя дроби измѣряютъ равныя величины, сложеніе дробей соотвѣтствуетъ сложенію величинъ, а умноженіе соотвѣтствуетъ измѣненію единицы величинъ. Вычитаніе и дѣленіе остаются обратными дѣйствіями по отношенію къ сложенію и умноженію. Такимъ образомъ, основныя свойства дѣйствій сохраняются.

24. Операторы Мерэ и Пеано. Можно также вмѣстѣ съ Мерэ [176] и Пеано [177] разсматривать дроби $\frac{a}{b}$, какъ операторы [178], представляющіе составное дѣйствіе „умножить на a" и „раздѣлить на b". Два оператора $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ равны, когда они даютъ равные результаты, если ихъ приложить къ одному и тому же числу, дѣлающему дѣйствія возможными [179].

25. Систематическія дроби. Расширяя позиціонный принципъ нашей письменной нумераціи, можно придти къ обозначенію десятичныхъ дробей [180], у которыхъ пишутъ только числитель, и знаменатель которыхъ это—десять, сто, тысяча... Мѣсто, занимаемое запятой, показываетъ, какое изъ этихъ чиселъ является знаменателемъ.

Одесская Общественная Библіотека

Тотъ же самый принципъ, который служитъ основой для употребленія десятичныхъ дробей, можетъ быть распространенъ на нумераціи съ любымъ основаніемъ a. Систематической дробью съ основаніемъ a называютъ всякое выраженіе вида

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{aa} + \frac{\alpha_3}{aaa} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{aa\ldots a},$$

гдѣ α_0 есть цѣлое число, гдѣ каждый изъ числителей $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ есть одна изъ цыфръ 1, 2, 3 .... a—1 или 0, и гдѣ знаменатель каждой изъ дробей есть произведеніе столькихъ множителей, равныхъ a, сколько единицъ въ значкѣ числителя.

Десятичныя дроби это—систематическія дроби съ основаніемъ 10. Шестидесятичныя дроби это—систематическія дроби съ основаніемъ 60.

Дѣйствія порядковъ выше двухъ.

26. Степени. Когда множители какого-нибудь произведенія всѣ равны, то умноженіе называется возвышеніемъ въ степень [182]. Возвысить (пассивное) число a въ степень p (активное число) это значитъ образовать произведеніе изъ p множителей, каждый изъ которыхъ равенъ a. Число a (множитель произведенія), которое можетъ быть любымъ (абсолютнымъ или относительнымъ) раціональнымъ числомъ, называется основаніемъ. Число p, показывающее, сколько разъ число a входитъ множителемъ и которое, слѣдовательно, должно быть натуральнымъ числомъ, называется показателемъ [183]. Результатъ, который пишутъ въ видѣ a^p, называется степенью [184].

Принимаютъ, что $a^1 = a$. Вопреки правилу Шрёдера [146], во Франціи подъ a^{b^c} понимаютъ не $(a^b)^c$, но $a^{(bc)}$.

Изъ этого опредѣленія возвышенія въ степень и изъ законовъ умноженія вытекаютъ слѣдующіе законы возвышенія въ степень:

Формулы дистрибутивности для одного и того же основанія:

1) $a^p\, a^q = a^{p+q}$; 2) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$, если $p > q$;

3) $\dfrac{a^p}{a^q} = 1$, если $p = q$; 4) $\dfrac{a^p}{a^q} = \dfrac{1}{a^{q-p}}$, если $p < q$.

Формулы дистрибутивности для различныхъ основаній:

5) $a^q\, b^q = (ab)^q$; 6) $\dfrac{a^q}{b^q} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^q$.

Формула ассоціативности:

$$7)\ (a^p)^q = a^{pq} = (a^q)^p\ .$$

Кромѣ того, для всякаго натуральнаго числа p мы имѣемъ

$$0^p = 0;\quad 1^p = 1;\quad (-1)^{2p} = 1;\quad (-1)^{2p-1} = -1.$$

Если $a > b > 0$, мы имѣемъ также

$$a^p > b^p;$$

если $p > q$, мы имѣемъ

$$a^p > a^q \text{ или } a^p < a^q\,,$$

въ зависимости отъ того, будетъ ли $a > 1$ или $0 < a < 1$.

За степенями съ показателями 2 и 3 сохранились по причинѣ геометрическихъ приложеній названія квадрата и куба. Иногда также говорятъ для четвертой степени биквадратъ.

Если основаніе представляетъ сумму, разность, произведеніе, частное или степень, то его должно заключить въ скобки. Напротивъ, способъ помѣщенія показателя дѣлаетъ безполезными скобки, когда онъ самъ есть сумма, и т. д.

Символы a^0 и a^{-n}, когда n есть положительное число, не имѣютъ для насъ пока никакого смысла. Согласно принципу перманентности, должно приписать [185]) a^0 значенiе a^{p-p}, независимое отъ p, т. е. 1 на основанiи формулы 3), а на основанiи формулъ 2) и 4) принять $\frac{1}{a^n}$ за опредѣленiе [186]) a^{-n}. Если принять эти опредѣленiя, то сохраняются всѣ формулы отъ 1-ой до 7-ой, каковы бы ни были цѣлыя числа (положительныя, нулевыя или отрицательныя), имѣя при этомъ въ виду связанныя съ ними ограниченiя.

Расширенiе понятiя степени на тотъ случай, когда показатель есть дробное число [187]), предполагаетъ понятiе извлеченiя корней, которое есть одно изъ дѣйствiй, обратныхъ возвышенiю въ степень.

Возвышенiе въ степень не есть коммутативное дѣйствiе: въ общемъ случаѣ b^n не равно n^b. Поэтому оба обратныхъ дѣйствiя должны быть различными. Дѣйствiе, съ помощью котораго разыскиваютъ основанiе (пассивное число) такое, что $b^n = a$, причемъ a и n разсматриваются какъ данныя, называется извлеченiемъ корня [188]). Дѣйствiе, съ помощью котораго розыскиваютъ показатель n (активное число), такой, что опять-таки $b^n = a$, называется разысканiемъ логариѳма a при основанiи b.

27. Корни. Такимъ образомъ, n-ый корень изъ a, который пишутъ [189]) $\sqrt[n]{a}$, есть число, которое, возвышенное въ степень n, даетъ a. Иными словами, мы имѣемъ формулу

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a .$$

Въ символѣ $\sqrt[n]{a}$ знакъ $\sqrt{}$ называется радикаломъ (корнемъ), a есть число или количество подъ радикаломъ (подкоренное число), n есть показатель корня. Вмѣсто $\sqrt[2]{a}$ пишутъ $\sqrt{a}$.

Обыкновенно пользуются этимъ обозначеніемъ лишь, когда n есть натуральное число [190]).

Выраженіе $\sqrt[n]{a}$ имѣетъ пока для насъ смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если a есть n-ая степень раціональнаго числа. Въ частности оно не имѣетъ смысла, когда a есть отрицательное число и n число четное. Когда a есть положительное число, то, согласно предыдущему опредѣленію, выраженіе $\sqrt[n]{a}$ можетъ имѣть два значенія, ибо a есть тогда n-ая степень двухъ симметричныхъ чиселъ. Чтобы дѣйствіе было однозначнымъ (№ **10**), слѣдуетъ принять для $\sqrt[n]{a}$ одно единственное значеніе, напр., положительное значеніе (ариѳметическое или абсолютное значеніе радикала), и тогда другое значеніе будетъ изображаться черезъ $-\sqrt[n]{a}$.

Опредѣленія дѣйствія и свойства возвышенія въ степени даютъ формулы дистрибутивности [191]).

$$1)\ \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab};\quad 2)\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

ассоціативности

$$3)\ \left(\sqrt[p]{a}\right)^q=\sqrt[p]{a^q};$$

$$4)\ \left(\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}}\right)=\sqrt[pq]{a}=\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}}$$

и формулу

$$5)\ \sqrt[p]{a^q}=\sqrt[np]{a^{nq}}$$

Въ этихъ формулахъ n, p, q означаютъ вообще натуральныя числа. Однако, ничто не мѣшаетъ разсматривать q, какъ любое цѣлое число, въ формулахъ 3) и 5).

Предполагается, что фигурирующія въ различныхъ формулахъ выраженія имѣютъ смыслъ, и это имѣетъ навѣрное мѣсто, если первая часть имѣетъ смыслъ. Что касается 4-й формулы, то если одна изъ частей ея имѣетъ смыслъ, то его имѣютъ и двѣ другія.

Принципъ перманентности заставляетъ принимать выраженія $\sqrt[q]{a^p}$ за опредѣленіе $a^{\frac{p}{q}}$, гдѣ p и q—натуральныя числа, и разсмастривать $a^{-\frac{p}{q}}$, какъ имѣющее тотъ же смыслъ, что $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$. Въ такомъ случаѣ сохраняются всѣ семь основныхъ формулъ, касающихся возвышенія въ степень, лишь бы числа p, q были раціональными (предполагая, разумѣется, что указываемыя дѣйствія имѣютъ смыслъ).

28. Логариѳмы. Логариѳмъ [192]) a при основаніи [193]) b или, какъ пишутъ [194]), $\log_b a$, есть показатель степени, въ которую должно возвести число b, чтобы получить число a. Иными словами, онъ опредѣляется формулой

$$b^{\log_b a} = a \text{ [195])}.$$

Это опредѣленіе имѣетъ для насъ пока смыслъ лишь въ томъ случаѣ, если существуетъ натуральное число p такое, что b есть $q^{\text{-ая}}$, степень раціональнаго числа $\sqrt[q]{b}$, и, кромѣ того, если существуетъ цѣлое число p (положительное, нулевое или отрицательное) такое, что $\left(\sqrt[q]{b}\right)^p$ равно a. Въ этомъ скучаѣ $\log_b a$ есть раціональное число $\frac{p}{q}$.

Это опредѣленіе, если обратиться къ законамъ возвышенія въ степень, влечетъ за собой формулы:

$$1)\ \log_b (pq) = \log_b p + \log_b q;$$

$$2)\ \log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q;$$

$$3)\ \log_b (p^m) = m \log_b p;$$

$$4)\ \log_b (a) = \frac{\log_c (a)}{\log_c (b)},$$

причемъ предполагается, что указываемыя операціи имѣютъ смыслъ. Такъ, формулы 1) и 2) предполагаютъ, что $\log_b p$ и $\log_b q$ имѣютъ смыслъ. Формула 3) предполагаетъ, что $\log_b p$ и p^m имѣютъ смыслъ.

Часто удобно отличать цѣлую часть какого-нибудь логариѳма [196]) отъ его дробной части. Въ этомъ случаѣ цѣлая часть называется характеристикой [197]), а дробная—мантиссой [198]).

Иногда антилогариѳмомъ [199]) c при основаніи b называютъ число a, логариѳмъ котораго при основаніи b равенъ c. Слѣдовательно, мы имѣемъ

$$\mathrm{antilog}_b\, c = b^c;\ \mathrm{antilog}_b [\log_b a] = \log_b [\mathrm{antilog}_b\, a] = a.$$

Логариѳмы, основаніе которыхъ есть особое трансцендентное число e, называются натуральными логариѳмами [200]). Логарифмы съ основаніемъ 10 называются десятичными логариѳмами [201]).

29. Заключительныя замѣчанія [202]). Можно было бы пытаться примѣнить и здѣсь принципъ перманентности. Можно было бы, исходя изъ класса A, образованнаго изъ абсолютныхъ раціональныхъ чиселъ, и разсматривая n, какъ натуральное число, попытаться образовать новый классъ B, составленный изъ чиселъ класса A и изъ символовъ $\sqrt[n]{a}$, гдѣ a не есть точная

Одесская Общественная Библиотека

n-ая степень, или же изъ символовъ типа $\log_0 a$, не имѣющихъ пока никакого смысла. Но сумма двухъ чиселъ класса B не принадлежала бы въ этомъ случаѣ непремѣнно къ этому самому классу, и одинъ этотъ фактъ показываетъ, что расширенія понятія числа слѣдуетъ искать по другому пути.

Можно было бы также пытаться ввести дѣйствія любого порядка. Можно было бы—подобно тому, какъ получили умноженіе изъ сложенія, возвышеніе въ степень изъ умноженія—вывести изъ возвышенія въ степень, послѣдняго дѣйствія, разсматриваемаго, какъ прямое дѣйствіе третьяго порядка, дѣйствіе четвертаго порядка [203]), затѣмъ вывести изъ этого послѣдняго дѣйствіе пятаго порядка, и т. д.

Хотя опредѣленіе дѣйствія четвертаго порядка законно съ логической точки зрѣнія, но оно безполезно, потому что дѣйствіе третьяго порядка уже не коммутативно.

Чтобы получить прямое дѣйствіе четвертаго порядка, достаточо взять a^a за показатель a, полученную такимъ образомъ степень $a^{(a^a)}$ или $a^{(a^a)}$ за новый показатель a и т. д. [204]). Предполагая, что a написано b разъ, можно результатъ записать въ видѣ (a; b); въ образованіи этого результата (a; b) и заключается прямое дѣйствіе четвертаго порядка.

Если условиться изобразить черезъ $(a; b)^{(a;c)}$ выраженіе $(a; b + c)$, то, между прочимъ, получится отношеніе

$$(a; b)^{(a;c)} = (a; c + 1)^{(a;b-1)}.$$

Ничто не можетъ помѣшать продолжать такимъ образомъ безъ конца [204]). Слѣдуя аналогичному ходу идей, Маннури [205]) получилъ подъ именемъ сложенія порядковъ одинъ, два, три... другой рядъ дѣйствій. Его сложеніе порядка одинъ это—обыкновенное сложеніе и его сложеніе порядка два это—обыкновенное умноженіе. Но его сложеніе порядка три, называемое имъ **сверхумноженіемъ**, отлично отъ возвышенія въ степень.

Перев. *П. Юшкевичъ.*

Примѣчанія.

[1]) Г. Лейбницъ утверждаетъ, вопреки мнѣнію схоластиковъ, что можно считать нематеріальные предметы [Diss. de arte combin. Lpz. 1666; Werke, изд. C. Gerhardt, Math. Schr. 5, Halle 1858, c. 12]. Эта же самая мысль была, впрочемъ, до Лейбница высказана нашими французскими авторами (см. напр. J. A. Le Tenneur, Traité des quantitez incommensurables, Paris, 1640, c. 3). Она встрѣчается также у Дж. Локка, An Essay concerning human understanding, Лондонъ 1690. Для Дж. Беркли [G. Berkeley, Principles of human knowledge, Dublin, 1710] число представляетъ цѣликомъ созданіе духа, но для него всѣ наши идеи не что иное, какъ результаты полученныхъ прежде впечатлѣній. Для Дж. Стюарта Милля [J. St. Mill, System of logic, London 1843] фактъ, выражаемый въ опредѣленіи нѣкотораго числа, есть фактъ физическій. Э. Махъ [E. Mach, Prinzipien der Wärmelehre, Lpz. 1896, c. 65 и сл.] тоже считаетъ, что число прилагается къ физическимъ предметамъ.

[2]) Ср. П. Таннри, Revue phil. 38 (1894). c. 60: Понятіе множества... образуется благодаря процессу абстракціи, независящему отъ природы соединенныхъ предметовъ, и благодаря размышленію надъ ихъ коллективной связью; ...если они воспринимаются послѣдовательно другъ за другомъ, то это обстоятельство не вліяетъ на представленіе ихъ множества.

[3]) Э. Шредеръ [E. Schröder, Lehr. d. Arith. u. Alg. 1, Lpz. 1873, c. 4] настаиваетъ на томъ, что всякое перечисленіе предметовъ предполагаетъ, съ одной стороны, соединеніе въ одно цѣлое всѣхъ этихъ предметовъ,

а съ другой—убѣжденіе въ томъ, что эти предметы эквивалентны.

[4]) B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, изд. F. Prihonsky, Lpz., 1851, перепечат. Berlin, 1889, § 20, с. 28/31 (1847/8).

[5]) Р. Дедекиндъ [R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen, Braunschw. 1888; 2 изд. 1893, с. 17; см. также предисловіе 2-го изд.] является, кажется, первымъ, который далъ такое положительное опредѣленіе безконечнаго члена.

[6]) Amer. J. math. 7 (1885), с. 202.

[7]) Э. Шредеръ полагаетъ, что опредѣленіе Ч. Пирса (Ch. Peirce) по существу положительно. Если стать на его точку зрѣнія, то необходимо доказать, что опредѣленія Пирса и Дедекинда равнозначущи. Это Шредеръ и сдѣлалъ въ 1896 г. [Nova Acta Acad. Leop. 71 (1898), с. 303, (1896)]. К. Кейзеръ [C. J. Keyser, Bull. Amer. math. Soc. 7 (1900/1), с. 218] пытается углубить тотъ же самый вопросъ.

[8]) Это реченіе, классическое въ средніе вѣка, перешло отъ грековъ: φυσικὸς ἀριθμός (Nicomachi Geraseni Pythagorei Introd. arith.; изд. R. Hoche, Lpz. 1866, с. 52, 88, 91) черезъ посредство Боэція (A. M. T. S. Boetii de instit. arith. изд. G. Friedlein, Lpz. 1867, с. 47, 48, 50,...). Оно было еще въ ходу въ 18 в.

[9]) Это реченіе, употреблявшееся въ 18 в., стало двусмысленнымъ съ тѣхъ поръ, какъ слову „число" придали болѣе общій смыслъ.

[10]) Э. Шрёдеръ, Lehrb. 1, с. 5, проводитъ различіе между единицами (unités), предметами первоначальнаго комплекса, и одними (les uns), предметами комплекса, являющагося знакомъ перваго.

[11]) Опредѣленное такимъ образомъ число — это число отвлеченное. Нѣкоторый комплексъ предметовъ одного и того же рода можетъ быть обозначенъ отвлеченнымъ числомъ, за которымъ слѣдуетъ наименованіе предметовъ, изъ которыхъ онъ составленъ, т.-е. можетъ быть обозначенъ именованымъ числомъ. Въ текстѣ разсматриваются лишь отвлеченныя числа. Введеніе именованыхъ чиселъ въ ариѳметику безполезно.

[12]) Хотя, согласно опредѣленію числа, данному Эвклидомъ (см. прим. 44), единица (μονάς; кн. 7, опр. 1),

„то, согласно чему всякая вещь называется одной“, не есть число, ее вообще включали въ рядъ натуральныхъ чиселъ. Нѣкоторые пиѳагорейцы, по словамъ Ямвлиха (Iamblichus... in Nicomachi Arith. introd... изд. S. Tennulius, Arnheim 1668, с. 11), разсматривали единицу, какъ общій предѣлъ (μεθόριον) чиселъ и дробей; согласно общепринятому ученію, единица есть производительница числа и, какъ таковая, обладаетъ всѣми свойствами его, но только въ потенціи. Мнѣніе, что единицу должно разсматривать, какъ находящуюся внѣ чиселъ, было усвоено Алховаресми (Alkhovaresmi, см. прим. 96) (9-ый вѣкъ) (B. Boncompagni, Trattati d'arit. 1, Римъ, 1857 г., с. 2) и, вслѣдъ за нимъ, арабскими и христіанскими математиками среднихъ вѣковъ; оно имѣло послѣдователей еще въ 17 в. (J. A. Le Tenneur, Traité, с. 9).

13) или число порядка (nombre d'ordre) [Dict. de l'Acad.].

14) Phil. Aufsätze, Ed. Zeller gewidmet, Lpz. 1887, с. 32, 266; L. Kronecker, J. reine angew. Math. 101 (1887), с. 339; Werke 3^1, Lpz. 1899, с. 254; H. von Helmholtz, Wiss. Abh. 3, Lpz. 1895, с. 371.

15) Э. Гуссерль (E. G. Husserl), въ приложеніи къ своей „Philosophie der Arithmetik“ (1, Halle 1891, с. 190), критикуетъ номиналистическія попытки Л. Кронекера и Г. Гельмгольтца. Онъ настаиваетъ въ особенности на томъ (1-ая часть, с. 31), что количественныя числа относятся къ ансамблямъ, порядковыя—къ послѣдовательностямъ (suites), и что, такъ какъ послѣдовательности представляютъ не что иное, какъ расположенные ансамбли, то количественное число непремѣнно предшествуетъ порядковому числу. Дѣйствительно, оно предшествовало ему въ живой рѣчи. Однако, Гуссерль не заключаетъ отсюда того, что количественная ариѳметика есть единственно возможная ариѳметика (предисл. с. VIII), ни даже того, что она всегда можетъ удовлетворять всѣмъ требованіямъ. Онъ считаетъ необходимымъ рядъ другихъ ариѳметикъ (устное сообщеніе въ 1904 г.), въ частности ариѳметику, основывающуюся на понятіи порядковаго числа. Если связать съ понятіями количественнаго и порядковаго числа соотвѣтственные символы, то дѣйствія будутъ (формально) тождественны въ обоихъ символическихъ системахъ. Они, однако, имѣютъ

различное значеніе и не могутъ быть логически выведены одни изъ другихъ. Если ввести нейтральную систему символовъ, опредѣляемую лишь законами ариѳметическихъ дѣйствій, то получается формальная ариѳметика, отличная отъ обѣихъ реальныхъ ариѳметикъ, къ которымъ она приложима. Хотя эта формальная ариѳметика дѣлаетъ безполезнымъ развитіе реальныхъ ариѳметикъ, къ которымъ она приложима, однако, изъ нея нельзя было бы получить истолкованіе въ реальныхъ системахъ тѣхъ результатовъ, къ которымъ она приводитъ. Впрочемъ, для Гуссерля всякое развитіе чисто формальной ариѳметики предполагаетъ чисто логическіе принципы и въ частности идеи доли (quotité) и порядка (равно какъ и относящіяся сюда аксіомы).

[16]) Phil. Aufs. (см. прим. 14), с. 23; H. von Helmholtz, Abh. (см. 14) 3, с. 362.

[17]) Was sind... (см. 5 пр.), с. 6.

[18]) Идея соотвѣтствія, на которой К. Вейерштрассъ (K. Weierstrass) напиралъ особенно въ устномъ преподаваніи, играетъ не менѣе кардинальную роль въ понятіи порядковаго числа (№ 1).

[19]) Р. Дедекиндъ (см. 5), с. 11, 20, 54 выводитъ отсюда понятіе порядковаго числа.

[20]) Arithmetices principia, Turin 1889; Rivista mat. 1 (1891), с. 17; Formulaire math. 3, Turin et Paris 1901; Bibl. congrès intern. philos., Paris 1900, 3, éd. 1901, с. 279. См. также Л. Кутюра (L. Couturat), Revue metaph. 8 (1900), с. 23.

[21]) Revue math. (Rivista) 6 (1899), с. 141; Bibl. congrès intern. phil., Paris 1900, 3, éd. 1901, с. 294. Номинальное опредѣленіе какого нибудь символа состоитъ въ томъ, чтобы приравнять символъ, который хотятъ опредѣлить, нѣкоторому выраженію, составленному изъ уже опредѣленныхъ символовъ. К. Бурали-Форти (C. Burali-Forti) дѣлитъ (с. 295) математическія, не номинальныя, опредѣленія на опредѣленія съ помощью постулатовъ (Дедекиндъ, Пеано) и опредѣленія съ помощью абстракцій (длина, температура).

[22]) Шрёдеръ, Lehrb. (см. 3) 1, с. 14, привлекъ вниманіе къ этому постулату.

[23]) Phil. Aufs. (см. 14), с. 32, 268; L. Kronecker (прим. 14), с. 341; Werke 3^1, с. 255; H. von Helmholtz

(прим. 14) 3, с. 372; Л. Кутюра [De l'infini math., Paris 1896, 2-я часть, кн. 1, гл. 1 и 2, с. 313] критикуетъ въ особенности доказательство Кронекера и въ этой критикѣ сходится съ Г. Канторомъ, находящимъ въ немъ petitio principii [Z. Phil. 91 (1887), с. 90].

[24]) Лекціи К. Вейерштрасса въ берлинскомъ университетѣ много способствовали распространенію этой точки зрѣнія.

[25]) Д. Гильбертъ (D. Hilbert) отвергаетъ эти послѣдовательныя расширенія понятія числа; онъ предполагаетъ предварительное существованіе символовъ, связанныхъ между собой непротиворѣчащими другъ другу аксіомами, выбранными такимъ образомъ, что изъ нихъ вытекаютъ всѣ свойства чиселъ [Iahresb. Deuts. Math-Ver. 8[1] (1899), с. 180/4]. Аналогичныя воззрѣнія касательно дѣйствій надъ величинами были развиты Р. Беттацци [R. Bettazzi, Teoria delle grandezze, Пиза 1890, с. 67; ср. Bull. sc. math. (2) 15 (1891), с. 53; Periodico math. (2) 2 (1899/1900), с. 11]; онъ выводитъ отсюда формальное изложеніе ариѳметики. См. также О. Гёльдеръ (O. Hölder), Ber. Ges. Lpz. 53 (1901), math. p. 4.

[26]) Kritik der reinen Vernunft, Riga 1781; 7-ое изд. Lpz. 1828. „Слѣдовательно, число есть не что иное, какъ единство синтеза многообразія однороднаго нагляднаго представленія вообще, возникающее вслѣдствіе того, что я произвожу само время въ аппрегензіи нагляднаго представленія" (пер. Н. Лосскаго, с. 121).

[27]) Trans. Irish Acad. 17 (1837), с. 243 [1833/35]; Lectures on quaternions, Dublin 1853, предис. с. (2).

[28]) Die Welt als Wille und Vorstellung, Lpz. 1819.

[29]) Phil. Aufs. (см. 14), с. 20; Abh. (см. 14) 3, с. 359.

[30]) Phil. Studien (Wundt) 5 (1889), с. 632; 6 (1891), с. 104, 261. Гл. 3 и 4 появились, какъ диссертаціи, Lpz. 1889.

[31]) Psychologie als Wiss. 2, Königsberg 1825, с. 160/63.

[32]) Die Lehren von Raum, Zeit u. Math. 2, Berlin 1869, с. 668/71.

[33]) Logische Studien, Iserlohn 1877, с. 141 и сл.

[34]) I. I. Baumann (см. 32), с. 671.

[35]) F. A. Lange (см. 33), с. 142.

[36]) G. Frege, Die Grundlagen der Arithmetik, Breslau

1884, с. 79, 115; Grundgesetze der Arithmetik 1, Iena 1893, с. 57; Revue métaph. 3 (1395), с. 73; A. W. Russell, The principles of mathematics, Cambridge 1903, с. 116, 136; см. также A. N. Whitehead, Amer. I. math. 24 (1902), с. 367; L Couturat, Revue métaph. 12 (1904), с. 19.

[37]) Was sind... (см. 5), с. 21; см. также предисловіе къ 1-му изд.

[38]) Phil. Aufs. (см. 14), с. 266; I. reine angew. Math. 101 (1887), с. 339; Werke 3^1, с. 254.

[39]) Письмо къ Ф. Бесселю (F. W. Bessell) отъ 9 апр. 1830; Werke 8, Göttingen 1900, с. 201.

[40]) Φυσικὴ ἀκρόασις, кн. 4, гл. 11; изд. берлин. акад. 1 (1831), с. 219, столб. b; изд. F. Didot 2, Paris 1878, с. 301.

[41]) Уже Θалесъ, по словамъ Ямвлиха (см. 12) (с. 10) опредѣлилъ число вслѣдъ за единицами, какъ систему единицъ. Ямвлихъ (ib., с. 14) приводитъ, въ качествѣ опредѣленія Эвдокса (4 вѣкъ до Р. Х.), что ἀριθμὸς ἐστι πλῆθος ὡρισμένον, число есть опредѣленное множество.

[42]) Пл7тонъ, Ἐπινομίς, изд. H. Estienne, Paris 1578, с. 98, столб. d; изд. F. Didot 2, Paris 1883, с. 506.

[43]) ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἑνὶ μετρητόν, число есть множество, измѣряемое посредствомъ единицы [τὰ μετὰ τὰ φυσικά, кн. 9, гл. 6; изд. берл. акад. 2 (1831), с. 1057, столб. a; изд. F. Didot 2, Paris 1878, с. 581). Аристотель обсуждаетъ, не высказывая опредѣленно своего мнѣнія, вопросъ о противоположности между числами и единицей. Онъ допускаетъ даже, что можно сказать, что одинъ есть нѣкоторое множество, хотя малое, πλῆθος τι, εἴπερ καὶ ὀλίγον, и, съ этой точки зрѣнія, онъ совершенно уподоблятеъ одинъ и два. Въ третьемъ вѣкѣ до Р. Х. Хризиппъ Станкъ [Ямвлихъ (см. 12), с. 12] опредѣляетъ даже единицу, какъ πλῆθος ἕν, множество одно.

[44]) Elementa, кн. 7, опр. 2; Opera, изд. I. L. Heiberg 2, Lepz. 1884, с. 184.

[45]) Титъ Ливій, Исторія Рима, кн. 7, § 3.

[46]) Ann. math pures appl. 21 (1830/31), с. 341.

[47]) Каждой изъ этихъ системъ соотвѣтствуетъ система устной нумераціи. Двадцатеричная система (съ основаніемъ 20) была, повидимому, распространена у

кельтовъ; слѣды ея встрѣчаются во Франціи въ діалектахъ западной Бретани. Отсюда, безъ сомнѣнія, возникли французкія названія для восьмидесяти (quatre vingts), ста двадцати (six-vingts) [ср. фарсъ Пателена (Pathelin), написанный, безъ сомнѣнія, между 1460 и 1470 гг., изданный въ Руанѣ въ 1486 г.; авторъ неизвѣстенъ; критич. изд. E. Chevaldin'a печатается), трехъ сотъ (quinze-vingts) [богадѣльня, основанная при Людовикѣ IX и носящая еще и теперь это имя].

Въ древнѣйшемъ извѣстномъ французскомъ трактатѣ объ Алгоризмѣ [ms. bibl Ste Geneviève, Paris, № 2200, publié par Ch. Henry, Bull. bibl. storia mat. 15 (1882), c. 67, авторъ неизвѣстенъ, 13-го вѣка] 81 обозначается (fol. 161ª) черезъ $\frac{\text{XX}}{\text{IIII I}}$, 121 черезъ $\frac{\text{XX}}{\text{VI и I}}$, и т. д. Ацтеки усвоили двадцатеричную систему для письменной нумераціи. Они изображали съ помощью кружковъ числа отъ 1 до 19 и имѣли спеціальныя названія и знаки для 20, 400, 8000. Сосѣдніе народы имѣли даже спеціальное названіе для 160000.

Слѣды шестеричной системы (съ основаніемъ 6) существуютъ еще тамъ и сямъ въ различныхъ разбросанныхъ мѣстахъ материка. Основаніе 12 еще не исчезло изъ обихода для конкретной нумераціи (дюжины, гроссы). Въ качествѣ курьеза можно отмѣтить систему съ основаніемъ 11, употребляемую туземцами Новой Зеландіи, имѣющими спеціальныя названія для 11, 121 и даже 1331. [Ср. E. A. Marre, I. math. pures appl. (1) 13 (1848), c. 233, по А. Гумбольдту (A. von Humboldt); и „De l'Arith. dans l'archipel indien", Римъ 1874, по I. Crawfurd'y]. Изученіе устной нумераціи относится къ вѣдѣнію *филологіи*.

[48]) Она употребляется даже нѣкоторыми дикими народами, гдѣ числа пальцевъ, поднимаемыхъ одновременно нѣсколькими лицами, означаютъ соотвѣтственно единицы, десятки, сотни, заключающіяся въ числѣ, которое надо выразить. Другіе хлопаютъ въ ладоши, чтобъ выразить десятки. Счетъ по пальцамъ употребляется еще въ древности на Востокѣ и въ Греціи [ср. E. Rödiger, Jahresb. deutsch. morgenl. Ges. 1845, изд. 1846, c. 111; P. Tannery, Notices et extr. mss. bibl. nationale 32 I, Paris 1886, c. 18]; его встрѣчаютъ у римлянъ (T. Плавтъ, Miles gloriosus,

дѣйст. 2 сцена 2; Плиній Старшій, Hist. nat. кн. 34, § 16; Ювеналъ, Сатира X, 249-ый стихъ]. Съ помощью этого счета, объясненнаго Бэдой Достопочтеннымъ († 735) и преподававшагося въ школахъ во времена Карла Великаго, удавалось изобразить при посредствѣ обѣихъ рукъ всѣ числа отъ 1 до 10.000. Онъ былъ также въ большомъ ходу у арабовъ [ср. E. A. Marre, Bull. bibl. storia mat. 1 (1868), с. 309]. Впрочемъ, онъ еще не совсѣмъ исчезъ изъ нашихъ деревень и можетъ оказать услуги глухо-нѣмымъ. Названія digiti для обозначенія единицъ и articuli для обозначенія десятковъ возникли отсюда [ср. Geometria quae fertur Boetii, вѣроятно, 11 в. (см. 107); въ изд. G. Friedlein „A. M. T. S. Boetii inst"... (см. 8), с. 395; E. Lucas, Récréations math. 3, Paris 1893, с. 3/23 и M. Cantor, Vorlesunge Gesch. Math. (2-е изд., 1, Lpz. 1894, с. 542, 753, 790].

[49]) Обѣ таблицы изъ Сенкере (около Евфрата), найденныя въ 1854 г. В. Лофтусомъ (W. K. Loftus), относятся, по меньшей мѣрѣ, къ 1600 г. до Р. Х. Въ нихъ находятся квадраты чиселъ до 3600 и кубы до 32768. Одна изъ этихъ таблицъ воспроизведена въ Abh. Akad. Berl. 1877, math с. 105.

[50]) Ср. Ю. Оппертъ (I. Oppert) и Р. Лепсіусъ (R. Lepsius), Monatsber. Akad. Berl. 1877, с. 741/58.

[51]) Ср. F. Hultsch, Abh. Ges. Lpz. (philol.-hist) 17 (1897). мем. № 1, с. 17 (1895) Руководство египетскаго счетчика, составленное писцомъ Амесомъ (British Museum, папирусъ Риндъ; перев. A. Eisenlohr, Lpz. 1877 и 1891) былъ написанъ между 2000 и 1600 гг. до Р. Х. Это—древнѣйшій изъ извѣстныхъ намъ документовъ о счетѣ въ Египтѣ.

[52]) Эти числа были названы геродіановыми, потому что Геродіанъ, александрійскій грамматикъ, жившій около 200 г., описалъ эту систему нумераціи. Происхожденіе ихъ слѣдуетъ относить, по крайней мѣрѣ, къ 6-му вѣку до Р. Х.; они одни лишь употребляются въ аттическихъ надписяхъ до—100 г. Утверждали, что символъ I, черезъ который означали единицу, могъ быть первой буквой слова 'Ios (старая гомеровская форма); но сомнительно—если не болѣе,—чтобы I было начальной буквой.

[53]) Такъ Η Η Δ Δ Δ Π Ι Ι представляетъ 237, Η Π представляетъ 105.

[54]) Можетъ быть, въ Александріи, гдѣ ее впервые констатируютъ около —266 г. на одной монетѣ [см. I. Gow, A short history of greek mathematics, Cambridge 1884, с. 47]. Но, согласно надписямъ, система эта зародилась къ концу 4-го вѣка до Р. Х. на юго-западномъ побережьи Малой Азіи.

[55]) Единицы: α, β, γ, δ, ε, ϛ, ζ, η, ϑ, десятки: ι, ϰ, λ, μ, ν, ξ, ο, π, ϙ; сотни: ρ, σ, τ, υ, φ, χ, ψ, ω, ϡ). Символы: ϛ, ϙ, ϡ) произносились βᾶυ (византійская форма, гдѣ β произносится, какъ v), ϰόππα, σαμπῖ.

[56]) Такъ напримѣръ, $\overline{\tau\nu\zeta} = 357$; $\overline{\tau\zeta} = 307$; $\overline{\tau\nu} = 350$. Черта указываетъ здѣсь, что буквы имѣютъ числовой смыслъ. Впрочемъ, не слѣдуетъ считать ее чѣмъ то существеннымъ; кажется, она употреблялась лишь въ рукописяхъ византійской эпохи.

[57]) Такъ, напримѣръ, $\overline{,\beta\tau\nu} = 2350$; $\overline{,\alpha} = 1000$; $\overline{\beta M o\delta}$ или $\overline{\beta . o\delta} = 20074$. Слово миріада не имѣется еще у Гомера. Когда числа не велики, выкладки совершаются довольно легко въ этой системѣ нумераціи [ср. P. Tannery, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 4 (1882), с. 171]. Часто коэффиціентъ миріады бываетъ написанъ вверху символа μ^{υ}.

[58]) „Тетрады" (Аполлоній). Въ своемъ ψαμμίτης (Исчисленіе песка) Архимедъ разсматривалъ группы изъ восьми цифръ: „октады"; 10^8 октадъ образуетъ періодъ [Opera, изд. I. L. Heiberg 2, Lpz. 1881, с. 242/91; Oeuvres, изд. F. Peyrard, Paris 1807, с. 348/67].

[59]) Она, повидимому, не была введена въ употребленіе до Гипсикла [Ἀναφορικός, изд. K. Manitius, Progr. Dresden 1888, с. XXVI] въ началѣ II вѣка до Р. Х. Другая, болѣе ранняя система, согласно которой окружность дѣлится на 180 локтей въ 24 пальца, употреблялась еще Гиппархомъ, наряду съ шестидесятеричной системой [см. P. Tannery, Revue archéol. (3) 7 (1886), с. 31].

[60]) Весьма вѣроятно, что этруски сами подверглись различнымъ чужестраннымъ вліяніямъ. Ихъ старыя цыфры образованы, повидимому, по тому же принципу, что египетскіе іератическіе знаки, и не невозможно, что удастся доказать восточное происхожденіе ихъ системы нумераціи

[ср. F. Lindemann, Sitzgsb. Akad. München 26 (1896), с. 625; 29 (1899), с. 71].

[61]) Для вопроса о происхожденіи знаковъ, употреблявшихся римлянами, см. K. Zangemeister, Sitzgsb. Akad. Berlin 1887, с. 1011 и Th. Mommsen, Hermès 22 (1887), с. 596.

[62]) 1180600 писалось $\overline{|X|CLXXXDC}$. Впослѣдствіи, чтобы избѣжать искаженій, писали XXXM для 30000, затѣмъ замѣнили M черезъ CIƆ [ср. Th. Mommsen и I. Marquardt, Manuel des antiquités romaines (trad. G. Humbert); т. 10, составленный Марквардтомъ, перевед. A. Vigié, Paris 1888, с. 47, 49].

[63]) Напримѣръ, чтобы написать 350, они писали сперва символъ 3, затѣмъ символъ 100, затѣмъ—5, затѣмъ—10 [ср. E. Biot, I. asiatique (3) 8 (1839), с. 497; H. G. Zeuthen, Hist. math. trad. I. Mascart, Paris 1902, с. 227].

[64]) Впослѣдствіи въ Китаѣ были введены другія системы, и позиціонная система здѣсь не осталась неизвѣстной (см. K. L. Biernatzki, I. reine angew. Math. 52 (1856), с. 59, trad. I. Bertrand, I. des savants, 1869, с. 317, 464; M. Cantor, Vorles. (см. 48) 1, с. 631]. Для счета, впрочемъ, въ Китаѣ пользуются еще сванпаномъ, который похожъ на абаку, но состоитъ изъ параллельныхъ стержней, на которыхъ нанизаны шарики единицы. Того же рода орудія въ ходу у народовъ сѣверной Азіи и западной Россіи; отъ нихъ происходитъ boulier, введенный во Францію Понселэ для обученія дѣтей.

[65]) Сначала, вѣроятно, болѣе или менѣе отполированные камешки, затѣмъ диски изъ кости, и, наконецъ, диски изъ серебра и даже золота. Напомнимъ, что французское слово calcul (исчисленіе, счетъ) происходитъ изъ латин. calculus (камешекъ); греки говорили ψῆφος, откуда ψηφοφορία (счетъ) у византійцевъ.

[66]) Слово кидать (jeter, отсюда jeton, жетонъ, счетная марка) означало то же, что считать съ помощью абаки. Нѣмцы называютъ счетныя марки „Rechenpfennige“ или „Raitpfennige“, англичане—„counters“.

[67]) Самая старинная извѣстная марка этого рода—это марка королевы Бланки, матери Людовика IX. Она описана I. Rouyer и E. Hucher, Hist. du jeton au moyen-âge, Paris 1858, с. 78. См. также A. Nagl, Numism. Z. 19 (1887), с. 309.

[68]) Ср. F. Le Gendre, l'Arith. en sa perfection, 1 éd. Paris 1646; къ этой ариѳметикѣ, начиная съ изд. 1712 г., присоединялся Traité d'Arith. par jettons; изд. 1727 г., с. 472.

[69]) „Сидя за столомъ и считая съ помощью счетныхъ марокъ" (Актъ I, сцена I). См. также G. W. Leibnitz; Nouv. essais sur l'entendement (писаны съ 1701 до 1709), кн. 2, гл. 22, § 11, изд. Amsterdam et Lpz. 1765, въ Oeuvres philosophiques de Leibnitz; Phil. Schr. изд. C. I. Gerhardt 5, Berlin 1882, с. 240.

[70]) Statuts de Juillet 1701, Art. XV.

[71]) Essai d'Arithmétique morale (написано около 1760 г.), Suppl. à l'Hist. nat. 4, Paris 1777, с. 123.

[72]) Въ новыя времена счетныя марки не были особенно въ ходу въ Италіи; однако, существуетъ нѣсколько итальянскихъ марокъ [J. Rouyer (см. 67), с. 175].

[73]) Ср. Natalis de Wailly, Mém. Acad. inscript. 18^2 (1849), с. 562 [1848].

[74]) „Пропуска" (un „blanc") недостаточно, когда въ разсматриваемомъ числѣ не хватаетъ единицъ. Точно также его недостаточно, когда не хватаетъ нѣсколькихъ цыфръ подрядъ, ибо тогда трудно различить ширину „пропуска".

[75]) Въ романской Швейцаріи, въ валлонской Бельгіи и (хотя бы у простонародья) въ нѣкоторыхъ южныхъ областяхъ Франціи сохранился хорошій обычай говорить „septante, nonante" и иногда даже „octante". Simon Stevin, l'Arithmétique, Leyde 1585, говоритъ serptante, huictante (напр., с. 6). Въ Eléments d'Arithmétique Ch. E. L. Camus'a, Paris 1744 (2-е изд. 1774) еще встрѣчаются (с. 7/8) эти выраженія съ замѣчаніемъ, что, когда не считаютъ, то говорятъ и пишутъ soixante-dix, quatre-vingt, quatre-vingt-dix. Гораздо труднѣе было бы замѣнить слова onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize реченіями, согласными съ письменной нумераціей.

[76]) Б. Паскаль ясно изложилъ сущность нумераціи при любомъ основаніи (De numeris multiplicibus... написано въ 1654 г., изд. Paris 1665; Oeuvres éd. Hachette 3, Paris 1880, с. 312); J. Caramuel описалъ [Mathesis biceps vetus et nova, Campagna 1670, с. XLV—LXIV] системы нумераціи съ основаніемъ ≤ 10, съ основаніемъ 12 и съ основаніемъ 60. Иногда разсматриваютъ позиціонныя системы нумераціи, основывающіяся на совершенно иномъ принципѣ. Такъ, напримѣръ, въ такъ на-

зываемой факторіэльной нумераціи, символъ $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ представляетъ число $\alpha.\ 4! + \beta.\ 3! + \gamma.\ 2! + \delta.\ 1!$, т.-е. $24\alpha + 6\beta + 2\gamma + \delta$.

[77]) О. Коши [A. Cauchy, C. R. Acad. Sc. Paris 11 (1840), с. 796; Oeuvres (1) 5, Paris 1885, с. 439] замѣтилъ, что ариѳметическія дѣйствія значительно упрощаются, если, не измѣняя основанія системы нумераціи, уменьшаютъ на половину число цыфръ, придавая всякой цыфрѣ двоякое значеніе, одно вычитательное, другое — сложительное, въ зависимости отъ того, имѣетъ ли при себѣ эта цыфра значекъ, или нѣтъ (Коши проводилъ черту надъ цыфрой). Въ десятеричной системѣ первыя числа пишутся такъ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 1$\bar{4}$, 1$\bar{3}$, 1$\bar{2}$, 1$\bar{1}$, 10, 11, ... ; L. Lalanne [C. R. 11 (1840), с. 903] примѣняетъ это же самое обозначеніе къ системѣ съ основаніемъ три. Если мы возьмемъ знакъ ⫯ для обозначенія единицы, то первыя числа пишутся тогда:

0, ⫯, ⫯⫯̅, ⫯0, ⫯⫯, ⫯⫯̅⫯̅, ⫯⫯̅0, ⫯⫯̅⫯, ⫯0⫯̅, ⫯00, ⫯0⫯, ⫯⫯⫯̅, ⫯⫯0, ⫯⫯⫯, ⫯⫯̅⫯̅⫯̅, . . . ;

ср. также E. Collignon, Ann. Ponts. et Chaussées (7) 5 (1893), I с. 790/92.

[78]) Если взять знакъ ⫯ для обозначенія единицы, то первыя числа будутъ: 0, ⫯, ⫯0, ⫯⫯, ⫯00, ⫯0⫯ ⫯⫯0, ⫯⫯⫯, ⫯000, ...

Таблица умноженія сводится лишь къ одному правилу: „единожды одинъ—одинъ". Дѣленіе происходитъ безъ пробъ. Чтеніе чиселъ совершается легко, если принять систему Пеано, позволяющую читать восемь цыфръ заразъ съ помощью одного слога. Выкладки можно производить легко, изображая единицы различныхъ порядковъ съ помощью шашекъ на линіи шашечной доски [ср. E. Lucas, Récréations math. 1, Paris 1882, с. 145/60; E. Collignon, J. math. élém. (Longch.) (5) 1, 21ᵉ année, 1897, с. 101, 126, 148, 171].

[79]) Лейбницъ, указавшій на важное значеніе этой системы [письмо къ Шуленбургу, 1698; Hist. Acad. sc. Paris 1703, H. с. 58, M. с. 85; De dyadicis и др. манускрипты ганноверской библіотеки; Werke, изд. Gerhardt, Math. Schr. 7, Halle 1863, с. 223, 228, 235, 238, 241], ошибочно думалъ, что китайцы въ древнѣйшія вре-

мена были знакомы съ ней. T. Fantet de Lagny разсматривалъ бинарную ариѳметику почти одновременно съ Лейбницемъ [Hist. Acad. sc. Paris 1703, H. c. 61/62). G. F. Brander выпустилъ въ Аугсбургѣ въ 1767 г. (2 изд. 1775) „Arithmetica binaria sive dyadica".

[80]) T. N. Thiele, Overs. Selsk, Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1889, c. 25/42.

[81]) Бюффонъ (см. 71), с. 116, расхваливаетъ преимущества двѣнадцатеричной системы и предлагаетъ два новыхъ символа для чиселъ десять и одиннадцать См. также J. F. Chr. Werneburg, Teliosadik [Leipzig] 1800 и Lehrb. Arith. Iena 1819.

[82]) Weigel издалъ планъ четверичной ариѳметики [Aretologistica vel logistica..., Nürenberg 1687]. Уже Аристотель сдѣлалъ наблюденіе, что у одного ѳракійскаго народа нумерація заканчивалась числомъ четыре [Προβλήματα, кн. 15, гл. 3; изд. Acad. Berl., 2 (1831), с. 911 столб. а; изд. F. Didot 4, Paris 1857, с. 194]. I. D. Collene (изъ Эпиналя) есть авторъ книги, озаглавленной: Le système octaval, Paris 1845. См. также G. Eneström, Interméd. math. 7 (1900), c. 227 (Вопросъ 1717).

[83]) Способъ вычисленія нотъ отъ второго мажора ко второму мажору почти подобенъ способу образованія паскалева треуголника [Ch. Berdellé, Assoc fr. avan. sc. 26 (St. Etienne) 1897², c. 200].

[84]) Онъ даетъ точный способъ для извлеченія квадратныхъ корней, въ которомъ указываетъ распредѣленіе разсматриваемаго числа въ группы изъ двухъ цыфръ. Его система нумераціи въ точности неизвѣстна, но она, повидимому, не представляетъ аналогій съ нашей теперешней системой [ср. L. Rodet, I. asiatique (7) 13 (1879), с. 393; (7) 16 (1880), с. 440].

[85]) Brahmagupta, Cuttaca, гл. 18, разд. II, пер. H. T. Colebroocke, „Alg. wihh arith.", Лондонъ 1817; 339/40. Ср. L. Rodet, I. asiatique (7) 11 (1878), с. 30.

[86]) Въ 738 г. согласно E. Clive Bailey [I. asiatic soc. (2) 15, Лонд. 1883, с. 27].

[87]) Индусы означали особенными названіями степени числа 10. Они не имѣли числовой единицы второго порядка, какъ наша тысяча, или милліонъ, или греческая (см. 58) миріада (см. 57). Французская единица второго порядка „mille" идетъ отъ римлянъ. Герман-

скіе народы за единицу второго порядка взяли миллiонъ. Поэтому, въ то время, какъ у латинскихъ народовъ слова билліонъ, трилліонъ, ... означаютъ 10^9, 10^{12}, ..., у германскихъ народовъ они означаютъ 10^{12}, 10^{18}, ... [ср. G. W. Leibnitz, Phil. Schr. (см. 69) 5, с. 143/144]. Во Франціи германскій способъ былъ еще въ ходу въ концѣ 15-го вѣка [N. Chuquet, Triparty, Lyon 1484; ms. bibl. nation. (fonds français № 1346) fol. 2^6; Bull. bibl. storia mat. 13 (1880), с. 594] и въ 16 в. [I. Peletier, l'Arithmétique, Poitiers 1551/52, fol. 6^a]; но съ 17 в. усвоенъ уже латинскій способъ. Слово milliart или miliart, затѣмъ milliard употреблялось во Франціи въ смыслѣ милліона милліоновъ [см., напр., цитир. сочиненіе J. Peletier]; но уже I. Trenchant, l'Arithmétique, Lyon 1566, с. 14^a, 215^a, употребляетъ его въ теперешнемъ смыслѣ тысячи милльоновъ. Для 10^{12} употребляли также выраженіе millier [H. Meynier, l'Arith., Paris 1614, с. 14], milliasse [I. E. Gallimard, La sc. du calc. num. 1, Paris 1751, с. 2], milliote [ср. P. Tannery, Interméd math. 8 (1901), с. 234 (Вопросъ 1849); см. также 9 (1902), с. 75]. S. Stevin [Arith. (см. 75), с. 6] повторяетъ столько разъ слово тысяча, сколько есть группъ въ три цыфры, и не употребляетъ слова милліонъ. A. Girard говоритъ bilion для 10^{12} и trilion для 10^{24} [Invention nouvelle en Algèbre, Amsterdam 1629; перепечат. D. Bierens de Haan, Лейденъ 1884, sign. A_1 recto].

Слова unités, dizaines и centaines (unitates, deceni, centeni) встрѣчаются уже въ латинск. переводахъ 12 в. съ арабскихъ рукописей (ср. Algoritmi de numero indorum (ср. 96), ms. Codex Cambridge, car. 102^a, изд. B. Boncompagni, Trattati d'arit. 1, Римъ 1857, с. 7].

[88]) Въ ихъ десятиричной нумераціи нуль не былъ необходимъ.

[89]) Византійцы писали обыковенно $\bar{0}$, при чемъ черточка сверху означала числовое значеніе (см. 56) [Ср. Птоломей, Μεγάλη σύνταξις (Альмагестъ), кн. 1, гл. 9, изд. N. Halma, Paris 1813, с. 38 и слѣд.], но она не встрѣчается въ таблицахъ и Гейбергъ, который въ своемъ изданіи Альмагеста [Syntaxis mathematica 1, Lpz. 1898; 2, Lpz. 1902) принимаетъ ее для значущихъ чиселъ, отбрасываетъ ее, наоборотъ, для нуля. Во всякомъ случаѣ,

приходилось избѣгать смѣшенія съ омикрономъ, означавшимъ, въ качествѣ численной буквы, 70.

[90]) Въ другомъ видѣ, чѣмъ 0, не имѣющій ничего клинообразнаго.

[91]) Алховаресми много способствовалъ распространенію ея благодаря появленію (въ началѣ 9 в.) его трактата по ариѳметикѣ, который, впрочемъ, скоро распространился также и среди западныхъ арабовъ. Начиная со второй половины 8-го вѣка, индусскія сочиненія были навѣрное распространены въ Багдадѣ [ср. I. T. Reynaud, Mém. Acad. inscrip. 18^2 (1849), с. $^{312}/_{14}$ [1845/46]; M. Cantor, Vorles. (см 48)[1], с. 657; H. Suter, Abh. Gesch. Math. 10 (1900), с. 4, 5].

[92]) Сначала они писали сполна наименованія чиселъ, затѣмъ приспособили къ своему алфавиту систему грековъ, какъ это уже давно сдѣлали евреи.

[93]) Наиболѣе старинное упоминаніе слова sifr въ смыслѣ нуля относится, приблизительно, къ 880 г. [I. Nöldeke, Bysant. Z. 2 (1893), с. 300].

[94]) Иные тщетно пытались вывести слово sifr изъ греч. ψῆφος черезъ посредство слова sipos: этимъ словомъ абакисты пользовались для обозначенія не отмѣченной счетной марки, которую они употребляли не для замѣщенія нуля (они въ немъ не нуждались), но для различенія столбца, на которомъ производилось дѣйствіе.

[95]) Въ первыхъ латин. перевод. (12 в,) арабскихъ рукописей нуль называется circulus [ср. Algoritmi de numero indorum, ms. Codex Cambridge, car. 102 [в.], изд. B. Boncompagni, Trattati d'arit. 1, Римъ 1857, с. 3; yean de Seville (Hispalensis) Liber algorismi de practica arismetrice, ms. bibl. nation. fol. 85 [в.], столб. b., изъ B. Boncampagni, Trattati d'arit. 2, Римъ 1858, с. 28]. Въ самомъ старинномъ французскомъ трактатѣ объ алгоризмѣ [ms. bibl. S-te Geneviève, fol. 150 [a], столб. 1; Bull. bibl. storia mat. 15 (1882), с. 53] мы читаемъ: „iusca le darraine ki est appellée cifre 0“. Въ 13 в. латинское слово cifra для 0 встрѣчается въ Algorismus demonstrandus Yordan Nemorarius'a (изд. I. Schöner, Nüremberg 1534) и въ Algorismus [tractatus de arte numerandi] Sacrobosco (Jean de Holywood), написанномъ въ Парижѣ около 1240 г. [комментарій Pierre de Dace,

написанный въ 1291 г.; изд. M. Curtze, Копенгагенъ 1897]. Сакрабоско употребляетъ также слово teca, происхожденіе котораго не ясно: тэта? или же нѣкоторое клеймо кольцеобразной формы, о которомъ говоритъ Pierre de Dace [изд. M. Curtze, с. 26). Для N. Chuquet „le zéro est une figure qui porte le nom de chiffre ou nulle [Triparty (см. 87), fol. 2[a]; Bull. bibl. 13; с. 593] L. Paciuolo [Summa de Arithmetica, напис. въ 1487, напечат. въ Венеціи 1494, 2 изд. 1523, fol. 19[a]] говоритъ: „nulla 0 over zero". Еще въ концѣ 18 в. встрѣчается латинское слово cyphra въ смыслѣ 0 [L. Euler, Opusc. analytica 1, СПБ. 1783, с. 87], Англичане еще теперь говорятъ для 0 „cypher".

[96]) Арабскій оригиналъ этой ариѳметики Магомета бенъ Муза Алховаресми не дошелъ до насъ; Atelhard de Bath (около 1120 г.) почти навѣрное перевелъ ее; но имѣющійся въ нашемъ распоряженіи переводъ [ms. Codex Cambridge изд. B. Boncompagni, Trattati d'arit. 1, Римъ 1857] принадлежитъ, можетъ быть, Gerard de Cremone'у и нѣсколько позднѣйшаго происхожденія.

[97]) Въ 9-омъ и 10-омъ вв. въ монастыряхъ и церковныхъ школахъ ариѳметикѣ обучали съ помощью римскихъ цыфръ; со второй половины 10 в. входитъ въ употребленіе абака со столбцами.

[98]) Папа съ 999 до 1003, подъ именемъ Сильвестра II. Несмотря на усилія Н. Бубнова N. [Bubnov, Gerberti, Opera mathematica, Berlin 1899], роль Герберта въ введеніи цыфръ въ абаки еще не совсѣмъ выяснена.

[99]) Въ особенности въ лотарингскихъ и валлонскихъ монастыряхъ бенекдитинскихъ монаховъ. Развивающаяся въ это время система состоитъ въ томъ, чтобы замѣнить на абакѣ (abacus римлянъ) марки-единицы марками, снабженными цыфрами, что̀ позволяетъ дѣйствія, аналогичныя нашимъ. Но псевдо-Боэцій (см. 107) [изд. G. Friedlein: A. M. T. S. Boetii instit.... (см. 8), с. 397] показываетъ, что марки могли быть въ видѣ римскихъ цыфръ, буквъ и т. д. Рѣшительнаго доказательства употребленія арабскихъ цыфръ начиная съ эпохи Герберта, еще не существуетъ, хотя весьма вѣроятно, что онъ ввелъ ихъ въ реймсскую школу.

[100]) Слово алгориѳмъ происходитъ отъ имени Алховаресми. I. T. Reynaud предположилъ это первый [Mém. Acad. inscrip. (см. 91) 18^2, с. 303]; догадка его была подтверждена въ 1857 г. открытіемъ кэмбриджскаго кодекса (см. 96).

[101]) Изъ учениковъ Герберта здѣсь слѣдуетъ назвать: Bernelin'а изъ Парижа, Raoul'а (Radulph) изъ Лана, умершаго въ 1131 г., и ихъ современника Gerland'а, пріора монастыря Св. Павла въ Безансонѣ.

[102]) Гейбергъ въ своемъ изд. Эвклида (см. 44) далъ [5, Lpz. 1888], согласно одному греческ. манускрипту 12 в. (Codex Vindobonensis Gr. 103), многочисленныя схоліи, въ которыхъ встрѣчаются уже (схоліи X книги) цыфры, похожія по формѣ на цыфры восточныхъ арабовъ. Одна схолія монаха Неофита показываетъ, что сверху каждой цыфры должно надписать извѣстное количество кружковъ, равное показателю степени 10, на которую она умножается [ср. P. Tannery, Revue archéol. (3) 5 (1885), с. 99; см. также id. (3) 7 (1886), с. 355]. Это—та система, которую F. Wöpcke (I. asiatique (6) 1 (1863), с. 69/79, 514/29) приписалъ западнымъ арабамъ подъ названіемъ цыфръ gobâr.

[103]) Maximus, по прозвищу Πλανούδη.

[104]) *ψηφοφορία κατ'Ἰνδοὺς ἡ λεγομένη μεγάλη* (около 1300 г.); греч. текстъ изд. C. I. Gerhardt, Halle 1865, нѣм. перев. H. Wäschke, Halle 1878, с. 3, цыфры Планýди,—это цыфры восточныхъ арабовъ; П. Таннри обѣщалъ изданіе ψηφοφορία κατ' Ἰνδούς, написанной въ 1254 г., въ кот. цыфры приближаются къ формамъ, бывшимъ въ ходу въ Италіи въ ту же эпоху. Планýди называетъ нуль τξίφρα и изображаетъ его, „согласно индусамъ", символомъ 0.

[105]) Форма цыфръ 1, 6, 8 и 9 мало измѣнялась какъ у арабовъ, такъ и у христіанъ Запада. Цыфры западныхъ арабовъ для 2, 3 и 5 представляютъ нѣкоторое сходство съ нашими цыфрами (3 и 5 первоначально перевернуты какъ у христіанъ, такъ и у арабовъ Запада). Но форма 4 и 7 сильно измѣнилась. Цыфры 5, 6, 7, 8 восточныхъ арабовъ ясно рознятся отъ цыфръ западныхъ арабовъ (цыфръ gobâr).

[106]) Мы еще и теперь пишемъ 5 и ς для пяти.

[107]) Эти апексы встрѣчаются въ геометріи (см. 48)

[изд. G. Friedlein (см. 8), с. 397], которую въ средніе вѣка приписывали Боэцію (жившему около 5 в.). Въ дѣйствительности древнѣйшая рукопись, содержащая эту геометрію, это—эрлангенская (11 вѣкъ); весьма вѣроятно, что оригиналъ—дѣло рукъ фальсификатора, жившаго позже Герберта (см. 98) [ср. P. Tannery, Bibl. math. (3) 1 (1900), с. 42].

[108]) F. Wöpcke (см. 102); G. Friedlein, Die Zahlenzeichen..., Erlangen 1869.

[109]) P. Tannery, Revue archéol. (3) 20 (1892), с. 64.

[110]) I. Huswirt, Enchiridion, Кельнъ 1504 [ср. Wildermuth, Prog. Тюбин. 1864/65] употребляетъ слово цыфра въ двухъ смыслахъ—въ его теперешнемъ значеніи и въ смыслѣ 0. По португальски слово cifra еще и теперь имѣетъ оба значенія цыфры и нуля.

[111]) [Ср. G. Wertheim, Bibl. math. (2) 12 (1898), с. 120]. Она изображена въ Repertorium der steierischen Münzkunde F. Pichler'a, Gratz 1875. Она датируетъ отъ 1458 г. Это—древнѣйшая извѣстная намъ монета съ позиціонной нумераціей.

[112]) Ср. A. G. Kästner, Gesch. d. Math. 1, Геттингенъ 1796, с. 36.

[113]) „Liber de remediis utriusque fortunae", Кельнъ 1471. Типографія Petzensteiner (Нюренбергъ) съ 1782 г. вводитъ въ печатаемые ею трактаты по математикѣ такую же пагинацію, какъ и наша теперешняя.

[114]) ἀριθμός, число, собраніе предметовъ, это—согласно М. Бреалю—то же слово, что ἀρθμός, и означаетъ, слѣдовательно, упорядоченную связь.

[115]) Отъ латин. calculus, представляющаго точный переводъ греч. ψῆφος (камешекъ).

[116]) Экономизируя, по возможности, дѣйствіе прямого счета (E. Mach, Die Mechanik, 2 изд. Lpz. 1889, с. 458).

[117]) Буквы служатъ для сокращенія въ ариѳмет. Діофанта (около + 300) [Opera, изд. P. Tannery, 1, Lpz., 1893; 2, Lpz. 1895]. Но систематическая символика имѣется лишь для одного количества, его степеней до шестой и ихъ обратныхъ. Чтобы разсуждать надъ нѣсколькими различными количествами и указать дѣйствія, греки изображали обыкновенно эти количества линіями

Одесская Общественная Библиотека

(отмѣчая каждую одной или двумя буквами), а дѣйствія отмѣчали, какъ въ геометріи.

[118]) Aryabhata (род. въ 496 г.). Математ. главы Брамагупты (род. въ 598 г.) и Bhaskara Acarya (род. въ 1114) были перев. на англ. H. T. Colebroock'омъ [Algebra with arithmetic... (см. 85), Лондонъ 1817].

[119]) Это, можетъ быть, древнѣйшій арабскій трактатъ по алгебрѣ (9-ый вѣкъ) Латин. перев. [ms. bibl. nation.], сдѣланный, можетъ быть, Жераромъ Кремонскимъ (Gerard de Cremone) (12 в.) изд. Либри (G. B. I. T. Libri), Hist. math. en Italie 1, Paris 1838, с. 253; 2 изд. Halle. 1865. Арабскій текстъ и англ. переводы изд. F. Rosen, Лонд. 1831 [ср. L. Rodet, I. asiatique (7) 11 (1878), с. 21]. Происхожденіе этой алгебры, кажется, болѣе греческое, чѣмъ индусское: оба арабскихъ слова, составляющихъ заглавіе сочиненія, соотвѣтствуютъ, между прочимъ, двумъ дѣйствіямъ, которыя ясно рекомендуетъ Діофантъ при разсмотрѣніи уравненій (съ однимъ неизвѣстнымъ); jebr (возстановленіе) заключается въ томъ, чтобы перенести изъ одной части уравненія въ другую члены съ знакомъ — ; moukâbala (противоположеніе) заключается въ томъ, чтобы сдѣлать приведеніе отдѣльныхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ уравненія.

[120]) Умеръ въ 1486 г.; F. Wöpcke перев. его ариѳметич. трактатъ [Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei 12 (1858/59), с. 230, 399].

[121]) Въ папирусѣ Риндъ (см. 51) знакомъ равенства служитъ скарабей, въ качествѣ іероглифа означающій слово „становится“ (перев. A. Eisenlohr 1, напр. с. 49/53, отд. (табл. IX; № 6). Діофантъ изображалъ равенство начальными буквами ἴσ отъ слова ἴσος (равный). [Opera (см. 117) 1, с. 102, 112, 126, ...]. Аналогичнымъ образомъ арабы употребляли начальную букву слога lâm, которымъ заканчивается слово, означающее равный [ср. F. Woepcke (см. 120), с. 420]. Ф. Віета употребляетъ глаголъ aequare. A. Girard пишетъ esgale. Начиная отъ Віеты и до Лейбница—и даже до середины 18 вѣка — встрѣчается знакъ равенства ∞, представляющій искаженіе начальныхъ буквъ ae отъ слова aequare.

[122]) Знакъ = встрѣчается въ первый разъ въ сочиненіи R. Recorde, „The whetstone of witte“, [Лонд.,

дата не указ. (предислов. 1557), sign. Ff1], который выбралъ его, по его словамъ, „потому, что ничто не можетъ быть болѣе равнымъ, чѣмъ двѣ параллельныя черточки". Усвоенный Валлисомъ, онъ мало-по-малу, но весьма медленно, замѣнилъ всѣ прочіе знаки. Во Франціи, гдѣ Віета и Декартъ придали совсѣмъ иной смыслъ двумъ горизонтальнымъ параллельнымъ черточкамъ (см. 145), во второй половинѣ 17 в. равенство часто обозначалось двумя вертикальными параллельными чертами.

[123]) Знаки $>$ и $<$ не встрѣчаются раньше T. Harriot'a [Artis analyticae praxis, Лонд. 1631, с. 10]; знаки $\geqq$, $\leqq$ принадлежатъ P. Bouguer [Corresp. math. phys. (Эйлера, ...) изд. P. H. Fuss 1, С.-Петербургъ, 1843, с. 304).

[124]) In artem analyticam isagoge, Tours 1591; Opera, изд. F. Schooten, Лейденъ, 1646, с. 1; перев. F. Ritter, Bull. bibl. storia math. 1 (1868), с. 228. См. также F. Ritter, Assoc. fr. avanc. sc. 21 (Pau) 1892², с. 178.

[125]) Чтобъ выразить $A^3 + BA^2 + CA = D^2F$ Віета писалъ AC + B in Aq + C pl in A aeq. Dq in F.

[126]) Анализъ понятій „равный, больше, меньше, бóльшій и меньшій" находится у Гуссерля, Philos. d. Arithm. (см. 15), гл. 5 и 6.

[127]) Всякое опредѣленіе неравенства должно удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) неравенство $a > b$ влечетъ за собой неравенство $b < a$; это послѣднее влечетъ за собой первое неравенство. 2) неравенство $a > b$ и равенство $b = c$ влекутъ за собой неравенство $a > c$; неравенство $a < b$ и равенство $в = c$ влекутъ за собой неравенство $a < c$. 3) Неравенства $a > b$, $b > c$ влекутъ за собой неравенство $a > c$.

[128]) Шрёдеръ [Abriss. d. Arith. u. Alg. 1, Lpz. 1874] пытался примирить педагогическую точку зрѣнія съ логической, занявшись вопросомъ объ обученіи начинающихъ. Это было обстоятельнѣе сдѣлано Шубертомъ въ его учебныхъ руководствахъ [H. Schubert, Sammlung. von arith. u. alg. Fragen ..., Potsdam 1883, 4 изд. 1896; System der Arith., Potsdam 1885; Arith u. Alg. (Sammlung. Göschen), Lpz. 1896, 1898; Elem. Arith. und. Alg. (Sammlung Schubert), Lpz. 1899].

[129]) Мнѣнія насчетъ того, какія дѣйствія считать основными, сильно разнились между собой. Индусы имѣли шесть

основныхъ дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня. Алховаресми [Algoritmi de numero indorum (см. 95), ms. Codex Cambr., car. 105ᵃ ; B. Boncompagni, Trattati d'arit. 1, с. 10] говоритъ о дѣленіи пополамъ и объ удвоеніи, какъ о двухъ особенныхъ дѣйствіяхъ. У арабовъ встрѣчается иногда, что дѣленіе меньшаго числа на *бóльшее различается* отъ собственно дѣленія [ср. H. Suter, Bibl. math. (3) 2 (1901), с. 17]. Вообще говоря, можно утверждать, что ариѳметики-купцы, вслѣдъ за Леонардомъ Пизанскимъ, не разсматривали дѣленія пополамъ и удвоенія, какъ особенныя дѣйствія, между тѣмъ, какъ ариѳметики-теоретики вслѣдъ за Iordan'омъ Nemorarius (см. 95) [Algorismus, изд. I. Schöner, с. 7] и Sacrobosco (см. 95) тщательно отличали ихъ отъ дѣленія и умноженія. Sacrobosco въ своемъ Algorismus, бывшемъ долгое время общепринятымъ руководствомъ въ университетахъ, разсматриваетъ подъ именемъ progressio 9-ое дѣйствіе, состоящее, впрочемъ, въ суммированіи нѣкоторыхъ частныхъ рядовъ чиселъ. N. Chuquet въ своемъ Triparty (см. 87) и Лука Пачіуоло въ своей Summa (см. 95) не упоминаютъ даже о дѣленіи пополамъ и объ удвоеніи, какъ особенныхъ дѣйствіяхъ. Пачіуоло перечисляетъ (fol. 19ᵃ) семь дѣйствій: нумерація, сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, прогрессія, извлеченіе корня. Различеніе дѣленія пополамъ и удвоенія, какъ особенныхъ дѣйствій, безъ сомнѣнія, египетскаго происхожденія и перешло, вѣроятно, къ арабамъ черезъ посредство грековъ (ср. M. Cantor, Vorles. (см. 48) 1, с. 46, 674).

[130]) О теоріи ариѳметическихъ дѣйствій можно справиться у Грассмана; H. Grassmann, Ausdehnungslehre Lpz. 1844, Berlin 1862, Lpz. 1878; Werke 1, Lpz. 1894/96. H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Lpz. 1867; G. I. Hoüel, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 1 (1876), с. 1; (2) 5 (1883), с. 149; Théorie élement. des quantités complexes, Paris 1874, с. 293; O. Stolz und I. A. Gmeiner, Theor. Arith., Lpz. 1900/2, с. 37 и сл.

[131]) На счетъ алгебры понятій (Begriffsschrift) см. особенно сочиненіе G. Frege (см. 36) и G. Peano (см. 20).

[132]) На это указываетъ E. Schröder, „Der Operationskreis des Logikcalcüls“, Lpz. 1877.

[133]) Принципъ этотъ впервые въ общей формѣ былъ высказанъ Г. Ганкелемъ, H. Hankel, Complexe Zahlensysteme, с. 10. Впрочемъ, еще G. Peacock указалъ на необходимость чисто формальной математики и по этому поводу формулировалъ нѣкоторый принципъ, обобщеніемъ котораго является принципъ перманентности (Report Brit. Assoc. 3, Combridge 1833, изд. Лонд. 1834, с. 195; Treatise on Algebra, Cambridge 1830, с. 105; 2 изд. 2, Cambridge 1845, с. 59).

Обыкновенно прямыми дѣйствіями называютъ сложеніе, умноженіе, возвышеніе въ степень. Вычитаніе, дѣленіе, извлеченіе корня и нахожденіе логариѳмовъ являются соотвѣтственно обратными дѣйствіями. Согласно Ганкелю, прямыя дѣйствія относятся къ способу связи, называемому имъ тэтическимъ, а обратныя дѣйствія— къ литическому. Изъ тэтической связи $a \times b = c$ вытекаютъ двѣ литическія связи $c \top a$ и $c \perp b$. У Штольца и Гмейнера (см. 130) мы находимъ логическое изслѣдованіе условій, при которыхъ—предполагая, что тэтическая связь между двумя предметами a и b имѣетъ всегда смыслъ, но не соотвѣтствующая литическая связь—возможно создать, какъ въ теоріи отрицательныхъ чиселъ (№ **17**) и въ теоріи дробныхъ чиселъ (№ **21**), новый символъ, составленный изъ двухъ элементовъ, къ которому примѣнимъ законъ перманентности.

[134]) Разница между „считать“ и „прибавлять“ заключается лишь въ несоединеніи или соединеніи нѣсколькихъ группъ единицъ въ одну группу.

[135]) Г. Канторъ [Math. Ann. 46 (1895), с. 489] развиваетъ этотъ способъ образованія количественныхъ (конечныхъ) чиселъ, сближающій ихъ, очевидно, съ порядковыми числами, такимъ образомъ, что придаетъ ему максимально возможную логическую точность.

[136]) Употребленіе этого знака, какъ и (см. 145) знака—, довольно недавняго происхожденія. Впервые оба эти знака встрѣчаются напечатанными въ Compendium arithmeticae mercatorum, принадлеж. Jean Widman'y (изъ Эгера), Lpz. 1489, fol. 85, 86, 110 „Behēde und hubsche Rechenung auff allen Kauffmanschaft“ [ср. Bull. bibl. storia mat. 9 (1876), с. 188]. Ихъ встрѣчаютъ также въ одномъ

Одесская Общественная Библиотека

изъ манускриптовъ Вѣнской библіотеки „Regulae cosae vel algebrae“, написанномъ, навѣрное, до 1510 г., въ трактатѣ по исчисленію, принад. Grammateus'y „Ayn new Künstlich Buech...“, Нюренб. 1521/28, и въ Coss (см. 144) его ученика, Chr. Rudolff'a; Страсбургъ 1525 г. Arithmetica integra (M. Stifel'a, Нюренб. 1544) популяризировала употребленіе этихъ знаковъ; но еще и въ 17 в. они не были всѣми приняты.

О происхожденіи знака $+$ ничего достовѣрнаго неизвѣстно. Но существуютъ хартіи и манускрипты, въ которыхъ союзъ „et“ изображенъ съ помощью особенной формы буквы t, иногда съ болѣе или менѣе короткой чертой, вверху налѣво, соединяющейся съ вертикальной чертой отъ t (льежскія хартіи отъ 1298, 1383, ...); однако, часто края черты вовсе нѣтъ (Bibl. Darmstadt, ms. 2640, 13 вѣкъ, fol. 108). Въ 15 и 16 вв., впрочемъ, пользовались охотнѣе словомъ „et“ чѣмъ словомъ „plus“. [Ср. C. Le Paige, *Ann. Soc. scient. Bruxelles* 16^2 (1891/92), с. 74]. Другія догадки высказали A. de Morgan [Trans. Cambr. philos. Soc. 11 (1871), с. 203, (1864)] и Ch. Henry [Revue archéol. (2) 38 (1879), с. 3].

Леонардъ Пизанскій для обозначенія сложенія часто пишетъ „et“ рѣдко „plus“ [ср. Liber abbaci 1202; въ дошедшемъ до насъ текстѣ отъ 1228 г. fol. 191^6; Scritti di L. Pisano pubbl. da B. Boncompagni 1, Римъ 1857, с. 414]; для обозначенія вычитанія онъ пишетъ „minus“. [О происхожденіи реченій „plus“ и „minus“ см. G. Eneström, Interméd. math. 1 (1894), с. 119 (Вопросъ 5) и Bibl. math. (2) 13 (1899), с. 105]. N. Chuquet и Л. Пачіуоло употребляютъ знаки p или $\tilde{p}$ и m или $\tilde{m}$ для обозначеніе словъ plus (più) и moins (meno, minus), [Triparty (см. 87), fol. $62^{в}$, Bull. bibl. 13, с. 710; Summa (см. 45), fol. 92, ...]; гипотеза, согласно которой знакъ $+$ является сокращеніемъ слова „plus“, во всякомъ случаѣ, кажется мало вѣроятной [ср. A. de Morgan, Arithmetical Books, Лонд. 1847, с. 19].

137) Выраженіе „коммутативный“ („commutative“) принадлежитъ F. I. Servois [Ann. math. pures appl. 5 (1814/15), с. 98].

138) Законъ перемѣстительности не мѣшаетъ, собственно говоря, проводить различіе между первымъ и вторымъ членами суммы двухъ членовъ. Первый членъ тогда раз-

сматривается, какъ пассивный (предназначенный быть увеличеннымъ), второй, какъ активный (предназначенный увеличивать). Это различіе между активнымъ и пассивнымъ членами сможетъ быть примѣнено съ пользой ко всѣмъ дѣйствіямъ, производимымъ надъ двумя членами. [K. H. Liersemann, Lehrb. Arith. u. Alg. Lpz. 1871, с. 1] Оно встрѣчается у Шрёдера, Lehrb. (см. 3) 1, с. 121. Въ случаѣ сложенія онъ называетъ пассивное число „Augend", активное—„Increment". Шубертъ называетъ это послѣднее число „Auctor" [H. Schubert, Elem. Arith. und Alg., Lpz. 1899, с. 19]. Французскій языкъ не обладаетъ соотвѣтствующими спеціальными наименованіями. Однако, пользованіе словами passif и actif позволяетъ различать оба члена суммы [ingrediens A. Girard'a, Inv. (см. 87), sign. A_1].

Употребленіе (круглыхъ) скобокъ для группировки членовъ введено, кажется А. Жераромъ (Inv. (см. 87), sign. E_1 recto, B_3 verso, C_1 recto]. Дѣйствительно, чтобы изобразить квадратный корень изъ $2+\sqrt{3}$, онъ пишетъ $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$. Но тамъ, гдѣ мы пишемъ 7—(—2), онъ пишетъ еще 7——2 [Inv., sign. E_1]. Уже R. Bombelli. [L'Algebra, Болонья 1572; 2 изд. Болонья 1579, с. 6] пользовался своего рода скобками для группировки членовъ. Віета отмѣчалъ группировку членовъ особаго рода скобкой [ср. Zeteticorum libri quinque, Туръ 1593 г., кн. 4, Zétetique 10, fol. 18^a; Opera, изд. F. Schooten (см. 124), с. 70]. Но круглыя скобки встрѣчаются въ переводѣ 5 книгъ „вопросовъ" Віетъ, сдѣланномъ I. L. de Vaulezard'омъ, Paris, 1630, напр., на с. 218.

Р. Декартъ и его ученики проводили иногда черту надъ членами, которые мы заключаемъ въ скобки. Еще задолго до Декарта Н. Шуке проводилъ черту внизу подъ членами, которые онъ хотѣлъ отдѣлить отъ другихъ, соединяя ихъ [Triparty (см. 87), fol 46^a, 46^b; Bull. bibl. 13, с. 655]. Пеано предложилъ замѣнить скобки точками.

[140]) Этотъ законъ былъ обнаруженъ для суммъ и произведеній лишь въ 19 вѣкѣ. Терминъ ассоціативный былъ введенъ, повидимому, В. Р. Гамильтономъ.

[141]) Г. Грассманъ показалъ (Lehrb. d. Arith. Berlin 1861, с. 2/10], что правила сложенія (и правила умноженія с. 17/28) натуральныхъ чиселъ вытекаютъ изъ этого

двойнаго соглашенія. См. также H. Helmholtz, Abh. (см. 14) 3, с. 363; Philos. Aufs. (см. 14), с. 24; F. Klein, Math. Ann. 37 (1890), 572; H. Poincaré, Revue metaph. 2 (1894), с. 375; La Science et l'hypothèse, Paris [1903], с. 15.

[142]) Ахмесъ уже разсматривалъ простѣйшія ариѳметическія прогрессіи [папирусъ Риндъ (см. 51), перев. A. Eisenlohr 1, с. 89/92, 159/162; таблицы XIV, XIX; № 39 и 40, 64]; пиѳагорейцы тоже [см. Théon de Smyrne, Exposition des connaissances math...., ed. I. Dupuis Paris, 1892, с. 64/69]. Леонардъ Пизанскій даетъ формулу для суммированія любой ариѳметической прогрессіи [Liber abbaci (см. 136), fol. 70, изд. B. Boncompagni 1, с. 166/68]. Она была извѣстна грекамъ; Діофантъ даетъ доказательство ея [De polygonis numeris, γ; Opera (см. 117) 1, 456].

[143]) Ср. A. Berger, Nova Acta Upsal. (3) 17 (1898), мем. № 3.

[144]) Египтяне для обозначенія неизвѣстнаго употребляли іероглифъ, означающій „кучу". У. Діофанта неизвѣстное изображается символомъ ς (Opera 1, с. 4,...]. Арабы называли неизвѣстное „schai" (вещь) или jidr (корень).

Второе изъ этихъ словъ было переведено словомъ radix, господствовавшимъ въ 12 в., первое—словомъ res, которое, въ свою очередь, взяло верхъ, начиная съ Леонарда Пизанскаго. Арабское слово, означающее корень, есть переводъ индусскаго слова съ тѣмъ же смысломъ, примѣненнаго къ квадратному корню. Алховаресми, разсматривая квадратныя уравненія, употребилъ слово jidr (корень) въ противоположность квадрату, по арабски mâl (δύναμις, богатство), перевед. въ средніе вѣка черезъ census. Что касается слова res, то итальянцы его перевели черезъ cosa, изъ котораго нѣмцы сдѣлали cossa въ концѣ 15 в., затѣмъ coss въ 16 в. Л. Пачіуоло означаетъ x^1 символомъ *co* [Summa (см. 95), fol. 67b]; нѣмецкіе коссисты пользуются знакомъ, получившимся изъ сокращенія этого знака *co* или, можетъ быть, иногда изъ слова radix. Віета означалъ неизвѣстныя съ помощью гласныхъ [Isagoge (см. 124), fol. 7a, изд. F. Schooten, с. 8]. А. Жираръ и П. Ферма слѣдуютъ еще примѣру Віеты. Декарту [Geometrie. Лейд. 1637 г.,

c. 4, 5, 6; Oeuvres, éd. Ch. Adam et P. Tannery 6, Paris 1902, c. 373, 375] мы обязаны общепринятымъ теперь обычаемъ обозначать неизвѣстныя съ помощью послѣднихъ буквъ алфавита x, y, z... Гипотеза, согласно которой Декартъ принялъ за x символъ нѣмецкихъ коссистовъ, мало вѣроятна. Врядъ ли болѣе вѣроятна другая гипотеза, будто онъ заимствовалъ x изъ знака, употреблявшагося P. A. Cataldi [Trattato dell' Algebra..., Болонья 1610, Trattato del modo brevissimo..., Болонья 1613].

[145]) Вмѣсто этого знака Діофантъ (Opera 1, c. 12] и до него Геронъ въ своихъ Μετρικά [Heronis Alexandrini Opera 3, изд. H. Shöne, Lpz. 1903, c. 156, критич. примѣчаніе] употребляетъ знакъ ⊤, который онъ обозначаетъ, какъ перевернутое и укороченное пси, и который есть, вѣроятно, архаическое σαμπῖ (см. 55). Византійцы (Максимъ Плануди ?) произносили его въ неизмѣнной формѣ λεῖψει, за кот. слѣдовалъ родительный падежъ. Но въ древности онъ представлялъ скорѣе причастіе λιπών съ его различными падежами, за кот. слѣдовалъ винительный падежъ.

О происхожденіи знака ничего достовѣрнаго неизвѣстно. Можетъ быть, это—простая черта, служившая купцамъ для отдѣленія величины тары—долгое время называвшейся minus—отъ величины всего вѣса товара. Согласно Л. Родэ [L. Rodet, Actes Soc. phiol Alencon, 8 (1879), c. 185], этотъ знакъ скопированъ будто бы съ египетскаго іератическаго знака. Происхожденіе нашего знака искали также въ знакѣ, употреблявшемся Герономъ и Діофантомъ и превратившимся въ ⊤ передъ тѣмъ, какъ стать?—Другіе высказали догадку, что знакъ— имѣетъ свое начало въ ὀβελός александрійскихъ грамматиковъ. Ни одна изъ этихъ гипотезъ не подкрѣплена какими-нибудь убѣдительными доказательствами.

Въ теченіе долгаго времени вмѣсто — писали $\div$. Еще въ 17 в. въ Нидерландахъ встрѣчается знакъ $\div$. Віета писалъ $a - b$ лишь для $a > b$. Онъ обозначаетъ черезъ $a = b$ абсолютную величину разницы a и b, т. е. $a - b$; если $a > b$, и $b - a$, если $a < b$ [ср. Isagoge, fol. 5, изд. F Schooten, c. 5].

[146]) Шрёдеръ [Lehrb. (см. 3) 1, c. 217/21] обобщаетъ это правило. Онъ предлагаетъ, каково бы ни было разсматриваемое дѣйствіе, отбрасывать скобки въ двухъ слу-

чаяхъ: 1) когда изъ двухъ дѣйствій одного и того же порядка (№ 29) дѣйствіе, указываемое на первомъ мѣстѣ, должно быть произведено первымъ; 2) когда изъ двухъ дѣйствій различныхъ порядковъ $\mu > \nu$ дѣйствіе порядка μ должно быть произведено первымъ. Это правило, кажется, усвоено большинствомъ нѣмецкихъ авторовъ. Дальше мы увидимъ (примѣч. 166 и № 26), что, если оно согласуется съ принятыми во Франціи обычаями въ случаѣ сложенія и умноженія, то оно не согласуется съ ними въ случаѣ другихъ дѣйствій.

[147]) Нуль появляется въ 17 вѣкѣ, какъ знакъ разницы между двумя любыми равными числами. Жираръ [A. Girard, Inv. (см. 87), Sign. D_1 recto] сознательно разсматриваетъ нуль, какъ число. До него считали невозможнымъ уравненіе, которое допускало бы лишь корень нуль. Начиная съ 7 вѣка, индусы, правда, пытались производить умноженіе и дѣленіе на нуль.

[148]) Ф. Віета въ своемъ Isagoge (см. 124) [fol 5; изд. F. Shooten, с. 5] говоритъ о противоположности „affirmata, negata". Его ученикъ I. de Beaugrand говоритъ о положительныхъ и отрицательныхъ корняхъ въ своемъ 3-мъ анонимномъ памфлетѣ противъ геометріи Декарта [Bull. sc. math. (2) 15 (1891), с. 283; P. Tannery, La correspondance de Descartes dans les inèdits du fonds Libri, Paris 1893, с. 45]. T. Harriot говоритъ positivus и privativus въ 1632 г. [ср. I. Wallis, De algebra tractatus, Opera 2, Oxford 1693, с. 139], но самъ Валлисъ предпочитаетъ говорить affirmatus и negativus. Такимъ же образомъ выражается и Жилль Персонье (Gilles Personier), по прозванію Роберваль [Mem. Acad. sc. Paris 1666/99, 6, èd. 1730, с. 94], который, между прочимъ, употребляетъ слово positivus въ нашемъ смыслѣ реальнаго. Декартъ никогда не употреблялъ словъ положительный и отрицательный. Вмѣсто отрицательнаго числа онъ говоритъ еще „ложное число" („nombre faux") [Geomètrie (см 144), кн. 3, Oeuvres 6, с. 445 и сл.]. Когда онъ говоритъ о ложныхъ числахъ, онъ имѣетъ въ виду лишь ихъ абсолютное значеніе [Oeuvres 6, с. 473] и разсматриваетъ ихъ, какъ если бы они возрастали вмѣстѣ съ ихъ абсолютнымъ значеніемъ [Oeuvres 6, с. 450].

[149]) Если въ логическомъ построеніи ариѳметики введеніе отрицательныхъ чиселъ должно, можетъ быть, предшествовать введенію дробныхъ чиселъ (по поводу порядка, въ которомъ слѣдуетъ разсматривать 4 основныхъ дѣйствія, см. A. Capelli, Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), с. 138], то исторически, какъ достовѣрно можно утверждать, употребленіе отрицательныхъ чиселъ значительно болѣе поздняго происхожденія, чѣмъ употребленіе дробей. Греческіе математики оперировали лишь съ такими разностями, въ которыхъ пассивный членъ больше активнаго члена. Однако, Діофантъ не особенно занимается установленіемъ этого признака, и, съ другой стороны, онъ знаетъ правило знаковъ какъ для умноженія, такъ и для перенесенія какого-нибудь члена изъ одной части равенства въ другую [Opera (см. 117), 1, с. 12/15]. Далѣе у индусовъ встрѣчаются слѣды исчисленія съ отрицательными числами. Брамагупта (7-ой вѣкъ) говоритъ уже: „долгъ, вычитаемый изъ нуля, становится имуществомъ, а имущество—долгомъ...; если нужно вычислить имущество изъ долга, или долгъ изъ имущества, то берутъ ихъ сумму“ [Cp. L. Rodet, I. asiatique (7) 11 (1878), с. 25]. То же самое мы встрѣчаемъ у Bhâskara Acaryra (12-й вѣкъ), который разсматриваетъ также положительное и отрицательное значенія квадратнаго корня [Vijaganita (алгебра), гл. 1, разд. II, № 3; изд. H. T. Colebrooke Alg. (см. 118), с. 135]. Точка, помѣщенная надъ какимъ-нибудь числомъ, превращаетъ его въ число, симметричное съ нимъ. Арабы не пошли дальше этого. Въ 15-омъ вѣкѣ Н. Шюке интерпретируетъ отрицательныя числа [N. Chuquet, Triparty, fol. 84^b, 151^a, 157^a, 159^b; Bull. bib. 13 (1880), с. 738; 14 (1881), с. 419, 424, 427], но онъ очень долгое время не находитъ себѣ продолжателей. М. Штифель называетъ отрицательныя числа „numeri absurdi“, въ противоположность „numeri veri“, но онъ считаетъ ихъ меньшими нуля [M. Stifel, Arith. (см. 136), fol. 48a, 248a, 249b]. С. Стевинъ (см. 75) пользуется отрицательными рѣшеніями численныхъ уравненій. А. Жираръ своими открытіями касательно элементовъ теоріи уравненій даетъ имъ право гражданства на томъ же основаніи, что и натуральнымъ числамъ. Онъ говоритъ уже

[A. Girard, Inv. (см. 87), Sign. F_3 verso]: „рѣшеніе путемъ—объясняется въ геометріи, если итти обратно, и—отступать тамъ, гдѣ + идетъ впередъ“. Систематическія выкладки надъ отрицательными числами появляются позже Р. Декарта.

[150]) См. критическія замѣчанія Пеано по поводу этого способа опредѣленія въ его докладѣ „Les définitions mathematiques“ [Bibl. congrès internphilos. Paris 1900, 3, èd. 1901, c. 286]. Эти замѣчанія относятся къ теоріи дробей, но они примѣнимы и здѣсь.

[151]) На алгебраическомъ языкѣ единицы суть существительныя, знаки + и—прилагательныя [A. Q. Buèe, Philos. Trans. London 96 (1806), c. 27 [1805].

[152]) Деламбръ указалъ уже, какъ важно не смѣшивать оба эти значенія знаковъ + и — [I. B. Delambre, Rapport sur les progrès des sc. math. Paris 1810, c. 44]. Ch. Mèray et Ch. Riquier [Nouv. Ann. math. (3) 9 (1890), c. 50; см. также Ch. Mèray, Leçons nouvelles sur l'Analyse intinitèsimale 1 (1894), c. 11] и H. Padè [Premières leçons d'Algèbre èlèm. Paris 1892, c. 5 и сл.] для избѣжанія путаницы пользуются другими знаками.

А. Падоа настаиваетъ на неудобствахъ, происходящихъ отъ двоякаго значенія знаковъ + и — ; его доклады [A. Padoa въ Bibl. congrès intern. philos. Paris 1900, 3, ed. 1901, c. 364; C. R. du 2-e congrès intern. math. Paris 1900, e'd 1901, c. 250] содержатъ логическое изложеніе теоріи дѣйствій надъ положительными и отрицательными цѣлыми числами. Это изложеніе, задуманное въ духѣ идей Пеано, основывается на введеніи 3 неопредѣляемыхъ символовъ [цѣлое, слѣдующее за, симметричное съ] и на 7 постулатахъ: 1) если a есть какое-нибудь цѣлое, то слѣдующее за a есть цѣлое; 2) симметричное съ a есть цѣлое; 3) симметричное съ симметричнымъ съ a есть a; 4) симметричное съ слѣдующимъ за симметричнымъ съ слѣдующимъ за a есть a; 5) существуетъ нѣкоторое цѣлое x такое, что симметричное съ x есть x; 6) не существуетъ различныхъ между собою цѣлыхъ x и y такихъ, что симметричное съ x есть x, а симметричное съ y есть y; 7) если нѣкоторый классъ A удовлетворяетъ 3 условіямъ: есть нѣкоторое цѣлое, принадлежащее къ классу А; всякій разъ, когда нѣкоторое цѣлое x принадлежитъ къ классу A, то и слѣдующее за x тоже принадлежитъ къ классу A; всякій разъ, когда x есть такое цѣлое, что слѣдующее за x принадлежитъ къ классу A, то и x принадлежитъ тоже къ классу A; тогда всякое цѣлое принадлежитъ къ классу A. Эти постулаты совмѣстны и неприводимы другъ къ другу.

[153]) Это соглашеніе стало общеупотребительнымъ со временъ Ньютона. Декартъ обозначалъ еще отдѣльно отрицательныя числа. Онъ излагаетъ свои формулы съ точками на мѣсто знаковъ и пространно объясняетъ, слѣдуетъ-ли ставить $+$ или $-$, когда подставляютъ число на мѣсто числа, симметричнаго съ нимъ (см. 148).

[154]) Лекціи Вейерштрасса популяризовали этотъ способъ обозначенія [Werke 1, Berlin 1894, с. 67 (1841)].

[155]) Различеніе неравенствъ между абсолютными числами и неравенствъ между относительными числами встрѣчается впервые у Коши [Cours d'Analyse de l'Ecole polyt. 1, Analyse algébrique, Paris 1821, с. 438; Oeuvres (2) 3, Paris 1897, с. 360].

[156]) А. Жираръ [A. Girard, Inv. (см. 87), Sign. A_1 verso] называлъ множимое эффиціентомъ (efficient) и множитель—коэффиціентомъ (coefficient). Віета ввелъ уже слово коэффиціентъ [De numerosa potestatum ad exegesim resolutione, Paris 1600, 7 (это сочиненіе должно было существовать съ 1591 г.); Opera, ed. F. Schooten, с. 173].

[157]) Г. Канторъ [Math. Ann. 46 (1895), с. 485] даетъ опредѣленіе умноженія, основанное на понятіи количественнаго числа и независящее отъ сложенія. Соединеніе единицы (или элемента) изъ a и единицы изъ b составляетъ пару; число паръ, которыя можно образовать, беря единицу a и единицу изъ b, есть произведеніе изъ a на b. Изъ этого опредѣленія легко вытекаютъ основныя свойства умноженія. [См. также А. Capelli, Rendic. Accad. Napoli (3) 6 (1900), с. 138].

[158]) Знакъ $\times$ обязанъ своимъ теперешнимъ видомъ Ухтреду [G. Oughtred, Arithmeticae in numeris... quasi clavis est, Лондонъ 1631, с. 7]. Онъ встрѣчается уже между множителями одного произведенія, помѣщенными другъ надъ другомъ въ комментаріяхъ O. Schreshensuchs'a [Claudii Ptolemaei... annotationes, Базель 1551].

Ле-Пэжъ [C. Le-Paige, Ann. Soc. Scient. Bruxelles 16^2 (1891/92), с. 80] высказалъ догадку, что знакъ этотъ, какъ и знакъ —, произошелъ отъ черточекъ, служившихъ для обозначенія дѣйствія. Согласно Анри [Ch. Henry, Revue archeol. 38 (1879), с. 4], онъ представляетъ римскую цыфру X: въ абакѣ умножали на 10.

[159]). Обычай, согласно которому пишутъ просто оба множителя произведенія, не отдѣляя ихъ никакимъ знакомъ, самый первоначальный. Онъ соотвѣтствуетъ устной рѣчи, когда имѣется лишь одна буква съ численнымъ коэффиціентомъ, какъ это и было до Віеты. Онъ встрѣчается у Амеса, у Діофанита, у индусовъ, у арабовъ.

Въ средневѣковыхъ рукописяхъ нѣкоторыя школы переписчиковъ усвоили привычку ставить точку послѣ каждаго числа. Этотъ обычай съ раннихъ поръ перешелъ въ печатное дѣло и повелъ за собой усвоеніе точки, какъ знакъ умноженія. Употребленіе точки съ этими цѣлями довольно неудачная мысль, потому что точка означаетъ вообще, что фраза закончилась.

Чтобы изобразить произведеніе двухъ буквъ A, B, Віета писалъ A in B, подобно тому какъ греки для изображенія произведенія двухъ чиселъ отдѣляли ихъ другъ отъ друга предлогомъ ἐπί. Стевинъ (см. 75) употреблялъ символъ. M. A. Жираръ [Inv. (см. 87), Sign. B_3 verso) и Гарріотъ [I. Harriot, Artis anal. (см. 123), с. 7] еще до Декарта просто писали рядомъ буквы.

[160]) Слово дистрибутивный было впервые употреблено F. I. Servois [Ann. math. pures appl. 5 (1814/15), с. 98].

[161]) Кромѣ того, удобство этихъ опредѣленій обнаруживается на первыхъ же приложеніяхъ чиселъ къ представленію конкретныхъ величинъ, которыя можно отсчитывать въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ (отношенія между пространствомъ, временемъ и скоростью въ равномѣрномъ движеніи и т. д.).

[162]) Если бы здѣсь уничтожить слово „нулевой“, то въ слѣдующей строкѣ пришлось бы прибавить: „и она влечетъ за собой формулу $a(-c) = -ac$“.

[163]) Эвклидъ [Elementa, кн. 9, теор. 35; Opera 2, с. 406] показываетъ, какъ образовать сумму членовъ гео-

метрической прогрессіи; но происхожденіе этихъ прогрессій можно возводить до египтянъ [ср. Ahmes (см. 51), перев. A. Eisenlohr 1, с. 202/4; таблица XX, № 79]. Шюке называетъ геометрическими прогрессіями „nombres constituez par ordonnance continue en toutes proporcions multiplex"; онъ даетъ [N. Chuquet, Triparty, fol. 25 в; Bull. bibl. 13, с. 628] правило, которое можно выразить формулой $s(q-1)=lq-a$. Уже Prosdocimo di Beldomandi [Algorismus de integris (написано около 1410, напечат. въ Падуѣ 1483)] далъ правило, которое можно выразить формулой.

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}=aq^{n-1}+\frac{aq^{n-1}-a}{q-1}.$$

164) reste minimé.

165) I. Éc. polyt., cah. 5, an VI, c, 94; Oeuvres 7, Paris 1877, с. 292.

166) Знакъ : безполезенъ для обозначенія дѣленія, и было бы лучше сохранить его для обозначенія отношеній. Обозначеніе $a:bc$ двусмысленно. Вопреки соглашенію Шрёдера (см. 146), во Франціи подъ нимъ поняли бы скорѣе $a:(bc)$, чѣмъ $(a:b)c$.

Знакъ : былъ употребленъ Лейбницемъ для обозначенія дѣленія [Acta Erud. Lps. 1684, с. 470; Werke, Math. Schr. 5, с. 23]. I. H. Rahn употреблялъ уже для той же цѣли знакъ $\div$ [Teutsche Algebra, Zürich 1659, с. 8.]. Въ 18 в. встрѣчается знакъ ꟷ, чтобы обозначить „дѣлить на" [ср. I. E. Gallimard, La sc. du calcul (см. 87) 1, с. 3; 2, с. 2].

167) Въ теченіе долгаго времени употребляли для обозначенія дроби выраженіе—разломанное число (nombre rompu). Такъ, Леонардъ Пизанскій говоритъ: numerus ruptus [Liber abbaci (см. 136), fol. 20 в; изд. B. Boncompagni 1, с. 47). Шюке говоритъ: nombres routz; онъ употребляетъ слова числитель и знаменатель въ томъ же смыслѣ, что и мы [Triparty, fol. 10 а, 12 в; Bull. bib. 13, с. 604, 607]. Жираръ называетъ числитель также верхнимъ знакомъ (note supérieure), знаменатель (de nominateur) или [согласно Стевину (см. 75) Arith., fol 7 а] nomi-

nateur—нижнимъ знакомъ, а совокупность обоихъ знаковъ вмѣстѣ съ раздѣляющей ихъ линіей называетъ дробью или разломанной (fraction ou rompu) [A. Girard, Inv. (см. 87), sign. A_3 verso, A_4 recto].

Діофантъ разсматриваетъ отвлеченныя дроби точно такъ, какъ настоящія числа [ср. Opera]. Въ этомъ отношеніи онъ стоитъ одиноко въ древности. Такъ. К. Птолемей для выраженія въ градусахъ и минутахъ дуги говоритъ πηλικότης (количество). Геометры-классики разсматриваютъ дроби, какъ наименованія отношеній (меньшаго числа къ большему числу). Если изъ двухъ чиселъ a и b бо̀льшее b=ma дѣлится на-цѣло [на меньшее, то первое называется кратнымъ a, а a называется μέρος $\left(\text{часть, кантьемъ} \frac{1}{m}\right)$ b. Если $b > a$ и не дѣлится на a, то a называется (во множественномъ числѣ) μέρη (обыкновенная дробь) b. [ср. Эвклидъ, Elementa, кн. 7, опред. $^3/_5$; Opera 2, с. 184].

168). G. de Longchamps разсматривалъ [Giorn. Mat. (1) 15 (1877), с. 299] дроби, расположенныя этажомъ

$$\cfrac{a_1}{\cfrac{a_2}{\cfrac{\dots}{a_n}}},$$

гдѣ черточки имѣютъ различныя длины.

169) Иногда еще проводятъ различіе между правильными дробями, для которыхъ $a < b$, и неправильными дробями, для которыхъ $a > b$. [ср. A. Girard, Inv., sign. A_3 verso].

170) Слово quotient—подразумѣвая здѣсь, какъ это часто дѣлаютъ, эпитетъ „точный"—способно породить путаницу въ виду значенія, придаваемаго этому слову въ первомъ опредѣленіи дѣленія. Его можно было бы замѣнять постоянно словомъ отношеніе (rapport).

171) Двѣ дроби, изъ которыхъ одна выводится изъ другой замѣной числителя на знаменателя, и обратно, называются обратными дробями (fractions inverses).

172) См., напримѣръ, S. F. Lacroix, Eléments d'algèbre, 1e é'd. Paris an. VII, 5-e é'd an. XIII, c. 146/7.

173) Уже въ древности производили счетъ съ дробями.

Древнѣйшее извѣстное математическое руководство [A h-mès (см. [51])] содержитъ уже особую форму счета съ дробями. Всякая дробь здѣсь представлена суммой различныхъ кантьемовъ. Чтобы обозначить эти кантьемы, египтяне писали нашъ знаменатель, а надъ нимъ іероглифъ, означающій „часть“, или же въ іератическомъ письмѣ. Они имѣли особые символы для $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$. Способы, какими пользовались египтяне для разложенія отношеній на контьемы, изложены Бобынинымъ [V.V. Bobynin, Abh. Gesch. Math. 9 (1899) стр. 3].

Для изображенія кантьемовъ, греки писали просто знаменатель съ однимъ (или двумя) знаками ударенія (accents). Такъ, γ' означало $\frac{1}{3}$; для $\frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3}$ они, подобно египтянамъ, имѣли особые символы. Для обозначенія другихъ дробей (которыя разсматривали уже во времена Платона и которыя встрѣчаются у Аристарха Самоскаго, у Архимеда, но особенно у Герона и Діофанта) они писали знаменатель надъ числителемъ между строками, позже у византійцевъ—какъ показатель; $\vartheta\iota\acute{\alpha}$ означало тогда $\frac{9}{11}$. Числитель отъ знаменателя отличали также, особенно въ Византіи, различными формами знака ударенія, повторяя иногда знаменатель [F. Hultsch, Metrologicorum scriptorum reliquiae I, Lpz. 1864 стр. 173/5], писавшійся тогда послѣ числителя.

Въ своихъ собственныхъ „Метрикахъ“ Геронъ около $+$ 100 [Opera, 3] употребляетъ чаще всего обыкновенныя дроби, но иногда онъ употребляетъ два послѣдовательныхъ простыхъ кантьема. Египетскіе ряды кантьемовъ появляются сызнова около VII вѣка съ указаніемъ способа образованія ихъ въ математическомъ папирусѣ Ахмима (Akhmim) [напеч. I. Baillet въ Mém. publ. par les membres de la mission archéolgique française an Caire, 9 Paris 1892]. Затѣмъ они сызнова встрѣчаются въ Византіи въ псевдогероновыхъ писаніяхъ [Heronis Alexandrin Geometricorum... reliquie, изд. F. Hultsch, Berlin 1864] и они были въ ходу до конца Византійской Имперіи [см. Tannery, Notice sur les deux lettres arith. de Nicolas Rhabdas, Notices et extr. mss bibl.

Одесская Общественная Библіотека

nationale 32 I, Paris 1886; ср. Bull. sc. math. (2) 8 (1884), c. 274].

Римляне старались изобразить дроби въ видѣ кратныхъ отъ $\frac{1}{12}, \frac{1}{24}\dots$ до $\frac{1}{288}$ и позже даже до $\frac{1}{1728}$, сообразно съ ихъ способомъ дѣленія асса, вѣса въ 1 фунтъ [ср. T. Mommsen и I. Marquart (см. [62])]. По поводу дѣйствій съ римскими цыфрами въ средніе вѣка (X вѣкъ) см. B. E. Ch. Guérard I. math. pures appl. (1) 3 (1838), c. 483/4.

[174]) Индусы, которые знали кантьемы и вытекающія изъ нихъ дѣйствія, помѣщали, какъ и мы, числитель надъ знаменателемъ, но не отдѣляли его чертой или какимъ-нибудь инымъ знакомъ. Черту для обозначенія дроби ввели арабы. Леонардъ Пизанскій, Liber abbaci котораго было источникомъ для ариѳметическихъ руководствъ слѣдующихъ вѣковъ, пишетъ, дроби какъ мы теперь [Liber abbaci, fol. II-a; изд. B. Boncompagni, I c. 24]. Черта для обозначенія дробей входитъ во всеобщее употребленіе въ XVI вѣкѣ.

[175]) Ch. Riquier, Ann. Ec. Norm. (3) 12 (1895), c. 198; I. Tannery Leçons d'arith. Paris, 1894 c. 143.

[176]) Ch. Méray et Ch. Riquier, Nouv. ann. math. (3) 8 (1889), c. 421; Ch. Méray Leçons nouv. 1, c. 2; Ch. Riquier, Revue métaph. 1, (1893) c. 346.

[177]) Arith. (см. 20) c. 13; Formulaire 3, c. 55; Congrés philos. 3, 286 [1901].

[178]) Эта самая идея операторовъ можетъ служить также для опредѣленія отрицательныхъ чиселъ.

[179]) Пеано замѣчаетъ, что уже Амесъ объясняетъ равенство двухъ выраженій $1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$ и $\frac{1}{5} + \frac{1}{15}$ тѣмъ, что если оперировать съ 15, то они даютъ два равныхъ числа $15 - 10 - 1$ и $3 + 1$ [Papyrus Rhind, перев. A. Eisenlohr 1, (1877), c. 57/8; таблица X № 21].

[180]) Первый примѣръ чисто десятичнаго дѣленія находится въ тригонометрическихъ таблицахъ Регіомонтануса, составленныхъ въ 1467 г. (Opus tabularum... изд. сомнительное, Нюренбергъ, 1475, изд. достовѣрное, Аугсбургѣ, 1490). Впрочемъ, взявъ за радіусъ тригонометрическаго круга 10^5, онъ обхо-

дился безъ всякаго знака для обозначенія десятичной части. Десятичныя дѣленія вперемежку съ шестидесятичными дѣленіями встрѣчались уже въ сочиненіяхъ первыхъ западныхъ алгебраистовъ христіанъ [для Іоанна Севильскаго см. Liber algorismi (см. [95]), fol. 100^a, сотлб. b; B. Boncompagni, Trattati d'aritm. 2, Римъ 1858, с. 877].

Истиннымъ изобрѣтателемъ десятичной системы былъ Симонъ Стевинъ. Въ своемъ сочиненіи Disme, брошюрѣ всего въ 10 страницъ, написанной сперва по фламандски, потомъ по французски [с. 139/148 книги Practique d'arith, составляющей продолженіе его Arith. (см. [75]), Лейденъ, 1585] онъ, дѣйствительно, первый настаивалъ на легкости счета при систематическомъ употребленіи десятичной системы. Но его обозначеніе не удержалось. Онъ писалъ, напр., для обозначенія 941,303.

941 3 0 4.

Вскорѣ затѣмъ въ 1592 г. Бюрги (J. Bürgi) писалъ для изображенія 141,4—1414, а для изображенія 0,01414—писалъ 001414 (ср. R. Wolf, Vierteljahrschr. Naturf. Ges., Zürich 33 (1888), с. 226] Віета говоритъ о выгодахъ, представляемыхъ десятичными дробями [Universalium inspectionum, с. 7; приложеніе къ Canon mathematicus, первое изд. Paris 1879]; онъ больше приближается къ нашему обозначенію, ибо, употребивъ (с. 15) для десятичной части болѣе мелкія буквы, чѣмъ буквы, служащія для изображенія цѣлой части, онъ отдѣляетъ особымъ знакомъ—вертикальной чертой (с. 64 и 65)—десятичную часть отъ цѣлой части. Отъ этой вертикальной черты до нашей теперешней запятой разстояніе уже небольшое. Сама запятая появляется впервые для отдѣленія цѣлой части отъ десятичной части (а не для отдѣленія вообще числовыхъ группъ изъ трехъ цыфръ) въ одномъ сочиненіи Нэпира (I. Neper), Rabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo, Эдинбургъ, 1617 с. 21.

[181]) Дроби вавилонянъ относятся всѣ къ шестидесятичной системѣ. Гипсиклъ въ своемъ Ἀναφορικός дѣлитъ окружность на 360 равныхъ частей [изд. K. Manitius, с. XXVI]. Гиппархъ часто пользуется шестидесятичными дробями. Точно также Птоломей, который въ своемъ Альмагестѣ разсматриваетъ приближенное зна-

ченіе $\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{60 \times 60}$. Чтобы изобразить это приближенное, значеніе *Гейбергъ* [I. L. Heiberg, Syntatis math. I, Lpz. 1899, с. 216] пишетъ: $\overline{\gamma}\ \overline{\eta}\ \overline{\lambda}$ (безъ черты въ таблицахъ), что̀ представляетъ чисто *позиціонную нумерацію*, между тѣмъ какъ *Гальма* [N. Halma, Composition. math de Ptolemee I, Paris 1813, с. 421] пишетъ $\gamma\ \acute{\eta}\ \lambda''$. Это обозначеніе *Гальма* скорѣе, повидимому, византійскаго характера.

Наше дѣленіе часа и градуса на 60 равныхъ частей, равно какъ и выраженія *минута* (pars minuta prima) и *секунда* (pars minuta secunda) произошли изъ старинныхъ шестидесятичныхъ дробей. Греки для выраженія *шестидесятыхъ* долей говорили ἑξηκοστά, а для выраженія *минутъ*—λεπτά.

Въ теченіе всѣхъ среднихъ вѣковъ шестидесятичныя дроби употреблялись индусами, арабами и въ христіанскихъ странахъ [minutae phusicae). Они встрѣчаются еще на первомъ планѣ въ XVI в., иногда даже въ XVII в. [ср. V. *Wing*, Astronomia Britannica, London, 1652; 1669, кн. I]. Очень часто *отбрасываются знаменатели* 60, 60×60, $60 \times 60 \times 60$, взамѣнъ чего соотвѣтствующіе числители получаютъ знаки ударенія $'$, $''$, $'''$. Но такъ какъ это не соотвѣтствуетъ введенію 59 значущихъ цыфръ, то отъ этого не получается вовсе тѣхъ выгодъ, которыя соотвѣтствующее соглашеніе вноситъ въ десятичную систему.

182) *Діофантъ* называетъ вторую степерь неизвѣстнаго δύναμις [Opera I, с. 4,6 ...]. Уже *Гиппократъ Хіосскій* (около—440 г.) употребилъ это самое слово въ томъ же значеніи [Eudemi Rhodii . . ., изд. L. *Spengel*, Berlin, 1870, 128]. Латинскій переводъ „potentia" греческаго слова δυναμις, по итальянски *potenza* [R. *Bombelli*, Algebra (см. 139), с. 37] привело къ французскому слову *puissance* (степень). Сперва оно употреблялось лишь въ примѣненіи къ квадрату неизвѣстнаго [R. *Bombelli*, Algebra, с. 64, 204 говоритъ еще для обозначенія 4-ой степени potenza di potenza]. Потомъ его начинаютъ примѣнять для обозначенія 3-ьей степени, а затѣмъ и всѣхъ степеней [уже *Стевинъ* въ своей Arith, с. 40 говоритъ о *potence* cubique и о *potence* de

quarte quantite], и не только степеней неизвѣстнаго, но также и степеней данныхъ количествъ. Віета говоритъ „potestas“ [Isagoge, fol. 5; изд. F. Schooten, с. 4]; Жираръ [Inv. sign. 13, recto] употребляетъ слово puissance въ теперешнемъ смыслѣ.

[183]) Это названіе встрѣчается впервые (ср. [196]) у Штифеля. Arith. fol. 235^{a}, 245^{a}.

[184]) Діофантъ [Opera I, с. 4] пользуется уже сокращеніями для обозначенія степеней неизвѣстнаго отъ первой до шестой. Индусы и арабы слѣдуютъ примѣру Діофанта. Точно также западные христіане: первыя степени неизвѣстнаго имѣютъ каждая особенное наименованіе и обозначаются начальной буквой или какимъ-нибудь сокращеніемъ этого наименованія. Лука Пачіуоло имѣетъ сокращенія для 29 первыхъ степеней неизвѣстнаго [Summa (см. [95]), fol. 67^{a}). Нѣмецкіе коссисты стараются усовершенствовать эту систему обозначенія.

Въ одномъ письмѣ византійца Пселла, въ 11 вѣкѣ [Діофантъ, Opera 2, с. 38] послѣдовательныя степени обозначаются, какъ первое число (неизвѣстное), второе (квадратъ) и т. д. Эта номенклатура заимствована, кажется, черезъ посредство комментарія Гипатіи у Анатолія (Anatolius), современника Діофанта. Но она оставалась неизвѣстной на Западѣ, гдѣ Шюке первый сдѣлалъ шагъ впередъ — и на этотъ разъ рѣшительный—въ томъ же направленіи [N. Chuquet, Triparty fol, 84 , Bull. bib. 13, с, 737]. Онъ называетъ неизвѣстное и его послѣдовательныя степени „nombres premiers, seconds, tiers, quartz“, ... и прибавляетъ (fol 84^{a}): новыя наименованія не прекращаются, какъ прежнія „veu qu'elles sont innumérables“. Обозначеніе Шюке близко къ нашему. Но основаніе у него подразумѣвается. Такъ Шюке пишетъ 5^1, 5^2, 5^3, ... тамъ, гдѣ мы пишемъ $5x$, $5x^2$, $5x^3$,... Обозначенія Бомбелли $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, $\underset{\smile}{3}$, ... [R. Bombelli, Algebra (см. [139]), с. 57] и Стевина (1), (2), (3), [Arith., с. 9] представляютъ лишь варіанты обозначенія Шюке. Жираръ распространяетъ этотъ способъ обозначенія на степени данныхъ количествъ и пишетъ 18(1) для нашего $18\,x^1$, (1)18 для нашего 18^1, ... [A. Girard, Inv., sign. B_1 recto]; Геригонъ [P. Hérigone, Cursus mathematicus, Парижъ 1634] пишетъ показатель послѣ основанія, на той же строкѣ, а численный коэффиціентъ всегда передъ основаніемъ. Способъ этотъ, пригодный лишь въ томъ случаѣ, когда основаніемъ является буква, употребляется Геригономъ въ согласіи съ принципомъ Віеты, для котораго буква означаетъ геометрическую величину одного, двухъ или трехъ измѣреній. Наконецъ, Декартъ вводитъ теперешнее обозначеніе [Géom., кн. 1; Oeuvres 6, с. 371], ограничиваясь однако опредѣленными степенями aa или a^2, a^3, a^4, ... „и такъ далѣе до безконечности“, но никогда не пишетъ a^n гдѣ n обозначаетъ любое натуральное число. Ньютонъ сдѣлалъ этотъ новый шагъ на пути къ абстракціи. Гауссъ писалъ еще aa тамъ, гдѣ мы пишемъ a^2, полагая, что сокращенное обозначеніе должно употребляться лишь тогда, когда оно занимаетъ менѣе мѣста. Идея изобразить степени неизвѣстныхъ (по крайней мѣрѣ, вспомогательныхъ неизвѣстныхъ) путемъ повторенія буквъ, представляющихъ эти неизвѣстныя, принадлежитъ, повидимому, Стифелю [кенигсбергское изд. (1553/54) „Coss“ (см. [136]) Chr. Rudolff'a, fol. 61^a, 62^a; ср. G. Eneström, Bibl. math. (2) 13 (1899), с. 55]. Гарріотъ [T. Harriot, Artis anal., с. 4] пишетъ также aa, aaa, $aaaa$, для обозначенія a^2, a^3, a^4.

Наконецъ, римскія цыфры въ роли показателей появляются на время до арабскихъ цыфръ Декарта въ Algèbre nouvelle de Viète d'une méthode nouvelle claire et facile, изд. I. Hume, Paris 1636, с. 235, 401, ...

[185]) Уже Шюке [Triparty, fol. 84 ^{a}; Bull. bibl. 13, с. 737], введя свое обозначеніе показателей, прибавляетъ затѣмъ, что простое число имѣетъ обозначеніемъ (denomination) нуль. Стевинъ (см. [75], с. 28) пишетъ 0 для x^0 или 1.

[186]) Шюке пишетъ, напримѣръ [Triparty, fol. 84 ^{b}; Bull. bibl. 13, с. 738] 5^{1m} тамъ, гдѣ мы пишемъ $5x^{-1}$ или $\frac{5}{x}$, и онъ производитъ дѣйствія [Triparty, fol. 85^a; Bull. bibl. 13, с. 740] надъ нулевыми или отрицательными степенями. Валлисъ выдвигаетъ аналогію между отрицательными и положительными степенями [Arith. infin. 1655, prop. 101/6; Opera 1, Oxford 1695, с. 407/10]; онъ сравниваетъ, напримѣръ, послѣдовательности $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{27}$, ...

и 1, 4, 9, ... и говоритъ о первой, что ея указатель— 3, а указатель второй 2. Ньютонъ вводитъ, наконецъ, обозначеніе отрицательныхъ показателей [Methodus fluxionum, написанный по латыни между 1664 и 1671, напечатанный по англ., Лондонъ 1736; Opuscula, изд. I. Castillon 1, Лозанна и Женева 1744, Opusc. II, с. 34].

[187]) Nicole Oresme разсматриваетъ уже дробные показатели и развиваетъ теорію формальнаго исчисленія ихъ [Algorithmus proportionum, напис. около 1360 г.; изд. M. Curtze, Z. Math. Phys. 13, Supp., Lpz. 1868, с. 70/73]. Онъ приравнивветъ, напримѣръ, число 8 степени $4^{1+\frac{1}{2}}$, которую онъ пишетъ $\boxed{1\ ^{a}\frac{1}{2}}$ 4. Стевинъ говоритъ [Arith., с. 18] „toutefois le $\frac{1}{2}$ en circle serait le caractère racine de 1 etc., et“ ainsi des aultres; онъ пишетъ $\frac{1}{2}$ 41 для $\sqrt[3]{4x}$. Жираръ пишетъ $\left(\frac{3}{2}\right)$ 49 для 343 [Inv., Sign. B_1 recto], между тѣмъ какъ $49\left(\frac{3}{2}\right)$ изображало бы у него $49\sqrt{x^3}$. Валлисъ (см. 186), не употребляетъ обозначенія для дробныхъ показателей, однако вполнѣ опредѣляетъ ихъ. Ньютонъ вводитъ, наконецъ, наше современное обозначеніе.

Обозначеніе a $\measuredangle$ m для a^m, предложенное Пеано [Formulaire 3, с. 60] для всякаго m, можетъ быть полезнымъ, когда m имѣетъ сложную форму; $\measuredangle$ представляетъ опрокинутый знакъ корня $\sqrt{}$.

[188]) Согласно Родэ [L. Rodet, I. asiatique (7) 13 (1879), с. 419] индусы употребляли для обозначенія квадратнаго корня изъ неквадратнаго числа сокращеніе слова „Karanî“, означающаго „дѣлать“. Это слово въ точности переводитъ греческое реченіе ὁ ἀπὸ τῆς αβ. Они употребляли, впрочемъ, въ ариѳметическомъ смыслѣ корня слово „mûla“, означающее также корень растенія. Арабы перевели его дословно и стали обозначать квадратный корень начальной буквой соотвѣтствующаго арабскаго слова „jidr“; они помѣщали эту начальную букву надъ числомъ, отдѣляя его горизонтальной чертой. Іоаннъ

Севильскій перевелъ слово „jidr“ латинскимъ „radix“ [Liber algorismi (см. [95]), fol. 106^a столб. b; B. Boncompagni, Trattati d'arit. 2, Римъ 1858, с. 112]. Уже у арабовъ—и точно также у западныхъ латинянъ—jidr (radix) часто получаетъ болѣе широкое значеніе и сливается съ saï (res) для обозначенія неизвѣстнаго, не только въ случаѣ двучленныхъ уравненій, но и всякихъ уравненій.

[189]) Первые нѣмецкіе коссисты [Дрезденскій Codex с. 80] ставили передъ числомъ, изъ котораго извлекали корень, точки: одну точку . для квадратнаго корня, двѣ точки .. для корня четвертой степени, три точки ... для кубическаго корня, четыре точки .... для корня девятой степени. Въ „Coss“ (см. [144]) A. Riese [рукопись, законченная въ 1524 г.; ср. B. Berlet, Prog. Annaberg 1860 и Adam Riese, sein Leben... Франкфуртъ на М. 1892] точка превратилась уже въ ▪; для $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$ Рудольфъ употребляетъ въ своемъ „Coss“ (см. [136]) отъ 1525 г. символы ▪, ~~, ~~, пользуясь словомъ точка (Punkt) для обозначенія этихъ знаковъ. Вмѣсто этихъ символовъ Стифель [Arith., fol. 109] вводитъ указатели подъ единственный радикалъ $\sqrt{\ }$, но эти указатели представляютъ коссическіе знаки, служащіе для обозначенія соотвѣтственныхъ степеней, а не числа 2, 3, 4, ... Стевинъ, наконецъ, [Arith., с. 24, 26] пишетъ $\sqrt{(3)}$ для $\sqrt[3]{\ }$ и $\sqrt{(4)}$ для $\sqrt[4]{\ }$. Еще у Декарта мы встрѣчаемъ [Géom., кн. 1; Oeuvres 6, с. 371] символъ $\sqrt{}\overline{C.+A}$ для обозначенія $\sqrt[3]{A}$. Превращеніе знака $\surd$ въ $\sqrt{\ }$ имѣетъ своимъ источникомъ, безъ сомнѣнія, ту черту, которую Декартъ и его ученики проводили надъ выраженіями, заключаемыми нами въ скобки [см. напр. Geom., кн. 3, с. 461].

[190]) Обозначенія Шюке имѣли уже универсальный характеръ. Онъ писалъ [Triparty, fol. 45^b, 46^a; Bull. bibl. 13, с. 665] R^2A, R^3A, ... R^6A для $\sqrt{A}$, $\sqrt[3]{A}$, ... $\sqrt[6]{A}$, каково бы ни было разсматриваемое натуральное число A. Онъ обобщилъ даже это обозначеніе на случай $n = 1$, такъ что R^1A равно A. Онъ, между прочимъ, называетъ эти

корни не квадратный, кубическій, квадратный изъ квадратнаго, ... но seconde, tierce, quarte [Triparty, fol. 46 a; Bull bibl. 13, c. 655]. Жираръ [Inv., sign B_1 recto] предлагаетъ писать $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[5]{}$, ... но онъ еще чаще всего сообразуется съ прежними обозначеніями; для $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt{9}$, напр., онъ пишетъ еще $\left(\frac{1}{2}\right)8$, $\left(\frac{1}{3}\right)9$ и иногда даже употребляетъ коссистскій знакъ $c\ell$ для $\sqrt[3]{}$ и коссистскій знакъ $\sqrt{}\sqrt{}$ для $\sqrt[4]{}$ [Inv., sign. B_2 verso B_3 recto]. Лишь послѣ появленія Traité d'Algèbre Ролля, Paris 1690, наше теперешнее обозначеніе входитъ въ систематическое употребленіе.

[191]) Первые слѣды дѣйствій надъ радикалами встрѣчаются у грековъ [Эвклидъ, Elementa, кн. 10; Opera 3, Lpz. 1886]; но превращеніе количествъ, въ выраженіи которыхъ фигурируетъ нѣсколько радикаловъ, болѣе развито у индусовъ (см. въ частности Bhâskara (см. [149]), Vîjaganita, гл. 1, разд. 5; изд. H. T. Colebrooke, Alg. (см. [118]), см. 145/55] и у арабовъ (см., напримѣръ, Al-karkhî, Fakhrî (около 1000 г.); извлеченія, опубликов. F. Wöpcke, Paris 1843, c. 56/59] и лишь позже стало предметомъ изслѣдованія западныхъ христіанъ.

[192]) Зародышъ понятія логариѳма встрѣчается уже въ Triparty. Шюке разсматриваетъ здѣсь одновременно ариѳметическую прогрессію 1, 2, ... n и геометрическую прогрессію a, a^2, ... a^n, гдѣ и обозначаетъ данное натуральное число, и онъ замѣчаетъ, что, если установить соотвѣтствіе между членами того же порядка въ обѣихъ этихъ прогрессіяхъ, то сумма двухъ чиселъ ариѳметической прогрессіи указываетъ на произведеніе двухъ соотвѣтственныхъ чиселъ геометрической прогрессіи [Triparty, fol. 26 a, 26 в; Bull. bibl. 13, c. 629, 630]. Стифель обобщаетъ это соотвѣтствіе, разсматривая ариѳметическую прогрессію —3, —2, —1, 0, 1, 2, ... и соотвѣтствующую геометрическую прогрессію $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, ... съ основаніемъ 2 [Arith., fol. 35a , 35в , 249в].

Кромѣ того Стифель, кажется, ясно видѣлъ плодотворность новаго понятія. Однако, оно развивается лишь въ 17 вѣкѣ, когда Нэпиръ (I. Neper или Napier) и вскорѣ за нимъ Бюрги (I. Bürgi) задумали построить таблицы, которыя бы позволили переходить непосредственно—съ достаточной степенью точности—отъ какого-нибудь члена ариѳметической прогрессіи—а также и промежуточныхъ чиселъ—къ соотвѣтствующему члену разсматриваемой геометрической прогрессіи.

Уже о двухъ прогрессіяхъ, разсматривавшихся Нэпиромъ [Mirifici logarithmorum canonis descriptio, Эдинбургъ 1614], предполагалось, что онѣ порождаются теченіемъ (flixion) (непрерывнымъ движеніемъ). Но ни Нэпиръ, ни Бюрги [Jobst Byrgs arith. und geom. Progresstabuln, Прага, 1620) не имѣютъ, собственно говоря, даннаго a priori основанія. Если разсматривать числа n и b, которыя бы играли роль основанія у Нэпира и у Бюрги, то оказывается, что

$$n = 10^7\ e^{-0{,}0000001}\ ,\ log_b\ 27184593 = 10^5$$

[193]) Лишь въ Приложеніи, написанномъ около 1616 г. и присоединенномъ къ труду Нэпира (ср. Mirifici logarithmorum canonis constructio, Ліонъ 1620 (перепеч. Парижъ 1895) впервые появляется въ явномъ видѣ основаніе, именно, 10. Для установленія соотвѣтствія между обѣими прогрессіями здѣсь полагаютъ $log.\ 1 = 0$ и $\log 10 = 1$. Идея этого принадлежитъ, кажется, Бриггсу столько же, сколько Нэпиру [ср. M. Cantor, Vorles. 2, Lpz. 1900, c. 738].

[194]) Креллъ предложилъ [A. L. Crelle, Sammlung mathemat. Aufsätze 1, Berlin 1821, c. 207) писать основаніе надъ логариѳмомъ, налѣво. Это обозначеніе встрѣчается иногда въ нѣмецкихъ изданіяхъ.

[195]) Точное понятіе о логариѳмѣ датируетъ лишь съ тѣхъ поръ, когда было признано тождество логариѳма a въ системѣ съ основаніемъ b и показателя степени, въ которую слѣдуетъ возвести b, чтобы получить a. Только тогда дѣйствія порядка три и заняли мѣсто въ ариѳметикѣ.

[196]) Слово логариѳмъ было введено Нэпиромъ [Mirifici ... descriptio, 15]. Оно произошло изъ выраженія λόγον ἀριθμός (numerus rationis, число отношенія) и объ-

ясняется разсмотрѣніемъ двухъ отношеній (rationes), одно изъ которыхъ получается, возведя другое въ нѣкоторую степень. Такъ, отношеніе 8 къ 27 называли тройнымъ отношеніемъ 2 къ 3. Этотъ способъ выраженія встрѣчается уже у Эвклида, который называетъ [Elementa, кн. 5, стр. 9, 10; Opera 2, с. 4] отношеніе a^2 „διπλασίων λόγος“ и a^3 „τριπλασίων λόγος“ отношенія a. Къ нему также относится выраженіе „numerus rationem exponens“ для обозначенія логариѳма, и, можетъ быть, это послѣднее выраженіе есть источникъ слова показатель (exposant) (см. 183).

[197]) Бриггсъ [H. Briggs, Arithmetica logarithmica, Лондонъ 1624, с. 4, 21] еще до Меркатора [N. Mercator, Logarithmotechnica, Лондонъ 1668, с. 4) употреблялъ это слово для обозначенія цѣлой части десятичнаго логариѳма.

[198]) Эйлеръ употребляетъ это слово для обозначенія дробной части десятичнаго логариѳма [Introd. in analysin infin. 1, Лозанна 1748, с. 83]. Въ своемъ переводѣ Лабэ [I. B. Labey, 1, Paris an IV, с. 83] переводитъ слово мантисса черезъ „partie décimale“ (десятичная часть). Слово mantissa (простонародная латынь) было употреблено грамматикомъ Фестомъ въ смыслѣ дополненія меньшаго значенія [ср. P. Tannery, Interméd. math. 6 (1899), с. 181; A. Desprats id. с. 182; 7 (1900), с. 61 (вопросъ 1336)]. Эйлеръ взялъ его у Валлиса, который примѣняетъ его вообще къ десятичной части какого-нибудь числа.

[199]) Это слово „антилогариѳмъ“ употреблялось въ 18-омъ вѣкѣ въ смыслѣ log. cos., приданномъ ему Нэпиромъ [ср. Bibl. Math. (3) 1 (1900), с. 273].

[200]) Ихъ называютъ также неправильно „нэпировыми“ (см. 192). Однако, вскорѣ послѣ Нэпира Шпейдель (I. Speidel) построилъ таблицы, въ которыхъ число s, которое играло бы роль основанія, если бы сочли полезнымъ ввести его, было связано съ числомъ e отношеніемъ

$$log_s\ x = 10^6\ log_e\ x$$

каково бы ни было x [ср. Bull. bibl. hist. biogr. math. 1 (1855), с. 48; F. Cajori, Abh. Gesch. Math. 9 (1899), с. 33].

201) Ихъ называютъ часто также обыкновенными логариѳмами.

202) Форсіа [A. de Fortia, Traité d' Aarithmétique, Avignon 1781], кажется, первый пытался создать новыя дѣйствія.

203) Изъ мемуаровъ, которые относятся къ дѣйствіямъ порядка четыре или выше, можно отмѣтить мемуары Эйзенштейна [G. Eisenstein въ I. reine angew. Math. 28 (1844), с. 36], Вёпке [F. Wöpcke, id. 72 (1851), с. 83], Герла[хъ H. Gerlach въ Z. Math.—Naturw. Unterricht 13 (1882), с. 423]; Шульце [E. Schulze въ Archiv Math. Phys. (2) 3 1886), с. 302]. Трактаты или руководства Ганкеля, Грассмана, Шеффлера, Шрёдера, Шлёмильха, Шуберта, отмѣчаютъ прямое дѣйствіе порядка четыре, не вдаваясь, однако, въ разборъ этого дѣйствія.

204) L. Euler, Acta Acad. Petrop. 1 (1777) I, изд. 1780, math. с. 38; E. M. Lemeray, Proc. Edinb. math. Soc. 16 (1897/8), с. 13 и (короткая замѣтка) Assoc. fran. avanc. sc. 26 (S_t Etienne) 1897[1], с. 178.

205) Nieuw Archief voor Wiskunde (2) 4 (1900), с. 235.

Перев. *П. Юшкевичъ.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

„ЕСТЕСТВОЗНАНІЕ ВЪ ШКОЛѢ“.

Непеpiодическое изданie,

посвященное вопросамъ преподаванія и методики естествознанія и выходящее подъ

общей редакціей профессора В. А. ВАГНЕРА и Б. Е. РАЙКОВА.

Сборникъ № 1. Вопросы методики преподаванія естествознанія.

Проф. В. А. Вагнеръ. Естествознаніе и школа.—**П. Каммереръ.** Права и обязанности біологическаго метода въ преподаваніи естествознанія.—**Б. Е. Райковъ.** Опытная физіологія въ средней школѣ.—**Г. Н. Бочъ.** Первые уроки ботаники.—**П. Кёлеръ.** Грибки, какъ объекты для практическихъ занятій по біологіи.—**К. П. Ягодовскій.** Къ матерьяламъ по методикѣ экскурсій.—**Максъ Эттли.** Естественно-историческія экскурсіи. **Цѣна 80 к.**

Сборникъ № 2. Преподаваніе начальн. природовѣдѣнія.

Предисловіе.—К. П. Ягодовскій. Первый годъ изученія природы.—**В. Ю. Ульянинскій.** Нѣкоторые вопросы методики природовѣдѣнія.—**М. В. Усковъ.** Самодѣльные приборы, какъ наглядныя пособія на урокахъ природовѣдѣнія.—**Б. Е. Райковъ.** Практическія занятія по неживой природѣ. **Цѣна 80 коп.**

Сборникъ № 3. Обзоръ новѣйшей учебной и учебно-вспомогательной литературы по естествознанію.

Л. С. Севрукъ. Объ учебникахъ по начальному курсу неживой природы.—**Г. Н. Бочъ.** Учебная и учебно-вспомогательная литература по ботаникѣ.—**Б. Е. Райковъ.** Учебная литература по зоологіи.—**Проф. Ѳ. Е. Туръ.** Обзоръ учебной литературы по физіологіи и анатоміи.—**К. К. Баумгартъ.** О новѣйшей русской учебной и учебно-вспомогательной литературѣ по физикѣ.—**С. И. Созоновъ.** Обзоръ литературы по химіи. **Цѣна 80 коп.**

Редакція обращается къ авторамъ и издателямъ съ просьбой присылать свои изданія для отзыва.

Редакція: СПБ., Чернорѣченская наб., 49.

Книгоиздательство и книжный складъ. „НАУКА“

Москва, Бол. Никитская, д. № 10. Телефонъ № 254-99.

Арреніусъ, С. Судьба планетъ. 1912. Ц. 30 к.
Арреніусъ, С. Вселенная. 1912. Ц. 20 к.
Гертвигъ, О. Развитіе біологіи въ XIX столѣтіи. Со статьей: „Современное положеніе дарвинизма“. Ц. 35 к.
Донкестеръ. Наслѣдственность. 1913. Ц. 80 к.
Калкинсъ. Протозоологія. 1911. Ц. 2 р. 50 к.
Норренсъ. Новыя теченія въ теоріи наслѣдственности. 1913.
Ламаркъ. Философія зоологіи. 1911. Ц. 2 р.
Линдъ, В. Практическое руководство къ опредѣленію звѣрей, водящихся въ Европейской Россіи. Съ предисл. проф. М. Мензбира. 1911. Ц. 35 к.
Оствальдъ, В. Колесо жизни. 1912. Ц. 40 к.
Пённетъ. Менделизмъ. 1913. Ц. 1 р. 50 к.
Фридманъ, В. Свѣтъ и матерія. Общедоступный оч. спектральнаго анализа. Съ предисл. А. Цингера. 1912. Ц. 1 р. 25 к.

Психотерапевтическая библіотека подъ ред. д-ровъ Н. Е. Осипова и О. Б. Фельцмана.

Выпускъ I. **С. Фрейдъ.** О психоанализѣ. 1912. Ц. 50 к.
— II. **П. Дюбуа.** Психотерапія. 1911. Ц. 80 к.
— III. **С. Фрейдъ.** Теорія полового влеченія. 1911. Ц. 75 к.
— IV. **О. Фельцманъ.** Вспомогательныя школы для психически отсталыхъ дѣтей. 1912. Ц. 50 к.
— V. **П. Дюбуа.** Воображеніе, какъ причина болѣзни. 1912. Ц. 50 к.
— VI. **В. Штеккель.** Причины нервности.
— VII. **Л. Вальдштейнъ.** Подсознательное „я“.

Абонемент О. О. Д. Б.
№ 3943
Бібліотека
у 545
НБ ПНУС
545

Одесска
Общественн
Библіотека