Берегите книгу!

Загрязненная книга—источникъ заразы.

Порча книгъ требуетъ расходовъ на починку, что **препятствуетъ** пополненію библіотеки **новыми книгами,** въ виду чего **убѣдительно просятъ** гг. читателей:

Обращаться съ книгами **бережно** и **опрятно.**

Не смачивать пальцевъ **слюною** при перелистываніи, во избѣжаніе **заразы.**

Въ случаѣ **заразной болѣзни** въ квартирѣ, **заявлять** объ этомъ въ библіотекѣ при возвращеніи книги.

Не дѣлать надписей, не подчеркивать строкъ, не перегибать книгу черезъ корешокъ.

НОВЫЯ ИДЕИ ВЪ МАТЕМАТИКѢ

Непеоріодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора А. В. Васильева.

СБОРНИКЪ ШЕСТОЙ.

Ученіе о множествахъ Георга Кантора

I.

Изд-ство „ОБРАЗОВАНІЕ“ СПБ.

1914.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Типографія Е. М. Малаховскаго, Пет. ст., Большой пр., 17.
Тел. 616-57.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Г. Канторъ.

Основы общаго ученія о многообразіяхъ.

Математически-философскій опытъ въ ученіи о безконечномъ.

Предисловіе.

Предлагаемое изслѣдованіе появится въ ближайшее время въ „Математическихъ Анналахъ“, какъ пятый номеръ работы, которая носитъ названіе „Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten“ и четыре первые номера которой находятся въ томахъ XV, XVII, XX и XXI того же журнала. Всѣ эти работы находятся въ связи съ двумя статьями, помѣщенными мною въ томахъ LXXVII и LXXXIV журнала Борхардта. Въ послѣднихъ намѣчены уже въ основныхъ чертахъ тѣ главныя точки зрѣнія, которыми я руководствовался въ ученіи о многообразіяхъ. Такъ какъ предлагаемая работа во многихъ отношеніяхъ углубляетъ изслѣдованіе вопроса и при этомъ по существу независима отъ предыдущихъ работъ, то я рѣшился выпустить ее въ свѣтъ въ качествѣ отдѣльнаго сочиненія, снабдивъ ее болѣе соотвѣтствующимъ ея содержанію заглавіемъ.

Опубликовывая это сочиненіе, я не могу не упомянуть, что, когда я писалъ его, то я имѣлъ, главнымъ образомъ, въ виду двоякаго рода читателей—

съ одной стороны, философовъ, которые слѣдили за развитіемъ математики вплоть до новѣйшаго времени, а, съ другой, математиковъ, которые знакомы съ важнѣйшими фактами древней и новой философіи.

Я отлично знаю, что разсматриваемая мною тема была во всѣ времена объектомъ самыхъ различныхъ мнѣній и толкованій и что ни математики, ни философы не пришли здѣсь къ полному согласію. Поэтому я очень далекъ отъ мысли, что я могу сказать послѣднее слово въ столь трудномъ, сложномъ и всеобъемлющемъ вопросѣ, какъ проблема безконечности. Но такъ какъ многолѣтнія занятія этой проблемой привели меня къ опредѣленнымъ убѣжденіямъ и такъ какъ въ дальнѣйшемъ ходѣ моихъ работъ эти послѣднія не поколебались, но лишь укрѣпились, то я счелъ своей обязанностью систематизировать ихъ и опубликовать.

Я могу только выразить пожеланіе, чтобы мнѣ удалось при этомъ найти и выразить объективную истину, ради достиженія которой я и работалъ.

Авторъ.

Галле, Рождество 1882 г.

---

§ 1.

Изложеніе моихъ изслѣдованій въ ученіи о многообразіяхъ [1]) достигло того пункта, гдѣ дальнѣйшее развитіе его становится зависимымъ отъ расширенія понятія цѣлаго реальнаго числа за существующія до сихъ поръ границы. И оказывается, что расширеніе это совершается по такому направленію, въ которомъ, насколько я знаю, никто до сихъ поръ его не искалъ.

Это расширеніе понятія числа носитъ настолько принудительный характеръ, что безъ него мнѣ врядъ ли будетъ возможно сдѣлать свободно хотя бы малѣйшій шагъ впередъ въ ученіи о множествахъ. Пусть въ этомъ обстоятельствѣ увидятъ оправданіе или, если необходимо, извиненіе того, что я ввожу въ свое разсмотрѣніе, повидимому, чужеродныя идеи. Вѣдь дѣло идетъ здѣсь о расширеніи, о продолженіи ряда цѣлыхъ реальныхъ чиселъ за безконечное. Какъ это ни покажется смѣлымъ, но я не могу не высказать надежды, болѣе того, твердаго убѣжденія въ томъ, что съ теченіемъ времени это расширеніе должно будетъ разсматриваться, какъ вполнѣ простое, правомѣрное, естественное. При этомъ я нисколько не скрываю отъ себя, что, рѣшаясь на это, я вступаю въ извѣстный конфликтъ съ широко распространенными взглядами на математическую безконечность и съ часто встрѣчающимися воззрѣніями на сущность числовой величины

Что касается математической безконечности, то поскольку она нашла правомѣрное примѣненіе въ наукѣ и способствовала успѣхамъ послѣдней, она, какъ кажется мнѣ, выступаетъ прежде всего въ значеніи нѣкоторой перемѣнной, то растущей сверхъ всякихъ границъ, то убывающей до произвольной малости, но остающейся всегда конечной, величины. Такое безконечное я называю не собственно-безконечнымъ, (das Uneigentlich-unendliche).

Но наряду съ этимъ въ новое и новѣйшее время какъ въ геометріи, такъ особенно въ теоріи функцій, образовался другой, столь же правомѣрный, родъ понятій безконечности. Такъ, напримѣръ, при изслѣдованіи аналитической функціи комплексной перемѣнной величины стало необходимымъ и общеупотребительнымъ воображать себѣ въ плоскости, представляющей комплексную перемѣнную, одну единственную, лежащую въ безконечности, т.-е. безконечно удаленную, но опредѣленную, точку и изслѣдовать поведеніе функціи по близости этой точки, какъ по близости любой другой точки. При этомъ оказывается, что поведеніе функціи по близости безконечно далекой точки представляетъ точно тѣ же явленія, что̀ и поведеніе ея по близости всякой другой, расположенной на конечномъ разстояніи, точки. Отсюда слѣдуетъ полная правомѣрность того, чтобы мыслить въ этомъ случаѣ безконечное, какъ расположенное въ нѣкоторой вполнѣ опредѣленной точкѣ.

Если безконечное выступаетъ въ подобной вполнѣ опредѣленной формѣ, то я его называю собственно-безконечнымъ (Eigentlich-Unendliches).

Для пониманія дальнѣйшаго мы будемъ тщательно отличать другъ отъ друга оба эти вида проявленія, въ которыхъ выступала математическая безконечность, при чемъ въ обѣихъ этихъ формахъ она содѣйствовала величайшимъ успѣхамъ въ геометріи, въ анализѣ и въ математической физикѣ.

Въ первой формѣ, въ качествѣ несобственно-безконечнаго, она представляется, какъ перемѣнное конечное. Въ другой формѣ, въ которой я ее называю собственно-безконечнымъ, она выступаетъ, какъ вполнѣ опредѣленное безконечное. Безконечныя реальныя цѣлыя числа, которыя я хочу опредѣлить въ дальнѣйшемъ и къ которымъ я уже пришелъ много лѣтъ тому назадъ, не сознавая ясно того, что въ нихъ мы имѣемъ конкретныя числа съ реальнымъ значеніемъ *), не имѣютъ ничего общаго съ первой изъ обѣихъ вышеназванныхъ формъ, съ несобственно-безконечнымъ,—наоборотъ, имъ присущъ тотъ же характеръ опредѣленности, какой мы встрѣчаемъ въ случаѣ безконечно удаленной точки въ теоріи аналитическихъ функцій. Они, слѣдовательно, относятся

*) Я называлъ ихъ до сихъ поръ „bestimmt definirte Unendlichkeitssymbole", ср. Math. Ann., Bd. XVII, pag. 357; Bd. XX, p. 113; Bd. XXI, p. 54.

къ формамъ и видамъ собственно-безконечнаго. Но въ то время, какъ безконечно удаленная точка комплексной числовой плоскости противостоитъ, одинокая, всѣмъ расположеннымъ на конечныхъ разстояніяхъ точкамъ, мы получаемъ не просто одно единственоое безконечное цѣлое число, но безконечный рядъ подобныхъ чиселъ, которыя рѣзко отличны другъ отъ друга и находятся въ закономѣрныхъ числовыхъ отношеніяхъ другъ къ другу и къ конечнымъ цѣлымъ числамъ. Правда, эти отношенія не таковы, чтобы ихъ можно было свести по существу къ отношеніямъ конечныхъ чиселъ между собою. Разумѣется, встрѣчается и послѣднее явленіе, но также лишь въ случаѣ различныхъ степеней (Stärken) и формъ несобственно-безконечнаго, напримѣръ, въ случаѣ безконечно убывающихъ или безконечно возрастающихъ функцій перемѣнной x, если онѣ представляютъ опредѣленныя конечныя порядковыя числа становленія безконечнымъ. Дѣйствительно, подобныя отношенія можно разсматривать лишь, какъ замаскированныя отношенія конечнаго или же какъ непосредственно сводимыя къ послѣднимъ. Наоборотъ, законы, существующіе между искомыми собственно-безконечными цѣлыми числами, кореннымъ образомъ отличны отъ царящихъ въ области конечнаго зависимостей, при чемъ, разумѣется, не исключается возможность того, что сами конечныя вещественныя числа могутъ обнаружить новыя свойства въ зависимости отъ опредѣленно-безконечныхъ чиселъ.

Оба принципа порожденія (Erzeugungsprincipe), съ помощью которыхъ, какъ мы увидимъ, опредѣляются новыя опредѣленно-безконечныя числа, такого рода, что благодаря ихъ соединенному дѣйствію можетъ быть уничтожена всякая граница на пути образованія понятія реальныхъ цѣлыхъ чиселъ. Но, по счастью, имъ противополагается, какъ мы увидимъ, третій принципъ, который я называю принципомъ стѣсненія или ограниченія, и благодаря которому безконечному процессу образованія противопоставляются извѣстныя послѣдовательныя границы, такъ что мы получаемъ въ абсолютно-безконечномъ ряду реальныхъ цѣлыхъ чиселъ естественные вырѣзы, называемые числовыми классами.

Первый числовой классъ (I)—это множество конечныхъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3,...,ν,...; за нимъ слѣдуетъ второй числовой классъ (II), состоящій изъ извѣстныхъ, слѣдующихъ другъ за другомъ въ опредѣленной послѣдовательности, безконечныхъ цѣлыхъ чиселъ. Лишь послѣ того, какъ опредѣленъ второй числовой класъ, мы получаемъ третій, четвертый и т. д. классы.

Введеніе новыхъ цѣлыхъ чиселъ представляетъ, какъ мнѣ кажется, прежде всего величайшее значеніе для развитія и болѣе отчетливаго формулированія введеннаго въ моихъ работахъ (Borchardts J., Bd. 77, p. 257; Bd. 84, p. 242) и многократно утилизировавшагося въ прежнихъ номерахъ этой работы понятія мощности (Mächtigkeit). Каждому строго опредѣленному множеству присуща, согласно этому понятію, опредѣленная мощность, причемъ двумъ множествамъ приписывается одна и та же мощность, если между ними можно установить взаимно однозначное сопряженіе элемента съ элементомъ.

Въ случаѣ конечныхъ множествъ мощность совпадаетъ съ количествомъ (Anzahl) элементовъ, потому что, какъ извѣстно, подобныя множества представляютъ въ любомъ порядкѣ одно и то же количество элементовъ.

Наоборотъ, въ случаѣ безконечныхъ множествъ до сихъ поръ ни въ моихъ работахъ, ни въ чьихъ-либо другихъ работахъ не было вообще рѣчи о какомъ-нибудь точно опредѣленномъ количествѣ ихъ элементовъ, но за то имъ можно было приписать опредѣленную, совершенно не зависящую отъ ихъ порядка, мощность.

Наименьшую мощность безконечныхъ множествъ должно было, какъ легко было показать, приписать тѣмъ множествамъ, которыя можно привести въ однозначное взаимное сопряженіе съ первымъ числовымъ классомъ и которыя, слѣдовательно, обладаютъ одинаковою съ нимъ мощностью. Но зато до сихъ поръ не было столь же простого и естественнаго опредѣленія высшихъ мощностей.

Оказывается теперь, что наши вышеупомянутые числовые классы опредѣленно-безконечныхъ реальныхъ цѣлыхъ чиселъ являются естественными, обнаруживающимися въ единой формѣ, представителями растущихъ въ закономѣрной послѣдовательности мощностей строго опредѣленныхъ множествъ. Я показываю самымъ опредѣленнымъ образомъ, что мощность второго числового класса (II) не только отлична отъ мощности перваго числового класса, но что она представляетъ также фактически ближайшую высшую мощность. Мы можемъ поэтому назвать ее второй мощностью, или мощностью второго класса. Такимъ же точно образомъ на основаніи третьяго числового класса мы получаемъ опредѣленіе третьей мощности, или мощности третьяго класса, и т. д. и т. д.

§ 2.

Другая положительная сторона новыхъ чиселъ заключается, на мой взглядъ, въ **новомъ**, до сихъ поръ еще не встрѣчавшемся, понятіи, въ понятіи **количества** элементовъ **вполнѣ упорядочен-**

наго (wohlgeordnet) безконечнаго многообразія. Такъ какъ это понятіе всегда выражается съ помощью нѣкотораго, вполнѣ опредѣленнаго, числа нашей расширенной числовой области — поскольку данъ порядокъ элементовъ множества, болѣе тщательнымъ опредѣленіемъ чего мы вскорѣ займемся—и такъ какъ, съ другой стороны, понятіе количества получаетъ въ нашемъ внутреннемъ воззрѣніи нѣкоторое непосредственное предметное представленіе, то благодаря этой связи между количествомъ и числомъ, доказана подчеркнутая мною реальность послѣдняго и въ тѣхъ случаяхъ, когда оно опредѣленно-безконечно.

Подъ вполнѣ упорядоченнымъ множествомъ слѣдуетъ понимать всякое строго опредѣленное множество, гдѣ элементы связаны между собою нѣкоторой опредѣленной, данной напередъ, послѣдовательностью (Succession), согласно которой существуетъ первый элементъ множества и за каждымъ отдѣльнымъ элементомъ (если только онъ не послѣдній въ ряду) слѣдуетъ опредѣленный другой элементъ, а также къ любому конечному или безконечному множеству элементовъ принадлежитъ нѣкоторый опредѣленный элементъ, представляющій ближайшій, слѣдующій за всѣми ними, элементъ въ послѣдовательности (исключая случай, когда вообще не существуетъ слѣдующаго за всѣми ними въ послѣдовательности элемента). О двухъ „вполнѣ упорядоченныхъ" множествахъ говорятъ, что они представляютъ одно и то же количество (имѣя въ виду данныя для нихъ послѣдовательности). Если возможно такого рода взаимное однозначное сопряженіе, что, когда E и F представляютъ два элемента одного множества, E_1 и F_1 соотвѣтственные элементы другого множества, то всегда положеніе E и F въ послѣдовательности перваго множества находится въ согласіи съ положеніемъ E_1 и F_1 въ послѣдовательности второго множества, такъ что, когда E предшествуетъ F въ послѣдовательности перваго множества, то и E_1 предшествуетъ F_1 въ послѣдовательности второго множества. Это сопряженіе—если оно вообще возможно—какъ легко видѣть, всегда вполнѣ опредѣленное, и такъ какъ въ расширенномъ числовомъ ряду всегда существуетъ одно, и только одно, число α—такое, что предшествующія ему числа (начиная съ 1) имѣютъ въ натуральной послѣдовательности то же самое количество — то мы вынуждены приравнять количество вышеназванныхъ обоихъ „вполнѣ упорядоченныхъ" множествъ α, если α есть безконечно большое число, и приравнять числу $\alpha—1$, непосредственно предшествующему числу α, если α есть конечное цѣлое число.

Существенное различіе между конечными и безконечными множествами обнаруживается въ томъ, что конечное множество представляетъ для любой последовательности, которую можно придать его элементамъ, одно и то же количество. Наоборотъ, множеству, состоящему изъ безконечно многихъ элементовъ, присущи вообще различныя количества, въ зависимости отъ послѣдовательности, которую придаютъ элементамъ. Мощность множества представляетъ, какъ мы видѣли, аттрибутъ, независимый отъ расположенія его. Наоборотъ, количество множества является, какъ только мы имѣемъ дѣло съ безконечными множествами, факторомъ, зависящимъ вообще отъ нѣкоторой данной послѣдовательности элементовъ. Однако, и въ случаѣ безконечныхъ множествъ имѣется извѣстная связь между мощностью множества и опредѣленнымъ при данной послѣдовательности количествомъ его элементовъ.

Возьмемъ сперва множество, имѣющее мощность перваго класса, и придадимъ элементамъ его какую-нибудь опредѣленную послѣдовательность, такъ что оно становится „вполнѣ упорядоченнымъ“ множествомъ. Въ такомъ случаѣ его количество есть всегда опредѣленное число второго числового класса и никогда не можетъ быть опредѣлено съ помощью числа другого, а не второго числового класса. Съ другой стороны, можно всякое множество первой мощности расположить въ видѣ такой послѣдовательности, что его количество по отношенію къ этой послѣдовательности становится равнымъ любому данному напередъ числу второго числового класса. Мы можемъ формулировать эти положенія еще слѣдующимъ образомъ: каждое множество мощности перваго классса перечислимо (abzählbar) съ помощью чиселъ второго числового класса, и только съ помощью подобныхъ чиселъ, при чемъ элементамъ этого множества можно придать такую послѣдовательность, что оно въ этой послѣдовательности становится перечислимымъ съ помощью любого, даннаго напередъ, числа второго числового класса; это число и показываетъ количество элементовъ множества по отношенію къ разсматриваемой послѣдовательности.

Аналогичные законы имѣютъ силу для множествъ высшихъ мощностей. Такъ, напримѣръ, каждое строго опредѣленное множество мощности второго класса перечислимо съ помощью чиселъ третьяго числового класса, и только съ помощью подобныхъ чиселъ; элементамъ этого множества можно придать такую послѣдовательность, что оно въ этой послѣдовательности становится перечислимымъ *) съ по-

*) То, что я въ прежнихъ №№ этой работы называлъ словомъ „перечислимый“ представляетъ, по введенному теперь мной болѣе точному и въ то же время обобщенному опредѣленію, ничто иное, какъ перечислимость съ помощью чиселъ перваго класса (конечныя множества) или съ помощью чиселъ второго класса (множества первой мощности).

мощью любого, даннаго напередъ числа третьяго числового класса; это число и показываетъ количество элементовъ множества по отношенію къ разсматриваемой послѣдовательности.

§ 3.

Понятіе вполнѣ упорядоченнаго множества оказывается фундаментальнымъ для всего ученія о многообразіяхъ. Въ одной дальнѣйшей работѣ я вернусь къ тому основному, чреватому слѣдствіями и особенно замѣчательному своей общезначимостью закону мышленія, согласно которому всегда возможно придать всякому строго опредѣленному множеству формувполнѣупорядоченнаго множества. Здѣсь я ограничусь указаніемъ того, какъ изъ понятія вполнѣ упорядоченнаго множества получаются самымъ простымъ образомъ основныя дѣйствія для цѣлыхъ какъ конечныхъ, такъ и опредѣленно-безконечныхъ чиселъ, и какъ получаются изъ непосредственнаго внутренняго созерцанія съ аподиктической достовѣрностью законы ихъ. Пусть даны сперва два вполнѣ упорядоченныхъ множества M и M_1, которымъ соотвѣтствуютъ въ качествѣ количествъ числа α и β. Въ такомъ случаѣ $M + M_1$ представляетъ снова вполнѣ упорядоченное множество, получающееся, если сперва полагаютъ множество M, а затѣмъ множество M_1, соединяя его съ первымъ. Въ такомъ случаѣ и множеству $M+M_1$ соотвѣтствуетъ въ отношеніи получающейся послѣдовательности его элементовъ опредѣленное число, какъ количество. Это число называется суммой α и β и обозначается черезъ $\alpha + \beta$. Здѣсь тотчасъ же обнаруживается, что, если α и β не оба конечныя, то $\alpha + \beta$ вообще отлично отъ $\beta + \alpha$. Слѣдовательно, коммутативный законъ теряетъ вообще свою силу уже въ случаѣ сложенія. Далѣе, такъ просто образовать понятіе суммы нѣсколькихъ данныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ слагаемыхъ, при чемъ этотъ порядокъ самъ можетъ быть опредѣленно-безконечнымъ, что я не считаю необходимымъ здѣсь вдаваться въ подробности. Я замѣчу лишь, что ассоціативный законъ вообще сохраняетъ свою силу. Въ частности мы имѣемъ $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

Если мы возьмемъ нѣкоторую опредѣленную съ помощью числа β послѣдовательность изъ однихъ только равныхъ и одинаково упорядоченныхъ множествъ, у которыхъ у всѣхъ количество элементовъ равно α, то мы получаемъ новое вполнѣ упорядоченное множество, соотвѣтственное количество котораго даетъ опредѣленіе для произведенія $\beta\alpha$, гдѣ β есть множитель, α—множимое. И здѣсь оказывается, что вообще $\beta\alpha$ отлично отъ $\alpha\beta$, такъ что и въ случаѣ умноженія чиселъ коммутативный законъ не имѣетъ вообще силы, но зато и въ случаѣ умноженія всеобщее значеніе имѣетъ ассоціативный законъ, такъ что мы имѣемъ: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

Изъ новыхъ чиселъ нѣкоторыя выдѣляются среди прочихъ тѣмъ, что они обладаютъ свойствомъ первыхъ чиселъ, но это свойство здѣсь должно быть охарактеризовано нѣсколько болѣе опредѣленнымъ образомъ, ибо подъ первымъ числомъ понимаютъ такое число α, для котораго разложеніе: $\alpha=\beta\gamma$, гдѣ β множитель, возможно лишь тогда, когда $\beta=1$ или $\beta=\alpha$. Зато вообще и въ случаѣ первыхъ чиселъ α остается для множимаго извѣстный просторъ для неопредѣленности, что не можетъ быть измѣнено по природѣ вещей. Тѣмъ не менѣе, впослѣдствіи въ другой работѣ я покажу, что разложеніе какого-нибудь числа на его первыхъ множителей можетъ происходить всегда лишь однимъ по существу единственнымъ образомъ, опредѣленнымъ притомъ въ смыслѣ порядка множителей (поскольку послѣдніе не представляютъ конечныхъ первыхъ чиселъ, расположенныхъ въ произведеніи рядомъ другъ съ другомъ). При этомъ открывается два вида опредѣленно-безконечныхъ первыхъ чиселъ, изъ которыхъ первый ближе къ конечнымъ первымъ числамъ, числа же второго вида носятъ совсѣмъ иной характеръ.

Далѣе, съ помощью новыхъ свѣдѣній становится возможнымъ дать строгое обоснованіе теоремы о такъназываемыхъ линейныхъ безконечныхъ многообразіяхъ, приведенной въ концѣ статьи: „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre" (Borchardts J., Bd. 84, p. 257).

Въ послѣднемъ № (4) теперешней моей работы (B. XXI, p. 54) я далъ для точечныхъ множествъ P, заключенныхъ въ n—мѣрной непрерывной области, теорему, которую съ помощью новаго выше опредѣленнаго способа выраженія можно формулировать слѣдующимъ образомъ: „если P есть точечное множество, производное множество (Ableitung), $P^{(\alpha)}$ отъ котораго тождественно равно нулю, при чемъ α представляетъ любое цѣлое число перваго или второго числового класса, то первое производное множество $P^{(1)}$, а поэтому и само P, представляетъ точечное множество мощности перваго класса". На мой взглядъ весьма замѣчательно то, что эту теорему можно обернуть слѣдующимъ образомъ: „если P есть точечное множество, первое производное множество отъ котораго $P^{(1)}$ имѣетъ мощность перваго класса, то существуютъ цѣлыя числа α, принадлежащія къ первому или второму числовому классу, для которыхъ $P^{(\alpha)}$ тождественно равно нулю, и изъ чиселъ α, для которыхъ наблюдается это явленіе, одно есть наименьшее".

Доказательство этой теоремы я опубликую въ ближайшее время по дружескому приглашенію моего высокоуважаемаго друга г. проф. Миттагъ-Леффлера въ Стокгольмѣ въ первомъ томѣ новаго редактируемаго имъ математическаго журнала. Въ связи съ этимъ г. Миттагъ-Леффлеръ опубликуетъ статью, въ которой онъ покажетъ, какъ можно на основаніи этой теоремы значительно обобщить изслѣдованія его и г. проф. Вейерштрасса насчетъ существованія однозначныхъ аналитическихъ функцій съ данными особенными точками.

§ 4.

Расширенный рядъ цѣлыхъ чиселъ можно, если это требуется, безъ труда дополнить до непрерывнаго числового множества, присоединяя къ каждому цѣлому числу α всѣ вещественныя числа x, которыя больше нуля и меньше единицы.

Здѣсь, можетъ-быть, поднимется вопросъ, нельзя ли—разъ удалось такимъ образомъ расширить область вещественныхъ чиселъ въ сторону безконечно большого,—опредѣлить съ тѣмъ же успѣхомъ опредѣленныя безконечно малыя числа или, чтó свелось бы къ тому же самому, такія конечныя числа, которыя не совпадаютъ съ раціональными или ирраціональными числами (являющимися предѣльными значеніями рядовъ раціональныхъ чиселъ), но которыя могли бы быть вставлены на особыхъ промежуточныхъ мѣстахъ между вещественными числами такимъ образомъ, какимъ ирраціональныя числа вдвигаются въ цѣпь раціональныхъ или трансцендентныя числа въ ткань алгебраическихъ чиселъ?

На вопросъ о возможности подобныхъ интерполяцій, на который рядъ авторовъ потратилъ много усилій, можно по моему мнѣнію, какъ я это покажу, отвѣтить ясно и отчетливо лишь съ помощью нашихъ новыхъ чиселъ, именно на основѣ общаго понятія о количествѣ вполнѣ упорядоченныхъ множествъ. Между тѣмъ всѣ прочія попытки основываются отчасти, какъ мнѣ кажется, на ошибочномъ смѣшеніи несобственно-безконечнаго съ собственно-безконечнымъ, отчасти были возведены на совершенно ненадежномъ, шаткомъ основаніи.

Новѣйшіе математики нерѣдко называли несобственно-безконечное „дурной" безконечностью, на мой взглядъ, несправедливо, такъ какъ въ математикѣ и естествознаніи оно оказалось весьма хорошимъ и въ высшей степени цѣннымъ орудіемъ. Насколько я знаю, безконечно малыя величины до сихъ поръ утилизировались вообще лишь въ формѣ несобственно-безконечнаго. Въ качествѣ таковаго они доступны всѣмъ тѣмъ различіямъ, видоизмѣненіямъ и отношеніямъ, которыми пользуются въ исчисленіи безконечно малыхъ и въ теоріи функцій и съ помощью которыхъ тамъ собираютъ богатую жатву аналитическихъ истинъ. Наоборотъ, всѣ попытки превратить эти безконечно малыя насильственно въ нѣкоторыя собственно-безконечно малыя должны были бы быть оставлены, какъ безцѣльныя. Если вообще существуютъ, т.-е. доступны опредѣленію собственно-безконечно малыя величины, то онѣ навѣрное не стоятъ ни въ какой непосредственной связи съ обычными, с т а н о в я щ и м и с я безконечно малыми величинами.

Въ противорѣчіи съ упомянутыми попытками касательно безконечно малаго и съ смѣшеніемъ обѣихъ формъ проявленія безконечнаго стоитъ нерѣдко встрѣчающееся воззрѣніе насчетъ сущности и значенія числовыхъ величинъ, согласно которому дѣйствительно существующими можно признать лишь конечныя реальныя цѣлыя числа нашего числового класса (I).

Въ лучшемъ случаѣ здѣсь приписывается еще извѣстная реальность непосредственно вытекающимъ изъ нихъ раціональнымъ числамъ. Что же касается ирраціональныхъ чиселъ, то въ чистой математикѣ имъ подобаетъ лишь формальное значеніе. Онѣ являются какъ бы своего рода счетными марками, служащими для того, чтобы закрѣпить и описать простымъ единымъ образомъ свойства группъ цѣлыхъ чиселъ. Собственный матеріалъ анализа доставляется согласно этому воззрѣнію исключительно конечными реальными цѣлыми числами. Всѣ найденныя уже въ ариѳметикѣ и въ анализѣ или ждущія еще открытія истины должны разсматриваться, какъ взаимныя отношенія конечныхъ цѣлыхъ чиселъ. Исчисленіе безконечно малыхъ, а съ нимъ и теорія функцій считаются правомѣрными лишь постольку, поскольку можно истолковать ихъ теоремы, какъ законы, царящіе надъ конечными цѣлыми числами. Хотя я не могу согласиться съ этой концепціей чистой математики, но съ ней безспорно связаны извѣстныя преимущества, которыя я хотѣлъ бы здѣсь подчеркнуть. Вѣдь въ пользу ея значенія говоритъ и то обстоятельство, что къ ея защитникамъ принадлежитъ часть талантливѣйшихъ математиковъ нашего времени.

Если, какъ здѣсь допускается, дѣйствительны лишь конечныя цѣлыя числа, а всѣ прочія числа представляютъ лишь формы отношенія, то можно потребовать, чтобы доказательства аналитическихъ теоремъ были испытаны по своему „теоретико-числовому содержанію“ и чтобы каждый обнаруживающійся въ нихъ пробѣлъ былъ заполненъ согласно принципамъ ариѳметики. Въ возможности подобнаго дополненія заключается настоящій пробный камень для правильности и полной строгости доказательствъ. Нельзя отрицать того, что такимъ путемъ можно будетъ усовершенствовать обоснованія многихъ теоремъ и способствовать другимъ методологическимъ улучшеніямъ въ различныхъ частяхъ анализа. Далѣе, въ руководствѣ принципами, вытекающими изъ этой концепціи, можно видѣть гарантію отъ всякаго рода нелѣпостей или ошибокъ.

Этимъ путемъ устанавливается опредѣленный, хотя довольно скромный и простой принципъ, который рекомендуется всѣмъ, какъ Аріаднова нить. Онъ долженъ служить тому, чтобы удержать полетъ математической фантазіи и спекуляціи въ надлежащихъ границахъ, гдѣ онѣ не рискуютъ попасть въ пропасть „трансцендентнаго“, тамъ, гдѣ, какъ говорится, въ цѣляхъ назиданія и спасительнаго страха, должно быть „все возможно“. Если это и такъ, то кто знаетъ, не руководились ли основоположники этой концепціи именно только точкой зрѣнія цѣлесообразности, когда они рекомендовали ее въ качествѣ полезнаго, предохраняющаго отъ всякихъ ошибокъ, регулятора молодымъ, стремящимся въ высь и такъ легко подвергающимся, благодаря самонадѣянности, опасности, силамъ, хотя въ этой концепціи не можетъ быть найденъ плодотворный принципъ. Вѣдь гипотезу, что сами они при открытіи новыхъ истинъ исходили изъ этихъ принциповъ, я не могу допустить потому, что, хотя я признаю много хорошихъ сторонъ у этихъ правилъ, я строго говоря, долженъ считать ихъ ошибочными. Мы не обязаны имъ никакими истинными успѣхами и, если бы мы въ дѣйствительности точно руководствовались ими, то развитіе науки остановилось бы или было введено въ самыя узкія границы. По счастью, дѣла въ дѣйствительности не обстоятъ такъ плохо; и восхваленіе, равно какъ и руководствованіе этими полезными при извѣстныхъ обстоятельствахъ правилами, никогда не понимались вполнѣ буквально нымъ образомъ до сихъ поръ, насколько мнѣ извѣстно, не нашлось никого, который взялъ бы на себя задачу формулировать ихъ полнѣе и лучше, чѣмъ это я пытаюсь сдѣлать здѣсь.

Если мы обратимся къ исторіи, то увидимъ, что подобные взгляды высказывались часто и что они встрѣчаются уже у Аристотеля. Какъ извѣстно, мы встрѣчаемъ въ средніе вѣка рѣшительно у всѣхъ схоластиковъ въ качествѣ неопровержимаго, идущаго отъ Аристотеля положенія, что „infinitum actu non datur". Однако, если разсмотрѣть возраженія, выдвигаемыя Аристотелемъ [2]) противъ реальнаго существованія безконечности (см., напр., его „Метафизику", кн. XI, гл. 10), то по существу ихъ можно свести къ предпосылкѣ, заключающей въ себѣ petitio principii, именно къ предпосылкѣ, что существуютъ лишь конечныя числа. Это онъ заключилъ изъ того, что ему былъ извѣстенъ лишь счетъ на конечныхъ множествахъ. Но я думаю, что я выше доказалъ—и въ ходѣ этой работы это обнаружится еще отчетливѣе,—что и съ безконечными множествами можно производить столь же опредѣленныя дѣйствія счета, какъ и съ конечными, предполагая, что приписываютъ множествамъ опредѣленный законъ, согласно которому они становятся вполнѣ упорядоченными множествами. Что безъ подобной закономѣрной послѣдовательности элементовъ множества надъ нимъ нельзя произвести дѣйствія счета—это заключается въ природѣ понятія счета. И въ случаѣ конечныхъ множествъ счетъ можно произвести лишь при нѣкоторой опредѣленной послѣдовательности сосчитываемыхъ элементовъ. Но конечныя множества имѣютъ то свойство, что результатъ счета—количество—не зависитъ отъ порядка элементовъ, между тѣмъ, въ случаѣ безконечныхъ множествъ, какъ мы видѣли, не существуетъ вообще подобной независимости. Количество безконечнаго множества представляетъ безконечное цѣлое число, опредѣляемое, между прочими обстоятельствами, и закономъ счета. Въ этомъ, и только въ этомъ, заключается лежащее въ самой природѣ вещей и потому никогда не устранимое существенное различіе между конечнымъ и безконечнымъ. Но изъ-за этого различія никогда нельзя будетъ отрицать существованія безконечнаго, сохраняя въ то же время существованіе конечнаго. Если отрицаютъ одно, то должно устранить также и другое, но куда бы мы пришли, слѣдуя этимъ путемъ?

Другой, выдвинутый Аристотелемъ противъ реальности безконечнаго, аргументъ заключается въ утвержденіи, что, если бы существовало безконечное, то конечное было бы разрушено имъ, такъ какъ будто бы конечное число уничтожается безконечнымъ числомъ. Въ дѣйствительности же, какъ мы увидимъ въ дальнѣйшемъ, дѣло обстоитъ слѣдующимъ образомъ: если мы возьмемъ какое-нибудь безконечное число, мыслимое какъ опредѣленное и законченное, то къ нему отлично можно прибавлять и соединять съ нимъ какое-нибудь конечное число, и это вовсе не повлечетъ за собой уничтоженія послѣдняго (наоборотъ, безконечное число измѣняется отъ подобнаго прибавленія къ нему конечнаго числа). Только обратное дѣйствіе, именно прибавленіе безконечнаго числа къ конечному, когда сначала полагается конечное число, вызываетъ уничтоженіе послѣдняго, не вліяя на измѣненіе перваго.—Эта правильная точка зрѣнія на отношеніе между конечнымъ и безконечнымъ, совершенно неизвѣстная Аристотелю, должна была бы вызвать новыя идеи не только въ анализѣ, но и въ другихъ, наукахъ, въ особенности въ естествознаніи.

Къ мысли разсматривать безконечно большое не только въ формѣ безгранично возрастающаго и въ тѣсно съ этимъ связанной формѣ сходящихся безконечныхъ рядовъ, введенныхъ впервые въ XVII в., но также закрѣпить его математически съ помощью чиселъ въ опредѣленной формѣ завершенно-безконечнаго я пришелъ почти противъ собственной воли въ противорѣчіе съ цѣнными для меня традиціями, логически вынужденный къ этому ходомъ многолѣтнихъ научныхъ усилій и попытокъ,—и поэтому я не думаю, чтобы могли найтись доводы, на которые я не сумѣлъ бы отвѣтить.

§ 5.

Говоря только-что о традиціяхъ, я понималъ ихъ не въ узкомъ смыслѣ лично пережитого, но имѣя въ виду основателей новѣйшей философіи и естествознанія. Для обсужденія вопроса, о которомъ идетъ здѣсь рѣчь, я приведу лишь нѣкоторые изъ важнѣйшихъ источниковъ. Пусть сравнятъ:

Locke, Essay o. h. u. lib. II, cap. XVI и XVII.

Descartes. Письма и разъясненія къ его Размышленіямъ; далѣе Principia, I, 26.

Spinoza. Письмо XXIX; Cogitata metaph., pars I и II.

Leibniz, Эрдманново изданіе, ст. 138, 244, 436, 744; изд. Перца, II, 1 p. 209; III, 4 p. 218; III, 5 p. 307, 322, 389; III, 7 p. 273 *).

Врядъ ли и теперь можно придумать болѣе сильные доводы противъ введенія безконечныхъ цѣлыхъ чиселъ, чѣмъ тѣ, которые имѣются у этихъ авторовъ. Пусть поэтому ихъ провѣрятъ и сравнятъ съ моими доводами въ пользу этихъ чиселъ. Подробное и детальное разсмотрѣніе этихъ мѣстъ, въ особенности

*) Примѣчательны также. Hobbes, De corpore, cap. VII, 11. Berkeley, Treatise on the princ. of hum. Knowledge, CXXVIII—CXXXII.

весьма замѣчательнаго и содержательнаго письма Спинозы къ Л. Мейеру, я оставляю до другого раза, здѣсь же я ограничусь слѣдующими замѣчаніями.

Какъ ни различны ученія этихъ авторовъ, при обсужденіи вопроса о конечномъ и безконечномъ они по существу сходятся въ томъ, что къ понятію какого-нибудь числа принадлежитъ конечность его и что, съ другой стороны, истинное безконечное или абсолютное, заключающееся въ Богѣ, не допускаетъ никакого опредѣленія (Determination). Что касается послѣдняго пункта, то я, само собой разумѣется, вполнѣ согласенъ съ нимъ, ибо положеніе: „omnis determinatio est negatio" не подлежитъ для меня никакому сомнѣнію; но зато въ первомъ пунктѣ я вижу, какъ я уже сказалъ выше, при разсмотрѣніи Аристотелевскихъ доводовъ противъ „infinitum actu", petitio principii, которое объясняетъ многія противорѣчія, встрѣчающіяся у всѣхъ этихъ авторовъ и въ особенности у Спинозы и у Лейбница. Допущеніе, что, помимо абсолютнаго (которое недостижимо съ помощью какого бы то ни было опредѣленія) и помимо конечнаго, не существуетъ никакихъ модификацій, которыя, не будучи конечными, опредѣлимы все же съ помощью чиселъ и которыя, слѣдовательно, представляютъ то, что я называю собственно безконечнымъ—это допущеніе я считаю ничѣмъ не оправдываемымъ, и оно, по моему мнѣнію, находится даже въ противорѣчіи съ нѣкоторыми положеніями, выдвинутыми обоими послѣдними философами. Что я утверждаю и что, какъ мнѣ кажется, я доказалъ этой работой, какъ и прежними своими опытами, это, что послѣ конечнаго существуетъ Transfinitum (которое можно было бы назвать также Suprafinitum), т.-е. безграничная іерархія опредѣленныхъ модусовъ, которые по своей природѣ не конечны, но безконечны, и которые, однако, подобно конечнымъ числамъ, могутъ быть детерминированы съ помощью извѣстныхъ, строго опредѣленныхъ и отличныхъ другъ отъ друга, чиселъ. Поэтому, по моему убѣжденію, область опредѣлимыхъ величинъ не исчерпывается конечными величинами и границы нашего познанія можно, нисколько не насилуя нашей природы, соотвѣтственнымъ образомъ расширить. Поэтому на мѣсто разсмотрѣннаго въ § 4 Аристотелевско-схоластическаго положенія я ставлю другое положеніе:

Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt [3]).

Весьма часто ссылаются на конечность человѣческаго разсудка въ качествѣ объясненія того, почему мыслимы только конечныя числа. Но въ этомъ утвержденіи я вижу опять-таки упомянутое выше petitio. Именно, говоря о „конечности разсудка", молчаливо предполагаютъ, что его способность образованія чиселъ ограничивается только конечными числами. Но если окажется, что разсудокъ въ состояніи также въ извѣстномъ смыслѣ опредѣлить и отличать другъ отъ друга безконечныя, т.-е. сверхъ-конечныя числа, то придется или придать словамъ: „конечный разсудокъ" расширенное значеніе, такъ что изъ нихъ нельзя будетъ извлечь вышеуказаннаго заключенія, или же придется приписать человѣческому разсудку въ извѣстныхъ отношеніяхъ предикатъ „безконечный", что, по моему мнѣнію, единственно правильно. Какъ ни ограниченна по-истинѣ человѣческая природа, къ ней все-таки прилипло очень много отъ безконечнаго, и я думаю даже, что, если бы она не была сама во многихъ отношеніяхъ безконечной, то нельзя было бы объяснить твердой убѣжденности и увѣренности въ бытіи абсолютнаго, въ чемъ всѣ мы чувствуемъ себя единодушными. Въ частности я защищаю то воззрѣніе, что человѣческій разсудокъ обладаетъ безграничными задатками къ постепенному образованію цѣлыхъ числовыхъ классовъ, которые находятся въ опредѣленномъ отношеніи къ безконечнымъ модусамъ и мощности которыхъ все больше и больше.

На выбранномъ мною пути можно, какъ я думаю, приблизиться къ рѣшенію главныхъ трудностей въ обѣихъ, внѣшне различныхъ, но внутренне вполнѣ родственныхъ, системахъ обоихъ вышеназванныхъ мыслителей, а нѣкоторыя изъ нихъ можно уже теперь удовлетворительно рѣшить и разъяснить. Это трудности, подавшія поводъ къ позднѣйшему критицизму, который, на мой взглядъ, при всѣхъ своихъ преимуществахъ, не даетъ достаточнаго возмѣщенія за стѣсненіе развитія ученій Спинозы и Лейбница. Вѣдь наряду или на мѣсто механическаго объясненія природы, которое обладаетъ внутри сферы своего дѣйствія всѣми вспомогательными средствами и преимуществами математическаго анализа, но односторонность и недостаточность котораго были такъ отлично вскрыты Кантомъ, не появилось—даже въ своихъ начаткахъ—вооруженное тѣмъ же математическимъ аппаратомъ и выходящее изъ рамокъ механизма органическое объясненіе природы. Путь къ нему, какъ я думаю, удастся проложить, если снова возьмутся продолжать работы и стремленія тѣхъ двухъ философовъ.

Особенно труднымъ пунктомъ въ системѣ Спинозы является отношеніе конечныхъ модусовъ къ безконечнымъ модусамъ. Тамъ остается невыясненнымъ, какъ и при какихъ обстоятельствахъ можетъ утвердиться въ своей самостоятельности конечное по отношенію къ безконечному или безконечное по отношенію къ еще болѣе безконечному. Затронутый уже въ § 4 примѣръ показываетъ, какъ мнѣ кажется, въ своей простой символикѣ тотъ путь, идя по которому, удастся, можетъ-быть, приблизиться къ рѣшенію этого вопроса. Если ω есть первое число второго числового класса, то мы имѣемъ $1+\omega=\omega$; наоборотъ, $\omega+1=(\omega+1)$, гдѣ $(\omega+1)$ представляетъ совершенно отличное отъ ω число. Такимъ образомъ, какъ здѣсь ясно видно, все зависитъ отъ положенія, занимаемаго конечнымъ по отношенію къ безконечному. Если первое предшествуетъ, то оно растворяется и исчезаетъ въ безконечномъ. Если же оно скромно займетъ свое мѣсто позади безконечнаго, то оно сохраняется и соединяется съ нимъ въ одно новое модифицированное безконечное.

§ 6.

Если представляетъ трудности постигать безконечно большія, замкнутыя цѣлыя числа, сравнимыя между собой и съ цѣлыми числами, связанныя между собою и съ конечными числами съ помощью неизмѣнныхъ законовъ, то эти трудности находятся въ зависимости отъ того факта, что новыя числа во многихъ отношеніяхъ представляютъ характеръ прежнихъ чиселъ, а въ гораздо болѣе многихъ другихъ отношеніяхъ обладаютъ совершенно своебразной природой, благодаря которой мы часто встрѣчаемъ у одного и того же числа соединенными различные признаки, которые никогда не встрѣчаются вмѣстѣ у конечныхъ чиселъ, но всегда раздѣльны. Вѣдь въ одномъ изъ цитированныхъ въ предыдущемъ § мѣстъ изъ философовъ встрѣчается то соображеніе, что, если бы существовало какое-нибудь безконечное цѣлое число, то оно должно было бы быть одновременно и четнымъ и нечетнымъ числомъ, а такъ какъ оба эти признака не могутъ существовать вмѣстѣ, то, слѣдовательно, не существуетъ такого безконечнаго цѣлаго числа.

Здѣсь, очевидно, молчаливо предполагаютъ, что признаки, раздѣльные въ случаѣ традиціонныхъ чиселъ, должны были бы сохранить то же отношеніе и въ случаѣ новыхъ чиселъ. Отсюда умозаключаютъ о невозможности безконечныхъ чиселъ. Кому не бросится въ глаза паралогизмъ этого разсужденія? Развѣ всякое обобщеніе или расширеніе понятій не связано и даже не мыслимо безъ отказа отъ частныхъ признаковъ? Развѣ не въ самое послѣднее время пришли къ столь важной, приведшей къ величайшимъ успѣхамъ, мысли ввести комплексныя величины, не обращая вниманія на то, что ихъ нельзя назвать ни положительными ни отрицательными? А вѣдь на такой только шагъ рѣшаюсь и я здѣсь, и, можетъ-быть, общему сознанію будетъ легче послѣдовать за мною, чѣмъ это было при переходѣ отъ вещественныхъ чиселъ къ комплекснымъ. Вѣдь, хотя новыя числа отличаются болѣе интенсивной, субстанціональной опредѣленностью отъ традиціонныхъ чиселъ, однако, какъ количества, они имѣютъ такую же реальность, что и послѣднія. Между тѣмъ, на пути введенія комплексныхъ величинъ встрѣчались долгое время трудности, пока послѣ многихъ усилій нашли ихъ геометрическое представленіе съ помощью точекъ или отрѣзковъ въ плоскости.

Возвращаясь къ указанному выше вопросу о четности или нечетности, разсмотримъ еще разъ число ω, чтобы показать, какъ въ немъ совмѣщаются безъ всякаго противорѣчія эти несоединимые на конечныхъ числахъ признаки. Въ § 3 были даны общія опредѣленія для сложенія и умноженія, причемъ я указалъ, что для этихъ дѣйствій коммутативный законъ не имѣетъ вообще силы. Въ этомъ я вижу существенное различіе между безконечными и конечными числами. Надо еще замѣтить, что въ произведеніи $\beta\alpha$ я понимаю подъ β—множитель, подъ α—множимое. Тогда безъ труда мы получаемъ для ω слѣдующія двѣ формы: $\omega = \omega.2$ и $\omega = 1 + \omega.2$. Согласно этому ω можно разсматривать и какъ четное и какъ нечетное число. Съ другой же точки зрѣнія, если взять 2 за множитель, то можно было бы сказать, что ω не есть ни четное ни нечетное число, ибо, какъ легко показать, ω нельзя представить ни въ формѣ $2.\alpha$ ни въ формѣ $2.\alpha + 1$. Слѣдовательно, дѣйствительно число ω по сравненію съ традиціонными числами отличается совершенно своеобразной природой, такъ какъ въ немъ соединены всѣ эти признаки и свойства. Еще значительно болѣе своеобразны прочія числа второго числового класса, какъ это я впослѣдствіи покажу.

§ 7.

Хотя въ § 5 я привелъ много мѣстъ изъ сочиненій Лейбница, въ которыхъ онъ высказывается противъ безконечныхъ чиселъ, говоря тамъ между прочимъ: Il n'y a point de nombre infini ni de ligne ou autre quantité infinie, si on les prend pour des Touts veritables". „L'infini veritable n'est pas une modification, c'est l'absolu; au contraire, dès qu'on modifie, ou se borne ou forme un fini" (причемъ въ послѣдней цитатѣ я согласенъ съ нимъ относительно первой половины ея, но не согласенъ относительно второй), однако, съ другой стороны, я нахожусь въ счастливомъ положеніи, будучи въ состояніи привести замѣчанія того же самаго мыслителя, въ которыхъ онъ—до извѣстной степени въ противорѣчіи съ самимъ собою—высказывается самымъ недвусмысленнымъ образомъ въ пользу собственно безконечнаго, отличающагося отъ абсолютнаго. Такъ напримѣръ, въ Эрдманновскомъ изданіи ст. 118 онъ говоритъ:

„Je suis tellement pour l'infini actuel, qu'au lieu d'admettre, que la nature l'abhorre, comme l'on dit vulgairement, je tiens, qu'elle l'affecte partout, pour mieux marquer les perfections de son Auteur. Ainsi je crois, qu'il n'y a aucune partie de la matière, qui ne soit, je ne dis pas divisible, mais actuellement divisée, et par conséquent la moindre particelle doit être considerée, comme un monde, plein d'une infinité de créatures différentes".

Но рѣшительнѣйшаго защитника собственно-безконечное, какъ оно, напримѣръ, встрѣчается намъ въ строго опредѣленныхъ точечныхъ множествахъ или въ составѣ тѣлъ изъ точечныхъ атомовъ (я, слѣдовательно, имѣю въ виду здѣсь не химико-физическіе демокритовскіе атомы, потому что я не могу признать ихъ существующими ни въ абстракціи ни въ дѣйствительности, какъ ни полезной до извѣстной степени оказалась эта фикція), но рѣшительнѣйшаго защитника говоря, собственно - безконечное нашло въ одномъ въ высшей степени остроумномъ философѣ и математикѣ нашего столѣтія, въ Бернгардѣ Больцано, который развилъ свои взгляды на этотъ вопросъ въ прекрасномъ и содержательномъ сочиненіи: „Paradoxien des Unendlichen, Leipzig, 1851, имѣющемъ цѣлью показать, какъ противорѣчія, отыскивавшіяся въ безконечномъ скептиками и перипатетиками всѣхъ временъ вовсе не оказываются въ немъ, лишь только берутъ на себя, правда, не совсѣмъ легкій трудъ разсматривать понятія о безконечности со всей серьезностью въ ихъ истинномъ значеніи. Въ этомъ сочиненіи можно поэтому встрѣтить также превосходное во многихъ отношеніяхъ разсужденіе о математическомъ несобственно-безконечномъ, какъ оно выступаетъ въ формѣ дифференціаловъ перваго или высшихъ порядковъ или въ видѣ суммъ безконечныхъ рядовъ или въ видѣ какихъ-нибудь иныхъ предѣльныхъ процессовъ. Это безконечное (названное нѣкоторыми схоластиками синкатегорематическимъ безконечнымъ) представляетъ простое вспомогательное понятіе нашего мышленія, понятіе отношенія, которое, согласно своему опредѣленію, заключаетъ въ себѣ идею измѣнчивости и о которомъ, такимъ образомъ, никогда нельзя сказать въ собственномъ смыслѣ слова: „datur".

Весьма замѣчательно, что въ воззрѣніяхъ относительно этого рода безконечнаго не существуетъ никакихъ существенныхъ различій и между современными философами, если отвлечься отъ того, что нѣкоторыя современныя школы такъ называемыхъ позитивистовъ, или реалистовъ [4]) или матеріалистовъ готовы видѣть въ этомъ синкатегорематическомъ безконечномъ — насчетъ котораго онѣ сами должны согласиться, что оно не обладаетъ никакимъ собственнымъ бытіемъ—наивысшее понятіе.

Но уже у Лейбница во многихъ мѣстахъ мы встрѣчаемъ указанія на правильное въ существенномъ положеніе вещей. Вѣдь къ этому не собственно-безконечному относится, напримѣръ, слѣдующее мѣсто эрдманновскаго изданія (с. 436): „Ego philosophice loquendo non magis statuo magnitudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non magis infinitesimas quam infinituplas. Utrasque enim per modum loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones usum habere ad compendium cogitandi adeoqe ad inventionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari non posse".

Больцано, можетъ-быть, единственный авторъ, который до нѣкоторой степени оперируетъ собственно-безконечными числами, по крайней мѣрѣ, у него о нихъ неоднократно идетъ рѣчь, но я никакъ не могу согласиться съ тѣмъ способомъ, какимъ онъ трактуетъ ихъ, не будучи въ состояніи дать правильнаго опредѣленія ихъ и, напримѣръ, §§ 29—33 его книги я считаю ошибочными и негодными. У этого автора для дѣйствительнаго абстрактнаго пониманія опредѣленно-безконечныхъ чиселъ не хватаетъ какъ общаго понятія о мощности, такъ и точнаго понятія о количествѣ. Правда, въ отдѣльныхъ мѣстахъ оба эти понятія встрѣчаются у него въ зародышевомъ видѣ въ формѣ спеціальностей (Specialitäten), но, какъ мнѣ кажется, онъ при этомъ не можетъ достигнуть полной ясности и опредѣленности, чѣмъ и объясняются многія непослѣдовательности и даже ошибки этой замѣчательной книги.

Безъ вышеупомянутыхъ двухъ понятій невозможно, по моему мнѣнію, подвинуться впередъ въ ученіи о многообразіяхъ. То же самое, думаю я, относится къ областямъ, которыя зависятъ отъ ученія о многообразіяхъ или тѣснѣйшимъ образомъ связаны съ нимъ, какъ, напримѣръ, современная теорія функцій, съ одной стороны, и логика и теорія познанія, съ другой. Когда я разсматриваю безконечное такъ, какъ я это сдѣлалъ здѣсь и въ своихъ прежнихъ работахъ, то меня охватываетъ истинная радость, которой я съ благодарностью отдаюсь, при видѣ того, какъ понятіе цѣлаго числа, имѣющее въ области конечнаго подъ собой лишь понятіе количества, какъ бы раскалывается, когда мы подымаемся въ область безконечнаго, на два понятія—на понятіе мощности, независимое отъ присущаго нѣкоторому множеству порядка, и понятіе количества, необходимымъ образомъ связанное съ нѣкоторымъ закономѣрнымъ порядкомъ множества, благодаря которому послѣднее становится вполнѣ упорядоченнымъ множествомъ. А когда я обратно спускаюсь изъ области безконечнаго въ область конечнаго, то я такъ же ясно и прекрасно вижу, какъ оба понятія снова становятся однимъ и соединяются въ понятіе конечнаго цѣлаго числа.

§ 8.

Мы можемъ говорить въ двухъ смыслахъ о дѣйствительности или существованіи цѣлыхъ чиселъ какъ конечныхъ, такъ и безконечныхъ. Строго говоря, это тѣ же самыя два отношенія, въ которыхъ вообще можно подымать вопросъ о реальности какихъ-либо понятій или идей. Во-первыхъ, мы можемъ считать цѣлыя числа дѣйствительными постольку, поскольку они занимаютъ на основѣ опредѣленій вполнѣ опредѣленное мѣсто въ нашемъ разсудкѣ, вполнѣ ясно отличаются отъ другихъ составныхъ частей нашего мышленія, стоятъ къ нимъ въ опредѣленныхъ отношеніяхъ и, такимъ образомъ, видоизмѣняютъ опредѣленнымъ образомъ субстанцію нашего духа. Да позволено будетъ мнѣ назвать этотъ видъ реальности нашихъ чиселъ ихъ интра-субъективной, или имманентной, реальностью [5]). Но числамъ можно приписать реальность также постольку, поскольку ихъ слѣдуетъ разсматривать, какъ выраженія или отображенія процессовъ и отношеній во внѣшнемъ мірѣ, противостоящемъ интеллекту, поскольку, далѣе—различные числовые классы: (I), (II), (III) и т. д.—являются представителями мощностей, имѣющихъ дѣйствительное мѣсто въ тѣлесной или духовной природѣ. Этотъ второй видъ реальности я называю трансъ-субъективной или также транзіентной реальностью цѣлыхъ чиселъ.

При вполнѣ реалистической, но въ то же время и не менѣе идеалистической, основѣ моихъ размышленій для меня не подлежитъ никакому сомнѣнію, что оба эти вида реальности всегда совпадаютъ въ томъ смыслѣ, что какое-нибудь понятіе, принимаемое за существующее въ первомъ отношеніи, обладаетъ въ извѣстныхъ, даже безконечно многихъ, отношеніяхъ и транзіентной реальностью [6]). Правда, установленіе этой послѣдней по большей части принадлежитъ къ самымъ труднымъ и утомительнымъ задачамъ метафизики и часто должно быть оставлено до тѣхъ временъ, когда естественное развитіе одной изъ прочихъ наукъ раскроетъ транзіентное значеніе разсматриваемаго понятія.

Эта связь обѣихъ реальностей имѣетъ свой собственный корень въ единствѣ Всего, къ которому мы сами принадлежимъ.—Указаніе на эту связь имѣетъ здѣсь цѣлью вывести отсюда одно важное на мой взглядъ слѣдствіе для математики, именно, что послѣдняя при развитіи своихъ идей должна считаться *единственно лишь* съ *имманентной* реальностью своихъ понятій и поэтому не обязана вовсе провѣрить также ихъ транзіентную реальность. Въ виду этого исключительнаго положенія, отличающаго ее отъ всѣхъ другихъ наукъ и объясняющаго сравнительную легкость и отсутствіе принужденія въ занятіи ею, она заслуживаетъ совершенно особеннымъ образомъ имени свободной математики—названіе, которое я, будь мнѣ предоставленъ выборъ, далъ бы ей охотнѣе, чѣмъ ставшее обычнымъ наименованіе „чистой" математики.

Математика въ своемъ развитіи совершенно свободна и связана лишь тѣмъ само собой разумѣющимся условіемъ, что ея понятія должны быть свободны отъ внутреннихъ противорѣчій и должны также находиться въ неизмѣнныхъ, установленныхъ опредѣленіями отношеніяхъ къ образованнымъ раньше, уже имѣющимся налицо испытаннымъ понятіямъ [7]). Въ частности при введеніи новыхъ чиселъ она обязана только дать опредѣленія ихъ, благодаря которымъ они получаютъ такую опредѣленность и при извѣстныхъ обстоятельствахъ такое отношеніе къ прежнимъ числамъ, что ихъ можно во всѣхъ данныхъ случаяхъ опредѣленно отличать другъ отъ друга. Разъ только какое-нибудь число удовлетворяетъ всѣмъ этимъ условіямъ, то его должно разсматривать въ математикѣ, какъ существующее и реальное. Въ этомъ я и вижу указанное въ § 4 въ видѣ намека основаніе того, почему можно считать раціональныя и ирраціональныя комплексныя числа существующими совершенно такимъ же образомъ, какъ конечныя положительныя цѣлыя числа.

Нѣтъ нужды, какъ я думаю, видѣть въ этихъ принципахъ какую-нибудь опасность для науки, какъ этого опасаются многіе. Во-первыхъ, указанныя условія, при которыхъ только и можетъ имѣть мѣсто свобода образованія чиселъ такого рода, что они даютъ лишь ничтожный просторъ произволу, а во-вторыхъ каждое математическое понятіе носитъ въ самомъ себѣ необходимый коррективъ. Если оно неплодотворно или нецѣлесообразно, то это весьма скоро обнаруживается, благодаря его полной непригодности, и тогда оно, за отсутствіемъ успѣха, отбрасывается. Мнѣ же, наоборотъ, представляется, что гораздо большая опасность заключается во всякомъ излишнемъ ограниченіи математическаго стремленія къ творчеству, опасность тѣмъ бóльшая, что въ пользу этихъ ограниченій нельзя въ дѣйствительности привести никакихъ доводовъ изъ сущности науки. Вѣдь сущность **математики** заключается именно въ ея **свободѣ**.

Если бы это свойство математики не стало мнѣ извѣстнымъ изъ вышеупомянутыхъ основаній, то все развитіе самой науки, какъ мы его наблюдаемъ въ нашемъ столѣтіи, должно было бы привести меня къ тѣмъ же самымъ воззрѣніямъ.

Если бы Гауссъ, Коши, Абель, Якоби, Дириклэ, Вейерштрассъ, Эрмитъ и Риманнъ были обязаны подвергать всегда свои новыя идеи метафизическому контролю, то мы бы, право, не смогли наслаждаться грандіозной системой современной теоріи функцій, которая, хотя и была создана совершенно свободно, безъ всякихъ постороннихъ цѣлей, уже и теперь въ своихъ примѣненіяхъ къ механикѣ, астрономіи и математической физикѣ обнаруживаетъ, какъ этого и слѣдовало ожидать, свое транзіентное значеніе. Мы не видѣли бы передъ собой великолѣпнаго расцвѣта теоріи дифференціальныхъ уравненій въ рукахъ Фукса, Пуанкарэ и многихъ другихъ, если бы эти выдающіеся ученые были стѣснены различными чужеродными вліяніями. И если бы Куммеръ не дозволилъ себѣ чреватой послѣдствіями свободы ввести такъ-называемыя „идеальныя" числа въ теорію чиселъ, то мы теперь не были бы въ состояніи удивляться столь важнымъ и превосходнымъ алгебраическимъ и ариѳметическимъ работамъ Кронекера и Дедекинда.

Но если математика имѣетъ полное право развиваться совершенно независимо отъ всяческихъ метафизическихъ вліяній, то, съ другой стороны, я не могу этого права за прикладной математикой все-таки признать, напримѣръ, за аналитической механикой и математической физикой. По моему мнѣнію, эти науки, какъ въ своихъ основахъ, такъ и въ преслѣдуемыхъ ими цѣляхъ, метафизичны. Если онѣ пытаются освободиться отъ этого, какъ это было предложено недавно однимъ знаменитымъ физикомъ, то онѣ вырождаются въ какое-то „описаніе природы", которое по необходимости лишено свѣжаго дыханія свободы математической мысли и способности истолкованія и объясненія явленій природы.

§ 9.

При томъ огромномъ значеніи, которое имѣютъ такъ называемыя вещественныя раціональныя и ирраціональныя числа въ ученіи о многообразіяхъ, я не могу здѣсь не высказаться хотя бы въ существеннѣйшемъ объ ихъ опредѣленіяхъ. Я оставлю въ сторонѣ вопросъ о введеніи раціональныхъ чиселъ, ибо для этого существуетъ рядъ строго-ариѳметическихъ изложеній. Изъ ближе стоящихъ ко мнѣ авторовъ я упомяну изложенія г. Грассмана („Lehrbuch der Arithmetik, Berlin, 1861) и г. Мюллера („Lehrbuch der allgemeinen Arithmetik, Halle, 1855). Но зато я хотѣлъ бы вкратцѣ поговорить о трехъ извѣстныхъ мнѣ и въ существенномъ однородныхъ главныхъ формахъ строго ариѳметическаго изложенія ученія объ общихъ вещественныхъ числахъ. Это прежде всего изложеніе, которымъ въ теченіе ряда лѣтъ пользовался въ своихъ лекціяхъ объ аналитическихъ функціяхъ г. проф. Вейерштрассъ и нѣкоторые намеки на которое можно найти въ программной статьѣ г. Коссака (Die Elemente der Arithmetik, Berlin, 1872). Во-вторыхъ, г. Р. Дедекиндъ далъ въ своемъ сочиненіи „Stätigkeit und Irrationale Zahlen", Braunschweig, 1872, свою особенную форму изложенія. Во-третьихъ, въ 1871 г. (Mat. Annalen, B. V, p. 123) я далъ форму изложенія, по внѣшности представляющую извѣстное сходство съ опредѣленіемъ Вейерштрасса, такъ что г. Г. Веберъ могъ смѣшать ее съ послѣднимъ (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 27 Jahrg., Historisch-Liter. Abt., p. 163). На мой взглядъ эта третья, впослѣдствіи развитая и г. Липшицемъ („Grundlagen der Analysis, Bonn, 1877), форма изложенія самая простая и естественная изъ всѣхъ трехъ, имѣющая еще и то преимущество, что она непосредственнѣе всего пригодна для аналитическаго исчисленія.

Къ опредѣленію какого-нибудь ирраціональнаго вещественнаго числа всегда принадлежитъ нѣкоторое строго опредѣленное множество первой мощности раціональныхъ чиселъ. Въ этомъ заключается общая черта всѣхъ формъ опредѣленія. Различіе же ихъ заключается въ моментъ порожденія, съ помощью котораго множество соединяется съ опредѣляемымъ имъ числомъ, и въ условіяхъ, которымъ должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соотвѣтственнаго опредѣленія числа.

При первой формѣ опредѣленія въ основу кладется множество положительныхъ раціональныхъ чиселъ a_ν, которое обозначаютъ черезъ (a_ν) и которое удовлетворяетъ тому условію, что сколь многія и какія бы изъ этихъ a_ν ни суммировали въ конечномъ количествѣ, эта сумма остается всегда ниже нѣкоторой данной границы. Теперь, если мы имѣемъ двѣ подобныхъ совокупности (a_ν) и (a'_ν), то строго доказывается, что смогутъ представиться три случая: или каждая часть $\frac{1}{n}$ единицы всегда встрѣчается одинаково часто въ обѣихъ совокупностяхъ, если только суммируютъ ихъ элементы въ достаточномъ, доступномъ увеличенію, конечномъ количествѣ; или $\frac{1}{n}$, начиная съ извѣстнаго n, содержится всегда чаще въ первой совокупности, чѣмъ во второй или, наконецъ, $\frac{1}{n}$, начиная съ извѣстнаго n, содержится во второй совокупности чаще, чѣмъ въ первой. Соотвѣтственно этимъ случаямъ, мы полагаемъ, если b и b' означаютъ числа опредѣляемыя обѣими совокупностями (a_ν) и (a'_ν), въ первомъ случаѣ $b = b'$, во второмъ $b > b'$, въ третьемъ $b < b'$. Если мы соединимъ обѣ совокупности въ одну новую $(a_\nu,\ a'_\nu)$, то это даетъ основу для опредѣленія $b + b'$. Если изъ обѣихъ совокупностей (a_ν) и (a'_ν) образовать новую совокупность $(a_\nu \,.\, a'_\nu)$, въ которой элементы представляютъ произведеніе изъ всѣхъ a_ν на всѣ a'_ν, то эта новая совокупносгь принимается за основу опредѣленія произведенія $b \,.\, b'$.

Мы видимъ, что здѣсь моментъ порожденія, связывающій множество съ опредѣляемымъ имъ числомъ, заключается въ образованіи суммъ. Но должно р ѣ з к о подчеркнуть то, что здѣсь оперируютъ только суммированіемъ всегда конечнаго количества раціональныхъ элементовъ, а не то, чтобы, скажемъ, опредѣляемое число b заранѣе приравнивалось суммѣ Σa_ν безконечнаго ряда (a_ν). Такое приравниваніе представляло бы здѣсь логическую о ш и б к у, ибо, скорѣе, наоборотъ, опредѣленіе суммы Σa_ν получается лишь путемъ приравниванія ея непремѣнно уже опредѣленному заранѣе готовому числу b. Я думаю, что эта логическая ошибка, которой избѣгнулъ впервые г. Вейерштрассъ, совершалась въ прежнія времена почти всѣми и не была замѣчена лишь потому, что она относится къ тѣмъ рѣдкимъ случаямъ, когда дѣйствительная ошибка не можетъ причинить большого вреда въ исчисленіи.— Несмотря на это, съ вышеуказанной ошибкой связаны, по моему мнѣнію, всѣ тѣ трудности, которыя заключаются въ понятіи ирраціональнаго, между тѣмъ какъ, если избѣгнуть этой ошибки, то ирраціональное число занимаетъ мѣсто въ нашемъ духѣ съ такой же опредѣленностью, ясностью и отчетливостью, какъ ирраціональное число.

Форма опредѣленія г. Дедекинда кладетъ въ основу совокупность всѣхъ раціональныхъ чиселъ, но раздѣленныхъ на двѣ группы такимъ образомъ, что, если мы обозначимъ числа первой группы черезъ $\mathfrak{A}\nu$, а числа второй группы черезъ $\mathfrak{B}\mu$, то постоянно $\mathfrak{A}\nu \angle \mathfrak{B}\mu$. Подобное дѣленіе множества раціональныхъ чиселъ г. Дедекиндъ называетъ сѣченіемъ его, обозначаетъ его черезъ $(\mathfrak{A}\nu / \mathfrak{B}\mu)$ и сопрягаетъ съ нимъ нѣкоторое число b. Если сравнить два подобныхъ сѣченія $(\mathfrak{A}\nu / \mathfrak{B}\mu)$ и $(\mathfrak{A}'\nu / \mathfrak{B}'\mu)$ другъ съ другомъ, то, какъ и при первой формѣ опредѣленія оказывается всего три возможности, соотвѣтственно которымъ представленныя обоими сѣченіями числа b и b' или приравниваются другъ другу, или принимается, что $b > b'$, или что $b \angle b'$. Первый случай имѣетъ мѣсто — если отвлечься отъ нѣкоторыхъ, легко регулируемыхъ исключеній, происходящихъ при раціональности опредѣляемыхъ чиселъ—лишь при полномъ тождествѣ обоихъ сѣченій. Здѣсь наблюдается рѣшительное, не допускающее отрицанія, преимущество этой формы опредѣленія по сравненію съ обѣими другими, а именно, что каждому числу b соотвѣтствуетъ лишь одно единственное сѣченіе, но оно сопровождается и крупнымъ недостаткомъ, а именно, что въ анализѣ числа никогда не представляются въ формѣ „сѣченій“, въ которую ихъ приходится лишь втиснуть весьма искусственнымъ и сложнымъ образомъ.

И здѣсь затѣмъ получается опредѣленіе для суммы $b + b'$ и произведенія $b . b'$ на основѣ новыхъ сѣченій, вытекающихъ изъ двухъ данныхъ сѣченій.

Недостатокъ, связанный съ первой и третьей формой опредѣленія, а именно, что здѣсь одни и тѣ же, т.-е. равныя числа представляются безконечно часто и что, такимъ образомъ, не получается непосредственно однозначнаго инвентаря всѣхъ вещественныхъ чиселъ, можно весьма легко устранить путемъ специализированія положенныхъ въ основу множествъ (a_ν), привлекши къ разсмотрѣнію какую-нибудь изъ извѣстныхъ однозначныхъ системъ, какъ, напримѣръ, десятичную систему или же разложеніе въ простую непрерывную дробь.

Я перейду теперь къ третьей формѣ опредѣленія вещественныхъ чиселъ. И здѣсь въ основу кладется безконечное множество раціональныхъ чиселъ (a_ν) первой мощности, но ему теперь приписываются другія свойства, чѣмъ по теоріи Вейерштрасса. Я требую именно, чтобы, взявъ произвольно малое раціональное число ε, можно было удалить конечное количество членовъ множества такъ, чтобы между оставшимися, между каждой парой, разница по абсолютной величинѣ была меньше, чѣмъ ε. Каждое подобное множество (a_ν), которое можно также характеризовать равенствомъ:

$$\lim_{\nu=\infty} (a_{\nu+\mu} - a_\nu) = 0 \text{ (при произвольномъ } \mu)$$

я называю фундаментальнымъ рядомъ и сопрягаю съ нимъ нѣкоторое опредѣляемое имъ число b, для котораго можно даже цѣлесообразно употреблять самый знакъ (a_ν), какъ это было предложено г. Гейне, который въ этихъ вопросахъ послѣ многихъ устныхъ бесѣдъ присоединился къ моимъ взглядамъ (ср. Borchardts J., Bd. 74, p., 172). Подобный фундаментальный рядъ представляетъ, какъ можно строго вывести изъ его понятія, три случая: или его члены a_ν для достаточно большихъ значеній ν меньше по своему абсолютному значенію, чѣмъ любое данное напередъ число; или же они, начиная съ извѣстнаго ν больше, чѣмъ нѣкоторое данное положительное раціональное число ρ, или же они, начиная съ извѣстнаго ν, меньше, чѣмъ нѣкоторая данная отрицательная раціональная величина $-\rho$. Въ первомъ случаѣ я говорю, что b равно нулю, во второмъ, что b больше, чѣмъ нуль, или положительно, въ третьемъ, что b меньше, чѣмъ нуль, или отрицательно.

Затѣмъ мы переходимъ къ элементарнымъ дѣйствіямъ. Если (a_ν) и (a'_ν) представляютъ два фундаментальныхъ ряда, съ помощью которыхъ опредѣляются числа b и b', то оказывается, что и $(a_\nu \pm a'_\nu)$ и $(a_\nu \cdot a'_\nu)$ представляютъ два фундаментальныхъ ряда, которые, слѣдовательно, опредѣляютъ три новыхъ числа, которыя служатъ мнѣ опредѣленіями суммы и разности $b \pm b'$ и произведенія $b.\ b'$.

Если къ этому b отлично отъ нуля—опредѣленіе чего дано въ предыдущемъ—то можно доказать, что и $\left(\frac{a'_\nu}{a_\nu}\right)$ представляетъ фундаментальный рядъ, соотвѣтственное число котораго даетъ опредѣленіе для частнаго $\frac{b'}{b}$.

Элементарныя дѣйствія между числомъ b, даннымъ съ помощью фундаментальнаго ряда (a_ν), и нѣкоторымъ прямо даннымъ раціональнымъ числомъ a заключены въ только-что установленныхъ дѣйствіяхъ, для чего полагаютъ $a'_\nu = a$, $b' = a$.

Лишь теперь мы приходимъ къ опредѣленію равенства и обоихъ случаяхъ неравенства двухъ чиселъ b и b', (изъ которыхъ b' можетъ также равняться a), именно мы говоримъ, что $b = b'$ или $b > b_{,}$ или $b < b_{,}$ въ зависимости отъ того, равно ли нулю, больше ли нуля, или меньше его $b - b'$.

Послѣ всѣхъ этихъ подготовительныхъ разсужденій получается въ качествѣ первой строго доказуемой теоремы, что, если b есть число, опредѣляемое фундаментальныхъ рядомъ (a_ν), то $b - a_\nu$ становится при растущемъ ν меньше по абсолютному значенію, чѣмъ любое мыслимое раціональное число или иначе, что:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе на слѣдующій кардинальный пунктъ, значеніе котораго легко можетъ быть пропущено: въ случаѣ *третьей* формы опредѣленія число b не опредѣляется вовсе, какъ предѣлъ членовъ a фундаментальнаго ряда (a_ν). Принять это значило бы совершить такую же логическую ошибку, какъ и та, о которой мы говорили при разсмотрѣніи *первой* формы опредѣленія, и именно на томъ основаніи, что тогда предполагается напередъ существованіе предѣла: $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = b$. Скорѣе дѣло обстоитъ обратнымъ образомъ, а именно, что, благодаря предыдущимъ нашимъ опредѣленіямъ, понятію b приписываются такія свойства и отношенія къ раціональнымъ числамъ, что отсюда можно вывести съ логической очевидностью заключеніе:

$\lim_{\nu=\infty} a_\nu$ существуетъ и равняется b. Да простятъ мнѣ всѣ эти подробности, которыя оправдываются тѣмъ, что большинство проходитъ мимо этихъ непримѣтныхъ деталей и затѣмъ легко натыкается на рядъ противорѣчій относительно ирраціональныхъ чиселъ, между тѣмъ какъ соблюденіе указанныхъ здѣсь предосторожностей легко предохранило бы ихъ отъ этихъ противорѣчій. Они тогда бы ясно поняли, что ирраціональное число, благодаря *даннымъ ему нашими опредѣленіями свойствамъ*, является такой же реальностью для нашего духа, какъ раціональное и даже какъ цѣлое раціональное число, и что нѣтъ вовсе нужды *получать* его путемъ предѣльнаго процесса, а что, скорѣе, наоборотъ, благодаря *обладанію* имъ, можно убѣдиться общимъ образомъ въ пригодности и очевидности предѣльныхъ процессовъ [8]). Вѣдь вышеприведенную теорему легко расширить слѣдующимъ образомъ: если (b_ν) представляетъ какое-нибудь множество раціональныхъ или ирраціональныхъ чиселъ такого свойства, что

$\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (каково бы ни было μ), то имѣется

нѣкоторое число b, опредѣляемое фундаментальнымъ рядомъ (a_ν), такое, что

$$\lim_{\nu=\infty} b_\nu = b.$$

Оказывается, слѣдовательно, что *тѣ самыя* числа b, которыя были опредѣлены на основаніи фундаментальныхъ рядовъ (a_ν) (я называю эти фундаментальные ряды рядами *перваго* порядка) такимъ образомъ, что они представляются предѣлами a_ν, оказывается, что они могутъ быть представлены различными способами въ качествѣ предѣловъ рядовъ (b'_ν), гдѣ каждое b_ν опредѣляется съ помощью фундаментальнаго ряда перваго порядка $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ (съ неизмѣннымъ ν).

Я называю поэтому подобное множество (b_ν), если оно обладаетъ тѣмъ свойствомъ, что $\lim\limits_{\nu=\infty}(b_{\nu+\mu}-b_\nu)=0$ (при произвольномъ μ), фундаментальнымъ рядомъ *второго* порядка.

Точно такимъ же образомъ можно образовать фундаментальные ряды *третьяго*, *четвертаго*... n-го порядка, но также фундаментальные ряды α-го порядка, гдѣ α представляетъ любое число второго числового класса.

Всѣ эти фундаментальные ряды даютъ для опредѣленія какого-либо вещественнаго числа b то же самое, что и фундаментальные ряды *перваго* порядка. Вся разница заключается лишь въ болѣе сложной, пространной формѣ изложенія. Тѣмъ не менѣе, если только желаютъ вообще стать на точку зрѣнія третьей формы опредѣленія, то мнѣ представляется въ высокой степени цѣлесообразнымъ отмѣтить это различіе указываемымъ образомъ, какъ я уже это аналогичнымъ образомъ сдѣлалъ въ приведенномъ мѣстѣ (Mat. Ann., B. V, p. 123). Поэтому я пользуюсь теперь слѣдующимъ способомъ выраженія: числовая величина b дана фундаментальнымъ рядомъ n-го или α-го порядка. Если рѣшиться на это, то мы получаемъ такимъ путемъ необыкновенно легкій и въ то же время ясный способъ выраженія, чтобы описать наиболѣе простымъ и выпуклымъ образомъ всю полноту многообразныхъ, часто столь сложныхъ, образованій анализа. Благодаря этому получится, на мой взглядъ, серьезный выигрышъ въ ясности и прозрачности изложенія. Я здѣсь возражаю противъ опасеній, высказанныхъ г. Дедекиндомъ, въ предисловіи къ его сочиненію „Непрерывность и ирраціональныя числа" относительно этихъ различеній. Мнѣ вовсе не приходило въ голову вводить съ помощью фундаментальныхъ рядовъ второго, третьяго и т. д. порядка новыя числа, которыя бы не были опредѣлимы уже съ помощью фундаментальныхъ рядовъ перваго порядка; я имѣлъ лишь въ виду логически различную форму выраженія. Это ясно вытекаетъ изъ отдѣльныхъ мѣстъ моей работы.

Я хотѣлъ бы здѣсь обратить вниманіе на одно замѣчательное обстоятельство, именно, что фундаментальные ряды, различенные мною съ помощью чиселъ перваго и второго числового класса, совершенно исчерпываютъ всѣ вообще мыслимыя въ анализѣ, уже найденныя или еще не найденныя, формы, исчерпываютъ въ томъ смыслѣ, что нѣтъ вовсе фундаментальныхъ рядовъ—

какъ я это строго докажу при другихъ обстоятельствахъ—порядковое число которыхъ можно было бы обозначить черезъ какое-нибудь число, напримѣръ, третьяго числового класса.

Я попытаюсь вкратцѣ разъяснить цѣлесообразность **третьей** формы опредѣленія.

Для обозначенія того, что какое-нибудь число b дано на основаніи фундаментальнаго ряда (e_ν) какого-нибудь порядка n или α, я пользуюсь формулами:

$$b \sim (e_\nu) \text{ или } (e_\nu) \sim b.$$

Если данъ напримѣръ, сходящійся рядъ съ общимъ членомъ c_ν, то, какъ извѣстно, необходимое и достаточное условіе сходимости заключается въ томъ, чтобы: $\lim\limits_{\nu=\infty} (c_{\nu+1} + \ldots + c_{\nu+\mu}) = 0$ (гдѣ μ произвольно).

Поэтому сумму ряда опредѣляютъ съ помощью формулы:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \sim \left(\sum_{n=0}^{\nu} c_n \right).$$

Если, напримѣръ, всѣ c_n опредѣлены на основаніи фундаментальныхъ рядовъ k-го порядка, то то же самое можно сказать о $\sum\limits_{n=0}^{\nu} c_n$ и сумма $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ выступаетъ здѣсь передъ нами, какъ опредѣляемая фундаментальнымъ рядомъ $(k+1)$ того порядка.

Если, напримѣръ, нужно описать логическое содержаніе положенія $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, то можно представить себѣ, что $\frac{\pi}{2}$ и степени его даны, скажемъ, формулами

$$\frac{\pi}{2} \sim (a_\nu),\ \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1} \sim \left(a_\nu^{\ 2m+1}\right),$$

гдѣ для сокращенія положено

$$2\sum_{n=0}^{\nu}\frac{(-1)^n}{2n+1}=a_\nu\,.$$

Далѣе мы имѣемъ:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sim\left(\sum_{m=0}^{\mu}\;(-1)^m\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m+1}}{(2m+1)!}\right),$$

т.-е. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ опредѣленъ на основаніи фундаментальнаго ряда второго порядка и, слѣдовательно, приведенное выше положеніе выражаетъ равенство раціональнаго числа 1 и нѣкотораго, даннаго на основаніи фундаментальнаго ряда второго порядка, числа $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Аналогичнымъ образомъ можно сравнительно просто и точно описать логическое содержаніе болѣе сложныхъ формулъ, какъ напримѣръ, формулъ изъ теоріи ζ—функцій, между тѣмъ какъ сведеніе безконечныхъ рядовъ къ такимъ, которые состоятъ изъ однихъ только раціональныхъ чиселъ, притомъ одинаковаго всегда знака, и которые безусловно сходятся, сопряжено большею частью съ величайшими сложностями, которыхъ здѣсь—при *третьей* формѣ опредѣленія въ противоположность *первой*—мы совершенно избѣгаемъ и, очевидно, сможемъ избѣгать, разъ только дѣло будетъ идти не о численномъ приблизительномъ опредѣленіи суммъ рядовъ съ помощью раціональныхъ чиселъ, а только о безусловно строгихъ опредѣленіяхъ ихъ. Первой формой опредѣленія, на мой взглядъ, не такъ легко пользоваться, если дѣло идетъ о точномъ опредѣленіи суммъ рядовъ, которые не сходятся безусловнымъ образомъ и для которыхъ указанъ напередъ порядокъ какъ ихъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ членовъ. Но даже въ случаѣ рядовъ съ безусловной сходимостью нахожденіе суммы, хотя бы послѣдняя была независима отъ порядка членовъ, возможно будетъ въ дѣйствительности лишь при опредѣленномъ порядкѣ ихъ. Поэтому и въ подобныхъ случаяхъ является искушеніе отдать преимущество третьей формѣ опредѣленія передъ первой. Наконецъ, въ пользу третьей формы опредѣленія говоритъ ея способность къ обобщенію для случая сверхъ-конечныхъ чиселъ, между тѣмъ какъ подобное обобщеніе совершенно невозможно для первой формы опредѣленія. Это различіе зависитъ попросту отъ того, что въ случаѣ сверхъ-конечныхъ чиселъ коммутативный законъ не имѣетъ вообще мѣста уже при сложеніи. Между тѣмъ первая форма опредѣленія неразрывно связана съ этимъ закономъ— она стоитъ и падаетъ съ нимъ. Но для всѣхъ видовъ чиселъ, гдѣ имѣетъ мѣсто коммутативный законъ сложенія первая форма опредѣленія, если не говорить объ отмѣченныхъ пунктахъ, оказывается совершенно превосходной.

§ 10.

Понятіе „континуума" не только сыграло повсюду въ развитіи наукъ значительную роль, но также и вызывало всегда величайшія различія во мнѣніяхъ и даже ожесточенные споры. Это зависитъ, можетъ-быть, отъ того, что лежащая въ основѣ его идея получила въ своемъ проявленіи у спорящихъ различное содержаніе, такъ какъ имъ не было передано точное и полное опредѣленіе понятія. А возможно и то—и это представляется мнѣ самымъ вѣроятнымъ,—что идея континуума не представлялась уже грекамъ, которые, кажется, впервые образовали ее, съ той ясностью и полнотой, которыя были бы необходимы, чтобы исключить возможность различныхъ толкованій со стороны послѣдующихъ мыслителей. Такъ, мы видимъ, что Левкиппъ, Демокритъ и Аристотель разсматриваютъ континуумъ, какъ нѣчто составное, состоящее ex partibus sine fine divisilibus. Наоборотъ, Эпикуръ и Лукрецій составляютъ его изъ своихъ атомовъ, какъ конечныхъ вещей. Отсюда впослѣдствіи загорѣлся большой споръ между философами, изъ которыхъ одни пошли за Аристотелемъ, другіе за Эпикуромъ. Иные же философы, желая держаться вдали отъ этого спора, рѣшили съ Ѳомой Аквинскимъ [9]), что континуумъ не состоитъ ни изъ безконечно многихъ, ни изъ конечнаго количества частей, но что онъ не состоитъ вовсе ни изъ какихъ частей. Это послѣднее мнѣніе, какъ мнѣ кажется, содержитъ не столько разъясненіе предмета, сколько молчаливое признаніе, что не добрались до сути его и предпочитаютъ какъ-нибудь обойти его Здѣсь мы видимъ средневѣково-схоластическое происхожденіе воззрѣнія, защищаемаго еще въ настоящее время, согласно которому континуумъ представляетъ нѣкоторое неразложимое понятіе или же, какъ выражаются другіе, чистое апріорное созерцаніе, недоступное вовсе опредѣленію путемъ понятій. Каждая ариѳметическая попытка опредѣленія этой тайны разсматривается, какъ незаконное посягательство, и соотвѣтственнымъ образомъ отвергается. Робкія натуры испытываютъ при этомъ впечатлѣніе, какъ если бы въ вопросѣ о континуумѣ дѣло шло не о математическо-логическомъ понятіи, но скорѣе о какомъ-то религіозномъ догматѣ.

Отъ меня весьма далека мысль снова вызвать къ жизни эти спорные вопросы, да кромѣ того для подробнаго обсужденія ихъ мнѣ не хватило бы мѣста въ узкихъ рамкахъ этой статьи. Я считаю лишь своей обязанностью развить здѣсь по возможности кратко и имѣя въ виду лишь математическое ученіе о множествахъ, понятіе континуума, какъ я понимаю его логически трезво и какъ я пользуюсь имъ въ ученіи о многообразіяхъ. Эта задача не легка для меня, такъ какъ среди математиковъ, къ авторитету которыхъ я охотно апеллирую, ни одинъ не занимался континуумомъ подробно въ томъ смыслѣ, въ какомъ это мнѣ здѣсь необходимо.

Правда, математики, положивъ въ основу одну или нѣсколько комплексныхъ или вещественныхъ непрерывныхъ величинъ (или, какъ мнѣ кажется правильнѣе выражаться, непрерывныхъ множествъ величинъ) образовали въ самыхъ различныхъ направленіяхъ понятіе зависящаго отъ нихъ однозначно или многозначно континуума, т.-е. понятіе о непрерывной функціи. Такимъ путемъ возникла теорія такъ называемыхъ аналитическихъ функцій, а также и болѣе общихъ функцій съ ихъ въ высшей степени замѣчательными свойствами (какъ, напримѣръ, недифференцируемость и т. п.), но самъ независимый континуумъ предполагался авторами-математиками въ той наипростѣйшей формѣ проявленія и не подвергался болѣе подробному разсмотрѣнію.

Прежде всего я долженъ сказать, что, по моему мнѣнію, неправильно привлеченіе понятія времени или нагляднаго созерцанія времени при разсмотрѣніи гораздо болѣе первичнаго и болѣе общаго понятія континуума. Время, по моему мнѣнію, это представленіе, для болѣе яснаго пониманія котораго необходимо предпослать независимое отъ него понятіе непрерывности; даже основываясь на этомъ понятіи, нельзя считать время ни объективнымъ, какъ субстанція, ни субъективнымъ, какъ необходимая апріорная форма созерцанія. Оно ничто иное, какъ нѣкоторое вспомогательное понятіе, понятіе отношенія, благодаря которому устанавливается отношеніе между различными данными въ природѣ и воспринимаемыми нами движеніями. Въ природѣ нигдѣ нѣтъ ничего, подобнаго объективному или абсолютному времени. Поэтому нельзя разсматривать времени, какъ мѣры движенія, скорѣе, наоборотъ, можно было бы разсматривать движеніе, какъ мѣру времени, если бы этому не мѣшало то, что само время въ скромной роли субъективно необходимой апріорной формы созерцанія не привело ни къ какимъ цѣннымъ безспорнымъ истинамъ, хотя съ Канта оно имѣло для этого достаточно времени.

Точно такъ же я убѣжденъ, что такъ называемая форма созерцанія пространства ничего не можетъ дать для рѣшенія проблемы континуума, такъ какъ и пространство и мыслимые въ немъ образы получаютъ лишь съ помощью уже логически готоваго континуума то содержаніе, благодаря которому онѣ могутъ стать не только предметомъ эстетическаго разсмотрѣнія, философскаго остроумія, или неточныхъ сравненій, но и предметомъ трезвыхъ точно-математическихъ изслѣдованій.

Мнѣ поэтому не остается ничего другого, какъ попытаться образовать съ помощью опредѣленныхъ въ § 9 понятій о числахъ возможно общее, чисто ариѳметическое, понятіе континуума точекъ. Основой для этого мнѣ послужитъ, какъ само собой разумѣется, n-мѣрное плоское ариѳметическое пространство Gn, т.-е. совокупность всѣхъ системъ значеній:

$$(x_1 \mid x_2 \mid \ldots x_n)$$

въ которомъ каждое x можетъ независимо отъ прочихъ x-овъ получить всѣ вещественныя числовыя значенія отъ $-\infty$ до $+\infty$. Каждую особенную подобную систему значеній я называю ариѳметической точкой въ Gn. Разстояніе двухъ подобныхъ точекъ опредѣляется выраженіемъ:

$$+\sqrt{(x'_1-x_1)^2+(x'_2-x_2)^2+\ldots+(x'_n-x_n)^2}$$

Подъ ариѳметическимъ содержащимся въ Gn множествомъ точекъ P понимается всякая закономѣрно данная совокупность точекъ пространства Gn. Задача изслѣдованія заключается теперь въ томъ, чтобы установить строго и по возможности обще опредѣленіе того, когда можно назвать P—континуумомъ.

Въ журналѣ Борхардта (B. J., 84, p. 242) я доказалъ, что всѣ пространства Gn, какъ бы велико ни было число измѣреній n, обладаютъ одинаковой мощностью. Они, значитъ, столь же мощны, какъ линейный континуумъ, какъ, слѣдовательно, скажемъ, совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ интервалла $(0\ldots 1)$. Такимъ образомъ, изслѣдованіе и установленіе мощности Gn сводится къ вопросу объ установленіи мощности интервалла $(0\ldots 1)$. Я надѣюсь вскорѣ дать строгое доказательство того, что эта искомая мощность есть ничто иное, какъ мощность нашего второго числового класса (II). Отсюда будетъ слѣдовать, что всѣ безконечныя точечныя множества P обладаютъ или мощностью перваго числового класса (I) или мощностью второго числового класса (II). Отсюда можно будетъ получить также и дальнѣйшее слѣдствіе, что совокупность всѣхъ функцій одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, изобразимыхъ съ помощью нѣкотораго произвольнаго безконечнаго ряда, обладаетъ также лишь мощностью второго числового класса (II) и поэтому перечислима съ помощью чиселъ третьяго числового класса (III) [10]. Эта теорема, слѣдовательно, будетъ относиться, напримѣръ, къ совокупности всѣхъ „аналитическихъ" функцій, т.-е. функцій одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, выразимыхъ съ помощью сходящихся степенныхъ рядовъ, или же будетъ относиться къ множеству всѣхъ функцій одной или нѣсколькихъ вещественныхъ перемѣнныхъ, выразимыхъ съ помощью тригонометрическихъ рядовъ.

Теперь, чтобы приблизиться къ общему понятію континуума, лежащаго внутри G_n, я напомню о понятіи производнаго множества $P^{(1)}$ любого даннаго точечнаго множества P, какъ оно сперва было развито въ статьѣ, помѣщенной въ Mat. Ann. (B. V, XV, XVII, XX и XXI), и какъ оно было расширено до понятія производнаго множества $P^{(\gamma)}$, гдѣ γ можетъ быть любымъ цѣлымъ числомъ одного изъ числовыхъ классовъ (I), (II), (III) и т. д.

Точечныя множества P можно раздѣлить на два класса также по мощности ихъ перваго производнаго множества $P^{(1)}$. Если $P^{(1)}$ обладаетъ мощностью перваго числового класса (I), то оказывается, какъ я уже сказалъ въ § 3 этой работы, что существуетъ нѣкоторое первое цѣлое число α перваго или второго числового класса, для котораго $P^{(\alpha)}$ равно нулю. Но если $P^{(1)}$ обладаетъ мощностью второго числового класса (II), то $P^{(1)}$ можно всегда разложить, притомъ однимъ единственнымъ образомъ, на два множества R и S, такія, что

$$P^{(1)} \equiv R + S,$$

гдѣ R и S обладаютъ совершенно различными свойствами:

R—такого рода, что если повторять процессъ полученія отъ него производнаго множества, то можно прійти къ нулю, такъ что всегда существуетъ нѣкоторое первое число γ числового класса (I) или (II), для котораго

$$R^{(\gamma)} \equiv O.$$

Подобныя точечныя множества R я называю **приводимыми** (reductibel).

S, наоборотъ,—такого рода, что процессъ полученія производнаго множества нисколько не измѣняетъ его, такъ какъ.

$$S \equiv S^{(1)}$$

и, слѣдовательно, также

$$S \equiv S^{(\gamma)}$$

Подобыя множества S я называю **совершенными** (**perfecte**) точечными множествами. Мы можемъ поэтому сказать: если $P^{(1)}$ обладаетъ мощностью второго числового класса (II), то $P^{(1)}$ распадается на нѣкоторое опредѣленное **приводимое** и нѣкоторое опредѣленное **совершенное** точечное множество.

Хотя оба эти предиката—„приводимый" и „совершенный"—несоединимы въ одномъ и томъ же точечномъ множествѣ, но все-таки, съ другой стороны, неприводимый—не то же, что совершенный и точно такъ же несовершенный—не то же самое, что приводимый, какъ это легко замѣтить при нѣсколько внимательномъ разсмотрѣніи.

Совершенныя точечныя множества S не являются вовсе всегда по своему существу тѣмъ, что я назвалъ въ своихъ вышеназванныхъ работахъ терминомъ „повсюду-плотный" („überall-dicht") [11].

Поэтому ихъ однихъ недостаточно для полнаго опредѣленія континуума точекъ, хотя должно тотчасъ же прибавить, что послѣдній всегда долженъ быть **совершеннымъ** множествомъ.

Необходимо еще одно понятіе, чтобы въ соединеніи съ вышеуказаннымъ понятіемъ опредѣлить континуумъ, именно, понятіе **связнаго** (**zusammenhängend**) точечнаго множества T.

Мы называемъ T **связнымъ** точечнымъ множествомъ, когда для любыхъ двухъ точекъ t и t′ — при данномъ напередъ произвольно-маломъ числѣ ε — имѣется всегда нѣсколькими способами **конечное** количество точекъ t_1, t_2 . . . t_ν въ T такихъ, что разстоянія tt_1, t_1t_2, t_2t_3 . . . t_ν t′ всѣ меньше, чѣмъ ε.

Всѣ извѣстные намъ геометрическіе континуумы точекъ подходятъ, какъ легко замѣтить, подъ это понятіе **связнаго** точечнаго множества. По моему мнѣнію, **оба** эти предиката, „совершенный“ и „связный“ представляютъ необходимые и **достаточные** признаки континуума точекъ, и я опредѣляю поэтому континуумъ точекъ внутри Gn, какъ **совершенно-связное множество** [12]. Здѣсь „совершенный“ и „связный“ — не просто слова, они представляютъ отчетливо характеризованные логически предыдущими опредѣленіями вполнѣ всеобщіе предикаты **континуума**.

Больцаново опредѣленіе континуума (Paradoxien, § 38) безусловно неправильно. Оно выражаетъ односторонннимъ образомъ лишь одно свойство континуума, которое встрѣчается и у множествъ, получающихся изъ Gn, если удалить изъ Gn какое-либо „изолированное“ точечное множество (Ср. Mat. Ann., B. 21, p. 51). Точно такъ же оно встрѣчается у множествъ, состоящихъ изъ нѣсколькихъ раздѣльныхъ континуумовъ. Очевидно, въ этихъ случаяхъ передъ нами нѣтъ континуума, хотя, согласно Больцано, это должно было бы быть. Мы видимъ, такимъ образомъ, что здѣсь нарушено правило „ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest“.

Точно такъ же въ сочиненіи Дедекинда („Stetigkeit und irrationale Zahlen) выдвинуто, какъ мнѣ кажется, одностороннимъ образомъ лишь другое свойство континуума, именно то, которое у него обще со всѣми „совершенными“ множествами.

§ 11.

Остается показать, какъ мы приходимъ къ опредѣленіямъ новыхъ чиселъ и какъ получаются тѣ естественные разрѣзы въ абсолютно-безконечномъ ряду реальныхъ цѣлыхъ чиселъ, которые я называю числовыми классами. Къ этому изложенію я присовокуплю затѣмъ еще лишь важнѣйшія теоремы о второмъ числовомъ классѣ и объ его отношеніяхъ къ первому числовому классу. Рядъ (I) положительныхъ реальныхъ цѣлыхъ чиселъ 1, 2, 3... ν... имѣетъ источникомъ своего возникновенія повторное полаганіе (Setzung) и соединеніе положенныхъ въ основу и разсматриваемыхъ, какъ равныя, единицъ. Число ν есть выраженіе какъ опредѣленнаго конечнаго количества подобныхъ, слѣдующихъ другъ за другомъ, полаганій, такъ и соединенія положенныхъ единицъ въ одно цѣлое. Такимъ образомъ, образованіе конечныхъ реальныхъ цѣлыхъ чиселъ основывается на принципѣ присоединенія единицы къ имѣющемуся уже образованному числу. Я называю этотъ моментъ, который, какъ мы скоро увидимъ, играетъ существенную роль также при порожденіи высшихъ цѣлыхъ чиселъ, первымъ принципомъ порожденія. Количество чиселъ V класса (I), которое можно образовать такимъ образомъ, безконечно, и между ними нѣтъ вовсе наибольшаго числа. Поэтому, какъ ни противорѣчиво было бы говорить о наибольшемъ числѣ класса (I), съ другой стороны, нѣтъ ничего нелѣпаго въ томъ, чтобы вообразить себѣ нѣкоторое **новое** число—назовемъ его ω *),—которое должно быть выраженіемъ того, что намъ дана, согласно своему закону, въ своей естественной послѣдовательности вся совокупность (I). (Подобно тому, какъ ν служитъ выраженіемъ того, что извѣстное конечное количество единицъ соединено въ одно цѣлое). Можно даже вообразить себѣ новосозданное число ω **предѣломъ**, къ которому стремятся числа ν, если понимать подъ этимъ лишь то, что ω должно быть **первымъ** цѣлымъ числомъ, которое слѣдуетъ за всѣми числами ν, т. е. которое можно назвать бо́льшимъ, чѣмъ любое изъ чиселъ ν. Присовокупляя къ полаганію числа ω дальнѣйшія полаганія единицъ, мы получаемъ съ помощью **перваго** принципа порожденія дальнѣйшія числа:

$$\omega+1,\ \omega+2\ \ldots\ \omega+\nu\ \ldots;$$

такъ какъ здѣсь мы опять-таки не приходимъ ни къ какому наибольшему числу, то мы воображаемъ себѣ новое число, которое можно назвать 2ω и которое должно быть первымъ числомъ, слѣдующимъ за всѣми числами ν и $\omega+\nu$; если снова примѣнить къ числу 2ω **первый** принципъ порожденія, то мы приходимъ къ дальнѣйшему ряду чиселъ:

$$2\omega+1,\ 2\omega+2,\ \ldots\ 2\omega+\nu,\ \ldots$$

Логическая функція, исполнявшаяся обоими числами ω и 2ω, очевидно, отлична отъ **перваго** принципа порожденія. Я называю его **вторымъ** прин-

---

*) Знакъ ∞, употребленный мной въ № 2 этой работы (Bd. XVII, p. 357), я отнынѣ замѣняю черезъ ω, ибо знакъ ∞ употребляется уже обыкновенно для обозначенія неопредѣленныхъ безконечностей.

ципомъ порожденія реальныхъ цѣлыхъ чиселъ. Принципъ этотъ я опредѣляю точнѣе слѣдующимъ образомъ: если дана какая-нибудь опредѣленная послѣдовательность опредѣленныхъ цѣлыхъ реальныхъ чиселъ, среди которыхъ нѣтъ наибольшаго числа, то на основаніи этого второго принципа порожденія создается новое число, которое мыслятъ, какъ предѣлъ этихъ чиселъ, т.-е. которое опредѣляютъ, какъ первое, большее всѣхъ ихъ число.

Комбинируя оба принципа порожденія, мы получаемъ, поэтому, послѣдовательнымъ образомъ дальнѣйшія продолженія полученныхъ нами до сихъ поръ чиселъ:

$$
\begin{array}{l}
3\omega,\ 3\omega+1,\ \ldots\ldots,\ 3\omega+\nu,\ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \ldots\ldots,\ \mu\omega+\nu,\ \ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Но и такимъ путемъ мы не приходимъ къ завершенію, ибо среди чиселъ $\mu\omega+\nu$ нѣтъ наибольшаго числа.

Второй принципъ порожденія даетъ намъ возможность ввести новое число, первое слѣдующее за всѣми числами $\mu\omega+\nu$, которое можно назвать ω^2; къ нему примыкаютъ въ опредѣленной послѣдовательности числа:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu;$$

пользуясь затѣмъ обоими принципами порожденія, мы приходимъ, очевидно, къ числамъ слѣдующей формы:

$$\nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}\ \ldots\ldots+\nu_{\mu-1}\ \omega+\nu_\mu:$$

но тогда второй принципъ порожденія побуждаетъ насъ къ полаганію новаго числа, которое должно быть первымъ числомъ, бо́льшимъ, чѣмъ всѣ эти числа, и которое можно подходящимъ образомъ обозначить черезъ

$$\omega^{\omega}.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что образованіе первыхъ чиселъ не имѣетъ конца: слѣдуя обоимъ принципамъ порожденія, мы получаемъ всегда все новыя числа и ряды чиселъ, имѣющихъ вполнѣ опредѣленную послѣдовательность.

На первый взглядъ можетъ поэтому показаться, будто, пользуясь этимъ способомъ образованія новыхъ цѣлыхъ опредѣленно-безконечныхъ чиселъ, мы должны были бы потеряться въ безграничномъ, и будто мы не въ состояніи дать извѣстное провизорное завершеніе этому безконечному процессу, чтобы добиться, благодаря этому, такого же ограниченія, какое въ извѣстномъ смыслѣ имѣлось фактически относительно перваго числового класса (I). Тамъ мы пользовались лишь первымъ принципомъ порожденія и поэтому выходъ изъ ряда (I) былъ невозможенъ. Второй принципъ порожденія не только вывелъ насъ изъ этой числовой области, но въ соединеніи съ первымъ принципомъ порожденія даетъ возможность уничтожить всѣ ограниченія при образованіи понятія реальныхъ цѣлыхъ чиселъ.

Но если мы замѣтимъ, что всѣ полученныя до сихъ поръ числа и непосредственно слѣдующія за ними удовлетворяютъ извѣстному условію, то это условіе — если разсматривать его, какъ требованіе, предъявляемое ко всѣмъ вновь образуемымъ числамъ — оказывается новымъ, присоединяющимся къ первымъ двумъ, принципомъ, который названъ мной принципомъ стѣсненія или ограниченія и который, какъ я покажу, содѣйствуетъ тому, что опредѣленный съ его помощью второй числовой классъ (II) не только получаетъ мощность бо́льшую, чѣмъ мощность (I), но именно непосредственно слѣдующую, т.-е. вторую мощность.

Вышеупомянутое условіе, которому—какъ легко убѣдиться—удовлетворяетъ каждое изъ опредѣленныхъ до сихъ поръ безконечныхъ чиселъ α, заключается въ томъ, что множество чиселъ, предшествующихъ въ числовомъ ряду этому числу α, обладаетъ мощностью перваго числового класса (I). Если мы возьмемъ, напримѣръ, число ω^{ω}, то предшествующія ему числа содержатся въ формулѣ:

$$\nu_0\,\omega^{\mu}+\nu_1\omega^{\mu-1}+\;.\;.\;.\;\nu_{\mu-1}\omega+\nu_{\mu}$$

гдѣ μ, ν_0, ν_1, . . . ν_μ принимаютъ всѣ конечныя, положительныя, цѣлыя значенія, включая также нуль и исключая тотъ случай, когда

$$\nu_0=\nu_1=\;.\;.\;.\;=\nu_\mu=0.$$

Какъ извѣстно, этому множеству можно придать форму просто безконечнаго ряда, и оно, слѣдовательно, обладаетъ мощностью (I).

Такъ какъ далѣе всякій рядъ множествъ, изъ которыхъ каждое обладаетъ первой мощностью—если этотъ рядъ тоже первой мощности—даетъ опять-таки множество, которое обладаетъ мощностью (I), то отсюда ясно, что при продолженіи нашего числового ряда дѣйствительно будутъ получаться всегда лишь такія числа, для которыхъ исполнено фактически это условіе.

Поэтому мы опредѣляемъ второй числовой классъ (II), какъ совокупность всѣхъ образуемыхъ съ помощью обоихъ принциповъ порожденія, слѣдующихъ другъ за другомъ въ опредѣленной послѣдовательности, чиселъ α:

$$\omega, \omega+1, \ldots, \nu_0\omega^\mu+\nu_1\omega^{\mu-1}+\ldots+\nu_{\mu-1}\omega+\nu_\mu, \ldots, \omega^\omega, \ldots \alpha, \ldots$$

которыя подчинены тому условію, что всѣ числа, предшествующія числу α, начиная съ 1, образуютъ множество мощности числового класса (I).

§ 12.

Первое, что мы должны показать теперь, это положеніе, что новый числовой классъ (II) имѣетъ мощность, отличную отъ мощности перваго числового класса (I).

Это положеніе получается изъ слѣдующаго положенія:

„Если α_1. α_2, . . α_ν, . . . представляетъ какое-нибудь, имѣющее первую мощность, множество изъ различныхъ чиселъ второго числового класса (такъ что мы можемъ придать ему форму простого ряда (α_ν), то или одно изъ этихъ чиселъ наибольшее—пусть это будетъ γ—или же, если это не имѣетъ мѣста, то существуетъ нѣкоторое, не встрѣчающееся среди чиселъ α_ν, опредѣленное число β второго числового класса (II), такое, что β больше, чѣмъ всѣ α_ν и что, наоборотъ, для всякаго цѣлаго числа $\beta' < \beta$ найдутся извѣстныя числа въ ряду (α_ν), которыя больше его. Числа λ или β можно подходящимъ образомъ назвать высшимъ предѣломъ множества (α_ν)".

Доказательство этого положенія сводится просто къ слѣдующему: пусть $\alpha_{\varkappa_2}$ будетъ первое, встрѣчающееся въ ряду (α_ν), число, которое больше, чѣмъ α_1, $\alpha_{\varkappa_3}$—первое, встрѣчающееся въ ряду (α_ν), число, которое больше, чѣмъ $\alpha_{\varkappa_2}$ и т. д.

Мы имѣемъ тогда:

$$1 < \varkappa_2 < \varkappa_3 < \varkappa_4 < \ldots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{\varkappa_2} < \alpha_{\varkappa_3} < \alpha_{\varkappa_4} < \ldots$$

и

$$\alpha_\nu < \alpha_{k\lambda}$$

какъ только

$$\nu < \varkappa_\lambda$$

Здѣсь можетъ случиться, что, начиная съ извѣстнаго числа $\alpha_{\varkappa_\rho}$, всѣ, слѣдующія за нимъ въ ряду (α_ν) будутъ меньше его. Тогда, очевидно, оно наибольшее изъ всѣхъ, и мы имѣемъ: $\gamma = \alpha_{\varkappa_\rho}$. Съ другой стороны, вообразимъ себѣ множество всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, начиная съ 1, которыя меньше, чѣмъ α_1; прибавимъ къ этому множеству сперва множество всѣхъ цѣлыхъ чиселъ, которыя $\geq \alpha_1$ и $< \alpha_{\varkappa_2}$, затѣмъ множество всѣхъ чиселъ, которые $\geq \alpha_{\varkappa_2}$ и $< \alpha_{\varkappa_3}$, и т. д.; мы получимъ такимъ образомъ нѣкоторую опредѣленную часть слѣдующихъ другъ за другомъ чиселъ нашихъ первыхъ двухъ числовыхъ классовъ; очевидно, это—числовое множество первой мощности, и поэтому существуетъ (согласно опредѣленію (II)) опредѣленное число β совокупности (II), которое первое число, бо̀льшее тѣхъ чиселъ. Слѣдовательно, $\beta > \alpha_{\varkappa_\lambda}$ и поэтому также $\beta > \alpha_\nu$, потому что K_λ можно всегда взять столь большимъ, что оно становится больше, чѣмъ нѣкоторое данное напередъ ν, и потому что тогда $\alpha_\nu < \alpha_{\varkappa_\lambda}$.

Съ другой стороны, легко видѣть, что для всякаго числа $\beta' < \beta$ найдутся извѣстныя числа $\alpha_{\varkappa_\nu}$, которыя больше его. Этимъ доказаны всѣ части положенія.

Отсюда слѣдуетъ положеніе, что совокупность всѣхъ чиселъ второго числового класса (II) не имѣетъ мощности (I). Вѣдь въ противномъ случаѣ мы могли бы представить себѣ всю совокупность (II) въ формѣ простого ряда:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_\nu \ldots\ldots$$

По доказанному только-что положенію или этотъ рядъ будетъ имѣть нѣкоторый наибольшій членъ γ или въ (II) найдется такое число β, которое по величинѣ будетъ больше всѣхъ членовъ α_ν нашего ряда. Въ первомъ случаѣ число $\gamma+1$, принадлежащее къ классу (II), а во второмъ случаѣ число β, съ одной стороны, будутъ принадлежать къ классу (II), а, съ другой, не будутъ встрѣчаться въ ряду (α_ν), что при предполагаемомъ тождествѣ множествъ (II) и (α_ν) является противорѣчіемъ. Слѣдовательно, числовой классъ (II) имѣетъ иную мощность, чѣмъ числовой классъ (I).

Что изъ обѣихъ мощностей числовыхъ классовъ (I) и (II) вторая, дѣйствительно, непосредственно слѣдуетъ за первой, т.-е. что между обѣими мощностями не существуетъ другихъ мощностей,—это съ опредѣленностью вытекаетъ изъ одного положенія, которое я сейчасъ приведу и докажу.

Но если мы предварительно бросимъ взглядъ назадъ и разсмотримъ тѣ средства, которыя привели какъ къ расширенію понятія о реальномъ цѣломъ числѣ, такъ и къ новой, отличной отъ первой, мощности строго опредѣленныхъ множествъ, то мы увидимъ, что это были три выдающихся, отличающихся другъ отъ друга логическихъ момента. Это оба вышеопредѣленныхъ принципа порожденія и присоединяющійся къ нимъ принципъ стѣсненія, или ограниченія состоящій въ требованіи, чтобы приступать къ созданію новаго цѣлаго числа съ помощью одного изъ двухъ другихъ принциповъ лишь тогда, когда совокупность всѣхъ предшествующихъ чиселъ обладаетъ мощностью нѣкотораго опредѣленнаго, даннаго уже во всемъ своемъ объемѣ числового класса. Этимъ путемъ, соблюдая три эти принципа, можно прійти съ величайшей увѣренностью и очевидностью къ все новымъ числовымъ классамъ, а вмѣстѣ съ ними ко всѣмъ встрѣчающимся въ тѣлесной и духовной природѣ различнымъ, послѣдовательно возрастающимъ, мощностямъ. Получающіяся при этомъ новыя числа представляютъ рѣшительно всегда ту же самую конкретную опредѣленность и предметную реальность, что и прежнія числа. Я поэтому, право, не знаю, что могло бы удержать насъ отъ процесса создаванія новыхъ чиселъ, разъ оказывается, что введеніе въ разсмотрѣніе одного какого-нибудь изъ этихъ новыхъ безчисленныхъ числовыхъ классовъ стало желательнымъ или даже необходимымъ для прогресса науки.

§ 13.

Я перехожу теперь къ обѣщанному доказательству того, что мощности (I) и (II) слѣдуютъ непосредственно другъ за другомъ, такъ что между ними не лежитъ никакихъ иныхъ мощностей.

Если изъ совокупности (II) выбрать по какому-нибудь закону нѣкоторое множество (α') различныхъ чиселъ α', т.-е. если вообразить себѣ какое-нибудь содержащееся въ (II) множество (α'), то подобное множество представляетъ всегда рядъ особенностей, которыя можно формулировать въ слѣдующихъ положеніяхъ:

„Между числами множества (α') существуетъ всегда н а и м е н ь ш е е число“.

„Если въ частности мы имѣемъ рядъ чиселъ совокупности (II): $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\beta_1} \ldots$ которыя убываютъ по своей величинѣ (такъ что $\alpha_\beta > \alpha'_\beta$, если $\beta' > \beta$), то этотъ рядъ необходимо обрывается на конечномъ числѣ членовъ и заканчивается наименьшимъ изъ чиселъ. Рядъ не можетъ быть безконечнымъ“.

Замѣчательно, что положеніе это, которое непосредственно ясно, когда числа α_β суть конечныя цѣлыя числа, можно доказать также въ случаѣ безконечныхъ чиселъ α_β. Дѣйствительно, согласно предыдущему положенію, которое легко вытекаетъ изъ опредѣленій числового ряда (II), среди чиселъ α_ν имѣется наименьшее число, если имѣть въ виду лишь тѣ изъ нихъ, у которыхъ индексъ ν конеченъ. Если это наименьшее число равно, скажемъ, α_ρ, то ясно, что такъ какъ $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$, то рядъ α_ν, а значитъ, и весь рядъ α_β долженъ состоять ровно изъ ρ членовъ, т.-е., слѣдовательно, есть конечный рядъ.

Теперь получается слѣдующее основное положеніе.

„Если (α') есть какое-нибудь числовое множество, содержащееся въ совокупности (II), то возможны лишь слѣдующіе три случая: или (α') есть конечная совокупность, т.-е. состоитъ изъ конечнаго количества чиселъ, или (α') имѣетъ мощность перваго класса, или, въ третьихъ, оно имѣетъ мощность (II). Quartum non datur“.

Доказательство ведется слѣдующимъ простымъ образомъ: пусть Ω представляетъ первое число третьяго числового класса. Тогда всѣ числа α' множества (α'), содержащагося въ (II), меньше, чѣмъ Ω.

Вообразимъ себѣ теперь числа α', расположенныя по порядку своей величины. Пусть α_ω будетъ наименьшее среди нихъ, $\alpha_{\omega+1}$ непосредственно слѣдующее за нимъ число и т. д. Тогда мы получаемъ множество (α') въ формѣ „вполнѣ упорядоченнаго“ множества α_β, гдѣ β проходитъ значенія нашего расширеннаго натуральнаго числового ряда, начиная съ α. При этомъ β остается, очевидно, всегда меньше или равно α_β и, такъ какъ $\alpha_\beta < \Omega$, то и $\beta < \Omega$. Слѣдовательно, число β не можетъ выйти изъ числового класса (II), а остается въ предѣлахъ его. Поэтому могутъ представиться лишь три случая: или β остается меньше нѣкотораго опредѣленнаго числа ряда $\omega + \nu$, тогда (α') есть конечное множество; или же β принимаетъ всѣ значенія ряда $\omega + \nu$, но остается ниже нѣкотораго опредѣленнаго числа ряда (II), тогда, очевидно (α') есть множество первой мощности; или, наконецъ, β принимаетъ также произвольно большія значенія въ (II) и, слѣдовательно, пробѣгаетъ всѣ числовыя значенія въ (II), въ этомъ послѣднемъ случаѣ совокупность (α_β), т.-е. множество (α') имѣетъ, очевидно, мощность (II), что и требовалось доказать.

Какъ непосредственные выводы изъ доказаннаго только-что положенія получаются слѣдующія положенія:

„Если мы имѣемъ какое-либо строго опредѣленное множество M мощности числового класса (II) и если мы возьмемъ какое-нибудь безконечное частичное множество M′ отъ M, то совокупность M′ или можно представить въ формѣ просто безконечнаго ряда, или же можно отобразить взаимно однозначно оба множества M и M′ другъ на друга“.

„Если мы имѣемъ какое-либо строго опредѣленное множество M второй мощности, частичное множество M′ отъ M и частичное множество M″ отъ M′, и если мы знаемъ, что множество M″ отобразимо взаимно однозначно на множество M, то и множество M′ всегда отобразимо взаимно однозначно на M, а значитъ и на M″“.

Я привожу здѣсь это послѣднее положеніе въ виду связи его съ предыдущимъ, исходя изъ предпосылки, что M имѣетъ мощность (II). Очевидно, оно истинно и тогда, когда M имѣетъ мощность (I). Но мнѣ кажется весьма замѣчательнымъ—и потому я и подчеркиваю это умышленно,—что это положеніе имѣетъ общее значеніе, какова бы, ни была мощность множества M. Къ этому я еще вернусь въ одной позднѣйшей работѣ и тогда покажу то особенное значеніе, которое присуще этому общему положенію.

§ 14.

Въ заключеніе я хочу еще разсмотрѣть числа второго числового класса (II) и производимыя съ ними дѣйствія, причемъ я ограничусь здѣсь самымъ общимъ очеркомъ, оставляя обнародованіе болѣе подробныхъ изслѣдованій по этому вопросу на позже.

Въ § 1 я опредѣлилъ общимъ образомъ дѣйствія сложенія и умноженія и показалъ, что въ случаѣ безконечныхъ цѣлыхъ чиселъ они вообще не подчинены коммутативному, но зато подчинены ассоціативному закону. Это примѣнимо, слѣдовательно, въ частности къ числамъ второго числового класса. Что касается дистрибутивнаго закона, то онъ имѣетъ силу лишь въ слѣдующей формѣ:

$$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$$

(гдѣ $\alpha+\beta$, α, β представляютъ множители),
какъ это непосредственно видно изъ внутренняго созерцанія.

Вычитаніе можно разсматривать двоякимъ образомъ: если α и β два какихъ-нибудь цѣлыхъ числа, причемъ $\alpha<\beta$, то легко убѣдиться, что уравненіе:

$$\alpha+\xi=\beta$$

допускаетъ всегда лишь одно рѣшеніе для ξ, причемъ если α и β числа изъ (II), то ξ будетъ числомъ изъ (I) или (II). Это число ξ и равно $\beta-\alpha$.

Если, наоборотъ, разсматривать слѣдующее уравненіе

$$\xi+\alpha=\beta,$$

то оказывается, что часто этого уравненія нельзя рѣшить относительно ξ. Мы имѣемъ это, напримѣръ, въ случаѣ слѣдующаго уравненія:

$$\xi + \omega = \omega + 1.$$

Но даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда уравненіе $\xi + \alpha = \beta$ допускаетъ рѣшеніе относительно ξ, часто указывается, что оно можетъ быть удовлетворено безконечно многими значеніями ξ. Но изъ этихъ различныхъ рѣшеній одно будетъ всегда наименьшимъ.

Для этого наименьшаго корня уравненія:

$$\xi + \alpha = \beta,$$

если только оно вообще разрѣшимо, я выбираю обозначеніе: β_α, что вообще отлично отъ $\beta - \alpha$, которое всегда существуетъ, если только $\alpha < \beta$.

Если, далѣе, между тремя цѣлыми числами β, α, γ имѣетъ мѣсто равенство:

$$\beta = \gamma\alpha$$

(гдѣ γ есть множитель), то легко убѣдиться, что уравненіе:

$$\beta = \xi\alpha$$

не имѣетъ относительно ξ никакого иного рѣшенія, кромѣ $\xi = \gamma$. Въ этомъ случаѣ γ обозначаютъ черезъ $\frac{\beta}{\alpha}$.

Наоборотъ, мы находимъ, что уравненіе:

$$\beta = \alpha\xi$$

(гдѣ ξ множимое), если оно вообще разрѣшимо относительно ξ, имѣетъ часто нѣсколько и даже безконечное множество корней, среди которыхъ, однако, имѣется всегда одинъ наименьшій. Этотъ наименьшій корень, удовлетворяющій уравненію $\beta = \alpha\xi$, если только оно вообще допускаетъ рѣшеніе, я обозначаю черезъ

$$\frac{\beta}{\alpha}$$

Числа α второго числового класса двоякаго рода: 1) такія α, которыя имѣютъ въ ряду непосредственно предшествующій имъ членъ, являющійся тогда α_1, я называю числами перваго рода, 2) такія α, которыя не имѣютъ въ ряду непосредственно предшествующаго имъ члена и для которыхъ, слѣдовательно, не существуетъ этого α_1. Эти числа я называю числами второго рода. Числа ω, 2ω, $\omega^\nu + \omega$, ω^ω суть, напримѣръ, числа второго рода, наоборотъ, $\omega + 1$, $\omega^2 + \omega + 2$, $\omega^\omega + 3$ суть перваго рода.

Соотвѣтственно съ этимъ и простыя числа второго числового класса, которыя я опредѣлилъ вообще въ § 1, распадаются на простыя числа второго рода и на простыя числа перваго рода.

Простыя числа второго рода въ порядкѣ своего появленія въ числовомъ классѣ (II) слѣдующія:

$$\omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots$$

такъ что среди всѣхъ чиселъ вида

$$\varphi = \nu_0\,\omega^\mu + \nu_1\,\omega^{\mu-1} + \ldots \nu_{\mu+1}\,\omega + \nu_\mu$$

имѣется только одно простое число ω второго рода Но не слѣдуетъ заключать изъ этого сравнительно скупого распредѣленія простыя чиселъ второго рода, что совокупность всѣхъ ихъ обладаетъ меньшей мощностью, чѣмъ самъ числовой классъ (II). Оказывается, что эта совокупность имѣетъ ту же мощность, что и (II).

Простыя числа перваго рода суть прежде всего

$$\omega + 1,\ \omega^2 + 1,\ \ldots\ \omega^\mu + 1,\ \ldots$$

Это единственныя простыя числа перваго рода, которыя встрѣчаются среди чиселъ, обозначенныхъ только-что черезъ φ. Совокупность всѣхъ простыхъ чиселъ перваго рода въ (II) имѣетъ тоже мощность (II).

Простыя числа второго рода обладаютъ свойствомъ, которое придаетъ имъ совсѣмъ особенный характеръ. Если η представляетъ подобное простое число (второго рода), то всегда $\eta\alpha = \eta$, если α есть какое-нибудь число, меньшее, чѣмъ η. Отсюда слѣдуетъ, что если α и β суть два какія-нибудь числа, которыя оба меньше, чѣмъ η, то и произведеніе $\alpha\beta$ всегда меньше, чѣмъ η.

Если мы ограничимся здѣсь прежде всего числами второго числового класса, имѣющими видъ φ, то для нихъ получаются слѣдующія правила сложенія и умноженія. Пусть:

$$\varphi = \nu_0\,\omega^{\mu} + \nu_1\,\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu}$$

$$\psi = \rho_0\,\omega^{\lambda} + \rho_1\,\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots \rho_{\lambda},$$

гдѣ мы предполагаемъ ν_0 и ρ_0 отличными отъ нуля.

Сложеніе.

1) Если $\mu < \lambda$, то мы имѣемъ:

$$\varphi + \psi = \psi.$$

2) Если $\mu > \lambda$, то мы имѣемъ:

$$\varphi + \psi = \nu_0\,\omega^{\mu} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-\lambda-1}\,\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\,\omega^{\lambda} + \\ + \rho_1\,\omega^{\lambda-1} + \rho_2\,\omega^{\lambda-2} + \ldots\ldots \rho_{\lambda}.$$

3) При $\mu = \lambda$ получаемъ

$$\varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\,\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_{\lambda}.$$

Умноженіе.

1) Если ν_{μ} отлично отъ нуля, то мы имѣемъ:

$$\varphi\psi = \nu_0\,\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\,\omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\,\omega^{\lambda+1} + \\ + \nu_{\mu}\rho_0\,\omega^{\lambda} + \rho_1\,\omega^{\lambda-1} + \ldots\ldots + \rho_{\lambda}.$$

Въ случаѣ $\lambda = 0$ послѣдній членъ справа: $\nu_\mu \rho_0$.

2) Если $\nu_\mu = 0$, то мы имѣемъ;

$$\varphi\psi = \nu_0 \omega^{\mu+\lambda} + \nu_1 \omega^{\mu+\lambda-1} + \ldots + \nu_{\mu-1} \omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^\lambda.$$

Разложеніе числа φ на его первоначальныхъ множителей слѣдующее:

Если мы имѣемъ:

$$\varphi = c_0 \omega^\mu + c_1 \omega^{\mu_1} + c_2 \omega^{\mu_2} + \ldots + c_\sigma \omega^{\mu_\sigma}$$

гдѣ

$$\mu > \mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_\sigma$$

и

$$c_0,\ c_1,\ \ldots\ c_\sigma$$

суть отличныя отъ нуля положительныя конечныя числа, то мы имѣемъ:

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1}+1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2}+1)c_2 \,.\, c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma}+1)c_\sigma \omega^{\mu_\sigma}.$$

Если представить себѣ еще c_0, $c_1 \ldots c_{\sigma-1}$, c_σ разложенными на первыхъ множителей по правиламъ перваго числового класса, то мы имѣемъ тогда разложеніе φ на первыхъ множителей, ибо множители $\omega^\varkappa + 1$, и ω суть сами, какъ выше замѣчено, первыя числа. Это разложеніе чиселъ вида φ совершается однимъ единственнымъ образомъ даже и по отношенію къ порядку множителей, если отвлечься отъ перемѣстительности простыхъ множителей внутри отдѣльныхъ c и если рѣшить, что послѣдній множитель долженъ быть степенью ω или равенъ единицѣ и что ω можетъ быть множителемъ только на послѣднемъ мѣстѣ. Что касается обобщенія этого разложенія на первыхъ множителей въ примѣненіи къ любымъ числамъ α второго числового класса (II), то этимъ я займусь при случаѣ впослѣдствіи.

Примѣчанія.

Къ § 1.

[1]) Ученія о многообразіяхъ. Этимъ словомъ я обозначаю понятіе одной чрезвычайно обширной дисциплины, которую до сихъ поръ я пытался развить лишь въ спеціальной формѣ ариѳметическаго или геометрическаго ученія о множествахъ. Подъ многообразіемъ или множествомъ я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить какъ единое, т.-е. всякую совокупность опредѣленныхъ элементовъ, которая можетъ быть связана въ одно цѣлое съ помощью нѣкотораго закона, и я думаю такимъ путемъ опредѣлить нѣчто, родственное платоновскому εἶδος ἰδέα, а также тому, что Платонъ въ своемъ діалогѣ „Филебъ или высочайшее благо“ называетъ μικτόν. Онъ противополагаетъ его ἄπειρον'у, т.-е. безграничному, неопредѣленному, называемому мной несобственно-безконечнымъ, равно какъ и πέρας'у, т.-е., границѣ, и называетъ его упорядоченной „смѣсью“ обоихъ послѣднихъ. Что понятія эти пиѳагорейскаго происхожденія — на это намекаетъ самъ Платонъ. Ср. A. Boeckh „Philolaos des Pythagoreers Lehren“, Berlin, 1812.

Къ § 4.

[2]) Аристотель. Ср. изложеніе Целлера въ его большомъ сочиненіи: „Die Philosophie der Griechen“, III Auf., II Theil, 2 Abth, p. 393—403. Ученіе Платона о безконечномъ совсѣмъ иное, чѣмъ ученіе Аристо-

теля; ср. Zeller, II Theil, 1 Abth. p. 628—646. Точно такимъ же образомъ существуютъ точки соприкосновенія между моими концепціями и воззрѣніями Николая Кузанскаго. Ср. R. Zimmermann, der Cardinal Nicolaus von Cusa als Vorgänger Leibnitzens (Sitzungsberichte d. Wiener Akademie der Wiss. Jahrg. 1852). То же самое можно сказать о Джіордано Бруно, послѣдователѣ Николая Кузанскаго. Ср. Brunnhofer, Giordano Bruno's Weltanschauungen Verhängniss, Lpz., 1882.

Однако, имѣется и существенное различіе, заключающееся въ томъ, что я разъ навсегда закрѣпляю, согласно понятію, различныя градаціи собственно-безконечнаго съ помощью числовыхъ классовъ (I), (II), (III) и т. д. и лишь тогда ставлю себѣ задачу не только изслѣдовать математически отношенія сверхконечныхъ чиселъ, но и раскрыть ихъ и изучить въ природѣ повсюду, гдѣ они встрѣчаются. Что, идя такимъ путемъ, мы будемъ подвигаться все дальше, не достигая никакой непереходимой границы, не получая хотя бы только приближеннаго постиженія Абсолютнаго—это не подлежитъ для меня никакому сомнѣнію. Абсолютное можно лишь признать, но никогда не познать, хотя бы приближеннымъ образомъ. Вѣдь подобно тому, какъ внутри перваго числового класса (I) каждое, сколь угодно большое, конечное число имѣетъ передъ собой всегда одну и ту же мощность конечныхъ чиселъ, бо́льшихъ, чѣмъ оно, точно такъ же за каждымъ, сколь угодно большимъ, сверхконечнымъ числомъ любого изъ высшихъ числовыхъ классовъ (II) или (III) и т. д. слѣдуетъ совокупность чиселъ и числовыхъ классовъ, не теряющая ничего въ мощности по сравненію съ цѣлымъ абсолютно-безконечной числовой совокупности, начинающейся съ 1. Здѣсь наблюдается то самое, что Альбрехтъ фонъ Галлеръ говоритъ о вѣчности: „я его (чудовищно-огромное число) отнимаю, а Ты (вѣчность) лежишь цѣлая передо мной". Поэтому абсолютно-безконечный рядъ чиселъ представляется мнѣ въ извѣстномъ смыслѣ подходящимъ символомъ Абсолютнаго. Наоборотъ, безконечность перваго числового класса (I), которую одну употребляли до сихъ поръ въ качествѣ такого символа, представляется мнѣ—такъ какъ я считаю ее постижимой идеей (не представленіемъ) — чѣмъ - то исчезающе - ничтожнымъ по сравненію съ той абсолютной безконечностью. Замѣчательнымъ представляется мнѣ и то, что каждый изъ числовыхъ классовъ и, слѣдовательно, каждая изъ мощностей, сопряжены съ нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ числомъ абсолютно-безконечной числовой совокупности и при томъ такимъ образомъ, что для каждаго сверхконечнаго числа γ имѣется мощность, которую можно назвать γ-той. Слѣдовательно, и различныя мощности образуютъ также абсолютно-безконечный рядъ. Это тѣмъ замѣчательнѣе, что число γ, указывающее порядокъ какой-нибудь мощности (въ томъ случаѣ, если число γ имѣетъ непосредственно предшествующее ему число), находится въ такомъ отношеніи къ числамъ числового класса, обладающаго этой мощностью, что никакое описаніе не можетъ изобразить малости этого отношенія, и это тѣмъ болѣе чѣмъ бо́льшимъ принимается γ.

Къ § 5.

[3]) determinari possunt. Неопредѣленному, перемѣнному, несобственно-безконечному—въ какой бы формѣ они ни проявлялись — я не могу приписать никакого бытія, ибо они не что иное, какъ или понятія отношенія или чисто субъективныя представленія, воззрѣнія (imaginationes), но ни въ коемъ случаѣ не адэкватныя идеи. Поэтому, если бы въ положеніи „infinitum actu non datur" имѣлось бы въ виду только

несобственно-безконечное, то я могъ бы подписаться подъ нимъ, но только оно представляло бы въ этомъ случаѣ чистую тавтологію. Но мнѣ кажется, что смыслъ этого положенія въ указанныхъ источникахъ заключается въ томъ, что имъ утверждается невозможность логическаго полаганія опредѣленной безконечности, а въ такомъ видѣ я считаю его ложнымъ.

Къ § 7.

[4]) Реалисты. Позитивистическую и реалистическую точку зрѣнія на безконечное можно найти выраженной у: Dühring, „Natürliche Dialektik", Berlin, 1865, p. 109—135 и v. Kirchmann, „Katechismus der Philosophie", p. 124—130. Ср. также замѣчанія Ибервега къ бёрклееву трактату о началахъ человѣческаго познанія въ философской библіотекѣ Кирхманна. Я могу лишь повторить, что въ оцѣнкѣ несобственно-безконечнаго я по существу согласенъ со всѣми этими авторами. Пунктъ различія заключается лишь въ томъ, что они разсматриваютъ это синкатегорематическое безконечное, какъ единственно постижимое съ помощью „оборотовъ" („Wendungen") или понятій, — въ данномъ случаѣ даже только понятій отношенія. Аргументы Дюринга противъ собственно-безконечнаго можно было бы формулировать гораздо короче; какъ мнѣ кажется, они сводятся или къ тому, что опредѣленное конечное число—сколь бы большимъ ни мыслить его—никогда не можетъ быть безконечнымъ,—а это непосредственно слѣдуетъ изъ понятія его,—или же къ тому, что перемѣнное, неограниченно большое, конечное число не можетъ быть мыслимо съ предикатомъ опредѣленности, а слѣдовательно, и съ предикатомъ бытія,—а это опять-таки непосредственно вытекаетъ изъ сущности измѣнчивости. Для меня не составляетъ никакого сомнѣнія, что это не доказы-

ваетъ ровно ничего противъ мыслимости опредѣленныхъ сверхконечныхъ чиселъ. А между тѣмъ эти аргументы считаются аргументами противъ реальности сверхконечныхъ чиселъ. Мнѣ эта аргументація кажется похожей на то, какъ если бы изъ факта наличности безчисленно многихъ интенсивностей зеленаго цвѣта хотѣли заключить, что не можетъ вовсе существовать краснаго цвѣта. Замѣчательно, однако, то, что самъ Дюрингъ на стр. 126 своего сочиненія признается, что должно существовать основаніе для объясненія „возможности неограниченнаго синтеза", основаніе, которое онъ называетъ „понятнымъ образомъ совершенно неизвѣстнымъ". Въ этомъ, какъ мнѣ кажется, заключается противорѣчіе.

Но мы находимъ также, что мыслители, близко стоящіе къ идеализму или даже совершенно раздѣляющіе его точку зрѣнія, также отрицаютъ всякое право за опредѣленно-безконечными числами на существованіе.

Х. Зигвартъ въ своемъ превосходномъ сочиненіи: „Logik", II Bd., „Die Methodenlehre" (Tübingen, 1878) разсуждаетъ точно такъ же, какъ Дюрингъ, и говоритъ на стр. 47: „безконечное число есть contradictio in adjecto".

Аналогичные взгляды встрѣчаются у Канта и у Фриза. Ср. у послѣдняго: „System der Metaphysik" (Heidelberg, 1824), §§ 51 и 52. И философы гегелевской школы не даютъ мѣста собственно-безконечнымъ числамъ; укажу лишь на цѣнное произведеніе К. Фишера, „System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre", 2 Auf. (Heidelberg, 1865) p. 275.

Къ § 8.

[5]) То, что я здѣсь называю интрасубъективной или имманентной реальностью понятій или идей, могло бы совпадать съ опредѣленіемъ понятія „адэкватный" пони-

маемаго такъ, какъ его употребляетъ Спиноза, когда говоритъ: „Per ideam adaequatam intelligo ideam, quae, quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet“ („Eth.“, pars II, def. IV).

[6]) Это убѣжденіе согласно въ существенныхъ чертахъ какъ съ принципами платоновой системы, такъ и съ одной существенной чертой системы Спинозы. Въ первомъ отношеніи я укажу на Zeller, Philos. d. Griechen, 3 Auf., 2 Theil, 1 Abth., p. 541—602. Мы здѣсь читаемъ въ началѣ же главы: „Только абстрактно-логическое знаніе должно (согласно Платону) доставлять истинное познаніе. Но поскольку нашимъ представленіямъ присуща истина — эту предпосылку Платонъ раздѣляетъ съ другими (Парменидъ)—постольку предмету ихъ должна быть присуща дѣйствительность, и наоборотъ. То, что можно познать, есть; того, чего нельзя познать, нѣтъ, и въ той же мѣрѣ, въ какой нѣчто есть, оно также и познаваемо“.

Что касается Спинозы, то мнѣ достаточно напомнить лишь его теорему въ „Этикѣ“, pars II, prop. VII: „ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum“.

И въ философіи Лейбница можно обнаружить тотъ же теоретико-познавательный принципъ. Лишь со времени новѣйшаго эмпиризма, сенсуализма и скептицизма, равно какъ и вышедшаго отсюда кантовскаго критицизма, стали искать источникъ знанія и достовѣрности въ чувствахъ или, по меньшей мѣрѣ, въ такъ называемыхъ чистыхъ формахъ созерцанія міра представленій, признавая необходимымъ ограничиваться ими. По моему убѣжденію, эти элементы не доставляютъ вовсе надежнаго познанія, ибо послѣднее можетъ быть получено лишь съ помощью понятій и идей; внѣшній опытъ можетъ, въ лучшемъ случаѣ, дать лишь толчокъ къ созданію этихъ идей, по существу же онѣ образуются путемъ внутренней индукціи и дедукціи, какъ нѣчто, что до извѣстной степени лежало уже въ насъ и лишь было пробуждено и доведено до сознанія.

Къ § 8,[7] и § 9[8],.

Процессъ правильнаго образованія понятій, по моему мнѣнію, повсюду одинъ и тотъ же; берутъ нѣкоторую, лишенную свойствъ, вещь, которая первоначально есть не что иное, какъ имя или знакъ A, и придаютъ ей закономѣрнымъ образомъ различные, даже безконечно многіе, понятные предикаты, значеніе которыхъ извѣстно уже изъ наличныхъ идей и которые не должны противорѣчить другъ другу. Благодаря этому опредѣляются отношенія A къ уже наличнымъ понятіямъ и особенно къ родственнымъ изъ нихъ. Разъ это закончено, то имѣются на лицо всѣ условія для пробужденія дремлющаго въ насъ понятія A; оно появляется на свѣтъ, снабженное такой интрасубъективной реальностью, которую лишь можно требовать отъ понятій. Констатировать его транзіентное значеніе является тогда дѣломъ метафизики.

Къ § 10.

[9]) Ѳома Аквинскій, Opuscula, XLII, De natura generis, cap. 19 et 20; LII, De natura loci; XXXII, De natura materiae et de dimensionibus interminatis. Ср. C. Jourdin, la Philosophie de Saint Thomas d'Aquin, pp. 303—329; K. Werner, der heilige Thomas von Aquin (Regensburg, 1859), 2 B-de, pp. 177—201,

[10]) Даже совокупность всѣхъ непрерывныхъ, но также и совокупность всѣхъ интегрируемыхъ функцій одной или нѣсколькихъ перемѣнныхъ, можетъ имѣть лишь мощность второго числового класса (II); но если

отбросить всѣ ограниченія и разсматривать совокупность всѣхъ непрерывныхъ и прерывныхъ функцій одной или нѣсколько перемѣнныхъ, то это множество обладаетъ мощностью третьяго числового класса (III).

[11]) О совершенныхъ множествахъ можно доказать теорему, что они никогда не обладаютъ мощностью (I).

Въ качествѣ примѣра совершеннаго точечнаго множества, которыя не повсюду плотны ни въ какомъ произвольно маломъ промежуткѣ, я приведу совокупность всѣхъ вещественныхъ чиселъ, содержащихся въ формулѣ:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots \ldots \frac{c_\nu}{3^\nu} + \ldots \ldots,$$

гдѣ коэффиціенты c_ν могутъ принимать по произволу оба значенія 0 и 2 и рядъ можетъ состоять какъ изъ конечнаго, такъ и изъ безконечнаго количества членовъ.

[12]) Должно обратить вниманіе, что это опредѣленіе континуума свободно отъ всякаго указанія на то, что называютъ измѣреніемъ какого-нибудь непрерывнаго образованія. Опредѣленіе это охватываетъ именно и такіе континуумы, которые состоятъ изъ связныхъ кусковъ различныхъ измѣреніяхъ, какъ линіи, поверхности, тѣла и т. д. При другомъ случаѣ я какъ-нибудь покажу, какъ можно закономѣрнымъ образомъ перейти отъ этого общаго континуума къ болѣе частнымъ континуумамъ съ опредѣленнымъ измѣреніемъ. Я отлично знаю, что слово „континуумъ" до сихъ поръ не получило въ математикѣ опредѣленнаго постояннаго значенія. Поэтому мое опредѣленіе его покажется однимъ слишкомъ узкимъ, другимъ— слишкомъ широкимъ; надѣюсь, что мнѣ удалось при этомъ найти правильную середину.

Согласно моимъ взглядамъ подъ континуумомъ можно понимать только совершенное и связное образованіе. Согласно ему, напримѣръ, отрѣзокъ прямой, у которой не хватаетъ одного или обоихъ конечныхъ пунктовъ, и точно такъ же круговая площадь, у которой исключена периферія, не представляютъ совершенныхъ континуумовъ, подобныя точечныя множества я называю полуконтинуумами.

Общимъ образомъ я понимаю подъ полуконтинуумомъ несовершенное, связное и принадлежащее ко второму классу точечное множество такого рода, что любыя двѣ точки его могутъ быть связаны съ помощью нѣкотораго полнаго (vollkomenen) континуума, являющагося составной частью нашего точечнаго множества. Такъ, напримѣръ, пространство, обозначенное мной въ т. XX Math. Ann. (с. 119) черезъ $\mathfrak{A}$ и получающееся изъ G_n путемъ удаленія изъ него какого-нибудь точечнаго множества первой мощности, есть полуконтинуумъ.

Производное множество отъ связнаго точечнаго множества есть всегда континуумъ, независимо отъ того, обладаетъ ли это связное множество первой или второй мощностью.

Если нѣкоторое связное точечное множество первой мощности, то я не могу назвать его ни континуумомъ ни полуконтинуумомъ.

Благодаря понятіямъ, поставленнымъ мной во главу ученія о многообразіяхъ, я берусь изслѣдовать всѣ образованія алгебраической и трансцендентной геометріи во всѣхъ ихъ возможностяхъ, причемъ всеобщность и строгость полученныхъ такимъ путемъ результатовъ не могутъ быть превзойдены никакимъ другимъ методомъ.

Пер. П. Юшкевичъ

Г. Канторъ.

О различныхъ точкахъ зрѣнія на актуально безконечное *).

... Полученное мною сегодня отъ Васъ письмо отъ 31 октября текущаго года содержитъ слѣдующій вопросъ: „Avez vous vu et étudié l'écrit de l'Abbé Moigno intitulé: „Impossibilité du nombre actuellement infini; la science dans ses rapports avec la foi“ (Paris, Gauthiers—Villars, 1884)?“. Да, вотъ ужъ нѣсколько недѣль, какъ я досталъ себѣ это сочиненіе. То, что здѣсь говоритъ Муаньо о мнимой невозможности актуально-безконечныхъ чиселъ, и употребленіе, сдѣланное имъ изъ этого ложнаго тезиса для обоснованія нѣкоторыхъ религіозныхъ вѣроученій, извѣстно мнѣ въ существенномъ уже изъ лекцій Коши: „Sept leçons de physique générale“ (Paris, Gauthiers Villars, 1868). Коши, кажется, пришелъ къ этимъ, весьма необычнымъ для математика, спекуляціямъ подъ вліяніемъ работъ Г. Жердиля (Gerdil. Послѣдній (Гіацинтъ Зигмундъ, 1718—1802) былъ весьма почтенной высокопоставленной личностью и ува-

*) Zeitschrift für Philosophie u. philosop. Kritik, t. 88, 1886 г. (Изъ письма автора къ Г. Энестрёму въ Стокгольмѣ отъ 4 ноября 1885 г.).

жаемымъ философомъ. Одно время онъ профессорствовалъ въ Туринѣ, затѣмъ онъ былъ воспитателемъ будущаго короля Пьемонта, Карла Эммануила IV, потомъ, вызванный папой Піемъ VI въ 1776 г. въ Римъ, онъ исполнялъ рядъ обязанностей при св. престолѣ и, наконецъ, былъ возведенъ въ санъ епископа Остіи, а также кардинала. Вамъ, можетъ-быть, онъ извѣстенъ, какъ авторъ нѣкоторыхъ работъ по геометріи и по вопросамъ исторіи. На стр. 26 цитированныхъ лекцій Коши упоминаетъ объ одной работѣ Жердиля, озаглавленной: „Essai d'une démanstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, de duite de l'impossibilité de montrée d'une suite actuelement infinie de termes, soit permanents, soit succerssifs". Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil, t. IV, p. 26, Rome, 1806). О томъ же предметѣ онъ трактуетъ въ мемуарѣ: „Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur" (ib., t. V., p 1, Rome, 1807).

Я отнюдь не нахожусь въ принципіальномъ противорѣчіи съ этими авторами, поскольку они стремятся къ гармоніи между вѣрой и знаніемъ; но я считаю совершенно непригодными средства, которыми они пользуются для этого.

Если бы догматы вѣры нуждались для своего подтвержденія въ такомъ кардинально ложномъ тезисѣ, какъ положеніе о невозможности актуально безконечныхъ чиселъ (которое въ извѣстной формулѣ: „numerus infinitus repugnat" очень и очень древняго происхожденія; въ новѣйшее время мы его встрѣчаемъ, напримѣръ, у Тонджорджи въ „Instit. philos. t. II, l. 3, a. 4, pr. 10". въ формѣ: „Multitudo actu infinita repugnat"; его можно найти также, между прочимъ, у X. Зигварта: „Logik, B. II, p. 47, Tübingen, 1878" и у К. Фишера. „System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, p. 275, Heidelberg, 1865"), то ихъ дѣла обстояли бы очень плохо. Мнѣ кажется поэтому весьма замѣчательнымъ, что св. Ѳома Аквинскій въ I p., q. 2, a. 3 своей „Summa theologica“, гдѣ онъ доказываетъ съ помощью пяти аргументовъ существованіе Божіе, не пользуется вовсе этимъ ложнымъ тезисомъ, хотя онъ, вообще, отнюдь не противникъ его; но, во всякомъ случаѣ, для преслѣдуемой имъ цѣли онъ показался ему мало надежнымъ. (ср. Const. Gutberlet: „Das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, p. 9, Mainz, 1878“). Сколь высоко я ни цѣню Коши, какъ математика и физика, сколь ни симпатична мнѣ его религіозность и какъ въ частности мнѣ ни нравятся—помимо разсматриваемаго заблужденія—его „Sept leçons de physique générale“, я долженъ все же рѣшительно протестовать противъ его авторитета тамъ, гдѣ онъ ошибся.

Теперь прошло ровно два года съ тѣхъ поръ, какъ г. Рудольфъ Липшитцъ изъ Бонна обратилъ мое вниманіе на одно мѣсто въ перепискѣ между Гауссомъ и Шумахеромъ, гдѣ первый высказывается противъ всякаго привлеченія актуально безконечнаго въ математику (письмо отъ 12 іюля 1831 г.). Я подробно отвѣтилъ на это указаніе и отклонилъ въ этомъ пунктѣ авторитетъ Гаусса, который во всѣхъ прочихъ отношеніяхъ я ставлю такъ высоко, подобно тому какъ теперь я отклоняю свидѣтельство Коши и какъ въ своемъ сочиненіи „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883“ я среди прочихъ авторовъ, отклонилъ и авторитетъ Лейбница, оказавшагося въ этомъ вопросѣ удивительно непослѣдовательнымъ.

Если бы Вы пожелали внимательнѣе просмотрѣть названное мною сейчасъ сочиненіе (а не переводъ его въ Acta mathematica, t. II, гдѣ приведена лишь часть его), то Вы увидѣли бы, что въ §§ 4—8 я отвѣтилъ по существу на всѣ тѣ возраженія, которыя могутъ быть выдвинуты противъ введенія актуально-безконечныхъ чиселъ. Если тогда мнѣ и были еще неизвѣстны упомянутыя сочиненія Жердиля, Коши и Муаньо о разсматриваемомъ нами вопросѣ, то все же развитые мною аргументы имѣютъ силу и противъ соотвѣтственныхъ мнимыхъ доводовъ этихъ авторовъ, какъ и противъ petitiones principii многочисленныхъ, приведенныхъ мной въ томъ сочиненіи, философовъ.

Всѣ, такъ называемыя, доказательства противъ возможности актуально-безконечныхъ чиселъ по существу—какъ это можно показать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ и какъ это можно также вывести изъ общихъ соображеній—ошибочны потому и имѣютъ πρῶτον ψεῦδος въ томъ, что они заранѣе приписываютъ или скорѣе навязываютъ разсматриваемымъ числамъ всѣ свойства конечныхъ чиселъ. Между тѣмъ безконечныя числа—если только вообще ихъ должно мыслить въ какой-нибудь формѣ — должны образовать благодаря своей противоположности къ конечнымъ числамъ совершенно новый числовой видъ, свойства котораго вполнѣ зависятъ отъ природы вещей и образуютъ предметъ изслѣдованія, а не нашего произвола или нашихъ предразсудковъ.

Паскаль, какъ я лишь недавно увидѣлъ, отлично замѣтилъ всю рискованность, если не прямо нелѣпость, дедукцій, подобныхъ тѣмъ, которыя встрѣчаются у названныхъ нами писателей. Поэтому онъ, равно какъ и его другъ, Антуанъ Арно, высказывался за актуально-безконечныя числа. Но въ силу одного шаткаго соображенія—на которомъ я не хочу здѣсь останавлинаться—онъ слишкомъ низко оцѣнивалъ человѣческій духъ въ смыслѣ постиженія имъ актуально-безконечнаго (Ср. Pascal. „Oeuvres complètes“, t. 1 p. 302—3, Paris, Hachette et C⁰, 1877; далѣе „Logique de Port Royal“, éd. par C. Jourdain, 4-e partie, ch. 1, Paris, Hachette et C⁰., 1877).

Если захотѣть сгруппировать нагляднымъ образомъ различныя воззрѣнія, высказывавшіяся на протяженіи исторіи по занимающему насъ вопросу объ актуально-безконечномъ (которое въ дальнѣйшемъ для краткости мы будемъ обозначать черезъ *а.=б.*), то для этого представляется нѣсколько точекъ зрѣнія, изъ которыхъ нынѣ я остановлюсь лишь на одной.

Можно именно разсматривать *а.=б.* въ трехъ главныхъ отношеніяхъ: во-первыхъ, поскольку оно имѣетъ мѣсто in Deo extramundano, aeterno omnipotente sive natura naturante—въ этомъ случаѣ оно называется Абсолютнымъ; во вторыхъ,—поскольку оно имѣетъ мѣсто in concreto seu in natura naturata—въ этомъ случаѣ я называю его transfinitum; въ третьихъ, можно разсматривать *а.=б.* in abstracto, т.-е. поскольку оно можетъ быть постигнуто человѣческимъ познаніемъ въ формѣ актуально-безконечнаго, или, какъ я ее назвалъ, въ формѣ трансфинитныхъ чиселъ, или въ еще болѣе общей формѣ трансфинитныхъ порядковыхъ типовъ (ἀριθμοί νοητοί или εἰδητικοί).

Оставимъ прежде всего въ сторонѣ первую изъ этихъ проблемъ и ограничимся лишь двумя послѣдними. Мы получаемъ тогда безъ труда четыре различныя точки зрѣнія, которыя фактически имѣли и имѣютъ мѣсто въ прошломъ и настоящемъ.

Можно, во-первыхъ, отвергнуть *а.=б.* какъ in concreto, такъ и in abstracto, подобно тому, какъ это дѣлаютъ Жердиль, Коши, Муаньо въ цитированныхъ выше сочиненіяхъ, Ш. Ренувье (ср. его произведеніе: „Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques", t. 1, p. 100, Paris, au Bureau de la Critique philosophique, 1885) и всѣ, такъ называемые, позитивисты и ихъ присные.

Во-вторыхъ, можно принимать *а.=б.* in concreto, но отвергать его in abstracto. Эта точка зрѣнія встрѣчается, какъ я указалъ въ своихъ „Grundlagen, p. 16", у Декарта, Спинозы, Лейбница, Локка и многихъ другихъ. А если желать назвать какого-нибудь новѣйшаго автора, то я упомяну Германна Лотце, который въ статьѣ подъ заглавіемъ: „L'Infini actuel est-il contradictoire? Réponse à Monsieur Renouvier" въ Revue philos. de Ribot, t. IX, 1880, защищаетъ *а.=б.* in concreto. Въ томъ же томѣ этого журнала имѣется и отвѣтъ Ренувье.

Въ третьихъ, можно утверждать, *а.=б.* in abstracto, но зато отрицать его in concreto. На этой точкѣ зрѣнія стоитъ часть ново-схоластиковъ, между тѣмъ какъ другая и, можетъ-быть, болѣе значительная часть этой школы, получившей мощный импульсъ къ развитію благодаря энцикликѣ Льва XIII отъ 4 августа 1879 г.: „De philosophia Christiana ad mentem Sanci Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda", пытается еще защищать первую изъ четырехъ вышеназванныхъ точекъ зрѣнія.

Въ четвертыхъ, наконецъ, можно принимать *а.=б.* какъ in concreto, такъ и in abstracto. На этой точкѣ зрѣнія, которую я считаю единственно истинной, стоятъ лишь немногіе. Можетъ-быть, я по времени первый, защищающій ее съ полной опредѣленностью и во всѣхъ ея послѣдствіяхъ, но одно я знаю твердо—это, что я не буду послѣднимъ, защищающимъ ее!

*

Если принять во вниманіе также отношеніе философовъ къ проблемѣ *а.=б.* in Deo, то получается классификація школъ согласно восьми точкамъ зрѣнія, которыя, удивительнымъ образомъ, кажется, всѣ представлены въ исторіи мысли. Затрудненіе при руководствѣ этой восьмичленной классификаціей могло бы встрѣтиться лишь въ случаѣ тѣхъ авторовъ, которые не заняли опредѣленной позиціи по одному или болѣе изъ трехъ, относящихся къ *а.=б.*, вопросовъ.

Такъ называемое, потенціальное или синкатегорематическое безконечное (Indefinitum) не даетъ никакихъ поводовъ къ подобному раздѣленію. Причина этого заключается въ томъ, что оно имѣетъ значеніе лишь понятія отношенія, лишь вспомогательнаго представленія, но не означаетъ само по себѣ никакой идеи. Въ этой роли оно, разумѣется, благодаря открытому Лейбницемъ и Ньютономъ дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, обнаружило свое огромное значеніе, какъ средство познанія и орудіе нашего духа, Но оно не можетъ претендовать на болѣе широкое значеніе.

Можетъ-быть, ваши вопросы вызваны однимъ замѣчаніемъ въ моей работѣ „Über verschiedene Theoreme aus der Theorie der Puntktmengen“ (Acta mathematica, VII, p. 123), гдѣ я сослался среди прочихъ авторовъ и на Коши въ подтвержденіе своего взгляда на строеніе матеріи. Я при этомъ имѣлъ въ виду, главнымъ образомъ, ту сторону своей гипотезы, въ которой я утверждаю строгую пространственную точечность или непротяженность послѣднихъ элементовъ, какъ это развивалъ вслѣдъ за Лейбницомъ и патеръ Босковичъ въ своемъ сочиненіи: „Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium, Venetiis, 1763“.

Это утвержденіе Коши встрѣчается въ его „Sept leçons"; до него его искусно защищалъ Андре Мари Амперъ (Cours de collège de France, 1835—36), а послѣ него Сенъ-Венанъ (ср. его мемуаръ: „Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues et sur la nature probable des dernières particules des corps". Bulletin de la société philomatique de Paris, 20 Janvier, 1844; см. также его болѣе крупную работу въ Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2-e année), у насъ въ Германіи, особенно г. Лотце (см. его „Mikrokosmos", B. I) и Г. Фехнеръ (см. его „Über die physikalische und philosophische Atomenlehre", Leipzig, 1864). Но, конечно, я не могу отрицать того, что Коши—по крайней мѣрѣ, въ томъ небольшомъ произведеніи (а также и прочіе, сейчасъ мной названные авторы, за исключеніемъ Лейбница)—полемизируетъ противъ второй составной части моей гипотезы, противъ актуально-безконечнаго числа послѣднихъ элементовъ. Насколько правъ онъ въ этомъ пунктѣ—было мной выше показано. Въ другой разъ, однако, я какъ-нибудь покажу, что при другихъ обстоятельствахъ Коши не оставался вѣренъ этому своему взгляду на *а.=б.*, что, впрочемъ, и не могло быть иначе...

Несмотря на существенное различіе понятій потенціальнаго и актуальнаго безконечнаго—причемъ первое означаетъ перемѣнную конечную величину, растущую сверхъ всякихъ конечныхъ границъ, а послѣднее нѣкоторое замкнутое въ себѣ постоянное, но лежащее по ту сторону всѣхъ конечныхъ величинъ, количество—къ сожалѣнію, слишкомъ часто встрѣчаются случаи смѣшенія этихъ понятій. Такъ, напримѣръ, на такомъ смѣшеніи обоихъ понятій основывается нерѣдко встрѣчающееся возэрѣніе на дифференціалы, какъ на опредѣленныя безконечно-малыя величины (между тѣмъ, они представляютъ лишь перемѣнныя, произвольно малыя вспомогательныя величины, которыя совершенно исчезаютъ изъ конечныхъ результатовъ и поэтому уже Лейбницемъ характеризовались, какъ простыя фикціи, см., напр., изданіе Эрдманна, стр. 436). Но если изъ этой справедливой антипатіи къ подобному незаконному *а.=б.* образовался, подъ вліяніемъ современнаго эпикурейски-матеріалистическаго духа времени, въ широкихъ научныхъ кругахъ своего рода Horror Infiniti, нашедшій свое классическое выраженіе въ вышеупомянутомъ письмѣ Гаусса, то связанное съ этимъ не-критическое отверженіе законнаго *а.=б.* представляется мнѣ немалымъ преступленіемъ противъ природы вещей, которыя слѣдуетъ брать таками, каковы онѣ въ дѣйствительности. Это отношеніе можно разсматривать лишь, какъ своего рода близорукость, которая лишаетъ возможности видѣть *а.=б.*, хотя послѣднее въ своемъ высшемъ, абсолютномъ носителѣ создало насъ и сохраняетъ, а въ своихъ вторичныхъ, трансфинитныхъ формахъ окружаетъ насъ со всѣхъ сторонъ и даже присуще самому нашему духу.

Часто происходитъ другого рода смѣшеніе, именно, двухъ формъ актуально-безконечнаго, причемъ смѣшивается именно трансфинитное съ Абсолютнымъ. Между тѣмъ, оба эти понятія рѣзко отличны другъ отъ друга: первое слѣдуетъ мыслить, конечно, безконечнымъ, но въ то же время доступнымъ еще увеличенію; второе же слѣдуетъ мыслить недоступнымъ увеличенію и поэтому математически неопредѣлимымъ. Съ этой ошибкой мы встрѣчаемся, напримѣръ, въ случаѣ пантеизма; она образуетъ ахиллесову пяту этики Спинозы, хотя Ф. Якоби утверждалъ о послѣдней, что ее нельзя опровергнуть доводами отъ разума. Можно также замѣтить, что со временъ Канта среди философовъ укрѣпилось ошибочное мнѣніе, будто *Абсолютное* есть идеальный предѣлъ *конечнаго*, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности этотъ предѣлъ можно мыслить лишь, какъ *трансфинитное* и притомъ, какъ *минимумъ всего трансфинитнаго* (соотвѣтствующій *наименьшему* сверхконечному числу, обозначаемому мной черезъ ω). Кантъ въ „Критикѣ чистаго разума", въ главѣ объ „Антиноміяхъ чистаго разума" оперируетъ безъ серьезной критической предварительной работы понятіемъ безконечности на примѣрѣ *четырехъ* вопросовъ, стараясь доказать, что съ одинаковымъ правомъ можно дать на нихъ *утвердительный и отрицательный* отвѣтъ. Врядъ ли когда-либо что бы то ни было—не исключая скепсиса Пирронизма и Академіи, съ которымъ у Канта столь много общаго—такъ способствовало дискредитированію человѣческаго разума и его способностей, чѣмъ этотъ отдѣлъ „критической трансцендентальной философіи". При случаѣ я покажу, что этому автору удалось вызвать лишь благодаря *смутному, неотчетливому* употребленію понятія безконечности (если еще можно вообще говорить о понятіяхъ при подобныхъ обстоятельствахъ) серьезное отношеніе къ его антиноміямъ, и къ тому же только у тѣхъ лицъ, которыя, подобно ему, предпочитаютъ уклоняться отъ основательнаго математическаго разсмотрѣнія подобныхъ вопросовъ.

Здѣсь я желаю отвѣтить также на *два* возраженія, выдвинутыя противъ моихъ работъ.

Какъ извѣстно, Гербартъ даетъ такое опредѣленіе безконечнаго, что подъ него можетъ подойти лишь понятіе *потенціально-безконечнаго*, и затѣмъ на этомъ онъ основываетъ свое soi disant доказательство того, что *а.=б.* внутренне противорѣчиво. Съ тѣмъ же правомъ онъ могъ бы-опредѣлить коническое сѣченіе, какъ такую кривую, точки которой находятся на равномъ разстояніи отъ одного центра, и, основываясь на этомъ, онъ могъ бы выставить противъ Аполлонія Пергейскаго слѣдующее положеніе: „Не существуетъ никакихъ другихъ коническихъ сѣченій, кромѣ круга; то, что ты называешь эллипсомъ, гиперболой и параболой,—внутренне противорѣчивыя понятія". Такого же достоинства тѣ выраженія, которыя выставили противъ моихъ „Основъ" господа гербартіанцы, Ср. Zeitschr für exakte Philosophie von Th. Allihn und A. Flügel, Bd. XII, pag. 389).

В. Вундтъ въ двухъ своихъ работахъ—въ своей „Логикѣ" (т. II), и въ статьѣ: „Kant's kosmologische Antinomien und das Problem der Uneudlichkeit, Phil. Studien", Bd. II—касается, хотя и своеобразно, моихъ изслѣдованій. У него довольно часто встрѣчаются введенныя мной слова „трансфинитный - сверхконечный". Но я не могу признать, что онъ правильно понялъ меня.

Въ первомъ сочиненіи, напримѣръ, вся фраза въ концѣ 127 стр., начинающаяся словами: „Wenn wir eine...", прямо противоположна правильному пониманію дѣла. Онъ также совершенно ошибочно опредѣляетъ понятія потенціально-и актуально-безконечнаго (названныя мной въ моихъ „Основахъ" несобственно-безконечнымъ и собственно-безконечнымъ). Точно такъ же я долженъ отклонить, какъ неудачное, сравненіе съ Гегелемъ. Пантеистъ Гегель не знаетъ никакихъ существенныхъ различій въ *а.=б.* Для моихъ же воззрѣній характерны именно подобныя различія, которыя я нашелъ, рѣзко выдвинулъ и строго математически развилъ путемъ обнаруженія коренной противоположности между „мощностью“ и „порядковымъ числомъ“ множествъ, что, повидимому, совершенно проглядѣлъ г. Вундтъ, хотя она встрѣчается почти на каждой страницѣ моихъ работъ. Такъ же мало сходства представляютъ мои изслѣдованія съ „метаматематическими“ изслѣдованіями, съ которыми ихъ ставитъ на одну доску опять-таки г. Вундтъ. Неустойчивость въ опредѣленіи понятій и вытекающая отсюда путаница, занесенныя впервые около вѣка тому назадъ съ далекаго Востока Германіи въ философію, нигдѣ не обнаруживаются такъ ясно, какъ въ вопросахъ, касающихся безконечности: это ясно видно изъ безчисленныхъ, какъ критицистическихъ, такъ и позитивистическихъ, какъ психологистическихъ, такъ и филологистическихъ, работъ теперешней философской литературы. Нельзя поэтому оставить неупомянутымъ того, что г. Вундтъ желаетъ употреблять слово „Infinitum“ исключительно въ значеніи потенціально-безконечнаго. Но вѣдь это слово издревле и вполнѣ общимъ образомъ было относимо къ положительнѣйшему изъ всѣхъ понятій, къ понятію Бога; приходится удивляться странной идеѣ употреблять отнынѣ слово „Infinitum“ только въ самомъ ограниченномъ, синкатегорематическомъ смыслѣ.

Пер. П. Юшкевичъ.

Г. Канторъ.

Къ ученію о трансфинитномъ [1]).

Въ статьѣ, помѣщенной въ 88 т. этого журнала (стр. 224), я, подъ вліяніемъ нѣкоторыхъ старыхъ и новыхъ работъ, направленныхъ противъ ученія о возможности безконечныхъ чиселъ, сдѣлалъ попытку, исходя изъ наиболѣе общей точки зрѣнія, классифицировать вопросы, связанные съ актуально-безконечнымъ, согласно ихъ высшимъ различительнымъ признакамъ, чтобы получить такимъ образомъ схему главнѣйшихъ позицій, которыя можно занять по отношенію къ данному предмету. Я различилъ *а.* = *б.* въ трехъ отношеніяхъ: во-первыхъ, поскольку оно осуществлено въ высочайшемъ совершенствѣ, въ совершенно независимомъ, внѣміровомъ бытіи, in Deo, гдѣ я называю его абсолютно-безконечнымъ или просто абсолютнымъ; во-вторыхъ, поскольку оно обнаруживается въ зависимомъ, сотворенномъ мірѣ; въ третьихъ, поскольку мышленіе можетъ постигнуть его in abstracto, какъ математическую величину, число или порядковый типъ. Въ

[1]) Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik, т. 91, 1887 г

обоихъ послѣднихъ отношеніяхъ, гдѣ, очевидно, оно представляется, какъ ограниченное, доступное еще увеличенію—и постольку родственное конечному *а.*=*б.*,—я называю его Transfinitum и рѣзко противоставляю его Абсолютному.

Въ каждомъ изъ трехъ отношеній можно отвѣтить положительнымъ или отрицательнымъ образомъ на вопросъ о возможности актуально-безконечнаго. Благодаря этому получаются всего восемь различныхъ точекъ зрѣнія, которыя всѣ были представлены въ философіи и изъ которыхъ я занимаю ту, которая безусловно утвердительна во всѣхъ трехъ отношеніяхъ.

Спекулятивной теологіи подобаетъ изслѣдовать абсолютно-безконечное и опредѣлить то, что можно сказать о немъ человѣческому уму, что же касается вопросовъ, направленныхъ на трансфинитное, то они относятся къ вѣдѣнію, главнымъ образомъ, метафизики и математики. Ими то я и занимаюсь преимущественно въ теченіе ряда лѣтъ.

Такъ какъ мнѣ выпало на долю счастье переписываться со многими учеными, обнаружившими дружескій интересъ къ моимъ работамъ, и такъ какъ благодаря этому мнѣ представился случай истолковать и разъяснить общепонятнымъ образомъ мои опубликованныя до сихъ поръ работы, то я думаю, что этотъ, возникшій изъ живого обмѣна мыслей, матеріалъ представляетъ благодарную почву для изложенія ряда соображеній, могущихъ заинтересовать и широкую публику. Поэтому въ дальнѣйшемъ я намѣтилъ опубликовать нѣкоторыя изъ написанныхъ мной писемъ, не производя въ нихъ никакихъ существенныхъ измѣненій. Тамъ же, гдѣ я сочту необходимымъ, я въ подстрочныхъ примѣчаніяхъ дамъ соотвѣтственныя разъясненія.

Къ письмамъ I, III, IV и VIII я хотѣлъ бы предпослать слѣдующія замѣчанія.

Ad I и VIII. Здѣсь встрѣчается защищаемая мной вотъ уже около четырехъ лѣтъ и развивавшаяся мной многократно на моихъ лекціяхъ концепція, согласно которой я разсматриваю цѣлыя числа и порядковые типы, какъ универсаліи, которыя относятся ко множествамъ и получаются изъ нихъ, когда абстрагируютъ отъ состава элементовъ. Каждое множество хорошо отличныхъ другъ отъ друга вещей можно разсматривать, какъ нѣкоторую единую вещь для себя, въ которой разсматриваемыя вещи представляютъ составныя части или конститутивные элементы. Если абстрагировать какъ отъ состава элементовъ, такъ и отъ порядка, въ которомъ они даны, то мы получаемъ количественное число или мощность множества; здѣсь мы имѣемъ общее понятіе, въ которомъ элементы, какъ, такъ называемыя, единицы (Einsen), сростаются извѣстнымъ образомъ въ такое органическое, единое цѣлое, что ни одинъ изъ нихъ не представляетъ какого-нибудь іерархическаго преимущества передъ другими элементами. При внимательномъ изслѣдованіи отсюда получается, что два множества имѣютъ тогда—и лишь тогда—одно и то же количественное число, когда они—какъ я выражаюсь—эквивалентны другъ другу. Поэтому нѣтъ никакого противорѣчія въ томъ, что—какъ это часто встрѣчается въ случаѣ безконечныхъ множествъ—два множества, изъ которыхъ одно является частью или составной частью другого, имѣютъ совершенно одинаковое количественное число. Въ игнорированіи этого обстоятельства я вижу главное препятствіе, искони мѣшавшее введенію безконечныхъ чиселъ.

Если вышеуказанный актъ абстракціи совершается надъ нѣкоторымъ даннымъ, упорядоченнымъ въ одномъ или нѣсколькихъ отношеніяхъ (измѣреніяхъ), множествомъ лишь въ отношеніи состава элементовъ, такъ что ихъ взаимный порядокъ сохраняется и въ томъ общемъ понятіи, которое образуетъ такимъ образомъ нѣкоторое единое органическое цѣлое, состоящее изъ различныхъ единицъ, сохраняющихъ между собой—въ одномъ или въ нѣсколькихъ отношеніяхъ—опредѣленный взаимный порядокъ, то мы получаемъ благодаря этому такое universale, которое я называю вообще порядковымъ типомъ или идеальнымъ числомъ, а въ частномъ случаѣ вполнѣ упорядоченныхъ множествъ порядковымъ числомъ [1]); это послѣднее совпадаетъ съ тѣмъ, что я раньше (Grundlagen einer allg. Mannichfaltigkeitslehre, Lpz.,1883) назвалъ „количествомъ вполнѣ упорядоченнаго множества". Двумъ упорядоченнымъ множествамъ присущъ лишь тогда одинъ и тотъ же порядковый типъ, когда они подобны или конформны другъ другу (при чемъ это отношеніе подобія будетъ точно опредѣлено).

Здѣсь вскрыты корни, изъ которыхъ съ логической необходимостью развивается организмъ трансфинитной теоріи типовъ или теоріи идеальныхъ чиселъ, и въ особенности трансфинитныхъ порядковыхъ чиселъ, и который я надѣюсь вскорѣ опубликовать въ математическомъ видѣ.

Въ замѣткѣ, написанной мной для „Deutsche Literaturzeitung" (отъ 16 мая 1885 г.), я далъ слѣдующее описаніе количественнаго и порядковаго числа: „Мощностью какого-нибудь комплекса или

---

[1]) Cp. Gutberlet, Das Problem des Unendlichen, Zeitschr. f. Philos. u. philos. Kritik, Bd. 88, p. 183.

множества элементовъ (причемъ послѣдніе могутъ быть однородными или разнородными, простыми или сложными) я называю то общее понятіе, подъ которое подходятъ всѣ множества, эквивалентныя данному множеству, и только они. При этомъ два множества называются эквивалентными въ томъ случаѣ, когда между ними можно установить взаимное и однозначное сопряженіе элемента съ элементомъ. Нѣчто иное представляетъ то, что я называю „количествомъ или порядковымъ числомъ"; я приписываю его лишь „вполнѣ упорядоченнымъ" множествамъ. Именно „количествомъ или порядковымъ числомъ вполнѣ упорядоченнаго множества" я называю то общее понятіе, подъ которое подходятъ всѣ вполнѣ упорядоченныя множества, подобныя данному множеству, и только они. „Подобными" я называю два вполнѣ упорядоченныхъ множества, когда между ними можно установить взаимное, однозначное и полное отображеніе другъ на друга, сохраняя при этомъ данную послѣдовательность элементовъ у обоихъ множествъ. Въ случаѣ конечныхъ множествъ оба момента—„мощность" и „количество"—совпадаютъ до извѣстной степени другъ съ другомъ, потому что конечное множеству, оставаясь „вполнѣ упорядоченнымъ" множествомъ при любомъ порядкѣ составляющихъ его элементовъ, имѣетъ одно и то же порядковое число Наоборотъ, въ случаѣ безконечныхъ множествъ различіе между „мощностью" и „порядковымъ числомъ" выступаетъ самымъ рѣзкимъ образомъ, какъ это показано въ моемъ сочиненіи „Grundlagen einer allgem. Mannigfaltigkeitslehre".

Количественныя числа, какъ и порядковые типы, представляютъ простыя абстрактныя образованія; каждое изъ нихъ есть истинное единство (μονάς), потому что въ немъ воедино связано множество и многообразіе единицъ (Einsen).

Если намъ дано множество M, то элементы его слѣдуетъ представлять себѣ раздѣльными. Въ умственномъ же отображеніи его M (см. отдѣлъ VIII, № 9 этой статьи), которое я называю его порядковымъ типомъ, единицы соединены въ одинъ организмъ. Въ извѣстномъ смыслѣ можно разсматривать каждый порядковый типъ, какъ нѣкоторое compositum изъ матеріи и формы. Заключающіяся въ немъ абстрактно отличныя единицы даютъ матерію, между тѣмъ какъ существующій между ними порядокъ соотвѣтствуетъ формѣ.

Если мы присмотримся къ опредѣленію конечнаго количественнаго числа у Эвклида, то мы должны будемъ прежде всего признать, что онъ—какъ и мы—относитъ число, согласно его истинному происхожденію, къ множеству и не дѣлаетъ изъ числа чего-то вродѣ простого „знака“, который прилагается къ отдѣльнымъ вещамъ при субъективномъ процессѣ счета. Въ „Элементахъ“ его, lib. VII, мы читаемъ: Μονάς ἐστιν καθ’ ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται и: Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συνκείμενον πγῆθος.

Но мнѣ кажется, что онъ разсматриваетъ единицы въ числѣ столь же раздѣльными, какъ и элементы въ томъ дискретномъ множествѣ, къ которому онъ его относитъ. По крайней мѣрѣ, въ эвклидовомъ опредѣленіи нехватаетъ прямого указанія на единый характеръ числа, между тѣмъ какъ это безусловно существенно для него.

Неизлишне будетъ замѣтить, что понятіе порядковаго числа, какъ оно было опредѣлено раньше, не совпадаетъ вовсе въ случаѣ конечныхъ порядковыхъ чиселъ съ тѣмъ, что обыкновенно называютъ „порядковыми числительными“ (первый, второй и т. д.). Эти послѣднія представляютъ просто наименованія для ерархическаго порядка элементовъ вполнѣ упорядоченнаго ряда и получаются безъ труда изъ нашихъ порядковыхъ чиселъ: именно послѣдній элементъ конечнаго вполнѣ упорядоченнаго множества обозначаютъ, какъ n-ый элементъ разсматриваемаго ряда, гдѣ n представляетъ порядковое число, относящееся къ этому вполнѣ упорядоченному ряду.

Въ то время, какъ съ моей точки зрѣнія, „порядковыя числительныя представляютъ самый послѣдній и несущественный моментъ въ научной теоріи чиселъ, они въ двухъ недавно опубликованныхъ работахъ разсматриваются, какъ исходный пунктъ для развитія понятія числа. Я имѣю въ виду старыя, помѣщенныя г. Гельмгольцемъ и Л. Кронекеромъ въ сборникѣ „Philosophische Aufsätze. Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktor — Jubiläum gewidmet. Lpz., bei Fues, 1887“ [1]). Они защищаютъ крайнюю эмпиристически-психологическую точку зрѣнія съ такой рѣзкостью, какой нельзя было бы представить себѣ, если бы мы не видѣли ее передъ собой здѣсь, дважды облеченной въ плоть и кровь. Было бы ошибочно думать, что противоположность ихъ и моихъ воззрѣній сводится къ противоположности между номинализмомъ или концептуализмомъ, съ одной стороны, и защищаемымъ мной умѣреннымъ аристотелевскимъ реализмомъ,—съ другой. Наоборотъ, весьма поучительно убѣдиться въ томъ, что для обоихъ этихъ мыслителей числа представляютъ прежде всего знаки, но не знаки, ска-

[1]) Оба автора называютъ „порядковымъ числомъ“ то, что я называю „порядковымъ числительнымъ“, между тѣмъ какъ у меня слово „порядковое число“ имѣетъ другое значеніе. Свое „порядковое число“ я бы перевелъ черезъ „numerus ordinarius“ а „порядковое числительное“ черезъ „nota ordinalis“. Эти notae ordinales и опредѣляютъ, согласно обоимъ указаннымъ авторамъ сущность чиселъ.

жемъ, для понятій, которыя относятся ко множествамъ, а знаки для вещей, отсчитываемыхъ при субъективномъ процессѣ счета. Само собой разумѣется, что, съ моей точки зрѣнія, ходъ мыслей обѣихъ этихъ работъ представляетъ совершенное hysteron proteron.

Такъ же противоположны онѣ воззрѣніямъ на числа, встрѣчающимся въ древности не только у философовъ, но и у математиковъ. Доказательствомъ въ пользу этого является вышеприведенное опредѣленіе у Эвклида. Что же касается Платона и Аристотеля, то врядъ ли приходится объ этомъ упоминать.

Какую бы позицію ни занять относительно древнихъ, каждому напередъ должно показаться неправдоподобнымъ, чтобы лучшіе изъ нихъ очень далеко уклонились отъ истины въ такихъ простыхъ, опредѣленныхъ и всѣмъ извѣстныхъ вещахъ, и чтобы лишь въ 19 в. послѣ Р. Х. было найдено правильное пониманіе этого предмета. Въ сѣдую старину существовала, правда, одна секта, которая приходитъ на умъ при чтеніи работъ Гельмгольца и Кронекера — это древній скептицизмъ, для ознакомленія съ которымъ—въ особенности по вопросу о числѣ—я укажу на Sextus Empiricus Pyrrhoniarum Hypotyposeon, lib. 3, cap. 18. Но и въ „вѣкѣ просвѣщенія“, оказавшемъ такое огромное, все еще длящееся, вліяніе на знаменитыя и ученыя академіи, можно отмѣтить одну отличную работу, написанную даже однимъ членомъ берлинской академіи наукъ:

Louis Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques; Génève; aux dépens de l'Auteur; 1778.

На титульномъ листѣ этого двухтомнаго сочиненія находится рисунокъ: на переднемъ фонѣ изображенъ пастухъ, провѣряющій свое возвращающееся домой стадо, на заднемъ — охотникъ, стрѣла котораго проносится черезъ пространство. Все это снабжено эпиграфомъ: Tu Pastor numeros, extensi tu rationes Pandito Venator.

Первая же глава начинается такъ: Dans les commencements, les hommes furent chasseurs ou bergers. Ces derniers eurent d'abord occassion de compter: il leur importait de ne pas perdre leurs bestiaux; et pour cela il fallait s'assurer le soir si tous étaient revenus du pâturage; celui qui n'en aurait que quatre ou cinq, aurait pu voir d'un coup d'oeil, si tous étaient rentrés; mais un coup d'oeil n'aurait pas suffi à celui qui en aurait en vingt. Considérant donc ces bestiaux revenant les uns après les autres, il aurait imaginé une suite de mots en pareil nombre, et gardant ces mots dans sa mémoire il les aurait répétéses le lendemain à mesure que ces bestiaux seraient rentrées; afin d'être sûr, s'ils eussent cessé d'entrer avant qu'il êut achevé ses mots, qu'autant qu'il lui restait de mots à prononcer, autant il lui manquait des bestiaux etc.".

Какъ мы видимъ это, mutatis mutandis, тотъ же числовой принципъ, что у Гельмгольца и Кронекера; слѣдовательно, дѣло идетъ здѣсь не о чемъ-то новомъ, но—какъ столь часто — опять-таки лишь о „старой, забытой истинѣ" (Бенъ Акиба).

Впрочемъ, у обоихъ ученыхъ явно выступаетъ наружу мотивъ враждебнаго отношенія къ актуально-безконечному, и такъ какъ, какъ извѣстно, нельзя обосновать съ научной строгостью даже „конечныхъ" ирраціональныхъ чиселъ безъ рѣшительнаго привлеченія къ дѣлу актуально-безконечныхъ множествъ[1]), то усилія обоихъ—въ особенности Кроне-

[1]) Ср. мои „Grundlagen", с. 21 и третій отдѣлъ моей работы въ Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, Bd. 11, № 19.

кера—направлены съ неуклонной послѣдовательностью на то, чтобы сдѣлать съ помощью искусственно придуманныхъ, кажущихся ему подходящими, вспомогательныхъ теорій совершенно „ненужными“ и лишними [1]) всѣми принятыя со временъ Пиѳагора и Платона ирраціональныя числа, вмѣсто того, чтобы изслѣдовать и объяснить ихъ согласно ихъ природѣ. Мы видимъ такимъ образомъ, что господствующій теперь и могущественный академически-позитивистскій скептицизмъ, появившійся въ видѣ реакцій противъ чрезмѣрнаго Канто-Фихте-Гегеле-Шеллйнговскаго идеализма, захватилъ наконецъ, и ариѳметику, гдѣ онъ старается сдѣлать послѣдніе еще возможные выводы съ крайней послѣдовательностью, могущей быть роковой и для него. Вѣдь чего можетъ ему не хватать, послѣ того, какъ въ его распоряженіи оказались такое остроуміе и такія силы?

Въ мои планы не входитъ подробная оцѣнка обѣихъ этихъ работъ. Должно предположить, что, въ виду авторитета ихъ авторовъ, онѣ будутъ разсмотрѣны и разобраны другими критиками. Но все-таки я позволю себѣ сдѣлать здѣсь нѣсколько замѣчаній.

Работа г. Кронекера (Phil. Aufsätze, p. 263) ограничивается элементами теоріи чиселъ, но она находится въ тѣсной связи съ его прежними алгебраическими и теоретико-числовыми изслѣдованіями и поэтому она можетъ быть вполнѣ оцѣнена лишь въ этой связи. Нѣкоторыя указанія въ статьѣ даютъ мѣсто ожиданію, что теорія впослѣдствіи будетъ развита in extenso. Окончательно высказаться относительно системы Кронекера можно будетъ лишь тогда, когда будетъ установлено отношеніе его чиселъ къ геометріи

---

[1]) Ср. Kronecker, Crelle J., Bd. 99, p. 336 и статью Molk'а въ Acta math., Bd. VI.

и механикѣ. Пока этого еще нѣтъ, всякій въ правѣ будетъ усомниться въ пригодности его теоріи. Я, не колеблясь, рѣшаюсь предсказать заранѣе, что Кронекеру не удастся съ „идеальнымъ запасомъ“ (стр. 266) его „обозначеній“ „описать вполнѣ и наипростѣйшимъ образомъ“ (это выраженіе относится къ Г. Кирхгоффу, Vorl. üb. math. Phys., 1 Vorl.; Kronecker, Crelle I., Bd. 92, p. 93) актуально-безконечный запасъ точекъ пространственнаго и временнòго континуума, и это мое убѣжденіе тѣсно связано съ доказанной мной въ 1873 г. теоремой: мощность континуума выше, чѣмъ мощность совокупности всѣхъ конечныхъ, цѣлыхъ чиселъ (ср. Crelle J., Bd. 77, p. 258 ff).

Въ вступленіи къ статьѣ Кронекера (Phil. Aufs... p. 264) приводится небольшое юмористическое стихотвореніе Шиллера („Архимедъ и юноша“), посвященное „вѣчному числу“. Если первоначальное значеніе чиселъ сводится—какъ это мы наблюдаемъ у Кронекера и у Гельмгольца—къ роли простыхъ „числовыхъ знаковъ“, то я рѣшительно не понимаю ихъ связи съ „вѣчностью“, ибо, встрѣчая это слово, я всегда вспоминаю непревзойденное опредѣленіе Боэція (De consolatione philosophiae, lib. 5, prosa 6).

Въ заключеніе замѣчу, что доказательство главной теоремы (стр. 268) въ статьѣ Кронекера не кажется мнѣ имѣющимъ принудительный характеръ. Въ ней должно быть доказано, что „количество“ не зависитъ отъ порядка счета. Если внимательно прослѣдить за доказательствомъ, то можно замѣтить, что въ немъ предполагается уже въ другой формѣ то самое положеніе, которое должно быть доказано. Значитъ, авторъ здѣсь допустилъ petitio principii.

Я пользуюсь здѣсь случаемъ исправить другую ошибку, совершенную г. Кронекеромъ по отношенію къ покойному моему другу и товарищу Эдуарду Гейне.

Въ журн. Крелля, (Bd. 99, стр. 336, Jahrg. 1886) его дѣлаютъ главнымъ образомъ отвѣтственнымъ за развитую имъ въ работѣ „Elemente der Funktionentheorie“ (Crelle J., Bd. 74, Jahhrg. 1872) на основѣ понятія о „фундаментальномъ рядѣ“ (который Гейне называетъ „числовымъ рядомъ“) теорію ирраціональныхъ чиселъ, хотя Гейне въ вступленіи къ своей работѣ прямо сказалъ, что основную идею онъ „заимствовалъ“ у меня и что онъ мнѣ „обязанъ за устныя сообщенія“, которыя оказали „значительное вліяніе“ на ходъ его работы. Одновременно съ работой Гейне въ томъ же 1872 г. появилась въ пятомъ томѣ „Математическихъ Анналъ“ моя собственная работа подъ названіемъ: „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, въ которой я вкратцѣ развилъ существенныя черты своей теоріи ирраціональныхъ чиселъ. Позже я еще разъ вернулся къ этому вопросу въ „Grundlagen“, стр. 23. Я долженъ поэтому взять цѣликомъ на себя отвѣтственность за эту теорію, на которую такъ обрушивается г. Кронекеръ, освободивъ г. Гейне отъ мнимой, приписанной ему г. Кронекеромъ, вины.

Ad III и IV. Со стороны теологовъ мнѣ было указано, что то, что я называю Transfinitum in natura naturata (ср. Zeitschr. f. Phil. u. Phil. Kritik, Bd. 88, p. 227), „невозможно защищать и въ извѣстномъ смыслѣ“, котораго, однако, я, „повидимому, не придаю“ этому понятію, „содержитъ въ себѣ заблужденіе пантеизма“. На эти сомнѣнія я отвѣтилъ письмомъ III, въ отвѣтъ на которое я имѣлъ удовольствіе получить подробное письмо, которое я позволяю себѣ здѣсь дословно перепечатать, опустивъ нѣкоторые лестные для меня эпитеты.

На письмо III мнѣ отвѣтили слѣдующимъ образомъ:

Изъ Вашей статьи [1]) „zum Problem des A.—U.“ я съ личнымъ удовлетворенiемъ замѣчаю, что Вы рѣзко отличаете абсолютно-безконечное и то, что Вы называете актуально-безконечнымъ въ творенiи. Такъ какъ Вы прямо утверждаете, что послѣднее „еще доступно увеличенiю“ (разумѣется, in indefinitum, т.-е. такъ, что онъ не можетъ стать чѣмъ-то, недоступнымъ уже увеличенiю), и противоставляете его Абсолютному, какъ „существенно недоступному увеличенiю“—что̀, разумѣется, должно быть примѣнимо и къ вопросу о возможности или невозможности уменьшенiя,—то оба понятiя, понятiя абсолютно-безконечнаго и актуально-безконечнаго въ творенiи или Transfinitum, по существу различны, такъ что при сравненiи обоихъ должно назвать лишь одно собственно-безконечнымъ, а другое—не собственно-и aequi voce безконечнымъ. При такомъ пониманiи дѣла въ Вашемъ понятiи Transfinitum нѣтъ, насколько я досихъ поръ вижу, никакой опасности для религiозныхъ истинъ. Но въ одномъ пунктѣ Вы навѣрное заблуждаетесь относительно несомнѣнной истины; но это заблужденiе вытекаетъ не изъ Вашего понятiя о Transfinitum, а изъ недостаточнаго разумѣнiя Абсолютнаго. Въ Вашемъ любезномъ письмѣ ко мнѣ Вы говорите, во-первыхъ, правильно (предполагая, что Ваше понятiе о Transfinitum не только безукоризненно религiозно, но и истинно, о чемъ я не берусь судить), что одно доказательство исходитъ изъ понятiя Бога и умозаключаетъ прежде всего отъ высочайшаго совершенства Божескаго существа къ возможности сотворенiя Transfinitum ordinatum. Предполагая, что Ваше Transfinitum не содержитъ въ себѣ никакого противорѣ-

[1]) Это—отдѣльный оттискъ второй половины этой статьи, начиная со словъ: „Trotz wesentl. Verschiedenheit etc.“, на стр. 230.

чія, Ваше заключеніе изъ понятія Божьяго всемогущества о возможности сотворенія Transfinitum вполнѣ правильно. Но, къ моему сожалѣнію, Вы дѣлаете дальнѣйшій шагъ и умозаключаете „отъ его всеблагости и величія къ необходимости фактически послѣдовавшаго сотворенія Transfinitum“. Именно потому, что Богъ есть самъ по себѣ абсолютное безконечное благо и величіе—которыя не могутъ быть ни увеличены, ни уменьшены—необходимость сотворенія, каково бы это послѣднее ни было, представляетъ противорѣчіе. Свобода сотворенія представляетъ такое же необходимое совершенство Бога, какъ и всѣ прочія его совершенства, или лучше безконечное совершенство Бога есть (согласно нашимъ необходимымъ различеніямъ) точно такъ же свобода, какъ всемогущество, мудрость, справедливость и т. д. Согласно Вашему заключенію о необходимости сотворенія Transfinitum, Вы должны были бы пойти еще много дальше. Ваше Transfinitum actuale доступно увеличенію; но если безконечная благость и величіе Бога требуютъ вообще съ необходимостью сотворенія Transfinitum, то отсюда слѣдуетъ—въ виду той же самой безконечности его величія и благости—необходимость увеличенія до тѣхъ поръ, пока оно не стало бы недоступнымъ дальнѣйшему увеличенію, что противорѣчитъ Вашему собственному понятію о Transfinitum. Иными словами: кто изъ безконечной благости и величія Бога умозаключаетъ о необходимости сотворенія, тотъ долженъ утверждать, что все, доступное созданію, создано въ дѣйствительности отъ вѣка и что передъ Божіимъ окомъ нѣтъ ничего возможнаго, что могло бы вызвать въ дѣйствіе его всемогущество. Это Ваше несчастное мнѣніе о необходимости создастъ Вамъ большія препятствія при борьбѣ съ пантеистами и, во всякомъ случаѣ, ослабитъ силу Вашей аргументаціи. Я такъ подробно остановился на этомъ пунктѣ, потому что я желаю самымъ горячимъ образомъ, чтобъ Ваша проницательная мысль освободилась отъ столь рокового заблужденія, въ которое, правда, впадаютъ и многія иныя лица, даже такія, которыя считаютъ себя правовѣрными".

Со всѣмъ тѣмъ, что̂ сказано въ этомъ письмѣ, я вполнѣ согласенъ, какъ это видно изъ тѣхъ немногихъ строкъ, которыя приведены ниже подъ рубрикой V. Такъ какъ для меня не подлежитъ никакому сомнѣнію абсолютная свобода Бога, то выраженіе „необходимость" въ соотвѣтственномъ письмѣ IV понималось мной не такъ, какъ это понялъ мой адресатъ, справедливо ополчившійся на него. Но если тщательнѣе вдуматься въ правильный смыслъ моей аргументаціи, то—какъ я это разъясню впослѣдствіи при случаѣ—данная мной въ IV попытка апріорнаго доказательства въ пользу фактически последовавшаго сотворенія трансфинитнаго міра заслуживаетъ, какъ мнѣ кажется, дальнѣйшаго обсужденія и провѣрки.

I [1]).

Подъ мощностью или количественнымъ числомъ какого-нибудь множества M (которое состоитъ изъ строго отличныхъ, абстрактно-логически раздѣльныхъ элементовъ m, m′,... и которое постольку опредѣлено и отграничено) я понимаю общее или ро-

---

[1]) Это письмо написано года три тому назадъ, 15 февр. 1884 г. проф. д-ру Курду Лассвитцу въ Готѣ. Оно передаетъ въ существенныхъ чертахъ содержаніе одного доклада, прочитаннаго мной въ сентябрѣ 1883 г. въ математической секціи собранія естествоиспытателей въ Фрейбургѣ (въ Баденѣ). Вскорѣ послѣ этого доклада я получилъ письмо отъ Р. Липшитца (о которомъ я упомянулъ въ т. 88, стр. 225 этого журнала), гдѣ этотъ отличный математикъ обращалъ мое вниманіе на переписку (отъ

довое понятіе (universale), получающееся, если абстрагировать какъ отъ состава элементовъ множества, такъ и отъ всѣхъ отношеній этихъ элементовъ другъ къ другу и къ другимъ вещамъ, а въ частности и отъ порядка, который можетъ господствовать между этими элементами, и если имѣть въ виду лишь то, что̀ обще всѣмъ множествамъ, эквивалентнымъ M. Я называю два множества **эквивалентными**, если между ними можно установить взаимно однозначное сопряженіе элемента съ элементомъ (Cp. Borchardt's Journal, Bd. 84, p. 242). Поэтому, ради краткости, я пользуюсь также выраженіемъ **валентность** вмѣсто мощность или количественное число. О множествахъ равной валентности я говорю, что они принадлежатъ къ одному и тому же классу мощности. Слѣдовательно, **валентностью** какого-нибудь множества M является то общее понятіе, къ которому относятся всѣ множества того же класса, что̀ M.

Одной изъ важнѣйшихъ задачъ ученія о множествахъ, которую, какъ мнѣ кажется, я разрѣшилъ по существу еще въ работѣ „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig, 1883“, является требованіе опредѣлить различныя валентности или мощности встрѣчающихся во всей природѣ—насколько она раскрывается нашему познанію — многообразій. Этого я достигъ развитіемъ общаго понятія о **количествѣ вполнѣ упорядоченныхъ множествъ** или—что сводится къ тому же самому—**понятія о порядковомъ числѣ** [1]).

12 іюля 1831 г.) между Гауссомъ и Шумахеромъ, въ которой Гауссъ высказывается противъ всякаго рода привлеченія актуально-безконечнаго въ математику.

[1]) Понятіе **порядковаго числа** есть частный случай **порядковаго типа**, относящійся къ каждому **однократно** или **многократно упорядоченному** множеству такъ,

Опредѣленіе того, что́ я понимаю подъ вполнѣ упорядоченнымъ множествомъ $\mathfrak{M}$, находится въ „Grundlagen“, стр. 4.

Два вполнѣ упорядоченныхъ множества $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ я называю принадлежащими къ одному типу или же подобными, если между ними можно установить такое взаимно однозначное соотвѣтствіе, что, когда m и m' представляютъ два какихъ-нибудь элемента перваго множества, n и n' соотвѣтственные элементы второго множества, то тогда отношеніе порядка (Rangverhältniss) между m' и m всегда то же самое, что отношенія порядка между n' и n. О двухъ подобныхъ вполнѣ упорядоченныхъ множествахъ $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ я говорю, что они перечислимы другъ черезъ друга (auf ein ander abzählbar).

Такъ, напримѣръ, вполнѣ упорядоченныя множества:

$$(a, a', a'') \text{ и } (b, b', b''),$$

равно какъ и вполнѣ упорядоченныя множества:

$$(a, a', a'', \ldots a^{(\nu)} \ldots) \text{ и } (b, b', b'', \ldots b^{(\nu)} \ldots),$$

а также

$$(a, a', a'', \ldots a^{(\nu)}, \ldots c, c', c'') \text{ и } (b, b', b'', \ldots b^{(\nu)}, \ldots d, d', d'').$$

принадлежатъ къ одному и тому же типу или—что сводится къ тому же самому—перечислимы другъ черезъ друга.

Подъ количествомъ или порядковымъ числомъ нѣкотораго, вполнѣ упорядоченнаго, множества я понимаю то общее понятіе (родовое понятіе, universale), которое получается, если отвлечься

какъ порядковое число къ вполнѣ упорядоченному множеству. К. Гутберлетъ по моему желанію внесъ относящіяся сюда замѣчанія по одной моей рукописи въ свою статью (Zeitschr. f. Phil u. phil. Kr., Bd. 88, p. 183).

отъ свойствъ и обозначенія элементовъ этого множежества и имѣть въ виду лишь іерархическій порядокъ, въ которомъ стоятъ другъ къ другу элементы. Слѣдовательно, количество или порядковое число $\mathfrak{M}$ обще всѣмъ вполнѣ упорядоченнымъ множествамъ того же самаго типа,—оно какъ бы то, что имманентно всѣмъ имъ. Здѣсь передъ нами возникаетъ задача опредѣлить встрѣчающіяся въ природѣ количества или порядковыя числа вполнѣ упорядоченныхъ множествъ и отличить ихъ правильно другъ отъ друга съ помощью соотвѣтственныхъ знаковъ. Къ этому насъ приводятъ слѣдующія опредѣленія и положенія:

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ два какихъ-нибудь вполнѣ упорядоченныхъ множества, α и β — относящіяся къ нимъ порядковыя числа; всегда

$\mathfrak{M}$ въ соединеніи со слѣдующимъ за нимъ $\mathfrak{M}$

представляетъ сызнова вполнѣ упорядоченное множество опредѣленнаго типа; пусть соотвѣтственное порядковое число будетъ γ. Мы опредѣлимъ γ, какъ сумму α и β, $\gamma=\alpha+\beta$, и назовемъ α первымъ членомъ (Augend), β—вторымъ членомъ (Addend) этой суммы. Если α и β два какихъ-нибудь различныхъ — т.-е. соотвѣтствующихъ различнымъ типамъ — порядковыхъ числа, то можно доказать, что или уравненіе $\beta=\alpha+\xi$ или уравненіе $\alpha=\beta+\xi$ разрѣшимо относительно ξ (т.-е. относительно второго члена суммы) и притомъ однимъ единственнымъ образомъ. Въ первомъ случаѣ мы говоримъ, что α меньше, чѣмъ β, во второмъ,—что α больше, чѣмъ β; ξ называется разностью обоихъ чиселъ; въ первомъ случаѣ $\xi=\beta-\alpha$, во второмъ $\xi=\alpha-\beta$.

Легко доказать, что если $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$, то $\alpha<\gamma$. Далѣе показываютъ, что всегда имѣетъ мѣсто ассоціативный законъ:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

Аналогичнымъ образомъ опредѣляется произведеніе двухъ порядковыхъ чиселъ, причемъ, однако, слѣдуетъ тщательно отличать множитель отъ множимаго, ибо вообще $\alpha . \beta$ отлично отъ $\beta . \alpha$. Но и здѣсь можно доказать—такъ сказать, однимъ взглядомъ,—что:

$$(\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma) \text{ (ассоціативный законъ)}$$

и что:

$$\alpha . (\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \text{ (дистрибутивный законъ, причемъ } \alpha\text{— множимое).}$$

Въ „Grundlagen“ я писалъ множитель налѣво, а множимое—направо. Но оказалось, что для дальнѣйшаго развитія ученія о трансфинитныхъ порядковыхъ числахъ цѣлесообразнѣе — и почти даже необходимо—поступать наоборотъ, т.-е. писать сперва множимое налѣво, а затѣмъ множитель направо. Поэтому отнынѣ я навсегда измѣняю соотвѣтственное начертаніе „Grundlagen“, поскольку дѣло идетъ о произведеніи. Насколько важно это измѣненіе, въ этомъ мы можемъ убѣдиться, какъ только мы привлечемъ къ разсмотрѣнію трансфинитныя порядковыя числа вида α^ρ, къ которымъ, согласно этому способу начертанія, примѣнимъ всеобщій законъ:

$$\alpha^\beta . \alpha^\gamma=\alpha^{\beta+\gamma}.$$

По способу же начертанія „Grundlagen“ этотъ самый законъ принялъ бы отталкивающій видъ:

$$\alpha^\beta . \alpha^\gamma=\alpha^{\gamma+\beta}$$

Обращаю вниманіе еще на слѣдующее: если въ какомъ-нибудь вполнѣ упорядоченномъ множествѣ $\mathfrak{M}$ два какихъ-нибудь элемента m и m' мѣняются мѣстами, то отъ этого типъ множества—а, значитъ, и его количество или порядковое число—не измѣняется. Отсюда слѣдуетъ, что количества вполнѣ упорядоченнаго множества не измѣняютъ такія преобразованія, которыя можно свести къ конечному или безконечному ряду перестановокъ элементовъ по двое. Но такъ какъ въ случаѣ конечныхъ множествъ—если совокупность его элементовъ остается неизмѣнной—каждое преобразованіе можно свести къ ряду перестановокъ, то это и объясняетъ, почему у этихъ конечныхъ множествъ совпадаютъ до извѣстной степени порядковое число и количественное число; вѣдь въ этомъ случаѣ множества одной и той же валентности въ любой формѣ, разсматриваемыя, какъ вполнѣ упорядоченныя множества, имѣютъ всегда одно и то же порядковое число. Но въ случаѣ безконечныхъ множествъ выступаетъ самымъ рѣзкимъ образомъ различіе между количественнымъ числомъ и порядковымъ числомъ. Съ этимъ же обстоятельствомъ связана примѣнимость къ конечнымъ множествамъ коммутативныхъ законовъ сложенія и умноженія, ибо легко доказать, что если μ и ν суть два конечныхъ порядковыхъ числа, то имѣемъ всегда: $\mu + \nu = \nu + \mu$ и $\mu \cdot \nu = \nu \cdot \mu$.

Для наименьшаго трансфинитнаго порядковаго числа—именно числа, которое соотвѣтствуетъ типу вполнѣ упорядоченнаго множества:

$$(a, a', a'', \ldots, a^{(\nu)}, \ldots)$$

—нужно выбрать новый знакъ; я взялъ для этого послѣднюю букву греческаго алфавита—ω.

Подъ порядковыми числами втораго числового класса я понимаю тѣ числа, которыя принадлежатъ къ вполнѣ упорядоченнымъ множествамъ мощности перваго числового класса 1, 2, 3, . . . ν, . . . Совокупность этихъ порядковыхъ чиселъ даетъ новую валентность и притомъ непосредственно слѣдующую за вышеуказанной валентностью, какъ это было строго доказано мной („Grundlagen", стр. 35—38). Слѣдуя тому же ходу мысли, мы приходимъ къ высшимъ числовымъ классамъ и къ соотвѣтственнымъ высшимъ валентностямъ.—Это представляетъ чудесную, грандіозную гармонію, тщательное проведеніе которой составляетъ тему ученія о трансфинитныхъ числахъ.

Я счелъ необходимымъ предпослать всѣ эти соображенія—правда, въ очень краткомъ видѣ,—чтобы получить возможность заняться нѣкоторыми замѣчаніями, находящимися въ Вашемъ письмѣ. Прежде всего я обращаю вниманіе на всеобщность, отчетливость и опредѣленность моихъ опредѣленій чиселъ; эти опредѣленія тождественны, независимо отъ того, относятъ ли ихъ къ конечнымъ или безконечнымъ множествамъ. Каждое, напримѣръ, трансфинитное число второго числового класса обладаетъ, согласно своему опредѣленію, той же самой опредѣленностью и той же законченностью въ себѣ, что и каждое конечное число.

Понятіе объ ω, напримѣръ, не содержитъ ничего шаткаго, ничего неопредѣленнаго, ничего измѣнчиваго, ничего потенціальнаго, оно не ἄπειρον, но ἀφωρισμένον, и то же самое можно сказать о всѣхъ прочихъ трансфинитныхъ числахъ. Это понятіе стоитъ, какъ и любое конечное число—напримѣръ, 3 или 7 — въ рѣзкомъ противорѣчіи къ неопредѣленнымъ знакамъ x, a, b буквеннаго обозначенія, съ которыми Вы сравниваете неудачнымъ образомъ въ своемъ письмѣ трансфинитныя числа. Дѣлая это, Вы отклоняетесь отъ того смысла, который имѣютъ у меня трансфинитныя числа, подобно тому, какъ это сдѣлалъ и Вундтъ (см. Logik, Bd. II, p. 126 — 129). Изложеніе Вундта показываетъ, что онъ не представляетъ себѣ ясно и отчетливо основного различія между несобственно-безконечнымъ = перемѣннымъ наличнымъ = synkategorematice infinitum (ἄπειρον), съ одной стороны, и собственно-безконечнымъ=Transfinitum=законченно-безконечнымъ = безконечно-сущимъ=kategorematice infinitum (ἀφωρισμένον),—съ другой. Въ противномъ случаѣ онъ не обозначилъ бы какъ перваго, такъ и второго, какъ предѣлъ. Предѣлъ есть всегда нѣчто твердое, неизмѣнное; поэтому изъ обоихъ понятій о безконечности можно всегда мыслить сущимъ лишь Transfinitum, разсматривая его при извѣстныхъ обстоятельствахъ и въ извѣстномъ смыслѣ также и какъ неизмѣнный предѣлъ. Поэтому Вундтъ ошибается и тогда, когда утверждаетъ, что Transfinitum не имѣетъ вовсе физическаго значенія, а имѣетъ его потенціально-безконечное. Строго говоря, вѣрно какъразъ обратное, ибо потенціальное безконечное есть лишь вспомогательное понятіе, понятіе отношенія, и всегда указываетъ на нѣкоторый лежащій въ основѣ transfinitum, безъ котораго оно не можетъ ни быть, ни быть мыслимымъ. Различіе между несобственно-безконечнымъ и собственно - безконечнымъ было познано философами еще очень рано, а именно, еще древними греками, хотя, правда, не всегда съ одинаковой ясностью. Его можно найти такъ же ясно выраженнымъ у новыхъ философовъ, за исключеніемъ, развѣ, Канта, Гербарта и матеріалистовъ, эмпиристовъ, позитивистовъ и т. д. При этомъ Гегель не заслуживаетъ вовсе, какъ это думаетъ, повидимому, Вундтъ, особеннаго упоминанія, тѣмъ болѣе, что у Гегеля все темно, туманно и противорѣчиво, да, впрочемъ, противорѣчія, являющіяся выдающимися элементами его философіи, возводятся имъ самимъ въ характерную особенность его мышленія,—въ чемъ я, по крайней мѣрѣ, ему не завидую. Кромѣ того, то правильное, что Гегель сказалъ о разсматриваемомъ здѣсь различіи, заимствовано, какъ и столь многое другое въ его системѣ, у Спинозы. Но у всѣхъ философовъ нехватаетъ принципа различія въ transfinitum, который приводитъ къ различнымъ трансфинитнымъ числамъ и къ различнымъ мощностямъ. Большинство изъ нихъ смѣшиваетъ даже transfinitum съ лишеннымъ различій высшимъ Единымъ съ абсолютнымъ максимумомъ, который, разумѣется, недоступенъ вовсе опредѣленію и поэтому не подчиненъ вовсе математикѣ.

Совсѣмъ неудачно въ вундтовой критикѣ сопоставленіе новѣйшихъ, такъ называемыхъ, „метаматематическихъ“ спекуляцій съ моими работами. У нихъ ничего сходнаго, ни одной точки соприкосновенія. Transfinitum, кромѣ того, нельзя опредѣлять, какъ „трансцендентное“ (т.-е. какъ превосходящее силу человѣческаго разумѣнія).

Въ рецензіи [1]) Баллауфа, въ которой путаница особенно велика въ сопровождающихъ ее редакціонныхъ примѣчаніяхъ, невѣрно даже послѣднее, претендующее на остроуміе, соображеніе въ концѣ ея. Оно основывается на очевидномъ заблужденіи. Если мы имѣемъ безконечную прямую АО, начинающуюся въ А, и если мы прибавимъ къ ея началу А конечный отрѣзокъ ВА, то мы получаемъ снова безконечную, начинающуюся въ В прямую ВО, въ которой прибавленный отрѣзокъ ровно ничего не измѣняетъ въ отношеніи „величины“. Это видно изъ того, что можно произвести полное наложеніе новой прямой

[1]) Zeitschrift für exacte Philosophie. B. 12, p. 375.

на прежнюю. Конечно, избытокъ, полученный ею, благодаря присоединенію BA, имѣется реально на лицо и безспоренъ, но онъ совершенно исчезаетъ, если имѣть въ виду лишь присущую обѣимъ линіямъ: AO и BO, акциденцію величины. Кто видитъ здѣсь—какъ и вообще въ случаѣ актуально-безконечныхъ количествъ — нарушеніе принципа противорѣчія, тотъ совершенно заблуждается, ибо онъ упускаетъ изъ виду абстрактный характеръ „величины“ и отождествляетъ ее съ субстанціональной сущностью разсматриваемаго количества [1]). Въ аналогичную ошибку впадаетъ, повидимому, и Вундтъ на стр. 128. Поэтому нѣтъ нужды въ дальнѣйшихъ объясненіяхъ, почему я въ „Grundlagen“ въ самомъ же началѣ различаю два toto genere отличныя другъ отъ друга понятія, которыя я называю несобственно-безконечнымъ и собственно-безконечнымъ. Ихъ не должно представлять себѣ никакимъ образомъ соединимыми или родственными. Соединеніе или смѣшеніе обоихъ этихъ совершенно различныхъ понятій, имѣвшее мѣсто такъ часто во всѣ времена, является, по моему глубокому убѣжденію, источникомъ безчисленныхъ заблужденій. Въ частности, я вижу здѣсь причину того, почему еще раньше не открыли трансфинитныхъ чиселъ.

Чтобы заранѣе исключить возможность этого смѣшенія, я обозначаю наименьшее трансфинитное число знакомъ, отличнымъ отъ обычнаго знака ∞, отвѣчающаго понятію несобственно-безконечнаго, а именно, я его обозначаю черезъ ω.

---

[1]) На этомъ заблужденіи многіе основываютъ свои, такъ называемыя, доказательства невозможности актуально-безконечныхъ количествъ или чиселъ. Ср., напримѣръ: Ch. Renouvier, Esquisse d'une classification systematique des doctrines philosophiques, t. I, p. 100, Paris, 1885. Salv. Tongiorgi. Inst. philos., ed. X, t. II, ontol. § 350; 3°. T. Pesch. Instit. phil. nat. § 412; 1°, 2°, 3°, 4°.

Конечно, эту ω можно разсматривать въ извѣстномъ смыслѣ, какъ предѣлъ, къ которому стремится перемѣнное цѣлое число ν, но лишь въ томъ смыслѣ, что ω есть наименьшее трансфинитное порядковое число, т.-е. наименьшее твердо-опредѣленное число, которое больше, чѣмъ всѣ конечныя числа ν. Аналогичнымъ образомъ и $\sqrt{2}$ есть предѣлъ извѣстныхъ перемѣнныхъ растущихъ раціональныхъ чиселъ, съ той лишь особенностью, что разность между $\sqrt{2}$ и этими приближенными дробями становится безконечно-малой, между тѣмъ какъ $\omega - \nu$ всегда равно ω. Но это различіе нисколько не измѣняетъ того обстоятельства, что ω слѣдуетъ считать столь же опредѣленнымъ и законченнымъ, какъ $\sqrt{2}$; и не измѣняетъ также того обстоятельства, что ω содержитъ въ себѣ столь же мало слѣдовъ стремящихся къ нему чиселъ ν, какъ $\sqrt{2}$ содержитъ что-нибудь отъ раціональныхъ приближенныхъ дробей.

Трансфинитныя числа въ извѣстномъ смыслѣ суть сами новыя ирраціональности; и дѣйствительно, по-моему, лучшій методъ опредѣлить конечныя ирраціональныя числа совершенно подобенъ, я готовъ даже сказать, въ принципѣ тотъ же самый, что и мой описанный выше методъ введенія трансфинитныхъ чиселъ. Можно безусловно сказать: трансфинитныя числа стоятъ или падаютъ вмѣстѣ съ конечными ирраціональными числами. По своему внутреннему существу они подобны другъ другу, ибо первыя, какъ и послѣднія суть опредѣленно отграниченныя образованія или модификаціи (ἀφωρισμένα) [1]) актуально-безконечнаго.

---

[1]) Ср. Conimbricenses. Phys., Lib. III, cap. 8, quaest. 1, art. 1.

II [1]).

Какъ ни мало склоненъ я критиковать взгляды другихъ, но въ виду важности предмета, по Вашему повторно выраженному желанію, я разсмотрѣлъ выдвинутые вами въ статьѣ [2]): „Das Problem des Unendlichen“ доводы противъ „infinitum actuale existens seu in concreto“, которые, по Вашему мнѣнію, непримѣнимы аналогичнымъ образомъ противъ „inf. act. possibile“, и нашелъ, что и въ данномъ случаѣ, какъ и во всѣхъ доказательствахъ, преслѣдующихъ ту же самую цѣль, въ основѣ лежитъ скрытый порочный кругъ. Въ моемъ письмѣ къ г. Энестрему я сказалъ, что всѣ, такъ называемыя, доказательства противъ актуально - безконечныхъ чиселъ основываются на πρῶτον ψεῦδος, въ которомъ не даютъ себѣ полнаго отчета, но которое я берусь въ каждомъ предложенномъ мнѣ случаѣ указать. Оно заключается въ томъ, что заранѣе приписываютъ актуально - безконечной величинѣ всѣ свойства конечной величины, откуда потомъ легко выводится противорѣчіе съ тѣмъ, что она не конечная. Такимъ путемъ думаютъ найти доказательство невозможности актуально - безконечной величины, между тѣмъ какъ въ дѣйствительности вертится лишь въ кругѣ. Такое же точно убѣжденіе питаю я по отношенію ко всѣмъ попыткамъ доказательства, съ помощью которыхъ оспариваютъ возможность актуально-безконечнаго in concreto seu in natura creata. Но здѣсь присоединяются еще и другія болѣе важныя соображенія, которыя вытекаютъ изъ абсолютнаго божескаго всемогущества и

---

[1]) Это письмо было послано г. проф. Гутберлету въ Фульдѣ. Оно датировано 24 янв. 1886.

[2]) Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik von Fichte u. Ulrici. B. 88, S. 199.

по отношенію къ которымъ всякое отрицаніе возможности „transfinitum seu infinitum actuale creatum“ является какъ бы умаленіемъ этого аттрибута Божества. Но здѣсь я не буду останавливаться на этомъ послѣднемъ аргументѣ, ибо достаточно будетъ разсмотрѣть въ Вашемъ доказательствѣ то, что, согласно моему высказанному выше убѣжденію и моему не претендующему на обязательность мнѣнію, въ немъ невѣрно.

Ваше разсужденіе гласитъ дословно слѣдующее: „Однако, здѣсь я надѣюсь дать доказательство того, что не можетъ существовать актуально-безконечной величины. Если бы существовала какая-нибудь безконечная линія, какая-нибудь безконечно-длинная проволока, то можно было бы вырѣзать въ томъ мѣстѣ, гдѣ она касается меня, конечный кусокъ, затѣмъ стянуть и соединить между собой оба оставшіеся куска. Но ни одинъ изъ обоихъ кусковъ уже болѣе не безконеченъ. Вѣдь оба они выдвинуты изъ безконечности, обоимъ нехватаетъ ровно столько для безконечности, насколько они передвинулись путемъ приближенія къ серединѣ. Слѣдовательно, оба ограничены въ сторону безконечности и такъ же ограничены въ сторону середины. Конечно, какая-нибудь линія можетъ быть ограничена съ одной стороны и въ то же время быть безконечной съ другой стороны, но если она ограничена съ обѣихъ сторонъ, то она, разумѣется, конечна. Но если оба куска конечны, то конечна и вся составленная изъ нихъ линія, а если она теперь, когда изъ нея вырѣзанъ конечный отрѣзокъ, оказывается конечной, то она была конечной и прежде вмѣстѣ съ этимъ конечнымъ отрѣзкомъ, ибо двѣ конечныя величины не составляютъ безконечности“.

Въ этой аргументаціи я замѣчаю ту ошибку, что здѣсь свойства конечной твердой линіи переносятся попросту на безконечную твердую линію, свойства которой зависятъ отъ природы безконечнаго.

Если вы передвигаете конечную прямую AB вдоль ея направленія такъ, что ея начальная точка A перемѣщается на кусокъ $AA' = 1$ по направленію къ A',

A' A M' M B' B

то это возможно лишь такимъ образомъ, что *каждая изъ ея прочихъ точекъ*, напримѣръ, M передвигается въ M' на равный кусокъ $MM' = 1$, а *въ частности и конечная точка* B передвигается въ B' на кусокъ $BB' = 1$.

Но вообразимъ себѣ вмѣсто конечной линіи AB въ томъ же направленіи и съ той же начальной точкой актуально-безконечную линію AO, предѣльная точка которой O лежитъ въ безконечности. Въ этомъ случаѣ тоже вѣрно, что каждая лежащая на конечномъ разстояніи точка M передвигается въ M' на отрѣзокъ $MM' = 1$, если A переходитъ изъ A въ A', но *кто сказалъ Вамъ, что то же самое примѣнимо къ безконечно далекой предѣльной точкѣ O?*

Наоборотъ, послѣднее допущеніе, какъ Вы сами показали, приводитъ къ противорѣчію. Но это противорѣчіе не даетъ права, какъ Вы допускаете, отрицать возможность существованія актуально-безконечной прямой AO. Оно приводитъ лишь къ нѣкоторому, не содержащему въ себѣ ничего противорѣчиваго, свойству актуально-безконечной прямой AO, а именно, что въ то время, какъ *всѣ прочія* точки M, A, B прямой AO перемѣщаются влѣво на равный отрѣзокъ $MM' = AA' = BB' = 1$, *одна лишь безконечно далекая точка O остается неизмѣнной на своемъ мѣстѣ*, т.-е. не можетъ такимъ путемъ быть приведенной съ безконечнаго разстоянія на конечное разстояніе *даже и тогда*, еслибы Вы обратились къ гипотезѣ безконечной силы

Такъ какъ разсматриваемая актуально-безконечная прямая AO соотвѣтствуетъ по своей величинѣ наименьшему трансфинитному порядковому числу, обозначаемому мною черезъ ω, то вышесказанное можно найти въ извѣстномъ, не содержащемъ въ себѣ никакого противорѣчія равенствѣ $1+\omega=\omega$, гдѣ на лѣвой сторонѣ $1=A'A$ имѣетъ значеніе перваго члена суммы (augendus), $\omega=AO$ — значеніе второго члена суммы (addendus). Наоборотъ, $\omega+1$, гдѣ ω фигурируетъ въ качествѣ перваго, а 1 въ качествѣ второго члена суммы, представляетъ, какъ вытекаетъ изъ принциповъ моихъ „Grundlagen", отличное отъ ω трансфинитное число, именно первое, слѣдующее за наименьшимъ ω цѣлое трансфинитное порядковое число, но это не имѣетъ никакого отношенія къ Вашему примѣру, ибо у васъ первымъ членомъ суммы является конечная и лежащая на конечномъ разстояніи величина $A'A=1$, а вторымъ членомъ $AO=\omega$, актуально - безконечная величина.

Такъ какъ я разсматривалъ этотъ самый предметъ съ другихъ точекъ зрѣнія въ одномъ написанномъ мною на этихъ дняхъ письмѣ, то я рѣшаюсь послать Вамъ прилагаемую ниже копію выдержки [1]) изъ него съ пожеланіемъ, чтобы Вы имѣли любезность отвѣтить мнѣ какъ по поводу вышесказаннаго, такъ и по поводу того, что́ содержится въ упомянутомъ письмѣ.

Я намѣревался еще присоединить къ сегодняшнему письму нѣкоторыя соображенія какъ относительно встрѣчающихся въ Вашей статьѣ выводовъ, такъ и относительно разныхъ вопросовъ, затрагиваемыхъ въ Вашей книгѣ: „Das Unendliche matem. und metaph. betrachtet", но отъ этого меня удерживаютъ другія обязанности, такъ что я откладываю эту задачу для ближайшаго раза. . . . .

---

[1]) См. далѣе III.

III [1]).

Строки, которыя Ваш... имѣли доброту послать мнѣ 25 декабря 1885 г., содержатъ нѣкоторыя сомнѣнія по вопросу о философской основѣ моихъ, пересланныхъ Вамъ для просмотра, работъ. Возможно, что нѣкоторыя употребленныя мной слова, значеніе которыхъ я не объяснилъ точнѣе, затемнили мое подлинное мнѣніе; поэтому я позволю себѣ изложить его вкратцѣ болѣе точнымъ образомъ.

Встрѣчающіяся въ моей небольшой статьѣ: „О различныхъ взглядахъ на актуально-безконечное“ выраженія „Natura naturans“ и „Natura naturata“ я употребляю въ томъ же самомъ значеніи, что и томисты, такъ что первое изъ нихъ означаетъ Бога, какъ творца созданныхъ имъ изъ ничего субстанцій, стоящаго внѣ нихъ и сохраняющаго ихъ, второе же— сотворенный имъ міръ. Соотвѣтственно съ этими я различаю „Infinitum aeternum in creatum sive Absolutum“, которое относится къ Богу и его аттрибутамъ, и „Infinitum creatum sive Transfinitum“, о которомъ можно говорить тамъ, гдѣ въ Natura creata приходится констатировать актуально-безконечное; такъ, напримѣръ, это, по моему твердому убѣжденію, относится къ актуально-безконечному числу созданныхъ отдѣльныхъ существъ, какъ во вселенной, такъ и на нашей землѣ и, по всей вѣроятности, въ любой произвольно малой протяженной части пространства, въ чемъ я совершенно согласенъ съ Лейбницемъ (Epistola ad Foucher, t. 2, operum ed. Dutens, p. I, p. 243).

---

[1]) Слѣдующія два письма (III и IV) были посланы 22 и 29 янв. 1886 г. одному великому теологу; онъ, долженъ сказать со скорбью, отошелъ въ вѣчность 11 дек. 1886 г.

Хотя я знаю, что если не всѣ, то большинство учителей церкви оспариваетъ ученіе объ „Infinitum creatum“ и что въ частности въ „Summa theologiae“, p. I, q. 7, a. 4 великаго Св. Ѳомы Аквинскаго приведены противъ него извѣстныя мнѣнія, но доводы, которые въ результатѣ двадцатилѣтней работы предстали предо мной съ властной силой— я могу сказать противъ воли, ибо они противорѣчили глубоко почитавшейся мной традиціи—и которые въ извѣстномъ смыслѣ завладѣли мной, оказались сильнѣе, чѣмъ все то, что до сихъ поръ высказывалось противъ этого ученія, хотя я подвергъ это внимательному испытанію. Я думаю также, что слова Свящ. Писанія, какъ, напримѣръ, Sap. c. 11. v. 21: „Omnia in pondere, numero et mensura disposuisti“, въ которыхъ видятъ противорѣчіе ученію объ актуально-безконечныхъ числахъ, не имѣютъ вовсе приписываемаго имъ значенія. Вѣдь, если предположить, что существуютъ,—какъ, по моему мнѣнію, я это доказалъ—актуально-безконечныя „мощности“, т.-е. количественныя числа, и актуально-безконечныя „количества вполнѣ упорядоченныхъ множествъ“, т.-е. порядковыя числа (при чемъ оба эти понятія, какъ установлено мной, глубоко различны въ случаѣ актуально-безконечныхъ множествъ, между тѣмъ какъ въ случаѣ конечныхъ множествъ это различіе едва замѣтно), то надо думать, что и эти трансфинитныя числа, навѣрное, подразумѣваются въ цитированномъ священномъ текстѣ. Поэтому, если желать избѣгнуть порочнаго круга, то, по моему мнѣнію, не слѣдуетъ пользоваться этимъ текстомъ въ качествѣ аргумента противъ актуально-безконечныхъ чиселъ.

Но что должно принимать „Infinitum creatum“ за существующее, это можно доказать разными способами. Чтобы не задерживать надолго вниманія Ваш... на этомъ вопросѣ, я ограничусь лишь двумя краткими намеками.

Одно доказательство исходитъ изъ понятія Бога и умозаключаетъ прежде всего отъ высшаго совершенства существа Божія къ возможности сотворенія Transfinitum ordinatum, а затѣмъ отъ его всеблагости и величія къ необходимости фактически послѣдовавшагося сотворенія Transfinitum. Второе доказательство показываетъ a posteriori, что допущеніе Transfinitum in natura naturata даетъ лучшее, т.-е. болѣе совершенное объясненіе явленій, въ особенности организмовъ и психическихъ явленій, чѣмъ противоположное допущеніе. . . . .

. . . .

IV.

Я сердечно благодарю Ваш... за высказанныя въ любезномъ письмѣ отъ 26 янв. 1886 г. соображенія, къ которымъ я всецѣло присоединяюсь. Въ краткомъ указаніи въ моемъ письмѣ отъ 22 с. м. я не имѣлъ вовсе въ виду говорить объ объективной, метафизической необходимости акта творенія, которой былъ бы подчиненъ Богъ, *абсолютно свободный*. Я хотѣлъ лишь указать на нѣкоторую субъективную *для насъ* необходимость умозаключать отъ всеблагости и величія Божія къ фактически *послѣдовавшему* (а *не долженствовавшему послѣдовать* a parte Dei), сотворенія *не только* Finitum ordinatum, но и Transfinitum ordinatum. . . . .

V [1]).

Съ удовольствіемъ узнаю изъ Вашего письма отъ 23 с. м., что Вы интересуетесь предметомъ моихъ

[1]) Это письмо, помѣченное 28 фев. 1886 г., направлено къ проф. д-ру медиц. А. Эйленбургу въ Берлинѣ.

изслѣдованій, за что я тѣмъ болѣе благодаренъ Вамъ, чѣмъ рѣже я наблюдаю этотъ интересъ у выдающихся естествоиспытателей и врачей. Вѣдь въ этихъ кругахъ то, что я называю „horror infiniti“, представляетъ глубоко укоренившееся по разнымъ направленіямъ и въ силу разнообразнѣйшихъ основаній зло.

Если внимательнѣе приглядѣться къ опредѣленіямъ потенціальнаго и актуальнаго безконечнаго, то легко устранить трудности, о которыхъ Вы пишете.

I. *П.-б.* (т. е. потенціально - безконечное, ἄπειρον) имѣютъ въ виду преимущественно тогда, когда идетъ рѣчь о неопредѣленной перемѣнной конечной величинѣ, которая или растетъ сверхъ всякихъ границъ (въ такомъ видѣ мы можемъ представлять себѣ, такъ называемое, время, отсчитываемое съ извѣстнаго начальнаго момента) или убываетъ, становясь меньше всякой конечной величины (таково, напримѣръ, правильное представленіе о такъ называемомъ дифференціалѣ). Болѣе общимъ образомъ я говорю о *п.-б.* вездѣ тамъ, гдѣ разсматривается неопредѣленная величина, могущая принимать безчисленное множество значеній.

II. Подъ *а.-б.* (т.-е. актуально-безконечнымъ, ἀφωρισμένον) слѣдуетъ, наоборотъ, понимать такое количество, которое, съ одной стороны, не измѣнчиво, но опредѣленно и неизмѣнно во всѣхъ своихъ частяхъ и представляетъ истинную постоянную величину, а, съ другой, въ то же время превосходитъ по своей величинѣ всякую конечную величину того же вида. Въ качествѣ примѣра приведу совокупность, комплексъ всѣхъ конечныхъ, цѣлыхъ, положительныхъ чиселъ. Это множество есть нѣкоторая вещь для себя и образуетъ—отвлекаясь отъ натуральнаго ряда относящихся сюда чиселъ — нѣкоторое неизмѣнное во всѣхъ частяхъ и опредѣленное количество, нѣкоторое ἀφωρισμένον, которое, очевидно, приходится назвать бо́льшимъ, чѣмъ всякое конечное количество [1]). Другой примѣръ—это совокупность всѣхъ точекъ, лежащихъ на данной окружности (или иной какой-нибудь опредѣленной кривой). Третій примѣръ—это совокупность всѣхъ, разсматриваемыхъ, какъ строго точечныя, монадъ, являющихся конститутивными составными частями какого-нибудь даннаго физическаго тѣла.

Изъ опредѣленія I слѣдуетъ, что Вы вполнѣ правы, когда Вы спрашиваете: „не лучше ли было бы совершенно отбросить выраженіе „безконечный“ для *п. - б.*?“

Конечно, *п. - б.* не есть собственно-безконечное, поэтому въ своихъ „Grundlagen“ я и назвалъ его не собственно-безконечнымъ. Но трудно будетъ вывести установившійся обычай, и тѣмъ болѣе трудно, что *п.-б.* представляетъ болѣе легкое, болѣе поверхностное и несамостоятельное понятіе и съ нимъ чаще всего связана обманчивая иллюзія, что мы здѣсь имѣемъ нѣчто поистинѣ безконечное: въ дѣйствительности же *п.-б.* имѣетъ лишь отраженную реальность, указывая всегда на *а.-б.*, благодаря которому оно лишь и возможно. Поэтому схоластики удачно охарактеризовали *п.-б.* эпитетомъ: συνκατηγορηματικῶς.

Если, далѣе, мы присмотримся къ опредѣленію II, то мы видимъ, прежде всего, что изъ него нисколько не слѣдуетъ, будто *а.-б.* недоступно по своей величинѣ увеличенію. Убѣжденіе въ этомъ представляетъ ошибочное допущеніе, можно сказать, всеобще распространенное не только въ древней и въ примыкающей къ ней схоластической, но и въ

[1]) Ср. сходное съ этимъ пониманіе всего числового ряда, какъ актуально-безконечнаго количества у Августина, De civitate Dei lib. XII, cap. 19: Contra eos, qui dicunt ea, quae infinita sunt, nec. Dei posse scientia comprehendi.

новой и новѣйшей философіи. Мы здѣсь вынуждены скорѣе провести фундаментальное различіе, отличая

IIª, доступное увеличенію *а.-б.*, или transfinitum,

IIᵇ, недоступное увеличенію *а.-б.*, или Absolutum.

Приведенные выше три примѣра *а.-б.* всѣ относятся къ классу IIª трансфинитнаго. Сюда также относится наименьшее сверхконечное порядковое число, которое я обозначаю черезъ ω, ибо прибавленіемъ единицы изъ него можно получить ближайшее большее порядковое число $\omega + 1$, изъ этого послѣдняго $\omega + 2$ и т. д. Но и наименьшая актуально-безконечная мощность, или количественное число есть transfinitum, и то же самое можно сказать о ближайшемъ большемъ количественномъ числѣ и т. д.

Трансфинитное со всей полнотой своихъ образованій и образовъ указываетъ съ принудительной силой на Абсолютное, на „истинно-безконечное", величина котораго недоступна ни увеличенію, ни уменьшенію и которое можно поэтому разсматривать, какъ абсолютный максимумъ. Оно извѣстнымъ образомъ превосходитъ силу человѣческаго разумѣнія и въ частности недоступно математическому детерминированію. Наоборотъ, трансфинитное не только заполняетъ обширную область возможнаго въ познаніи Бога, но представляетъ также богатое, непрерывно растущее поприще для идеальнаго изслѣдованія, а по моему мнѣнію реализуется также въ различныхъ отношеніяхъ въ мірѣ сотворенномъ, чтобы ярче выразить величіе Творца по его абсолютно свободному выбору, чѣмъ это могло бы случиться въ просто „конечномъ мірѣ". Но этому убѣжденію еще придется долго ждать до всеобщаго признанія, въ особенности со стороны теологовъ, какъ ни полезнымъ оно могло бы оказаться для успѣховъ защищаемаго ими дѣла (религіи).

Наконецъ, я хочу Вамъ объяснить еще, въ какомъ смыслѣ я понимаю минимумъ трансфинитнаго, какъ предѣлъ растущаго конечнаго. Для этого слѣдуетъ замѣтить, что понятіе „предѣлъ" представляетъ въ области конечныхъ чиселъ два существенныхъ признака, которые здѣсь взаимно вытекаютъ другъ изъ друга. Напримѣръ, число 1 есть предѣлъ чиселъ $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$ (гдѣ ν есть перемѣнное конечное цѣлое растущее сверхъ всякихъ конечныхъ границъ число) и, какъ предѣлъ, представляетъ два слѣдующихъ выводимыхъ другъ изъ друга признака.

Во-первыхъ, разность $1 - z_\nu = \frac{1}{\nu}$ есть величина, становящаяся безконечно-малой, т. е. числа z_ν приближаются произвольно близко къ предѣлу 1.

Во-вторыхъ, единица есть наименьшая изъ всѣхъ числовыхъ величинъ, которая больше, чѣмъ всѣ величины z_ν, ибо если взять какую-нибудь величину $1-\varepsilon$, которая меньше, чѣмъ 1, то $1-\varepsilon$ будетъ больше, чѣмъ нѣкоторый z_ν, но, начиная съ извѣстнаго ν—именно для $\nu > \frac{1}{\varepsilon}$ — мы будемъ имѣть постоянно $z_\nu > 1 - \varepsilon$. Значитъ, 1 есть минимумъ всѣхъ числовыхъ величинъ, которыя больше, чѣмъ z_ν.

Изъ этихъ двухъ признаковъ каждый изъ нихъ, какъ сказано, характеризуетъ самъ по себѣ вполнѣ конечное число 1, какъ предѣлъ перемѣнной величины $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$.

Теперь если мы желаемъ распространить понятіе предѣла и на трансфинитные предѣлы, то для этого можно воспользоваться лишь вторымъ изъ только-что приведенныхъ признаковъ. Первый слѣдуетъ здѣсь отбросить, такъ какъ онъ имѣетъ значеніе лишь для конечныхъ предѣловъ, въ случаѣ же трансфинитныхъ предѣловъ онъ не имѣетъ никакого смысла.

Согласно съ этимъ, я называю, напримѣръ, ω предѣломъ конечныхъ растущихъ цѣлыхъ чиселъ ν, потому что ω есть наименьшее изъ всѣхъ чиселъ, которыя больше, чѣмъ всѣ конечныя числа ν точно такимъ же образомъ, какъ единица оказывается наименьшимъ изъ всѣхъ чиселъ, которыя больше, чѣмъ всѣ величины $z_\nu = 1 - \frac{1}{\nu}$. Всякое число, меньшее чѣмъ ω, есть конечное число, для котораго найдутся другія конечныя числа ν, большія, чѣмъ оно. Но зато здѣсь $\omega - \nu$ постоянно равно ω и здѣсь, слѣдовательно, нельзя сказать, что растущія конечныя числа ν приближаются произвольно близко къ своему предѣлу ω. Наоборотъ, любое сколь угодно большое число ν остается столь же далекимъ отъ ω, какъ и наименьшее конечное число.

Здѣсь особенно отчетливо выступаетъ то чрезвычайно важное обстоятельство, что мое наименьшее трансфинитное порядковое число ω и, слѣдовательно, всѣ большія порядковыя числа лежатъ совершенно внѣ безконечнаго числового ряда 1, 2, 3 . . и т. д. Это ω не есть максимумъ конечныхъ чиселъ (такого максимума вовсе не существуетъ),—оно есть минимумъ всѣхъ безконечныхъ порядковыхъ чиселъ. Несчастной ошибкой со стороны Фонтенелля [1]) было то, что онъ искалъ транс-

[1]) Cp. Fontenelle, Elémens de la Géometrie de l'infini. Paris, 1727.

финитное внутри числового ряда 1, 2, 3 . . ν . . . , хотя нѣкоторымъ образомъ въ концѣ его (между тѣмъ какъ такого конца вовсе не существуетъ). Послѣ того, какъ онъ ввелъ такимъ образомъ напередъ въ свои безконечныя числа неразрѣшимыя противорѣчія, судьба его безплодной теоріи была рѣшена. Она должна была пасть подъ ударами вполнѣ справедливой критики [1]). Но если эта критика, ободренная крушеніемъ фонтенеллевскихъ безконечныхъ чиселъ, думала этимъ рѣшить судьбу вообще актуально-безконечныхъ чиселъ, то я знаю, что она съ своей стороны опровергнута фактомъ моей, радикально отличной отъ фонтенеллевской, вполнѣ свободной отъ противорѣчій теоріи.

VI [2]).

Въ своемъ письмѣ Вы подымаете вопросъ объ актуально-безконечно-малыхъ величинахъ. Въ моихъ работахъ въ отдѣльныхъ мѣстахъ Вы могли бы найти выраженнымъ мнѣніе, что такія величины представляютъ невозможныя, т.-е внутренне противорѣчивыя мысленныя вещи. Уже въ своемъ сочиненіи: „Основы общаго ученія о многообразіяхъ" (§ 4 т. 8) я указалъ—хотя еще съ нѣкоторой осторожностью,—что строгое обоснованіе этого мнѣнія должно слѣдовать изъ теоріи трансфинитныхъ чиселъ. Лишь этой зимой я нашелъ достаточно свободнаго времени, чтобы придать своимъ мыслямъ на этотъ счетъ видъ фор-

[1]) Cp. Maclaurin, Traité des Fluxions. Traduction du R. P. Pezenas, Paris, 1749; t. I, introduction, p. XLI; далѣе: Gerdil, opere édite et inéd., Rome, 1806, t. IV, p. 261, t. V, p. 1.

[2]) Нижеслѣдующее изложено почти одинаковымъ образомъ въ двухъ письмахъ: одно отъ 13 мая 1887 было написано учителю гимназіи Ф. Гольдшейдеру въ Берлинѣ, другое отъ 16 мая 1887 г.—проф. К. Вейерштрассу.

мальнаго доказательства. Дѣло идетъ о слѣдующей теоремѣ.

„Не существуетъ отличныхъ отъ нуля линейныхъ числовыхъ величинъ ζ (т.-е., короче говоря, такихъ числовыхъ величинъ, которыя можно представить въ образѣ отграниченныхъ, непрерывныхъ прямолинейныхъ отрѣзковъ), которыя были бы меньше, чѣмъ любая, произвольно малая конечная числовая величина, т.-е. такія величины противорѣчатъ понятію линейной числовой величины".

Ходъ моего доказательства попросту таковъ: я исхожу изъ предположенія линейной величины ζ, которая такъ мала, что ея n-кратное

$$\zeta \cdot n$$

для любого сколь угодно большого конечнаго цѣлаго числа n меньше, чѣмъ 1, и доказываю затѣмъ изъ понятія линейной величины и съ помощью извѣстныхъ теоремъ теоріи трансфинитныхъ чиселъ, что тогда также

$$\zeta \cdot \nu$$

меньше, чѣмъ любая сколь угодно малая конечная величина, хотя бы ν оэначало любое сколь угодно большое трансфинитное порядковое число (т.-е. количество или типъ вполнѣ упорядоченнаго множества) изъ любого сколь угодно высокаго числового класса. Но это значитъ, что, на какое бы актуально-безконечное число ни умножить ζ, оно не можетъ быть сдѣлано конечнымъ, слѣдовательно, оно навѣрное не можетъ быть элементомъ конечныхъ величинъ. Слѣдовательно, сдѣланное предположеніе противорѣчитъ понятію линейныхъ величинъ; вѣдь согласно этому понятію всякая линейная величина должна разсматриваться, какъ интегрирующая часть другихъ, въ особенности конечныхъ линейныхъ величинъ. Слѣдовательно, не остается ничего иного, какъ отбросить предположеніе, что существуетъ такая величина ζ, которая была бы для каждаго конечнаго цѣлаго числа n меньше, чѣмъ $\frac{1}{n}$. Такимъ образомъ, наша теорема доказана.

Въ этой теоремѣ я вижу важное приложеніе ученія о трансфинитныхъ числахъ, ибо благодаря ей можно устранить старые, широко распространенные, глубоко коренящіеся предразсудки.

Фактъ существованія актуально-безконечно-большихъ чиселъ не только не является основаніемъ для существованія актуально-безконечно-малыхъ величинъ, но наоборотъ, только благодаря первымъ и доказывается невозможность послѣднихъ.

Я не думаю также, чтобы можно было инымъ путемъ добиться вполнѣ строго этого результата.

Насколько важное значеніе имѣетъ эта наша теорема, это видно по сравненію съ новѣйшими попытками О. Штольца и П. Дюбуа-Реймона, стремящихся обосновать актуально-безконечно-малыя величины съ помощью такъ-называемой „архимедовой аксіомы". (Ср. O. Stolz, Math. Annalen, Bd. XVIII, p. 269; далѣе его статьи въ докладахъ естеств.-медиц. общества въ Инсбрукѣ, Jahrg. 1881—82 и 84. Онѣ озаглавлены: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes" и „Die unendlich kleinen Grössen", наконецъ, ср. того же автора: „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik", Leipzig, 1885, I th. p. 205).

Архимедъ, повидимому, впервые, обратилъ вниманіе на то, что встрѣчающаяся въ элементахъ Эвклида теорема, согласно которой изъ любого сколь угодно малаго ограниченнаго прямолинейнаго отрѣзка можно получить произвольно большіе конечные отрѣзки путемъ умноженія на соотвѣтственныя достаточно большія конечныя числа, нуждается въ доказательствѣ, и онъ считалъ себя поэтому въ правѣ назвать эту теорему „допущеніемъ" (λαμβανόμενον).

(Ср. Eucl. Elem. lib. V, def. 4: λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; далѣе въ особенности Elem. lib. X, pr. 1 Archimedes de sphaera et cylindro I, postul. 5 и предисловіе къ его сочиненію: de quadratura parabolae).

Ходъ мыслей цитируемыхъ выше авторовъ (О. Штольцъ, цит. соч.) заключается въ томъ, что, если отбросить эту мнимую „аксіому", то мы въ правѣ будемъ создать актуально-безконечно-малыя величины: называющіяся у нихъ „моментами". Но изъ доказанной мною выше теоремы, если примѣнить ее къ прямолинейнымъ непрерывнымъ отрѣзкамъ, слѣдуетъ непосредственно необходимость Эвклидова допущенія. Слѣдовательно, такъ называемая „архимедова аксіома" не есть вовсе аксіома, но теорема, вытекающая съ магической необходимостью изъ понятія о линейной величинѣ.

VII [1]).

Если желать отдать себѣ отчетъ въ источникѣ широко распространеннаго предубѣжденія противъ акту-

[1]) Это письмо было написано въ маѣ 1886 г. Джуліо Виванти въ Мантуѣ. Его содержаніе было включено въ послѣдній отдѣлъ статьи: Über die verschiedenen Ansichten inbezug auf die actual-unendlichen Zahlen въ „Bihang till". K. Svenska Vet. Akad. Handling, Bd., 11, № 19.

ально-безконечнаго и боязни безконечнаго (horror infiniti) въ математикѣ, то слѣдуетъ прежде всего обратить вниманіе на противоположность, существующую между актуально-и потенціально-безконечнымъ. Въ то время какъ потенціально-безконечное означаетъ не что иное, какъ неопредѣленную, остающуюся всегда конечной перемѣнную величину, способную принимать значенія, которыя или становятся меньше, чѣмъ любая сколь угодно большая конечная величина, въ это время актуально-безконечное относится къ неизмѣнному въ себѣ постоянному количеству, которое больше, чѣмъ любая конечная величина того же рода. Такъ, напримѣръ, перемѣнная величина x, которая можетъ принимать одно за другимъ различныя конечныя цѣлыя числовыя значенія 1, 2, 3...ν..., представляетъ потенціальное безконечное, между тѣмъ какъ закономѣрно вполнѣ опредѣленное множество (ν) всѣхъ конечныхъ чиселъ ν представляетъ простѣйшій примѣръ актуально-безконечнаго количества.

Существенное различіе, существующее, такимъ образомъ, между обоими понятіями потенціальнаго и актуальнаго безконечнаго замѣчательнымъ образомъ не помѣшало тому, что въ развитіи новѣйшей математики неоднократно совершалось смѣшеніе обѣихъ идей. Такъ, въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ мы имѣемъ передъ собой лишь потенціально-безконечное, ошибочно принимается актуально-безконечное или же, наоборотъ, понятіе, имѣющее смыслъ только съ точки зрѣнія актуальнаго-безконечнаго, разсматривается, какъ потенціально-безконечное.

Оба вида смѣшенія надо разсматривать, какъ ошибки.

Первый видъ смѣшенія встрѣчается, между прочимъ, тамъ, гдѣ, какъ это сдѣлалъ, напримѣръ, Пуассонъ (Traité de Mècanique, 2-e èdit. t. I, p. 14), разсматриваютъ такъ называемые дифференціалы, какъ актуально-безконечно-малыя величины, хотя они имѣютъ значеніе лишь перемѣнныхъ могущихъ стать произвольно малыми вспомогательныхъ величинъ, какъ это ужъ было ясно высказано обоими творцами исчисленія безконечно малыхъ Ньютономъ и Лейбницемъ. Эту ошибку можно считать теперь вполнѣ устраненной благодаря выработкѣ такъ-называемаго метода предѣловъ, въ которой приняли столь славное участіе французскіе математики во главѣ съ великимъ Коши.

Но за то въ настоящее время тѣмъ бо́льшая опасность грозитъ, по моему мнѣнію, со стороны другой ошибки, заключающейся въ томъ, что не хотятъ ничего знать объ актуально-безконечномъ и отрицаютъ его даже тамъ, гдѣ невозможно безъ пользованія имъ дойти до корня вещей.

Здѣсь слѣдуетъ въ первую очередь упомянуть теорію ирраціональныхъ числовыхъ величинъ, обоснованіе которой невозможно, если не привлечь въ какой-нибудь формѣ *а.-б.* Что это привлеченіе можетъ совершаться въ различной формѣ, на это вкратцѣ указано въ § 9 „Основъ общаго ученія о многообразіяхъ". Для этой цѣли я уже ранѣе (Math. Annalen, B. V, p. 123) воспользовался особенными актуально-безконечными множествами раціональныхъ чиселъ, которыя я назвалъ ф у н д а м е н т а л ь н ы м и р я д а м и. Г. Гейне послѣдовалъ въ этомъ пунктѣ за мной (Borchardts Jour., B. 74, p. 172). Изложеніе его отличается отъ моего лишь въ способѣ выраженія, по существу же онъ совершенно согласенъ со мной. Я упомяну здѣсь своеобразную, на мой взглядъ, реакціонную попытку г. Молька (Acta mathem., t. VI) окончательно изгнать ирраціональныя числа изъ области высшей ариѳметики. Г. Кронекеръ идетъ дальше, не желая допускать этихъ чиселъ даже въ теоріи функцій, откуда онъ старается удалить ихъ съ п о м о щ ь ю в е с ь м а и с к у с с т в е н н ы х ъ в с п о м о г ательныхъ теорій. Остается ждать, какой успѣхъ будутъ имѣть эти попытки.

Но можно объяснить неопровержимымъ образомъ наличность актуально-безконечнаго и неизбѣжностью его какъ въ анализѣ, такъ и въ теоріи чиселъ и въ алгебрѣ, исходя также изъ другой точки зрѣнія. Если не подлежитъ никакому сомнѣнію, что мы не можемъ обойтись безъ перемѣнной величины въ смыслѣ потенціальнаго безконечнаго, то отсюда можно вывести также необходимость актуальнаго безконечнаго слѣдующимъ образомъ. Для того, чтобы можно было использовать подобную перемѣнную величину въ какомъ-нибудь математическомъ изслѣдованіи, „область" его измѣненія должна, строго говоря, быть извѣстной напередъ, благодаря нѣкоторому опредѣленію. Но эта „область" не можетъ быть сама, въ свою очередь, чѣмъ-то перемѣннымъ, ибо въ противномъ случаѣ наше изслѣдованіе не имѣло бы подъ собой никакой прочной основы. Слѣдовательно, эта „область" представляетъ нѣкоторое опредѣленное актуально-безконечное множество значеній.

Такимъ образомъ всякое потенціальное безконечное, которое желаютъ использовать строгимъ математическимъ образомъ, предполагаетъ наличность актуально-безконечнаго.

Эти „области измѣненія" представляютъ собственные основы какъ анализа, такъ и ариѳметики; они поэтому заслуживаютъ въ высшей степени того, чтобы самимъ стать предметомъ особыхъ изслѣдованій, какъ это и сдѣлано было мной въ „ученіи о множествахъ" (thèorie des ensembles).

Но если такимъ образомъ актуально-безконечное пріобрѣтаетъ въ математикѣ права гражданства въ формѣ актуально-безконечныхъ множествъ, то становится неизбѣжнымъ выработать также понятіе объ актуально-безконечномъ числѣ путемъ соотвѣтственныхъ абстракцій, подобно тому какъ путемъ абстракцій изъ конечныхъ множествъ были получены понятія о конечныхъ числахъ, составляющихъ матеріалъ традиціонной ариѳметики. Этотъ рядъ мыслей привелъ меня къ ученію о трансфинитныхъ числахъ, начатки котораго имѣются въ „Основахъ общаго ученія о многообразіяхъ".

VIII [1]).

1. Если въ нѣкоторомъ данномъ множествѣ M, которое состоитъ изъ опредѣленныхъ, рѣзко отличающихся другъ отъ друга, конкретныхъ вещей или абстрактныхъ понятій, называемыхъ элементами множества, и которое мыслится, какъ нѣкоторая вещь для себя, мы отвлечемся какъ отъ состава элементовъ, такъ и отъ порядка ихъ слѣдованія другъ за другомъ, то въ насъ возникаетъ опредѣленное общее понятіе (universale, unum versus alia въ значеніи: unum aptum inesse multis) [1]), которое я называю мощностью M, или количественнымъ числомъ,

[1]) Этотъ VIII отдѣлъ даетъ краткій очеркъ основъ теоріи порядковыхъ типовъ. Въ главномъ онъ былъ составленъ уже года три назадъ и ужъ тогда предназначался для другого журнала. Послѣ того, какъ былъ уже набранъ первый листъ, обнаружились къ моему удивленію нѣкоторыя обстоятельства, побудившія меня взять статьи изъ редакціи. Habent sua fata libelli.

[1]) Cp. P. Matth. Liberatore S. J. Inst. philos., 2a ed. novae formae, Prati 1883; vol. 1, „Logica" pars II, 104. Всѣмъ тѣмъ, кто хочетъ составить себѣ правильное представленіе о томистической философіи, я могу рекомендовать это недорогое произведеніе (2 тома—8 фр. 50 сант.), какъ наилучшее, на мой взглядъ, введеніе въ эту систему. Тому же автору принадлежатъ еще: краткое руководство въ одномъ томѣ: Comp. logicae et metaphysicae 2 ed., Napoli, 1869 (4 фр. 30 с.) и другія остроумныя и тщательно обработанныя сочиненія.

присущимъ множеству M. Я условливаюсь обозначать мощность M черезъ $\overline{\overline{M}}$. Двѣ черточки надъ M должны обозначать, что надъ M совершенъ двойной актъ абстракціи какъ въ отношеніи состава элементовъ, такъ и въ отношеніи ихъ взаимнаго порядка. Въ n⁰ 9 мы встрѣтимъ обозначеніе $\overline{M}$ съ одной только черточкой для того uuiversale, которое возникаетъ изъ M, если надъ нимъ произведенъ только первый родъ абстракціи. Элементы сохраняютъ при этомъ и въ понятіи тотъ же взаимный порядокъ, съ какимъ они мыслятся in concreto въ M. Такимъ путемъ получается то, что я называю порядковымъ типомъ M. Но прежде всего мы остановимся на количественныхъ числахъ.

2. Два опредѣленныхъ множества M и M_1 мы называемъ эквивалентными (обозначеніе: $M \sim M_1$) если возможно установить между ними взаимное однозначное полное сопряженіе элемента съ элементомъ (Ср. Crelle J., Bd. 84, p. 242; Math. Ann., Bd. 15, p. 3; Acta math., Bd. 2, p. 311.

Если $M \sim M_1$ и $M_1 \sim M_2$, то также и $M \sim M_2$.

Примѣры: a) Множество цвѣтовъ радуги (красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синій, фіолетовый и множество музыкальныхъ тоновъ (C, D, E, F, G, A, H) представляютъ эквивалентныя множества и входятъ оба въ общее понятіе семь.

b) Множество пальцевъ моихъ обѣихъ рукъ и множество точекъ въ такъ называемомъ ариѳметическомъ треугольникѣ $\therefore\!\cdot\!\therefore$ (Ср. Pascal, Oevres comp., Paris, 1877, Hachette & C-ie, t. III, p. 243; Traité du triangle arithmétique) эквивалентны другъ другу. Имъ присуще количественное число десять.

c) Актуально-безконечное множество (ν) всѣхъ положительныхъ конечныхъ цѣлыхъ чиселъ ν эквивалентно множеству $(\mu+\nu i)$ всѣхъ комплексныхъ цѣлыхъ чиселъ вида $\mu+\nu i$, гдѣ μ и ν получаютъ независимо другъ отъ друга всѣ цѣлочисленныя положительныя значенія. Оба эти множества эквивалентны множеству $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$ всѣхъ положительныхъ вещественныхъ чиселъ $\frac{\mu}{\nu}$, гдѣ μ и ν взаимно простыя числа. Послѣднее тѣмъ болѣе замѣчательно, что такъ называемыя раціональныя точки какой-нибудь прямой, соотвѣтствующія раціональнымъ числамъ, расположены на этой прямой, „повсюду-плотно“ (ср. Math. Ann., Bd. XV, p. 2), между тѣмъ какъ точки прямой, соотвѣтствующія цѣлымъ числамъ ν, слѣдуютъ другъ за другомъ на разстояніяхъ, равныхъ величинѣ положенной въ основу единицы длины. Но и совокупность всѣхъ такъ называемыхъ алгебраическихъ чиселъ имѣетъ, какъ я доказалъ, лишь мощность совокупности (ν), представляющую наименьшую мощность изъ всѣхъ вообще, встрѣчающихся у актуально-безконечныхъ множествъ (ср. Crelle J., Bd. 77, p. 258, Bd. 84, p. 243, 250; Math. Ann., Bd. 15, p. 3 и 4; Bd. 20, p. 114; Acta math., Bd. 2, p. 312, 319).

d). Но за то множество всѣхъ вещественныхъ (т.-е. раціональныхъ и ирраціональныхъ, алгебраическихъ и трансцендентныхъ) числовыхъ величинъ не эквивалентно множеству (ν), какъ я это впервые доказалъ въ т. 77 журнала Крелля, с. 259 и сл., и позже еще разъ въ т. 15 Матем. Анн., ст. 5, и въ Acta mathem., т. II, ст. 306 и слѣд. Но я доказалъ также не менѣе замѣчательную теорему, именно, что такъ-называемыя n-мѣрныя непрерывныя образованія эквивалентны въ смыслѣ богатства точками линейному континууму, т.-е. обладаютъ одинаковой съ нимъ, отличной отъ $(\overline{\overline{\nu}})$, мощностью (ср. Crelle J., Bd. 84, p. 254, f.f., Acta mathem., Bd. 2, p. 314 f.f.).

3. Изъ №№ 1 и 2 можно вывести, что эквивалентныя множества имѣютъ всегда одну и ту же мощность, или количественное число, и что, обратно, множества, имѣющія одно и то же количественное число, эквивалентны между собой. Символически можно формулировать эту двойную теорему слѣдующимъ образомъ, если $M \sim M_1$, то и $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M}}_1$, и обратно.

Достаточно знанія лишь одного закона сопряженія для двухъ множествъ M и M_1, чтобы установить эквивалентность ихъ, но вообще существуютъ многіе, въ общемъ даже безчисленно многіе, законы сопряженія, съ помощью которыхъ можно установить взаимно однозначное полное сопряженіе между двумя эквивалентными множествами.

4. Если какимъ-нибудь путемъ удалось доказать, что два данныхъ множества M и N не эквивалентны: то возможенъ одинъ изъ слѣдующихъ двухъ случаевъ, или можно выдѣлить изъ N такую составную часть N', что $M \sim N'$, или же можно изъ M выдѣлить составную часть M', такъ что $M' \sim N$. Въ первомъ случаѣ говорятъ, что $\overline{\overline{M}}$ меньше, чѣмъ $\overline{\overline{N}}$, во второмъ говорятъ, что $\overline{\overline{M}}$ больше, чѣмъ $\overline{\overline{N}}$.

Я не могу подчеркнуть здѣсь съ достаточной силой того, что указываемая дилемма, лежащая въ основѣ, опредѣленія понятій „больше“ и „меньше“ въ случаѣ количественныхъ чиселъ, зависитъ существеннымъ образомъ отъ сдѣланнаго предположенія, что M и N не обладаютъ равной мощностью. Если же оба множества эквивалентны, то можетъ отличнымъ образомъ случиться, что существуютъ такія составныя части M' и N', для которыхъ какъ $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$, такъ и $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$. Мы имѣемъ также теорему: если M и N два такихъ множества, что изъ нихъ могутъ быть выдѣлены составныя части M' и N', о которыхъ можно показать, что $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N'}}$ и $\overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{N}}$, то M и N суть эквивалентныя множества.

5. Множество, получающееся отъ соединенія двухъ множествъ M и N, обозначается черезъ $M + N$. Впослѣдствіи мы поговоримъ подробнѣе о порядкѣ элементовъ въ этомъ новомъ множествѣ, здѣсь же при разсмотрѣніи количественныхъ чиселъ, вопросъ о порядкѣ ихъ еще не имѣетъ значенія. Если мы имѣемъ два другихъ множества M' и N' такихъ, что $M \sim M'$ и $N \sim N'$, то легко замѣтить, что и $M + N \sim M' + N'$.

На этомъ положеніи основывается опредѣленіе *суммы* двухъ, а слѣдовательно и нѣсколькихъ, *количественныхъ чиселъ*, или *мощностей*: если $\mathfrak{a} = \overline{\overline{M}}$ и $\mathfrak{b} = M$, то подъ $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ понимаютъ то количественное число, которое присуще множеству $M + N$, т.-е. имѣютъ по опредѣленію

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \overline{\overline{M + N}}.$$

Коммутативный законъ $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a})$ и *ассоціативный* законъ $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ не нуждаются, какъ легко убѣдиться, въ *случаѣ количественныхъ чиселъ* ни въ какихъ *пространныхъ доказательствахъ*, ибо количественное число, благодаря акту абстракціи, приводящему къ нему (ср. n^0 1), заранѣе *независимо* отъ порядка его элементовъ.

6. Если M и N—два множества, то подъ $M.N$ понимаютъ третье множество, получающееся изъ M такимъ образомъ, что *на мѣсто каждаго отдѣльнаго элемента* N ставятъ любое множество, эквивалентное множеству M. О порядкѣ элементовъ этого новаго множества будетъ сказано лишь въ n^0 11. Здѣсь по-

камѣстъ это для насъ неважно. Легко показать, что всѣ, получающіяся по означенному методу, множества M.N эквивалентны между собою. На этомъ основываютъ опредѣленіе произведенія двухъ количественныхъ чиселъ. Если $\mathfrak{a}$ представляетъ мощность M, $\mathfrak{b}$—мощность N, то, по опредѣленію, мы имѣемъ:

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \overline{\overline{M \cdot N}}.$$

$\mathfrak{a}$ называется здѣсь множимымъ, $\mathfrak{b}$—множителемъ.

И здѣсь легко показать, что къ мощностямъ, или количественнымъ числамъ примѣнимы коммутативный законъ: $\mathfrak{a}.\mathfrak{b} = \mathfrak{b}.\mathfrak{a}$ и ассоціативный законъ $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$. Точно также сохраняетъ силу и дистрибутивный законъ: $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}.\mathfrak{b} + \mathfrak{a}.\mathfrak{c}$.

7. Все предыдущее относится какъ къ конечнымъ, такъ и къ актуально-безконечнымъ множествамъ и количественнымъ числамъ.

Для конечныхъ множествъ легко дальше доказать, что если изъ трехъ конечныхъ количественныхъ чиселъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ послѣднее равно суммѣ двухъ первыхъ: $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, то никогда $\mathfrak{c}$ не можетъ равняться одному изъ слагаемыхъ $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Но, если отбросить предположеніе о конечности трехъ чиселъ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и c, то это положеніе перестаетъ быть правильнымъ. Въ этомъ и кроется глубочайшее основаніе существеннаго различія между конечными и актуально-безконечными числами и множествами, различіе, которое настолько велико, что мы въ правѣ назвать безконечныя числа совсѣмъ новымъ числовымъ родомъ.

Здѣсь лежитъ великій камень преткновенія, который съ древнихъ временъ не могли сдвинуть философы и математики и который побудилъ большинство изъ нихъ выступить со всѣмъ упорствомъ и упрямствомъ, со всей настойчивостью стараго и, хотя и ложнаго, но тѣмъ не менѣе глубоко укоренившагося, принципа противъ всякихъ попытокъ подвинуть хоть на шагъ впередъ ученіе о безконечномъ. Ученые обманывали себя допущеніемъ, будто является противорѣчіемъ, если безконечному множеству M присуще то же число, что и его составной части M′. Что это допущеніе основывается на ошибочномъ заключеніи, это можно доказать слѣдующимъ образомъ. Если, скажемъ, $M = M' + M''$, то утвержденіе, что множеству M присуще то же самое количественное число, какъ и множеству M′, равносильно по № 1, положенію: множества M и M′ входятъ въ одно общее понятіе, полученное путемъ абстрагированія отъ состава и порядка ихъ элементовъ. Иными словами, оно равносильно утвержденію, что $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{M'}}$. Но съ какихъ поръ стали признавать за противорѣчіе то, что составная часть извѣстнаго цѣлаго входитъ, въ нѣкоторомъ отношеніи, въ одно и то же universale, что и само цѣлое? Можетъ-быть, отвѣтятъ на это, что вообще допустимо, чтобы цѣлое и его составная часть входили въ одно и то же universale, но что здѣсь дѣло идетъ объ особаго рода общихъ понятіяхъ, именно, о числахъ, и что къ числамъ этотъ общій тезисъ непримѣнимъ. Но тогда, думаю я, слѣдовало бы доказать, что числа въ разсматриваемомъ отношеніи составляютъ исключеніе. Возможно, что кое-кто попытается представить подобное доказательство. Но удастся оно лишь тогда, когда станутъ исходить изъ молчаливой предпосылки, что дѣло идетъ о конечныхъ множествахъ. А этой-то предпосылки и слѣдуетъ избѣжать. Но чтобы воспрепятствовать по мѣрѣ силъ своихъ безполезнымъ попыткамъ, которыя должны неизбѣжно сводиться къ вращенію въ порочномъ кругѣ, я попытаюсь еще лучше выяснить суть дѣла и замѣчу слѣдующее: утвержденіе, что множеству M присуще то же самое количественное число, что и его составной части M′, не равносильно утвержденію, что конкретнымъ множествамъ M и M′ присуща одна и та же реальность. Вѣдь, если соотвѣтственныя общія понятія $\overline{\overline{M}}$ и $\overline{\overline{M'}}$ и удовлетворяютъ условію равенства, то это отнюдь не противорѣчитъ исходному факту, что множество M включаетъ въ себѣ какъ реальность M′, такъ и реальность M″. Развѣ какое-нибудь множество и соотвѣтственное ему количественное число не представляютъ совершенно различныхъ вещей? Развѣ первое не противостоитъ намъ въ качествѣ объекта, между тѣмъ какъ послѣднее есть лишь абстрактный образъ его въ нашемъ духѣ? Древнее, столь часто повторяемое, положеніе: „Totan est majus suo parte“ можно примѣнять безъ доказательства лишь къ сущностямъ, лежащимъ въ основѣ цѣлаго и части. Тогда и только тогда оно является непосредственнымъ слѣдствіемъ изъ понятій „totum“ и „pars“. Къ сожалѣнію, эта „аксіома“ примѣнялась несчетное число разъ — безъ всякаго основанія и безъ необходимаго различенія „реальности“ и „величины или числа“ какого-нибудь множества—какъ разъ въ томъ значеніи ея, въ которомъ она вообще ложна, если дѣло идетъ объ актуально-безконечныхъ множествахъ, и въ которомъ она вѣрна для конечныхъ множествъ лишь потому, что мы въ состояніи здѣсь доказать важность ея [1]). Примѣръ пояснитъ все это.

Пусть M будетъ совокупность (ν) всѣхъ конечныхъ чиселъ ν, M'—совокупность (2ν) всѣхъ четныхъ чиселъ 2ν. Здѣсь безусловно вѣрно, что M по своей сущности богаче, чѣмъ M'; вѣдь M содержитъ въ себѣ, помимо четныхъ чиселъ, изъ которыхъ состоитъ M', еще, сверхъ того, всѣ нечетныя числа M''. Но, съ другой стороны, столь же безусловно вѣрно и то, что обоимъ множествамъ M и M' присуще, согласно №№ 2 и 3, одно и то же количественное число.

---

[1]) Въ нижеслѣдующемъ я привожу рядъ авторовъ—число которыхъ ничтожно по сравненію съ имѣющимся въ моемъ распоряженіи матеріаломъ—совершившихъ, какъ мнѣ кажется, указанную ошибку и могущихъ быть названными поэтому противниками актуально-безконечныхъ чиселъ.

Fullerton, The conception of the infinite, Philadelphia, 1887, ch. 2.

Renouvier, Esq. d'une classif. syst. d. doctr. philos., Paris, 1885, t. 1, p. 100.

Moigno, Imposs. d. nombre act. inf., Paris, 1884. Здѣсь приводятся Галилей, Жердиль, Торичелли, Гюльденъ, Кавальери, Ньютонъ, Лейбницъ, въ качествѣ ученыхъ, выставившихъ, такъ называемыя доказательства, противъ актуально-безконечныхъ чиселъ.

Cauchy, Sept. leçons d. phys. gén., Paris, 1868, p. 23.

Salv. Tongiorgi, S. I. Inst. phil. Paris ed. 10a, t. 2, Ont. § 350 ff.

Sanseverino, Él. d. l. phil. chrétienne, Avignon, 1876, t. 2e. Ontol. § 252.

Tilm. Pesch, S. I. Inst., phil. nat., Freiburg, 1880, § 412.

Card. Th. Maria Zigliara, O. P. Summa phyl. Ed. 5a, Vol. 1, Ont. Lib. 2, cap. 3, art. 5, II.

Card. Gerdil, Op. ed et ined., Rom, 1806, t. 4, p. 261; t. 5, p. 1.

Leibnitz, Ed. Erdmann, p. 138, 244, 236.

Goudin, O. P. Phil. juxta D. Thomae dogm., Paris, 1851, t. 2, p. 189.

Bened. Pererius, S. I., De comm. omn. rer. nat. princ. et affect. Lugduni, 1585, lib. 10, cap. 9.

Оба утвержденія истинны и ни одно изъ нихъ не мѣшаетъ другому, если только помнить различіе между *реальностью* и *числомъ*. Слѣдовательно, надо сказать: *множество М обладаетъ большей реальностью, чѣмъ М′, ибо оно заключаетъ въ себѣ, въ качествѣ составныхъ частей, М′ и, сверхъ того, М″; но присущія обоимъ множествамъ М и М′ количественныя числа равны между собою.* Когда, наконецъ, признаютъ всѣ мыслители (разумѣется, не къ своей невыгодѣ) эти столь простыя и ясныя истины?

8. Послѣ разсужденій и разъясненій предыдущихъ параграфовъ невозможно будетъ видѣть что-нибудь нелѣпое въ положеніяхъ, вродѣ:

$$\alpha + \bar{\nu} = \alpha;\ \alpha \cdot \bar{\nu} = \alpha;\ \alpha^{\bar{\nu}} = \alpha$$

(гдѣ $\bar{\nu}$ имѣетъ значеніе какого-нибудь *конечнаго*, α — какого-нибудь *трансфинитнаго количественнаго числа*), если противъ нихъ нельзя выставить ничего другого, какъ то, что они не совпадаютъ съ традиціонными положеніями для *конечныхъ* чиселъ. Вѣдь, какъ выше сказано, въ случаѣ нашихъ *трансфинитныхъ* чиселъ дѣло идетъ о совсѣмъ новомъ *родѣ чиселъ*, свойства котораго должно изслѣдовать, а не произвольно изготовлять по какому-то составленному изъ предразсудковъ рецепту. Указанныя положенія, какъ и всѣ прочія, привести которыя я не могу въ этомъ короткомъ очеркѣ, имѣютъ подъ собой надежный фундаментъ *благодаря логической силѣ аргументовъ, которые, исходя изъ данныхъ раньше—непроизвольныхъ или искусственныхъ, а возникшихъ изъ источника закономѣрной абстракціи — опредѣленій, достигаютъ съ помощью силлогизмовъ своей цѣли.* При этомъ надлежитъ развить дальше тѣ методы, которыя были введены въ Crelle J., Bd. 84, p. 253, Acta meth., Bd. 4, p. 381, Bd. 7, p. 105, Math. Ann., Bd. 23, p. 453.

Чтобы перенести съ увѣренностью ученіе о количественныхъ числахъ, для котораго я далъ опредѣленіе основныхъ понятій въ первыхъ восьми номерахъ этого VIII отдѣла, въ область трансфинитнаго и развить его здѣсь строгимъ образомъ, приходится—какъ я это указалъ въ отдѣлѣ I—привлечь къ разсмотрѣнію трансфинитныя порядковыя числа, являющіяся, въ свою очередь, лишь частными формами порядковыхъ типовъ или идеальныхъ чиселъ (ἀριθμοὶ νοητοὶ или εἰδητικοί). Трансфинитныя порядковыя числа суть не что иное, какъ типы тѣхъ безконечныхъ, однократно упорядоченныхъ множествъ, которыя я назвалъ вполнѣ упорядоченными множествами (см. Grundlagen d. allg. Mannigfaltigkeitslehre, p. 4). Поэтому въ дальнѣйшихъ номерахъ этого VIII отдѣла я разовью сперва принципы общей теоріи порядковыхъ типовъ. Лишь позже въ какой-нибудь статьѣ я дамъ основы частной теоріи порядковыхъ чиселъ, вмѣстѣ съ ихъ примѣненіемъ къ ученію о количественныхъ числахъ.

---

9. Вообразимъ себѣ, какъ въ № 1 этого отдѣла, нѣкоторое опредѣленное множество M, состоящее изъ данныхъ, рѣзко отличающихся другъ отъ друга, элементовъ, которые могутъ быть конкретными вещами или абстрактными понятіями (причемъ, однако, послѣднія разсматриваются, подобно первымъ, въ смыслѣ противостоящихъ намъ объектовъ). Пусть эти элементы будутъ упорядочены въ n [1]) независимыхъ

[1]) n имѣетъ здѣсь значеніе конечнаго количественнаго числа, включая и $n = 1$.

другъ отъ друга отношеніяхъ, которыя я назову **направленіями** (Richtungen) (понимая это слово не только въ геометрическомъ смыслѣ, но и болѣе общимъ образомъ). Эти n направленій можно различать, какъ 1-ое, 2-ое . . . ν-ое, . . . n-ое направленіе. Подобное множество M мы назовемъ n — **кратно упорядоченнымъ множествомъ**.

Для болѣе точнаго уразумѣнія этого понятія мы укажемъ слѣдующія свойства и признаки его.

Если E и E′ два **какихъ-нибудь** элемента M, то между ними существуетъ **въ любомъ** изъ n **направленій** опредѣленное порядковое (Rang) отношеніе, выражаемое словами: **низшій, равный и высшій** (отношеніе πρότερον καὶ ὕστερον κατὰ τάξιν). Если для обозначенія этихъ трехъ порядковыхъ отношеній мы воспользуемся символами $<, =, >$, служащими обыкновенно для обозначенія понятій: меньше, равно и больше, то, — предполагая, что ν обозначаетъ одно изъ чиселъ 1, 2, 3 . . ., n—E будетъ въ ν-омъ направленіи или $<$, или $=$, или $>$E′. Для **различныхъ** направленій порядковое отношеніе E и E′ можетъ быть одинаковымъ или разнымъ.

Если E, E′ и E″ представляютъ три **какихъ-нибудь** элемента M и если между ними существуютъ въ ν-омъ направленіи отношенія:

$$E \leqq E' \text{ и } E' \leqq E'',$$

то всегда существуетъ также въ **томъ же** ν-омъ направленіи отношеніе:

$$E \leqq E'',$$

причемъ знакъ $=$ имѣетъ здѣсь мѣсто **тогда, и только тогда**, когда она находится въ **обоихъ** предыдущихъ отношеніяхъ.

Таковы тѣ предпосылки, при наличности которыхъ я называю данное множество M n—кратно упорядоченнымъ множествомъ относительно этихъ n порядковыхъ направленій, причемъ послѣднія разсматриваются въ опредѣленной послѣдовательности, какъ 1-ое, 2-ое,... n-ое направленіе.

Въ поясненіе я приведу нѣсколько примѣровъ многократно упорядоченныхъ множествъ, у которыхъ іерархическій порядокъ элементовъ по нѣсколькимъ направленіямъ данъ естественно или искусственно.

Первый примѣръ. Пусть въ пространствѣ расположены какимъ-нибудь образомъ m опредѣленныхъ точекъ. Если мы отнесемъ ихъ по обычному способу къ трехосной ортогональной координатной системѣ, если мы примемъ далѣе ось x за первое порядковое направленіе, ось y—за второе, и ось z—за третье, и если, соотвѣтственно съ этимъ, мы опредѣлимъ порядковое отношеніе двухъ какихъ-нибудь точекъ E и E′ по 1-ому, 2-ому и 3-ему направленію, черезъ отношеніе величины ихъ координатъ x и x', y и y', z и z', то такимъ путемъ мы превратимъ нашу, состоящую изъ m точекъ, систему, въ трикратно упорядоченное множество. При этомъ способѣ разсмотрѣнія насъ вовсе не интересуютъ разстояніе и прочія геометрическія отношенія m точекъ; существенное значеніе здѣсь имѣетъ лишь взаимный іерархическій порядокъ m точекъ по тремъ порядковымъ направленіямъ.

Второй примѣръ. Такимъ же точно образомъ можно разсматривать m точекъ въ какой-нибудь плоскости—положивъ въ основу двухосную ортогональную координатную систему—какъ двукратно упорядоченное множество, при чемъ опять-таки оставляются въ сторонѣ разстоянія и прочія геометрическія отношенія m точекъ.

Третій примѣръ. Возьмемъ какую-нибудь музыкальную вещь, скажемъ, простую мелодію или сложное музыкальное произведеніе, напримѣръ, симфонію или ораторію. Эта музыкальная вещь состоитъ изъ опредѣленнаго числа m различныхъ звуковъ, упорядоченныхъ по четыремъ независимымъ другъ отъ друга направленіямъ.

За первое направленіе мы примемъ послѣдовательность звуковъ во времени. Въ этомъ отношеніи два звука E и E′ занимаютъ одно и то же мѣсто по порядку, если они произносятся одновременно, если они—какъ говорятъ—принадлежатъ къ какому-нибудь аккорду. Въ противномъ случаѣ E занимаетъ высшее или низшее мѣсто, чѣмъ E′, въ зависимости отъ того, наступаетъ ли E раньше или позже, чѣмъ E′.

Второе направленіе опредѣляется продолжительностью каждаго звука. Два звука E и E′ занимаютъ въ этомъ отношеніи одинаковое по порядку мѣсто, если они одной и той же продолжительности; наоборотъ, мѣсто E ниже или выше, чѣмъ мѣсто E′, въ зависимости отъ того, меньше или больше продолжительность E, чѣмъ у E′.

Третье направленіе опредѣляется высотой звуковъ. Здѣсь E и E′ занимаетъ одно и то же мѣсто по порядку, если они одинаковой высоты; наоборотъ, мѣсто E ниже или выше, чѣмъ мѣсто E′, въ зависимости отъ того, ниже ли или выше звукъ E, чѣмъ E′.

Наконецъ, четвертое направленіе опредѣляется интенсивностью звуковъ. Разсматриваемая такимъ образомъ каждая музыкальная вещь представляетъ четырекратно упорядоченное множество.

Четвертый примѣръ. Возьмемъ какую-нибудь картину и станемъ разсматривать въ ней m опредѣленныхъ точекъ въ такомъ количествѣ и такихъ, что на разстояніи, съ котораго разсматривается картина, онѣ производятъ впечатлѣніе непрерывнаго цѣлаго. Если мы отнесемъ картину къ горизонтальному и вертикальному направленію, какъ къ двухосной координатной системѣ, то ее можно будетъ разсматривать, какъ четырекратно упорядоченное множество согласно слѣдующимъ точкамъ зрѣнія.

Абсциссы пусть служатъ для опредѣленія перваго, а ординаты—для опредѣленія второго направленія. За третье направленіе мы возьмемъ цвѣтъ точекъ, такъ что двѣ точки E и E′ занимаютъ въ этомъ направленіи одно и то же мѣсто по порядку если онѣ одного и того же цвѣта. Напротивъ, E занимаетъ низшее или высшее мѣсто, чѣмъ E′, въ зависимости отъ того, соотвѣтствуетъ ли цвѣту E меньшая или бо́льшая длина волны, чѣмъ цвѣту E′. Наконецъ, пусть интенсивность цвѣта m точекъ опредѣляетъ четвертое направленіе.

Въ этихъ четырехъ примѣрахъ мы разсматривали конечныя, т.-е. состоящія изъ конечнаго числа элементовъ, многократно упорядоченныя множества. Но наше понятіе относится и ко множествамъ съ безконечнымъ числомъ элементовъ. Однако, дѣло тутъ всегда идетъ лишь объ актуально-безконечномъ, такъ какъ для насъ имѣютъ интересъ лишь такія множества, которыя опредѣлены въ себѣ и всѣ элементы которыхъ должно представлять себѣ, какъ уже существующія вмѣстѣ. Потенціальное безконечное для этого непригодно, такъ какъ оно, согласно своему понятію, можетъ быть относимо лишь къ неопредѣленнымъ и измѣняющимся вещамъ.

Такъ, напримѣръ, мы можемъ разсматривать всѣ тѣ точки пространства, у которыхъ всѣ три координаты — беря опять-таки трехосную ортогональную координатную систему—находятся въ раціональномъ отношеніи къ единицѣ длины. Точки эти образуютъ, если пользоваться, какъ въ первомъ примѣрѣ, величиной ихъ координатъ для опредѣленія ихъ іерархическаго порядка, опредѣленное трикратно упорядоченное, актуально-безконечное точечное множество.

Послѣ этихъ разъясненій я прямо перехожу къ объясненію того, что я называю порядковымъ типомъ или идеальнымъ числомъ упорядоченнаго множества.

Пусть M будетъ какое-нибудь опредѣленное n-кратно упорядоченное множество, состоящее изъ конечнаго или актуально-безконечнаго числа элементовъ E, E′, E″... Если мы отвлечемся отъ состава элементовъ множества, сохранивъ ихъ іерархическій порядокъ по n различнымъ направленіямъ, то въ насъ возникаетъ нѣкоторый интеллектуальный образъ, нѣкоторое общее понятіе (universale), которое я называю n-кратнымъ порядковымъ типомъ, присущимъ множеству M, или также идеальнымъ числомъ, соотвѣтствующимъ множеству M, и которое я обозначаю черезъ $\overline{M}$.

Слѣдовательно, каждой системѣ точекъ въ пространствѣ (въ смыслѣ перваго примѣра) соотвѣтствуетъ трикратный, каждой системѣ точекъ въ плоскости (въ смыслѣ второго примѣра)—двукратный, каждому множеству точекъ на прямой линіи—однократный опредѣленный порядковый типъ, между тѣмъ какъ музыкальной вещи (сообразно нашему третьему примѣру) и картинѣ (согласно нашему четвертому примѣру) соотвѣтствуютъ опредѣленные четырекратные порядковые типы. Если такимъ образомъ мыслимо, что въ основѣ музыкальной вещи и картины лежитъ случайно одинъ и тотъ же порядковый типъ, то отсюда видно, какъ при извѣстныхъ обстоятельствахъ самыя разнородныя вещи могутъ быть соединены между собой общей связью идеальныхъ чиселъ.

10. Разсмотримъ теперь внимательнѣе понятіе порядковаго типа $\overline{M}$, полученное путемъ вышеописаннаго процесса абстракціи изъ упорядоченнаго множества M.

Отдѣльнымъ элементамъ E, E', E''... множества M соотвѣтствуютъ въ его порядковомъ типѣ $\overline{M}$ однѣ только единицы (Einsen) $e=1$, $e'=1$, $e''=1\ldots$, которыя, какъ таковыя, разумѣется, всѣ равны, но отличаются другъ отъ друга своимъ положеніемъ внутри порядковаго типа $\overline{M}$. Между ними существуетъ тотъ же іерархическій порядокъ, что и между элементами множества M.

Мы должны поэтому представлять себѣ подъ n-кратнымъ порядковымъ типомъ идеальный образецъ (Paradigma) n-кратно упорядоченнаго множества, какъ бы n-мѣрное цѣлое реальное число, т.-е. нѣкоторое логическое, органически-единое соединеніе единицъ $e=1$, $e'=1$, $e''=1\ldots$, упорядоченныхъ въ n различныхъ и независимыхъ другъ отъ друга отношеніяхъ, которыя и здѣсь слѣдуетъ называть направленіями. Если мы возьмемъ двѣ какихъ-нибудь изъ этихъ единицъ e и e', то, по ν-ому направленію (для $\nu=1, 2\ldots n$), e или занимаетъ то же мѣсто, что̀ и e', или же его мѣсто ниже, или оно выше, чѣмъ мѣсто e'. Порядковое отношеніе однѣхъ и тѣхъ же двухъ единицъ e и e', разсматриваемое по ν-му или по μ-му направленію, можетъ быть, одинаковымъ или разнымъ. Если e, e', e'' представляютъ три какихъ-нибудь изъ этихъ единицъ и если мы имѣемъ по ν-му направленію

$$e \leq e' \text{ и } e'' \leq e'',$$

то по тому-же ν-му направленію

$$e \leq e'',$$

гдѣ знакъ = имѣетъ мѣсто тогда, и только тогда, когда знакъ = имѣетъ мѣсто въ обоихъ предыдущихъ отношеніяхъ [1]).

Я называю порядковый типъ чистымъ порядковымъ типомъ, когда любыя двѣ изъ его единицъ e и e' занимаютъ, по крайней мѣрѣ, въ одномъ изъ n направленій различное по порядку мѣсто.

Въ противномъ случаѣ я называю его смѣшаннымъ порядковымъ типомъ. Въ этомъ случаѣ единицы соединяются въ опредѣленныя группы, такъ что единицы, принадлежащія къ одной и той же группы занимаютъ одинаковое по порядку мѣсто по всѣмъ n направленіямъ и поэтому собираются въ одно опредѣленное количественное число, между тѣмъ какъ единицы, принадлежащія къ различнымъ группамъ, занимаютъ различное по порядку мѣсто, по крайней мѣрѣ, въ одномъ изъ n направленій.

Слѣдовательно, каждый смѣшанный порядковый типъ получается изъ опредѣленнаго чистаго порядковаго типа такимъ образомъ, что въ послѣднемъ подставляютъ вмѣсто единицъ извѣстныя количественныя числа.

Теперь возникаетъ вопросъ, когда два различныхъ n-кратно упорядоченныхъ множества M и N обладаютъ однимъ и тѣмъ же порядковымъ типомъ и когда они имъ не обладаютъ. Для отвѣта на этотъ вопросъ мы воспользуемся понятіемъ подобія упорядоченныхъ множествъ.

---

[1]) Я напомню, что здѣсь знаки $<, =$ и $>$ употребляются для отношеній порядка.

Два n-кратно упорядоченныхъ множества M и N называются подобными, когда возможно установить между ними взаимно однозначное и полное сопряженіе элемента съ элементомъ такого рода, что если E и E′ представляютъ два какихъ-нибудь элемента M, F и F′ — соотвѣтствующіе имъ элементы N, то для $\nu = 1, 2 \ldots n$ порядковое отношеніе E и E′ по ν-му направленію внутри множества M то же самое, что и порядковое отношеніе F и F′ по ν-му направленію внутри множества N. Такого рода сопряженіе двухъ подобныхъ другъ другу множествъ мы будемъ называть отображеніемъ одного изъ нихъ на другое.

Подобіе двухъ множествъ M и N выражается слѣдующей формулой:

$$M \simeq N.$$

На поставленный выше вопросъ мы можемъ отвѣтить слѣдующимъ положеніемъ:

Два n-кратно упорядоченныхъ множества M и N обладаютъ однимъ и тѣмъ же порядковымъ типомъ тогда, и только тогда, когда они подобны. Символически: если $M \simeq N$, то $\overline{M} = \overline{N}$ и, обратно, если $\overline{M} = \overline{N}$, то $M \simeq N$.

Обѣ части этого двойного положенія получаются легко, если имѣть въ виду понятія порядковаго типа и подобія упорядоченныхъ множествъ, и доказывается аналогичнымъ образомъ, какъ мы доказали въ № 3 этого VIII отдѣла, что два множества обладаютъ одинаковымъ количественнымъ числомъ тогда, и только тогда, когда они эквивалентны.

Слѣдовательно, порядковый типъ какого-нибудь даннаго n-кратно упорядоченнаго множества M есть то общее понятіе, въ которое входятъ множества M и всѣ подобныя ему множества, но которое не охватываетъ никакихъ иныхъ вещей, такъ что его объемъ съ точностью опредѣляется съ помощью M и подобныхъ ему множествъ.

Изъ подобія двухъ множествъ M и N вытекаетъ, какъ легко видѣть (Ср. $n^0 2$), и ихъ эквивалентность, между тѣмъ какъ, обратно, эквивалентныя множества не должны быть непремѣнно подобными.

Мы можемъ поэтому сказать:

Если два упорядоченныхъ множества M и N обладаютъ однимъ и тѣмъ же порядковымъ типомъ, то имъ присуще всегда одно и то же количественное число. Символически: если $\overline{M} = \overline{N}$, то также $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Поэтому количественное число какого-нибудь упорядоченнаго множества M есть всегда также количественное число его порядковаго типа $\overline{M}$ и получается изъ послѣдняго путемъ абстрагированія отъ особеннаго іерархическаго порядка его единицъ. Если α есть знакъ для порядковаго типа $\overline{M}$, то α есть знакъ для количественнаго числа $\overline{M}$. Въ этомъ смыслѣ мы употребляли въ №№ 1—8 этого отдѣла знаки $1, 2, 3 \ldots \nu \ldots$ для конечныхъ порядковыхъ чиселъ, а знаки $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \ldots \overline{\nu} \ldots$ для конечныхъ количественныхъ чиселъ.

Въ зависимости отъ того, конечно или трансфинитно количественное число какого-нибудь множества, мы называемъ и само множество или его порядковый типъ конечнымъ или трансфинитнымъ.

У двухъ трансфинитныхъ n-кратно упорядоченныхъ множествъ можетъ случиться, если они подобны, что существуетъ не одно только отображеніе одного на другое, но много такихъ отображеній, даже безконечно-много ихъ. Въ этихъ случаяхъ каждое множество соотвѣтствующаго порядковаго типа можетъ быть отображено само на себя многими способами. О соотвѣтственномъ порядковомъ типѣ мы можемъ также сказать, что онъ подобенъ самому себѣ многими способами. Если мы имѣемъ дѣло съ конечными n-кратно упорядоченными множествами чистаго порядковаго типа, то для любыхъ двухъ подобныхъ множествъ существуетъ всегда лишь одно единственное отображеніе. Но это свойство не ограничивается одними конечными множествами. Существуютъ также классы трансфинитныхъ упорядоченныхъ множествъ, которые допускаютъ лишь одно отображеніе двухъ подобныхъ множествъ. Сюда относятся, напримѣръ, всѣ тѣ однократно упорядоченныя множества, которыя я назвалъ вполнѣ упорядоченными множествами[1]).

11. n-кратный типъ α составляется, какъ мы видѣли въ № 10, изъ извѣстныхъ единицъ: e, e', e'' . . . , которыя находятся въ опредѣленныхъ отношеніяхъ порядка другъ къ другу по n направленіямъ. Если взять не всѣ эти единицы, но лишь извѣстную часть ихъ, то послѣдняя опредѣляетъ для себя въ разсматриваемомъ іерархическомъ порядкѣ также нѣкоторый типъ γ, который мы можемъ разсматривать, какъ часть α (разумѣется, лишь въ виртуальномъ смыслѣ).

Такимъ образомъ, каждый типъ α содержитъ въ себѣ, какъ виртуальныя части, другіе типы γ, γ', γ'' . . . , которые лежатъ отчасти внѣ другъ друга,

[1]) Ср. Grundlagen стр. 4.

отчасти налегаютъ другъ на друга. Многообразіе взаимоотношеній между цѣлымъ и частями у типовъ такъ велико, что представляется полезнымъ ограничиться на первыхъ порахъ разсмотрѣніемъ простѣйшихъ отношеній. Они связаны съ дѣйствіями сложенія и умноженія двухъ n-кратныхъ типовъ α и β; эти дѣйствія я теперь объясню съ надлежащей подробностью.

a) Опредѣленіе $\alpha+\beta$. Вообразимъ себѣ два множества M и N, которымъ соотвѣтствуютъ типы $\overline{M}=\alpha$, $\overline{N}=\beta$. Составимъ изъ нихъ новое упорядоченное множество, которое мы обозначимъ черезъ $M+N$, установивъ при этомъ слѣдующее правило для іерархическаго порядка элементовъ: элементы M сохраняютъ внутри $M+N$ между собой тотъ же іерархическій порядокъ по всѣмъ n направленіямъ, какой они имѣли въ M. Точно такъ же элементы N сохраняютъ внутри $M+N$ между собой тотъ же іерархическій порядокъ по всѣмъ n направленіямъ, какой они имѣли въ N. Наконецъ, всѣ элементы N занимаютъ въ $M+N$ въ каждомъ изъ n направленій высшее по порядку мѣсто, чѣмъ всѣ элементы M.

Всѣ множества $M+N$, которыя удовлетворяютъ этимъ требованіямъ, представляютъ, очевидно, подобныя другъ другу n-кратно упорядоченныя множества и опредѣляютъ тотъ типъ, который мы будемъ разсматривать, какъ сумму $\alpha+\beta$. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, слѣдующее дефиниціонное равенство:

$$\alpha+\beta=\overline{M+N};$$

здѣсь α называется первымъ членомъ суммы (augendus), β—вторымъ членомъ (addendus).

Отсюда легко доказать примѣнимость ассоціативнаго закона:

$$\alpha+(\beta+\nu)=(\alpha+\beta)+\nu.$$

Наоборотъ, **коммутативный** законъ не имѣетъ здѣсь, вообще говоря, силы. Если не говорить объ отдѣльныхъ исключеніяхъ, то $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ представляютъ различные типы.

Замѣтимъ еще, что количественное число $\alpha+\beta$ равно суммѣ количественныхъ чиселъ α и β (ср. № 5). Символически

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}.$$

b) Опредѣленіе $\alpha.\beta$. Положимъ въ основу множество N типа β, такъ что $\overline{N}=\beta$, и обозначимъ элементы, изъ которыхъ состоитъ N, черезъ F_1, $F_2, \ldots F_\lambda \ldots$

Пусть, далѣе, $M_1, M_2, \ldots M_\lambda \ldots$ всѣ представляютъ множества типа α, такъ что

$$\overline{M_1}=\overline{M_2}=\ldots\overline{M_\lambda}=\ldots=\alpha.$$

Вообразимъ себѣ, что эти, подобныя другъ другу, множества отображены другъ на друга; пусть:

$E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots E_{1,\mu} \ldots$ будутъ элементами M_1

$E_{2,1}, E_{2,2}, \ldots E_{2,\mu} \ldots$ будутъ элементами M_2

. . . .

$E_{\lambda,1}, E_{\lambda,2}, \ldots E_{\lambda,\mu} \ldots$ будутъ элементами M_λ

причемъ пусть $E_{1,\mu}, E_{2,\mu}, \ldots E_{\lambda,\mu} \ldots$ будутъ соотвѣтствующими другъ другу элементами $M_1, M_2 \ldots M_\lambda \ldots$ у положенныхъ въ основу отображеній.

Образуемъ изъ N новое множество, которое я обозначу черезъ $M.N$, такимъ образомъ, что я подставлю въ N на мѣсто элементовъ F_1, $F_2 \ldots F_\lambda \ldots$ соотвѣтственно **множества** $M_1, M_2 \ldots M_\lambda \ldots$, причемъ іерархическій порядокъ будетъ подчиненъ слѣдующимъ правиламъ: всѣ элементы $E_{\lambda,\mu}$, $E_{\lambda,\mu'}$ одного и того же множества M_λ сохраняютъ внутри $M.N$ между собою тотъ же іерархическій порядокъ по всѣмъ n направленіямъ, какой они имѣли въ M_λ. Что же касается двухъ элементовъ: $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu}'$, принадлежащихъ къ двумъ различнымъ множествамъ $M_\varkappa$ и M_λ, то здѣсь, наоборотъ, слѣдуетъ различать два случая: 1) если $F_\varkappa$ и F_λ занимаютъ внутри N различное по порядку мѣсто по ν-му направленію, то отношеніе по порядку между $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu}'$ внутри $M \,.\, N$ по ν-му направленію будетъ то же самое, что отношеніе между $F_\varkappa$ и F_λ внутри N по ν-му направленію: 2) если $F_\varkappa$ и F_λ занимаютъ внутри N одинаковое по порядку мѣсто по ν-му направленію, то отношеніе по порядку между $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu}'$ внутри $M \,.\, N$ по ν-му направленію будетъ то же самое, что и отношеніе между $E_{\varkappa,\mu}$ и $E_{\varkappa,\mu}'$ внутри $M_\varkappa$ или что отношеніе между $E_{\lambda,\mu}$ и $E_{\lambda,\mu}'$ внутри M_λ по ν-му направленію (ибо въ виду отображенія $M_\varkappa$ на M_λ оба послѣднихъ отношенія означаютъ одно и то же).

Легко убѣдиться, что всѣ составленныя по этому правилу n-кратно упорядоченныя множества $M \,.\, N$ подобны между собою. Это вѣрно въ частности и въ томъ случаѣ, когда мы возьмемъ вмѣсто положенныхъ въ основу отображеній множествъ $M_1, M_2 \,.\,.\,.\, M_\lambda \,.\,.\,.$ другія отображенія ихъ, буде таковыя имѣются.

Такимъ образомъ, вмѣстѣ съ множествомъ $M \,.\, N$ данъ опредѣленный типъ, и этотъ-то типъ и называется произведеніемъ изъ множимаго α на множитель β. Мы имѣемъ, такимъ образомъ, слѣдующее опредѣленіе:

$$\alpha \,.\, \beta = \overline{M \,.\, N}.$$

Здѣсь также можно доказать ассоціативный законъ

$$\alpha \,.\, (\beta + \gamma) = (\alpha \,.\, \beta) \,.\, \gamma,$$

между тѣмъ какъ $\alpha . \beta$ вообще отлично отъ $\beta . \alpha$.

Мы имѣемъ также дистрибутивный законъ:

$$\alpha . (\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \alpha . \gamma,$$

гдѣ α—множимое.

Далѣе легко замѣтить—имѣя въ виду № 6,—что количественное число произведенія двухъ типовъ равно произведенію изъ количественныхъ чиселъ обоихъ сомножителей. Символически:

$$\overline{\alpha . \beta} = \overline{\alpha} . \overline{\beta}.$$

Если какой-нибудь типъ π представимъ въ видѣ произведенія двухъ типовъ α и β только такъ, что множитель β равенъ самому типу π или единицѣ въ n-краткой порядковой системѣ, то мы назовемъ π первообразнымъ типомъ (Primtypus).

12. Съ даннымъ n-кратнымъ типомъ α тѣсно связаны нѣкоторые другіе типы, которые я называю типами, сопряженными съ α.

Можно измѣнить іерархическій порядокъ, свойственный типу α, такимъ образомъ, что всѣ порядковыя отношенія единицъ: $e, e', e'' \ldots$ по отношенію къ μ-му и ν-му направленію будутъ замѣщены другъ другомъ, сохраняясь, однако, по всѣмъ другимъ направленіямъ.

Согласно этому, двѣ единицы e и e' имѣютъ въ преобразованномъ типѣ тѣ же самыя порядковыя отношенія по μ-му и ν-му направленію, какое онѣ имѣютъ въ α по ν-му и μ-му направленію, между тѣмъ какъ по остальнымъ $n-2$ направленіямъ не происходитъ никакого измѣненія въ порядкѣ расположенія единицъ. Это преобразованіе мы называемъ преобразованіемъ замѣщенія (Verteuschung transformation) по отношенію къ μ-му и ν-му направленію.

Подобныхъ преобразованій замѣщенія имѣется $\frac{n(n-1)}{2}$. Если примѣнить ихъ повторнымъ образомъ, то мы получимъ всего, считая и типъ α, $\Pi_n = 1 . 2 . 3 . . n$ вообще различныхъ сопряженныхъ типовъ.

Но можно получить изъ α новый вообще типъ еще такимъ путемъ, что обращаютъ всѣ отношенія порядка по ν-му направленію, сохраняя ихъ по другимъ направленіямъ. Въ этомъ случаѣ двѣ единицы e и e' имѣютъ въ преобразованномъ типѣ по ν-му направленію порядковое отношеніе, противоположное тому, которое онѣ имѣли по тому же ν-му направленію въ α. Если единицамъ e и e' свойственъ въ α одинъ и тотъ же порядокъ по ν-му направленію, то, разумѣется, онъ сохраняется при преобразованіи. По всѣмъ прочимъ направленіямъ порядковыя отношенія e и e' въ обоихъ типахъ одни и тѣ же. Это преобразованіе мы называемъ преобразованіемъ обращенія (Umkehrungstransformation) по отношенію къ ν-му направленію. Подобныхъ преобразованій обращенія имѣется n. Если примѣнить ихъ повторнымъ образомъ, то мы получимъ всего, считая и типъ α, 2^n различныхъ сопряженныхъ типовъ.

Если мы соединимъ произвольнымъ образомъ преобразованія замѣщенія и преобразованія обращенія, то мы получимъ всего, считая и α, $2^n . \Pi_n$ вообще различныхъ сопряженныхъ типовъ. Въ частныхъ случаяхъ они сводятся къ меньшему числу, а при нѣкоторыхъ обстоятельствахъ они даже всѣ равны.

13. Въ своихъ дальнѣйшихъ разсужденіяхъ мы ограничимся на первыхъ порахъ конечными n-кратными типами, т.-е. такими типами, у которыхъ соотвѣтственное количественное число m конечно.

Чистые однократные типы ($n=1$) совпадаютъ здѣсь съ конечными порядковыми числами: 1, 2, 3 . . ., потому что конечныя, однократно упорядоченныя множества чистаго типа представляютъ въ то же время всегда вполнѣ упорядоченныя множества (объ этомъ понятіи см. „Grundlagen", стр. 4), типы которыхъ я вообще называю порядковыми числами. Для каждаго конечнаго количественнаго числа m существуетъ лишь одинъ единственный чистый однократный типъ, т.-е. лишь одно порядковое число. Это тѣсно связано съ доказаннымъ въ № 7 положеніемъ, согласно которому конечное множество никогда не эквивалентно одной изъ своихъ составныхъ частей.

Число всѣхъ однократныхъ типовъ ($n=1$), т.-е. чистыхъ и смѣшанныхъ, даннаго количественнаго числа m равно, наоборотъ, какъ легко убѣдиться, 2^{m-1}.

Разсмотримъ теперь внимательнѣе двукратные типы ($n=2$) конечнаго количественнаго числа m.

Подобный типъ α состоитъ (ср. № 10) изъ m единицъ, которыя имѣютъ опредѣленный іерархическій порядокъ по двумъ независимымъ другъ отъ друга направленіямъ.

Пусть эти m единицъ имѣютъ всего s различныхъ порядковыхъ мѣстъ (Rangstufen) по первому направленію и пусть t будетъ число различныхъ порядковыхъ мѣстъ по второму направленію.

Различныя порядковыя мѣста перваго направленія мы будемъ отличать другъ отъ друга, какъ 1-ое, 2-ое . . . s-ое порядковое мѣсто, такимъ образомъ, что 1-ое порядковое мѣсто будетъ охватывать всѣ тѣ единицы α, которыя занимаютъ низшее мѣсто по первому направленію; второе будетъ заключать всѣ тѣ единицы, которыя занимаютъ ближайшее высшее мѣсто по первому направленію и т. д. Пусть g_1 означаетъ число различныхъ единицъ, занимающихъ первое по порядку мѣсто по первому направленію, g_2 пусть означаетъ число единицъ второго порядка и т. д., g_s—число единицъ s-го порядка по отношенію къ первому направленію.

Вполнѣ аналогичнымъ образомъ мы отличимъ другъ отъ друга 1-ое, 2-ое . . . t-ое порядковое мѣсто второго направленія и обозначимъ черезъ h_1, h_2, . . . , h^t число единицъ, занимающихъ соотвѣтственно 1-ое, 2-ое . . . t-ое по порядку мѣсто по второму направленію.

Такимъ образомъ, каждому типу α соотвѣтствуютъ извѣстныя положительныя числа s, t, g_1, g_2, . . . , g^s, h_1, h_2, . . . , h_t. По своему значенію они всѣ $\leq m$ и мы имѣемъ всегда, что:

$$g_1+g_2+\ldots+g_s=h_1+h_2+\ldots+h_t=m \ldots (1).$$

Для полнаго опредѣленія двукратнаго типа α мы введемъ систему изъ $s \cdot t$ величинъ $k_{\mu,\nu}$, гдѣ индексъ имѣетъ значенія 1, 2, 3 . . . s, индексъ ν-значенія 1, 2, 3 . . . t; $k_{\mu,\nu}$ представляетъ число тѣхъ единицъ въ α, которыя занимаютъ μ-ое по порядку мѣсто по первому направленію и ν-ое по второму. Если въ α нѣтъ подобныхъ единицъ, то $k_{\mu,\nu}$ равно нулю.

Опредѣленную такимъ образомъ систему:

$$\left|\begin{array}{l} k_{1,t},\ k_{2,t},\ \ldots,\ k_{s,t} \\ k_{1,\,t-1},\ k_{2,\,t-1},\ \ldots,\ k_{s,\,t-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{1,2},\ k_{2,2}\ \ldots\ k_{s,2} \\ k_{1,1},\ k_{2,1}\ \ldots\ k_{s,1} \end{array}\right| \ldots (2)$$

мы назовемъ характеристикой α.

Если α чистый типъ, то величины $k_{\mu,\nu}$ имѣютъ лишь значеніе 0 и 1. Въ случаѣ смѣшанныхъ типовъ α имѣется, по крайней мѣрѣ, одна величина $k_{\mu,\nu}$, которая больше, чѣмъ 1.

Здѣсь имѣютъ мѣсто слѣдующія равенства, которыя получаются непосредственно изъ значенія входящихъ въ нихъ буквъ

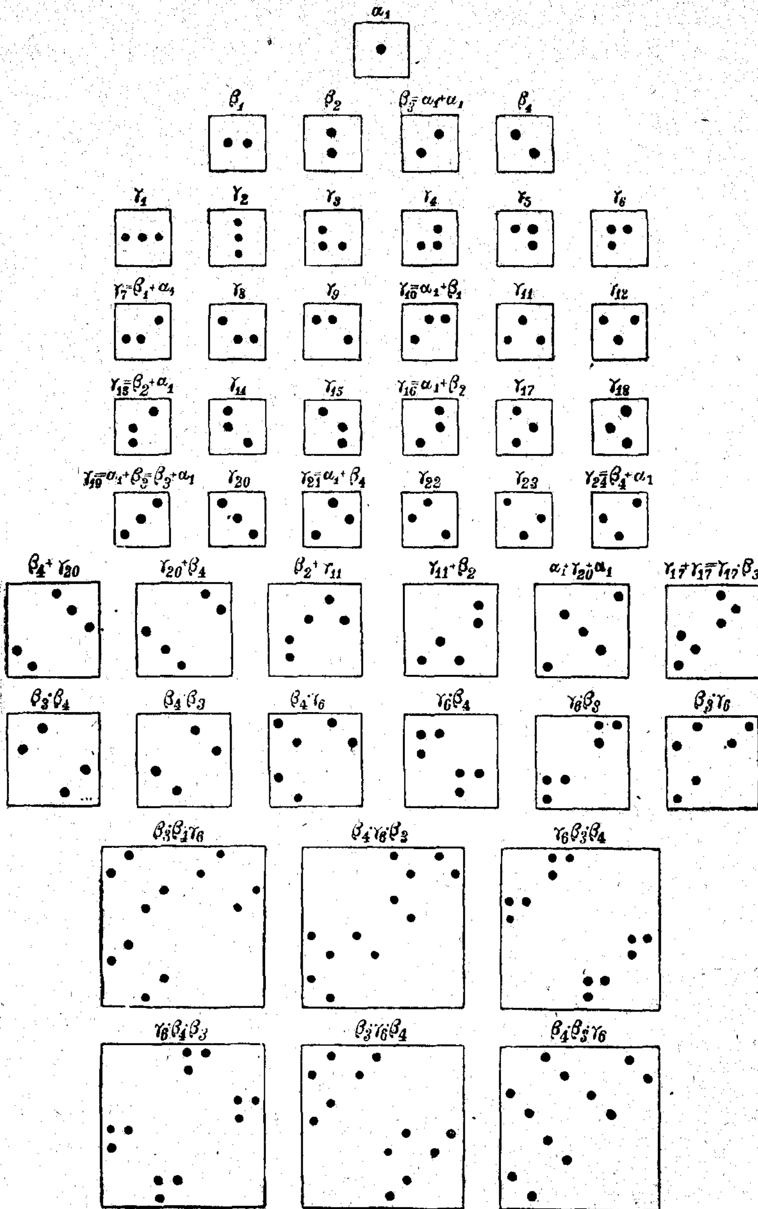
$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{\substack{\mu=1,\,2,\,\ldots\, s\\ \nu=1,\,2,\,\ldots\, t}} k_{\mu,\nu} = m \\ \sum\limits_{\nu=1,\,2\,\ldots\, t} k_{\mu,\nu} = g_{\mu} \\ \sum\limits_{\mu=1,\,2,\,\ldots\, s} k_{\mu,\nu} = h_{\nu} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (3).$$

Такимъ образомъ, система (2) не отрицательныхъ цѣлыхъ чиселъ $k_{\mu,\nu}$ представляетъ тогда—и только тогда—характеристику двукратнаго типа α, если получающіяся отсюда по (3) суммы: m, g_{μ} и h_{ν} суть отличныя отъ нуля положительныя цѣлыя числа, какъ это вытекаетъ изъ значенія m, g_{μ}, h_{ν}.

Нашей задачей будетъ теперь опредѣленіе количества всѣхъ чистыхъ двукратныхъ порядковыхъ типовъ даннаго количественнаго числа m. Это количество, разсматриваемое, какъ фунція m, мы будемъ обозначать черезъ $\Phi\ (m)$.

Прежде, чѣмъ я приведу рѣшеніе, я попытаюсь представить нагляднымъ образомъ на слѣдующей таблицѣ [1]) различные двукратные чистые типы для $m=1$, 2 и 3. Ихъ имѣется для $m=1$ — одинъ: α_1, для $m=2$— четыре: β_1, β_2, β_3, β_4, для $m=3$ — двадцать четыре: отъ γ_1 до γ_{24}. Они изображены съ помощью точечныхъ множествъ въ плоскости, которыя мы разсматриваемъ, какъ двукратно упорядоченныя множе-

[1]) За составленіе таблицы я благодаренъ г. д-ру Винеру, прив.-доц. математики университета въ Галле.


α1
β1
β2
β3=α1+α1
β4
γ1
γ2
γ3
γ4
γ5
γ6
γ7=β1+α1
γ8
γ9
γ10=α1+β1
γ11
γ12
γ13=β2+α1
γ14
γ15
γ16=α1+β2
γ17
γ18
γ19=α1+β3=β3+α1
γ20
γ21=α1+β4
γ22
γ23
γ24=β4+α1
β4+γ20
γ20+β4
β2+γ11
γ11+β2
α1+γ20+α1
γ17+γ17=γ17·β3
β3·β4
β4·β3
β4·γ6
γ6·β4
γ6·β3
β3·γ6
β3·β4·γ6
β4·γ6·β2
γ6·β3·β4
γ6·β4·β3
β3·γ6·β4
β4·β3·γ6

ства, причемъ первое порядковое направленіе дается горизонтальнымъ направленіемъ слѣва направо, а второе порядковое направленіе вертикальнымъ направленіемъ снизу вверхъ. Каждая точка представляетъ единицу въ соотвѣтствующемъ порядковомъ типѣ. Точки, лежащія на одной и той же вертикали, соотвѣтствуютъ въ типѣ единицамъ, которыя занимаютъ одно и то же по порядку мѣсто по первому направленію. Если же двѣ точки не лежатъ на одной вертикали, то изъ обѣихъ представленныхъ ими единицъ низшее по порядку мѣсто по первому направленію занимаетъ та, которая соотвѣтствуетъ точкѣ, лежащей налѣво. Точно такъ же единицы, которымъ соотвѣтствуютъ точки на одной и той же горизонтали, занимаютъ въ типѣ одно и то же по порядку мѣсто по второму направленію. А изъ двухъ единицъ, соотвѣтственныя точки которыхъ не лежатъ на одной и той же горизонтали, та занимаетъ низшее по порядку мѣсто по второму направленію, соотвѣтственная точка которой расположена ниже плоскости.

Для поясненія чиселъ: s, t, g, h я замѣчу, что: въ $\alpha_1 : s=1, t=1$, въ $\beta_1 : s=2, t=1$, въ $\beta_2 : s=1, t=2$, въ β_3 и $\beta_4 : s=2, t=2$, въ $\gamma_1 : s=3, t=1$, въ $\gamma_2 : s= =1, t=3$, въ $\gamma_3 - \gamma_6 : s=2, t=2$, въ $8 - \gamma_{12} : s= =3, t=2$, въ $\gamma_{13} - \gamma_{18} : s=2, t=3$, въ $\gamma_{19} - \gamma_{24} : s= 3, t=3$. Далѣе мы имѣемъ, напримѣръ, въ $\gamma_6 : g_1=2$, $g_2=1$, $h_1=1$, $h_2=2$, въ $\gamma_{19} - \gamma_{24} : g_1=g_2=g_3=h_1= =h_2=h_3=1$.

Четыре послѣднихъ ряда нашей таблицы конкретизируютъ объясненныя въ n^0 11 дѣйствія сложенія и умноженія типовъ.

Обозначимъ теперь черезъ $\varphi'(g_1, g_2, \ldots g_3, t)$ число чистыхъ двукратныхъ типовъ, въ которыхъ s и t (оба $\leq m$), а также $g_1, g_2 \ldots g_s$ имѣютъ данныя положительныя значенія, удовлетворяющія условному равенству (1). Тогда Ф (m) получается по слѣдующей формулѣ:

$$\Phi\ (m) = \sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots g_s=m \\ s\ =1,2\ \ldots m \\ t\ =1,2\ \ldots m}} \varphi'\ (g_1,\ g_2,\ \ldots\ g_s,\ t)\ \ \ldots\ (4)$$

Суммированіе совершается здѣсь такимъ образомъ, что буквы s и t получаютъ всѣ значенія отъ 1 до m и при каждой парѣ значеній s, t буквы: g_1, $g_2 \ldots g_s$ должны пробѣгать всѣ положительныя системы значеній, которыя удовлетворяютъ условному равенству (1).

φ' $(g_1, g_2\ \ldots\ g_s, t)$ представляетъ, согласно (3), число системъ рѣшеній ($k_{\mu,\nu}$), которыя удовлетворяютъ слѣдующимъ s уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} k_{1,1}+k_{1,2}+\ \ldots\ \ k_{1,t}=g_1 \\ k_{2,1}+k_{2,2}+\ \ldots\ \ k_{2,t}=g_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_{s,1}+k_{s,2}+\ \ldots\ \ k_{s,t}=g_s \end{array}\right\}\ \ldots\ (5)$$

точно такъ же, какъ и t дополнительнымъ условіямъ:

$$h_1 > 0,\ h_2 > 0,\ \ldots\ h_t > 0\ \ \ldots\ (6),$$

причемъ $s.t$ неизвѣстныхъ $k_{\mu,\nu}$ могутъ получать лишь значенія 0 и 1, а $h\nu$ имѣютъ значеніе написанныхъ въ (3) суммъ.

Пусть φ $(g_1, g_2, \ldots\ g_s, t)$ будетъ число системъ рѣшеній $k_{\mu,\nu}$) для той же системы уравненіи (5), когда откинуты дополнительныя условія (6). Такъ какъ здѣсь приходится рѣшать уравненія (5) независимо другъ отъ друга, то это число равно произведенію изъ чиселъ рѣшеніи всѣхъ отдѣльныхъ равенствъ (5).

Число системъ рѣшеній уравненія вида:

$$k_1 + k_2 + \ldots k + = g$$

въ цѣлыхъ числахъ $k_1, k_2 \ldots k_t$, которыя могутъ получать лишь значенія 0 и 1, равно биноміальному коэффиціенту:

$$\binom{t}{g} = \frac{t\,(t-1)\,(t-2)\ldots(t-g+1)}{1.\ 2.\ 3\ldots g} \quad \ldots \quad (7)$$

Мы, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\varphi\,(g_1, g_2 \ldots g_s, t) = \binom{t}{g_1} \cdot \binom{t}{g_2} \ldots \binom{t}{g_s} \ldots (8).$$

Но между функціями φ и φ' имѣется слѣдующее отношеніе:

$$\varphi\,(g_1, g_2 \ldots g_s, t) = \sum_{\nu = 0, 1, 2, \ldots t-1} \binom{t}{\nu} \cdot \varphi'\,(g_1, g_2, \ldots g_s, t-\nu) \ldots (9)$$

Общій членъ этой суммы равенъ числу тѣхъ системъ рѣшеній (5), для которыхъ ν изъ суммъ: h_1, $h_2, \ldots h_t$ имѣетъ значеніе нуль, а остальныя $t-\nu$ изъ нихъ отличны отъ нуля. Поэтому, если суммировать отъ $\nu = 0$ до $\nu = t-1$, то въ результатѣ получается число $\varphi\,(g_1, g_2 \ldots g_s, t)$.

Изъ (9), если подставить туда $t = 1, 2, 3 \ldots m$ и рѣшить эти m уравненій относительно значеній функцій φ', легко получается слѣдующая обратная формула:

$$\varphi\,(g_1, g_2, g_3 \ldots g_s, t) = \sum_{\nu = 1, 2 \ldots t-1} (-1)^\nu \binom{t}{\nu} . \varphi(g_1, g_2, g_3 \ldots g_s, t-\nu) \ldots (10)$$

Если внести это значеніе φ' въ формулу (4), замѣнивъ предварительно въ ней букву t на t', то мы получимъ:

$$\Phi\,(m) = \sum_{\nu = 0, 1, 2 \ldots t'-1} (-1)^\nu \binom{t'}{\nu} \cdot \varphi\,(g_1, g_2, g_3 \ldots g^s, t' - \nu)$$

$$\begin{aligned} & g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_s = m \\ & s = 1,2, \ldots\ldots\ldots m \\ & t' = 1,2, \ldots\ldots\ldots m \end{aligned}$$

Если мы здѣсь соединимъ всѣ тѣ члены, въ которыхъ $t' - \nu$ имѣетъ одно и то же значеніе t, то коэффиціентъ отъ $\varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t)$ получаетъ слѣдующее значеніе:

$$\sum_{\nu = 0, 1, 2 \ldots m-t} (-1)^{\nu} \binom{t+\nu}{\nu} = (-1)^{m-t} \, C(m, t),$$

гдѣ введенная здѣсь функція $C(m, t)$—въ виду того что $\binom{t+\nu}{\nu} = \binom{t+\nu}{t}$ — опредѣляется слѣдующимъ равенствомъ:

$$C(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \ldots + \\ + (-1)^{m-t} \binom{t}{t} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Поэтому мы имѣемъ:

$$\Phi(m) = \sum (-1)^{m-t} \, C(m, t) \, . \, \varphi(g_1, g_2 \ldots g_s, t)$$
$$\begin{aligned} & g_1 + g_2 + \ldots g_s = m \\ & s = 1,2, \ldots\ldots m \\ & t = 1,2, \ldots\ldots m \end{aligned}$$

Поэтому, если мы введемъ въ разсмотрѣніе слѣдующую функцію:

$$D(m, t) = \sum \varphi(g_1, g_2, g_3 \ldots g_s, t) \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$
$$\begin{aligned} & g_1 + g_2 + \ldots g_s = m \\ & s = 1,2, \ldots\ldots m \end{aligned}$$

то мы получимъ:

$$\Phi(m) = \sum_{=1,2,\ldots m} (-1)^{m-t} \, C(m, t) \, . \, D(m, t) \quad \ldots\ldots (13).$$

Этимъ путемъ искомая функція $\Phi(m)$ сведена къ обѣимъ функціямъ $C(m, t)$ и $D(m, t)$, опредѣляемымъ съ помощью формулъ (11) и (12).

Для практическихъ вычисленій можно воспользоваться формулами приведенія:

Для $C(m,t)$ легко доказать слѣдующее функціональное уравненіе:

$$C(m+1,\ t+1) = C(m,t+1) + C(m,t) \quad \ldots \quad (14).$$

Кромѣ того, мы имѣемъ для этой функціи слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{array}{l} C(2m,1) = m;\ C(2m+1,1) = m+1 \\ C(m,m) = 1;\ C(m,t) = 0;\ \text{если } t > m \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (15).$$

Отсюда получается слѣдующая таблица для $C(m,t)$, которую легко дополнить:

$m=$ $t=$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	2	2	1			
4	2	4	3	1		
5	3	6	7	4	1	
6	3	9	13	11	5	1

Съ другой стороны, мы имѣемъ согласно (12):

$$D(m+1,t) = \Sigma\, \varphi(g_0, g_1, \ldots \ldots g_s, t)$$
$$g_0 + g_1 + \ldots \ldots g_s = m+1$$
$$s = 0, 1, 2, \ldots \ldots m.$$

При $s=0$, $g_0=m+1$ общій членъ послѣдней суммы получаетъ значеніе $\binom{t}{m+1}$. Поэтому, имѣя въ виду, что $g_1, g_2, \ldots g_s$ положительны и что, слѣдовательно, s должно быть $\leq m+1-g_0$, можно написать:

$$D(m+1,t)=\binom{t}{m+1}+\sum\binom{t}{g_0}\cdot\varphi(g_1, g_2 \ldots \ldots g_s, t)$$

$$g_1+g_2+\ldots\ldots g_s=m+1-g_0$$
$$s=1, 2, 3, \ldots\ldots m+1-g_0$$
$$g_0=1, 2, 3, \ldots\ldots m.$$

Такимъ образомъ, получается:

$$D(m+1,t)=\binom{t}{m+1}+\binom{t}{m}D(1,t)+\binom{t}{m-1}D(2,t)+$$
$$+\ldots\ldots+\binom{t}{1}D(m,t).$$

$m=$ $t=$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2		1	3	6	10	15
3			1	4	10	20
4				1	5	15
5					1	6
6						1

(Къ стр. 170).

Поэтому, если помнить, что

$$D(0,t)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16),$$

то получается слѣдующая формула приведенія:

$$D(m+1,t)=\binom{t}{1}D(m,t)+\binom{t}{2}D(m-1,t)+\ldots\ldots+ \\ +\binom{t}{m+1}D(0,t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Слѣдуетъ замѣтить, что постоянно:

$$D(m,1)=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Чтобы отсюда вычислить $D(m,t)$, мы нуждаемся въ слѣдующей таблицѣ биноміальныхъ коэффиціентовъ $\binom{t}{m}$: (приводится на стр. 169.).

Такимъ образомъ, получаютъ слѣдующую таблицу для $D(m,t)$, которую остается дополнить:

$m=$ \ $t=$	1	2	3	4	5	6
0	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6
2	1	5	12	22	35	51
3	1	12	46	116	235	416
4	1	29	177	613	1580	3396
5	1	70	681	3240	10626	27732
6	1	169	2620	17124	71460	226454

Съ помощью этихъ таблицъ получаются изъ (13) слѣдующія значенія функціи Φ (m):

$$\Phi(1)=1;\ \Phi(2)=4;\ \Phi(3)=24;\ \Phi(4)=196;\ \Phi(5)=2016$$
$$\Phi(6)=24976.$$

Это суть для $m=1, 2, 3, 4, 5, 6$ числа **чистыхъ** двукратныхъ порядковыхъ типовъ. Но если дѣло идетъ о числѣ **всѣхъ** двукратныхъ порядковыхъ типовъ (чистыхъ и смѣшанныхъ) для даннаго количественнаго числа m, о числѣ, которое мы обозначимъ $\psi(m)$, то для вычисленія его можно воспользоваться тѣмъ же способомъ, который мы употребили для вычисленія $\Phi(m)$.

Систему уравненій (5) слѣдуетъ теперь рѣшать такимъ образомъ, чтобы неизвѣстныя $k_{\mu,\nu}$ получали не только значенія 0 и 1, но и любыя не отрицательныя, цѣлочисленныя значенія.

На мѣсто функціи φ $(g_1, g_2 \ldots . g_s, t)$ здѣсь появляется другая функція, которую мы обозначимъ черезъ $\psi(g_1, g_2 \ldots . g_s, t)$ и которая опредѣляется изъ равенствъ:

$$\psi(g_1, g_2 \ldots g_s, t)=\binom{t+g_1-1}{g_1}\cdot\binom{t+g_2-1}{g_2}\cdots\binom{t+g_s-1}{g_s} \quad (19)$$

Поэтому, если понимать подъ E (m, t) слѣдующую функцію:

$$E(m,t)=\sum_{\substack{g_1+g_2+\ldots g_s=m \\ s=1,2\ldots m}}\psi(g_1, g_2, \ldots g_s, t) \ldots (20)$$

то мы имѣемъ

$$\psi(m)=\sum_{t=1,2,\ldots m}\left(-1\right)^{m-1}C(m,t)\,E(m,t) \ldots (21)$$

Но между Φ (m) и ψ (m) существуетъ также простое взаимоотношеніе, которое можно прямо получить, помня значенія этихъ чиселъ. Мы имѣемъ именно слѣдующія равенства:

$$\psi(m) = \Phi(m) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2) + \ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2) + \Phi(1) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

$$\Phi(m) = \psi(m) - \binom{m-1}{1}\psi(m-1) + \binom{m-1}{2}\psi(m-2) \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\psi(2) + (-1)^{m-1}\psi(1) \quad \ldots \quad (23)$$

Изъ (22) мы получаемъ съ помощью найденныхъ значеніи $\Phi(m)$

$$\psi(1) = 1;\ \psi(2) = 5;\ \psi(3) = 33;\ \psi(4) = 281;\ \psi(5) = 2961,\ \psi(6) = 37277.$$

14. Способъ, какимъ мы получили числа $\Phi(m)$ и $\psi(m)$ двукратныхъ порядковыхъ типовъ въ n^0 13 можно перенести и на любое n.

Обозначимъ черезъ $\Phi(m, n)$ число чистыхъ, а черезъ $\psi(m, n)$ число чистыхъ и смѣшанныхъ n-кратныхъ порядковыхъ типовъ количественнаго числа m.

Въ n-кратномъ типѣ α единицы упорядочены по n отличающимся другъ отъ друга, независимымъ направленіямъ, которыя мы отличили, какъ 1-ое, 2-ое,.... ν-ое,.... n-ое направленія.

Обозначимъ черезъ s_ν число различныхъ имѣющихся въ α порядковыхъ мѣстъ (Rangstufen) по ν-ому направленію.

Пусть $g_{\nu,\mu}$ будетъ число различныхъ единицъ въ α, занимающихъ μ-ое по порядку мѣсто по ν-му направленію. Слѣдовательно, индексъ μ получаетъ значенія: 1, 2, 3 ... s_ν.

Всѣ s_ν и $g_{\nu,\mu}$ представляютъ положительныя цѣлыя числа $\leq m$. Мы имѣемъ для каждаго опредѣленнаго $\nu = 1, 2, 3, \dots n$:

$$\sum_{\mu = 1, 2, \dots s_\nu} g_{\nu,\mu} = m \dots \quad (24)$$

Подъ характеристикой типа α мы понимаемъ систему изъ $s_1 . s_2 \dots s_n$ чиселъ:

$$\left| k_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} \right| \dots \quad (25),$$

гдѣ индексъ λ_ν долженъ принимать значенія: $1, 2, 3, \dots s_\nu$; $k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n}$ означаетъ число всѣхъ имѣющихся въ α единицъ, которыя занимаютъ по первому направленію γ_1-ое по порядку мѣсто, по второму направленію λ_2-ое, и т. д. по n-ому направленію λ_n-ое по порядку мѣсто. Если въ α нѣтъ такихъ единицъ, то $k_{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n}$ получаетъ значеніе О. Если α—чистый типъ, то величины k получаютъ лишь значенія О и 1.

Изъ значеній величинъ k и g получаются непосредственно равенства:

$$\sum k_{\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n} = m \dots \quad (26)$$

$$\lambda_1 = 1, 2, 3, \dots s_1$$

$$\lambda_2 = 1, 2, 3, \dots s_2$$

$$\lambda_n = 1, 2, 3, \dots s_n$$

и

$$\sum k_{\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_\nu, \dots \lambda_n} = g_{\nu, \lambda_\nu} \dots \quad (27),$$

гдѣ суммированіе простирается на всѣ значенія индексовъ $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, за исключеніемъ индекса λ_ν, который при суммированіи сохраняетъ постоянное значеніе ряда $1, 2, 3 \dots s_\nu$.

Система (25) неотрицательныхъ цѣлыхъ чиселъ $k_{\lambda_n}, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ образуетъ тогда, и только тогда, характеристику опредѣленнаго n-кратнаго типа α, когда получающіяся изъ нихъ по (26) и (27) суммы $m, g_{\nu,\mu}$ представляютъ отличныя отъ нуля положительныя цѣлыя числа.

Въ дальнѣйшемъ разсужденіи первое изъ n порядковыхъ направленій играетъ привилегированную роль и поэтому мы придадимъ относящимся къ нему величинамъ болѣе простыя обозначенія. Мы положимъ

$$s_1 = s, g_{1,1} = g_1, g_{1,2} = g_2, \ldots\ g_{1,s} = g_s.$$

Пусть φ' $(g_1, g_2, \ldots, g_s, s_2, s_3 \ldots s_n)$ означаетъ число чистыхъ n-кратныхъ типовъ, для которыхъ величины $s, s_2, \ldots, s_n$ имѣютъ опредѣленныя положительныя цѣлочисленныя значенія $\leq m$ и $g_1, g_2, \ldots g_s$ точно также имѣютъ опредѣленныя положительныя цѣлочисленныя значенія, удовлетворяющія равенству:

$$g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m.$$

Мы имѣемъ тогда:

$$\Phi(m, n) = \sum \varphi' (g_1, g_2, \ldots, g_s, s_2, s_3 \ldots, s_n) \ldots (28)$$

$$\begin{gathered} g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m \\ s = 1, 2, \ldots m \\ s_2 = 1, 2, \ldots m \\ \ldots\ldots\ldots \\ s_n = 1, 2 \ldots m. \end{gathered}$$

Функцію φ' можно привести (какъ и обозначенную въ n^0 13 тѣмъ же знакомъ функцію) къ функціи φ $(g_1, g_2, \ldots, g_s, t$ опредѣленную формулой (8). Если мы введемъ обозначенія:

$$s_2 = t_1, s_3 = t_2 \ldots s_n t_{n-1},$$

то мы имѣемъ равенство:

$$\varphi'(g_1, g_2, \ldots g_s, t_1', t_2, \ldots, t_{n-1}) =$$

$$= \sum (-1)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}} \binom{t_1}{\mu_1} \cdot \binom{t_2}{\mu_2} \cdots \binom{t_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, t) \quad (29)$$

$$\mu_1 = 0,1, \ldots, t_1$$
$$\mu_2 = 0,1, \ldots, t_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\mu_{n-1} = 0,1, \ldots, t_{n-1}$$

Въ этой суммѣ буква t имѣетъ значеніе $t = (t_1 - \mu_1) \cdot (t_2 - \mu_2) \ldots (t_{n-1} - \mu_{n-1}.)$ Если ввести это значеніе въ (28), то мы получимъ, замѣнивъ $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ черезъ $t'_1, t'_2, \ldots, t'_{n-1}$ и замѣнивъ t черезъ t':

$$\Phi(m,n) = \sum (-1)^{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{n-1}} \binom{t'_1}{\mu_1} \binom{t'_2}{\mu_2} \cdots \binom{t'_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots g_s, t')$$

$$\begin{array}{ll} \mu_1 = 0,1, \ldots, t'_1 & g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m \\ \mu_2 = 0,1, \ldots, t'_2 & s = 1,2, \ldots, m \\ \ldots\ldots\ldots & t'_1 = 1,2, \ldots, m \\ \mu_{n-1} = 0,1, \ldots, t^1_{n-1} & t'_{n-1} = 1,2, \ldots, m \end{array}$$

Здѣсь $t' = (t'_1 - \mu_1) \cdot (t'_2 - \mu_2) \ldots 1(t'_{n-1} - \mu_{n-1})$.

Если мы соединимъ всѣ тѣ члены, въ которыхъ $t'_1 - \mu_1, t'_2 - \mu_2, \ldots, t'_{n-1} - \mu_{n-1}$ имѣютъ соотвѣтственно опредѣленныя значенія: $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, то коэффиціентъ отъ $\varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s, (t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{n-1}))$ получаетъ значеніе:

$$(-1)^{m(n-1) - t_1 - t_2 - \ldots - t_{n-1}} C(m,t_1) \cdot C(m,t_2) \ldots C(m,t_{n-1}).$$

Если поэтому мы введемъ слѣдующую функцію:

$$C(m,n,t) = \sum^{m(n-1)-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1}}_{t_1 \cdot t_2 \cdot \ldots \cdot t_{n-1} = t} (-1)\, C(m,t_1) \,.\, C(m,t_2) \ldots C(m,t_{n-1}) \quad (30)$$

гдѣ $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ принимаютъ всѣ положительныя цѣлочисленныя системы значеній, для которыхъ удовлетворено равенство:

$$t_1 \,.\, t_2 \ldots t_{n-1} = t \quad \ldots \ldots (31)$$

вмѣстѣ съ дополнительными условіями:

$$t_1 \leq m,\ t_2 \leq m, \ldots, t_{n-1} \leq m \quad \ldots \ldots (32)$$

то мы получаемъ сразу формулу:

$$\Phi(m,n) \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m,n,t) \,.\, D(m,t) \quad \ldots \ldots (33)$$

Въ случаѣ $n=2$ $C(m,2,t) = (-1)^{m-t} C(m,t)$ и формула (32) переходитъ въ формулу (13) для $\Phi(m)$.

Мы найдемъ аналогично, что:

$$\psi(m,n) = \sum_{t=1,2,3,\ldots,m^{n-1}} C(m,n,t) \,.\, E(m,t) \quad \ldots \ldots (34)$$

Между $\Phi(m,n)$ и $\psi(m,n)$ имѣютъ также мѣсто равенства:

$$\psi(m,n) = \Phi(m,n) + \binom{m-1}{1}\Phi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\Phi(m-2,n) + \ldots + \binom{m-1}{m-2}\Phi(2,n) + \Phi(1,n) \quad \ldots (35)$$

$$\Phi(m,n) = \psi(m,n) - \binom{m-1}{1}\psi(m-1,n) + \binom{m-1}{2}\psi(m-2,n) - \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m-1}{m-2}\psi(2,n) + (-1)^{m-1}\psi(1,n) \quad (36)$$

Дополненія [1]).

Къ стр. 137.

Количественное число $\overline{\overline{M}}$ какого-нибудь множества M остается, согласно № 1, неизмѣннымъ, если на мѣсто элементовъ $m, m', m'', \ldots$ въ M будутъ подставлены другія вещи. Теперь, если $M \sim M_1$, то существуетъ законъ сопряженія, согласно которому элементамъ $m, m', m'' \ldots$ въ M соотвѣтствуютъ элементы $m_1, m'_1, m_1'', \ldots$ въ M_1. Можно представить себѣ, что на мѣсто элементовъ $m, m', m'', \ldots$ въ M подставлены сразу элементы $m_1, m_1', m_1'', \ldots$ изъ M_1. Въ этомъ случаѣ множество M переходитъ въ M_1, и, такъ какъ при этомъ переходѣ не происходитъ никакого измѣненія съ количественнымъ числомъ, то $\overline{\overline{M_1}} = \overline{\overline{M}}$.

Обратную теорему мы получимъ, замѣтивъ, что между элементами какого-нибудь множества M и единицами его количественнаго числа $\overline{\overline{M}}$ существуетъ взаимное, однозначное и полное сопряженіе, такъ что мы можемъ сказать, что $M \sim \overline{\overline{M}}$. Поэтому, если мы имѣемъ два множества M и M_1 съ одинаковымъ количественнымъ числомъ, то это послѣднее эквивалентно какъ множеству M, такъ и множеству M_1. Слѣдовательно, M и M_1 также эквивалентны, ибо мы знаемъ, что если два множества эквивалентны третьему, то они эквивалентны между собой.

[1] См. Zeitschrift f. Philos. u. philos. Kritik, т. 91, стр. 265—270.

Къ стр. 139.

Доказательство этого положенія слѣдуетъ вести самымъ тщательнымъ образомъ. Такъ какъ оно очень просто и такъ какъ его считаютъ само собою разумѣющимся, то здѣсь весьма легко допустить какой-нибудь промахъ въ аргументаціи.

Смыслъ его заключается въ слѣдующемъ: если M конечное множество, M′—составная часть M, то M и M′ — не эквивалентны.

Подъ конечнымъ множествомъ мы понимаемъ множество, получающееся изъ одного первоначальнаго элемента путемъ послѣдовательнаго присоединенія новыхъ элементовъ такимъ образомъ, что можно получить этотъ первоначальный элементъ обратно изъ M путемъ послѣдовательнаго удаленія элементовъ.

Я исхожу изъ слѣдующаго общаго и въ высшей степени очевиднаго вспомогательнаго положенія: если два какихъ-нибудь множествъ M и N эквивалентны, то между ними можно установить (вообще говоря, многими способами) такое взаимное, однозначное и полное сопряженіе, что при этомъ сопряженіи любому, данному напередъ элементу m въ M соотвѣтствуетъ столь же произвольно выбранный элементъ n въ N.

А теперь для доказательства разсматриваемаго положенія мы вводимъ методъ полной индукціи.

Возьмемъ множество M, которое не эквивалентно никакой изъ своихъ составныхъ частей. Я нахожу, что и множество M+1, получающееся изъ M путемъ присоединенія къ M одного новаго элемента 1, обладаетъ тѣмъ же свойствомъ не быть эквивалентнымъ ни одной изъ своихъ составныхъ частей. Пусть N будетъ какая-нибудь составная часть M+1. Тогда возможны два случая: 1) Элементъ 1 тоже принадлежитъ къ N, такъ что $N = N' + 1$. N', очевидно, есть также составная часть M. Если теперь мы имѣли бы, что $N \sim M + 1$, то, по предыдущему вспомогательному положенію, можно было бы установить между множествами N и $M + 1$ такое взаимное, однозначное и полное соотвѣтствіе, что элементъ 1 въ N соотвѣтствовалъ бы элементу 1 въ $M + 1$. Благодаря этому сопряженію было бы установлено также сопряженіе между N' и M, и M было бы—вопреки нашему допущенію—эквивалентно своей составной части N'. 2) 1 не принадлежитъ къ N. Тогда N есть не только составная часть $M + 1$, но также и M.

Если бы мы имѣли въ этомъ случаѣ, что $N \sim M + 1$, то возьмемъ какое-нибудь взаимное, однозначное и полное сопряженіе обоихъ множествъ $M + 1$ и N и пусть при этомъ элементу 1 въ $M + 1$ соотвѣтствуетъ элементъ n въ N. Если $N = N' + n$, то благодаря этому сопряженію установлено также взаимное, однозначное и полное соотвѣтствіе между N' и M, а, такъ какъ и здѣсь N' есть составная часть M, то это противорѣчитъ сдѣланному допущенію, согласно которому M не эквивалентно ни одной изъ своихъ составныхъ частей.

Разсматриваемое нами положеніе самоочевидно для случая множества, состоящаго изъ двухъ элементовъ. Съ помощью только-что доказаннаго можно показать его правильность для любого конечнаго множества.

Существеннѣйшимъ признакомъ конечныхъ множествъ должно считаться то, что они не эквивалентны никакой изъ своихъ составныхъ частей. А актуально-безконечныя множества всегда таковы, что можно найти многими способами нѣкоторую составную часть ихъ, которая эквивалентна имъ.

Къ стр. 143.

Въ NN 1—8 этого отдѣла изложены съ возможной краткостью основы общаго ученія какъ о финитныхъ, такъ и о трансфинитныхъ, количественныхъ числахъ. Для полноты я прибавлю еще кое-что, касающееся конечныхъ чиселъ. Подъ конечнымъ количественнымъ числомъ я понимаю число, соотвѣтствующее нѣкоторому конечному множеству такимъ образомъ, какъ было разъяснено въ NN 1—3. Что́ при этомъ понимать подъ конечнымъ множествомъ, это указано въ № 7. Теперь прежде всего я обращу вниманіе на то, что каждое конечное (какъ и каждое трансфинитное) количественное число имѣетъ само по себѣ совершенно независимое идеальное существованіе и занимаетъ такое же независимое положеніе по отношенію ко всѣмъ другимъ количественнымъ числамъ. Для образованія общаго понятія „пять" необходимо лишь одно множество (напримѣръ, множество всѣхъ пальцевъ на моей правой рукѣ), которому присуще это количественное число. Актъ абстракціи, производимый по отношенію къ тому составу и порядку, въ какомъ оказываются передо мной эти рѣзко отличныя другъ отъ друга вещи, вызываетъ или скорѣе пробуждаетъ въ моемъ духѣ понятіе „пять". Это, слѣдовательно, „пять" an und für sich, независимо отъ „четырехъ" или „трехъ" и отъ какого-нибудь иного числа. Каждое число есть по своему существу простое понятіе, въ которомъ собрано органически-едино, спеціальнымъ образомъ, нѣкоторое многообразіе единицъ, такъ что въ немъ различныя единицы—равно какъ и получающіяся изъ частичнаго собиранія ихъ числа—представляютъ виртуальныя составныя части. То обстоятельство, что, по данному въ № 5 опредѣленію суммы, имѣетъ мѣсто равенство.

$$\overline{5} = \overline{2} + \overline{3}$$

не должно побуждать насъ къ допущенію, будто въ понятіи $\overline{5}$ заключены реально въ качествѣ частей понятія $\overline{2}$ и $\overline{3}$. Если бы это было такъ, то никогда не могло бы имѣть мѣста равенство: $\overline{5} = \overline{1} + \overline{4}$. Но $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ и $\overline{4}$ можно отлично разсматривать, какъ виртуальныя составныя части $\overline{5}$, если подъ этимъ понимать просто то, что въ каждомъ конкретномъ множествѣ съ M количественнымъ числомъ $\overline{5}$ содержатся частичныя множества M', которымъ соотвѣтствуютъ количественныя числа $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$ или $\overline{4}$. Слѣдовательно, вышеприведенное равенство имѣетъ значеніе опредѣленнаго идеальнаго отношенія трехъ существующихъ сами по себѣ количественныхъ чиселъ $\overline{2}$, $\overline{3}$ и $\overline{5}$, и этому идеальному отношенію соотвѣтствуетъ, какъ коррелатъ, тотъ фактъ, что каждое конкретное множество съ количественнымъ числомъ $\overline{5}$ можетъ быть реально составлено изъ двухъ частичныхъ множествъ, которымъ соотвѣтствуютъ количественныя числа $\overline{2}$ и $\overline{3}$.

Аналогичнымъ образомъ слѣдуетъ истолковывать всѣ равенства и неравенства, получающіяся между количественными числами на основаніи опредѣленій въ NN 1—6; они представляютъ неизмѣнныя идеальныя отношенія и законы числовыхъ понятій, имѣющія свой коррелотъ и въ извѣстномъ смыслѣ — именно для нашего человѣческаго способа познанія — свою основу въ опредѣленныхъ отношеніяхъ конкретныхъ множествъ.

Изъ закономѣрныхъ отношеній, связующихъ въ многообразномъ, сложномъ сплетеніи царство конечныхъ количественныхъ чиселъ въ одно идеальное, органическое цѣлое, заслуживаетъ прежде всего вниманія то отношеніе, благодаря которому мы, основываясь на данномъ въ N 4 опредѣленіи, обозначаемъ изъ любыхъ двухъ различныхъ количественныхъ чиселъ, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ одно, какъ меньшее, другое, какъ большее. Если мы имѣемъ еще третье число $\mathfrak{c}$, то легко доказать, что, если $\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{b}<\mathfrak{c}$, то всегда и $\mathfrak{a}<\mathfrak{c}$.

Такимъ образомъ совокупность всѣхъ конечныхъ количественныхъ чиселъ—если въ ней меньшія числа занимаютъ низшее по порядку мѣсто, чѣмъ бóльшія числа—образуетъ въ этомъ іерархическомъ порядкѣ то, чтò я называю однократно упорядоченнымъ множествомъ. Но мало того: въ этомъ іерархическомъ порядкѣ она оказывается вполнѣ упорядоченнымъ множествомъ (см. „Grundlagen", с. 4). Вѣдь мы имѣемъ въ ней нѣкоторый низшій по порядку элементъ, количественное число $\overline{1}$, и нѣкоторое, непосредственно слѣдующее за любымъ конечнымъ количественнымъ числомъ $\overline{\nu}$, ближайшее по порядку (т.-е. здѣсь по величинѣ), конечное количественное число $\overline{\nu}+\overline{1}$. Такимъ образомъ мы получаемъ совокупность всѣхъ конечныхъ количественныхъ чиселъ въ видѣ такъ называемаго безконечнаго натуральнаго ряда.

$$\overline{1},\quad \overline{2},\quad \overline{3},\ldots\quad \overline{\nu},\ldots$$

Въ этомъ видѣ оно представляетъ вполнѣ упорядоченное множество порядковаго типа ω

Отсутствіе конца у этого ряда доказываетъ, что совокупность всѣхъ конечныхъ чиселъ, разсматриваемая, какъ вещь для себя, есть актуально-безконечное множество, Transfinitum.

Вѣдь для возможности утвержденія, что нѣкоторое множество актуально-безконечно, существенно важны лишь опредѣленность всѣхъ элементовъ этого множества и то, что количество ихъ больше любого конечнаго числа, а вовсе не требуется, чтобы множество было ограничено въ какой-нибудь формѣ нѣкоторымъ послѣднимъ, принадлежащимъ къ нему, членомъ. Какое-нибудь множество совершенно ограничено уже тѣмъ, что все, принадлежащее къ нему, опредѣлено въ себѣ и вполнѣ отлично отъ всего, не принадлежащаго къ нему. Это вполнѣ согласно съ тѣмъ, что говоритъ Св. Августинъ въ своем De civitate Dei, lib. XII, cop. 19: „Ita vero suis quisque numerus proprietatibus terminatur, ut nullus eorum par esse cuicumque alteri possit. Ergo et dispares inter se atque diversi sunt, et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt“.

Если такимъ образомъ расположеніе: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}, \ldots \overline{\nu}, \ldots$ конечныхъ количественныхъ чиселъ представляется намъ какъ бы само собою и это-то и объясняетъ почему оно получило названіе „натуральнаго ряда цѣлыхъ чиселъ“, — то не слѣдуетъ все-таки забывать, что это закономѣрное изображеніе множества $(\overline{\nu})$, при указанной выше идеальной независимости каждаго числа отъ всѣхъ прочихъ и при многообразіи отношеній чиселъ другъ къ другу представляетъ лишь одно изъ безчисленно-многихъ возможныхъ закономѣрныхъ соединеній и расположеній всѣхъ конечныхъ количественныхъ чиселъ. Поэтому слѣдуетъ считать въ извѣстномъ смыслѣ произвольнымъ то, что именно этотъ, основывающійся на отношеніи величины, іерархическій порядокъ конечныхъ количественныхъ чиселъ былъ названъ „натуральнымъ рядомъ“ ихъ.

Пер. *П. Юшкевичъ.*

Изъ работъ Г. Кантора (род. въ СПБургѣ въ 1845 г.). упомянемъ слѣдующія:

Jour. Crelle: Satz über trigonom. Reihen (т. 72, 1870 г.).
— Beweis, dass eine für jedes reelle x durch eine trig. Reihe gegebene Function nur auf eine einzige Art in dieser Form darstellbar ist (т.т. 72 и 73, 1870 и 1871г.).
— Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebr. Zahlen (т. 77, 1874).
— Zur Mannigfaltigkeitslehre (т. 84, 1878).
Götting. Nachrichten: Ein Satz aus der Theolie der stetigen Mannigfaltigkeiten (1879 г.).
Mathem. Annalen: Ueber trigon. Reihen (т.т. 4, 5 и 16, 1871, 72 и 80 гг.).
— Unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten) т.т. 15—21, 23, 1879—1884 гг.).
— Bemerk. zu „Weierstrass'— Cantor's. Theorie der Irrationalzahlen“ (т. 33, 1889 г.)
— Begründung der transfiniten Mengenlehre (т.т. 46 и 49, 1895 и 1897 г.г.).
Acta mathematica. Puissance des ensembles parfaits des points (т. 4, 1884 г.).
— Verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmenzen in einem n-fach aus gedehnten stetigen Raume Gn т. 7, 1885 г.).
