Новые
идеи
в матем.
Сб. 5

НОВЫЯ ИДЕИ ВЪ МАТЕМАТИКѢ.

Неперіодическое изданіе, выходящее подъ редакціей заслуженнаго профессора **А. В. Васильева.**

СБОРНИКЪ ПЯТЫЙ.

Принципъ относительности въ математикѣ.

Изд-ство „ОБРАЗОВАНІЕ" СПБ.

1914.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ
Тип. Е. М. Малаховскаго. Петерб. стор., Большой пр., 17.
Тел. 616-57.

Германъ Минковскій.

Пространство и время.

Воззрѣнія на пространство и время, здѣсь развиваемыя, возникли на опытно-физической почвѣ. Въ этомъ ихъ сила. Они направлены къ коренному перевороту въ нашемъ отношеніи къ пространству и времени. Отнынѣ пространство и время, разсматриваемыя отдѣльно и независимо, обращаются въ тѣни и только ихъ соединеніе сохраняетъ самостоятельность.

I.

Я хочу прежде всего изложить, какимъ чисто математическимъ путемъ можно было-бы перейти отъ принимаемой въ настоящее время механики къ видоизмѣненнымъ идеямъ о пространствѣ и времени. Уравненія механики Ньютона обладаютъ двоякою инваріантностью.

Съ одной стороны ихъ форма сохраняется, если мы подвергнемъ принятую систему пространственныхъ координатъ произвольному измѣненію положенія; съ другой стороны, они не измѣняются также и въ томъ случаѣ, если координатная система подвергается равномѣрной трансляціи; не играетъ также никакой роли и моментъ, отъ котораго отсчитывается время (нулевая точка времени). Обыкновенно считаютъ аксіомы геометріи уже установленными, когда переходятъ къ аксіомамъ механики, и поэтому двѣ указанныя инваріантности рѣдко приводятся заразъ.

Каждая изъ нихъ установляетъ опредѣленную группу преобразованій, не измѣняющихъ дифференціальныхъ уравненій механики. Существованіе первой группы считаютъ основною характеристикою пространства. На вторую группу смотрятъ съ нѣкоторымъ презрѣніемъ, какъ-бы мимоходомъ указывая, что физическія явленія никогда не могутъ дать рѣшительнаго указанія на то, не находится-ли пространство, предполагаемое покоящимся, однако, въ равномѣрной трансляціи. Такъ обѣ группы существуютъ одна вполнѣ независимо отъ другой. Ихъ вполнѣ разнородный характеръ мѣшалъ разсматривать ихъ совмѣстно. Но именно совмѣстно составленная полная группа, разсматриваемая какъ цѣлое, наводитъ на многія мысли.

Мы постараемся представить отношенія графически. Пусть x, y, z обозначаютъ прямоугольныя координаты для пространства, а t—время. Предметомъ нашего воспріятія являются всегда мѣста и времена, связанныя между собою. Никто не замѣчалъ мѣста иначе, какъ въ опредѣленное время, и не замѣчалъ времени иначе, какъ въ опредѣленномъ мѣстѣ. Но я, однако, отдамъ дань догмату о независимомъ значеніи времени и мѣста— я назову пространственную точку въ опредѣленный моментъ времени, т.-е. систему значеній x, y, z, t... міровою точкою. Многообразіе всѣхъ мыслимыхъ міровыхъ точекъ x, y, z, t называется міромъ. Я могъ бы смѣло начертить на доскѣ четыре міровыя оси. Уже одна начерченная ось состоитъ изъ колеблющихся молекулъ и, сверхъ того, принимаетъ участіе въ движеніи земли, т.-е. уже достаточно даетъ матеріала для абстракціи; для математика дальнѣйшая абстракція, соединенная съ числомъ 4, уже не представляетъ большой трудности. Чтобы нигдѣ не имѣть дѣла съ зіяющею пустотою, представимъ себѣ, что во всѣхъ мѣстахъ и во всякое время существуетъ что-нибудь. Не буду называть это нѣчто ни матеріею, ни электричествомъ, назову его субстанціею. Мы и обращаемъ наше вниманіе на субстанціальную точку, находящуюся въ міровой точкѣ x, y, z, t, и представляемъ себѣ, что мы можемъ прослѣдить эту субстанціальную точку во всякое другое время. Элементу времени dt пусть соотвѣтствуютъ измѣненія dx, dy, dz пространственныхъ координатъ этой субстанціальной точки. Мы получаемъ такимъ образомъ для изображенія вѣчной жизни субстанціальной точки кривую въ мірѣ, *міровую линію*, которой точки соотвѣтствуютъ однозначно измѣненіямъ параметра t отъ $-\infty$ до $+\infty$. Весь міръ является тогда разложеннымъ въ подобныя *міровыя* линіи, и я хочу сейчасъ же выразить мнѣніе, что физическіе законы должны найти свое полнѣйшее выраженіе въ видѣ взаимоотношеній между этими міровыми линіями.

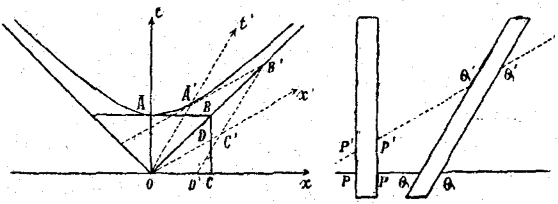
Понятія пространства и времени разъединяютъ многообразіе x, y, z для $t = 0$ и для двухъ сторонъ $t > 0$ и $t < 0$. Если мы ради простоты будемъ считать неизмѣняемою нулевую точку времени и пространства, то первая группа механики указываетъ на возможность подвергать оси x, y, z для времени $t = 0$ произвольному вращенію около нулевой точки, соотвѣтствующему однородному линейному преобразованію, не измѣняющему выраженія $x^2 + y^2 + z^2$.

Существованіе второй группы указываетъ на то, что мы можемъ, также не измѣняя выраженія механическихъ законовъ, замѣнить x, y, z, t ... выраженіями $x - \alpha t$, $y - \beta t$, $z - \gamma t$, t при какихъ угодно постоянныхъ α, β, γ. Ось времени можетъ тогда получить произвольное направленіе къ верхней половинѣ міра $t > 0$. Какое же отношеніе имѣетъ требованіе ортогональности въ пространствѣ къ этой полной свободѣ оси времени?

Чтобы установить эту связь, возьмемъ положительный параметръ c и разсмотримъ образъ

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Онъ состоитъ изъ двухъ раздѣленныхъ $t = 0$ полъ, аналогичныхъ двумъ поламъ двуполаго гиперболоида. Мы разсматриваемъ полу въ области $t > 0$ и мы разсматриваемъ теперь тѣ однородныя линейныя преобразованія x, y, z, t въ новыя четыре перемѣнныя x', y', z', t', при которыхъ получается соотвѣтствующее выраженіе этой полы въ новыхъ координатахъ. Къ этимъ преобразованіямъ, очевидно, относятся вращенія пространства около нулевой точки. Полное понятіе о прочихъ преобразованіяхъ мы получаемъ, представляя себѣ тѣ изъ нихъ, при которыхъ остаются безъ измѣненія y и z. Мы изображаемъ на фиг. 1, пересѣченіе полы съ плоскостью осей x и t, верхнюю вѣтвь гиперболы $c^2t^2 - x^2 = 1$ съ ея ассимптотами. Далѣе проводимъ произвольный радіусъ векторъ OA′ этой вѣтви гиперболы отъ точки O и касательную въ A′ къ гиперболѣ вправо до пересѣченія B′ съ ассимптотою и дополняемъ треугольникъ OA′B′ до параллелограмма OA′B″C′ и, наконецъ (это потребуется позже), продолжаемъ B′C′ до



Фиг. 1.

пересѣченія D' съ осью x. Если мы возьмемъ OC' и OA' за оси параллельныхъ координатъ x', t' съ масштабами $OA' = \frac{1}{c}$, $OC' = 1$, то вѣтвь гиперболы получаетъ снова выраженіе $c^2t'^2 - x'^9 = 1$, $t' > 0$ и переходъ отъ x, y, z, t къ x', y', z', t' есть одно изъ искомыхъ преобразованій. Къ этимъ преобразованіямъ мы присоединяемъ также произвольныя перемѣщенія нулевой точки пространства и времени и такимъ образомъ составляемъ ту, очевидно, зависящую отъ параметра c, группу преобразованій, которую я обозначаю G_c. Если будемъ теперь увеличивать c до безконечности, т. е. $\frac{1}{c}$ — до нуля, то фигура показываетъ, что вѣтвь гиперболы все болѣе и болѣе сливается съ осью x, уголъ между ассимптотами обращается въ развернутый (180°), спеціальное преобразованіе обращается въ предѣлѣ въ такое, при которомъ ось t' можетъ имѣть произвольное направленіе вверхъ и ось x' все ближе приближается къ оси x. Ясно поэтому, что изъ группы G_c въ предѣлѣ для $c = \infty$ получается именно принадлежащая механикѣ полная группа; она можетъ быть поэтому обозначаема G_∞. При такомъ соотношеніи между двумя группами и въ виду того, что G_c математически болѣе понятна, чѣмъ G_∞, математикъ могъ бы, свободно фантазируя, придти къ мысли, что явленія природы показываютъ инваріантность не для группы G_∞, но, напротивъ,—для группы G_c при опредѣленномъ конечномъ, но (при обыкновенныхъ единицахъ) крайне большомъ c. Подобное предчувствіе было бы замѣчательнымъ торжествомъ чистой математики. Но такъ какъ въ данномъ случаѣ математика оказалась крѣпкой заднимъ умомъ, то ей осталось только гордиться тѣмъ, что она могла, благодаря своимъ успѣшнымъ предварительнымъ работамъ и утонченной остротѣ и дальнозоркости своихъ воззрѣній быстро охватить глубокія слѣдствія такого преобразованія нашего природопониманія.

Я обращаю теперь вниманіе на то, о какомъ значеніи c мы будемъ далѣе говорить. Вмѣсто c войдетъ скорость распространенія свѣта въ пустомъ пространствѣ. Не упоминая ни о пространствѣ, ни о времени, мы можемъ опредѣлить эту величину, какъ отношеніе между электростатическими и электромагнитными единицами количества электричества.

Тогда существованіе инваріантности законовъ природы для соотвѣтствующей группы G_c можетъ быть понимаемо слѣдующимъ образомъ:

Изъ всей совокупности явленій природы можно послѣдовательно усиливающимися приближеніями вывести все точнѣе и точнѣе основную систему x, y, z, t, пространство и время, посредствомъ которыхъ эти явленія выражаются тогда по опредѣленнымъ законамъ. Эта основная система (Bezugssystem) при этомъ нисколько не опредѣляется однозначно при помощи явленій. Можно измѣнять основную систему (Bezugssystem) соотвѣтственно преобразованіямъ группы G_c, причемъ, однако, выраженіе законовъ природы не измѣняется. Напр., можно соотвѣтственно описанной фигурѣ и t' назвать временемъ, но тогда необходимо опредѣлить пространство многообразіемъ трехъ параметровъ—x', y, z и тогда физическіе законы будутъ выражаться посредствомъ x', y, z, t совершенно въ той же формѣ, какъ и посредствомъ x, y, z, t. Мы будемъ, такимъ образомъ, имѣть въ мірѣ не опредѣленное пространство, но безконечное множество пространствъ подобно тому, какъ въ пространствѣ трехъ измѣреній существуетъ безконечное множество плоскостей. Геометрія трехъ измѣреній становится главою физики четырехъ измѣреній. Вы понимаете теперь, что я имѣлъ основаніе сказать въ самомъ началѣ, что пространство и время должны обратиться въ тѣни и только міръ остается въ его цѣломъ.

II.

Теперь является вопросъ, какія явленія вынуждаютъ насъ къ видоизмѣненному пониманію пространства и времени, не противорѣчитъ ли оно фактамъ, наконецъ, доставляетъ ли оно преимущества для описанія явленія.

Прежде чѣмъ мы займемся этими вопросами, сдѣлаемъ одно важное замѣчаніе. Если мы какъ-нибудь индивидуализируемъ пространство и время, то покоющейся субстанціальной точкѣ будетъ соотвѣтствовать, какъ міровая линія, линія, параллельная t-оси, двигающейся равномѣрно субстанціальной точкѣ,—линія, наклоненная къ t-оси, неравномѣрно двигающейся субстанціальной точкѣ — какая-либо искривленная міровая линія. Если мы будемъ разсматривать въ какой-либо міровой точкѣ x, y, z, t проходящую тамъ міровую линію и найдемъ ее параллельною съ какимъ-нибудь радіусомъ-векторомъ OA' вышеупомянутой гиперболоидной полы, то мы можемъ ввести OA', какъ новую ось времени, а тогда при этихъ новыхъ опредѣленіяхъ пространства и времени субстанція представляется покоющеюся въ соотвѣтствующей міровой точкѣ. Мы можемъ, такимъ образомъ, ввести слѣдующую основную аксіому:

Существующая въ какой-либо міровой точкѣ субстанція можетъ быть всегда разсматриваема, какъ покоющаяся при подходящемъ выборѣ пространства и времени.

Аксіома означаетъ, что въ каждой міровой точкѣ выраженіе

$$c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$$

положительно или,—что равнозначуще,—каждая скорость v менѣе c. Поэтому c является верхнимъ предѣломъ всѣхъ субстанціальныхъ скоростей, и въ этомъ лежитъ глубокое значеніе величины c. Въ этомъ другомъ пониманіи аксіома насъ чѣмъ-то при первомъ впечатлѣніи не удовлетворяетъ. Но нужно принять во вниманіе, что можно построить видоизмѣненную механику, въ которую будетъ входить квадратный корень изъ даннаго дифференціальнаго выраженія 2-ой степени, т. ч. явленія, въ которыхъ скорость превосходитъ скорость свѣта, будутъ играть ту же роль, какую въ геометріи имѣютъ фигуры съ мнимыми координатами.

Поводомъ и истинной побудительною причиной къ введенію группы G_c послужило то обстоятельство, что дифференціальное уравненіе распространенія свѣтовыхъ волнъ въ пустомъ пространствѣ имѣетъ группу G_c [1].

Съ другой стороны, понятіе о твердыхъ тѣлахъ имѣетъ смыслъ только въ механикѣ съ группою G_∞. При существованіи съ одной стороны оптики съ G_c и съ другой стороны,— твердыхъ тѣлъ, оказалось-бы, что двѣ гиперболоидныя полы, соотвѣтствующія G_c и G_∞, опредѣляютъ совмѣстно особенное t—направленіе, и это имѣло-бы слѣдствіемъ, что при подходящихъ неподвижныхъ оптическихъ инструментахъ въ обсерваторіи можно было бы замѣтить измѣненіе явленій при различномъ оріентированіи по отношенію къ поступательному движенію земли. Однако, всѣ направ-

---

[1] A. Einstein, Ann. d. Phys, 17, 1905, p. 891; Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik 4. 1907, p. 411.

ленныя къ этой цѣли старанія, въ особенности знаменитый опытъ Михельсона съ интерференціей, имѣли отрицательный результатъ.

Для объясненія этого факта Г. А. Лоренцъ и далъ гипотезу, успѣхъ которой зависитъ именно отъ вытекающей изъ нея инваріантности оптики для группъ G_c. По Лоренцу каждое тѣло, имѣющее движеніе, должно испытывать въ направленіи движенія укороченіе, величина котораго выражается при скорости v отношеніемъ

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Эта гипотеза кажется крайне фантастическою. Ибо сжиманіе является не слѣдствіемъ сопротивленія эфира, но подаркомъ свыше, обстоятельствомъ, сопровождающимъ eo ipso движеніе.

Я хочу показать теперь на нашей фигурѣ, что гипотеза Лоренца вполнѣ эквивалентна съ новымъ пониманіемъ пространства и времени, благодаря которому она становится много понятнѣе. Если мы для простоты отвлечемся отъ y и z, представимъ себѣ пространственный міръ одного измѣренія, то двѣ параллельныя полосы, изъ которыхъ одна вертикальна, какъ ось t, а другая наклонена къ оси t (см. фиг. 1), являютъ изъ себя образы съ одной стороны покоющагося, съ другой стороны—равномѣрно двигающагося тѣла, причемъ и то, и другое сохраняетъ постоянное пространственное протяженіе. Если OA' параллельно второй полосѣ, то мы можемъ ввести t', какъ время, и x', какъ пространственную координату, и тогда второе тѣло будетъ казаться покоющимся, а первое—равномѣрно двигающимся. Мы принимаемъ теперь, что первое тѣло, разсматриваемое какъ покоющееся, имѣетъ длину l, т. е. поперечное сѣченіе PP первой полосы есть l.OC, гдѣ OC есть масштабъ — единица на оси x, и что, съ другой стороны, второе тѣло, разсматриваемое какъ покоющееся, имѣетъ ту-же длину l; слѣдовательно, поперечное сѣченіе второй полосы, параллельное оси x' Q'Q'$=l$.OC'

Мы имѣемъ такимъ образомъ въ этихъ двухъ тѣлахъ образы двухъ равныхъ Лоренцовскихъ электроновъ, одного—покоющагося, другого—равномѣрно двигающагося. Если мы будемъ держаться первоначальныхъ координатъ x, t, то за протяженіе второго электрона нужно принять поперечное сѣченіе QQ его соотвѣтствующей полосы, параллельное оси x. Но очевидно, что если Q'Q'$=l$.OC', то QQ$=l$.OD'. Легкое вычисленіе показываетъ, что, полагая dx/dt для второй полосы равнымъ v, имѣемъ OD'=OC.$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ и, слѣдовательно, PP:QQ$=1:\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Въ этомъ и состоитъ идея Лоренцовской гипотезы о сжатіи электроновъ при движеніи. Если мы будемъ, съ другой стороны, разсматривать второй электронъ, какъ покоющійся, т. е. примемъ за основную систему, систему x', t', то для перваго мы должны будемъ считать длиной сѣченіе P'P' его полосѣ параллельное OC, и мы найдемъ, что первый электронъ укоротится по отношенію ко второму въ томъ же самомъ отношеніи. Дѣйствительно, фигура показываетъ, что P'P'$=$Q'Q'$=$ OD:OC'$=$OD': OC$=$QQ: PP. Лоренцъ назвалъ комбинацію t' отъ x и t мѣстнымъ временемъ равномѣрно двигающагося электрона и употреблялъ физическую интерпретацію этого понятія для лучшаго объясненія гипотезы сжатія. Но только А. Эйнштейну принадлежитъ заслуга отчетливо признать, что время одного электрона такъ же хорошо, какъ и время другого, т. е.

t и t' должны разсматриваться, какъ равнозначущія t [1]). Этимъ самымъ время лишалось своего значенія понятія, однозначно опредѣляемаго явленіями. Но ни Эйнштейнъ, ни Лоренцъ не колебали понятія о пространствѣ, можетъ быть, потому, но что въ разсматриваемомъ спеціальномъ преобразованіи, въ которомъ плоскость x' t' совпадаетъ съ плоскостью x, t, возможно толкованіе, что ось x пространства остается неизмѣнною въ своемъ положеніи. Только смѣлость современной математической мысли можетъ подвинуть къ свободному обращенію съ понятіемъ о пространствѣ. Но послѣ этого новаго шага, неизбѣжнаго, однако, для правильнаго пониманія группы G_c, названіе постулатума относительности для требованія инваріантности относительно группы G_c кажется мнѣ слишкомъ блѣднымъ. Смыслъ постулатума состоитъ въ томъ, что явленія даютъ только міръ 4 измѣреній пространства и времени, но что касается до проэкцій этого міра отдѣльно въ пространствѣ, или во времени, то въ образованіи ихъ мы можемъ пользоваться извѣстною свободою. По этой причинѣ я предложилъ-бы для этого утвержденія скорѣе названіе постулатума абсолютнаго міра (короче, мірового постулатума).

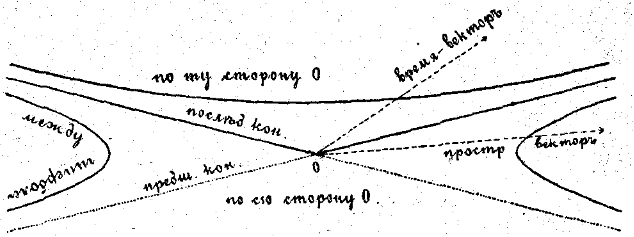
III.

Благодаря міровому постулатуму становится возможно вполнѣ одинаковое разсмотрѣніе четырехъ координатъ x, y, z, t и черезъ это выигрываютъ въ удобопонимаемости формы, въ которыхъ выражаются физическіе законы. Прежде всего пріобрѣтаетъ рѣзкія очертанія понятіе объ ускореніи.

---

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 1905; p. Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik 4. 1907, p. 411.

Я буду пользоваться геометрическимъ способомъ выраженія, который тотчасъ навязывается, какъ только въ тройкѣ x, y, z мы откажемся молчаливо отъ координаты z. Я выбираю произвольную міровую точку O за нулевую точку пространства—времени. Конусъ $c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$ съ вершиною O (фиг. 2); фигура со-



Фиг. 2.

стоитъ изъ двухъ частей соотвѣтственно тому, будетъ ли $t>0$ или <0. Первая пола—конусъ, предшествующій точкѣ O (Vorkegel), состоитъ, какъ мы будемъ говорить, изъ всѣхъ міровыхъ точекъ, „посылающихъ свѣтъ въ O“; второй конусъ, послѣдующій за точкою O (Nachkegel),—изъ всѣхъ міровыхъ точекъ, „получающихъ свѣтъ изъ O“. Область, ограниченная только предшествующимъ конусомъ, будетъ обозначаться, какъ находящаяся по сю сторону O; ограниченная же послѣдующимъ конусомъ по ту сторону O—находится уже разсмотрѣнная гиперболоидная пола

$$F=c^2t^2-x^2-y^2-z^2=1,\ t>0.$$

Область между конусами наполнена однополыми гиперболоидными образами—$F=x^2+y^2+z^2-c^2t^2=k^2$, при чемъ k^2 можетъ принимать всѣ постоянныя положительныя значенія. Особую важность для насъ представляютъ гиперболы, лежащія на этихъ образахъ и имѣющія центромъ точку O. Отдѣльныя вѣтви этихъ гиперболъ можно назвать промежуточными гиперболами центра O. Подобная вѣтвь гиперболы, разсматриваемая какъ міровая линія субстанціальной точки, представляетъ движеніе, въ которомъ скорость для $t=-\infty$ и для $t=+\infty$ ассимптотически приближается къ скорости свѣта.

Если по аналогіи съ понятіемъ о векторѣ въ пространствѣ мы будемъ называть направленный отрѣзокъ въ многообразіи x, y, z, t векторомъ, то мы можемъ различать между время-векторами съ направленіемъ отъ O къ полѣ $+F=1$, $t>0$ и пространство-векторами съ направленіями отъ O къ $-F=1$. Ось времени можетъ идти параллельно съ каждымъ векторомъ перваго рода. Каждая міровая точка между предшествующимъ и послѣдующимъ конусами точки O, при подходящемъ выборѣ, можетъ считаться равновременной съ O, а также и болѣе ранней и болѣе позднею, чѣмъ O. Каждая міровая точка по сю сторону O всегда непремѣнно ранѣе, чѣмъ O, а каждая міровая точка по ту сторону O непремѣнно позже, чѣмъ O. Переходу къ предѣлу для $c=\infty$ соотвѣтствовало бы полному сжатію клинообразной части, расположенной между конусами, въ плоское многообразіе $t=0$. Въ рисункахъ конусы имѣютъ нарочито различную ширину.

Произвольный векторъ, напр., отъ O къ (x, y, z, t) мы разлагаемъ на четыре составляющія x, y, z, t. Если направленія двухъ векторовъ совпадаютъ съ направленіями радіуса вектора OR изъ O къ одной изъ поверхностей $\pm F=1$ и касательной RS въ точкѣ R, соотвѣтствующей поверхности, то векторы будутъ называться нормальными. Поэтому условіе, чтобы векторы съ составляющими x, y, z, t и x_1, y_1, z_1, t_1, были взаимно нормальны, выражается

$$c^2tt_1-xx_1-yy_1-zz_1=0.$$

Для абсолютныхъ величинъ векторовъ различныхъ направленій должны быть фиксированы масштабы (единицы измѣренія), такъ что пространство-вектору отъ O къ $-F=1$ приписывается абсолютная величина 1, а время-вектору отъ O къ $+F=1$, $t>0$... абсолютная величина $\frac{1}{c}$.

Если представимъ себѣ теперь въ міровой точкѣ P (x, y, z, t) проходящую міровую линію субстанціальной точки, то элементу пространство-вектора dx, dy, dz, dt будетъ въ направленіи линіи соотвѣтствовать абсолютная величина

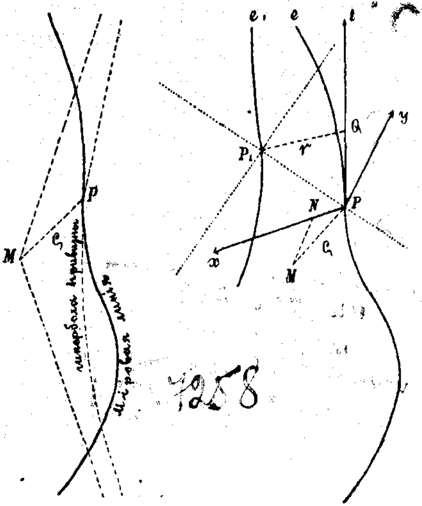
$$d\tau=\frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2}.$$

Интегралъ $\int d\tau=\tau$, взятый на міровой линіи отъ фиксированной исходной точки P_0 до перемѣнной конечной точки P, мы назовемъ *собственнымъ временемъ* субстанціальной точки въ φ. На міровой линіи мы разсматриваемъ x, y, z, t, т. е. составляющія вектора OP, какъ функціи собственнаго времени τ, обозначаемъ ихъ первыя производныя по τ символами $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, вторыя производныя по τ $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ и называемъ соотвѣтствующіе векторы: производную вектора OP по τ *векторомъ движенія* въ P и производную этого *вектора движенія* по τ *векторомъ ускоренія* въ P. При этомъ имѣютъ мѣсто равенства

$$c^2\dot{t}^2-\dot{x}^2-\dot{y}^2-\dot{z}^2=c$$
$$c^2\dot{t}\ddot{t}-\dot{x}\ddot{x}-\dot{y}\ddot{y}-\dot{z}\ddot{z}=0,$$

т. е. векторъ движенія есть время-векторъ, взятый въ направленіи міровой линіи въ точкѣ P и имѣющій абсолютною величиною 1; векторъ ускоренія нормаленъ къ вектору движенія въ P и есть всегда пространство-векторъ.

Существуетъ, какъ легко видѣть, опредѣленная вѣтвь гиперболы, имѣющая съ міровою линіею въ P три безконечно близкія точки, которой ассимптоты суть образующія предшествующаго и послѣдующаго конусовъ. Назовемъ эту вѣтвь гиперболы гиперболою кривизны въ точкѣ P (см. ниже фиг. 3). Если M есть центръ этой гиперболы, то мы имѣемъ такимъ образомъ промежуточную гиперболу съ центромъ M. Если абсолютная величина вектора MP есть ρ, то векторъ ускоренія въ P есть векторъ въ направленіи MP, котораго абсолютная величина есть $\frac{c^2}{\rho}$.



Фиг. 3.

Если $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$ суть всѣ вмѣстѣ O, то гипербола кривизны приводится къ прямой, касающейся къ міровой линіи въ точкѣ P и такимъ образомъ $\rho = \infty$.

IV.

Чтобы выяснить, что допущеніе существованія группы G_c не ведетъ никогда къ противорѣчію въ области физическихъ законовъ, необходимо предпринять пересмотръ всей физики на основаніи предположенія о существованіи этой группы. Этотъ пересмотръ въ извѣстномъ объемѣ оказался успѣшнымъ въ области вопросовъ термодинамики и лучеиспусканія[1]), для электромагнитныхъ явленій, наконецъ, для механики при условіи удержанія понятія о массѣ[2]).

Для послѣдней области необходимо поставить слѣдующій вопросъ: Если сила, имѣющая составляющими по пространственнымъ осямъ X, Y, Z, приложена къ міровой точкѣ P (x, y, z, t), причемъ векторъ движенія есть ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$), то какъ измѣняется эта сила при преобразованіи основной системы?

Но мы знаемъ, что существуютъ извѣстныя положенія, подтвержденныя опытомъ по отношенію къ пондеромоторнымъ силамъ въ электромагнитномъ подѣ въ такихъ случаяхъ, въ которыхъ необходимо допустить существованіе группы G_c. Эти положенія ведутъ къ простому правилу: При измѣненіи основной системы данная сила преобразуется въ новыхъ пространственныхъ координатахъ въ иную силу, такъ что при этомъ сохраняется неизмѣннымъ соотвѣтствующій векторъ, имѣющій составляющими $\dot{t}$X, $\dot{t}$Y, $\dot{t}$Z, $\dot{t}$T, гдѣ

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right),$$

т. е. раздѣленная на c^2 работа силы въ міровой точкѣ. Этотъ векторъ всегда нормаленъ къ вектору движенія въ точкѣ P. Такой силовой векторъ, соотвѣтствующій силѣ въ точкѣ P, будетъ называться двигающимъ силовымъ векторомъ въ P.

---

[1]) M. Planck. Zur Dynamik bewegter Systeme, Berl. Ber. 1907, p. 542 (auch Ann. d. Phys. 1908, p. 1).

[2]) H. Minkowski. Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern (изд. проф. Блюменталя) стр. 45.

Пусть теперь міровая линія, проходящая черезъ P, описывается субстанціальною точкою съ постоянной механической массой m. Пусть m-кратный векторъ движенія въ P называется векторомъ импульса въ P, m-кратный векторъ ускоренія въ P называется силовымъ векторомъ движенія въ P. По этимъ опредѣленіямъ законъ движенія массы—точки при данномъ движущемъ силовомъ векторѣ выражается слѣдующимъ образомъ[1]):

Силовой векторъ движенія равенъ двигающему силовому вектору.

Это положеніе связываетъ вмѣстѣ четыре уравненія для составляющихъ по четыремъ осямъ, причемъ четвертое является слѣдствіемъ трехъ другихъ, такъ какъ оба упомянутыхъ вектора нормальны къ вектору движенія. Вслѣдствіе выше даннаго значенія T четвертое представляетъ, несомнѣнно, теорему энергіи. При этомъ кинетическая энергія массовой точки опредѣляется какъ c^2—краткая составляющая вектора импульса по оси t. Соотвѣтствующее выраженіе ея есть

$$mc^2\frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

т. е. по исключеніи прибавочной постоянной mc^2 выраженіе $\frac{1}{2}mv^2$ механики Ньютона съ точностью до величинъ порядка выше $\frac{1}{c^2}$. При этомъ очень наглядною является зависимость энергіи отъ основной системы. Но такъ какъ t-ось можетъ идти въ направ-

---

[1]) H. Minkowski, тамъ-же см. также M. Planck. Verh. d. Physik, Ges. 4, p. 136, 1906.

леніи каждаго время-вектора, то теорема энергіи съ другой стороны, прилагая ее ко всякой возможной основной системѣ, уже заключаетъ въ себѣ всю систему уравненій движенія. Этотъ фактъ сохраняетъ свое значеніе для аксіоматическаго построенія механики и въ предѣльномъ случаѣ $c=\infty$ и въ этомъ смыслѣ уже обратилъ на себя вниманіе г. Шютца [1]).

Можно а priori такъ выбрать соотношеніе между единицею длины и единицею скорости t, что естественная граница скорости c будетъ равна 1. Если при этомъ ввести вмѣсто $t\,s=\sqrt{-1.}\;t$, то квадратичное дифференціальное выраженіе

$$d\tau^2=-dx^2-dy^2-dz^2-ds^2$$

оказывается вполнѣ симметричнымъ по отношенію къ x, y, z, s и эта симметрія переносится на каждый законъ, не противорѣчащій міровому постулатуму. Поэтому существо этого постулатума можно выразить мистическою формулою

$$3.10^5\ \mathrm{K}mm=\sqrt{-1.}\ \ sec.$$

V.

Преимущества, доставляемыя міровымъ постулатумомъ, обнаруживаются съ особенною ясностью при изученіи дѣйствій по теоріи Максвелля-Лоренца, исходящихъ отъ произвольнаго подвижнаго точечнаго заряда.

Вообразимъ міровую линію подобнаго имѣющаго форму точки электрона e и будемъ разсматривать на ней собственное время τ отъ какой-нибудь начальной точки. Чтобы имѣть поле, производимое электрономъ

---

[1]) J. R. Schütz, Das Princip der absoluter Erhaltung der Energie. Göttinger Nachr. 1897, p. 110.

въ произвольной міровой точкѣ P_1, построимъ предшествующій конусъ, соотвѣтствующій P_1. Онъ встрѣчаетъ неопредѣленную міровую линію электрона, очевидно, въ одной единственной точкѣ P, такъ какъ ея направленія суть повсюду направленія время-векторовъ.

Мы проводимъ въ P касательную къ міровой линіи и строимъ черезъ P_1 къ этой касательной нормаль $P_1 Q$.

Пусть абсолютная величина P_1 есть r. Тогда по опредѣленію предшествующаго конуса абсолютная величина PQ, есть $\frac{r}{c}$. Векторъ въ направленіи PQ, имѣющій абсолютною величиною $\frac{e}{r}$, даетъ въ своихъ составляющихъ по осямъ x, y, z—векторъ—потенціалъ въ точкѣ P_1, умноженный на c; его же составляющая по времени t равна скалярному потенціалу поля, возбужденнаго электрономъ e въ той же точкѣ P_1. Въ этомъ состоятъ элементарные законы Ліенаро и Вихерта 1).

При описаніи поля, вызываемаго электрономъ, оказывается, что раздѣленіе поля на электрическую и магнитную силы есть раздѣленіе относительное и зависитъ отъ избранной оси времени; наиболѣе цѣлесообразно разсматривать одновременно обѣ силы, руководствуясь при этомъ извѣстною, хотя и не полною, аналогіею съ силовымъ винтомъ механики.

Я опишу теперь пондеромоторное дѣйствіе произ-

---

1) A. Liénard. Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée eu un point et. animée d'un mouvement quelconque, L'Eclairage électrique 16 (1898), p. 5, 53, 106. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2), 5 (1900), p. 549.

вольно движущагося точечнаго заряда на другой произвольно движущійся точечный зарядъ.

Вообразимъ черезъ міровую точку P_1 міровую линію второго точечнаго электрона заряда e_1. Мы опредѣляемъ P, Q, r какъ раньше, строимъ затѣмъ центръ гиперболы кривизны въ точкѣ P, наконецъ, опускаемъ нормаль MN изъ точки M къ прямой, проходящей черезъ P и параллельной къ QP_1. Мы проводимъ затѣмъ, принимая P за начало, основную систему слѣдующимъ образомъ: t—ось въ направленіи PQ, x—ось въ направленіи MN, послѣ чего направленіе оси z опредѣляется какъ нормальное къ осямъ x, y, t. Пусть векторъ ускоренія въ P есть $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, векторъ движенія въ P_1 есть $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$.

Тогда движущій силовой векторъ перваго произвольнаго движущагося электрона e на второй произвольно движущійся электронъ въ P_1 выражается

$$-ce_1\left(\dot{t}_1-\frac{\dot{x}_1}{c}\right)\cdot$$

K, причемъ для трехъ составляющихъ K_x, K_y, K_z вектора K имѣютъ мѣсто отношенія

$$cK_t - K_x = \frac{1}{v^2}K_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 v},\ K_y = 0,$$

и, наконецъ, этотъ векторъ K нормаленъ къ вектору движенія въ P_1, и только этимъ находится въ зависимости отъ этого послѣдняго вектора движенія.

Если мы сравнимъ съ этою формулировкою другія ранѣе данныя [1]) того же элементарнаго закона взаимнаго пондеромоторнаго дѣйствія двигающихся точеч-

---

[1]) K. Schwarzschild. Göttinger Nachr. 1903. p. 132.—П. А. Lorentz Enzykl. d. math. Wissensch. Art. V. 14, p. 199.

ныхъ зарядовъ, то нельзя будетъ не признать, что разсматриваемыя отношенія проявляютъ свою полную простоту только въ четырехъ измѣреніяхъ и, напротивъ, даютъ весьма запутанную проэкцію на a priori насильственно навязанное трехмѣрное пространство.

Въ механикѣ, преобразованной соотвѣтственно міровому постулатуму, пропадаютъ дисгармоніи механики Ньютона и современной электродинамики. Я коснусь еще отношенія закона притяженія Ньютона къ этому постулатуму.

Я допущу, что когда двѣ массовыя точки m, m_1 описываютъ ихъ міровыя линіи, то отъ m къ m_1 идетъ двигающій силовой векторъ, котораго выраженіе совпадаетъ съ вышеданнымъ для случая электроновъ, только съ измѣненіемъ $-ee_1$ на $+mm_1$.

Мы разсматриваемъ теперь спеціально случай, когда векторъ ускоренія m постоянно есть нуль, причемъ мы можемъ ввести t такъ, что m можно считать покоющимся; происходитъ только движеніе m подъ вліяніемъ исходящаго изъ m движущаго силового вектора.

Если мы видоизмѣнимъ теперь этотъ векторъ прибавленія фактора $t_1^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, который обращается въ 1 съ точностью до величинъ порядка $\frac{1}{c^2}$, то оказывается [1]), что для положенія x, y, z массовой точки m_1 и его измѣненія во времени получаются снова законы Кеплера, если только замѣнить времена t_1 мѣстными временами τ_1 массовой точки m_1. Такимъ образомъ оказывается, что предложенный законъ притяженія въ связи съ новою механикою не менѣе приспособленъ къ объясненію астрономическихъ наблю-

---

[1]) H. Minkowski, тамъ-же

деній, чѣмъ законъ Ньютона, соединенный съ Ньютоновою механикою.

Точно также и основныя уравненія для электромагнитныхъ явленій въ вѣсомыхъ тѣлахъ подчиняются вполнѣ міровому постулатуму. Даже данный Лоренцомъ выводъ этихъ уравненій на основаніи представленій электронной теоріи нисколько не долженъ быть отброшенъ, какъ я это покажу въ другомъ мѣстѣ.

Не подлежащая исключеніямъ примѣнимость міроваго постулатума, какъ я думаю, составляетъ истинную сущность той электромагнитной картины міра, которая была найдена Лоренцомъ, развита Эйнштейномъ и въ настоящее время выясняется все болѣе и болѣе.

При дальнѣйшемъ развитіи математическихъ слѣдствій найдется достаточное число указаній для опытной провѣрки постулатума, и тогда и тѣ, которымъ тяжело и непріятно разставаться съ привычными воззрѣніями, примирятся съ новыми идеями на мысли о предустановленной гармоніи между чистою математикой и физикой.

Перев. проф. *А. Васильевъ.*

М. Лауэ.

Принципъ относительности.

§ 1. Принципъ относительности Ньютоновой механики.

Процессы, составляющіе предметъ физики, происходятъ въ пространствѣ и во времени. Мы устанавливаемъ какое-нибудь событіе путемъ опредѣленія его мѣстоположенія и момента его наступленія. Научнымъ образомъ это опредѣленіе происходитъ путемъ указанія четырехъ чиселъ; одно изъ нихъ даетъ время (t), отсчитываемое отъ нѣкоторой условной нулевой точки, три другихъ представляютъ „координаты“ мѣста. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ всегда имѣть въ виду Декартовы координаты (x, y, z), дающія три разстоянія какой-нибудь точки отъ трехъ взаимно-перпендикулярныхъ плоскостей. Мѣста пересѣченія этихъ трехъ плоскостей представляютъ три оси координатъ; онѣ образуютъ такъ называемый осевой крестъ (Achsenkreuz). Осевой крестъ также надо установить заранѣе. Совокупность этихъ соглашеній опредѣляетъ для насъ „систему пространства-времени“, къ которой мы относимъ и отъ которой мы отсчитываемъ наши указанія. Поэтому говорятъ также о „системѣ отсчета“ (Bezugssystem). Вопросъ о томъ, какъ ее установить, приводитъ къ теоріи относительности.

Было бы напрасно пытаться сдѣлать здѣсь выборъ чисто логическимъ путемъ[1]. Всѣ возможныя соглашенія приводятъ въ принципѣ къ однимъ и тѣмъ же результатамъ ужъ по тому одному, что указанія, отнесенныя къ одной системѣ пространства-времени, можно выразить въ символахъ другой системы, разъ даны взаимныя отношенія обѣихъ системъ. Въ выборѣ здѣсь могутъ помочь лишь соображенія цѣлесообразности въ связи съ данными опыта. Такъ, напримѣръ, изъ опыта мы знаемъ, что при надлежащемъ выборѣ системы отсчета тѣло, предоставленное самому себѣ, сохраняетъ направленіе и величину своей переносной скорости; его траэкторія является поэтому прямой линіей. Выбранный такимъ образомъ осевой крестъ называютъ, согласно Зейлигеру, инерціальной системой, потому что въ ней имѣетъ мѣсто принципъ инерціи. А требованія, чтобы въ равныя времена проходились равные отрѣзки, даетъ возможность всегда воспроизвести единицу времени. Если бы, напротивъ, мы взяли осевой крестъ, находящійся во вращательномъ движеніи по отношенію къ первому, то это не имѣло бы уже болѣе мѣста. Ужъ напередъ кажется вѣроятнымъ, что употребленіе первой системы приводитъ къ болѣе простой формулировкѣ законовъ механики, чѣмъ примѣненіе второй системы. И, дѣйствительно, опытъ показываетъ, что въ этомъ случаѣ всю механику можно свести къ простому закону, примѣнямому прежде всего къ движенію матеріальной точки (Massenpunkt):

1) Сила = масса × ускореніе.

Масса при этомъ является неизмѣнной величиной, характеризующей матеріальную точку.

Фактически, разумѣется, невозможно установить

---

[1] Ср. напримѣръ, часть I работы Алоиза Мюллера „Das Problem des absoluten Raumes und seine Beziehung zum allgemeinen Raumproblem". Braunschweig. 1911.

какую-нибудь инерціальную систему путемъ наблюденія движеній предоставленныхъ самимъ себѣ тѣлъ, потому что въ нашемъ распоряженіи не имѣется подобныхъ тѣлъ. Въ астрономіи, напримѣръ, весьма часто пользуются осевымъ крестомъ, центръ котораго находится въ солнцѣ, а оси опредѣляются прямыми, направленными къ неподвижнымъ звѣздамъ, не имѣющимъ собственнаго движенія. Но выборъ этотъ оправдывается лишь тѣмъ фактомъ, что въ предѣлахъ доступной намъ точности въ этой системѣ имѣетъ дѣйствительно мѣсто основное уравненіе 1) механики, что доказывается сравненіемъ выводовъ изъ него съ опытомъ. И если бы даже можно было осуществить разсмотрѣнный выше способъ, то установленіе инерціальной системы все-таки страдало бы отъ неточности, неизбѣжно связанной со всякимъ эмпирическимъ опредѣленіемъ. Поэтому инерціальной системы никогда нельзя опредѣлить вполнѣ точно, но можно лишь путемъ повторныхъ наблюденій опредѣлять ее все точнѣе и точнѣе.

Но примѣнимо ли, по крайней мѣрѣ, опредѣленіе инерціальной системы къ одной единственной системѣ отсчета? Должны ли мы при постоянно повторяющемся приближеніи прійти въ концѣ-концовъ къ одной опредѣленной системѣ? Нисколько. Уже формулировка основного закона показываетъ, что не существуетъ ни исключительныхъ направленій для силы, ни исключительныхъ мѣстъ для положенія матеріальной точки. Для механики, какъ и для физики вообще, всѣ направленія и точки въ пространствѣ равноцѣнны, поэтому можно произвольнымъ образомъ выбрать начальную точку системы координатъ и направленія ея осей. Системы отсчета, получающіяся изъ нѣкоторой инерціальной системы путемъ перемѣщенія начальной точки и вращенія осевого креста, вполнѣ равноцѣнны этой первоначальной системѣ, такъ что впредь мы будемъ обозначать совокупность ихъ, какъ одну единственную систему отсчета. Этотъ способъ обозначенія мы сохранимъ также въ § 3 и слѣд. Названныя выше измѣненія представляютъ чисто математическія операціи, не имѣющія никакого физическаго значенія.

Но даже и при этомъ словоупотребленіи существуетъ не одна лишь система отсчета, но цѣлая группа ихъ. Вообразимъ себѣ нѣкоторую, отмѣченную значками, систему отсчета (x', y', z'), которая движется равномѣрнымъ переноснымъ образомъ по отношенію къ инерціальной системѣ (x, y, z), такъ что переходъ отъ одной къ другой совершается путемъ того, что въ новѣйшее время было названо „Галилеевымъ преобразованіемъ“, т.-е. путемъ уравненій:

$$2)\quad x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

или путемъ обратныхъ имъ уравненій:

$$3)\quad x = x' + vt \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'.$$

У скоростей q и q' какой-нибудь точки въ обѣихъ системахъ одинаковыя составляющія по направленію y-овъ и z-овъ, между тѣмъ какъ составляющія по направленію x-овъ отличаются добавочнымъ членомъ v:

$$4)\quad q_x = q'_x + v, \quad q_y = q'_y, \quad q_z = q'_z.$$

Поэтому ускоренія (составляющія которыхъ даются вѣдь измѣненіями составляющихъ скоростей въ единицу времени) равны въ обѣихъ системахъ. Такимъ же точно образомъ сила и масса равны въ обѣихъ системахъ. Слѣдовательно, и въ отмѣченной значками системѣ имѣетъ мѣсто основное уравненіе 1), т.-е. и она, какъ и не отмѣченная система, представляетъ инерціальную систему. Правда, если бы v измѣнялось во времени, то это заключеніе не было бы вѣрнымъ. Оно истинно лишь по отношенію къ чисто переноснымъ и равномѣрнымъ движеніямъ. Слѣдовательно, существуетъ столько возможныхъ инерціальныхъ системъ, сколько существуетъ скоростей *v*, т.-е., выражаясь языкомъ математика, ихъ имѣется трикратно-протяженная безконечность, потому что каждая изъ трехъ составляющихъ скоростей можетъ принимать однократно-протяженную безконечность значеній. Всѣ эти системы отличаются другъ отъ друга, очевидно, лишь скоростями, какими обладаетъ въ нихъ какая-нибудь точка. Если бы существовала только одна механически выдѣляющаяся система, то каждой матеріальной точкѣ можно было бы приписать нѣкоторую опредѣленную скорость, именно, скорость, отнесенную къ привиллегированной системѣ. Ее умѣстно было бы назвать абсолютной скоростью этой точки. Въ дѣйствительности же всякое указаніе скорости имѣетъ смыслъ лишь тогда, когда прибавляютъ, по отношенію къ какой системѣ изъ вышесказаннаго безконечнаго комплекса производится измѣреніе скорости. Поэтому положеніе о множествѣ этихъ системъ называютъ принципомъ относительности механики.

Можетъ быть, все это имѣетъ весьма тощій видъ, однако, эти размышленія принадлежатъ къ важнѣйшимъ познаніямъ, достигнутымъ нами въ физикѣ. Научный подвигъ Коперника заключался, напримѣръ, не въ чемъ иномъ, какъ въ переходѣ отъ нѣкотораго, неизмѣнно связаннаго съ землею, осевого креста къ нѣкоторой инерціальной системѣ. Только это и сдѣлало возможнымъ основаніе механики Галилеемъ и Ньютономъ. Все это стало теперь общимъ научнымъ достояніемъ, такъ что врядъ ли бы стоило еще разъ повторять это, если бы въ совсѣмъ послѣднее время не оказалось необходимости произвести здѣсь нѣкоторыя измѣненія. Именно, обнаружилось, что и внѣ механики невозможно никакимъ физическимъ процессомъ,—напримѣръ, хотя бы съ помощью электромагнитно-оптическихъ явленій—установить абсолютную переносную скорость, т.-е. обнаружилось, что существуетъ принципъ относительности для всей физики. Но Галилеево преобразованіе, навѣрное, не имѣетъ мѣста въ электродинамикѣ; поэтому оно должно быть замѣнено здѣсь чѣмъ-нибудь другимъ. Мы не безъ умысла привели въ уравненіяхъ 2) и 3) тождественное преобразованіе для времени $t'=t$. Согласно господствовавшимъ до сихъ поръ и одинаково глубоко укоренившимся какъ въ философіи, такъ и въ физикѣ, воззрѣніямъ, время существуетъ абсолютнымъ образомъ, безъ какого бы то ни было отношенія къ пространственному осевому кресту. Заслуга Эйнштейна заключается въ томъ, что онъ увидѣлъ въ этомъ необоснованный предразсудокъ.

§ 2. Электро-динамика и принципъ относительности.

Разсужденіями § 1 вопросъ о физически пригодной системѣ отсчета былъ порѣшенъ для всякаго, вѣрующаго въ Ньютонову механику и въ сводимость всѣхъ физическихъ процессовъ къ механическимъ. Въ теченіе многихъ десятилѣтій это допущеніе было общепринятымъ. Даже электро-динамика выросла на этой почвѣ. Максуэллъ пришелъ къ своимъ основнымъ уравненіямъ электродинамики, благодаря представленіямъ о механическихъ процессахъ въ эѳирѣ. Вѣдь со временъ Фарадэя эѳиръ сталъ истиннымъ носителемъ электро-магнитныхъ явленій, ихъ единственнымъ носителемъ въ пустомъ пространствѣ. Но онъ принималъ существеннѣйшее участіе и въ процессахъ, происходящихъ въ матеріи. Точно также эѳиръ уже давно (со временъ Гюйгенса) сталъ носителемъ оптическихъ явленій. Когда Максуэллъ и Герцъ сдѣлали изъ оптики вѣтвь электродинамики, то обѣ эти его функціи удачнѣйшимъ образомъ слились въ одну единственную.

Но это вмѣшательство эѳира придало совсѣмъ иной характеръ вопросу о системѣ отсчета. Вѣдь если всѣ его части находились (какъ это допускало большинство теорій) совершенно или приблизительно въ покоѣ въ нѣкоторой системѣ отсчета, то эта система отсчета должна была играть въ электро-магнитныхъ явленіяхъ роль, отличную отъ роли всѣхъ другихъ системъ отсчета. Можно было надѣяться показать на подобныхъ явленіяхъ абсолютную скорость какого-нибудь тѣла, т.-е. его движеніе по отношенію къ эѳиру. Число произведенныхъ съ этой цѣлью опытовъ необыкновенно велико. Мы здѣсь разсмотримъ лишь два опыта: интерференціонные опыты Физо и Майкельсона [1]).

Допустимъ, что мы можемъ придать нѣкоторому тѣлу, обладающему показателемъ преломленія n, вмѣстѣ съ находящимся въ немъ эѳиромъ скорость v по отношенію къ нѣкоторой инерціальной системѣ. Лучъ свѣта, пробѣгающій его въ направленіи скорости, долженъ былъ бы въ этомъ случаѣ, если отнести его къ этой системѣ, обладать скоростью

$$\frac{c}{n}+v.$$

(c это скорость свѣта въ пустомъ пространствѣ равная $3{,}10^{10}$ cm sec.$^{-1}$). Вѣдь, согласно принципу относительности механики, этотъ лучъ свѣта обладаетъ, съ одной стороны, скоростью $\frac{c}{n}$ по отноше-

---

[1]) Подробнѣе см. напримѣръ, M. Laue „Die Relativitätsprincip“. Zweite Auflage. Braunschweig, 1913, § 2.

нію къ тѣлу, какъ если бы оно покоилось, съ другой же стороны, согласно формулѣ 4), равно направленныя скорости складываются. Вмѣсто этого интерференціонный опытъ, произведенный сперва Физо, а потомъ Майкельсономъ, далъ

$$\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Такимъ образомъ, къ $\frac{c}{n}$ прибавляется не v цѣликомъ, но v, умноженное на Френелевъ коэффиціентъ увлеченія $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. Что оставалось заключить отсюда, какъ не то, что вышеуказанное допущеніе было ошибочно, т.-е. что эѳиръ не движется вмѣстѣ съ тѣломъ, но остается въ покоѣ? И дѣйствительно, на основаніи этого предположенія удалось даже — напримѣръ, Лоренцу съ его теоріей электроновъ — вывести правильно количественное значеніе Френелева коэффиціента увлеченія. Такимъ образомъ въ опытѣ Физо можно было увидѣть непосредственное доказательство физическаго существованія эѳира и абсолютной скорости (въ смыслѣ теоріи относительности этотъ опытъ подтверждаетъ лишь знаменитую Эйнштейнову теорему сложенія скоростей).

Но, сверхъ всякаго ожиданія, цѣлый рядъ многочисленныхъ опытовъ не далъ того же самаго доказательства, хотя, повидимому, они были произведены при гораздо болѣе благопріятныхъ обстоятельствахъ. Мы имѣемъ въ виду всѣ тѣ опыты, которые должны были обнаружить вліяніе движенія земли на электро-магнитныя или оптическія явленія. Условія здѣсь казались болѣе благопріятными, потому что скорость земли по отношенію къ эѳиру равна въ общемъ, приблизительно, $3{,}10^6$ cm. $\sec^{-1}$, т.-е. несравненно больше, чѣмъ скорости, употреблявшіяся при опытѣ Физо [1]. Однако, ни разу опытъ подобнаго рода не привелъ къ положительному результату. Для обоснованія принципа относительности этотъ рядъ опытовъ играетъ ту же роль, какую сыграли для обоснованія принципа сохраненія энергіи попытки построить perpetuum mobile. Послѣдовательный рядъ неудачъ привелъ, въ концѣ-концовъ, къ убѣжденію, что этимъ попыткамъ противодѣйствуетъ нѣкоторый законъ природы.

Въ началѣ, правда, казалось, что указанная выше гипотеза покоящагося эѳира можетъ справиться съ этими фактами. Именно Лоренцъ въ 1895 г. [2] вывелъ изъ расширенной имъ теоріи Максуэлля заключеніе, что подобные опыты могутъ привести къ положительному результату лишь въ томъ случаѣ, если точность ихъ будетъ того же порядка величины, что̀ квадратъ отношенія скорости земли къ скорости свѣта, т.-е. порядка величины 10^{-8}, но изъ всѣхъ этихъ опытовъ ни одинъ не представлялъ указываемой степени точности, за единственнымъ исключеніемъ интерференціоннаго опыта Майкельсона [3], который съ тѣхъ поръ повторялся неоднократно и точность котораго была доведена до того, что можно было бы наблюдать сотую часть ожидаемаго эффекта, если бы таковой имѣлъ мѣсто.

---

[1] Эта величина получается изъ астрономическихъ фактовъ, исходя изъ правдоподобнаго допущенія, что система неподвижныхъ звѣздъ, взятая какъ цѣлое, не имѣетъ по отношенію къ эѳиру существенно большей скорости. Разумѣется, направленіе и величина скорости измѣняются вмѣстѣ съ временемъ года, но для продолжительности одного опыта ее можно считать совершенно постоянной.

[2] H. A. Lorentz. „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“. Leiden, 1895.

[3] Впослѣдствіи къ этому присоединился электростатическій опытъ Трутона и Нобля, обладающій той же степенью точности.

Ради простоты мы здѣсь изложимъ основную идею опыта Майкельсона на схемѣ, имѣющей мало общаго съ реальной обстановкой опыта. Вообразимъ себѣ шаръ радіуса l, лишенный всякаго вещества, для прохожденія котораго свѣтъ употребляетъ доступный измѣренію промежутокъ времени. Въ центрѣ M шара находится наблюдатель, который въ состояніи послать одновременно во всѣ стороны быстрый свѣтовой сигналъ. Наблюдатель этотъ черезъ нѣкоторое время— именно, когда свѣтовой сигналъ дойдетъ до периферіи шара и вернется оттуда—увидитъ, какъ засвѣтится поверхность шара. Если шаръ находится въ покоѣ по отношенію къ эѳиру, то всѣ его части засвѣтятся одновременно. Положимъ теперь, что шаръ движется параллельно своему діаметру $\overrightarrow{AB}$ со скоростью q. Въ такомъ случаѣ свѣтъ возвращается изъ различныхъ направленій въ различныя времена. Прежде всего—и именно во время $\frac{2l}{\sqrt{c^2-q^2}}$ послѣ отправленія свѣтового сигнала—засвѣтится для наблюдателя большой кругъ шара, перпендикулярный къ $\overrightarrow{AB}$, послѣдними — во время $\frac{2lc}{c^2-q^2}$ —точки A и B [1]. Если не говорить о томъ,

---

[1] Время пробѣга для движущихся со скоростью q отрѣзковъ $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ и для перпендикулярныхъ къ нимъ радіусовъ $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{CM}$ равны соотвѣтственно $\frac{l}{c-q}$, $\frac{l}{c+q}$ и $\frac{l}{c^2-q^2}$. Вѣдь $c \pm q$ и $\sqrt{c^2-q^2}$ представляютъ относительныя скорости свѣта. Вслѣдствіе этого время возвращенія изъ A или B равно

$$\frac{l}{c-q} + \frac{l}{c+q} = \frac{2lc}{c^2-q^2}.$$

Время возвращенія изъ C равно $\frac{2l}{\sqrt{c^2-q^2}}$. Разница обоихъ происходитъ-ли движеніе въ направленіи $\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{BA}$, можно было бы изъ наблюденія разности во времени опредѣлить абсолютную скорость q. Опытъ Майкельсона показываетъ, что не существуетъ вовсе подобной разницы во времени. Наоборотъ, наблюдатель замѣчаетъ, что при всѣхъ обстоятельствахъ начинаетъ одновременно свѣтиться вся поверхность шара.

Какъ же объяснить это? Идея Ритца, заключавшаяся въ томъ, чтобы измѣнить электродинамику и признать скорость свѣта зависящей отъ скорости источника свѣта (подобно тому, какъ скорость ядра зависитъ отъ скорости орудія), помогаетъ справиться съ этимъ затрудненіемъ, но она за то нарушаетъ самые достовѣрные факты оптики. Лоренцъ поэтому вынужденъ былъ принять допущеніе, что тѣло, движущееся по отношенію къ эѳиру со скоростью q, испытываетъ подъ вліяніемъ эѳира сокращеніе, параллельно скорости, въ отношеніи $\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} : 1$ (сокращеніе Лоренца). Дѣйствительно, такъ какъ точки A и B въ случаѣ движенія не находятся уже на разстояніи l отъ M, но на разстояніи $l\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}$, то промежутокъ времени, въ который свѣтъ возвращается отъ нихъ, становится равнымъ $\frac{2l}{\sqrt{c^2-q^2}}$; такимъ образомъ, исчезаетъ вышеуказанная разница во времени.

Въ этомъ допущеніи заключался сознательный разрывъ съ Ньютоновской механикой и прежде всего съ ея принципомъ относительности: вѣдь теперь абсо-

---

значеній, если брать лишь первое приближеніе, равна

$$\frac{l}{c}\cdot\frac{q^2}{c^2}.$$

лютное движеніе должно было оказывать механическое вліяніе, которое потому лишь ускользало отъ наблюденія, что и масштабы, находящіеся въ томъ же движеніи, сами обнаруживали сокращеніе Лоренца, въ то время какъ для сравненія съ покоящимися масштабами недоставало возможности достаточно точнаго измѣренія. Вѣдь сокращеніе какой-нибудь длины при максимальныхъ астрономическихъ скоростяхъ не превышало въ лучшемъ случаѣ милліонной доли. Впрочемъ, гипотеза сокращенія являлась не единственнымъ необходимымъ измѣненіемъ механики въ этой теоріи. Наоборотъ, и всевозможныя силы, какъ, напримѣръ, молекулярныя силы, должны были испытать вліяніе со стороны абсолютнаго движенія, именно то вліяніе, которое электродинамика приписывала силамъ своей собственной области. Вообще Лоренцова теорія 1904 г. [1]) стоитъ на слѣдующей точкѣ зрѣнія: какъ въ электродинамикѣ, такъ и въ механикѣ, имѣется вліяніе абсолютнаго движенія; но различныя вліянія всегда такъ взаимно компенсируются, что наблюдатель, увлекаемый тѣмъ же движеніемъ, не замѣчаетъ вовсе ихъ.

Мы видимъ, какъ близко подошла эта точка зрѣнія, несмотря на свое сознательное подчеркиваніе абсолютнаго движенія, къ теоріи относительности. Фактически уже здѣсь встрѣчается формула преобразованія, которая призвана была замѣнить Галилеево преобразованіе. Отсюда ея названіе „Лоренцово преобразованіе“. Мало того, экспериментально было бы невозможно произвести выборъ между этой теоріей и Эйнштейновой теоріей относительности, и, если,

---

[1]) H. A. Lorentz. „Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light“. Proc. Amsterdam. 1904 p. 809.

тѣмъ не менѣе, теорія Лоренца отошла на задній планъ — хотя она еще имѣетъ сторонниковъ среди физиковъ—то это произошло, безъ сомнѣнія, въ силу основаній философскаго порядка. Ея всестороннее согласіе съ теоріей относительности показываетъ, что никогда не удастся обнаружить реальнымъ образомъ ея привилегированной системы отсчета или, что̀ сводится къ тому же, не удастся обнаружить движенія какого-нибудь тѣла по отношенію къ эѳиру. Но вмѣстѣ съ этимъ теряетъ свою физическую цѣнность утвержденіе, что эѳиръ существуетъ. Кромѣ того, эта теорія должна была предпринять измѣненія во многихъ пунктахъ механики. Наоборотъ, чѣмъ-то несравненно болѣе величественнымъ являлся уже заранѣе ходъ идей Эйнштейна, которому удалось въ 1905 г. дойти путемъ глубокой критики понятія о времени до рѣшающаго пункта и дать такимъ образомъ сразу рѣшеніе загадки [1]).

§ 3. Лоренцово преобразованіе.

Принципъ относительности, отрицающій у абсолютнаго движенія физическій смыслъ, гласитъ въ точной формулировкѣ: Изъ совокупности явленій природы можно путемъ все большихъ приближеній опредѣлить все точнѣе и точнѣе нѣкоторую систему отсчета x, y, z, t, въ которой имѣютъ силу законы природы въ опредѣленныхъ математически простыхъ формахъ. Но эта система отсчета не опредѣляется явленіями вовсе однозначнымъ образомъ; напротивъ того существуетъ трикратно протяженное безконечное многообразіе равноправныхъ системъ, движу-

---

[1]) A. Einstein. „Zur Elektrodynamik der bewegten Körper“. Annalen der Physik. 17, 891, 1905.

щихся другъ относительно друга съ равномѣрными скоростями.

Первая задача заключается въ томъ, чтобы вывести формулы преобразованія, съ помощью которыхъ мы переходимъ отъ одной правомѣрной системы отсчета къ другой. Для этого необходимо знаніе какого-нибудь закона природы. Въ принципѣ должно быть безразлично, какой именно законъ мы выберемъ: вѣдь если бы при различномъ выборѣ мы пришли къ различнымъ формуламъ преобразованія, то это значило бы, что не для всѣхъ законовъ природы — въ противорѣчіе съ принципомъ относительности — правомѣренъ одинъ и тотъ же ансамбль системъ отсчета. Но, очевидно, особенно выгодно положить въ основу разсмотрѣнія процессы, происходящіе въ пустомъ пространствѣ: вѣдь въ противномъ случаѣ состояніе движенія матеріи входитъ въ формулировку закона, и при переходѣ отъ одной системы отсчета къ другой его приходится перечислить [1]). Въ пустомъ же пространствѣ не имѣется этого усложненія. Но если не говорить о весьма мало изученномъ тяготѣніи, то мы знаемъ въ пустомъ пространствѣ лишь одинъ видъ процессовъ, именно электромагнитные процессы. При этомъ, благодаря опыту Майкельсона, установлено съ величайшей точностью, что ихъ скорость распространенія c во всѣхъ правомѣрныхъ системахъ отсчета независима отъ направленія. Къ этому мы прибавимъ еще то, что распространеніе элекромагнитныхъ процессовъ должно совершаться во всѣхъ системахъ съ одинаковой скоростью c. Вѣдь, въ противномъ случаѣ, мы могли бы—въ противорѣчіе съ принципомъ относительности—отличать физически другъ отъ друга

---

[1]) Поэтому невозможно замѣнить въ дальнѣйшемъ разсмотрѣніи скорость свѣта хотя бы, напримѣръ, скоростью звука.

различныя системы путемъ экспериментальнаго опредѣленія c. Этотъ законъ мы положимъ въ основу нашего разсмотрѣнія. Слѣдствія изъ него мы прежде всего представимъ наглядно и чисто количественнымъ образомъ на одномъ примѣрѣ.

Возьмемъ нѣкоторую правомѣрную систему отсчета K, въ которой покоится тѣло A въ точкѣ $x=0$, $y=0$, $z=0$. Въ моментъ $t=0$ изъ тѣла посылается свѣтовой сигналъ во всѣ стороны. Этотъ сигналъ доходитъ одновременно до двухъ другихъ тѣлъ B и C, находящихся на равномъ разстояніи отъ A и лежащихъ съ A на одной прямой. Дѣйствительно, геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, до которыхъ доходитъ этотъ сигналъ въ одно и то же время t—это шаровая поверхность, описанная вокругъ нулевой точки радіусомъ A.

Отнесемъ теперь этотъ самый процессъ къ другой правомѣрной системѣ K′, движущейся по отношенію къ K со скоростью v въ направленіи $\overrightarrow{BC}$. Въ этомъ случаѣ три матеріальныя точки A, B и C обладаютъ въ K′ скоростью v въ направленіи $\overrightarrow{CB}$. Начальную точку 0 координатъ x', y' z' и времени t' мы можемъ, очевидно, выбрать такъ, что сигналъ выходитъ и въ K′ изъ точки 0 ($x'=0$, $y'=0$, $z'=0$) въ моментъ $t'=0$. Для этого тѣло A должно совпадать въ моментъ $t'=0$ съ 0. Но матеріальныя точки B и C находятся на шаровой поверхности съ центромъ A, а A совпадаетъ съ 0 лишь въ мгновенье $t'=0$. Въ какой нибудь позднѣйшій моментъ t', въ который сигналъ достигаетъ всѣхъ точекъ шаровой поверхности, описанной вокругъ 0 радіусомъ ct', между A и 0 находится отрѣзокъ vt'. Вслѣдствіе этого не существуетъ такого момента t', для котораго B и C лежатъ на свѣтовой шаровой поверхности. Наоборотъ сигналъ доходитъ до C скорѣе, чѣмъ до B, ибо C бѣжитъ ему навстрѣчу, В. убѣгаетъ отъ него. Два событія, которыя одновременны въ системѣ К, имѣютъ мѣсто въ системѣ К', вообще говоря, въ различныя времена. Тождественное преобразованіе для времени, составлявшее часть Галилеева преобразованія, не можетъ быть здѣсь удержано.

Это побуждаетъ насъ къ критикѣ понятія „времени“. Время мы измѣряемъ съ помощью часовъ, причемъ мы здѣсь не имѣемъ въ виду общеупотребительныхъ механическихъ инструментовъ того же наименованія. Всякій процессъ во внѣшнемъ мірѣ въ своемъ поступательномъ движеніи можетъ служить намъ для измѣренія времени, лишь бы мы знали его причины такъ хорошо и точно, что при этомъ не можетъ обнаружиться никакой недоступной контролю причины. Мы вообразимъ себѣ огромное число подобныхъ совершенно одинаковыхъ часовъ и размѣстимъ ихъ въ самыхъ различныхъ точкахъ пространства покоящимися въ одной и той же системѣ К. Благодаря этому у насъ получается равенство мѣры времени для всѣхъ мѣстъ. Но, чтобы получить единое опредѣленное время для всей системы отсчета К, мы должны еще сравнить нулевыя точки ихъ показаній времени, слѣдовательно, должны сдѣлать ихъ синхронными. Лишь въ этомъ случаѣ показаніе стрѣлки каждыхъ часовъ даетъ намъ соотвѣтствующее ея мѣсту время t для системы отсчета К.

Для этого намъ послужитъ постулатъ, что скорость свѣта должна имѣть величину c. Вѣдь это означаетъ слѣдующее: если двѣ пары часовъ находятся другъ отъ друга на разстояніи l и если свѣтовой сигналъ проходитъ этотъ отрѣзокъ, то показаніе первыхъ часовъ при отходѣ сигнала и вторыхъ часовъ при прибытіи сигнала отличаются другъ отъ друга на $\frac{l}{c}$. Разъ выбрана нулевая точка первыхъ часовъ, то указываемый постулатъ опредѣляетъ нулевую точку вторыхъ часовъ.

Это опредѣленіе не приводитъ къ противорѣчію съ самимъ собой, если сравнить попарно всѣ наши часы различнымъ образомъ. Для доказательства, разсмотримъ три пары часовъ, находящихся въ мѣстахъ А, В и С, и допустимъ, что какъ В, такъ и С, поставлены синхронно съ А. Пошлемъ изъ А свѣтовой сигналъ въ В, который, отразившись тамъ безъ потери времени, доходитъ до С, а оттуда аналогичнымъ образомъ возвращается въ А. Если часы А показывали при отходѣ сигнала время нуль, то при возвращеніи его они показываютъ время:

$$t_A = \frac{1}{c} \ (AB + BC + CA),$$

потому что сигналъ прошелъ отрѣзки АВ, ВС, СА со скоростью *c*. Такъ какъ по предположенію часы В синхронны съ А, то по прибытіи туда сигнала они показывали время

$$t_B = \frac{1}{c} \ AB,$$

Точно также, въ виду синхронности А и С, часы С при отходѣ изъ С свѣтового сигнала показывали время:

$$t_C = t_A - \frac{1}{c} \ CA = \frac{1}{c} \ (AB + BC).$$

Вслѣдствіе этого

$$t_C - t_з = \frac{1}{c} \ BC,$$

т.-е. и часы В и С синхронны. При указанномъ способѣ опредѣленія времени получается фактически, что скорость свѣта имѣетъ всегда значенiе c, но, разумѣется, какъ показываетъ приведенный выше примѣръ, мы приходимъ для каждой системы отсчета къ другому времени.

Не наша обязанность дать здѣсь философское оправданiе этому. Мы лишь заранѣе укажемъ на то, что изъ преобразованiя времени можно получить чисто физическiя, доступныя экспериментальной повѣркѣ слѣдствiя.

Формулируя математически законъ распространенiя свѣта, мы прямо получаемъ формулы преобразованiя. Если, беря вышеуказанный примѣръ, въ системѣ K въ моментъ $t=0$ изъ точки $x=0$, $y=0$, $z=0$ выходитъ свѣтовой сигналъ, то во время t онъ достигаетъ всѣхъ точекъ „свѣтовой шаровой поверхности“.

$$5)\quad x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0.$$

Въ системѣ K′, движущейся по отношенiю къ K со скоростью v, мы можемъ всегда выбрать координаты и начало времени такъ, что тотъ же самый сигналъ во время $t'=0$ выходитъ изъ точки $x'=y'=z'=0$. Въ такомъ случаѣ сигналъ этотъ достигнетъ во время t' — отнесенный къ K′—шаровой поверхности.

$$5a)\quad x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=0.$$

Спросимъ теперь, каковы должны быть линейныя формулы преобразованiя между x, y, z, t, съ одной стороны, и x', y', z', t', съ другой, для того чтобы свѣтовая шаровая поверхность переходила снова въ свѣтовую шаровую поверхность, т.-е. для того, чтобы равенство 5) переходило въ равенство 5a), если мы въ немъ замѣнимъ x, y, z, t соотвѣтственно x', y', z', t'.

Получающійся на этотъ вопросъ однозначный отвѣтъ гласитъ [1]):

$$6)\ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v}{c^2}}}$$

или, обратно, .

$$7)\ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c}}},\ y = y',\ z = z',\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c}}}$$

---

[1]) Мы выбираемъ формулы преобразованія линейными, потому что въ противномъ случаѣ нулевыя точки координатъ или времени играли бы, хотя бы въ одной изъ обѣихъ системъ, особенную роль. Но мы принимаемъ, какъ законъ природы, что всѣ точки пространства и времени равноцѣнны. Несущественнымъ, но съ математической точки зрѣнія упрощающимъ, условіемъ является то, что мы принимаемъ оси x и x', y и y', z и z' соотвѣтственно взаимно параллельными, а оси x и x', сверхъ того, еще параллельными переносной скорости v системы K′ по отношенію къ системѣ K. Такимъ образомъ, мы получаемъ равенства

$$x' = \varkappa\ (x - vt),\ y' = \lambda y,\ z' = \lambda z,\ t' = \mu t - \nu x.$$

Легко убѣдиться прежде всего, что λ должно равняться 1; дѣйствительно λ можетъ зависѣть только отъ v^2 и, въ виду равноцѣнности K и K', должно имѣть мѣсто также равенство $y = \lambda y'$. Далѣе, если мы должны имѣть тождественно

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \alpha(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2),$$

то должно быть

$$\alpha = +1,\ k = \mu = \frac{+1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ \nu = \mu\ \frac{v}{c^2}.$$

Мы выбираемъ положительные знаки передъ радикаломъ, потому что, въ случаѣ $v = 0$, должно быть $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$.

Эти равенства называютъ Лоренцовымъ преобразованіемъ.

Замѣчательнымъ свойствомъ Лоренцова преобразованія является то, что, если произвести послѣдовательно другъ за другомъ два или нѣсколько подобныхъ преобразованій, то ихъ можно всегда замѣнить однимъ единственнымъ преобразованіемъ [1]), или, выражая это свойство математическимъ языкомъ: совокупность всѣхъ Лоренцовыхъ преобразованій образуетъ группу. Какую бы изъ правомѣрныхъ системъ мы ни взяли за исходную, примѣняя Лоренцовы преобразованія, мы всегда получимъ члены одного и того же ансамбля системъ отсчета. И здѣсь обнаруживается равноправность всѣхъ системъ отсчета. Впрочемъ, то же самое можно сказать и о Галилеевомъ преобразованіи (равенства 2 и 3); но въ то время, какъ въ случаѣ Галилеева преобразованія скорости v можно придать любое значеніе, въ случаѣ Лоренцова преобразованія приходится ограничиваться значеніями $v < c$. Дѣйствительно, въ противномъ случаѣ въ равенствахъ 6) и 7) радикалъ $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

---

[1]) При переходѣ отъ K къ K′ мы получаемъ согласно предыдущему примѣчанію,

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+t'^2-c^2t'^2.$$

При соотвѣтствующемъ переходѣ отъ K′ къ K″

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x''^2+y''^2+z''^2-c^2t''^2$$

и т. д. Если, примѣняя послѣдовательно Лоренцовы преобразованія, мы пріидемъ въ концѣ концовъ къ системѣ $K^{(n)}$, то изъ этихъ равенствъ слѣдуетъ:

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x^{(n)2}+y^{(n)2}+z^{(n)2}-c^2t^{(n)2},$$

т. е. что нѣкоторое Лоренцово преобразованіе непосредственно приводитъ отъ K къ $K^{(n)}$.

не имѣлъ бы уже конечнаго и дѣйствительнаго значенія, какъ это должно быть, чтобы преобразованіе сохранило физическій смыслъ. Всѣ правомѣрныя системы отсчета движутся другъ относительно друга съ подъ-свѣтовой скоростью. Къ вопросу о физическомъ значеніи этого положенія мы вернемся въ ближайшихъ параграфахъ.

Весьма поучительно задать себѣ вопросъ, въ какомъ пунктѣ отдѣляются разсужденія этого § отъ соотвѣтствующаго хода мыслей въ Ньютоновой механикѣ. Принципъ относительности, какъ мы его формулировали въ первомъ положеніи, входитъ безъ ограниченій и въ концепцію природы Ньютоновой механики. Разрывъ съ ней совершается лишь въ тотъ моментъ, когда мы утверждаемъ, что свѣтъ распространяется въ пустомъ пространствѣ съ конечной скоростью *c*. Механическая концепція природы могла принимать въ дѣйствительно пустомъ, незаполненномъ никакимъ эѳиромъ, пространствѣ лишь мгновенныя дальнодѣйствія, какъ это и имѣло мѣсто въ случаѣ тяготѣнія.

Дѣйствительно, легко убѣдиться, что изъ Лоренцова преобразованія получается Галилеево преобразованіе, если въ равенствахъ 6) и 7) замѣнить *c* безконечно большой величиной. Такимъ образомъ, теорія относительности основывается на совершенно новомъ пониманіи распространенія электро-магнитныхъ дѣйствій въ пустомъ пространствѣ: они не переносятся нѣкоторой средой, но и не происходятъ также путемъ непосредственнаго дальнодѣйствія. Электромагнитное поле въ пустомъ пространствѣ есть нѣкоторая независимая отъ всяческихъ субстанцій вещь, обладающая собственной физической дѣйствительностью. Конечно къ этому представленію надо сперва привыкнуть. Но, можетъ быть, это привыканіе будетъ происходить легче, если замѣтить, что физическія свойства этого поля, самымъ яркимъ выраженіемъ которыхъ являются такъ называемыя Максуэлевы уравненія, извѣстны гораздо полнѣе и точнѣе, чѣмъ свойства какой бы то ни было субстанціи. Эти свойства извѣстны такъ полно и точно, что можно почти думать, что и въ будущемъ не удастся ничего здѣсъ ни прибавить, ни убавить.

На этихъ же Максуэллевыхъ уравненіяхъ можно повѣрить и подтвердить утвержденіе принципа относительности, что законы природы обладаютъ во всѣхъ правомѣрныхъ системахъ отсчета одинаковой формой [1]). Разумѣется, при этомъ оказывается, что разложеніе электромагнитнаго поля на электрическое и магнитное поля, расположенныя другъ надъ другомъ, происходитъ различнымъ образомъ для различныхъ системъ отсчета. Такъ напримѣръ, электростатическое поле носитъ чисто электрическій характеръ только въ системѣ отсчета, въ которой порождающіе его заряды находятся въ покоѣ. Во всѣхъ другихъ системахъ оно имѣетъ и магнитную часть. То же самое можно сказать о магнито-статическомъ полѣ магнита, покоящагося въ нѣкоторой правомѣрной системѣ отсчета. Это тѣснѣйшимъ образомъ связано съ опредѣленіемъ интенсивностей поля, сводящимъ эти послѣднія черезъ посредство силы къ покоящимся зарядамъ-единицамъ; послѣднія же могутъ находиться въ покоѣ лишь въ одной системѣ. Эта относительность разложенія является, однако, единственнымъ новымъ моментомъ, который вводитъ теорія относительности въ электродинамику пустого пространства. Именно потому, что основныя уравненія ея сохраняются при

---

[1]) О томъ, что это доказательство не зависитъ отъ вывода Лоренцовыхъ преобразованій изъ инваріантности шаровой поверхности, ср. M. Laue цит. соч. § 14.

Лоренцовомъ преобразованіи, мы остаемся при всѣхъ выводахъ изъ нихъ eo ipso на почвѣ принципа относительности. Если же, въ случаѣ опредѣленныхъ электромагнитныхъ или оптическихъ опытовъ, теорія относительности и прежняя абсолютная теорія приводятъ къ различнымъ результатамъ, то причина этого заключается лишь въ томъ, что при этомъ играютъ роль также тѣла съ ихъ механическими свойствами. Но механика въ обѣихъ теоріяхъ различна. Это мы увидимъ еще яснѣе, чѣмъ до сихъ поръ, изъ дальнѣйшихъ §§. [1]).

§ 4. Эйнштейнова кинематика.

Теперь мы перейдемъ къ слѣдствіямъ изъ Лоренцова преобразованія и прежде всего къ нѣкоторымъ выводамъ изъ относительности времени.

Пусть въ правомѣрной системѣ отсчета K' находятся въ покоѣ нѣкоторые часы. Мы будемъ сравнивать ихъ показаніе съ показаніями одинаковыхъ съ ними и покоящихся въ системѣ K часовъ, и всегда именно, съ показаніями тѣхъ часовъ, мимо которыхъ, проносятся первые. Пусть ихъ показанію t' соотвѣт-

---

[1]) Въ память рано умершаго геттингенскаго математика Германа Минковскаго мы должны упомянуть объ огромномъ упрощеніи, которымъ обязана электродинамика, въ формальномъ отношеніи, его работамъ по теоріи относительности. Введенныя Минковскимъ координаты x, y, z и ct четырехмѣрнаго „міра“ впервые придали соотвѣтствующимъ выкладкамъ то изящество и обозримость, благодаря которымъ возможно охарактеризовать однимъ единственнымъ понятіемъ отношеніе каждой физической величины къ Лоренцову преобразованію. Благодаря этому, его методы стали необходимымъ орудіемъ примѣненія теоріи относительности. Въ то же время мы обязаны Минковскому и релативистской электродинамикой для внутренняго строенія матеріи, что̀ имѣетъ огромное значеніе для сравненія теоріи относительности съ опытомъ.

ствуетъ показанiе t на покоящихся въ K и находящихся въ то же время на томъ же мѣстѣ часовъ, а ихъ показанiю t'_2 пусть аналогично соотвѣтствуетъ показанiе t_2. Координаты часовъ въ отмѣченной значками системѣ K′ по предположенiю неизмѣнны.

Вслѣдствiе этого мы заключаемъ изъ послѣдняго изъ равенствъ 7)

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

что разница

$$t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Допустимъ, что въ первый моментъ обѣ пары сравниваемыхъ часовъ показываютъ одинаковое время, т.-е. что $t'_1 = t_1 = 0$. Въ такомъ случаѣ въ послѣдующiй моментъ t_2 покоящiеся въ системѣ K′ и, слѣдовательно, движущiеся по отношенiю къ системѣ K часы покажутъ лишь

$$t'_2 = t_2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т.-е. они будутъ отставать. Итакъ, часы, движущiеся со скоростью q, идутъ въ $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ разъ медленнѣе, чѣмъ тѣ же часы, когда они находятся въ покоѣ [1]). Это положенiе

---

[1]) Въ случаѣ опыта Майкельсона сокращенiе Лоренца, согласно нашему изложенiю въ § 2, устраняетъ разницу между обоими временами возвращенiя. Но ихъ общее значенiе $\frac{2lc}{\sqrt{c^2 - q^2}}$

имѣетъ, само собой разумѣется, силу независимо отъ того, къ какой изъ правомѣрныхъ системъ мы примѣнимъ понятіе покоя или движенія. При этомъ понятіе „часовъ“ мы должны брать такъ широко, какъ выше было указано. Всѣ физическіе, химическіе и біологическіе процессы должны показать въ своемъ теченіи это же замедленіе. Находящееся въ движеніи живое существо старѣется медленнѣе, даже умственная дѣятельность человѣка должна—если только истиненъ принципъ относительности—совершаться медленнѣе. Самъ человѣкъ этого совсѣмъ не замѣтитъ, пока онъ не измѣнитъ своей скорости, ибо и онъ находится въ покоѣ въ нѣкоторой правомѣрной системѣ отсчета. Напротивъ того, онъ будетъ думать съ нѣкоторымъ правомъ, что онъ думаетъ быстрѣе, чѣмъ движущіеся по отношенію къ нему люди. Словомъ, понятія: „медленнѣе“ и „быстрѣе“ теряютъ абсолютное значеніе и получаютъ нѣкоторый опредѣленный смыслъ лишь при указаніи системы отсчета.

Разсмотримъ двѣ пары одинаковыхъ, покоящихся въ одномъ и томъ же мѣстѣ правомѣрной системы отсчета K, часовъ. Сообщимъ вторымъ часамъ скорость q. Пусть они нѣкоторое время движутся съ этой скоростью, а затѣмъ приведемъ ихъ съ той же или какой-нибудь иной скоростью въ исходную точку, гдѣ они будутъ сызнова находиться въ покоѣ. Если вначалѣ обѣ пары часовъ показывали одинаковое время, то теперь вторые часы отстали отъ первыхъ, ибо они,

---

зависитъ отъ скорости q. Это показаніе времени относится къ системѣ, въ которой шаръ обладаетъ скоростью q. Часы, которые наблюдатель носитъ при себѣ, показываютъ вмѣсто этого, согласно предыдущему, время $\frac{2lc}{\sqrt{c^2-q^2}} \cdot \sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}} = \frac{2l}{c}$. Наблюдатель не можетъ изъ показаній ихъ опредѣлить скорость q.

согласно вышеприведенному положенію, во время своего движенія шли медленнѣе. Эта разница въ показаніяхъ обоихъ часовъ „абсолютна“, т.-е. она имѣетъ мѣсто для всѣхъ системъ отсчета. Факта различныхъ показаній обоихъ часовъ въ одномъ и томъ же мѣстѣ невозможно устранить. Живое существо возвращается при изложенномъ процессѣ болѣе молодымъ, чѣмъ его прежніе сверстники.

Разумѣется, противъ этихъ выводовъ изъ теоріи относительности были выставлены многочисленныя возраженія. Одни отрицаютъ то, что они представляютъ собою слѣдствія теоріи, другіе, наоборотъ, желаютъ видѣть въ этомъ внутреннія противорѣчія теоріи относительности, ибо при чисто кинематическомъ разсмотрѣніи движенія нельзя рѣшать, какіе изъ часовъ находятся въ покоѣ, какіе движутся. Въ чисто кинематическомъ отношеніи послѣднее утвержденіе правильно, но, согласно нашимъ предпосылкамъ, первые часы находятся въ покоѣ въ періодъ раздѣленія въ одной правомѣрной системѣ отсчета, между тѣмъ какъ вторые часы, если и находятся въ покоѣ въ правомѣрныхъ системахъ отсчета въ случаѣ удаленія и приближенія, то непремѣнно въ двухъ различныхъ системахъ. Поэтому судьбы обоихъ часовъ отличаются въ физическомъ отношеніи. Если бы мы предоставили вторымъ часамъ двигаться съ сообщенной имъ первоначально скоростью и если бы черезъ нѣкоторое время мы послали за ними въ догонку первые часы съ большей скоростью, то при встрѣчѣ первые отстали бы по сравненію со вторыми, ибо теперь первые часы находились бы въ періодъ раздѣленія въ покоѣ въ двухъ различныхъ системахъ [1].

---

[1] Могутъ замѣтить, что мы ничего не можемъ сказать о ходѣ часовъ во время измѣненія скорости. На это можно проще всего возразить, указавъ, что мы въ состояніи сдѣлать

При скоростяхъ, находящихся обыкновенно въ нашемъ распоряженіи, эти замедленія, разумѣется, недоступны наблюденію. Но въ послѣднее десятилѣтіе, при изученіи электрическихъ явленій въ разрѣженныхъ газахъ, удалось изучить особаго рода излученія, при которыхъ атомы движутся съ значительно большими скоростями. Такъ, напримѣръ, въ канальчатыхъ лучахъ атомы водорода или ртути движутся со скоростями, равными приблизительно 0,001 скорости свѣта. Въ то же время въ нихъ происходятъ колебанія большой правильности, о которыхъ мы заключаемъ по рѣзко очерченнымъ линіямъ ихъ спектровъ. Но каждое, находящееся въ колебаніи, образованіе представляетъ часы въ нашемъ смыслѣ. Съ помощью спектроскопическихъ наблюденій—точность которыхъ, какъ извѣстно, можетъ быть значительно повышена—мы можемъ опредѣлить число колебаній его и вліяніе скорости на это число. Хотя пока еще не опредѣлены всѣ трудности подобнаго опыта, но мы въ правѣ все таки надѣяться, что впослѣдствіи здѣсь окажется возможной непосредственная повѣрка теоріи въ вопросѣ объ относительности мѣры времени.

Аналогичное отношеніе мы встрѣтимъ, измѣряя длину какого-нибудь стержня въ различныхъ системахъ. Если этотъ стержень находится въ покоѣ параллельно оси x' въ системѣ K', то его длина равна разницѣ абсциссъ его конечныхъ пунктовъ. Мы можемъ опредѣлить эту разницу, накладывая масштабъ, тоже находящійся въ покоѣ въ системѣ K'. Если мы хотимъ произвести соотвѣтствующее опредѣленіе для системы K, то мы должны найти для нѣкотораго момента времени t абсциссы конечныхъ

времена равномѣрнаго движенія произвольно большими по сравненію съ временами ускоренія.

пунктовъ въ системѣ К и составить ихъ разницу. Изъ равенства

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(ср. 6) мы находимъ образованную при постоянномъ t разницу

$$x_2 - x_1 = (x'_2 - x'_1)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

т.-е. стержень, по отношенію къ системѣ отсчета К, уменьшился въ $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ разъ, по сравненію съ его длиной въ его „покоящейся системѣ“ К'. Вообразимъ себѣ, что первоначально стержень этотъ покоится въ К и что затѣмъ ему сообщена—при отсутствіи какихъ-либо иныхъ физическихъ вліяній—скорость $q = v$, такъ что онъ приходитъ въ покой въ системѣ К'. Въ такомъ случаѣ стержень этотъ во время ускоренія, если разсматривать его въ системѣ К, сократился въ $\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}$ разъ, такъ какъ онъ теперь имѣетъ въ К' ту же длину, что̀ первоначально въ К. Такимъ образомъ, Лоренцово сокращеніе является слѣдствіемъ Лоренцова преобразованія. Разумѣется, если относить стержень къ К', то его длина и при вышеуказанномъ процессѣ возрастаетъ, такъ какъ онъ переходитъ отъ движенія по отношенію къ К' къ покою по отношенію къ К'.

При этомъ разсужденіи существенное значеніе имѣетъ допущеніе, что оси x и x', а значитъ и стержень, параллельны скорости v. Если бы мы взяли стержень перпендикулярно къ v, т.-е. скажемъ, параллельно къ оси y, то изъ равенства $y' = y$ (ср. 6) мы бы нашли, что его длина въ обѣихъ системахъ одна и та же

Измѣненія здѣсь испытываютъ лишь размѣры тѣлъ, параллельные скорости.

Если, такимъ образомъ, измѣренія длины и времени даютъ различныя значенія при переходѣ отъ одной системы къ другой, то результатомъ этого должна быть при перечисленіи скоростей q болѣе сложная формула, чѣмъ 4). Изъ Лоренцова преобразованія 6) или 7)[1]) мы получаемъ путемъ дифференцированія:

$$8)\quad q'_x = \frac{q_x - v}{1 - \frac{vq_x}{c^2}},\quad q'_y = \frac{q_y\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vq_x}{c^2}},$$

$$q'_z = \frac{q_z\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vq_x}{c^2}}$$

Если мы раздѣлимъ первыя три равенства на четвертое и если мы положимъ $\frac{dx}{dt} = q_x$ и т. д., то мы получимъ уравненіе 8). Обратное ему уравненіе 9) мы получимъ проще, чѣмъ путемъ вычисленія, замѣтивъ, что, въ виду равноцѣнности обѣихъ системъ отсчета, можно во всѣхъ формулахъ преобразованія замѣнить величины со значками величинами безъ значковъ, если только въ то же время измѣнить знакъ v на обратный, потому что система K обладаетъ по отношенію къ системѣ K′ скоростью v по отрицательному направленію x. (Ср. 6 и 7).

---

[1]) Изъ формулы 6) слѣдуетъ именно, если мы будемъ разсматривать x, y и z какъ координаты движущейся матеріальной точки,

$$q'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,\frac{dt}{dt'},\quad q'_y = \frac{dy'}{dt'} - \frac{dydt}{dtdt'},$$

$$q'_z = \frac{dz}{dt'} = \frac{dzdt}{dzdt'},\quad \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - \frac{vdx}{c^2dt}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

или, обратно,

$$9) \quad q_x = \frac{q'_x + v}{1 + \frac{vq'_x}{c^2}}, \quad q_y = \frac{q'_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vq'_x}{c^2}},$$

$$q'_z = \frac{q'_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vq'_x}{c^2}}$$

Эти равенства содержатъ знаменитую Эйнштейнову теорему сложенія скоростей. Она показываетъ, какъ складываются скорость v системы K' по отноотношенію къ K и скорость q', взятая по отношенію къ K', въ одну скорость q, взятую по отношенію къ K[1]).

Какъ указано въ предыдущемъ §, мы должны всегда разсматривать переносную скорость v двухъ системъ отсчета, какъ подсвѣтовую скорость. Возьмемъ теперь скорость q' параллельно v, что представляетъ, очевидно, благопріятнѣйшій случай для полученія возможно большой скорости q. Въ такомъ случаѣ $q'_y = q'_z = 0$, а вслѣдствіе этого, согласно 9), и $q_y = q_z = 0$, т.-е. и скорость q, взятая по отношенію къ K, тоже параллельна v, такъ что, подобно тому какъ $q'_x = q'$, и $q_x = q$. Если мы возьмемъ $q' < c$, то изъ $v < c$ слѣдуетъ

$$v - \frac{vq'}{c} = v\left(1 - \frac{q'}{c}\right) < c\left(1 - \frac{q'}{c}\right) = c - q'$$

или, если прибавить къ обѣимъ частямъ $q' + \frac{vq'}{c}$

$$q' + v < c\left(1 + \frac{vq'}{c^2}\right)$$

---

[1]) Здѣсь имѣетъ существенное значеніе, что q' и v измѣряются въ различныхъ системахъ отсчета. Двѣ скорости, отнесенныя къ одной и той же системѣ отсчета, складываются, само собой разумѣется, по правилу параллелограмма.

слѣдовательно, согласно первому изъ равенствъ 9),

$$q = \frac{q' + v}{1 + \frac{vq'}{c^2}} < c$$

Если, напротивъ, мы примемъ заранѣе $q' = c$, то изъ того же равенства слѣдуетъ

$$q = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c$$

Такимъ образомъ, сложеніе двухъ подсвѣтовыхъ скоростей даетъ опять-таки подсвѣтовую скорость. Сложеніе подсвѣтовой скорости съ свѣтовой скоростью даетъ свѣтовую скорость [1]). Послѣдняя играетъ роль физически безконечной скорости, такъ какъ ее невозможно достигнуть, сколько бы ни взять подсвѣтовыхъ скоростей. Поэтому, допущеніе $v < c$ не составляетъ собственно ограниченія. Можно переходить отъ одной системы отсчета къ другой, какъ угодно, но никогда не достигнуть скорости свѣта по отношенію къ исходной системѣ. Но и тѣло, которому сообщаютъ все новыя ускоренія отъ системы къ системѣ, никогда не достигнетъ скорости свѣта. Приращенія скорости, получаемыя имъ при равномъ ускореніи—при чемъ послѣднее всегда разсматривается изъ системы отсчета, въ которой оно находится въ покоѣ—становятся все меньше и меньше, такъ что сумма ихъ никогда не получаетъ значенія c, хотя и можетъ подойти къ нему произвольно близко (Ср. § 5).

Но скорость свѣта c есть также верхній предѣлъ для скоростей распространенія физическихъ дѣйствій.

---

[1]) Эта теорема независима отъ положенія скоростей q и v. Ср. напримѣръ M. Laue цит. соч. § 7.

Впрочемъ, въ противоположность скоростямъ тѣлъ, она можетъ быть достигнута, какъ показываетъ уже примѣръ со свѣтомъ въ пустомъ пространствѣ. Въ системѣ K происходитъ вѣ точкѣ $x=0$, $y=0$, $z=0$ во время $t=0$ событіе A, а въ точкѣ $x=L>0$, $y=0$, $z=0$ во время $t=T>0$ событіе B. Если мы станемъ разсматривать положеніе вещей изъ системы K′, то, согласно равенству 6), событіе A происходитъ въ точкѣ $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$ во время $t'=0$, а событіе B въ точкѣ

$$x'=\frac{L-vT}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\ y'=0,\ z'=0,$$

во время

$$t'=\frac{T-\frac{v}{c^2}L}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=T\frac{1-\frac{vL}{c^2T}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Допустимъ, что

$$\frac{L}{T}>c$$

Въ такомъ случаѣ мы можемъ выбрать v, несмотря на условіе $v > c$, столь большимъ, что

$$v\frac{L}{T}\geqq c^2,\ \text{слѣдовательно}\ 1-\frac{vL}{c^2T}\leqq 0,$$

и значитъ $t'\leqq 0$. Слѣдовательно, для системы K′, движущейся по отношенію къ системѣ K съ соотвѣтственной скоростью v, событіе B, имѣющее мѣсто въ K позже, чѣмъ событіе A, одновременно съ A или даже предшествуетъ ему. Мы снова видимъ, такимъ образомъ, что одновременность двухъ событій представляетъ нѣчто относительное. Конечно, если бы мы допустили, что

$$\frac{L}{T}\leqq c$$

то мы не нашли бы такого значенія V, для котораго имѣютъ мѣсто эти слѣдствія. Въ этомъ случаѣ невозможно путемъ преобразованія „сдѣлать одновременными“ А и В. Если, напримѣръ, L = 0, т.-е., если оба событія, отнесенныя къ K, происходятъ въ одномъ мѣстѣ, то для всѣхъ системъ отсчета А предшествуетъ В.

Теперь допустимъ, что В, въ силу закона природы, связано съ А отношеніемъ дѣйствія къ причинѣ. Это отношеніе должно быть независимымъ отъ системы отсчета, такъ какъ законы природы должны имѣть мѣсто для всѣхъ системъ отсчета въ одинаковой формѣ. Слѣдовательно, В должно происходить позже, чѣмъ А, не только по отношенію къ системѣ K, но и для всѣхъ системъ отсчета. Необходимымъ и достаточнымъ условіемъ для этого, согласно предыдущему, является

$$\frac{L}{T} \leqq c.$$

Но $\frac{L}{T}$ представляетъ для системы K скорость распространенія. Это и доказываетъ нашу теорему.

Твердое тѣло, играющее въ Ньютоновой механикѣ столь огромную роль, характеризуется безконечной скоростью распространенія упругихъ возмущеній. Поэтому въ теоріи относительности не существуетъ вовсе твердости; всѣ тѣла могутъ претерпѣвать деформаціи.

Эти теоремы о скорости свѣта, какъ предѣльной скорости, подавали иногда поводъ къ ложнымъ толкованіямъ. Именно, полагали, что понятіе сверхъ-свѣтовой скорости вовсе несоединимо съ теоріей относительности. Ошибочность этого мы покажемъ на простомъ примѣрѣ. Возьмемъ линейку, находящуюся въ покоѣ, и другую линейку, образующую съ первой не-большой уголъ α. Станемъ перемѣщать эту вторую линейку со скоростью q, перпендикулярно къ направленію первой линейки. Точка пересѣченія обѣихъ линеекъ перемѣщается со скоростью q/α. Если α достаточно мало, то эта скорость даже при небольшихъ значеніяхъ q становится сверхъ-свѣтовой скоростью. Этотъ фактъ не имѣетъ никакого отношенія къ названнымъ выше теоремамъ, потому что точка пересѣченія не есть вовсе матеріальная точка и ея движеніе непригодно для перенесенія физическихъ дѣйствій[1]).

Къ сожалѣнію, почти во всѣхъ случаяхъ скорости v и q такъ малы по сравненію съ c, что различіе между Эйнштейновой теоремой сложенія (равенство 8) и болѣе простой формулой сложенія (4) остается недоступнымъ воспріятію. Только въ одномъ случаѣ можно произвести экспериментальный выборъ между ними, именно въ интерференціонномъ опытѣ Физо.

Пусть въ системѣ K′ находится въ покоѣ нѣкоторое прозрачное, лишенное дисперсіи, тѣло съ показателемъ преломленія n. Пусть въ немъ распространяется въ положительномъ направленіи x свѣтовой лучъ. Въ такомъ случаѣ скорость его будетъ равна:

$$q' = \frac{c}{n};$$

по отношенію же къ системѣ K, въ которой тѣло имѣетъ, какъ и K′, скорость v, лучъ движется, согласно равенству 9), со скоростью:

$$q = \frac{v + \frac{c}{n}}{1 + \frac{v}{cn}}$$

---

[1]) M. Laue. Phys. Zeit. 12. 48. 1911. Другое мнимое противорѣчіе съ ученіемъ о предѣльномъ характерѣ c объяснено Зоммерфельдомъ Phys. Zeit. 8. 841. 1907 и Weberfestschrift. 912.

(здѣсь опять $q = q_x$, $q' = q'_x$). Такъ какъ v мало по сравненію съ c, то это значеніе равно съ большой степенью приближенія величинѣ

$$\frac{c}{n} + v\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad .$$

Множитель при v есть Френелевъ коэффиціентъ увеличенія (ср. выше). Такимъ образомъ, эта надежнѣйшая опора теоріи эѳира становится теперь аргументомъ въ пользу Эйнштейновой теоремы сложенія скоростей [1]).

§ 5. Механика матеріальной точки.

Какъ уже неоднократно указывалось выше, при допущеніи теоріи относительности механика должна подвергнуться измѣненію. И дѣйствительно, уже при самомъ зарожденіи ея Эйнштейнъ и Планкъ [2]) занимались вопросомъ, какъ слѣдуетъ измѣнить основное равенство 1) Ньютоновой механики:

сила = масса × ускореніе.

Они исходили при этомъ изъ соображенія, что если Ньютонова механика и не абсолютно точна, то въ качествѣ приближенія она настолько испытана для небольшихъ скоростей, что ее слѣдуетъ сохранить для предѣльнаго случая безконечно малой скорости. Но, при любомъ движеніи матеріальной точки во всякое мгновенье существуетъ такая система отсчета, въ которой она не обладаетъ совсѣмъ скоростью. Для этой системы отсчета принимаютъ равенство 1). Дальнѣйшее является уже дѣломъ математическихъ преобразованій примѣнительно къ другимъ системамъ.

---

[1]) M. Laue Ann. der Physik 23, 989. 1907. Цит. соч. § 23. Тамъ указывается также, что примѣненіе теоремы сложенія здѣсь правомѣрно.

[2]) A. Einstein и O. M. Planck Verh. d. Deutschen Phys. Ges.

Результатъ математическаго анализа гласитъ здѣсь: разложимъ силу и ускореніе на ихъ продольныя и поперечныя слагающія, т.-е на ихъ слагающія параллельно и перпендикулярно скорости. Въ такомъ случаѣ имѣетъ мѣсто пропорціональность между продольными и между поперечными слагающими обоихъ этихъ векторовъ. Но въ отличіе отъ Ньютоновой механики коэффиціенты пропорціональности въ обоихъ случаяхъ не одни и тѣ же. Наоборотъ, продольная масса, на которую умножается продольное ускореніе больше, чѣмъ поперечная масса, на которую умножается поперечное ускореніе. Сверхъ того, обѣ массы зависятъ отъ скорости q. Только въ случаѣ весьма малыхъ скоростей онѣ становятся тождественными. Если обозначить это общее значеніе, какъ „покоящуюся массу“, черезъ m, то продольная масса будетъ равна:

$$m_l = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}^{\,3}}$$

поперечная будетъ равна

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Обѣ эти формулы можно объединить въ равенствѣ:

сила = приращенію количества движенія,

если мы придадимъ послѣднему значеніе

$$10)\ G = \frac{mq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

Если q приближается къ скорости свѣта c, то G стремится къ безконечности. Поэтому никакая сила не въ состояніи сообщить тѣлу скорость свѣта. Если же q мало по сравненію съ c, то равенство 10) принимаетъ видъ $q=mq$, что совпадаетъ съ основнымъ равенствомъ Ньютоновой механики.

Электронъ ведетъ себя, какъ матеріальная точка, во всѣхъ своихъ движеніяхъ внѣ матеріи. Такъ напримѣръ, въ катодныхъ лучахъ и въ β—лучахъ радія. Скорость его при этомъ доходитъ до 0,9 скорости свѣта и, слѣдовательно, отлично пригодна для изученія законовъ механики въ случаѣ большихъ скоростей. Этой задачѣ было посвящено уже большое число изслѣдованій, установившихъ безспорнымъ образомъ, что массы измѣняются приблизительно соотвѣтственно вышеприведеннымъ формуламъ. Къ сожалѣнію, точность опытовъ еще не настолько велика, чтобы можно было сдѣлать выборъ между этими формулами теоріи относительности и формулами, выведенными Абрагамомъ на основаніи эѳирной теоріи. Дѣло въ томъ, что и прежняя теорія приписывала электрону, въ виду вліянія его поля, перемѣнныя массы. Какъ бы то ни было, въ настоящее время ревностно работаютъ надъ улучшеніемъ этихъ опытовъ.

Историческое развитіе привело въ этой области къ одному широко распространенному недоразумѣнію. Такъ какъ старая теорія могла объяснить измѣнчивость массъ, лишь исходя изъ допущенія, что инерція электрона имѣетъ своимъ мѣстопребываніемъ исключительно его элекромагнитное поле, то многіе думаютъ, что и теорія относительности должна разсматривать его массу, какъ чисто электромагнитную массу. Фактически же эта зависимость массъ отъ скорости должна обнаружиться во всякой матеріальной точкѣ, независимо отъ того, заряжена ли она электрически, или нѣтъ. Въ вышеприведенной концепціи вѣрно лишь то, что въ случаѣ электрона часть его массы должна быть отнесена на счетъ поля. Какова величина этой части, не представляетъ ли она всей массы электрона—этого нельзя еще рѣшить на основанiи производившихся до сихъ поръ опытовъ.

§ 6. Инерцiя энергiи.

Въ механистической концепцiи природы инерцiя матерiи была нѣкоторымъ основнымъ, неразложимымъ далѣе фактомъ. Мѣрой инерцiи являлась масса *m*, нѣкоторая константа, характеризующая по закону сохраненiя массы каждую матерiальную точку. Въ тѣсной связи съ этимъ положенiемъ находилось положенiе о сохраненiи импульса (называемаго также количествомъ движенiя), который въ случаѣ матерiальной точки опредѣлялся, какъ произведенiе *mq*. Согласно равенству 1), сила равнялась приращенiю импульса матерiальной точки, къ которой она была приложена, и, такъ какъ въ предоставленной самой себѣ совокупности матерiальныхъ точекъ совокупный импульсъ долженъ былъ быть постояннымъ, то силы должны были подчиняться закону о равенствѣ дѣйствiя и противодѣйствiя. Вѣдь въ этомъ случаѣ каждому измѣненiю импульса какой-нибудь матерiальной точки соотвѣтствовало измѣненiе импульса въ какой-нибудь другой точкѣ, такъ что они въ точности компенсировали другъ друга. Затрудненiя возникли, когда было найдено, что электромагнитное излученiе оказываетъ дѣйствiе на испускающее его тѣло, при чемъ не имѣется другого тѣла, которое бы въ то же время испытывало какое-нибудь влiянiе. Такъ, напримѣръ, источникъ свѣта, испускающiй свѣтъ въ одномъ направленiи, испытываетъ отдачу, подобно пушкѣ при выстрѣлѣ. Правда, если испущенный лучъ будетъ поглощенъ какимъ-нибудь другимъ тѣломъ, то на этомъ послѣднемъ обнаружится компенсацiя импульса, сообщеннаго свѣтовому источнику. Но при нѣкоторыхъ обстоятельствахъ, пока это произойдетъ, можетъ пройти очень значительное время, или-же даже событіе можетъ вообще не наступить. Можно-ли и въ этомъ случаѣ удержать теорему о сохраненіи импульса?

До тѣхъ поръ, пока сводили электромагнитныя поля къ механическимъ движеніямъ въ эѳирѣ, можно было и должно было, само собой разумѣется, искать въ нихъ соотвѣтственной компенсаціи для приращенія импульса свѣтового источника. Но когда Лоренцъ принялъ, что эѳиръ абсолютно неподвиженъ, то нарушеніе теоремы объ импульсѣ стало представляться неизбѣжнымъ (Пуанкарэ). Въ этомъ пунктѣ началось чреватое слѣдствіями обобщеніе понятія импульса (Лоренцъ, Абрагамъ).

Нашъ свѣтовой источникъ теряетъ путемъ излученія энергію, которая обнаружится лишь позже, — а, можетъ быть, и никогда не обнаружится—въ другомъ тѣлѣ. Нарушается ли этимъ принципъ энергіи? Нѣтъ, потому что магнитное поле становится мѣстопребываніемъ энергіи, потерянной свѣтовымъ источникомъ. Соотвѣтственно съ этимъ, слѣдовало въ немъ искать также импульсъ, который необходимъ для сохраненія теоремы о постоянствѣ импульса. Такимъ образомъ пришли къ слѣдующему обобщенію: постоянна сумма изъ механическаго и электромагнитнаго импульса. Вычисленіе показало тѣсную связь электромагнитнаго импульса съ такъ называемымъ потокомъ энергіи.

Изъ повседневнаго опыта извѣстно, что движущіяся тѣла переносятъ механическую работу изъ одного мѣста въ другое. Въ цилиндрѣ паровой машины паръ даетъ работу, которая путемъ соотвѣтственныхъ передачъ сообщается оси махового колеса. Это, въ свою очередь, черезъ посредство спицъ и периферіи махового колеса передаетъ ее передаточному ремню, который, съ своей стороны, сообщаетъ ее машинѣ, предназначенной для работы. Во всѣхъ этихъ частяхъ машины имѣетъ мѣсто потокъ энергіи, который въ механикѣ называютъ кондукціоннымъ токомъ энергіи. Въ натянутомъ передаточномъ ремнѣ онъ течетъ напротивъ движенія, въ цилиндрѣ, находящемся подъ давленіемъ, въ общемъ по направленію скорости, въ скручиваемой оси и въ подвергающихся сгибанію спицахъ махового колеса перпендикулярно скорости тѣла. Его постоянно легко опредѣлить на основаніи движенія и состоянія напряженія. Наряду съ нимъ, течетъ еще конвекціонный токъ, возникающій благодаря увлеченію покоящихся въ тѣлѣ видовъ энергіи, какъ, напримѣръ, тепловая, химическая и упругая энергіи. Онъ имѣетъ постоянно направленіе скорости. Весь механическій потокъ энергіи складывается изъ обѣихъ этихъ частей по закону параллелограмма. Опредѣленіе плотности тока аналогично соотвѣтственному опредѣленію въ гидродинамикѣ: плотность тока равна количеству энергіи, протекающему въ единицу времени черезъ единицу площади, перпендикулярной къ направленію тока. Она есть направленная величина того же вида, чтó и скорость, слѣдовательно, векторъ, какъ и самъ импульсъ,

И въ электромагнитномъ полѣ существуетъ потокъ энергіи. Свѣтовой лучъ представляетъ нагляднѣйшій примѣръ траэкторіи подобнаго потока. Связь его плотности тока съ плотностью импульса (импульсъ на единицу объема) дана въ формулѣ:

$$11)\ \text{Плотность импульса} = \frac{\text{Плотность тока энергіи}}{\text{Квадратъ скорости свѣта.}}$$

Въ случаѣ луча свѣта импульсъ совпадаетъ по направленію съ направленіемъ луча; его интенсивность растетъ пропорціонально съ яркостью свѣта. Все это зародилось еще на почвѣ [illegible] абсолютной теоріи, которая и здѣсь, [illegible] и въ другихъ случаяхъ, расчистила дорогу теоріи относительности. Послѣдняя могла прямо перенять этотъ ходъ мыслей и всю электродинамику вмѣстѣ съ уравненіемъ 11).

Но ей встрѣтилась новая трудность. Пусть въ правомѣрной системѣ K′ находится въ покоѣ нѣкоторый источникъ свѣта, испускающій одинаково яркіе лучи въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ. Каждый лучъ несетъ съ собой извѣстный импульсъ. Такъ какъ оба импульса равны и противоположны, то они взаимно уничтожаются. Уже въ силу одной симметріи источникъ свѣта остается неопредѣленно долгое время въ покоѣ.

Отнесемъ теперь этотъ процессъ къ другой правомѣрной системѣ K, по отношенію къ которой источникъ свѣта движется по направленію перваго луча. Если не будетъ никакого внѣшняго вмѣшательства, то источникъ этотъ сохранитъ неопредѣленно долгое время свою скорость q, потому что онъ, какъ мы видѣли, остается всегда въ покоѣ въ системѣ K′, а, согласно принципу относительности, K и K′ постоянно сохраняютъ другъ относительно друга одну и ту-же скорость. Мы можемъ затѣмъ перечислить электромагнитныя поля обоихъ лучей съ K′ на K. Мы находимъ при этомъ, что первый лучъ въ K ярче, чѣмъ второй, что, такимъ образомъ, онъ несетъ съ собой въ единицу времени большій импульсъ. Такимъ образомъ, здѣсь уже отсутствуетъ взаимная компенсація обоихъ лучей. Наоборотъ, совокупный электро-магнитный импульсъ обоихъ лучей постоянно растетъ и механическій импульсъ источника свѣта

$$G = \frac{mq}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}}$$

(Ср. 10) долженъ на основаніи теоремы о постоянствѣ импульса соотвѣтственно убывать. Это возможно лишь въ томъ случаѣ, если вмѣстѣ съ потерей излучаемой энергіи связано пропорціональное этому убываніе ея покоящейся массы. Значитъ, и, наоборотъ, въ случаѣ прироста энергіи должна возрастать и масса. „Энергія обладаетъ инерціей“—такова первоначальная формулировка положенія объ инерціи-энергіи [1]).

Благодаря этому приходится разсматривать законъ о сохраненіи механической массы, какъ неточный. Но, съ другой стороны, при томъ огромномъ значеніи, какое онъ имѣлъ до сихъ поръ, врядъ-ли можно допустить, что въ основѣ его не лежитъ нѣкоторая истина. Эта истина выступаетъ передъ нами, какъ только мы примемъ, что всякая инерція основывается на энергіи, ибо тогда истиннымъ ядромъ положенія о сохраненіи массы является положеніе о сохраненіи энергіи. Разумѣется, нѣтъ никакихъ принудительныхъ соображеній въ пользу этого обобщенія. Мы остаемся въ согласіи съ принципомъ относительности и всѣми извѣстными фактами, если, наряду съ инерціей энергіи, мы примемъ еще механическую энергію другого рода. Но, исходя изъ принципа, требующаго возможной спеціализаціи физическихъ гипотезъ, мы предпочитаемъ вторую концепцію.

Если мы захотимъ придать послѣдней математически точную форму, то невозможно будетъ, вообще говоря, воспользоваться понятіемъ массы. Такъ, напримѣръ, электромагнитное поле обладаетъ почти всегда инерціей, обнаруживающейся въ его импульсѣ, но лишь въ исключительныхъ случаяхъ можно приписать ему массу. Даже въ случаѣ упругихъ тѣлъ дѣйствія инерціи по отношенію къ движущей силѣ, со-

---

[1]) A. Einstein Ann. d. Physik 20. 627. 1906.

гласно теоріи относительности, слишкомъ сложнаго рода, чтобы ихъ можно было изобразить съ помощью этого понятія (однако, въ дальнѣйшемъ мы ограничимся случаями, въ которыхъ можно говорить о массѣ). Поэтому точная формулировка, которой мы обязаны Планку [1]), связана съ примѣнимыми всегда понятіями тока импульса и тока энергіи и заключается въ неограниченномъ обобщеніи равенства 11)

$$\text{Плотность импульса} = \frac{\text{Плотность тока энергіи}}{\text{Квадратъ скорости свѣта.}}$$

Эта формула носитъ характеръ закона природы во всѣхъ областяхъ физики. Такъ, напримѣръ, току энергіи, который имѣется въ полѣ тяготѣнія, долженъ соотвѣтствовать и импульсъ тяготѣнія.

Приложимъ эту формулу къ динамикѣ. Разсмотримъ тѣло, обладающее въ покоющейся системѣ K^0 энергіей E^0 и объемомъ V^0 при давленіи p^0. Для всякой другой системы отсчета, въ которой оно обладаетъ скоростью q, оно является носителемъ конвекціоннаго и кондукціоннаго токовъ энергіи. Направленія обоихъ токовъ совпадаютъ въ этомъ случаѣ съ направленіемъ скорости. Первый токъ, взятый въ цѣломъ (т. е. суммируя по объему всего тѣла), пропорціоналенъ энергіи E^0, второй пропорціоналенъ давленію p^0 и объему V^0. Благодаря этому мы получаемъ для величины его импульса формулу [2]).

$$12)\ G = \frac{E^0 + p^0\,V^0}{c^2\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}\,q$$

Эта формула совпадаетъ съ формулой 10), если мы примемъ, что покоящаяся масса

$$13)\ m = \frac{1}{c^2}\ (E^0 + p^0\ V^0).$$

---

[1]) M. Planck. Phys. Zeit. 9.928, 1908.

[2]) M. Planck. Berl. Sitzungsberichte. 1907, стр. 542.

Такимъ образомъ, масса по существу сводится къ энергіи тѣла, ибо слагаемое $p^0\ V^0$, въ виду ничтожно малаго значенія множителя $\frac{1}{c^2} = 1, 1.10^{-21}$ cm.$^{-1}$ sec., составляетъ лишь совсѣмъ незначительную дробь.

Согласно господствовавшему до сихъ поръ опредѣленію энергіи, ее опредѣляли черезъ количество тепла и работы, потребное, чтобы перевести тѣло изъ произвольнаго начальнаго состоянія въ данное напередъ конечное состояніе. Энергія начальнаго состоянія оставалась при этомъ неизбѣжнымъ образомъ неопредѣленной. Теперь же мы въ состояніи измѣрять энергію безъ всякой неопредѣленности черезъ посредство дѣйствія ея инерціи, ибо инертная масса обладаетъ нѣкоторымъ абсолютнымъ значеніемъ, которое легко указать. При этомъ оказывается, что энергія E всегда несравненно больше, чѣмъ измѣненія энергіи, которыя тѣло испытываетъ при механическихъ, термическихъ, химическихъ процессахъ. Всѣ они такъ ничтожны, что можно, согласно формулѣ 13) въ виду множителя $\frac{1}{c^2}$, пренебречь соотвѣтственнымъ измѣненіемъ массы [1]). При названныхъ процессахъ происходятъ всевозможныя измѣненія расположенія атомовъ и ихъ состояній движенія, сами же атомы остаются неизмѣнными. Мы заключаемъ отсюда, что значительнѣйшая доля энергіи находится внутри атомовъ. Теорія, что атомы являются мѣстопребываніемъ огромныхъ количествъ энергіи, находитъ подтвержденіе въ радіоактивныхъ явленіяхъ. Вѣдь въ случаѣ распада атомовъ, играющаго при этомъ

---

[1]) Если напримѣръ, между собою соединяются 2 gr. водорода съ 16 gr. кислорода, образуя жидкую воду, то высвобождается 68.400 калорій. Соотвѣтствующая убыль массы равна 3,2. 10—^{9} gr.

существенную роль, высвобождается колоссальное количество энергіи.

Ко всѣмъ этимъ выводамъ привело допущеніе, что въ теоріи относительности должна быть удержана теорема о постоянствѣ импульса. Можетъ быть, спросятъ, настолько ли достовѣрно это допущеніе, чтобы можно было на основаніи его дѣлать столь рискованные выводы? На это мы отвѣчаемъ рѣшительнѣйшимъ да. Теорема о постоянствѣ импульса столь же достовѣрна въ теоріи относительности, какъ принципъ сохраненія энергіи. Она является именно необходимымъ условіемъ для того, чтобы можно было примѣнить принципъ сохраненія энергіи во всѣхъ правомѣрныхъ системахъ отсчета. Оба положенія такъ тѣсно связаны между собой, что съ помощью даннаго Минковскимъ въ его теоріи четырехмѣрнаго міра способа обозначенія ихъ можно соединить въ одно единственное равенство.

§ 7. Инваріанты Лоренцова преобразованія.

Мы уже достаточно видѣли въ послѣднихъ §§, какія глубокія измѣненія приноситъ съ собой въ физику принципъ относительности. Мы лишь вкратцѣ упомянемъ еще, что, напримѣръ, силы при переходѣ отъ одной системы отсчета къ другой измѣняются по направленію къ величинѣ, что всѣ опредѣленія энергіи, всѣ отсчеты температуры имѣютъ опредѣленный смыслъ лишь при указаніи системы отсчета. Такъ, напримѣръ, температура какого-нибудь тѣла выше въ его покоящейся системѣ, чѣмъ во всякой другой. Если тѣло получаетъ ускореніе, при чемъ въ немъ не происходитъ внутреннихъ измѣненій, то его температура падаетъ.

Тѣмъ важнѣе, разумѣется, найти такія величины, которыя остаются неизмѣнными при перечисленіи и сохраняютъ, такимъ образомъ, одинаковое значеніе во всѣхъ системахъ отсчета. Подобными инваріантами Лоренцова преобразованія являются, согласно буквѣ принципа относительности (§ 3), во-первыхъ, всѣ универсальныя константы законовъ природы, слѣдовательно, помимо скорости свѣта c, напримѣръ, константы законовъ теплового излученія, механическій эквивалентъ теплоты, число молекулъ въ граммъ-молекулѣ (число Лошмидта) и т. д. Изъ величинъ, характеризующихъ состояніе какого-нибудь тѣла, инваріантны электрическій зарядъ, энтропія, о которой говоритъ второй принципъ, гидродинамическое давленіе, сложныя функціи $\frac{V}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ и $\frac{T}{\sqrt{1-\frac{q^2}{c^2}}}$ (V—объемъ, T—температура) и т. д. Глубокій смыслъ имѣетъ, повидимому, то, что интегралъ дѣйствія Гамильтонова принципа (принципъ наименьшаго дѣйствія) представляетъ инваріантъ [1]). Но вдаваться въ дальнѣйшее разсмотрѣніе этого мы не можемъ.

Ходъ историческаго развитія, приведшій отъ электродинамики къ теоріи относительности, побудилъ иныхъ противопоставить новый принципъ относительности, какъ свойственный электродинамикѣ, старому принципу относительности механики. Трудно найти болѣе ошибочное утвержденіе, хотя бы по тому одному, что оно уже породило недоразумѣніе, будто въ электродинамикѣ можетъ имѣть мѣсто одинъ принципъ относительности, въ механикѣ—другой. Поэтому мы нарочно подчеркиваемъ: если бы въ двухъ различныхъ областяхъ физики имѣли мѣсто различные принципы относительности, то оказалась бы правомѣрной, согласно обоимъ, одна система отсчета. Благодаря обоимъ принци-

---

[1]) M. Planck. „Die Stellung der neueren Physik zur mechanischen Weltanschauung". Leipzig. 1910.

памъ, взятымъ вмѣстѣ, была бы выдѣлена одна эта система. Во всѣхъ явленіяхъ, которыя принадлежатъ одновременно обѣимъ областямъ, можно было бы найти абсолютное движеніе. Два принципа относительности взаимно уничтожаютъ другъ друга. Фактически принципъ относительности Эйнштейна претендуетъ на такое же универсальное значеніе во всѣхъ областяхъ физики, какъ, скажемъ, принципъ сохраненія энергіи. И свое значеніе онъ обнаружилъ не въ электродинамикѣ, но въ механикѣ, и настолько, что, напримѣръ, Пуанкарэ называетъ всю теорію относительности прямо „новой механикой“ [1]).

Благодаря предварительной работѣ, произведенной Лоренцовой теоріей, для развитія теоріи относительности понадобилось всего нѣсколько лѣтъ. Нельзя отрицать того, что въ настоящее время, когда переработаны всѣ области механики въ ихъ принципахъ, наступило извѣстное затишье. Стремленіе найти новые опыты, на которыхъ можно было бы повѣрить съ помощью современнаго искусства экспериментированія теорію, осталось—если не говорить о динамикѣ электрона—безуспѣшнымъ. Правда, нѣтъ ничего легче, какъ указать такія явленія, при которыхъ теорія относительности приводитъ къ количественно отличнымъ результатамъ, чѣмъ старая теорія. Но въ виду величины скорости свѣта различія такъ ничтожны, что они не поддаются измѣренію. Вѣдь въ противномъ случаѣ, вѣроятно, еще и раньше пришли бы къ теоріи относительности. Здѣсь остается лишь надежда на экспериментальное искусство будущаго. Въ качествѣ попытки дальнѣйшаго расширенія теоріи мы упомянемъ еще смѣлую идею Эйнштейна, рѣшившагося раскрыть тайны поля тяготѣнія на основаніи теоріи

---

1) H. Poincaré. Himmel und Erde 13. 1911.

относительности. Но теперь было бы еще преждевременно высказать какое-нибудь сужденіе относительно этой попытки.

Но, несмотря на это, теорія относительности является уже теперь однимъ изъ важнѣйшихъ элементовъ теоретической физики, потому что она открыла намъ новый законъ, охватывающій отдаленнѣйшія другъ отъ друга части науки, и, благодаря этому, помогла сдѣлать намъ крупный шагъ впередъ по направленію къ созданію единой физической картины міра.

Пер. *П. Юшкевичъ.*

Э. Гёнтингтонъ.

Новое приближеніе къ теоріи относительности.

ВВЕДЕНІЕ.

О теоріи относительности, какъ она была развита Эйнштейномъ [1], предполагаютъ, обыкновенно, что она заключаетъ въ себѣ радикальное измѣненіе не только нашего представленія объ эѳирѣ, но также нашихъ основныхъ понятій, касающихся пространства и времени. И при обсужденіи такъ называемыхъ „парадоксовъ относительности“ изслѣдователи нерѣдко покидали твердую почву математической дедукціи для царства метафизической спекуляціи.

Предлагаемая статья ставитъ себѣ задачей показать, что знаменитыя „уравненія преобразованія“, стоящія въ центрѣ теоріи, могутъ быть легко выведены изъ простыхъ соглашеній касательно заводки часовъ и установленія системъ координатъ. При этомъ не приходится вовсе вступать въ столкновеніе съ нашимъ обычнымъ представленіемъ объ эѳирѣ или съ нашими обычными понятіями пространства и времени, такъ что теорія освобождается отъ послѣдней видимости парадокса.

Употребленный здѣсь методъ является въ нѣкоторомъ смыслѣ возвращеніемъ къ точкѣ зрѣнія Лорентца [2], который исходилъ изъ представленія объ

---

[1] A. Einstein. „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“, Annalen der Physik ser. 4, vol. XVII, pp. 891—921 (1905).

[2] H. A. Lorentz. „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern“. Leiden. 1895.

эѳирѣ и никогда не покидалъ нашихъ обычныхъ понятій времени и пространства; а „уравненія преобразованія“, полученныя здѣсь, похожи на уравненія Лоренца, будучи нѣсколько болѣе общими, чѣмъ уравненія Эйнштейна. Однако, Лоренцовъ методъ выведенія уравненій предполагаетъ знаніе значительной и трудной части современной электромагнитной теоріи, между тѣмъ какъ принятый нами методъ основывается лишь на самыхъ элементарныхъ соображеніяхъ.

Предлагаемая статья носитъ чисто догматическій характеръ, не претендуя на критическій или историческій анализъ теоріи относительности [1]).

I. Покоящаяся система въ эѳирѣ.

1. Мы примемъ существованіе эѳира, въ которомъ распространяются равномѣрно во всѣхъ направленіяхъ свѣтовыя волны, и разсмотримъ сперва твердую платформу S, покоящуюся въ эѳирѣ.

Объ этой платформѣ предполагается, что она обитаема разумными существами, которыя способны сообщаться другъ съ другомъ, но, по предположенію, неспособны къ передвиженію. Иначе говоря, ни одинъ наблюдатель не можетъ покинуть своей собственной станціи. Каждая станція снабжена часами, т.-е. особымъ механизмомъ, который „тикаетъ“ черезъ правильные промежутки. Эти часы не переносимы и должны быть „регулированы“ и „заведены“ прежде, чѣмъ ими можно будетъ воспользоваться.

Мы приступимъ къ опредѣленію методовъ, съ помощью которыхъ подобныя существа могутъ регули-

---

Новое изданіе. Leipzig, 1906. Также „Theory of Electrons“ (Columbia University Lectures, 1906). Leipzig, 1909.

[1]) Для болѣе подробной библіографіи „теоріи относительности“ отсылаемъ читателя къ статьѣ Лауба въ „Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik“, vol. VII, p. 405. Декабрь 1910.

ровать и заводить свои часы, установить систему координатъ и развить всю теорію аналитической геометріи и кинематики, при чемъ ни одинъ наблюдатель не покидаетъ своей собственной станціи. Эти опредѣленія можно будетъ затѣмъ немедленно распространить на случай системы, движущейся равномѣрнымъ образомъ въ эѳирѣ.

Регулированіе и заводка часовъ, находящихся въ покоѣ.

2. Чтобы убѣдиться, имѣютъ ли часы, находящіеся на нѣкоторой данной станціи A, равномѣрный ходъ, наблюдатели поступаютъ слѣдующимъ образомъ: изъ A посылаютъ на какую-нибудь другую станцію B свѣтовой сигналъ, который немедленно возвращается изъ B въ A. Если число секундъ, отсчитанныхъ на часахъ въ A за то время, что свѣтовой сигналъ идетъ въ B и возвращается обратно, всегда одно и то же, когда бы ни повторяли этотъ опытъ, то тогда говорятъ, что часы въ A имѣютъ постоянный ходъ.

3. Когда мы урегулировали каждые отдѣльные часы такъ, что они имѣютъ постоянный ходъ, то ближайшая задача заключается въ томъ, чтобы убѣдиться, что всѣ часы имѣютъ одинъ и тотъ же ходъ. Этого можно легко добиться, урегулировавъ всѣ часы такъ, чтобы они шли, согласно съ ходомъ какихъ-нибудь главныхъ (standard) часовъ на нѣкоторой центральной станціи 0. Для этого поступаютъ слѣдующимъ образомъ: изъ 0 посылаются свѣтовые сигналы съ извѣстной частотой въ секунду, измѣряемой часами въ 0. Если эти сигналы приходятъ на станцію A съ такой же самой частотой въ секунду, измѣряемой по часамъ въ A, то тогда говорятъ, что часы въ A имѣютъ тотъ же ходъ, что̀ и часы въ 0.

Очевидно, возможно, что двое часовъ идутъ тѣмъ же ходомъ, не будучи синхронными. Предположивъ, для удобства, что показанія часовъ представляютъ непрерывный рядъ 0, 1, 2... секундъ, а не повторяются сызнова черезъ каждые двѣнадцать часовъ, мы можемъ имѣть, напримѣръ, рядомъ двое часовъ, изъ которыхъ одни показываютъ

. . . . 7, 8, 9, 10 . . . . ,

а другіе

. . . . 3, 4, 5, 6 . . . . .

Эти часы имѣютъ одинъ и тотъ же ходъ, но, очевидно, они не синхронны, ибо одни изъ нихъ идутъ всегда впереди другихъ на 4 секунды.

4. Остается „завести" часы такимъ образомъ, чтобы „начало времени" на всѣхъ нихъ было одно и то же. Этого можно легко добиться путемъ свѣтовыхъ сигналовъ, посылаемыхъ съ центральной станціи [1]). Пусть наблюдатель въ 0 посылаетъ сигналъ въ A, когда часы въ 0 показываютъ t_0, и пусть этотъ сигналъ приходитъ въ A, когда часы въ A показываютъ t_1. Немедленно по полученіи этого сигнала наблюдатель въ A посылаетъ сигналъ въ 0, который приходитъ туда, когда часы въ 0 показываютъ t_2.

Если теперь

$$t_1 = \frac{1}{2}(t_2 + t_0), \text{ такъ что } t_2 - t_1 = t_1 - t_0,$$

то говорятъ, что часы въ A синхронны съ главными часами въ 0 [2]).

Легко вывести отсюда, какъ теорему, что двое ча-

---

[1]) Einstein, loc. cit.

[2]) Если $t_1 = \frac{1}{2}(t_2 + t_0) + e$, то часы въ A спѣшатъ на e секундъ и должны быть соотвѣтственнымъ образомъ „передвинуты назадъ".

совъ, синхронные съ часами въ 0, будутъ синхронны въ силу того же самаго опредѣленія другъ съ другомъ.

Проведеніе системы координатъ съ помощью свѣтовыхъ сигналовъ.

5. Когда всѣ часы „урегулированы“ и „заведены“ такъ, что они синхронны съ центральными часами въ 0, то наблюдатель приступаетъ къ проведенію системы координатъ, т.-е. онъ соединяетъ съ каждой станціей два числа, называемыя абсциссой и ординатой этой станціи.

Такъ какъ предполагается, что ни одинъ наблюдатель не покидаетъ своей собственной станціи, то обычный процессъ измѣренія, при которомъ переносятъ съ мѣста на мѣсто жезлъ въ метръ длиною, непригоденъ. Поэтому наблюдатели прибѣгаютъ къ методу свѣтовыхъ сигналовъ слѣдующимъ образомъ. Пусть взята за ось x-овъ нѣкоторая неизмѣнная прямая 0 X, проходящая черезъ центральную станцію. Изъ 0 посылаютъ свѣтовые сигналы въ различныя станціи, расположенныя вдоль этой оси. Если сигналъ, покидающій 0, когда часы въ 0 показываютъ t_0, приходитъ въ A, когда часы въ A показываютъ t_1, тогда разница въ показаніяхъ часовъ, умноженная на нѣкоторый постоянный численный множитель c, принимается за абсциссу станціи A,

$$x = c(t_1 - t_0);$$

а точка A обозначается черезъ $(x, 0)$ [1]. Такимъ путемъ опредѣляются точки (1,0), (2,0) и т. д. на оси 0 X и аналогичнымъ образомъ точки (— 1, 0), (— 2, 0) и т. д. на продолженіи оси 0 X.

---

[1] Произвольная постоянная c показываетъ лишь масштабъ карты.

6. Опредѣливъ, такимъ образомъ, координаты всѣхъ станцій, расположенныхъ на оси x-овъ, наблюдатели опредѣляютъ теперь—опять-таки, не прибѣгая къ обычнымъ способамъ измѣренія—координаты точекъ, не расположенныхъ на этой оси. Разсмотримъ нѣкоторую точку $(m, 0)$ на этой оси. Наблюдатели, находящіеся въ двухъ точкахъ $(m+n,\ 0)$ и $(m-n,\ 0)$, которыя могутъ быть названы „равноотстоящими“ отъ $(m, 0)$, посылаютъ свѣтовые сигналы, причемъ каждый наблюдатель отправляетъ его, когда часы на его станціи показываютъ t_0. О каждой станціи С, въ которую оба эти сигнала приходятъ одновременно, говорятъ, что она лежитъ на перпендикулярѣ, проходящемъ черезъ $(m, 0)$. Теперь, съ помощью свѣтовыхъ сигналовъ, отправляемыхъ со станціи $(m, 0)$, соединяютъ съ каждой изъ точекъ, лежащихъ на этомъ перпендикулярѣ, нѣкоторую ординату y; въ частности, такимъ образомъ опредѣляются точки $(m, 1)$, $(m, 2) \ldots$; $(m, -1)$, $(m, -2) \ldots\ldots$

7. Описывая этотъ способъ проведенія системы координатъ съ помощью свѣтовыхъ сигналовъ, мы молча допустили, что каждая стадія этого процесса возможна; иными словами, что полученная такимъ образомъ система координатъ перманентна, такъ что координаты, приписанныя какой-нибудь данной станціи, останутся постоянно тѣми же самыми при повтореніи процесса. Это допущеніе, очевидно, правомѣрно въ случаѣ системы, покоящейся въ эѳирѣ. Но достаточно минутнаго размышленія, чтобы убѣдиться, что это невѣрно вообще въ случаѣ системы, движущейся по отношенію къ эѳиру.

Разсмотримъ, напримѣръ, круговую платформу, вращающуюся съ постоянной скоростью вокругъ своего центра О. Въ этомъ случаѣ легко, согласно правилу § 4, синхронизировать всѣ часы съ центральными часами въ О; но двое часовъ А и В, расположенныхъ на окружности, не будутъ тогда, согласно тому же самому правилу, синхронными другъ съ другомъ ^{1}).

---

^{1}) Такимъ образомъ отношеніе „синхронный съ чѣмъ-нибудь“, какъ оно здѣсь опредѣлено, хотя и симметрично, не непре-

Однако, въ одномъ частномъ случаѣ процессъ этотъ закономѣренъ, именно, въ случаѣ системы, движущейся въ эѳирѣ съ равномѣрной скоростью по прямой линіи, и на доказательство этого мы обратимъ вниманіе въ части II. Пока же мы ограничиваемся случаемъ покоящейся системы.

Опредѣленіе разстоянія.

8. Приписавъ, съ помощью метода свѣтовыхъ сигналовъ, каждой станціи плоскости пару координатъ, можно опредѣлить разстояніе между двумя точками (x_1,y_1) и (x_2,y_2), какъ количество

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Наблюдатели, находящіеся на платформѣ, въ состояніи теперь развить всю теорію координатной геометріи на плоскости. Такъ напримѣръ, о всѣхъ точкахъ, координаты которыхъ удовлетворяютъ уравненію $x^2+y^2=r^2$, можно сказать, что онѣ лежатъ на окружности съ радіусомъ r и т. д.

Опредѣленіе наблюдаемой скорости.

9. Наблюдатели теперь въ состояніи приступить къ вопросу о скорости какого-нибудь предмета, скажемъ, аэроплана, который летитъ по прямой линіи черезъ ихъ платформу. Для опредѣленія скорости нужны два наблюдателя, при каждомъ изъ которыхъ находятся часы. Наблюдатель A, находящійся въ (x_1,y_1), отмѣчаетъ, что аэропланъ проносится мимо его станціи, когда его часы показываютъ t_1. Наблюдатель B, находящійся въ (x_2,y_2), отмѣчаетъ, что онъ проносится мимо его станціи, когда его часы показываютъ t_2. Въ такомъ случаѣ отношеніе, получающееся отъ

мѣнно транзитивно. Оно похоже скорѣе на отношеніе типа „другъ кого-нибудь“. A и B могутъ быть оба друзьями C, однако, не быть друзьями между собою.

дѣленія „разстоянія“ на „разницу показаній часовъ“ (*полагая, что это отношеніе постоянно для любыхъ двухъ наблюдателей, расположенныхъ на линіи полета*), называется **наблюдаемой скоростью** аэроплана по отношенію къ платформѣ:

$$u = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{t_2 - t_1}\ {}^{1)};$$

въ частности **скорость свѣтового сигнала**, опредѣленная этимъ путемъ, равна произвольно выбранной постоянной c и одна и та же во всѣхъ направленіяхъ.

(Что это вѣрно для свѣта, движущагося вдоль оси x-овъ или вдоль прямой, перпендикулярной къ этой оси,—это вытекаетъ, очевиднымъ образомъ, изъ того способа, какимъ были опредѣлены координаты точекъ, расположенныхъ на этихъ прямыхъ. Что это вѣрно также для свѣта, движущагося въ косвенныхъ направленіяхъ,—это вытекаетъ изъ опредѣленія разстоянія, даннаго въ § 8).

Опредѣленіе наблюдаемаго хода движущихся часовъ.

10. Предположимъ теперь, что какой-нибудь авіаторъ, летящій черезъ платформу, имѣетъ съ собою часы, и пусть

t_1 = показаніе часовъ въ А, когда авіаторъ проносится мимо А;

t_2 = показаніе часовъ въ В, когда авіаторъ проносится мимо В;

и T' = число секундъ, отсчитанныхъ на часахъ авіатора за время перелета изъ А въ В.

---

1) Обобщеніе этого опредѣленія на случай, когда скорость непостоянна, происходитъ обычнымъ путемъ съ помощью методовъ дифференціальнаго исчисленія.

Тогда отношеніе

$$r = \frac{T'}{t_2 - t_1}$$

(если это отношеніе окажется постояннымъ) называется **наблюдаемымъ ходомъ** часовъ авіатора по отношенію къ часамъ на платформѣ; иначе говоря, о часахъ авіатора говорятъ, что они идутъ въ r разъ быстрѣе, чѣмъ часы на платформѣ.

Далѣе, количество

$$n = \frac{AB}{T'},$$

гдѣ AB = разстояніе, которое проходитъ авіаторъ въ промежутокъ времени T′, можетъ быть названо **самоизмѣренной** (self-measured) **скоростью** аэроплана по отношенію къ платформѣ S, такъ какъ промежутокъ времени T′ измѣряется не съ помощью двухъ паръ часовъ на платформѣ S, но съ помощью лишь той пары часовъ, которая находится на аэропланѣ.

Отношеніе между количествами u и n слѣдующее: Если

u = наблюдаемая скорость аэроплана

и

n = его самоизмѣренная скорость,

тогда

$$\frac{u}{n} = r,$$

гдѣ r = наблюдаемый ходъ часовъ на аэропланѣ.

Принципъ Допплера.

11. Предположимъ, что нѣкоторый авіаторъ летитъ по прямой линіи отъ нѣкоторой данной станціи A, и пусть свѣтовые сигналы, посылаемые изъ A черезъ промежутки въ T секундъ

(по показаніямъ часовъ въ А), достигаютъ авіатора черезъ промежутки въ Т секундъ по показаніямъ часовъ на аэропланѣ. Тогда мы легко найдемъ, что

$$T' = \frac{T}{\frac{n}{u} - \frac{n}{c}}, \text{ или } T' = \frac{rT}{1 - \frac{u}{c}}$$

гдѣ u = наблюдаемая скорость авіатора, n = его самоизмѣренная скорость и r = наблюдаемый ходъ его часовъ.

Это уравненіе приводится къ обычной формѣ, когда $r = 1$, и къ формѣ, данной Эйнштейномъ, когда $r = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}$.

Во всемъ этомъ разсужденіи мы предполагали, что платформа S покоится въ эѳирѣ. Теперь мы вернемся къ разсмотрѣнію случая платформы, движущейся въ эѳирѣ.

II. Система, находящаяся въ равномѣрномъ движеніи въ эѳирѣ.

12. Будемъ разсматривать платформу S′, движущуюся по отношенію къ нашей неподвижной платформѣ S съ постоянной наблюдаемой скоростью v по прямой линіи. Мы докажемъ, что наблюдатели на движущейся платформѣ S′, имѣя центральные часы въ O′, смогутъ провести постоянную систему координатъ въ S′ по способу, уже описанному для покоящейся платформы S, лишь бы v было меньше c [1]).

Способъ доказательства будетъ слѣдующій. Мы

---

[1]) Это ограниченіе не означаетъ, что „невозможна никакая скорость бо́льшая, чѣмъ скорость свѣта“, такъ какъ „наблюдаемая скорость“—какъ она здѣсь опредѣлена—можетъ обладать любымъ значеніемъ отъ O до ∞. Оно означаетъ просто, что если бы платформа S′ двигалась въ эѳирѣ со скоростью большей, чѣмъ скорость свѣта, то описанный здѣсь „методъ свѣтовыхъ сигналовъ“ не могъ бы быть съ пользой примѣненъ наблюдателями, находящимися на этой платформѣ.

предположимъ сперва, что координаты въ S' даны теоретически путемъ нѣкоторыхъ уравненій преобразованія. Мы покажемъ затѣмъ, что полученные такимъ путемъ результаты совпадаютъ въ точности съ тѣми результатами, какіе получились бы, если бы наблюдатели пользовались вышеописаннымъ методомъ свѣтовыхъ сигналовъ. Такъ какъ теоретическій методъ, очевидно, всегда возможенъ и постояненъ, то, очевидно, и методъ свѣтовыхъ сигналовъ также возможенъ и постояненъ.

Мы предположимъ для удобства, что ось $O'X'$ въ S' скользитъ вдоль оси OX въ положительномъ направленіи, и мы положимъ, что въ тотъ моментъ, когда O' противолежитъ O, часы въ O' и въ O показываютъ нуль.

Мы не установимъ никакихъ ограниченій для наблюдаемаго хода r часовъ въ O' [1]).

Уравненія преобразованія.

13. Мы теперь формулируемъ слѣдующую теорему, имѣющую основное значеніе для всего изслѣдованія.

Теорема I. Если координаты x', y' и показаніе часовъ t' на каждой станціи движущейся платформы S' даны въ каждое мгновеніе въ функціи кординатъ x, y и показанія часовъ t той точки S, которая противолежитъ этой станціи въ это мгновенье, согласно слѣдующимъ „уравненіямъ преобразованія“:

$$x' = lk\ (x - vt),\ y' = ly,\ t' = lk\left(t - \frac{v}{c^2}x\right),$$

---

[1]) Эта сторона нашего изслѣдованія кажется намъ новой. Эйнштейнъ, напримѣръ, допускаетъ, что обѣ группы часовъ имѣютъ „одно и то же физическое строеніе“.

гдѣ

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ и } l = \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

то результатъ будетъ такой же точно, какъ если бы наблюдатели въ S' поставили свои часы и провели свою систему координатъ, согласно изложенному выше для платформы S методу свѣтовыхъ сигналовъ, выбравъ ту же самую постоянную c[1]).

Здѣсь v = наблюдаемая скорость точки $0'$ по отношенію къ платформѣ s и r = наблюдаемый ходъ часовъ въ $0'$.

Чтобы доказать эту теорему, мы должны показать:

1) что координаты x', y', приписанныя какой-нибудь данной станціи, будутъ постоянны, т. е. независимы отъ времени[2]);

---

[1]) Выраженіе для k въ вышеприведенныхъ формулахъ можетъ быть упрощено съ помощью гиперболическихъ функцій. Такъ, если мы опредѣлимъ количество v такое,

что

$$\frac{v}{c} = \tanh V,$$

то

$$k = \operatorname{Cosh} V.$$

Далѣе, путемъ особеннаго допущенія касательно хода часовъ въ $0'$, можно сдѣлать l равнымъ 1; но для тѣхъ теоремъ, которыя мы дадимъ, это допущеніе не необходимо, и мы его не сдѣлаемъ.

Принятыя нами обозначенія k, l согласны скорѣе съ обозначеніями Лоренца, чѣмъ съ обозначеніями Эйнштейна, у котораго на мѣсто k стоитъ β и $l = 1$.

[2]) Такимъ образомъ, если нѣкоторая данная станція въ S' противолежитъ A_1, когда часы въ A_1 показываютъ t_1, а позже про-

и далѣе, что если x', y', t' даны вышеуказанннымъ способомъ, то

2) окажется, что часы въ $0'$ имѣютъ постоянный ходъ, согласно указаніямъ § 2;

3) окажется, что каждые часы въ s' будутъ синхронны съ часами въ $0'$, согласно указаніямъ §§ 3—4; и

4) если свѣтовой сигналъ, выходящій изъ $0'$, когда часы въ O' показываютъ t'_0, приходитъ на нѣкоторую станцію $A' = (x', y')$, когда часы въ A' показываютъ t'_1, тогда „разстояніе“ $\sqrt{x'^2 + y'^2}$ отъ $0'$ до A' равняется c разъ взятой „разницѣ въ показаніи часовъ“ $t_1' - t_0'$.

Повѣрка правильности этихъ утвержденій является дѣломъ простыхъ выкладокъ, на основаніи уравненій преобразованія; мы это предоставимъ сдѣлать самому читателю [1].

14. Благодаря этой теоремѣ доказана возможность установленія постоянной системы координатъ для движущейся платформы S' съ помощью метода свѣтовыхъ сигналовъ. Въ такомъ случаѣ, опредѣленія разстоянія и скорости, данныя для покоящейся системы S, могутъ быть прямо примѣнены къ движущейся системѣ S', и теорія аналитической геометріи и кинематики, развитая обитателями S', будетъ тождественна съ теоріей, развитой обитателями S.

тиволежитъ A_2, когда часы въ A_2 показываютъ t_2, тогда „t“ въ формулѣ для x' увеличится на $t_2 - t_1$, между тѣмъ какъ (ибо разсматриваемая станція движется по платформѣ S со скоростью v) „x“ въ этой формулѣ увеличится на $v\,(t_2 - t_1)$. Слѣдовательно, величина $x - v\,t$ останется неизмѣнной.

[1] Методъ, какимъ получены самыя уравненія преобразованія будетъ объясненъ въ приложеніи.

Въ частности окажется, что скорость свѣтового сигнала, опредѣленная двумя наблюдателями въ S′, постоянна и одна и та же во всѣхъ направленіяхъ, несмотря на тотъ фактъ, что платформа движется въ эѳирѣ. Это положеніе, являющееся здѣсь естественнымъ слѣдствіемъ метода проведенія координатъ движущейся системы, представляется въ разсужденіяхъ Эйнштейна основной гипотезой и извѣстно, какъ знаменитый „второй постулатъ теоріи относительности“.

Свойства движущейся системы.

15. Чтобы показать подробнѣе, какой представится наблюдателямъ, находящимся на покоящейся платформѣ, координатная система, проведенная для движущейся платформы, мы формулируемъ слѣдующія двѣ теоремы, каждая изъ которыхъ можетъ быть выведена путемъ простыхъ выкладокъ изъ уравненій преобразованія § 13.

Опредѣленіе. Предположимъ, что нѣкоторое число наблюдателей A, B, C... въ S условились наблюдать противолежащія имъ точки въ „нѣкоторое опредѣленное время“, т.-е., что каждый изъ нихъ производитъ свое наблюденіе, когда его часы показываютъ, скажемъ, t_0. Пусть A′ будетъ точка, противолежащая A, когда часы A показываютъ t_0, B′ будетъ точка, противолежащая B, когда часы B показываютъ t_0, и т. д.. Тогда фигура, образованная A, B, C... въ S, называется изображеніемъ въ S фигуры, образованной A′,B′,C′... въ S′.

Теорема 2. Разсмотримъ одну изъ „клѣтокъ“ („township“) A′B′C′D′, на которыя платформа S′ дѣлится своей координатной сѣтью, и пусть ABCD будетъ „изображеніемъ въ S′“ этой клѣтки. Тогда A′B′C′D′, измѣряемая съ помощью координатъ въ S', есть квадратъ. Но ABCD, измѣряемая съ помощью координатъ въ S, есть прямоугольникъ, короткая сторона котораго расположена по направленію движенія S'. Отношеніе сторонъ дается формулой:

$$\frac{\text{Продольная сторона}}{\text{Поперечная сторона}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{k}.$$

Надо замѣтить, что это отношеніе зависитъ только отъ скорости v, а не отъ относительнаго хода часовъ въ 0 и 0′.

Слѣдствіе. Если рядъ точекъ въ S' лежитъ на окружности, согласно наблюдателямъ въ S', то ихъ изображеніе въ S представится наблюдателямъ въ S лежащимъ на эллипсѣ, меньшая ось котораго расположена по направленію движенія, а отношеніе осей равно $\frac{1}{k}$.

16. *Теорема 3.* Пусть два наблюдателя A и B въ S условятся наблюдать координаты и показанія часовъ въ точкахъ S', противолежащихъ имъ въ „нѣкоторое опредѣленное время". Положимъ, что когда часы A показываютъ t_0, то у точки, противолежащей A, абсцисса $= x_1'$, а показаніе часовъ $= t_1'$; и когда часы B показываютъ t_0, то у точки, противолежащей B, абсцисса $= x'_2$, а показаніе часовъ $= t'_2$. Тогда, очевидно, мы будемъ имѣть

$$t'_2 - t'_1 = -\frac{v}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right).$$

Эта теорема показываетъ, что двое часовъ въ S', которые синхронны, если ихъ повѣрить по главнымъ часамъ въ S',—не синхронны, если ихъ наблюдать изъ S': передніе часы отстаютъ отъ заднихъ на величину, пропорціональную разстоянію между ними.—Этотъ результатъ, какъ и приведенный въ § 15, не зависитъ отъ относительнаго хода часовъ въ 0 и въ 0′.

Сложеніе скоростей.

17. Мы предположимъ далѣе, что нѣкоторый аэропланъ проносится надъ платформой S съ нѣкоторой данной наблюдаемой скоростью *u*. Спрашивается, какова будетъ наблюдаемая скорость аэроплана по отношенію къ платформѣ S′. Для простоты мы ограничимся случаемъ движенія по прямой линіи, параллельной линіи движенія платформы S′:

Теорема 4. Пусть *u*—наблюдаемая скорость аэроплана, опредѣляемая двумя наблюдателями въ S, и *u*′—его наблюдаемая скорость, опредѣляемая наблюдателями въ S′. Тогда

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}},$$

предполагая, что аэропланъ летитъ по прямой, параллельной оси x-овъ.

Здѣсь мы опять-таки замѣчаемъ, что это отношеніе совершенно не зависитъ отъ относительнаго хода центральныхъ часовъ въ 0 и 0′.

Это отношеніе между *u*′ и *u* можетъ быть выражено болѣе изящнымъ образомъ съ помощью гиперболическихъ функцій. Такъ, если мы опредѣлимъ такія U, U′ и V, что

$$\frac{u}{c} = \tanh\ \mathrm{U};\quad \frac{u'}{c} = \tanh\ \mathrm{U}',\ \text{и}\ \frac{v}{c} = \tanh\ \mathrm{V},$$

то разсматриваемое отношеніе становится просто

$$\mathrm{U}' = \mathrm{U} - \mathrm{V}.$$

18. Наконецъ, положимъ, что авіаторъ, летящій надъ платформой, имѣетъ съ собой часы, наблюдаемый ходъ которыхъ по отношенію къ S будетъ R. Спрашивается, каковъ будетъ наблюдаемый ходъ часовъ по отношенію къ S′?

Теорема 5.

Если u = наблюдаемая скорость авіатора по отношенію къ S,

u' = наблюдаемая скорость авіатора по отношенію къ S′,

R = наблюдаемый ходъ часовъ авіатора по отношенію къ S,

и R′ = наблюдаемый ходъ часовъ авіатора по отношенію къ S′.

то
$$\frac{R'}{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}}=\frac{R}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}:\frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

гдѣ v = наблюдаемая скорость 0′ и r = наблюдаемый ходъ часовъ въ 0′ по отношенію къ S.

Какъ ни кажутся на первый взглядъ странными всѣ эти теоремы, онѣ легко выводятся изъ уравненія преобразованія теоремы 1.

III. Принципъ относительности.

19. Мы показали, какъ наблюдатели на нашей движущейся платформѣ S′ могутъ съ помощью свѣтовыхъ сигналовъ регулировать свои часы и провести постоянную систему координатъ, и мы показали, какой эта система будетъ казаться наблюдателямъ, находящимся на покоящейся платформѣ.

Мы теперь приступимъ къ разсмотрѣнію вопроса, насколько эта система S′ согласуется съ принципомъ относительности.

20. Основной принципъ теоріи относительности можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Наблюдатели, принадлежащіе къ системѣ, движущейся съ равномѣрной скоростью въ эѳирѣ, никогда не смогутъ обнаружить этого движенія путемъ какого-нибудь возможнаго для нихъ наблюденія.

Чтобы убѣдиться въ томъ, насколько наша система S′ согласуется съ этимъ принципомъ, мы приступимъ къ разсмотрѣнію вопроса, существуютъ ли такіе кинематическіе опыты, которые могутъ сдѣлать наблюдатели, принадлежащіе къ S′, и результаты которыхъ можно отличить отъ результатовъ подобныхъ же опытовъ, сдѣланныхъ наблюдателями въ S.

Мы разсмотримъ сперва опыты, которые могутъ быть сдѣланы наблюдателемъ, не покидающимъ своей станціи, затѣмъ опыты, которые могутъ быть сдѣланы съ помощью переноснаго измѣрительнаго жезла, наконецъ, опыты, которые могутъ быть сдѣланы съ помощью переносныхъ часовъ[1].

Мы начнемъ съ того, что получимъ обратныя уравненія преобразованія, съ помощью которыхъ опредѣлимъ, какой будетъ казаться покоящаяся система S наблюдателямъ въ движущейся системѣ S′.

Обратныя уравненія преобразованія.

21. Пусть v = наблюдаемая скорость 0′, какъ она опредѣляется двумя наблюдателями въ S, и пусть v' = наблюдаемая скорость 0, какъ она опредѣляется двумя наблюдателями въ S′.

Тогда мы находимъ:

Лемма 1. Наблюдаемыя скорости v и v' будутъ всегда равны и противоположныхъ знаковъ:

$$v' = -v,$$

---

[1] Динамическіе опыты, включающіе понятіе массы, можно разсмотрѣть аналогичнымъ образомъ, но, за недостаткомъ мѣста мы здѣсь ихъ не касаемся.

каковъ бы ни былъ относительный ходъ центральныхъ часовъ въ 0 и 0′.

Пусть, далѣе, r = наблюдаемый ходъ часовъ въ 0′ по отношенію къ S и r' = наблюдаемый ходъ часовъ въ 0 по отношенію къ S′ (см. § 10).

Тогда:

Лемма 2. **Числа r и r' связаны между собою отношеніемъ**

$$rr' = 1 - \frac{v^2}{c^2}.$$

22. Рѣшивъ уравненія теоремы 1 для x, y и t и пользуясь результатами этихъ леммъ, мы получаемъ слѣдующую теорему:

Теорема 6. **Пусть даны координаты x' и y' и время t' какой-нибудь точки S′. Тогда „обратныя преобразованія“, съ помощью которыхъ можно опредѣлить координаты x и y и время t противолежащей точки S, будутъ:**

$$x = l'k\ (x' - v't'),\quad y = l'y'$$

$$t = l'k\ (t' - \frac{v'}{c^2}x'),$$

гдѣ

$$v' = -v,\ k = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \text{ и } l' = \frac{r'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Эти уравненія имѣютъ ту же самую форму, что уравненія теоремы 1, если мы замѣнимъ буквы со значками буквами безъ значковъ.

Опыты, въ которыхъ ни одинъ наблюдатель не покидаетъ своей станціи.

23. Эти уравненія теоремы 6 показываютъ, что, если наблюдатели въ S′ не могутъ покидать своей

станціи, то система S' подчиняется принципу относительности, ибо, въ виду симметричности этихъ уравненій, мы вправѣ заключить, что если мы ограничиваемся разсматриваемымъ родомъ наблюденій, то наблюдатели въ S' имѣютъ такое же право, какъ и наблюдатели въ S, предполагать, что ихъ платформа покоится въ эѳирѣ.

Въ частности, результаты, формулированные въ теоремахъ 2, 3 и 4, останутся вѣрными, если мы замѣнимъ S и S' другъ другомъ въ формулировкахъ этихъ теоремъ, ибо отношеніе между обѣими системами вполнѣ взаимно. Такъ, напримѣръ, если мы возьмемъ какую-нибудь фигуру въ любой изъ этихъ системъ, то, наблюдаемая изъ другой системы, она будетъ казаться укороченной въ направленіи движенія. Если мы возьмемъ двое синхронныхъ часовъ въ любой изъ этихъ системъ и станемъ ихъ наблюдать изъ другой системы, то часы, находящіеся впереди въ пространствѣ, будутъ казаться отстающими во времени. Это и есть знаменитые парадоксы теоріи относительности, которые часто приводятся въ доказательство утвержденія, что теорія относительности несоединима съ нашими обычными представленіями о времени и пространствѣ, но которые здѣсь представляются необходимыми слѣдствіями совершенно естественныхъ и раціональныхъ соглашеній для заводки часовъ и проведенія системы координатъ.

24. Чтобы еще рѣзче подчеркнуть эти выводы и показать, что эѳиръ совершенно выпадаетъ изъ нашихъ разсужденій, мы разсмотримъ теперь двѣ движущіяся платформы S' и S'' и напишемъ связывающія ихъ уравненія преобразованія. Для этого мы поступимъ слѣдующимъ образомъ: мы напишемъ уравненія преобразованія, связывающія каждую систему S' и S'' съ покоящейся системой S, и затѣмъ исключимъ S.

Пусть v', v'' = скорости $0'$ и $0''$ по отношенію къ S и положимъ

$$\frac{v'}{c} = \tanh\ V' \text{ и } \frac{v''}{c} = \tanh\ V'',$$

такъ что

$$k' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = \cosh\ V' \text{ и } k'' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v''}{c}\right)^2}} \cosh\ V''.$$

Далѣе, пусть r', r'' = наблюдаемые ходы часовъ въ $0'$ и $0''$ по отношенію къ S и положимъ

$$l' = \frac{r'}{\sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2}} \text{ и } l'' = \frac{r''}{\sqrt{1-\left(\frac{v''}{c}\right)^2}}.$$

Таковы количества, входящія въ уравненія, связывающія S′ и S″ съ S по теоремѣ 1.

Пусть теперь v = наблюдаемая скорость S″ по отношенію къ S′ и положимъ $\frac{v}{c} = \tanh$ V, такъ что

$$k = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \cosh\ V.$$

Пусть также r = наблюдаемый ходъ часовъ въ $0''$ по отношенію къ S′ и положимъ

$$l = \frac{r}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}};$$

тогда довольно простыя, но нѣсколько утомительныя, выкладки приводятъ къ слѣдущей теоремѣ:

Теорема 7. Уравненія преобразованія, дающія x'', y'', t'' въ какой-нибудь точкѣ S″ въ функціи x', y', t' противолежащей точки S′, будутъ

$$x'' = lk\,(x' - vt'), \qquad y'' = ly',$$

$$t'' = lk\left(t' - \frac{v}{c^2}\,x'\right).$$

гдѣ

$$V = V'' - V' \text{ и } l = \frac{l''}{l'}.$$

Какъ и можно было ожидать, эти уравненія имѣютъ ту же самую форму, какъ и уравненія теоремы 1.

Всѣ эти уравненія нѣсколько упрощаются, если часы въ 0′ и 0″ регулированы такъ, что

$$r' = \sqrt{1-\left(\frac{v'}{c}\right)^2} \text{ и } r'' = \sqrt{1-\left(\frac{v''}{c}\right)^2}.$$

Въ этомъ случаѣ всѣ l равны 1. Въ этой упрощенной формѣ уравненія и даны Эйнштейномъ.

Мы, такимъ образомъ, показали, что, поскольку дѣло идетъ объ опытахъ перваго типа (§ 20), наша система S′ удовлетворяетъ принципу относительности.

Опыты съ переноснымъ измѣрительнымъ жезломъ: первое физическое допущеніе, заключающееся въ теоріи относительности.

25. Мы предположимъ теперь, что наблюдатели въ S′ имѣютъ переносный измѣрительный жезлъ съ помощью котораго они могутъ „измѣрить“, напримѣръ, двѣ прилежащія стороны A′ B′ и B′ C′ одной изъ тѣхъ клѣтокъ A′ B′ C′ D′, на которыя раздѣлена платформа S′ своей координатной сѣтью. Спрашивается, смогутъ ли наблюдатели съ помощью этого процесса измѣренія обнаружить движеніе своей платформы S′ въ эѳирѣ. (Не слѣдуетъ забывать, что координатная сѣть была получена не путемъ обыкновенныхъ измѣреній, но путемъ вышеизложеннаго метода свѣтовыхъ сигналовъ).

26. *Опредѣленіе.* Наблюдаемой длиной жезла MN по отношенію къ платформѣ S′ называется раз-

стояніе (§ 8) между точками M′ и N′, гдѣ M′ и N′ суть „изображенія“ (§ 15) M и N въ S′. Абсолютной длиной жезла называется его „наблюдаемая длина“, взятая по отношенію къ платформѣ S, которая покоится въ эѳирѣ.

Теперь можно сдѣлать два допущенія касательно состоянія жезла, когда онъ движется въ эѳирѣ.

Если мы допустимъ, что абсолютная длина жезла остается одной и той же, независимо отъ того, происходитъ ли движеніе жезла въ направленіи его длины или перпендикулярно къ ней, то, въ силу теоремы 2, жезлъ, въ точности совпадающій со стороной A′ B′ нашей „клѣтки“, не совпадаетъ со стороной B′ C′, если только платформа не покоится въ эѳирѣ. Въ такомъ случаѣ наблюдатели смогутъ путемъ этого опыта опредѣлить, движется ли ихъ система, или нѣтъ.

Если же, съ другой стороны, мы допустимъ вмѣстѣ съ Лоренцомъ, что абсолютная длина жезла, когда онъ движется въ направленіи своей длины, меньше (и притомъ соотвѣтственнымъ образомъ), чѣмъ когда онъ движется перпендикулярно къ ней, тогда жезлъ, совпадающій съ A′ B′, совпадаетъ также съ B′ C′. Въ этомъ случаѣ опытъ не дастъ намъ никакихъ указаній на то, движется ли платформа въ эѳирѣ, или нѣтъ.

27. Поэтому, если мы желаемъ, чтобы наша система S′ согласовалась съ принципомъ относительности, мы должны сдѣлать слѣдующее допущеніе, высказанное впервые Лоренцомъ въ 1895 г.

Допущеніе А. „Абсолютная длина“ матеріальнаго жезла (см. § 26), движущагося въ эѳирѣ со скоростью *v*, меньше, когда жезлъ движется въ направленіи своей длины, чѣмъ когда онъ движется перпендикулярно къ ней, причемъ отношеніе длинъ равно

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

гдѣ c есть наблюдаемая скорость свѣта.

28. Если это допущеніе вѣрно, то мы можемъ вывести слѣдующую замѣчательную теорему, въ которой S' есть нѣкоторая платформа, движущаяся съ постоянной скоростью въ эѳирѣ и имѣющая систему координатъ, установленныхъ путемъ метода свѣтовыхъ сигналовъ.

Теорема 8. Если допущеніе А вѣрно, то „наблюдаемая длина“ матеріальнаго жезла, движущагося съ наблюдаемой скоростью u', по отношенію къ платформѣ S', меньше въ томъ случаѣ, когда жезлъ движется въ направленіи своей длины, чѣмъ когда онъ движется перпендикулярно къ ней, при чемъ отношеніе длинъ равно

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}}.$$

Результатъ этотъ совершенно не зависитъ отъ постоянной скорости v, съ которой платформа S' движется въ эѳирѣ.

Это одно изъ замѣчательныхъ предложеній теоріи относительности.

Опыты съ переносными часами: второе физическое допущеніе, заключающееся въ теоріи относительности.

29. Наконецъ, предположимъ, что наблюдатели въ

S' пріобрѣли переносные часы P, которые они могутъ „переслать экспрессомъ“ съ одной станціи A на другую станцію B. Спрашивается, смогутъ ли наблюдатели, пользуясь этими переносными часами, обнаружить движеніе своей платформы S' въ эѳирѣ.

30. *Опредѣленіе.* Абсолютнымъ ходомъ часовъ называется ихъ „наблюдаемый ходъ“ (§ 10), по отношенію къ платформѣ S, находящейся въ покоѣ въ эѳирѣ.

По вопросу о состояніи часовъ, движущихся въ эѳирѣ, можно сдѣлать два допущенія.

Если мы допустимъ, что абсолютный ходъ часовъ не измѣняется, когда ихъ переносятъ въ эѳирѣ, то часы P, совпадающіе съ часами A въ началѣ своего путешествія изъ A въ B, будутъ продолжать и въ дальнѣйшемъ совпадать съ часами A и, слѣдовательно, въ силу теоремы 3 не будутъ совпадать съ часами въ B, если только платформа не покоится въ эѳирѣ. Слѣдовательно, путемъ этого опыта наблюдатели могли бы обнаружить движеніе своей платформы въ эѳирѣ, замѣтивъ несогласія между переносными часами и часами B.

31. Если же, наоборотъ, мы сдѣлаемъ нижеслѣдующее допущеніе, касательно хода движущихся часовъ, то возможность эта будетъ устранена, и принципъ относительности будетъ снова удовлетворенъ.

Допущеніе B. „Абсолютный ходъ“ часовъ, движущихся въ эѳирѣ съ постоянной скоростью v, меньше, чѣмъ абсолютный ходъ тѣхъ же часовъ, когда они покоятся въ отношеніи

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

32. Если это допущеніе вѣрно, то мы получаемъ слѣдующую теорему, въ которой S' представляетъ нѣкоторую платформу, движущуюся съ постоянной скоростью въ эѳирѣ и имѣющую систему координатъ, установленную путемъ метода свѣтовыхъ сигналовъ:

Теорема 9. Если допущеніе B вѣрно, то „наблюдаемый ходъ“ часовъ, движущихся на платформѣ S' съ наблюдаемой скоростью u', меньше, чѣмъ наблюдаемый ходъ тѣхъ же часовъ, когда они покоятся по отношенію къ этой платформѣ, причемъ отношеніе ходовъ часовъ равно

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u'}{c}\right)^2}}.$$

Этотъ результатъ совершенно не зависитъ отъ постоянной скорости v, съ которой платформа движется въ эѳирѣ.

Эта теорема 9 представляетъ другое замѣчательное предложеніе теоріи относительности.

33. Надо замѣтить, что допущенія A и B не нужны для доказательства уравненій преобразованія теоремы 1; они нужны лишь, если мы желаемъ сохранить принципъ относительности, т.-е. если мы желаемъ сдѣлать невозможнымъ для наблюдателей въ нашей системѣ S' обнаружить свое движеніе въ эѳирѣ. И всякое экспериментальное доказательство, свидѣтельствующее въ пользу истинности принципа относительности (или въ пользу истинности теоремы 8 и 9), можно разсматривать какъ косвенное доказательство въ пользу истинности допущеній A и B.

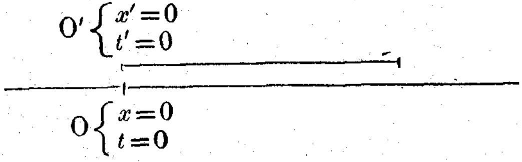
Приложеніе.

Въ этомъ приложеніи мы даемъ элементарный методъ полученія уравненій преобразованія теоремы 1. Какъ уже сказано выше, правильность теоремы 1 можетъ быть легко провѣрена, разъ написаны уравненія преобразованія. Однако, естественнымъ образомъ возникаетъ вопросъ, какимъ образомъ можно прійти къ этимъ уравненіямъ? Дать отвѣтъ на этотъ вопросъ и является задачей этого приложенія.

Мы разсмотримъ четыре положенія движущейся платформы S', именно:

1) когда O' противолежитъ O; 2) когда свѣтовой сигналъ отправляется изъ O' на нѣкоторую станцію A'; 3) когда этотъ сигналъ прибываетъ въ A' и немедленно отсылается въ O', и 4) когда обратный сигналъ приходитъ въ O'. Для простоты мы предположимъ, что A' лежитъ на оси $O'X'$, ибо распространеніе теоремы на общій случай не представляетъ никакихъ трудностей и можетъ быть предоставлено читателю. Мы предположимъ, что абсцисса A', опредѣленная путемъ метода свѣтовыхъ сигналовъ, равна x'.

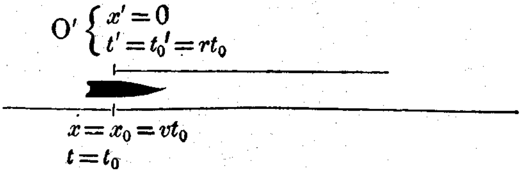
Въ положеніи 1, какъ показано на фигурѣ 1, часы въ O и O', показываютъ нуль.



Фиг. 1.

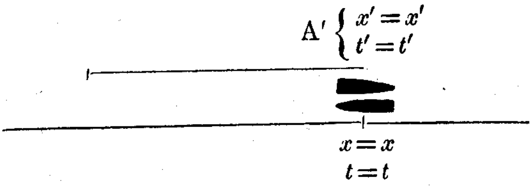
Пусть въ положеніи 2 въ тотъ моментъ, когда сигналъ покидаетъ O', часы въ O' показываютъ t'_0 и пусть станція, которая въ этотъ моментъ противолежитъ O', имѣетъ абсциссу x_0 и показаніе часовъ t_0.

Тогда, такъ какъ наблюдаемый ходъ часовъ въ O′ (см. § 10) есть r, мы должны имѣть $t_0' = r t_0$. Слѣдовательно, такъ какъ наблюдаемая скорость O′ (см. § 9) есть v, мы должны имѣть $x_0 = v t_0$. Положеніе въ этотъ моментъ представлено на фиг. 2.



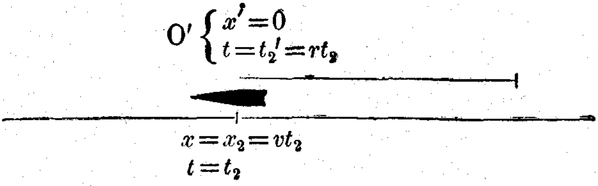
Фиг. 2.

Пусть въ положеніи 3 въ тотъ моментъ, когда сигналъ прибылъ въ A', часы въ A′ показываютъ t', и пусть станція, противолежащая A′, имѣетъ въ этотъ моментъ абсциссу x и показаніе часовъ t, какъ показано на фиг. 3.



Фиг. 3.

Пусть въ положеніи 4 въ тотъ моментъ, когда обратный сигналъ прибылъ въ O′, часы въ O' показываютъ t'_2, и пусть x_2 и t_2 будутъ абсциссой и показаніемъ часовъ станціи, противолежащей 0′ въ этотъ моментъ. Въ такомъ случаѣ $t_2' = rt_2$, ибо наблюдаемый ходъ (§ 10) часовъ въ O′ при переходѣ отъ положенія 1 въ положеніе 4 есть r; слѣдовательно, $x_2 = vt_2$, ибо наблюдаемая скорость O' (§ 9), при переходѣ отъ положенія 1 въ положеніе 4, есть v. Положеніе въ этотъ моментъ представлено на фиг. 4.



Фиг. 4.

Мы замѣчаемъ, что въ промежуткѣ между фиг. 2 и фиг. 3 свѣтовой сигналъ перешелъ вдоль покоящейся платформы S изъ $x=vt_0$ въ $x=x$ со скоростью c. Отсюда, на основаніи опредѣленія наблюдаемой скорости (§ 9), мы имѣемъ

$$\frac{x-v\,t_0}{t-t_0}=c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Аналогичнымъ образомъ въ промежуткѣ между фиг. 3 и фиг. 4 обратный сигналъ перешелъ изъ $x=x$ въ $x=vt_2$ со скоростью $-c$. Отсюда мы имѣемъ

$$\frac{vt_2-x}{t_2-t}=-c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Далѣе, изъ того способа, какимъ часы въ A′ были „синхронизированы“ съ часами въ O’ (см. § 14), мы имѣемъ (изъ фиг. 2, 3 и 4).

$$t'=\tfrac{1}{2}(rt_0+rt_2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Наконецъ, изъ того способа, какимъ была опредѣлена абсцисса A′ (см. § 5), мы имѣемъ (изъ фиг. 2 и 3)

$$x'=c\,(t'-rt_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій можно получить искомыя значенія x' и t' въ функціяхъ x и t. Такъ, рѣшая (1) для t_0 и (2) для t_2 и подставляя въ (3), мы имѣемъ

$$t' = \frac{r}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\left(t - \frac{v}{c}\,x\right);$$

а подставляя это значеніе вмѣстѣ съ значеніемъ t_0 въ (4), мы имѣемъ

$$x' = \frac{r}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}(x - vt).$$

Это есть искомое уравненіе (§ 13) для точки A′ на оси 0′X′. Для точки A′, не лежащей на оси, аналогичная цѣпь разсужденій дастъ

$$y' = \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}\,y,$$

какъ и требовалось, между тѣмъ какъ значенія x' и t' остаются такими же, какъ прежде.

Такимъ образомъ, всѣ уравненія преобразованія теоремы 1 получаются этимъ совершенно естественнымъ и элементарнымъ методомъ.

Пер. *П. Юшкевичъ.*

Р. Д. Кармикаэль.

О теоріи относительности: анализъ ея постулатовъ.

Введеніе.

Предлагаемый здѣсь анализъ постулатовъ¹) теоріи относительности былъ предпринятъ съ цѣлью установить, отъ какихъ именно постулатовъ зависятъ нѣкоторыя основныя заключенія теоріи. Достаточно самаго кратковременнаго размышленія, чтобы убѣдиться въ важномъ значеніи подобнаго анализа. На нѣкоторыя изъ заключеній теоріи относительности напали тѣ лица, которыя допускаютъ какъ разъ ту часть постулатовъ, изъ которыхъ вытекаютъ чисто логическимъ путемъ оспариваемыя заключенія. Въ этой работѣ я пытался установить нѣкоторыя изъ наиболѣе основныхъ и наиболѣе доступныхъ выводовъ теоріи, исходя изъ возможно меньшаго количества постулатовъ. Этотъ способъ анализа не только не приводитъ къ болѣе сложной аргументаціи, чѣмъ та, которой пользовались до сихъ поръ, но, наобо-

---

¹) Въ теоріи относительности слово „постулатъ" употреблялось въ такомъ смыслѣ, въ какомъ обыкновенно употребляютъ выраженіе „законъ природы".

ротъ, приводитъ къ значительнымъ упрощеніямъ какъ въ понятіяхъ, входящихъ въ теорію, такъ и въ аргументахъ, служащихъ для доказательства ея.

Когда я приступилъ къ работѣ, то вскорѣ выяснилось, что слѣдуетъ произвести кое-какія измѣненія какъ въ самихъ постулатахъ, такъ и въ самыхъ первыхъ, выводимыхъ изъ нихъ, теоремахъ, какъ читатель убѣдится въ этомъ изъ дальнѣйшаго. Такимъ образомъ оказывается, что нѣкоторыя изъ наиболѣе поразительныхъ заключеній теоріи зависятъ лишь отъ части постулатовъ. Убѣдить въ этомъ читателя это значитъ выяснить весь разсматриваемый вопросъ, благодаря чему возможно лучше разглядѣть взаимодѣйствія его частей и его общія отношенія ко всей совокупности научнаго и философскаго познанія.

Во всей работѣ настойчиво проведенъ нѣкоторый опредѣленный методъ [1]) для указанія тѣхъ постулатовъ, отъ которыхъ зависитъ каждая теорема. Въ концѣ каждой теоремы даны заключенныя въ скобкахъ ссылки (съ помощью буквъ) на постулаты, отъ которыхъ зависитъ доказательство теоремы. Такъ, теорема I зависитъ отъ постулатовъ M и R′.

При осуществленіи первоначальнаго плана работы оказалось необходимымъ изложить важную часть общихъ основъ теоріи относительности болѣе или менѣе новымъ образомъ. Оказалось, что если прибавить къ этимъ существеннымъ элементамъ сравнительно небольшое количество матеріала, то работа, взятая въ цѣломъ, сможетъ пригодиться въ качествѣ элементарнаго введенія въ теорію. Въ виду этого въ нее и были внесены соотвѣтственныя добавленія. Я тѣмъ охотнѣе сдѣлалъ это, что даже и этотъ добавочный

---

[1]) Этотъ методъ былъ употребленъ Вебленомъ и Юнгомъ въ ихъ проэктивной геометріи.

матеріалъ изложенъ болѣе или менѣе новымъ образомъ. Я думаю, что эта работа въ ея настоящей формѣ можетъ быть съ пользой прочтена всякимъ, знакомящимся впервые съ теоріей, и что она представляетъ болѣе доступное введеніе въ нее, чѣмъ всякое предложенное до сихъ поръ изложеніе.

Во всякой системѣ, состоящей изъ конечнаго числа постулатовъ и ихъ логическихъ слѣдствій, существуютъ непремѣнно нѣкоторыя теоремы, находящіяся въ слѣдующемъ основномъ отношеніи ко всей совокупности системы: съ помощью одной изъ этихъ теоремъ и всѣхъ постулатовъ, за исключеніемъ одного, можно доказать этотъ послѣдній постулатъ. Иначе говоря, можно замѣнить подобной теоремой одинъ изъ постулатовъ и затѣмъ доказать этотъ постулатъ. Когда постулатъ доказанъ такимъ образомъ, имъ можно воспользоваться затѣмъ въ ходѣ аргументацій, какъ самой этой теоремой. Отсюда ясно, что всѣ тѣ выводы, которые можно получить съ помощью первоначальной группы постулатовъ, можно получить и теперь, хотя, можетъ быть, и нѣсколько инымъ образомъ. Иначе говоря, если мы будемъ разсматривать всю систему въ совокупности ея постулатовъ и теоремъ, то совокупность эта одна и та же въ обоихъ случаяхъ. О двухъ группахъ постулатовъ, дающихъ начало, такимъ образомъ, одной и той же дедуктивной системѣ (состоящей изъ постулатовъ плюсъ теоремы), говорятъ, что онѣ логически эквивалентны.

Легко замѣтить, что проблема о логическихъ эквивалентахъ нѣкоторой данной группы постулатовъ имѣетъ важное значеніе. Не всѣ группы постулатовъ, эквивалентныя логически данной группѣ, одинаково интересны. Дѣйствительно, нѣкоторыя группы могутъ быть громоздки по формѣ и неудовлетворительны съ эстетической точки зрѣнія. Въ предлагаемомъ анализѣ постулатовъ теоріи относительности было обращено вниманіе на опредѣленіе нѣкоторыхъ изъ ихъ важныхъ логическихъ эквивалентовъ—въ особенности было обращено вниманіе на тѣ постулаты, которые могутъ замѣнить, такъ называемый, второй постулатъ относительности (нашъ постулатъ R). Замѣчаніе въ этомъ смыслѣ было уже сдѣлано Тольманомъ [1]). Указаніе полученныхъ въ этомъ направленіи результатовъ въ предлагаемой работѣ дано ниже, въ описаніи содержанія II части. Главное значеніе такихъ изслѣдованій съ физической точки зрѣнія заключается въ томъ фактѣ, что они указываютъ на различные методы для повѣрки теоріи относительности и подчеркиваютъ существенныя трудности и ограниченія подобной экспериментальной повѣрки вообще.

Авторъ намѣренъ въ дальнѣйшей работѣ разсмотрѣть далѣе проблему о логическихъ эквивалентахъ постулатовъ. Въ этой работѣ онъ собирается ввести общіе законы сохраненія энергіи, массы, количества движенія и электричества и вывести нѣкоторыя совокупныя слѣдствія этихъ законовъ и принципа относительности и опредѣлить, какія изъ полученныхъ такимъ образомъ теоремъ могутъ замѣнить постулаты теоріи относительности (или одинъ изъ нихъ), такъ, чтобы не нарушилась эквивалентность получившейся системы.

I часть предлагаемой работы посвящена общему изложенію и предварительному анализу постулатовъ теоріи относительности. Въ § 1 даны основные постулаты однородности пространства и времени, лежащіе въ основѣ всякой физической теоріи. Въ § 2 даны первые характеристическіе постулаты теоріи относительности, между тѣмъ какъ § 3 содержитъ изложеніе

---

[1]) Physical Review, 31 (1910): 26 — 40,

второго постулата. Здѣсь показано, что часть этого постулата (въ формѣ, въ которой обыкновенно излагается этотъ постулатъ) является слѣдствіемъ другой части его и перваго постулата вмѣстѣ съ основными постулатами однородности.

Авторы, писавшіе о теоріи относительности, обыкновенно формулировали лишь эти два постулата. Но фактически каждый изъ нихъ сдѣлалъ еще и дальнѣйшія допущенія; въ нѣкоторыхъ случаяхъ это было сдѣлано, повидимому, безсознательно. Авторъ предлагаемой работы находитъ желательнымъ, чтобы эти допущенія были выдѣлены и выставлены въ качествѣ постулатовъ. Поэтому въ § 4 я привожу тѣ добавочные постулаты, которыми я пользуюсь. Читатель, знакомый съ теоріей относительности, замѣтитъ, что эти допущенія отличны отъ тѣхъ, которыя обыкновенно употребляются (безъ явнаго указанія, что они —постулаты), какъ, напримѣръ, Эйнштейномъ [1]). Выборъ былъ произведенъ въ цѣляхъ простоты въ постулатахъ и доказательствахъ. Авторъ думаетъ, что это нововведеніе въ изложеніи постулатовъ важно. Оно приводитъ къ новымъ и болѣе простымъ доказательствамъ, чѣмъ тѣ, которыми обыкновенно пользуются; и это, можно надѣяться, въ значительной мѣрѣ разсѣетъ то чувство неудовлетворенности, которое испытываютъ на первыхъ порахъ многія лица при ознакомленіи съ теоріей относительности.

Дальнѣйшія замѣчанія (общаго характера) о постулатахъ даны въ §§ 5 и 6.

Во II части я разсматриваю относительныя измѣренія пространства и времени въ двухъ системахъ отсчета, которыя движутся другъ относительно друга,

---

[1]) Jahrbuch der Radioaktivität, 4 (1907) : 411 — 462. См. допущенія, отмѣченныя въ примѣчаніи на стр. 420.

и получаю эйнштейновы формулы преобразованія. Въ §§ 7 и 8 показано, что наиболѣе замѣчательная часть заключеній теоріи относительности касательно единицъ времени и пространства имѣетъ своимъ источникомъ одну часть второго постулата вмѣстѣ съ другими постулатами; срав. теоремы III и IV. Въ § 9 я разсматриваю вопросъ объ одновременности событій, происходящихъ въ различныхъ мѣстахъ. Въ §§ 10 и 11 я получаю эйнштейновы формулы преобразованія при переходѣ отъ одной системы отсчета къ другой, а также теорему сложенія скоростей. Эти результаты примѣняются въ § 12 къ проблемѣ нахожденія логическихъ эквивалентовъ для постулата R.

I. Постулаты теоріи относительности.

§ 1. Постулаты однородности. — Существуютъ два основныхъ постулата о природѣ пространства и времени, лежащихъ въ основѣ всякой физической теоріи. Они заключаютъ въ себѣ утвержденіе, что каждая точка пространства подобна всякой другой точкѣ его и что каждый моментъ времени подобенъ каждому другому моменту его. Для ставимой нами себѣ здѣсь задачи постулаты эти лучше всего можно формулировать слѣдующимъ образомъ:

Постулатъ H_1. Пространство однородно и трехмѣрно.

Постулатъ H_2. Время однородно и одномѣрно.

Въ математическомъ отношеніи постулаты эти означаютъ, между прочимъ — и это очень важно,—что преобразованія координатъ пространства и времени линейны.

Всѣ наши теоремы будутъ прямо или косвенно зависѣть отъ этихъ двухъ постулатовъ: теоремы, касающіяся пространства, будутъ зависѣть отъ H_1, а теоремы, касающіяся времени, будутъ зависѣть отъ H_2. Можно, кромѣ того, признать, какъ фактъ, что никто не усомнится серьезно въ этихъ постулатахъ. Поэтому мы не считаемъ необходимымъ ссылаться при доказательствѣ какихъ-нибудь теоремъ спеціально на эти постулаты, такъ какъ разъ навсегда принято, что они лежатъ въ основѣ всей работы.

§ 2. Первый характеристическій постулатъ.—Тѣ, кто постулируютъ существованіе эѳира, какъ средства объясненія явленій свѣта, электричества и магнетизма, принимаютъ обыкновенно довольно единодушно [1]), что этотъ эѳиръ находится въ состояніи покоя. Опытные факты, которые приходится объяснить, не могутъ быть истолкованы удовлетворительнымъ образомъ, если исходить изъ гипотезы движущагося эѳира. Теорія покоящагося эѳира приводитъ естественнымъ образомъ къ заключенію, что наблюдателю возможно открыть и измѣрить свое абсолютное движеніе по отношенію къ эѳиру. Исходя изъ этого допущенія, можно было вывести, что время, потребное для луча свѣта, чтобы пройти нѣкоторое данное разстояніе и вернуться обратно, будетъ различно въ случаѣ, когда путь, проходимый свѣтомъ, параллеленъ направленію движенія, и въ томъ случаѣ, когда онъ перпендикуляренъ къ этому направленію.

Для провѣрки этого вывода теоріи Майкельсономъ и Морлеемъ [2]) былъ произведенъ ихъ классическій опытъ, въ которомъ путь свѣтового луча былъ цѣликомъ въ воздухѣ. Опытъ не обнаружилъ ни малѣйшей разницы во времени прохожденія свѣтомъ обоихъ его путей. Крайняя точность употребленныхъ

---

[1]) См., однако, противоположное мнѣніе Вильсона (H. A. Wilson), Phil. Mag. 19 (1910). 809-817.

[2]) Am. Journ. Science (3), 34 (1887). 333-345.

здѣсь методовъ не оставляетъ никакихъ сомнѣній въ правильности полученныхъ результатовъ.

Аналогичнымъ образомъ изъ теоріи покоящагося эѳира было сдѣлано заключеніе, что заряженный конденсаторъ, привѣшенный за нить, обнаружитъ явленіе крученія, происходящее отъ движенія земли. Это заключеніе было провѣрено на опытѣ Трутономъ иНоблемъ [1]); опытъ и здѣсь далъ отрицательные результаты.

Эти результаты находятся въ полномъ согласіи съ гипотезой, что невозможно обнаружить абсолютное переносное движеніе въ пространствѣ; и въ дѣйствительности, обобщая ихъ, формулировали эту гипотезу. Отчетливая формулировка этого заключенія составляетъ первый характеристическій постулатъ теоріи относительности.

Однако, прежде, чѣмъ изложить этотъ постулатъ, необходимо ввести нѣкоторое опредѣленіе. Для того, чтобы умѣть оперировать такими количествами, какъ тѣ, которыя предполагаются при измѣреніи движенія, времени, скорости и т. д., необходимо имѣть нѣкоторую систему отсчета, относительно которой производятся измѣренія. Разсмотримъ нѣкоторую группу вещей, состоящую изъ какихъ-нибудь предметовъ и нѣкотораго вида физическихъ количествъ [2]), каждая изъ которыхъ находится въ покоѣ относительно каждой другой. Допустимъ, что среди этихъ предметовъ имѣются часы для измѣренія времени и стержни или линейки для измѣренія длинъ. Подобную группу предметовъ и количествъ, находящихся въ покоѣ другъ относительно друга вмѣстѣ съ ихъ единицами для измѣренія времени и длины, мы будемъ называть си-

---

[1]) Phil. Trans. Roy. Soc. (A), 202 (1904): 165.

[2]) Какъ, напримѣръ, заряды, магниты, источники свѣта, телескопы и т. д.

стемой отсчета [1]). Въ нашей работѣ мы будемъ обозначать такую систему символомъ S. Если намъ придется имѣть дѣло съ двумя или болѣе символами отсчета, то мы будемъ обозначать ихъ символами S_1, S_2.... Далѣе, мы допустимъ, что единицы любыхъ двухъ системъ S_1 и S_2 таковы, что получится одинъ и тотъ же числовой результатъ, если мы будемъ измѣрять единицами S_1 нѣкоторое количество L_1 и единицами S_2 количество L_2, когда отношеніе L_1 къ S_1 то же самое, что отношеніе L_2 къ S_2.

Имѣя это опредѣленіе, мы можемъ теперь формулировать первый характеристическій постулатъ теоріи относительности.

Постулатъ M. Неускоренное движеніе нѣкоторой системы отсчета S не можетъ быть обнаружено путемъ наблюденій, произведенныхъ лишь въ S, причемъ единицы измѣренія принадлежатъ S.

Постулатъ этотъ, какъ сказано, есть прямое обобщеніе изъ опыта. До сихъ поръ неизвѣстно ни одного опытнаго факта, противорѣчащаго ему. Убѣжденіе въ томъ, что и будущіе опыты смогутъ только подтвердить его, такъ сильно, что ни сторонники, ни противники теоріи относительности никогда (или же рѣдко) не высказывали возраженій противъ этого постулата. До сихъ поръ неизвѣстно никакихъ средствъ, съ помощью которыхъ наблюдатель могъ бы обнаружить абсолютное движеніе или движеніе въ нѣкотораго рода средѣ, наполняющей—какъ можно было бы предположить—пространство. Далѣе, во всѣхъ случаяхъ, когда принятыя до сихъ поръ теоріи предвидѣли воз-

---

[1]) Если нѣтъ нѣкотораго числа этихъ предметовъ или количествъ, то мы иногда будемъ выражаться о томъ, что остается, какъ о системѣ отсчета. Такъ, система можетъ состоять лишь изъ одного источника свѣта.

можность обнаруженія подобнаго движенія и когда были произведены достаточно точныя наблюденія, оказывалось, что невозможно обнаружить подобнаго движенія. Кромѣ того, одно, по крайней мѣрѣ [1]), изъ этихъ противорѣчій теоріи остается неустранимымъ въ теченіе 25 лѣтъ, и не удалось найти для него никакого удовлетворительнаго объясненія, если только не принять закона, формулированнаго въ вышеприведенномъ постулатѣ М. Такимъ образомъ, при наличномъ состояніи нашихъ знаній, можно считать, что опытныя данныя, говорящія въ пользу этого постулата, носятъ весьма убѣдительный характеръ.

Здѣсь надо прибавить еще одно замѣчаніе. Прямые опыты, результаты которыхъ привели къ формулированію постулата М, были предприняты для провѣрки предсказаній, сдѣланныхъ на основѣ теоріи объ эѳирѣ, какъ носителѣ свѣта и электричества. Но полученный здѣсь результатъ носитъ чисто экспериментальный характеръ и ни въ коемъ случаѣ не зависитъ отъ теоріи эѳира. Иными словами, законъ, формулированный въ постулатѣ М, никоимъ образомъ не зависитъ отъ существованія или несуществованія эѳира. Важно запомнить это въ виду той путаницы мнѣній, которая возникла въ нѣкоторыхъ кругахъ по вопросу объ отношеніи между теоріей относительности и теоріей эѳира. Разсматриваемый постулатъ есть просто обобщеніе экспериментальнаго факта, и, пока не произведенъ опытъ, показывающій незакономѣрность этого обобщенія, вполнѣ согласно съ общимъ духомъ физическаго изслѣдованія принимать его, какъ „законъ природы“. Значитъ, слѣдуетъ заставить теорію согласоваться съ нимъ, а не наоборотъ,—его съ теоріей.

§ 3. Второй характеристическій посту-

---

[1]) Здѣсь имѣется въ виду опытъ Майкельсона и Морлея.

латъ.—Такъ называемый, второй постулатъ теоріи относительности въ той формѣ, въ которой его часто излагаютъ [1]), заключаетъ въ себѣ двѣ совершенно различныя части. По мнѣнію автора предлагаемой работы, немалая часть трудностей, связанныхъ съ пониманіемъ этого второго постулата, зависѣла отъ того, что проглядѣли взаимнозависимость этихъ двухъ частей и вышеприведеннаго постулата М. Какъ разъ та часть второго постулата, противъ которой выдвигалось большинство возраженій, есть логическое слѣдствіе М; съ другой же стороны, другая—менѣе упоминавшаяся—часть есть изложеніе закона, который въ теченіе долгаго времени принимался физиками. Слѣдовательно, мы должны формулировать раздѣльно обѣ части второго постулата и тщательно выяснить взаимнозависимость этихъ частей и постулата М.

Та часть, которую мы изложимъ первой, содержитъ въ себѣ принципъ, съ давнихъ поръ извѣстный въ теоріи свѣта, именно, тотъ принципъ, что скорость свѣта не зависитъ отъ скорости источника. Иными словами, скорость, съ которой свѣтъ проходитъ мимо какого-нибудь наблюдателя, не увеличивается, если источникъ свѣта движется по направленію къ наблюдателю, и не уменьшается, если онъ движется въ сторону отъ него. Точно формулированный, постулатъ этотъ гласитъ:

Постулатъ R′. Скорость свѣта въ свободномъ пространствѣ, измѣряемая по отношенію къ неускоренной системѣ отсчета S съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S, не зависитъ отъ неускоренной скорости источника свѣта.

---

[1]) См. ниже приведенный постулатъ R и вводныя къ нему замѣчанія.

Формулированный въ этомъ постулатѣ законъ является заключеніемъ, легко вытекающимъ изъ обычной волнообразной теоріи свѣта, и поэтому долженъ быть принятъ всякимъ, принимающимъ эту теорію. Но надо подчеркнуть то, что истинность R′ не зависитъ отъ какой бы то ни было теоріи свѣта. Она является фактомъ, доступнымъ прямой экспериментальной провѣркѣ, причемъ послѣдняя должна быть произведена такимъ путемъ, чтобы не зависѣть по возможности отъ какихъ бы то ни было теорій свѣта, по крайней мѣрѣ, въ той степени, въ какой эти теоріи не опираются на прямыя данныя опыта. Насколько намъ представляется, нѣтъ никакихъ опытныхъ данныхъ, которыя бы безспорно противорѣчили постулату M, между тѣмъ какъ, съ другой стороны, существуютъ прямыя опытныя данныя, которыя, по мнѣнію нѣкоторыхъ изслѣдователей, рѣшительно говорятъ въ его пользу. Въ частности Тольманъ [1]) разсматривалъ эту проблему въ связи съ явленіемъ Допплера и со скоростью свѣта, испускаемаго обоими краями солнечной поверхности. Онъ пришелъ къ заключенію, что опытъ говоритъ въ пользу этого постулата. Съ другой стороны Стюартъ [2]) анализировалъ эти же самые опыты и нашелъ объясненіе ихъ въ электромагнитной теоріи истеченія свѣта Томсона. Согласно Стюарту, эти опыты согласуются съ нашимъ постулатомъ M, но противорѣчатъ нашему постулату R′. Въ такомъ же положеніи находятся, какъ кажется, всѣ прочія предпринятыя попытки провѣрки постулата; его можно интерпретировать двоякимъ образомъ, при чемъ толкованія эти прямо противоположны другъ другу въ смыслѣ значенія заключеній,

---

[1]) Physical Review, 31 (1910): 26—40.

[2]) Phys. Review, 32 (1911): 418—428.

выводимыхъ изъ нихъ по вопросу о правильности R′. Такимъ образомъ въ настоящее время нѣтъ безспорныхъ опытныхъ данныхъ, говорящихъ за или противъ постулата R′. Для того, чтобы доказать это допущенiе, надо или произвести новые опыты или доказать его косвеннымъ образомъ, показавъ, что оно является слѣдствiемъ опыта и принятыхъ законовъ.

Но всякiй человѣкъ, принимающiй постулаты M и R′, долженъ неизбѣжно принять и всѣ логическiе выводы, вытекающiе изъ нихъ. Изъ этихъ логическихъ выводовъ мы докажемъ теперь одинъ, имѣющiй огромное значенiе для теорiи относительности.

Теорема 1. Скорость свѣта въ свободномъ пространствѣ, измѣряемая по отношенiю къ нѣкоторой неускоренной системѣ отсчета S съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S, не зависитъ отъ направленiя движенiя S (MR′) [1].

Такъ какъ въ силу R′ скорость свѣта не зависитъ отъ скорости источника свѣта, то мы можемъ предположить, что источникъ свѣта принадлежитъ къ системѣ S. Пусть теперь наблюдается и записывается скорость свѣта, исходящаго изъ этого источника въ различныхъ направленiяхъ. Въ виду однородности пространства, само по себѣ то или иное направленiе въ пространствѣ не можетъ имѣть никакого влiянiя на эти наблюдаемыя скорости; поэтому, если онѣ разнятся другъ отъ друга, то причина этого должна заключаться въ скорости S. Но если бы была какая-нибудь разница, происходящая отъ направленiя движенiя S, то по этой разницѣ можно было бы обнаружить движенiе S. Но въ силу M невозможно этимъ

---

[1] Буквы, находящiяся при теоремѣ въ скобкахъ, указываютъ наименованiе постулатовъ (исключая H_1 и H_2), отъ которыхъ зависитъ теорема. См. Введенiе и § 1.

путемъ обнаружить подобное движеніе. Отсюда слѣдуетъ, что наблюдаемая скорость должна быть одинаковой во всѣхъ направленіяхъ. Иными словами, она не зависитъ отъ направленія движенія S; и такимъ образомъ теорема доказана.

Однако, ясно, что мы не можемъ сдѣлать слѣдующій шагъ и доказывать—какъ это, повидимому, дѣлаетъ Тольманъ [1],—что наблюдаемая скорость свѣта не зависитъ отъ абсолютной величины скорости S. Чтобы разобраться въ этомъ, допустимъ, что абсолютная величина скорости S вліяетъ на наблюдаемую скорость свѣта. Въ виду R′ она окажетъ одно и то же дѣйствіе на наблюдаемую скорость свѣта, каково бы ни было неускоренное движеніе источника свѣта. Слѣдовательно, изъ всѣхъ возможныхъ наблюденій экспериментаторъ будетъ имѣть передъ собой лишь одно данное, пригодное для опредѣленія дѣйствія одного явленія на другое, и именно такое данное, въ которомъ оба явленія связаны между собой нѣкоторымъ опредѣленнымъ образомъ. Ясно, что онъ не сумѣетъ опредѣлить дѣйствіе одного явленія на другое ибо онъ никогда не сможетъ наблюдать одного изъ этихъ явленій внѣ связи съ другимъ, при чемъ связь эта всегда остается одной и той же, какъ бы онъ ни варьировалъ свои опыты. Но если наблюдатель не можетъ опредѣлить нѣкоторое существующее дѣйствіе, то ясно, что онъ не можетъ и доказать отсутствіе таковаго дѣйствія.

Но хотя и невозможно доказать отсутствіе этого дѣйствія, все-таки, вѣроятно, невозможно удовлетворительно представить себѣ того способа, какимъ оно можетъ имѣть мѣсто. Физическая интуиція под-

---

[1] Physical Review, 31 (1910), с. 27.

сказываетъ (и возможно, что Тольманъ имѣетъ именно это въ виду въ вышецитированномъ отрывкѣ), что если направленіе скорости S не оказываетъ никакого дѣйствія на наблюдаемую скорость свѣта, то и абсолютная величина скорости S не оказываетъ никакого дѣйствія па подобную наблюдаемую скорость. Но это не составляетъ доказательства. Однако, въ этомъ нѣтъ ничего, что̀ способно ослабить естественность допущенія подобной независимости обѣихъ скоростей; дѣйствительно, было бы ненаучно сдѣлать какое-ниинное допущеніе (которое неизбѣжно привело бы къ значительно бо̀льшимъ усложненіямъ), пока мы не вынуждены къ этому какимъ-нибудь безспорнымъ фактомъ опыта. Слѣдовательно, мы можемъ сдѣлать это допущеніе, которое и формулируемъ, какъ постулатъ R″.

Постулатъ R″. Скорость свѣта въ свободномъ пространствѣ, измѣряемая по отношенію къ неускоренной системѣ отсчета S съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S, не зависитъ отъ абсолютной величины скорости S.

Постулатъ R. Постулатъ, полученный изъ комбинированія R′ и R″, мы будемъ часто, въ видахъ удобства, обозначать, какъ постулатъ R.

Но такъ какъ неускоренная скорость вполнѣ опредѣлена, когда даны абсолютная величина скорости и направленіе движенія, то изъ теоремы I и постулата R″ немедленно вытекаетъ слѣдующая теорема.

Теорема II. Скорость свѣта въ свободномъ пространствѣ, измѣряемая по отношенію къ неускоренной системѣ отсчета S съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S, не зависитъ отъ скорости S (MR).

Второй постулатъ теоріи относительности излагали обыкновенно въ формѣ, отличной отъ постулатовъ R′ и R″ или R. Дѣйствительно, истинность теоремы I часто разсматривалась, какъ часть допущенія, заключеннаго въ этомъ постулатѣ, хотя I можетъ быть выведено изъ M и R′. Но именно допущеніе I составляло предметъ особенной трудности для многихъ лицъ. Мы думаемъ, что часть этой трудности исчезнетъ въ виду того, что I здѣсь доказано съ помощью M и R′.

Въ цѣляхъ удобства дальнѣйшаго анализа мы прилагаемъ здѣсь одну изъ обычныхъ формулировокъ второго постулата. Однако, слѣдуетъ замѣтить, что онъ не составляетъ какой-то отдѣльной составной части нашего изложенія, но заключается уже въ M и R, отчасти прямо, отчасти, какъ необходимое слѣдствіе изъ этихъ постулатовъ.

Постулатъ R. Скорость свѣта въ свободномъ пространствѣ, измѣряемая по отношенію къ неускоренной системѣ отсчета S съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S, не зависитъ отъ скорости S и отъ неускоренной скорости источника свѣта.

Въ виду природы постулата R″ трудно добиться прямого экспериментальнаго доказательства въ пользу его или противъ него. Однако, кажется—какъ мы уже замѣтили,—что тотъ, кто принимаетъ теорему I, врядъ ли откажется допустить R″. Но теорема I представляетъ, какъ мы показали, логическое слѣдствіе M и R′. Кромѣ того, изъ дальнѣйшаго будетъ видно, что нѣтъ нужды дѣлать еще какія-нибудь допущенія, противорѣчащія какимъ бы то ни было образомъ общепринятымъ понятіямъ. Слѣдовательно, экспериментальное доказательство въ пользу всей теоріи относительности, или противъ нея, должно—какъ кажется—вертѣться вокругъ постулатовъ M и R′. Мы уже указали на кое-какія экспериментальныя доказательства въ пользу этихъ постулатовъ. Впослѣдствіи, въ связи съ теоремами, которыя будутъ выведены (въ этой работѣ и въ другой, подготовляемой авторомъ къ печати), будутъ даны дальнѣйшія указанія на имѣющіяся экспериментальныя доказательства, при чемъ будутъ указаны и нѣкоторыя иныя возможныя линіи изысканія въ этомъ направленіи.

Вообще принято, что странныя заключенія, вытекающія изъ теоріи относительности, зависятъ отъ постулата R (или постулата $\overline{\mathrm{R}}$, согласно обычной формулировкѣ). Имѣя въ виду теорему I и нашъ анализъ слѣдствій изъ нея, мы можемъ, очевидно, заключить [1]), что странность, содержащаяся въ выводахъ изъ теоріи относительности, зависитъ отъ той части R, которая заключена въ R′. Поэтому важно тщательно проанализировать этотъ постулатъ и въ частности познакомиться съ альтернативными формами, которыя, въ виду другихъ постулатовъ, логически эквивалентны ему. Одна изъ подобныхъ формъ была дана уже Тольманомъ (l. c., с. 36), который также указалъ на важное значеніе общей проблемы. Въ слѣдующей нашей работѣ альтернативная форма, предложенная Тольманомъ, будетъ подвергнута съ нашей стороны анализу. Какъ уже сказано во введеніи, тамъ будутъ даны и другія альтернативныя формы.

§ 4. Постулаты V и L.—Обыкновенно авторы, пишущіе по вопросу о теоріи относительности, формулируютъ явнымъ образомъ лишь постулаты M и R. Но фактически каждый изъ нихъ дѣлалъ еще и другія допущенія, касающіяся отношеній между обѣими системами. Допущенія эти—дѣлаемыя въ какой-нибудь формѣ—существенно важны для первоначальной аргу-

---

[1]) Это уже было отмѣчено Тольманомъ, l. c. с. 27—28.

ментаціи и для заключеній, выводимыхъ съ ея помощью. Мы считаемъ болѣе цѣлесообразнымъ формулировать явнымъ образомъ и эти допущенія. Среди различныхъ формъ, любую изъ которыхъ можно выбрать, одна кажется намъ гораздо болѣе простой, чѣмъ прочія. И ею то мы и будемъ пользоваться здѣсь. Мы формулируемъ постулаты V и L слѣдующимъ образомъ.

Постулатъ V. Если скорость нѣкоторой системы отсчета S_2 по отношенію къ системѣ отсчета S_1 измѣряется съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S_1, и если скорость S_1 по отношенію къ S_2 измѣряется съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S_2, то оба результата должны совпадать по абсолютной величинѣ.

Эту скорость мы будемъ называть относительной скоростью обѣихъ системъ. Линія направленія этой скорости будетъ называться линіей относительнаго движенія обѣихъ системъ.

Постулатъ L. Если двѣ системы отсчета S_1 и S_2 движутся съ неускоренной относительной скоростью и если линейный отрѣзокъ l перпендикуляренъ къ линіи относительнаго движенія S_1 и S_2 и неподвижно связанъ съ одной изъ этихъ системъ, то длина l, измѣренная съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S_1, будетъ та же, что и длина его, измѣренная съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S_2.

Существенное содержаніе обоихъ этихъ постулатовъ можно формулировать проще (но менѣе точно), если ввести явнымъ образомъ понятіе наблюдателя. Такъ, постулатъ V въ общемъ эквивалентенъ слѣдующему положенію. Два наблюдателя, относительное движеніе которыхъ равномѣрно, сойдутся въ своихъ измѣреніяхъ этого равномѣрнаго относительнаго движенія. Въ качествѣ приблизительнаго эквивалента L мы дадимъ: Два наблюдателя, относительное движеніе которыхъ равномѣрно, сойдутся въ своихъ измѣреніяхъ длины прямой, перпендикулярной къ ихъ линіи относительнаго движенія.

Слѣдуетъ замѣтить, что оба эти постулата представляютъ ничто иное, какъ изложеніе понятій, лежащихъ въ основѣ классической механики. Первый принимается въ допущеніи, что существуетъ такая вещь, какъ относительное движеніе двухъ тѣлъ, которыя не находятся въ покоѣ другъ относительно друга. Второй есть не что иное, какъ формулированіе части содержанія, заключающагося въ нашемъ понятіи такой вещи, какъ длина стержня или другого предмета.

Разъ оба эти постулата общеприняты, то естественно можетъ возникнуть вопросъ: зачѣмъ формулировать ихъ? Развѣ не достаточно просто принять ихъ, какъ истинные? Но дѣло въ томъ, что существуютъ и другія общепринятыя понятія, которыя, однако, не согласуются съ постулатами теоріи относительности. Поэтому должно казаться желательнымъ— а на дѣлѣ должно быть существенно важнымъ для точнаго логическаго анализа—формулировать явно именно тѣ допущенія касательно обѣихъ системъ отсчета, которыми мы будемъ пользоваться въ своемъ изслѣдованіи. Только такимъ путемъ можно будетъ разобрать въ точности, на чемъ основываются собственно наши странныя заключенія.

Мы сдѣлаемъ здѣсь еще короткое отступленіе по поводу постулата L. Въ части II мы придемъ къ заключенію, что длина по линіи движенія независима отъ скорости движенія системы. Въ виду этого поднимается вопросъ, почему мы должны допускать, что длина, взятая по прямой, перпендикулярной къ движенію, независима отъ скорости. Отвѣтъ на это гласитъ, что мы вовсе не вынуждены признать это допущеніе; мы свободны допустить, что длина, взятая по прямой, перпендикулярной къ движенію, зависитъ отъ скорости подобнаго движенія. И фактически общая формулировка подобной гипотезы была сдѣлана уже Э. Рикке (E. Riecke) ¹). Однако, эта гипотеза, несомнѣнно, болѣе сложна и менѣе изящна, чѣмъ гипотеза, сдѣланная нами; и послѣдняя, какъ мы увидимъ, не стоитъ въ противорѣчіи ни съ однимъ извѣстнымъ экспериментальнымъ фактомъ. Поэтому, слѣдуя той интуиціи, которой мудро руководились физики, мы принимаемъ простѣйшую гипотезу ²), которая находится въ согласіи со всей совокупностью опытныхъ данныхъ, извѣстныхъ до сихъ поръ, и которая объясняетъ ее. Если же когда-нибудь будутъ произведены опыты, которые не окажутся въ согласіи съ теоріей, развитой на основѣ вышеприведенныхъ постулатовъ, то тогда будетъ время разсмотрѣть проблему о введеніи болѣе сложнаго постулата на мѣсто нашего постулата L.

§ 5. Непротиворѣчивость и независимость постулатовъ.—Въ предлагаемой работѣ допускается, что формулированные нами постулаты не противорѣчатъ другъ другу, иначе говоря, нами здѣсь не будетъ сдѣлано вовсе попытки доказать ихъ непротиворѣчивость. Тотъ фактъ, что изъ постулатовъ не было выведено противорѣчащихъ другъ другу за-

---

¹) Göttinger Nachrichten, Math. Phys., 1911, c. 271—277.

²) Эга гипотеза находится въ согласіи съ эйнштейновой теоріей относительности.

ключеній, будетъ принятъ, какъ (частичное) доказательство того, что они взаимно непротиворѣчивы. Кромѣ того, судя по самой природѣ этихъ постулатовъ и по различной области приложимости каждаго изъ нихъ, трудно представить себѣ, какъ какой-нибудь изъ нихъ могъ бы вдругъ противорѣчить заключеніямъ, выводимымъ изъ другихъ.

Есть также и другой вопросъ, который мы намѣрены здѣсь обойти молчаніемъ, именно, вопросъ о логической независимости постулатовъ. Является ли какой-нибудь постулатъ или часть какого-нибудь постулата логическимъ слѣдствіемъ остальныхъ постулатовъ? Вопросъ этотъ важенъ съ точки зрѣнія формальной логики, но въ настоящемъ случаѣ его значеніе для физики, вѣроятно, ничтожно.

Другіе необходимые постулаты. — Изъ вышеприведенныхъ постулатовъ возможно вывести лишь такого рода заключенія о теоріи относительности, которыя носятъ общій характеръ. Если же, напримѣръ, желательно изучить природу массы или отношеніе между массой и энергіей въ этой теоріи, то необходимо ввести нѣкоторое допущеніе касательно массы въ первомъ случаѣ и касательно массы и энергіи—во второмъ. Такъ, мы можемъ допустить законы сохраненія массы, энергіи, электричества, количества движенія и вывести совокупныя слѣдствія изъ этихъ допущеній и вышеприведенныхъ постулатовъ. Мы намѣрены вернуться къ этому вопросу въ другой работѣ. Въ настоящее же время мы займемся лишь вышеприведенными постулатами и выводами изъ нихъ.

II. Относительныя измѣренія времени и пространства въ двухъ системахъ отсчета.

Преобразованія.

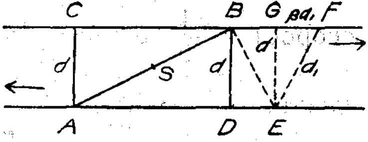
§ 7. Отношенія между единицами времени. — Разсмотримъ три системы отсчета S, S_1 и S_2, расположенныя другъ относительно друга слѣдующимъ образомъ: линіи относительнаго движенія S и S_1, S и S_2, S_1 и S_2 всѣ параллельны; S_1 и S_2 обладаютъ относительной скоростью v [1]; S и S_1 обладаютъ относительной скоростью $\frac{1}{2}v$ въ одномъ направленіи, а S и S_2 обладаютъ относительной скоростью $\frac{1}{2}v$ въ противоположномъ направленіи. Система S состоитъ изъ простого источника свѣта, и этотъ источникъ расположенъ симметрически по отношенію къ двумъ точкамъ, одна изъ которыхъ связана неизмѣнно съ S_1, а другая связана неизмѣнно съ S_2. Это возможно въ качествѣ постояннаго отношенія въ виду относительныхъ движеній трехъ системъ. Для удобства допустимо, что S находится въ покоѣ.

Мы предположимъ теперь, что наблюдатели, нахоходящіеся въ системахъ S_1 и S_2, измѣряютъ скорость свѣта, испускаемаго источникомъ S. Пусть точка A въ S_1 и точка B въ S_2, расположенныя симметрически по отношенію къ источнику свѣта S, движутся вдоль прямыхъ l_1 и l_2. Эти прямыя параллельны. Изъ постулата L слѣдуетъ, что наблюдатели S_1 и S_2 получатъ одну и ту же величину для разстоянія между l_1 и l_2. Обозначимъ это разстояніе черезъ d. Въ виду постулата M ни одинъ изъ наблюдателей не въ со-

---

[1] Замѣтимъ, что гипотеза эта правомѣрна лишь при допущеніи постулата V.

стоянiи обнаружить своего движенiя. Поэтому онъ будетъ производить свои наблюденiя, исходя изъ допущенiя, что его система находится въ покоѣ. Иначе говоря, его измѣренiя будутъ произведены съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ его системѣ, и никакихъ поправокъ не будетъ сдѣлано относительно движенiя системы. Пусть наблюдатель въ S_1 отразитъ лучъ свѣта SA изъ точки A въ точку C, находящуюся на l_2, и обратно—въ A.



Фиг. 1.

Пусть наблюдаемое время, употребленное свѣтомъ, чтобы пройти отъ A до C и обратно, будетъ t. Такъ какъ наблюдатель допускаетъ, что его система находится въ покоѣ, то онъ предположитъ, что лучъ свѣта проходитъ (въ обоихъ направленiяхъ) вдоль прямой AC, перпендикулярной къ l_1 и l_2. Измѣренiе разстоянiя, пройденнаго лучемъ свѣта въ промежутокъ времени t, дастъ ему поэтому $2d$. Слѣдовательно, онъ получитъ отсюда

$$\frac{2d}{t}=c,$$

гдѣ c есть его наблюдаемая скорость свѣта.

Аналогичнымъ образомъ наблюдатель въ S_2, предполагающiй, что его система находится въ покоѣ, найдетъ время t_1, въ теченiе котораго лучъ свѣта пройдетъ отъ B до D и обратно. Второй наблюдатель получитъ:

$$\frac{2d}{t_1} = c_1,$$

гдѣ c_1 есть его наблюдаемая скорость свѣта.

Но изъ допущенныхъ отношеній между системами S, S_1 и S_2 и изъ однородности пространства слѣдуетъ, что оба предположенныхъ нами наблюденія, должны привести къ одному и тому же опредѣленію скорости свѣта. Это легко замѣтить изъ того факта, что наблюденія были произведены такимъ образомъ, что дѣйствіе, происходящее какъ отъ абсолютнаго значенія, такъ и отъ направленія движенія системъ S_1 и S_2, одно и то же въ обоихъ случаяхъ. Иными словами, если мы обозначимъ черезъ L_1 и L_2 количества, измѣренныя соотвѣтственно въ S_1 и S_2, то отношеніе L_1 къ S_1 то же самое, что L_2 къ S_2. Значитъ, численные результаты тождественны, какъ это видно изъ опредѣленія системъ отсчета. Значитъ, мы имѣемъ $c_1 = c$.

Предположимъ теперь, что наблюдатель въ A слѣдитъ за опытомъ въ B. Ему кажется, что B движется со скоростью v; мы допустимъ, что кажущееся движеніе происходитъ въ направленіи, указанномъ стрѣлкой. Наблюдателю въ B кажется, что лучъ свѣта проходитъ BD отъ B къ D и возвращается обратно по той же самой линіи въ B. Наблюдателю же въ A кажется, что лучъ проходитъ линію BEF, гдѣ F—та точка, въ которую пришло B за промежутокъ времени, въ который лучъ вернулся обратно къ наблюдателю въ этой точкѣ. Если EG перпендикулярно къ l_2, и d_1 есть длина EF, измѣренная съ помощью единицъ, принадлежащихъ къ S_1, тогда, очевидно, GF (измѣренная тѣми же единицами) есть βd_1, гдѣ $\beta = \frac{v}{\bar{c}}$ и $\bar{c}$ есть (кажущаяся) скорость свѣта, какъ ее опредѣляетъ въ этомъ случаѣ наблюдатель въ А. Изъ прямоугольнаго треугольника EFG слѣдуетъ, что мы имѣемъ:

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Если теперь $\bar{t}$ есть тотъ промежутокъ времени, который — согласно наблюдателю въ А — потребенъ для свѣта, чтобы пройти путь BEF, то мы имѣемъ:

$$\frac{2d_1}{t} = \frac{2d}{\bar{t}\sqrt{1 - \beta^2}} = \bar{c}.$$

До сихъ поръ мы пользовались лишь тѣми изъ нашихъ постулатовъ, которые принимаются какъ сторонниками, такъ и противниками теоріи относительности. Теперь мы приходимъ къ тому пункту, гдѣ начинается расхожденіе обѣихъ сторонъ.

Введемъ пока слѣдующую добавочную гипотезу.

Допущеніе А. Оба опредѣленія c и $\bar{c}$ скорости свѣта, полученныя, какъ выше указано, наблюдателемъ въ А, равны.

Но мы показали, что c равно c_1. Значитъ, мы можемъ приравнять и значенія c_1 и $\bar{c}$. Мы имѣемъ такимъ образомъ

$$\frac{2d}{t_1} = \frac{2d}{\bar{t}\sqrt{1-\beta^2}}; \text{ значитъ,}$$

$$t_1 = \bar{t}\sqrt{1-\beta^2}.$$

Но t_1 и $\bar{t}$ — это мѣры одного и того же промежутка времени, гдѣ t_1 выражено въ единицахъ, принадлежащихъ къ S_2, и $\bar{t}$ — въ единицахъ, принадлежащихъ къ S_1. Значитъ, наблюдателю въ S_1 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_2, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$. Съ другой стороны, можно доказать точно такимъ же путемъ, что наблюдателю въ S_2 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_1, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$. Иными словами, единицы времени въ обѣихъ системахъ различны, и каждый наблюдатель приходитъ къ одному и тому же заключенію въ вопросѣ объ отношеніи его единицы времени къ единицѣ времени другой системы.

Этотъ важный и поразительный выводъ можно формулировать, какъ слѣдующую теорему:

Теорема III. Даны двѣ системы отсчета S_1 и S_2, движущіяся съ относительной скоростью v; пусть β есть отношеніе скорости v къ скорости свѣта, опредѣленной, какъ выше сказано. Въ такомъ случаѣ наблюдателю въ S_1 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_2, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$, между тѣмъ какъ наблюдателю въ S_2 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_1, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ (MVLA).

Воспользуемся теперь нашимъ постулатомъ R′. Въ теоремѣ I мы уже привели, какъ логическое слѣдствіе изъ M и R′, что скорость свѣта, наблюдаемая въ какой-нибудь системѣ отсчета, не зависитъ отъ направленія движенія этой системы. Теперь если c и $\bar{c}$ — опредѣленные, какъ выше указано — отличаются другъ отъ друга, то разница эта можетъ происходить лишь отъ направленія движенія S_1, какъ это легко замѣтить изъ постулата R′ и метода опредѣленія этихъ количествъ. Слѣдовательно, положеніе, проведенное нами выше въ качествѣ допущенія A, является логическимъ слѣдствіемъ постулатовъ M и R′. Слѣдовательно, мы приходимъ къ слѣдующему слѣдствію изъ вышеприведенной теоремы.

Слѣдствіе. Теорему III можно разсматривать, какъ слѣдствіе (MVLR′), вмѣсто того, чтобы разсматривать ее, какъ слѣдствіе (MVLA).

Сдѣлаемъ еще шагъ впередъ и воспользуемся постулатомъ R″. Изъ теоремы I и постулатовъ R′ и R″ слѣдуетъ, что наблюдаемая скорость свѣта есть чистая постоянная для всѣхъ возможныхъ методовъ наблюденія. Если мы воспользуемся этимъ фактомъ, то предыдущій результатъ можно формулировать болѣе простымъ образомъ такъ:

Теорема IV. Даны двѣ системы отсчета S_1 и S_2, движущіяся съ относительной скоростью v; пусть β есть отношеніе v къ скорости свѣта. Въ такомъ случаѣ наблюдателю въ S_1 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_2, какъ $\sqrt{1-\beta^2}:1$, между тѣмъ какъ наблюдателю въ S_2 будетъ казаться, что его единица времени относится къ единицѣ времени въ S_1, какъ $\sqrt{1-\beta^2}:1$ (MVLR)

Остановимся нѣсколько подробнѣе на этихъ замѣчательныхъ результатахъ. Теорема III, слѣдствіе изъ нея и теорема IV всѣ сходятся въ томъ поразительномъ заключеніи, что единицы времени обѣихъ системъ отсчета S_1 и S_2 различной величины. Какъ велико это различіе—вопросъ второстепеннаго значенія; важно и поразительно то вообще, что онѣ отличаются другъ отъ друга. Такъ какъ постулаты M, V, L принимаются всѣми и никогда не приводили къ подобнымъ страннымъ результатамъ, то естественно предположить, что странный характеръ заключеній, къ которымъ мы здѣсь пришли, зависитъ не отъ нихъ.

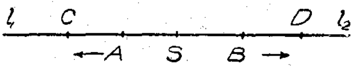
Обращаясь къ вышеразвитой аргументаціи, мы легко убѣждаемся, что пока мы не ввели и не воспользовались допущеніемъ A, мы не получили никакихъ необычныхъ заключеній. Далѣе, мы видѣли, что само это допущеніе есть логическое слѣдствіе M и R′. Кромѣ того, R″ не заключается ни въ теоремѣ III, ни въ слѣдствіи изъ нея. Но эти послѣднія заключаютъ уже въ себѣ странныя свойства полученныхъ нами результатовъ. Отсюда слѣдуетъ съ непреодолимой силой заключеніе, что необычайный элементъ въ полученныхъ нами результатахъ происходитъ отъ постулата R′—или, выражаясь точнѣе, отъ той части его, которой необходимо воспользоваться въ связи съ M для того, чтобы доказать A, какъ теорему.

Этотъ выводъ важенъ, какъ показываютъ слѣдующія соображенія. Постулаты V и L формулируютъ законы, которые были всѣми приняты въ классической механикѣ. Постулатъ M представляетъ прямое обобщеніе изъ опыта, и обобщеніе это законно, согласно обычному пріему физиковъ въ подобныхъ случаяхъ. Постулатъ R′ представляетъ изложеніе принципа, который въ теченіе долгаго времени былъ употребителенъ въ физикѣ и встрѣтилъ широкое признаніе. Мы видимъ, такимъ образомъ, что ни одинъ изъ этихъ постулатовъ, самъ по себѣ, не противорѣчитъ общепринятымъ физическимъ понятіямъ. И, однако, именно однихъ этихъ постулатовъ было достаточно, чтобы позволить намъ заключить, что соотвѣтственныя единицы времени въ обѣихъ системахъ отсчета имѣютъ разную величину. Мы покажемъ въ слѣдующемъ параграфѣ, исходя изъ этихъ же самыхъ постулатовъ, что соотвѣтственныя единицы длины въ обѣихъ системахъ отсчета также различны. Такимъ образомъ самые замѣчательные элементы въ заключеніяхъ теоріи относительности можно вывести изъ однихъ лишь постулатовъ M, V, L, R′, и, однако, эти послѣдніе представляютъ или обобщенія, полученныя изъ опыта, или формулировки общепринятыхъ законовъ. Отсюда мы заключаемъ: теорія относительности въ ея наиболѣе характеристическихъ чертахъ есть логическое слѣдствіе изъ нѣкоторыхъ опытовъ вмѣстѣ съ нѣкоторыми законами, принимавшимися въ теченіе долгаго времени.

Другое замѣчаніе—совершенно иного характера—слѣдуетъ сдѣлать въ связи съ любопытнымъ результатомъ, полученныхъ въ теоремѣ IV. Дѣло идетъ объ отношеніи между единицами времени обѣихъ системъ. Это отношеніе тѣсно связано съ тѣмъ фактомъ, что каждый наблюдатель производитъ свои измѣренія, исходя изъ гипотезы, что его собственная система находится въ покоѣ, между тѣмъ какъ другая система движется мимо него со скоростью v. Если оба наблюдателя согласятся называть S неподвижной и если въ видоизмѣненномъ такимъ образомъ „мірѣ“ наши постулаты V, L, R будутъ продолжать имѣть мѣсто, тогда окажется, что единицы времени у обоихъ наблюдателей будутъ одинаковы. Но въ виду M выборъ системы S, какъ неподвижной, будетъ, безъ сомнѣнія, представляться совершенно произвольнымъ обоимъ наблюдателямъ; и содержаніе видоизмѣненнаго постулата R будетъ по существу отличнымъ отъ содержанія этого постулата, какъ мы воспользовались имъ.

Слѣдовательно, если мы принимаемъ R, какъ есть—или хотя бы нѣкоторую часть его, какъ мы выше показали, то мы должны придти къ заключенію, что единицы времени въ обѣихъ системахъ неодинаковы, что ихъ связываетъ вышеприведенное отношеніе.

§ 8. Отношеніе между единицами длины.—Разсмотримъ три системы отсчета S, S_1 и S_2,



Фиг. 2.

расположенныя такъ же, какъ и въ предыдущемъ §, съ той лишь разницей, что обѣ прямыя l_1 и l_2 совпадаютъ. Мы предположимъ, что S_1 движется въ направленіи, указанномъ (фиг. 2) стрѣлкой въ А, а S_2 движется въ направленіи, указанномъ стрѣлкой въ В.

Мы предположимъ, что наблюдатели въ А и В снова измѣряютъ скорость свѣта, исходящаго изъ S, но на этотъ разъ въ направленіи линіи движенія. Каждый изъ нихъ будетъ производить свои наблюденія, исходя изъ предположенія, что его система находится въ покоѣ, ибо изъ M слѣдуетъ, что онъ не можетъ обнаружить движенія своей системы. Наблюдатель въ А измѣряетъ время t_1 прохожденія лучомъ свѣта разстоянія отъ А до С и обратно до А, причемъ длина АС, измѣряемая единицами, принадлежащими къ S_1, будетъ d. Аналогичнымъ образомъ наблюдатель въ В измѣряетъ время t_2 прохожденія лучомъ свѣта разстоянія отъ В до D и обратно до В, при чемъ длина BD, измѣряемая единицами, принадлежащими къ S_2, будетъ d.

Какъ и въ предыдущемъ случаѣ, можно показать, что оба наблюдателя должны получить одно и то же значеніе для скорости свѣта. Но значеніе это для наблюдателя въ А равно $\frac{2d}{t_1}$, а для наблюдателя въ В равно $\frac{2d}{t_2}$.

Значитъ,

$$t_1 = t_2,$$

т. е. число единицъ времени, потребныхъ для прохожденія луча въ А и луча въ В одно и то же, при чемъ первое измѣряется въ системѣ S_1, второе—въ системѣ S_2. Сверхъ того, мѣра длины въ обоихъ случаяхъ одна и та же. Но единицы времени, какъ мы видѣли въ предыдущемъ параграфѣ, имѣютъ не одинаковую величину. Значитъ, единицы длины обѣихъ системъ вдоль ихъ линіи движенія не имѣютъ одинаковой величины. При этомъ отношеніе единицъ длины то же самое, что̀ отношеніе единицъ времени.

Комбинируя это заключеніе съ теоремой III, слѣдствіемъ изъ нея и теоремой IV, мы получаемъ слѣдующіе результаты:

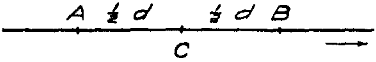
Теорема V. Даны двѣ системы отсчета S_1 и S_2, движущіяся съ относительной скоростью v; пусть β есть отношеніе v къ скорости свѣта, опредѣленной, какъ выше указано въ первой части § 7. Въ такомъ случаѣ наблюдателю въ S_1 будетъ казаться, что единица длины въ S_1 вдоль линіи относительнаго движенія относится къ единицѣ длины въ S_2, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$, между тѣмъ какъ наблюдателю въ S_2 будетъ казаться, что единица длины въ S_2, вдоль линіи относительнаго движенія относится къ единицѣ длины въ S_1, какъ $\sqrt{1-\beta^2} : 1$ (MVLA).

Слѣдствіе. Теорему V можно разсматривать, какъ слѣдствіе (MVLR), вмѣсто того, чтобы разсматривать ее, какъ слѣдствіе (MVLA).

Теорема VI. Даны двѣ системы отсчета S_1 и S_2, движущіяся съ относительной скоростью v; пусть β есть отношеніе v къ скорости свѣта; въ такомъ случаѣ наблюдателю въ S_1 будетъ казаться, что единица длины въ S_1 вдоль линіи относительнаго движенія относится къ единицѣ длины въ S_2, какъ $\sqrt{1-\beta^2}:1$, между тѣмъ какъ наблюдателю въ S_2 будетъ казаться, что единица длины въ S_2 вдоль линіи относительнаго движенія относится къ единицѣ длины въ S_1, какъ $\sqrt{1-\beta^2}:1$ (MVLR).

Мы могли бы анализировать полученные здѣсь результаты такимъ же точно образомъ, какъ и соотвѣтствующіе результаты предыдущаго параграфа. Но это свелось бы въ значительной степени къ повторенію уже разъ сказаннаго. Достаточно указать что замѣчательныя заключенія на счетъ единицъ длины въ обѣихъ системахъ покоятся на тѣхъ же самыхъ допущеніяхъ, которыя приводятъ къ страннымъ результатамъ насчетъ единицъ времени.

§ 9. Одновременность событій, происходящихъ въ различныхъ мѣстахъ. Возьмемъ двѣ системы отсчета S и S', движущіяся съ равномѣрной относительной скоростью v. Предположимъ, что нѣкоторый наблюдатель въ S' рѣшилъ регулировать двѣ пары часовъ, находящихся въ различныхъ мѣстахъ, такимъ образомъ, что они должны показы-



Фиг. 3.

вать одновременно одинъ и тотъ же часъ. Мы предположимъ, что онъ поступаетъ для этого слѣдующимъ—весьма естественнымъ—образомъ [1]). На линіи относительнаго движенія S и S′ выбраны двѣ станціи A и B, находящіяся на разстояніи d другъ отъ друга. Путемъ измѣренія находятъ точку C, лежащую посрединѣ между A и B. Самъ наблюдатель располагается въ C, а его помощники—въ A и B. Изъ C отправляютъ свѣтовой сигналъ въ A и B, и какъ только свѣтовой лучъ дошелъ до каждой станціи, часовую стрѣлку въ нихъ ставятъ на заранѣе условленный часъ. Наблюдатель въ S′ заключаетъ теперь, что его обѣ пары часовъ—часы въ A и часы въ B—показываютъ одновременно одинъ и тотъ же часъ, ибо, согласно ему (вѣдь онъ предполагаетъ, что его система находится въ покоѣ), свѣтъ употребилъ одинаковый промежутокъ времени какъ на то, чтобы пройти разстояніе отъ C до A, такъ и на то, чтобы пройти разстояніе отъ C до B.

Предположимъ теперь, что наблюдатель, находящійся въ системѣ S, слѣдилъ за работой регулированія часовъ въ S′. Ему будетъ казаться, что разстоянія CA и CB равны не $^1/_2\, d$, а

$$^1/_2\, d \sqrt{1-\beta^2}.$$

Кромѣ того, такъ какъ скорость свѣта не зависитъ отъ скорости источника, то ему представляется, что свѣтовой лучъ, идущій изъ C въ A, пришелъ въ A со скоростью $c+v$, гдѣ c есть скорость свѣта, между тѣмъ какъ свѣтовой лучъ, идущій изъ C въ B, пришелъ въ B со скоростью $c-v$. Такимъ образомъ ему кажется, что свѣтъ потратилъ больше времени на

---

[1]) Cp. Comstock, Science, N. S. 31 (1900). 767—772.

прохожденіе разстоянія отъ C до B, чѣмъ на прохожденіе отъ C до A, при чемъ разница равна

$$\frac{{}^1/_2\, d\sqrt{1-\beta^2}}{c-v} - \frac{{}^1/_2\, d\sqrt{1-\beta^2}}{c+v} = \frac{v\,d\sqrt{1-\beta^2}}{c^2-v^2},$$

но такъ какъ $\beta = \frac{v}{c}$, то мы легко найдемъ, что послѣднее выраженіе равно:

$$\frac{v}{c^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Такимъ образомъ наблюдателю въ S представляется, что часы въ S′ показываютъ различныя времена; разница показаній опредѣляется послѣднимъ выраженіемъ.

Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующему заключенію:

Теорема VII. Даны двѣ системы отсчета S и S′, имѣющія равномѣрную относительную скорость v. Положимъ, что нѣкоторый наблюдатель въ S′ помѣстилъ на линіи относительнаго движенія S и S′ двѣ пары часовъ на разстояніи d другъ отъ друга и завелъ ихъ такъ, что они показываютъ для него одновременно одинъ и тотъ же часъ. Въ такомъ случаѣ наблюдателю въ S будетъ казаться, что часы въ S′, расположенные впереди въ пространствѣ, отстаютъ отъ другой пары часовъ на

$$\frac{v}{c^2} \cdot \frac{d}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

гдѣ c есть скорость свѣта и $\beta = \frac{v}{c}$ (M V L R).

Надо обратить вниманіе на то, что часы въ S′ согласуются между собой въ томъ лишь смыслѣ, въ какомъ они могутъ согласоваться для наблюдателя, находящагося въ этой системѣ и предполагающаго (какъ это естественно и должно быть), что его система находится въ покоѣ—несмотря на тотъ фактъ, что наблюдатель, находящійся въ другой системѣ замѣчаетъ неустранимое разногласіе въ показаніяхъ часовъ, величина котораго прямо пропорціональна, разстоянію обѣихъ паръ часовъ.

Согласно послѣдней, полученной нами, теоремѣ понятіе одновременности событій, происходящихъ въ различныхъ мѣстахъ, не имѣетъ опредѣленнаго смысла пока не принято нѣкоторое соглашеніе, показывающее, какъ опредѣлить эту одновременность. Иными словами, **не существуетъ вовсе абсолютной одновременности событій, происходящихъ въ различныхъ мѣстахъ.**

§ 10. Преобразованіе координатъ времени и пространства.—Теперь нетрудно вывести эйнштейновы формулы[1]) для преобразованія координатъ времени и пространства. Возьмемъ двѣ системы отсчета S и S′, движущіяся съ относительной скоростью v по линіи l. Пусть съ этими системами связаны системы прямоугольныхъ координатъ такимъ образомъ, что ось x-овъ каждой системы находится на линіи l, а оси y-овъ и z-овъ одной системы параллельны соотвѣтственнымъ осямъ другой системы. Положимъ, что начала обѣихъ системъ совпадаютъ во время $t=0$. Будемъ, далѣе, въ цѣляхъ ясности, означать координаты S черезъ x, y, z, t, а координаты S′—черезъ x', y', z', t'. Требуется найти значеніе этихъ послѣднихъ координатъ въ функціяхъ первыхъ.

---

[1]) Iahrbuch der Radioaktivität, 4 (1907) : 418—420.

Изъ постулата L слѣдуетъ, что $y' = y$ и $z' = z$. Положимъ, что наблюдатель въ S разсматриваетъ точку, которая въ моментъ $t = 0$ кажется ему на разстояніи [1] x отъ плоскости y' z'; въ моментъ $t = t$ она будетъ казаться ему на разстояніи $x - vt$ отъ плоскости y' z'. Но наблюдатель въ S′ обозначаетъ это разстояніе черезъ x'. Слѣдовательно, изъ теор. IV мы имѣемъ:

$$x' \sqrt{1 - \beta^2} = x - vt.$$

Разсмотримъ теперь точку, находящуюся на разстояніи x отъ плоскости yz въ моментъ $t = t$, беря единицы системы S. Изъ теоремы VII слѣдуетъ, что наблюдателю въ S будетъ казаться, что часы въ S′, находящіеся на томъ же разстояніи x отъ плоскости yz, будутъ отставать на

$$\frac{v}{c^2} \cdot x,$$

гдѣ c есть скорость свѣта. Иначе говоря, въ единицахъ S эти часы показываютъ время

$$t - \frac{v}{c^2} \cdot x.$$

Отсюда, съ помощью теоремы IV, мы получаемъ:

$$t' \sqrt{1 - \beta^2} = t - \frac{v}{c^2} x.$$

Рѣшая оба уравненія, содержащія x' и t' и соединяя результаты, мы имѣемъ:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right),$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left(x - vt \right)$$

---

[1] Полагается, что алгебраическій знакъ разстоянія принятъ въ разсчетъ въ значеніи x.

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \qquad \text{(MVLR)}$$

гдѣ $\beta = \frac{v}{c}$ и c есть скорость свѣта.

Такимъ же точно путемъ можно найти уравненія, выражающія x, y, z, t въ функціяхъ x', y', z', t', но ихъ можно легче найти, рѣшая уравненіе (A) для x', y' z', t'. Мы получаемъ такимъ образомъ

$$\text{(A}_1\text{)}\qquad \begin{aligned} t &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right), \\ x &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x'+vt'\right), \\ y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned} \qquad \text{(MVLR)}$$

Обѣ эти группы уравненій (A) и (A$_1$) тождественны по формѣ, исключая знакъ v. Симметрія преобразованій составляетъ одно изъ интереснѣйшихъ свойствъ ихъ.

Нашъ способъ вывода этихъ формулъ сильно разнится отъ метода Эйнштейна. Разница происходитъ, главнымъ образомъ, отъ того, что на мѣсто допущенія Эйнштейна[1]) мы воспользовались постулатами V и L.

Въ статьѣ[2]) подъ заглавіемъ: „The Common Sense of Relativity“ Кэмпбелль сдѣлалъ рядъ интересныхъ замѣчаній касательно этихъ преобразованій.

§ 11. Сложеніе скоростей.

Ради полноты[3]) изложенія основныхъ результатовъ теоріи относительности и ради цѣлей слѣдую-

---

[1]) Einstein, l. c. стр. 420, примѣчаніе.

[2]) Phil. Mag., 21 (1911): 502—517; см. спеціально стр. 505—507.

[3]) См. замѣчанія въ введеніи.

щаго § мы выведемъ здѣсь формулы сложенія скоростей, данныя Эйнштейномъ[1]).

Пусть скорость какой-нибудь движущейся точки будетъ представлена на единицахъ, принадлежащихъ къ S′ и къ S, съ помощью уравненій:

$$x' = u_{x'} t', \; y' = u_{y'} t', \; z' = u_{z'} t' ;$$

$$x = u_x t, \; y = u_y t, \; z = u_z t.$$

Подставимъ въ первое изъ нихъ на мѣсто x', y', z', t' ихъ значенія изъ (A). Рѣшимъ ихъ для $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ и замѣнимъ эти количества соотвѣтственно равными имъ ux, uy, uz; тогда мы получимъ

$$u_x = \frac{u_{x'} + v}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}} ,$$

(B)

$$u_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}} \, u_{y'} ,$$

(MVLK)

$$u_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \frac{v u_{x'}}{c^2}} \, u_{z'} .$$

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ, что законъ параллелограмма скоростей имѣетъ лишь приближенное значеніе. Этотъ выводъ теоріи относительности вызвалъ у многихъ лицъ самыя серьезныя возраженія противъ всей теоріи.

Предположимъ, что разсмотрѣнныя выше скорости

---

[1]) Einstein, l. c. стр. 422—424.

находятся на линіи относительнаго движенія S и S′; тогда мы имѣемъ:

$$u = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}}.$$

Это уравненіе даетъ начало слѣдующей теоремѣ:

Теорема VIII. Если соединяются двѣ скорости, каждая изъ которыхъ меньше c, то результирующая скорость тоже меньше c (MVLR).

Чтобы доказать эту теорему, мы подставляемъ въ предыдущее уравненіе вмѣсто v и u' значенія:

$$v = c - k,\ u' = c - l,$$

гдѣ каждое изъ чиселъ k и l — положительно и меньше c. Тогда уравненіе принимаетъ видъ

$$u = c \frac{2c - k - l}{2c - k - l + \frac{kl}{c}}.$$

Второй членъ, очевидно, менѣе c; отсюда и вытекаетъ теорема.

Если, однако, одна (или обѣ) изъ скоростей v и u' равна c—и, значитъ, k или l (или оба) равны нулю,—то изъ послѣдняго уравненія мы видимъ, что $u = c$; отсюда мы получаемъ слѣдующій выводъ:

Теорема IX. Если скорость c слагается съ скоростью, равной или меньшей c, то результирующая скорость есть c (MVLR).

Замѣчаніе. Въ результатахъ, полученныхъ въ §§ 7—11, содержится неявнымъ образомъ важное заключеніе. Проще всего, вѣроятно, можно замѣтить его, обратившись къ первымъ двумъ изъ уравненій (A), представляющимъ не что иное, какъ аналитическое выраженіе теоремъ IV и VI. Если β по абсолютному значенію больше 1 — и, значитъ, $1-\beta^2$ отрицательно,— то преобразованіе координатъ времени изъ одной системы въ другую приводитъ къ мнимому результату для времени въ одной системѣ, если время въ другой системѣ вещественно. Аналогичнымъ образомъ мѣра длины въ направленіи движенія мнима въ одной системѣ, если она вещественна въ другой. Оба эти заключенія нелѣпы и, значитъ, абсолютное значеніе β или равно, или меньше 1. Если $\beta=1$, то любая длина въ одной системѣ, какъ бы она ни была мала, въ другой системѣ будетъ представляться безконечной. То же самое можно сказать о времени. Значитъ, β меньше, чѣмъ 1. Но $\beta=\frac{v}{c}$, т.-е. равняется отношенію скорости обѣихъ системъ къ скорости свѣта. Значитъ, скорость свѣта представляетъ maximum, къ которому можетъ приближаться, никогда не достигая его, относительная скорость двухъ системъ. Это можно формулировать въ видѣ слѣдующей теоремы:

Теорема X. Скорость свѣта представляетъ maximum, къ которому можетъ приближаться, никогда не достигая его, скорость матеріальной системы (MVLR).

Слѣдуетъ замѣтить, что эту теорему можно также прямо вывести изъ теоремы IX.

§ 12. Логическіе эквиваленты постулатовъ.

Мы покажемъ теперь, что теорема IX есть въ нѣкоторомъ смыслѣ логическій эквивалентъ R. Изъ IX слѣдуетъ, какъ мы видимъ въ теоремѣ X, что скорость матеріальнаго тѣла меньше скорости свѣта. Но источникъ свѣта есть всегда нѣкоторое матеріальное тѣло; слѣдовательно, никакой источникъ свѣта не можетъ никогда имѣть скорости, равной скорости свѣта.

Нижеслѣдующее допущеніе представляетъ естественную гипотезу.

Постулатъ В. Скорость источника свѣта не можетъ прибавить [1]) къ скорости свѣта большей скорости, чѣмъ скорость самого источника. Аналогичнымъ образомъ, скорость какой-нибудь системы отсчета не можетъ прибавить къ скорости свѣта большей скорости, чѣмъ скорость самой системы.

Но изъ теоремы IX слѣдуетъ, что если со скоростью свѣта слагается скорость меньшая, чѣмъ послѣдняя, то въ результатѣ получится скорость свѣта. Слѣдовательно, если мы допустимъ теорему IX и постулатъ В, то, какъ слѣдствіе, мы получимъ постулаты R' и R''. Значитъ, мы получаемъ слѣдующій результатъ:

Теорема XI. Постулаты (MVLB) и теорема X представляютъ логическіе эквиваленты постулатовъ (MVLR).

Иначе говоря, въ нашей системѣ постулатовъ R можетъ быть замѣнено теоремой IX и постулатомъ В, что не повліяетъ на совокупность постулатовъ и теоремъ.

Но теорема IX была доказана съ помощью однѣхъ лишь формулъ (В), а формулы (В) представляютъ прямое слѣдствіе изъ формулъ (А); значитъ, постулатъ R можно вывести изъ однихъ лишь постулата В и формулъ (А), если они приняты за истины. Далѣе 3 и 4 уравненія въ (А) эквивалентны постулату L. Мы покажемъ, что частнымъ случаемъ первыхъ двухъ формулъ (А) является постулатъ V. Положивъ $x' = 0$, мы

---

[1]) Мы опредѣляемъ прибавленіе, говоря, что сумма двухъ скоростей есть результатъ сложенія ихъ.

имѣемъ $\frac{x}{t} = v$; иначе говоря, наблюдателю въ S кажется, что система S″ движется со скоростью v. Но первыя два уравненія въ (A_1) можно получить, рѣшивъ алгебраически первыя два уравненія въ (A). Положимъ тогда во 2 уравненіи (A_1) $x = 0$. Мы имѣемъ въ этомъ случаѣ $\frac{x'}{t'} = -v$. Иначе говоря, наблюдателю въ S′ кажется, что система S движется со скоростью — v. Оба эти результата, взятые вмѣстѣ, составляютъ нашъ постулатъ V. Комбинируя полученныя такимъ образомъ заключенія, мы получаемъ слѣдующую теорему.

Теорема XII. Постулаты (MB) и формулы (A) представляютъ логическій эквивалентъ постулатовъ (MVLR).

Анализъ доказательства формулъ (A) покажетъ, что они вытекаютъ прямо изъ теоремъ IV, VI, VII и постулата V. Отсюда мы получаемъ слѣдующую теорему, какъ дополненіе предыдущей:

Теорема XIII. Постулаты (MVB) и теоремы IV, VI, VII представляютъ логическій эквивалентъ постулатовъ (MVLR).

Пер. *П. Юшкевичъ.*

Ф. Клейнъ.

О геометрическихъ основаніяхъ лорентцовой группы [1]).

Всѣ вы слышали въ болѣе или менѣе опредѣленной формѣ, что теорія лорентцовой группы, или—что̀ одно и то же—современный принципъ относительности физиковъ входитъ въ рамки общаго ученія о проэктивномъ мѣроопредѣленіи, какъ послѣднее развилось, начиная съ основоположной работы Кэли отъ 1859 г. Какъ я условился еще съ нашимъ покойнымъ другомъ Минковскимъ, я долженъ былъ изложить подробнѣе эту сторону дѣла въ истекшемъ зимнемъ семестрѣ въ своихъ лекціяхъ о проэктивной геометріи, представивъ ее, какъ заключительный результатъ этихъ лекцій. Ученіе о проэктивномъ мѣроопредѣленіи, пріобрѣвшее уже въ столь многихъ отношеніяхъ основоположное значеніе, получаетъ здѣсь новое и поразительное примѣненіе, въ то время какъ, съ другой стороны, современныя концепціи физиковъ, производящія на новичка такъ легко впечатлѣнія парадоксовъ, оказываются, такъ сказать, простыми слѣдствіями нѣкотораго общаго и давно уже систематизированнаго

---

[1]) Докладъ, прочитанный 10 мая 1910 г. въ Геттингенскомъ математическомъ обществѣ.

хода мыслей. Это совпаденіе двухъ, совершенно обособленныхъ по своему историческому происхожденію, рядовъ мыслей должно буцетъ, безъ сомнѣнія, подѣйствовать въ высокой степени возбуждающимъ образомъ на обѣ стороны. Я тѣмъ болѣе разсчитываю на извѣстный интересъ къ этому со стороны именно физиковъ, что математики не разъ уже получали различные частные результаты, которые оказывались полезными вспомогательными орудіями въ лабораторіи теоретической физики.

Собираясь сегодня изложить передъ вами подробнѣе вышесказанное въ его основныхъ чертахъ, я оказываюсь передъ большимъ затрудненіемъ: я долженъ предположить, что вамъ хорошо извѣстны понятіе группы, равно какъ и нѣкоторыя основныя понятія проэктивной геометріи, какъ, напримѣръ, однородныя точечныя и плоскостныя координаты,—коллинеаціи, соотвѣтствующія линейнымъ подстановкамъ этихъ координатъ, — наконецъ, наличность нѣкоторой теоріи инваріантовъ для каждой, образованной изъ коллинеацій, группы, — и въ то же время я отлично знаю, что не только многочисленные присутствующіе здѣсь физики—которыхъ я особенно охотно привѣтствую здѣсь въ качествѣ гостей,—но и большинство болѣе молодыхъ математиковъ, принадлежащихъ къ нашему обществу, занимались этими вещами слегка, такъ сказать, издали. Многіе изъ васъ, безъ сомнѣнія, придерживались до сихъ поръ того убѣжденія, что проэктивная геометрія — въ теченіе долгаго времени стоявшая на первомъ планѣ математическаго творчества—теперь можетъ претендовать лишь на значеніе специальной математической дисциплины. Поэтому само по себѣ весьма полезно выразить въ моемъ сегодняшнемъ докладѣ противоположную точку зрѣнія, именно, что проэктивная геометрія въ рамкахъ цѣлокупнаго математическаго образованія, къ которому всѣ мы стремимся, должна считаться равноправной съ другими основоположными математическими дисциплинами, какъ, скажемъ, алгебра или теорія функцій. Но этотъ идеальный моментъ не можетъ устранить вышеуказаннаго затрудненія, связаннаго съ фактическимъ отсутствіемъ достаточныхъ предварительтельныхъ свѣдѣній. Поэтому я прибѣгаю къ методу, который при подобныхъ обстоятельствахъ скорѣе прочихъ обѣщаетъ успѣхъ: я изложу Вамъ положеніе вещей въ его историческомъ развитіи, прося Васъ, однако, разсматривать ту настойчивость, съ какой я подчеркиваю важность проэктивнаго мышленія, за эквивалентъ недостаточной подробности въ изложеніи.

Въ соотвѣтствіи съ этимъ я начну съ изложенія оригинальной работы Кэли отъ 1859 г., являющейся шестой въ ряду изслѣдованій, въ которыхъ Кэли собралъ воедино тогда свои идеи и познанія въ области теоріи инваріантовъ линейныхъ подстанонововокъ (A sixth memoir upon Quantics., т. 149 Phil. Transact. R. Society, т. II сочиненій, с. 561 исл.) Перелистывая это изслѣдованіе, вы на первыхъ порахъ не найдете въ немъ ничего особеннаго, ибо здѣсь развиваются, главнымъ образомъ, разные частные вопросы, касающіеся квадратичныхъ формъ. Но нетрудно выдѣлить здѣсь постановку вопроса и блестящій отвѣтъ на нее. Развитіе геометріи въ первой половинѣ прошлаго столѣтія привело къ раздѣленію всего содержанія ученія о пространствѣ на двѣ различныя области: на геометрію положенія (дескриптивную геометрію), которая имѣетъ дѣло лишь съ тѣми свойствами фигуръ, которыя остаются неизмѣнными при любомъ проицированіи, и геометрію мѣры, основныя положенія которой (разстояніе, уголъ и т. д.) не обладаютъ этой инваріантностью. Это раздѣленіе утвердилось въ головахъ тогдашнихъ математиковъ, хотя уже Понселэ сдѣлалъ то рѣшающее замѣчаніе, что съ общей точки зрѣнія можно разсматривать круги плоскости (и шары пространства) —т.-е. слѣдовательно, основные предметы метрическаго разсмотрѣнія—какъ коническія сѣченія (и поверхности второго порядка), которыя имѣютъ съ безконечно-удаленными элементами плоскости (и пространства) нѣкоторое общее, данное уравненіемъ второй степени, мнимое образованіе, такъ называемыя, циклическія точки плоскости (сферическую окружность пространства). Заслуга Кэли заключается въ уразумѣніи того, что въ этихъ идеяхъ Понселэ дано средство уничтожить вышеназванное раздѣленіе геометріи на двѣ чуждыя другъ другу дисциплины, или, вѣрнѣе, замѣнить его принципіально иной точкой зрѣнія. Результатъ, къ которому онъ пришелъ—какъ и всѣ основоположныя идеи математической науки — крайне простъ: всѣ отношенія мѣры геометрическихъ фигуръ можно цѣликомъ разсматривать, какъ проэктивныя отношенія, если только прибавить къ фигурамъ циклическія точки и сферическую окружность (въ зависимости отъ того, носятъ ли эти фигуры плоскій или пространственный характеръ). Метрическая геометрія является такимъ образомъ частью проэктивной геометріи, трактующей о фигурахъ, въ которыхъ принимаются во вниманіе циклическія точки (или сферическая окружность).

Это положеніе станетъ гораздо яснѣе, если я присоединю къ нему нѣсколько весьма простыхъ формулъ.

Разсмотримъ сперва случай плоскости. Пусть x, y представляютъ обыкновенныя прямолинейныя координаты точки. Чтобы сдѣлать ихъ однородными, мы положимъ $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$. Мы назовемъ далѣе черезъ

u_1, u_2, u_3 однородныя координаты прямой, данной уравненіемъ $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0$. Въ такомъ случаѣ циклическія точки даются въ системѣ точечныхъ координатъ уравненіями

$$(1) \ldots\ldots\ldots x_3=0, \quad x_1^2+x_2^2=0,$$

въ линейныхъ же координатахъ, какъ огибающая всѣхъ прямыхъ, онѣ удовлетворяютъ единственному уравненію

$$(2) \ldots\ldots\ldots u_1^2+u_2^2=0.$$

Разсмотримъ — беря простѣйшій случай — формулу для разстоянія двухъ точекъ

$$r=\sqrt{(x-\overline{x})^2+(y-\overline{y})^2}.$$

Дѣлая координаты однородными, мы пишемъ:

$$x=\frac{x_1}{x_3}, \quad y=\frac{x_2}{x_3}; \quad \overline{x}=\frac{y_1}{y_3}, \quad \overline{y}=\frac{y_2}{y_3}$$

и получаемъ:

$$(3) \ldots r=\sqrt{\frac{(x_1y_3-y_1x_3)^2+(x_2y_3-y_2x_3)^2}{x_3y_3}}.$$

Числитель здѣсь исчезаетъ, если обѣ данныя точки лежатъ на одной прямой съ одной какой-нибудь изъ циклическихъ точекъ, знаменатель же—если одна изъ данныхъ точекъ лежитъ на прямой, соединяющей обѣ циклическія точки. Въ обоихъ случаяхъ мы имѣемъ передъ собой проэктивныя свойства фигуры, образуемой данными двумя точками и обѣими циклическими точками. Алгебраически же отсюда слѣдуетъ (я не могу подробнѣе остановиться на этомъ), что выраженіе для r измѣняется на постоянный множитель, если подвергнуть наши четыре точки одновременно любой коллинеаціи. Поэтому r называютъ инваріантомъ нашихъ четырехъ точекъ по отношенію ко всей совокупности коллинеацій, или также „одновременнымъ (simultan) инваріантомъ“ обѣихъ данныхъ точекъ и алгебраическихъ формъ, находящихся въ лѣвой части формы (1) или (2). Содержаніе проэктивной геометріи на плоскости представляетъ, алгебраически выражаясь, не что иное, какъ ученіе объ инваріантахъ, обнаруживаемыхъ любыми плоскими фигурами по отношенію къ совокупности плоскихъ коллинеацій, въ частности также ученіе объ отношеніяхъ, которыя могутъ оказаться между подобными инваріантами, Слѣдовательно, всѣ теоремы, которыя могутъ имѣть мѣсто для разстояній любыхъ точекъ плоскости, входятъ въ рамки проэктивной геометріи.

Что касается пространства, то дѣло здѣсь только нѣсколько усложняется благодаря большему количеству координатъ. Пустъ x, y, z представляютъ обыкновенныя прямоугольныя координаты. Примемъ въ цѣляхъ однородности $x = \frac{x_1}{x_4}, y = \frac{x_2}{x_4}, z = \frac{x_3}{x_4}$. Въ такомъ случаѣ, „сферическая окружность“ дана — если брать точечныя координаты — уравненіями

$$(4) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad x_4 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

а если брать соотвѣтственныя плоскостныя координаты (u_4, u_2, u_3, u_4), единственнымъ уравненіемъ:

$$(5) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0.$$

Разсмотримъ снова выраженіе для разстоянія двухъ точекъ. Взявъ для этихъ точекъ однородныя координаты $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ и $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$, мы получимъ

$$(6) \; . \quad r = \frac{\sqrt{(x_1 y_4 - y_1 x_4)^2 + (x_2 y_4 - y_2 x_4)^2 + (x_3 y_4 - y_3 x_4)^2}}{x_4 y_4}.$$

Къ этой формулѣ примѣнимы тѣ же самыя соображенія, которыя мы примѣнили въ случаѣ формулы (3).

Этихъ указаній будетъ достаточно, чтобы сдѣлать болѣе или менѣе понятнымъ значеніе основоположной работы Кэли. Теперь я остановлюсь на минуту на соображеніяхъ, развитыхъ мной въ 1872 г. въ моей Эрлангенской вступительной программѣ [1]). У Кэли рѣчь идетъ все время только объ инваріантахъ по отношенію къ совокупности коллинеацій разсматриваемой области. Я же, наоборотъ, подчеркнулъ въ то время, что можно также говорить объ инваріантахъ по отношенію къ нѣкоторой подгруппѣ коллинеацій. Благодаря этому былъ брошенъ новый свѣтъ на сущность метрической геометріи и на соотвѣтственную концепцію Кэли: Всѣмъ извѣстно, что всѣ теоремы метрической геометріи имѣютъ силу независимо отъ положенія и абсолютной величины фигуръ и что именно этимъ можно характеризовать ихъ въ отличіе отъ теоремъ индивидуальнаго характера, какъ ихъ устанавливаютъ въ топографіи. Выражая это на языкѣ современной математики, мы скажемъ, что прежде всего вводятъ двѣ родственныя между собой группы коллинейныхъ преобразованій: группу движеній и болѣе обширную группу подобныхъ преобразованій (группу „конгруэнтныхъ“ и группу „эквиформенныхъ“ преобразованій, пользуясь выраженіями, введенными Геффтеромъ и Кёлеромъ въ ихъ учебникѣ) [2]) и говорятъ: метрическія свойства характеризуются тѣмъ, что они инваріантны по отношенію къ этимъ группамъ. Значитъ, мы приходимъ къ результату: какъ метрическая, такъ и проэктивная геометріи сводятся къ изученію

---

[1]) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“ (т. 43 Math. Annalen).

[2]) Lehrbuch der analytischen Geometrie, т. I. Lpz. 1905

нѣкоторой теоріи инваріантовъ; ихъ взаимоотношеніе заключается въ томъ, что группа метрической геометріи представляетъ подгруппу группы, соотвѣтствующей проэктивной геометріи.

Нѣсколько простыхъ формулъ еще лучше уяснятъ положеніе вещей, показавъ его дальнѣйшее расчлененіе. Предположимъ, что мы не покидаемъ плоскости и что ради простоты мы пользуемся обыкновенными (не однородными) прямоугольными координатами. Напишемъ:

$$(7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} x' = \alpha_{11}\, x + \alpha_{12}\, y + \alpha_{13} \\ y' = \alpha_{21}\, x + \alpha_{22}\, y + \alpha_{23} \end{cases}$$

и станемъ разсматривать здѣсь $\alpha_{11}, \ldots \alpha_{33}$, какъ произвольныя перемѣнныя величины. Мы имѣемъ въ такомъ случаѣ группу о шести параметрахъ такъ называемыхъ *аффинныхъ* преобразованій. Изъ нея получается группа о четырехъ параметрахъ *эквиформенныхъ* преобразованій, если выставить требованіе, чтобы $dx'^2 + dy'^2$ отличалось на постоянный множитель отъ $dx^2 + dy^2$. Это возможно лишь въ томъ случаѣ, если удовлетворены условія:

$$\alpha_{11}{}^2 + \alpha_{21}{}^2 = \alpha_{12}{}^2 + \alpha_{22}{}^2, \qquad \alpha_{11}\,\alpha_{12} + \alpha_{21}\,\alpha_{22} = 0,$$

если, слѣдовательно, матрица

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

какъ говорятъ, *ортогональна*. Группа же о трехъ параметрахъ конгруэнтныхъ преобразованій возникаетъ тогда, когда сверхъ того принимаютъ матрицу за *унимодулярную*, т.-е. если опредѣлитель $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ принимается равнымъ 1. Въ этомъ случаѣ $dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$.

Мы напишемъ, наконецъ, самыя общія коллинеаціи плоскости:

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad x' = \frac{\alpha_{11}\,x + \alpha_{12}\,y + \alpha_{13}}{\alpha_{31}\,x + \alpha_{32}\,y + \alpha_{32}}$$

$$y' = \frac{\alpha_{21}\,x + \alpha_{22}\,y + \alpha_{23}}{\alpha_{31}\,x + \alpha_{32}\,y + \alpha_{33}}.$$

Мы находимъ безъ труда:

Группа аффинныхъ преобразованій (7) состоитъ изъ тѣхъ коллинеацій, которыя преобразуютъ нѣкоторую опредѣленнную прямую—именно безконечно удаленную прямую—въ самое себя.

Группа же эквиформенныхъ преобразованій состоитъ изъ коллинеацій, оставляющихъ неизмѣнными пару точекъ, лежащихъ на этой прямой, именно обѣ циклическихъ точки.

Не такъ просто съ геометрической стороны опредѣленіе группы конгруэнтныхъ преобразованій. Мы удовольствуемся здѣсь алгебраической характеристикой: это—тѣ эквиформенныя преобразованія, для которыхъ вышеуказанный опредѣлитель равенъ 1. Эквиформенныя преобразованія, разумѣется, eo ipso аффинны.

Долженъ ли я присовокупить, что, въ качествѣ промежуточнаго члена между проэктивной и метрической геометріями, можно опредѣлить *аффинную* геометрію, изучающую всѣ тѣ свойства плоскихъ фигуръ, которыя остаются инваріантными у группы (7)? Мы имѣли бы тогда передъ собой троякаго рода геометріи, изъ которыхъ проэктивная и метрическая геометріи представляютъ оба крайнихъ случая. Систематика благодаря этому осталась бы въ выигрышѣ, но изложеніе стало бы ненужнымъ образомъ громоздкимъ, потому что нѣсколько разъ пришлось бы по существу говорить одно и то же. Поэтому и въ дальнѣйшемъ, главнымъ образомъ, будетъ рѣчь только о проэктивной и метрической геометріяхъ, а аффинной геометріи—которая выступитъ особенно въ заключеніи—мы коснемся лишь мимоходомъ.

Итакъ, въ этомъ смыслѣ я различаю лишь между *элементарнымъ* (прямымъ) изслѣдованіемъ метрическихъ отношеній и введеннымъ Кэли *проэктивнымъ* изслѣдованіемъ. Это различіе формулируется (въ духѣ эрлангенской программы) слѣдующимъ образомъ: „Проэктивное (высшее) изслѣдованіе изучаетъ инваріантныя отношенія, которыми обладаютъ разсматриваемыя фигуры по отношенію къ *совокупности коллинеацій по присовокупленіи циклическихъ точекъ*; элементарное изслѣдованіе изучаетъ инваріантныя отношенія, которыми обладаютъ разсматриваемыя фигуры, какъ таковыя, по отношенію къ болѣе узкой группѣ тѣхъ (эквиформенныхъ или конгруэнтныхъ) коллинеацій, которыя переводятъ циклическія точки въ нихъ самихъ“.

Я теперь закончилъ общія предварительныя разсужденія и прошу Васъ лишь запомнить въ особенности слѣдующіе пункты: теорія инваріантовъ это—относительное понятіе; по отношенію къ любой группѣ преобразованій можно говорить о соотвѣтственной теоріи инваріантовъ. Эта мысль такъ естественна, что она обнаруживается самопроизвольнымъ образомъ въ самыхъ различныхъ областяхъ примѣненія, а также и въ теоретической физикѣ. Разумѣется, терминологія, служащая для выраженія ея, весьма разнообразна въ зависимости отъ области примѣненія. Вѣдь изслѣдователи, работающіе на разныхъ поприщахъ и въ частности физики, не имѣютъ времени, а нерѣдко также и случая, убѣдиться, не находятся ли уже готовыми въ кладовыхъ чистой математики тѣ логическія орудія, въ которыхъ они нуждаются; поэтому они отъ случая къ случаю сами изготовляютъ себѣ тѣ математическія орудія, въ которыхъ они нуждаются—что, между прочимъ, влечетъ за собой извѣстную свѣжесть въ ихъ ходѣ мыслей. Наступающее впослѣдствіи соглашеніе съ профессіональными математиками—представляющееся мнѣ весьма важнымъ дѣломъ, такъ какъ благодаря ему мысли пріобрѣтаютъ болѣе точный характеръ и открываются всякаго рода связи—предполагаетъ прежде всего переводъ употребляемыхъ тамъ и сямъ способовъ выраженія на другой языкъ. Поэтому, забѣгая впередъ, я формулирую слѣдующее положеніе:

„То, что современные физики называютъ теоріей относительности, есть теорія инваріантовъ четырехмѣрной области пространства-времени x, y, z, t („міръ“ Минковскаго), по отношенію къ нѣкоторой опредѣленной группѣ коллинеацій, именно „лорентцовой группѣ“, или же, выражаясь болѣе общимъ образомъ и беря другую сторону вопроса:

„Можно было бы при желаніи замѣнить съ успѣхомъ выраженіе „теорія инваріантовъ по отношенію къ нѣкоторой группѣ преобразованій“ выраженіемъ „теорія относительности по отношенію къ нѣкоторой группѣ“.

Теперь я остановлюсь вкратцѣ на чисто математическихъ изслѣдованіяхъ, вызванныхъ въ свое время работой Кели. Историческое значеніе этой замѣчательной работы заключается, дѣйствительно, не только въ томъ, что она дала окончательный отвѣтъ на старый вопросъ объ отношеніи между метрической геометріей и проективной геометріей, но и въ томъ, что она наряду съ этимъ повела за собой новую постановку вопроса, оказавшуюся богатой слѣдствіями въ самыхъ различныхъ направленіяхъ. Метрическая геометрія получается изъ проэктивной, если присовокупить циклическія точки, данныя уравненіемъ $u_1{}^2 + u_2{}^2 = 0$ (или, если дѣло идетъ о пространствѣ, сферическую окружность, данную уравненіемъ $u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 0$). Что получится, если на мѣсто этого мы положимъ въ основу соотвѣтственнымъ образомъ какое-нибудь уравненіе второй степени $\Sigma\Sigma a_{ik}\, u_i\, u_k = 0$?

Возьмемъ плоскость, для которой наше новое уравненіе представляетъ нѣкоторую кривую второго класса. Для проэктивнаго геометра эти кривыя распадаются на пять различныхъ видовъ, которыя я перечислю здѣсь, замѣнивъ систему прямоугольныхъ параллельныхъ координатъ соотвѣтственной системой треугольныхъ координатъ („линейными координатами“ которой также называются $u_1 : u_2 : u_3$). Мы получаемъ слѣдующій списокъ:

A. Собственно коническія сѣченія:

1. $u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2 = 0$, мнимое коническое сѣченіе.
2. $u_1{}^2 + u_2{}^2 - u_3{}^2 = 0$, дѣйствительное коническое сѣченіе.

B. Пары точекъ:

3. $u_1{}^2 + u_2{}^2 = 0$, мнимая пара точекъ (совпадаетъ съ уравненіемъ (2) циклическихъ точекъ).
4. $u_1{}^2 - u_2{}^2 = 0$, дѣйствительная пара точекъ.

C. Отдѣльная двойная точка:

5. $u_1{}^2 = 0$.

Принципъ составленія списка такъ простъ, что каждый можетъ написать по аналогіи соотвѣтствующую таблицу для n перемѣнныхъ $u_1 \ldots u_n$: сперва уравненія съ n квадратами, которые будутъ присоединяться попеременно съ знаками + или —, затѣмъ уравненія съ $(n-1)$ квадратами, и т. д. Случаи первой категоріи будутъ называться общими, случаи второй категоріи—просто спеціализированными, третьей—двояко спеціализированными, и т. д.

Для каждаго изъ этихъ случаевъ мы строимъ аналогъ формулы (3) для разстоянія двухъ точекъ и получаемъ то, что Кэли называлъ соотвѣтственнымъ quasi-разстояніемъ. Для случая мнимой пары точекъ мы просто сохранимъ формулу (3) (съ той лишь разницей, что теперь $x_1 : x_2 : x_3$ и $y_1 : y_2 : y_3$ будутъ обозначать не непремѣнно прямоугольныя параллельныя координаты, но, вообще говоря, соотвѣтственныя треугольныя координаты). Въ слѣдующихъ двухъ случаяхъ (дѣйствительной пары точекъ и двойной точки) придется ввести небольшія измѣненія, къ которымъ мы сейчасъ вернемся. Труднѣе получается необходимый аналогъ для quasi-разстоянія въ первыхъ двухъ случаяхъ (собственно коническихъ сѣченіяхъ). На этомъ мы здѣсь не остановимся, такъ какъ для этого потребовалось бы слишкомъ много мѣста и такъ какъ для цѣлей нашего доклада это не важно. Результатъ во всякомъ случаѣ тотъ, что мы получаемъ пять видовъ (и только пять видовъ) метрической геометріи въ плоскости, изъ которыхъ намъ извѣстно по элементарной метрической геометріи лишь та, которая соотвѣтствуетъ мнимой парѣ точекъ. Совокупность возникающихъ такимъ образомъ теорій мы называемъ общимъ ученіемъ о проэктивномъ мѣроопредѣленіи (сперва для плоскости, затѣмъ для пространства, вообще для многообразій произвольнаго числа измѣреній).

Моей задачей на этотъ разъ не является вовсе углубленіе въ детали этихъ теорій; мы остановимся лишь на общемъ значеніи ихъ. Прежде всего я долженъ разсѣять предубѣжденіе, которое, можетъ быть, питаютъ иные изъ Васъ: профанъ заранѣе мало склоненъ приписать какую-нибудь цѣнность занятію проблемами, которыя возникаютъ прежде всего лишь изъ субъективнаго, такъ сказать, эстетическаго стремленія къ познанію математики. Но исторія науки показываетъ, что дѣло обстоитъ совершенно иначе. Это большая тайна, которую трудно выразить словами. Я — скажу лишь, что все то, что здорово въ математическомъ отношеніи, рано или поздно пріобрѣтаетъ значеніе, далеко выходящее за предѣлы его первоначальной области. Такова была судьба теоріи коническихъ сѣченій, которую развили древніе геометры ради нея самой и которая, вмѣстѣ съ открытіемъ кеплеровыхъ законовъ, получила внезапно величайшее значеніе для нашего пониманія природы. И точно такова-же была судьба ученія о проэктивномъ мѣроопредѣленіи, непосредственно примыкающаго къ теоріи коническихъ сѣченій. Въ первый разъ обнаружилось его огромное теоретикопознавательное значеніе, когда оказалось, что оно является простѣйшей основой для не-эвклидовыхъ геометрій, которыя возникли изъ изслѣдованій насчетъ независимости аксіомы о параллельныхъ отъ другихъ аксіомъ и которыя сперва считались чѣмъ то особенно труднымъ 1). Я вскорѣ приведу нѣкоторыя относящіяся сюда подробности. Во второй разъ оказалось, что оно является въ другихъ областяхъ чистой математики пригоднымъ методомъ для выясненія сложныхъ отношеній, какъ, напримѣръ, въ теоріи авто-

---

1) Ср. мои работы „Über die sogenannte nicht-Euklidische Geometrie“, въ том. 4 и 6 „Mathem. Annalen“ за 1871 и 1873 г.

морфныхъ функцій или въ теоріи чиселъ [1]). А за послѣдніе годы обнаружилось, что оно является также раціональной основой для наисовременнѣйшихъ спекуляцій физики, давая въ особенности возможность понять просто противоположность между классической и новой механикой.

Указанное мной отношеніе между проективнымъ мѣроопредѣленіемъ и теоріей параллельныхъ можно — если мы будемъ ограничиваться случаемъ плоскости — по его внѣшнимъ результатамъ формулировать слѣдующимъ образомъ: въ случаѣ 1) вышеприведенной таблицы (когда въ основу положено мнимое коническое сѣченіе) мы получаемъ риманнову не-эвклидову геометрію, въ случаѣ 2) (т.-е. когда въ основу положено дѣйствительно коническое сѣченіе) мы получаемъ не-эвклидову геометрію Больэ—Лобачевскаго—Гаусса. Я укажу на одинъ пунктъ, который съ проэктивной точки зрѣнія не представляетъ никакихъ трудностей, между тѣмъ какъ безъ нея легко окружится ореоломъ чего-то мистическаго: число коллинеацій, при которыхъ не распадающееся коническое сѣченіе преобразуется само въ себя, ровно ∞^3; оно становится равнымъ ∞^4, какъ только коническое сѣченіе вырождается въ пару точекъ. Этимъ объясняется, что столь знакомыя намъ изъ элементарной геометріи эквиформенныя преобразованія (подобныя преобразованія) эвклидовой метрики не имѣютъ вовсе мѣста въ не-эвклидовыхъ геометріяхъ; здѣсь имѣются лишь ∞^3 конгруэнтныхъ преобразованій (движеній). Результатомъ этого является то, что въ не-

---

[1]) Ср. Общее изложеніе у Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen (Teil I, Lpz. 1897), затѣмъ мои автографированныя лекціи по избраннымъ вопросамъ теоріи чиселъ (Lpz. 1897).

эвклидовыхъ геометріяхъ существуетъ абсолютная мѣра длины, а не только, какъ у Эвклида, абсолютная мѣра угла. Вообще обѣ группы, группа G_3 обѣихъ не-эвклидовыхъ геометрій и группа G_4 эвклидовой геометріи, имѣютъ между собой по своему внутреннему строенію мало общаго. Поэтому то такъ трудно съ точки зрѣнія эвклидовой геометріи понять положенія не-эвклидовой геометріи: фигура, которая, съ не-эвклидовой точки зрѣнія, движется, испытываетъ, съ эвклидовой точки зрѣнія, самыя необыкновенныя деформаціи. Но всякая трудность исчезаетъ, разъ мы пріучились къ общему проэктивному мышленію. Дѣйствительно группа G_8 проэктивной геометріи (т.-е. совокупность всѣхъ коллинеацій плоскости) заключаетъ съ себѣ, какъ группу G_3 обѣихъ не-эвклидовыхъ геометрій, такъ и группу G_4 эвклидовой геометріи. Если я обладаю проэктивной точкой зрѣнія, то я имѣю то же преимущество, что путникъ, находящійся на вершинѣ горы и заглядывающій въ различныя долины. Находясь въ какой-нибудь отдѣльной долинѣ, путникъ этотъ могъ бы лишь съ трудомъ составить себѣ представленіе о формѣ другихъ долинъ. Еще одинъ немаловажный пунктъ. При всемъ принципіальномъ различіи между случаями 1) 2) и 3) изслѣдователь, стоящій на проэктивной точкѣ зрѣнія, ясно видитъ, что можно установить непрерывный переходъ между всѣми тремя случаями. Возьмемъ за основное уравненіе проэктивнаго мѣроопредѣленія:

$$(9) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0,$$

при чемъ параметръ ε переходитъ отъ положительныхъ значеній къ отрицательнымъ, проходя черезъ нуль. Въ такомъ случаѣ риманнова геометрія превратится, проходя черезъ эвклидову систему, въ геометрію Больэ—Лобачевскаго—Гаусса. Я могу, разсматривая вопросъ нѣсколько детальнѣе, отграничить вокругъ точки $u_3 = 0$ область произвольно большихъ размѣровъ (столь большую, напримѣръ, что она охватитъ всю нашу солнечную систему или даже весь міръ неподвижныхъ звѣздъ) и могу затѣмъ принять ε (положительное или отрицательное) столь малымъ, что внутри этой области любыя разстоянія, измѣренныя не-эвклидовымъ образомъ, отличаются отъ своихъ соотвѣтственныхъ эвклидовыхъ размѣровъ меньше, чѣмъ на любую данную напередъ величину.

Да будетъ мнѣ позволено остановиться еще нѣсколько на этомъ вопросѣ о проэктивномъ мѣроопредѣленіи въ плоскости; это необходимо, разумѣется, для того, чтобы надлежащимъ образомъ подготовить извѣстныя соображенія, нужныя мнѣ позже для сравненія классической и новой механики. Я примѣняю вышеназванный принципъ непрерывности къ случаямъ 3), 4) и 5) нашей таблицы. Пусть основнымъ образомъ, разсматриваемымъ въ обыкновенной прямоугольной системѣ координатъ будетъ:

(10) . . . . $u_1{}^2 + \varepsilon u_2{}^2 = 0.$

Мы дадимъ здѣсь ε въ одномъ случаѣ весьма малое положительное, въ другомъ—весьма малое отрицательное, въ третьемъ—нулевое значеніе. Обозначимъ черезъ x, y соотвѣтственныя (обыкновенныя, а не однородныя) каординаты какой-нибудь точки. Для разстоянія какой нибудь точки отъ начала каординатъ мы получимъ, путемъ соотвѣтственнаго измѣненія формулы (3):

(11) . . . . $r = \sqrt{\varepsilon x^2 + y^2}$.

Разсмотримъ теперь, какой видъ имѣетъ система расположенныхъ вокругъ 0, какъ центра, окружностей (т.-е. кривыхъ $r = \text{Const.}$). Очевидно, что при положительнымъ ε мы получаемъ вытянутые эллипсы (большая ось которыхъ совпадаетъ съ осью X), при отрицательныхъ ε—гиперболы, ассимптоты которыхъ $\frac{y}{x}=$ $=\pm\sqrt{-\varepsilon}$ образуютъ весьма малый уголъ съ осью X, при $\varepsilon=0$ получимъ пару прямыхъ $y=\pm\sqrt{\text{Const}}$, параллельныхъ оси X. Любопытно видѣть, какъ эти пары параллельныхъ прямыхъ представляютъ переходныя формы между эллипсами и гиперболами, т.-е. между случаями съ положительными и отрицательными ε!

Мы можемъ далѣе разсмотрѣть относящіяся къ нашему мѣроопредѣленію эквиформенныя и конгруэнтныя преобразованія сперва для тѣхъ случаевъ, когда ε не равно нулю. Такъ какъ обѣ представленныя съ помощью (10) точки различны другъ отъ друга въ случаѣ, когда $\varepsilon \gtrless 0$, то онѣ опредѣляютъ однозначнымъ образомъ соединяющую ихъ прямую, именно безконечно удаленную прямую. Наши преобразованія будутъ, слѣдовательно, аффинными преобразованіями и могутъ быть представлены въ формѣ:

$$(12)\ \ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{l} x'=\alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13} \\ y'=\alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23} \end{array}\right.$$

Здѣсь коэффиціенты въ правой части для случая эквиформеннаго преобразованія таковы, что

$$\varepsilon(\alpha_{11}x+\alpha_{12}y)^2+(\alpha_{21}x+\alpha_{12}y)^2$$

отличается отъ εx^2+y^2 на произвольнаго постояннаго множителя. Это даетъ для коэффиціентовъ α_{ik} два условія, и три условія, когда, переходя къ конгруэнтнымъ преобразованіямъ, мы приравниваемъ опредѣлитель $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix}=1$. На основаніи этого мы имѣемъ ∞^4 эквиформенныхъ и ∞^3 конгруэнтныхъ преобразованій, въ полномъ согласіи, разумѣется, съ тѣмъ, что мы энаемъ для случая $\varepsilon = 1$ объ эвклидовой метрикѣ.

Мы обращаемся теперь къ двояко спеціализированному случаю $\varepsilon = 0$, сохраняя то условіе, что и здѣсь мы будемъ разсматривать лишь аффинныя преобразованія (12). (Здѣсь это только добровольное соглашеніе, такъ какъ безконечно удаленная прямая есть лишь одна изъ прямыхъ линій, которыя содержатъ точку $u_1{}^2 = 0$, т. е. безконечно удаленную точку оси X; слѣдовательно, нѣтъ внутренней необходимости, чтобы она при разсматриваемыхъ нами преобразованіяхъ переходила въ самое себя). Мы получаемъ тогда для эквиформенныхъ преобразованій просто $\alpha_{21} = 0$; всякое преобразованіе

$$(13) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x' = \alpha_{11}\ x + \alpha_{12}\ y + \alpha_{13} \\ y' = \qquad\qquad \alpha_{22}\ y + \alpha_{23} \end{array}\right.$$

придется разсматривать, какъ эквиформенное. Эквиформенная группа, несмотря на ограничительный характеръ нашего соглашенія, все еще содержитъ здѣсь пять параметровъ. За „движенія“, т. е. конгруэнтныя преобразованія, можно будетъ принять среди преобразованій (13) тѣ, которыя, во-первыхъ, унимодулярны, а во-вторыхъ, оставляютъ неизмѣннымъ разстояніе двухъ точекъ x, y и $\bar{x}$, $\bar{y}$, т. е. въ данномъ случаѣ $(y - \bar{y})$. Это даетъ намъ $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 1$ и мы получаемъ для трехчленной, какъ прежде, группы движенія формулы

$$(14) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x' = \quad x + \alpha_{12}\ y + \alpha_{13} \\ y' = \qquad\qquad\quad y + \alpha_{23}. \end{array}\right.$$

Слѣдовательно, эквиформенныя преобразованія содержатъ двумя параметрами больше, чѣмъ конгруэнтныя.

Мы скажемъ, что теперь мы можемъ выбрать независимыми единицы масштаба для оси X и оси У. Въ частности въ $y-\bar{y}$ мы будемъ имѣть для любыхъ данныхъ двухъ точекъ инваріантъ движенія; если же въ частности $y-\bar{y}=0$, то и $x-\bar{x}$ есть инваріантъ движенія.

Теперь слѣдуетъ перенести всѣ эти, несомнѣнно, весьма простыя положенія на случай бо́льшаго числа перемѣнныхъ. Или даже мы прямо перейдемъ къ 4 перемѣннымъ x, y, z, t (гдѣ мы совокупность всѣхъ значеній этихъ перемѣнныхъ будемъ вмѣстѣ съ Минковскимъ называть міромъ, x, y, z—координатами пространства, t—временемъ). Мы не намѣрены вовсе перечислять систематически всевозможные соотвѣтственные виды проэктивнаго мѣроопредѣленія, какъ это, въ концѣ-концовъ, ни просто. Мы покажемъ лишь, что здѣсь, въ четырехмѣрномъ мірѣ, система механики входитъ въ понятіе проэктивнаго мѣроопредѣленія, и при томъ какъ система классической механики, такъ и система новой механики Лорентца, Эйнштейна, Пуанкарэ и Минковскаго, благодаря чему вполнѣ выясняется сущность обѣихъ этихъ системъ, а та́кже ихъ взаимное отношеніе.

Положимъ сперва $x=\frac{x_1}{x_5}, y=\frac{x_2}{x_5}, z=\frac{x_3}{x_5}, t=\frac{x_4}{x_5}$. Общее линейное уравненіе между x, y, z, t можно, въ соотвѣтствіи съ этимъ, написать:

$$u_1 x_1+u_2 x_2+u_3 x_3+u_4 x_4+u_5 x_5=0.$$

Въ частности $x_5=0$ представляетъ то, что мы назовемъ „безконечно удаленнымъ“ („das unendlich Ferne“) міра. Наша старая знакомка, сферическая окружность, выражается, какъ и прежде, съ помощью уравненія:

(15). . . . . $u_1^2 + u_3^2 + u_2^2 = 0.$

Но теперь—такъ какъ у насъ пять однородныхъ координатъ—ее приходится принимать за двояко специализированный образъ. Наряду съ ней мы напишемъ просто спеціализированный образъ:

(16). . . . . . $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \frac{u_4^2}{c^2} = 0,$

гдѣ c должно обозначать „скорость свѣта“ и гдѣ, слѣдовательно, $\frac{1}{c^2}$ (если въ основу положены единицы, которыми пользуются вообще въ механикѣ) представляетъ очень небольшую величину. Въ точечныхъ координатахъ этотъ образъ данъ парой уравненій:

(17). . . . $x_5 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0,$

слѣдовательно, опредѣляетъ однозначнымъ образомъ „безконечно удаленное“ міра. Если мы придадимъ здѣсь—чтобы получить сферическую окружность—c безконечно большое значеніе, то мы получимъ для нея три уравненія въ точечныхъ координатахъ:

(18). . . . $x_5 = 0,\ x_4 = 0,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$

Мы имѣемъ здѣсь $\frac{x_4}{x_5} = t = \frac{o}{o}$. Сферическую окружность слѣдуетъ мыслить себѣ — такъ сказать — внѣвременной. Безконечно удаленное міра есть лишь одно изъ линейныхъ многообразій, заключающихъ въ себѣ сферическую окружность; оно получаетъ лишь тогда преимущество передъ другими линейными многообразіями того же вида, когда мы производимъ сферическую окружность изъ (16) или (17) путемъ перехода къ предѣлу.—На эти то образы (16, 17), или (15, 18) мы перенесемъ соотвѣтствен-

нымъ образомъ всѣ тѣ разсужденія, которыя мы развили выше касательно уравненія (10), т. е. $u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0$.

Я начну сразу съ сферической окружности, руководствуясь принципомъ, что мы должны—согласно съ логическимъ исключительнымъ положеніемъ линейнаго многообразія $x_5 = 0$—искать соотвѣтственныхъ эквиформенныхъ и конгруэнтныхъ преобразованій міра лишь среди аффинныхъ преобразованій міра. Въ соотвѣтствіи съ этимъ теперь нѣтъ никакой нужды сохранять однородное начертаніе. Общую схему разсматриваемыхъ нами преобразованій мы, соотвѣтственно уравненіямъ (13), напишемъ, наоборотъ, сейчасъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$(19)\ \ldots \quad \begin{cases} x' = \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \alpha_{14} t + \alpha_{15} \\ y' = \alpha_{21} x + \alpha_{22} y + \alpha_{23} z + \alpha_{24} t + \alpha_{25} \\ z' = \alpha_{31} x + \alpha_{32} y + \alpha_{33} z + \alpha_{34} t + \alpha_{35} \\ t' = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \alpha_{44} t + \alpha_{45}. \end{cases}$$

Мы назовемъ эти преобразованія эквиформенными, если они переводятъ въ самое себя систему уравненій (18). Для этого должно имѣть мѣсто единственное условіе, а именно, матрица

$$(20)\ \ldots\ldots\ldots \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

должна быть *ортогональной*. Это даетъ для девяти коэффиціентовъ $\alpha_{11} \ldots \alpha_{33}$, какъ извѣстно, пять уравненій. Слѣдовательно, изъ 17 коэффиціентовъ, фигурирующихъ въ (19), остаются произвольными всего 12. Среди опредѣленныхъ такимъ образомъ эквиформенныхъ преобразованій мы назовемъ — согласно съ (14)—*конгруэнтными преобразованіями* тѣ для которыхъ матрица (20) унимодулярна и сверхъ того $\alpha_{44}=1$. Группа опредѣленныхъ такимъ образомъ конгруэнтныхъ преобразованій содержитъ еще десять параметровъ. Если x, y, z, t и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$ координаты двухъ міровыхъ точекъ, то въ случаѣ группы конгруэнтныхъ преобразованій остается неизмѣнной, вообще говоря, лишь разница $t-\bar{t}$; лишь когда $t-\bar{t}$ равно нулю, тогда и $(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2$ представляетъ инваріантъ. Слѣдовательно, двѣ міровыя точки имѣютъ лишь тогда „чисто геометрическій" инваріантъ, когда ихъ разница во времени равна нулю.

Что, разсматривая эти, относящіяся къ сферической окружности эквиформенныя и конгруэнтныя міровыя преобразованія, мы въ дѣйствительности имѣемъ дѣло съ основами классической механики — это врядъ ли нуждается въ подробныхъ доказательствахъ послѣ всего того, что неоднократно указывалось въ новѣйшее время другими авторами. Дѣйствительно, основныя уравненія классической механики остаются неизмѣнными, если мы

1) замѣнимъ произвольно выбранную прямоугольную пространственную систему координатъ x, y, z любой другой, равно оріентированной,

2) сообшимъ мысленно прямоугольной системѣ какое-нибудь равномѣрное переносное движеніе,

3) произвольно измѣнимъ начальную точку, отъ которой мы отсчитываемъ время t.

Именно это и выражается нашей группой конгруэнтныхъ преобразованій. Въ частности равномѣрнымъ переноснымъ движеніямъ 2) соотвѣтствуютъ въ нашихъ формулахъ члены съ $\alpha_{14}t$, $\alpha_{24}t$, $\alpha_{34}t$. Тому же обстоятельству, что наши эквиформенныя преобразованія содержатъ двумя параметрами больше, чѣмъ конгруэнтныя преобразованія, соотвѣтствуетъ тотъ фактъ, что въ классической механикѣ единица времени и единица длины могутъ быть выбраны независимо другъ отъ друга произвольнымъ образомъ (на этомъ основывается ученіе о „подобіи“ въ классической механикѣ).

Разсмотримъ, во-вторыхъ, случай просто спеціализированнаго основного образа (17) (который еще не имѣетъ особеннаго наименованія, но безусловно заслуживаетъ его):

$$x_5 = 0, \quad x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 - c^2 x_4{}^2 = 0.$$

Эквиформенныя преобразованія здѣсь неизбѣжно аффинны; съ тѣмъ большимъ основаніемъ поэтому мы снова обращаемся къ неоднородному начертанію. Общая схема аффинныхъ преобразованій будетъ здѣсь:

$$(21) \ldots \left\{ \begin{array}{l} x' + \alpha_{11} x + \alpha_{12} y + \alpha_{13} z + \alpha_{14} t + \alpha_{15} \\ y' = \alpha_{21} x + \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; + \alpha_{25} \\ z' = \alpha_{31} x + \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; + \alpha_{35} \\ t' = \alpha_{41} x + \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; + \alpha_{45} \end{array} \right.$$

Мы имѣемъ эквиформенное преобразованіе, всякій разъ, когда однородная подстановка x, y, z, t, совершаемая съ помощью матрицы

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \; \ldots\ldots\ldots \; \alpha_{14} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{41} \; \ldots\ldots\ldots \; \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

превращаетъ квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ въ кратное самой себя. Это приводитъ къ девяти условіямъ для 20 коэффиціентовъ α_{ik}; слѣдовательно, группа эквиформенныхъ преобразованій содержитъ теперь 11 параметровъ. Изъ нея получается группа конгруэнтныхъ преобразованій, если выставить требованіе, чтобы опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} \; \ldots\ldots\ldots \; \alpha_{14} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{41} \; \ldots\ldots\ldots \; \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

равнялся 1. Мы получаемъ, слѣдовательно, группу съ 10 параметрами. Если x, y, z, t и $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$ координаты двухъ какихъ-нибудь міровыхъ точекъ, то по отношенію къ нимъ квадратъ quasi-разстоянія:

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2-c^2\,(t-\bar{t})^2$$

оказывается неизмѣннымъ.

Мы должны теперь остановиться на одномъ, болѣе деликатномъ, пунктѣ, на который можно было указать еще ранѣе, при разсужденіяхъ касательно пары точекъ $u_1{}^2+\varepsilon u_2{}^2=0$, какъ основного образа плоскаго мѣроопредѣленія. Чтобы выдѣлить изъ совокупности эквиформенныхъ преобразованій конгруэнтныя, мы тогда ограничились тѣмъ, что приняли въ подстановкахъ (12) опредѣлитель $\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=1$. Такъ фактически и поступаютъ въ эвклидовомъ мѣроопредѣленіи, гдѣ за основной образъ взята мнимая пара точекъ. Но это годится лишь для случая мнимой пары точекъ (для случая положительнаго ε). Если же пара точекъ вещественна (ε отрицательно), то болѣе глубокое геометрическое изслѣдованіе показываетъ, что унимодулярныя эквиформенныя преобразованія не образуютъ уже континуума, какъ это естественно приходится требовать отъ совокупности конгруэнтныхъ преобразованій. Движеніями въ тѣсномъ смыслѣ слова придется назвать лишь тѣ преобразованія, которыя оставляютъ неизмѣннымъ знакъ дифференціальнаго выраженія εdx^2+dy^2 и, кромѣ того, даютъ положительное α_{22}, ибо они одни непрерывно примыкаютъ къ „тождественному“ преобразованію $x'=x$, $y'=y$. Поэтому, въ случаѣ отрицательнаго ε слѣдуетъ присовокупить къ данному выше опредѣленію конгруэнтныхъ преобразованій и названныя требованія. На произведенный тогда подсчетъ параметровъ это не имѣетъ никакого вліянія. Кромѣ того, въ предѣльномъ случаѣ $\varepsilon = 0$, положивъ $\alpha_{22} = 1$, мы поступили уже согласно новому соглашенію. Нѣчто подобное мы имѣемъ и въ случаѣ образа (17), который мы собираемся теперь разсматривать (этотъ образъ можно, въ виду отрицательнаго знака, съ которымъ входитъ въ уравненіе его членъ $c^2x_4{}^2$, уподобить до извѣстной степени случаю вещественной пары точекъ въ плоскости). Теперь болѣе подробное геометрическое изслѣдованіе—не трудное, но требующее больше мѣста и времени, чѣмъ мы ими располагаемъ въ данномъ случаѣ—показываетъ, что группа конгруэнтныхъ преобразованій, какъ мы ее прежде опредѣлили, заключаетъ еще два континуума и что мы можемъ принять за группу движеній изъ этихъ двухъ континуумовъ лишь тотъ, который характеризуется положительнымъ α_{44}.

Итакъ, присовокупимъ требованіе положительнаго α_{44} къ опредѣленію нашей десятичленной группы. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ передъ собой какъ разъ лорентцову группу „новой“ механики. Правда, о лорентцовой группѣ говорятъ большей частью, что она имѣетъ шесть (а не десять) параметровъ. Но это лишь слѣдствіе того, что въ математической физикѣ разсматриваютъ обыкновенно не преобразованія (21) координатъ x, y, z, t, но соотвѣтственное преобразованіе дифференціаловъ dx, dy, dz, dt, при которыхъ само собою отпадаютъ аддитивныя постоянныя $\alpha_{15}, \alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{45}$ формулъ (21). То же обстоятельство, что группа эквиформенныхъ преобразованій содержитъ теперь лишь однимъ параметромъ больше, чѣмъ группа конгруэнтныхъ преобразованій, сказывается въ томъ, что при наличности постоянной c (скорости свѣта) единица пространства и единица времени связаны въ новой механикѣ другъ съ другомъ (такъ что лишь одна изъ обѣихъ можетъ быть выбрана произвольной).

Такимъ образомъ старая механика и новая механика одинаково введены въ схему проэктивнаго мѣроопредѣленія для перемѣнныхъ x, y, z, t, т.-е., цѣль, поставленная мною себѣ въ началѣ этого доклада, достигнута. Все то, что̀ я говорилъ въ началѣ объ отношеніяхъ метрической геометріи въ проэктивной, можетъ быть соотвѣтственнымъ образомъ перенесено сюда. Но я ограничусь лишь двумя краткими замѣчаніями.

Во-первыхъ: согласно терминологіи, о которой я упомянулъ выше, мы въ правѣ сказать, что классическая механика, какъ и новая механика, является „теоріей относительности“ по отношенію къ нѣкоторой группѣ съ десятью параметрами. Можно было бы спросить, почему же въ физической литературѣ терминъ „теорія относительности“ употребляется исключительно, какъ аттрибутъ новой механики? Отвѣтъ на это гласитъ, какъ мнѣ кажется: потому что исторически новая механика возникла обходнымъ путемъ, черезъ электродинамику. Чтобы выяснить положеніе дѣла, достаточно написать максуэллевы уравненія для чистаго эѳира хотя бы съ помощью герцовой символики:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z},\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x},\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y},\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0,\ \frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Эти уравненія, разумѣется, сохраняютъ тотъ же видъ, если замѣнить систему x, y, z какой-нибудь другой (равно оріентированной) прямоугольной системой координатъ или если произвольнымъ образомъ перемѣстить начало временъ. Вмѣстѣ это даетъ группу изъ семи параметровъ. Но они не сохраняютъ того же вида, если придать системѣ координатъ равномѣрное переносное движеніе, т.-е. если положить:

$$x' = x + \alpha_{14}\, t\,, y' = y + \alpha_{24}\, t\,, z' = z + \alpha_{34}\, t\,.$$

Это и было импульсомъ къ тому, что подъ вліяніемъ максуэллевыхъ уравненій стали разсматривать электродинамическій эѳиръ, какъ покоящійся въ пространствѣ, что снова восторжествовала концепція **абсолютнаго** пространства. Осталась семичленная группа измѣненій, которая соотвѣтствуетъ чисто внѣшнему переходу отъ системы координатъ x, y, z, t къ другой, равноправной.—Но тутъ было сдѣлано открытіе, что эта семичленная группа содержится въ другой, десятичленной, которая, въ свою очередь, оставляетъ неизмѣненными максуэллевы уравненія, именно, въ лорентцовой группѣ. Тогда снова исчезло абсолютное пространство (или, можетъ быть, лучше: абсолютный міръ),—міръ снова сталъ, какъ и прежде, относительнымъ понятіемъ,—и изслѣдователи вообразили себѣ (не думая вовсе о томъ, что они лишь возстановляютъ mutatis mutandis прежнее положеніе вещей), что выраженіе „теорія относительности“ представляетъ новый, относящійся лишь къ лорентцовой группѣ, терминъ.

Подъ конецъ я сдѣлаю еще слѣдующее замѣчаніе: выше было указано, что трудности, испытываемыя каждымъ, кто привыкъ къ эвклидовой геометріи, при желаніи проникнуть въ міръ не-эвклидовой геометріи, исчезаютъ безслѣдно, если принять за исходный пунктъ болѣе высокую точку зрѣнія проэктивной геометріи. То же самое можно сказать объ изученіи новыхъ отношеній, получающихся въ механикѣ, если положить въ основу лорентцову группу. Мнѣ представляется нецѣлесообразнымъ исходить при занятіяхъ новой механикой изъ господствующихъ въ классической механикѣ концепцій и затѣмъ изслѣдовать, какъ слѣдуетъ измѣнить искусственнымъ образомъ эти послѣднія, чтобы они подошли къ новой механикѣ. Правильнѣе, кажется, наоборотъ, прежде всего покинуть точку зрѣнія старой механики и возвыситься до болѣе универсальной концепціи, охватывающей старую и новую механики, какъ спеціальные случаи. Согласно вышеизложенному, для этого вовсе не необходимо свыкнуться съ міромъ проэктивнаго пониманія, ибо достаточно и аффинное пониманіе. Необходимо будетъ составить систематическую теорію инваріантовъ аффиннаго „міра“, для чего, впрочемъ, имѣются уже всѣ элементы въ изслѣдованіяхъ математиковъ о многомѣрныхъ многообразіяхъ, и изслѣдовать, исходя изъ этой теоріи, оба вида механики,—старую и новую. Тогда само собой обнаружится, какимъ образомъ старая механика является предѣльнымъ случаемъ новой и, слѣдовательно, въ какихъ размѣрахъ можно разсматривать, какъ приближеніе къ послѣдней. Кто исполнитъ эту программу?

Минковскій, безъ сомнѣнія, для себя вполнѣ продумалъ всѣ эти вещи. Но такъ какъ онъ писалъ для широкаго круга заинтересованныхъ въ физической сторонѣ вопроса лицъ, то онъ въ интересахъ доступности своего изложенія считалъ болѣе цѣлесообразнымъ не излагать своихъ, относящихся сюда, внутреннихъ размышленій, но лишь кристаллизированную форму алгоритма, къ которому они приводятъ въ случаѣ лорентцовой группы. Это—четырехмѣрное векторіальное исчисленіе Минковскаго, которое онъ—безъ дальнѣйшаго обоснованія его—поставилъ, какъ опредѣленную систему нѣкоторыхъ алгебраическихъ процессовъ, во главу своихъ электродинамическихъ изслѣдованій.

[P. S. Въ своемъ докладѣ отъ 10 мая я говорилъ также объ изящномъ выраженіи коэффиціентовъ лорентцовой группы съ помощью десяти независимыхъ параметровъ, которое получается на основаніи знаменитой кватерніанной формулы, опять-таки данной впервые Кэли.

Заключительная формула такова. Пусть i обозначаетъ обыкновенную мнимую единицу, а i_1, i_2, i_3—специфическія единицы исчисленія кватерніоновъ. Пусть A, A′,… D, D′ представляютъ восемь параметровъ, которые должны быть связаны билинейнымъ уравненіемъ

$$\mathrm{AA}'+\mathrm{BB}'+\mathrm{CC}'+\mathrm{DD}'=0$$

и неравенствомъ

$$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2>\mathrm{A}'^2+\mathrm{B}'^2+\mathrm{C}'^2+\mathrm{D}'^2.$$

Пусть также x_0, y_0, z_0, t_0 представляютъ четыре параметра. Тогда подстановки лорентцовой группы даются слѣдующей формулой:

$$(i_1x'+i_2y'+i_3z+ict')-(i_1x_0+i_2y_0+i_3z_0+ict_0)=$$
$$=\frac{\left[\begin{array}{c}[i_1(\mathrm{A}+i\mathrm{A}')+i_2(\mathrm{B}+i\mathrm{B}')+i_3(\mathrm{C}+i\mathrm{C}')+(\mathrm{D}+i\mathrm{D}')]\,.\\ .\,(i_1x+i_2y+i_3z+ict)\\ .\,[i_1(\mathrm{A}-i\mathrm{A}')+i_2(\mathrm{B}-i\mathrm{B}')+i_3(\mathrm{C}-i\mathrm{C}')-(\mathrm{D}-i\mathrm{D}')]\end{array}\right]}{(\mathrm{A}'+\mathrm{B}'^2+\mathrm{C}'^2+\mathrm{D}'^2)-(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2+\mathrm{D}^2)}$$

Такъ какъ умноженіе A, A′, . . . D, D′ на любой общій множитель не измѣняетъ формулы, а A, A′,…, съ другой стороны, подчинены вышеуказанному двулинейному отношенію, то мы, дѣйствительно, имѣемъ передъ собою десятикратно безконечное множество подстановокъ.

Что касается дальнѣйшихъ потребностей и литературныхъ указаній, то ср. „Приложенія и дополненія“, которыми г. Нётеръ снабдилъ вышедшую недавно заключительную часть составленной Зоммерфельдомъ и мной „Теоріи волчка“ („Theorie des Kreisels“, Lpz. 1910), авг. 1910 г. Клейнъ].

Перев. *П. Юшкевичъ.*

ОПЕЧАТКИ:

Стр.	Сверху:	Снизу:	Напечатано:	Слѣдуетъ читать
5	4	—	X^{19}	X^{12}
11	5	—	но что	что
12	6	—	(фиг. 2); фигура	(фиг. 2)
13	—	15	переходу	переходъ
„	—	„	соотвѣтствовало	соотвѣтствовалъ
20	—	9	Ky	Kz
21	—	13	m	m_1

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Типографія „Печатный Трудъ“, Спб., Прачешный пер., 4.