# НОВЫЯ ИДЕИ ВЪ МАТЕМАТИКѢ.

Непеpiодическое изданiе, выходящее подъ редакцiей
профессора А. А. ИВАНОВА.

## Сборникъ седьмой.

## Принципъ относительности съ математической точки зрѣнiя II.

Изд-ство «ОБРАЗОВАНIЕ» СПБ.
1914.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Тип. „Я. Трей“, Разъѣзжая, 43.

# ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

К. Кайе. Уравненія принципа относительности и геометрія . . . 1
В. Варичакъ. О неэвклидовомъ истолкованіи теоріи относительности . . . 43
Г. Тимердингъ. Объ одномъ простомъ геометрическомъ образѣ четырехмѣрнаго міра Минковскаго. 80
А. Бриллъ. Принципъ относительности . . . 99
  Предисловіе.
  I. Заданіе.
    1. Введеніе. . . . 100
    2. Уравненіе движенія классической механики . . . 101
    3. Звуковыя волны. . . . 103
    4. Свѣтовыя волны . . . 106
  II. Геометрія движенія.
    5. Лорентцово преобразованіе . . . 108
    6, Длина и время въ относительной системѣ . . . 113
    7. Пространство-временныя координаты . . . 117
    8. Міровая линія матеріальной точки; ея собственное время . . . 120
    9. Криволинейное движеніе матеріальной точки . . . 124
    10. Общее Лорентцово преобразованіе. Его геометрическое истолкованіе . . . 126
  III. Динамика.
    11. Собственное ускореніе, покоящаяся масса, сила. 129
    12. Энергія. . . . 133
    13. Два примѣра. . . . 135
    14. Масса въ относительной системѣ . . . 138
Н. Умовъ. Единообразный выводъ преобразованій, совмѣстныхъ съ принципомъ относительности . . . 143
Н. Умовъ. Условія инваріантности уравненія волны. . 152

## К. Кайе. (C. Cailler).

# Уравненія принципа относительности и геометрія.

### § 1. Введеніе.

Начиная съ знаменитаго мемуара Эйнштейна [1]), существуютъ двѣ точки зрѣнія по вопросу о физическомъ и философскомъ значеніи принципа относительности. Для однихъ—къ нимъ можно причислить самого Эйнштейна—не существуетъ никакой матерьяльной среды, которую мы были бы въ правѣ считать находящейся въ абсолютномъ покоѣ скорѣе, чѣмъ любую другую среду. Соотвѣтственно съ этимъ не существуетъ и абсолютнаго времени. Время, согласно этой точкѣ зрѣнія, является представленіемъ, допускающимъ многозначныя опредѣленія, находящіяся въ зависимости отъ состоянія движенія. Среди этихъ опредѣленій никакой фактъ наблюденія не позволяетъ намъ и тѣмъ болѣе не заставляетъ насъ выдѣлить какое-нибудь одно особенное, чтобы дѣлать изъ него предпочтительно передъ другими абсолютное время.

Минковскій [2]), самый послѣдовательный представитель этой радикальной тенденціи, идетъ еще далѣе. Для него

---

[1]) Annalen der Physik, 1905, 17, p. 891,

[2]) Phys. Zeitschrift, 1909, 10, p. 105.

традиціонное различіе между понятіями пространства и времени, разсматриваемыми, какъ двѣ разнородныя между собою сущности, представляетъ собою лишь психологическую привычку, закрѣпленную наслѣдственностью и уже съ древнихъ временъ включенную въ число истинъ здраваго смысла. Но ея древность, сдѣлавшая ее почтенной, сдѣлала ее также дряхлой. Критика, опираясь на послѣднія открытія въ физикѣ, покончила съ этимъ представленіемъ, и въ настоящее время слѣдуетъ уничтожить его, какъ устарѣвшее.

На мѣсто двухъ понятій—пространства и времени—мы отнынѣ будемъ имѣть одно единственное понятіе, въ которомъ амальгамированы оба прежнихъ. Это понятіе есть міръ. Міръ представляетъ многообразіе четырехъ измѣреній. Элементомъ этого многообразія является нѣкоторая эпоха, соединенная съ нѣкоторымъ мѣстомъ. Этотъ элементъ называется событіемъ. Такимъ образомъ, событіе имѣетъ четыре координаты $x$, $y$, $z$, $t$, которыя однородны между собою и могутъ мѣняться между собою мѣстами. Подобно тому, какъ обыкновенное пространство есть совокупность точекъ, міръ есть совокупность событій. Что касается обычныхъ времени и пространства, то они представляютъ, согласно Минковскому, лишь вырѣзы, полученные изъ міра съ помощью искусственнаго пріема, во всѣхъ отношеніяхъ подобнаго тому пріему, съ помощью котораго геометръ извлекаетъ изъ трехмѣрнаго пространства пространства съ меньшимъ числомъ измѣреній, напр., плоскости или прямыя.

Если мы обратимся къ ученымъ болѣе консервативнаго типа, какъ Лорентцъ и Вихертъ [1]), то мы встрѣчаемъ у нихъ лишь умѣренный релятивизмъ. Эѳиръ здѣсь существуетъ, и онъ то и опредѣляетъ абсолютное пространство физика. Что касается времени, то и оно

---

[1]) Physik. Zeitschrift, 1910, 11, p. 1234.

доступно абсолютной мѣрѣ. Одновременность должна быть опредѣлена однозначнымъ образомъ, отвлекаясь отъ движенія наблюдателя. Правда, что такіе твердо установленные факты, какъ, напримѣръ, постоянство скорости свѣта для различныхъ средъ, одушевленныхъ переносными движеніями, заставляютъ признать нѣкоторый принципъ относительности, но задача заключается именно въ томъ, чтобы объяснить эти факты, какъ слѣдствія, вытекающія изъ свойствъ эѳира. Такимъ образомъ, эквивалентность различныхъ системъ, обладающихъ равномѣрнымъ переноснымъ движеніемъ, равно какъ и эквивалентность различныхъ синхронизацій, не выражаетъ конкретныхъ реальностей. Это—лишь видимости математическаго порядка, значеніе и основаніе которыхъ слѣдуетъ попросту выявить. Согласно сторонникамъ этой точки зрѣнія, подобное истолкованіе фактовъ относительности болѣе просто и болѣе экономно для нашей мысли, чѣмъ революціонное уничтоженіе нашихъ исконныхъ умственныхъ навыковъ.

Если стать на дидактическую точку зрѣнія, если желать ввести въ кругъ идей относительности чуждые еще ему умы, то несомнѣнно, что методъ изложенія, идущій отъ извѣстнаго къ неизвѣстному, болѣе, чѣмъ всякій другой, пригоденъ для установленія значенія новаго принципа и для разъясненія парадоксовъ, представляющихся массой, когда приступаешь къ теоріи, столь далекой отъ всѣхъ нашихъ обычныхъ понятій. Можетъ быть, формулируя такимъ образомъ факты относительности на языкѣ абсолютнаго, мы остаемся на поверхности вещей. Но если мы ихъ видимъ съ меньшей высоты, то зато мы ихъ видимъ лучше.

Но какова бы ни была позиція, которую можетъ занять изслѣдователь по отношенію къ этому спору, значеніе самого принципа остается по существу однимъ и тѣмъ же. Онъ утверждаетъ, что всѣ рѣшительно физическія явленія подчиняются неизмѣннымъ законамъ, не зависящимъ отъ равномѣрнаго прямолинейнаго переноснаго движенія, которое можетъ уносить систему отсчета, служащую для реперированія этихъ явленій. Поэтому, чтобы получить уравненія Лорентцова пространственно-временного [1]) преобразованія, можно принципіально воспользоваться какимъ-угодно явленіемъ. Слѣдуетъ взять какое-нибудь изъ этихъ явленій и примѣнить къ нему затѣмъ разсматриваемый принципъ инваріантности. Такъ, Эйнштейнъ исходилъ изъ постоянства скорости свѣта. Но чаще всего исходятъ изъ уравненія волнъ или же изъ системы Максуэлль-Герца, воздвигая затѣмъ на нихъ все зданіе.

Но законы геометріи представляютъ тоже на свой манеръ физическіе законы, по крайней мѣрѣ, насколько принимаютъ, что *ими приблизительно* управляется движеніе окружающихъ насъ твердыхъ тѣлъ. А такъ какъ уравненія Лорентца касаются въ первую голову преобразованія геометріи тѣла, когда переходятъ отъ точки зрѣнія неподвижнаго наблюдателя къ точкѣ зрѣнія наблюдателя движущагося, то представляется болѣе сообразнымъ съ природой вещей получить эти формулы, не выходя изъ области геометріи, допуская просто, что принципъ относительности примѣнимъ къ этой частной области.

Но утверждая вмѣстѣ съ принципомъ относительности, что геометрія какого-нибудь тѣла, эвклидовская для одного наблюдателя, остается такой же для другого наблюдателя, движущагося по отношенію къ первому, мы не узнаемъ по существу ничего объ уравненіяхъ преобразованія, служащихъ для перехода отъ одной точки зрѣнія къ другой. Это такъ. Однако, можно значительно уменьшить неопредѣленность проблемы или даже совсѣмъ ее уничтожить, поставивъ себѣ условіемъ

---

[1]) Phys. Zeitschrift, 1911, 12, p. 689 и p. 738.

удовлетворить нѣкоторую совокупность болѣе или менѣе правдоподобныхъ и естественныхъ предпосылокъ. Разумѣется, поступая такимъ образомъ, прибѣгая къ помощи гипотезъ, мы лишь снова находимъ группу Лорентца послѣ того, какъ мы разложили ее въ принятыхъ a priori свойствахъ. Но, во-первыхъ, никогда не безполезно сконцентрировать въ нѣсколькихъ рельефныхъ тезисахъ характеристическія свойства нѣкоторой группы преобразованій. Кромѣ того, если разсматривать съ этой точки зрѣнія уравненія Лорентца, т. е. если разсматривать ихъ, какъ чисто логическое построеніе, воздвигнутое внѣ фактовъ, для того, чтобы опредѣлить a priori нѣкоторую геометрію движущихся тѣлъ, то духъ полнѣе сознаетъ свободу своего поведенія относительно естественныхъ явленій, соблюдая въ то же время вполнѣ нейтралитетъ относительно вышеуказаннаго научнаго спора.

Приглашенный нѣсколько времени тому назадъ прочесть передъ аудиторіей студентовъ Женевскаго Университета лекцію о принципѣ относительности, я рѣшилъ руководиться этими практическими соображеніями, и я пытался по возможности считаться съ ними, классифицируя мои идеи въ томъ порядкѣ, который мнѣ больше всего улыбался. Разумѣется, элементарная точка зрѣнія, которую я пытался объяснить, не нова, но могущественный интересъ, представляемый въ настоящее время принципомъ относительности, побуждаетъ меня опубликовать здѣсь съ дальнѣйшими развитіями ту часть моей лекціи, которая касается уравненій Лорентца, выведенныхъ изъ постулатовъ, принятыхъ a priori въ качествѣ геометрическихъ гипотезъ. Я надѣюсь, что это изложеніе не покажется лишеннымъ всякаго интереса. Самое большее, чего я ожидаю отъ своихъ разсужденій, это что при всѣхъ своихъ недостаткахъ они побудятъ какого-нибудь читателя пойти дальше въ томъ же самомъ направленіи.

## § 2. Геометрія неподвижныхъ или движущихся тѣлъ.

Извѣстно, что геометрія не можетъ быть создана безъ идеи движенія, которая предполагаетъ идею времени. Дѣйствительно, геометрическія измѣренія совершаются съ помощью тѣлъ—напримѣръ, линеекъ и циркулей,—которыя перемѣщаютъ въ пространствѣ при извѣстныхъ условіяхъ твердости или неизмѣнности. По существу дѣла, геометрія и кинематика составляютъ одну и ту же науку. Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что если понятіе времени является дѣйствительно необходимымъ факторомъ, которымъ мы пользуемся болѣе или менѣе сознательно во всѣхъ нашихъ геометрическихъ спекуляціяхъ, то нѣтъ, наоборотъ, никакой необходимости измѣрить скорость или быстроту движеній, сообщаемыхъ нами нашимъ инструментамъ. Иначе говоря, счетчики времени, предназначенные для опредѣленія длительностей и постоянно употребляемые въ кинематикѣ, не играютъ никакой роли въ геометріи въ собственномъ смыслѣ слова.

Чтобы не забираться слишкомъ далеко, мы предположимъ, что намъ извѣстны пространственныя понятія. Мы постараемся ихъ въ нѣкоторомъ родѣ матеріализовать въ извѣстной совокупности тѣлъ, которыя отличны другъ отъ друга и которыя можно распознать въ различныя эпохи по совокупности ихъ физическихъ свойствъ. Мы предположимъ, что эти тѣла достаточно многочисленны и достаточно сближены между собою, чтобы можно было допустить практически, что они какъ бы заполняютъ все пространство. Вообразимъ себѣ, что въ какой-нибудь моментъ измѣряютъ разстояніе этихъ точекъ попарно съ помощью линейки, составляющей часть системы и разсматриваемой, какъ неизмѣнная. Когда полученное для каждой пары точекъ разстояніе остается однимъ и тѣмъ же, въ какую бы эпоху ни произвели измѣреніе, то система тверда.

Допустимъ, наконецъ, что между разстояніями пары любыхъ точекъ системы существуетъ извѣстное соотношеніе эвклидовой геометріи. Совокупность нашихъ точекъ образуетъ тогда твердую среду $K$, къ которой примѣнимы законы эвклидовой геометріи. Мы скажемъ, что подобная среда была геометризована [1] (géométré). Конечное звено этой операціи заключается въ томъ, чтобы провести въ $K$ систему прямоугольныхъ осей и придать всякой точкѣ, принадлежащей къ средѣ, координаты по отношенію къ этой системѣ осей. Различные геометрическіе элементы—разстоянія, углы и т. д.—выражаются затѣмъ въ функціи координатъ согласно обыкновеннымъ формуламъ эвклидовой геометріи.

Если нѣкоторая движущаяся точка, чуждая средѣ $K$, приходитъ въ соприкосновеніе съ одной изъ точекъ среды, то координаты движущейся точки равны, по опредѣленію, координатамъ неподвижной точки въ моментъ прикосновенія. Это понятіе прикосновенія, въ которомъ интимно соединены и сближены идеи пространства и времени, безъ сомнѣнія, неопредѣлимо. Тѣмъ не менѣе оно имѣетъ кардинальное значеніе и служитъ основой для всѣхъ дальнѣйшихъ разсужденій. Читатель замѣтитъ, дѣйствительно, что мы здѣсь намѣчаемъ тактильную геометрію, изъ которой по мѣрѣ возможности изгнаны зрительные образы и понятія.

Мы допустимъ во всякомъ случаѣ, что имѣются практическія средства констатировать прикосновеніе. Мы допустимъ, напримѣръ, что среда $K$ обитаема наблюдателемъ, провѣряющимъ фактъ прикосновенія своимъ чувствомъ осязанія.

---

[1] Надѣюсь, мнѣ извинятъ употребленіе этого неологизма, а также термина хронометризовать (chronométrer), которымъ я далѣе пользуюсь.

Мы допустимъ, что существуетъ, по крайней мѣрѣ, одна среда $K$, которую можно геометризовать, какъ только что было сказано. Мы допустимъ даже, что эвклидовы измѣренія возможны также не только внутри среды $K$, но и внутри другихъ средъ $K'$, твердыхъ и движущихся по отношенію къ первой средѣ. Разумѣется, среду $K'$ признаетъ твердой и затѣмъ геометризуетъ нѣкоторый наблюдатель $K'$, составляющій часть новой среды, подобно тому, какъ для геометризованія среды $K$ былъ необходимъ наблюдатель $K$, связанный съ этой средой. Можно далѣе себѣ представить, что оба наши наблюдателя воспользовались для операціи геометризованія той же самой линейкой, которую одинъ уступилъ другому, и мы всегда будемъ принимать это условное соглашеніе.

Впрочемъ, оба міра $K$ и $K'$, геометризованные каждый наблюдателями, составляющими соотвѣтственныя части ихъ чужды другъ другу. Ни $K$ не умѣетъ геометризовать $K'$, ни $K'$ не умѣетъ геометризовать $K$. Чтобы представить себѣ конкретнѣе предыдущій схематическій образъ, достаточно взять на мѣсто обѣихъ средъ съ одной стороны земной шаръ, а съ другой—желѣзнодорожный поѣздъ, движущійся по его поверхности съ большой скоростью. Пассажиры поѣзда могутъ, конечно, геометризовать его, зато они не могутъ геометризовать земли, по крайней мѣрѣ, до тѣхъ поръ, пока въ ихъ распоряженіи не очутятся часы, регулированные синхроническимъ образомъ.

Предположимъ болѣе общимъ образомъ, что $K$ пытается геометризовать какое-нибудь движущееся тѣло. Единственное свѣдѣніе, которое онъ сможетъ получить объ этомъ послѣднемъ черезъ посредство своего чувства осязанія, это, что такая-то точка $K'$ находится въ мгновенномъ прикосновеніи съ такой-то точкой $K$. Значитъ, тѣло $K'$ будетъ для него тождественно съ совокупностью этихъ различныхъ прикосновеній въ одно и то же данное мгновенье. Иначе говоря, форма движущагося тѣла зависитъ отъ одновременнаго положенія составляющихъ его точекъ. Чтобы быть въ состояніи геометризовать движущееся тѣло, неподвижный наблюдатель долженъ умѣть опредѣлять одновременность, равно какъ и предшествованіе (antériorité) или послѣдованіе (postériorité) во времени событій, происходящихъ внутри *K* въ различныхъ точкахъ этой среды.

Но мы не имѣемъ никакого прямого и всеобщаго средства произвести подобное опредѣленіе, которое остается всегда въ значительной мѣрѣ условнымъ. Произошли два факта: одинъ—въ Лондонѣ, другой—въ Индіи. Это, скажемъ, телепатическое откровеніе смерти нѣкотораго іоги теософическому кружку. Предшествуетъ ли извѣстіе событію или слѣдуетъ за нимъ и каковъ отдѣляющій ихъ промежутокъ времени? Отвѣтить разумнымъ образомъ на этотъ вопросъ можно лишь тогда, когда установлены точнымъ образомъ правила, черезъ посредство которыхъ лондонскій часъ связанъ съ бомбейскимъ часомъ.

## § 3. Время.

Въ живой дѣйствительности, съ психологической точки зрѣнія, время представляетъ лишь численный порядокъ, вводимый нѣкоторымъ наблюдателемъ въ рядъ своихъ чувственныхъ ощущеній для каталогизированія ихъ. Оно по существу мѣстное и субъективное понятіе, не передаваемое прямымъ образомъ. Оно можетъ универсализироваться и объективироваться лишь путемъ обмѣна наблюденій многихъ лицъ, желающихъ придать совокупности своего коллективнаго опыта максимумъ непрерывности и возможно большую систематичность и связность.

Если исключить эту чисто практическую цѣль, то понятіе времени сохраняетъ свой неопредѣленный характеръ; два наблюдателя, лишенныхъ реальнаго или просто возможнаго сообщенія между собой, представляютъ себѣ каждый свое особое личное время, ибо нѣтъ мозга, который бы собиралъ симпатически ихъ ощущенія и синтезировалъ ихъ.

Спросите у философа, что такое время, говоритъ Ле Руа[1], и онъ начнетъ вамъ цѣлую рѣчь; спросите о томъ же физика, онъ вынетъ свои часы и скажетъ: вотъ оно.

Станемъ на чисто практическую точку зрѣнія физика. Вообразимъ себѣ въ каждой точкѣ геометризованной среды $K$ наблюдателя, имѣющаго маятникъ, который указываетъ мѣстное время $K$. Мы скажемъ въ такомъ случаѣ, что наша среда хронометризована; равныя между собой значенія $t$ въ различныхъ точкахъ $K$ соотвѣтствуютъ одному и тому же времени для системы $K$. Эта синхронизація нашихъ часовъ представляетъ такимъ образомъ актъ простого опредѣленія и не можетъ вовсе быть предметомъ экспериментальной провѣрки. Употребленіе свѣтовыхъ сигналовъ для опредѣленія синхронизаціи, иначе говоря, для опредѣленія эпохъ среды $K$, имѣетъ передъ всѣми другими мыслимыми методами практическое превосходство, о которомъ была рѣчь выше. Оно дозволяетъ удобное синтетическое описаніе міра. Но мы здѣсь остаемся всецѣло въ области абстрактнаго; мы не имѣемъ никакихъ основаній употреблять только этотъ методъ синхронизаціи, за исключеніемъ всѣхъ другихъ. Мы достигли хронометризованія $K$; какъ мы этого достигли, это для насъ безразлично.

Разъ $K$ хронометризовано, то легко опредѣлить внутри $K$ длительность явленія, начинающагося въ одномъ мѣстѣ и кончающагося въ другомъ. Затѣмъ вводятъ, не встрѣчая новыхъ трудностей, обыкновенныя понятія кинематики, скорость, ускореніе и т. д., для дви-

---

[1] Bull. de la Soc. franç. de Philosophie, № 1, 1912, стр.46.

жущейся точки, соприкосновенія которой съ *K* регистрируются самой средой. Наконецъ, наши наблюдатели *K* пріобрѣли возможность геометризовать движущееся тѣло, основываясь на вышеупомянутомъ опредѣленіи Эйнштейна: фигура движущагося тѣла *C* тождественна съ одновременными положеніями въ *K* различныхъ точекъ, составляющихъ *C*.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что форма какого-нибудь движущагося тѣла не есть свойство, принадлежащее исключительно ему, но что она зависитъ въ значительной степени отъ способа хронометризованія среды *K*, въ которой тѣло перемѣщается и которая наблюдаетъ его движеніе. Если, напримѣръ, движущееся тѣло представляетъ другую среду *K'*, которая считается твердой наблюдателемъ *K'*, то оно обладаетъ также нѣкоторой формой съ точки зрѣнія наблюдателей *K*. Ничто не доказываетъ, что эта форма такая же, какъ и первая, ни даже, что *K'*, которое твердо для *K'*, твердо и для *K*. Иначе говоря, геометрія *K'*, созданная *K'*, не совпадаетъ непремѣнно съ геометріей *K'*, созданной *K*. Первая изъ этихъ геометрій создана безъ часовъ, безъ употребленія какой-бы то ни было мѣры времени, вторая зависитъ отъ часовъ, распредѣленныхъ въ *K*.

## § 4. Уравненія преобразованія.

Возьмемъ случай, о которомъ только что шла рѣчь. Вообразимъ себѣ, что наблюдатели *K* и *K'* провели въ своихъ средахъ прямыя системы осей $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ и пусть $x$, $y$, $z$ и $x'$, $y'$, $z'$ будутъ координатами точекъ $H$ и $H'$ обѣихъ средъ. Въ моментъ $t$ точка $M$ среды *K*, съ которой соприкасается точка $M'$ среды *K'*, будетъ дана уравненіями вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1\ (x', y', z', t) \\ y &= f_2\ (x', y', z', t) \\ z &= f_3\ (x', y', z', t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Сдѣлавъ въ этихъ уравненіяхъ $t = \text{const}$, мы сможемъ перейти отъ геометріи $K'$, созданной наблюдателемъ $K'$, къ геометріи этого же самаго тѣла, какимъ оно кажется $K$ въ эпоху $t$. Важно еще разъ замѣтить здѣсь, что мы не можемъ ничего знать a priori о формѣ этихъ отношеній, если не исходить изъ какихъ-нибудь гипотезъ и не апеллировать къ опыту. Реальное опредѣленіе этихъ отношеній зависитъ сложнымъ образомъ, съ одной стороны, отъ способа хронометризованія, принятаго для среды $K$, а съ другой,—отъ природы движенія среды $K'$.

Всѣ наши изслѣдованія предполагаютъ опредѣленіе этихъ формулъ на основаніи нѣкоторыхъ, произвольно принятыхъ, условій. Первое изъ этихъ условій, которое мы упомянемъ здѣсь мимоходомъ, состоитъ въ томъ, что всѣ три функціи $f_1$, $f_2$, $f_3$ непрерывны и имѣютъ производныя по различнымъ перемѣннымъ $x'$, $y'$, $z'$, $t$. Что касается вопроса о томъ, согласны ли полученныя формулы съ фактами наблюденія, то онъ можетъ быть поставленъ лишь послѣ того, какъ выбрана синхронизація. Несмотря на все огромное значеніе этого вопроса, мы его оставляемъ здѣсь въ сторонѣ по вышеизложеннымъ мотивамъ.

Чтобы понять, какъ слѣдуетъ, эти формулы (1) въ ихъ истинномъ значеніи, возьмемъ нѣкоторую проблему, поставимъ себѣ именно вопросъ, каково должно быть преобразованіе для того, чтобы, согласно обыкновеннымъ воззрѣніямъ, среда $K$ геометризовала $K'$ такимъ же образомъ, какъ $K'$ геометризуетъ самое себя.

Будемъ дифференцировать формулы (1) при постоянномъ времени, т. е. при условіи $dt = O$. Мы получимъ тогда для соотвѣтствія двухъ небольшихъ векторовъ ($dx$, $dy$, $dz$) и ($dx'$, $dy'$, $dz'$), наблюдаемыхъ соотвѣтственно $K$ и $K'$, такія формулы, какъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= a_{11}\,dx' + a_{12}\,dy' + a_{13}\,dz' \\ dy &= a_{21}\,dx' + a_{22}\,dy' + a_{23}\,dz' \\ dz &= a_{31}\,dx' + a_{32}\,dy' + a_{33}\,dz' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Условіе инваріантности сводится къ равенству соотвѣтственныхъ длинъ, т. е.

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3);$$

это уравненіе показываетъ, что система коэффиціентовъ $a_{ij}$ ортогональна. Но вторые члены отношеній (2) должны быть интегрируемы; значитъ, коэффиціенты $a_{ij}$ не могутъ содержать координатъ $x'$, $y'$, $z'$; это будутъ простыя функціи параметра $t$.

Возьмемъ теперь полные дифференціалы отъ формулъ (1); мы имѣемъ, напримѣръ, для первой формулы:

$$d\,(x - a_{11}\,x' - a_{12}\,y' - a_{13}\,z') =$$
$$= \left(\frac{\partial x}{\partial t} - x'\,\frac{\partial a_{11}}{\partial t} - y'\,\frac{\partial a_{12}}{\partial t} - z'\,\frac{\partial a_{13}}{\partial t}\right) dt;$$

такимъ образомъ выраженіе въ скобкахъ: $x - a_{11}\,x' - a_{12}\,y' - a_{13}z'$ можетъ зависѣть лишь отъ времени, ибо второй членъ содержитъ лишь дифференціалъ $dt$. Слѣдовательно, форма искомыхъ отношеній будетъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}\,z' + \alpha \\ y &= a_{21}\,z' + a_{22}\,y' + a_{23}\,z' + \beta \\ z &= a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33}\,z' + \gamma \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (4).$$

гдѣ коэффиціенты являются функціями $t$ и первые изъ нихъ должны представлять ортогональную систему.

Эти уравненія (4) одни только удовлетворяютъ поставленной нами себѣ проблемѣ. Мы узнаемъ въ нихъ обыкновенныя формулы для перехода отъ одной системы неподвижныхъ осей къ другой системѣ, движущейся произвольнымъ образомъ.

Вернемся къ общему случаю. Замѣтимъ, что до сихъ поръ лишь одна среда $K$ хронометризована. Приблизимся къ условію релятивности, хронометризуя, въ свою очередь, $K'$, при томъ произвольнымъ образомъ. Вторая среда, унося свои часы съ собой, стала способной геометризовать тѣла, которыя движутся относительно нея, напримѣръ, среду $K$. Само собою разумѣется, что хронометризованіе $K'$ никакимъ образомъ не опредѣляется хронометризованіемъ $K$.

Пусть $(x', y', z')$ будетъ нѣкоторая точка $K'$, встрѣчающая другую точку $(x, y, z)$, принадлежащую къ средѣ $K$. Двое часовъ, находящихся въ соприкосновеніи показываютъ время $t$ для $K$, время $t'$ для $K'$. Нѣтъ нужды, чтобы эти показанія были тождественны, какъ нѣтъ нужды, чтобы были одинаковы показанія карманныхъ часовъ двухъ встрѣтившихся прохожихъ. Путешественникъ $K$ могъ бы, конечно, принять для себя часъ $K$, прочтя его въ $(x, y, z)$ по мѣстному времени $K$ въ моментъ встрѣчи. Но это представляетъ очень спеціальный методъ синхронизаціи. Вмѣсто того, чтобы прибѣгнуть къ нему, мы положимъ общимъ образомъ

$$t' = f_4(x', y', z', t); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Эта гипотеза представляетъ любой способъ хронометризованія, опредѣляемый простымъ фактомъ соприкосновенія. Во всякомъ случаѣ, предполагается, что функція $f_4$ должна дѣйствительно содержать $t$. Если бы этого не было, то движущіеся часы, имѣющіеся въ каждой точкѣ $K'$, не шли бы, показывая всегда одинъ и тотъ же часъ.

Мы имѣемъ, значитъ,

$$\frac{\partial f_4}{\partial t} \neq 0,$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (5) можетъ быть разрѣшено относительно $t$. Внеся его значеніе $t = \varphi_4(x', y', z', t')$ въ формулы (1), мы получимъ слѣдующее преобразованіе симметрическаго вида:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi_1(x', y', z', t') \\ y=\varphi_2(x', y', z', t') \\ z=\varphi_3(x', y', z', t') \\ t=\varphi_4(x', y', z', t') \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6).$$

Мы увидимъ, пользуясь однимъ изъ слѣдующихъ далѣе постулатовъ, что формулы (1) можно также рѣшить относительно $x'$, $y'$, $z'$. Внеся ихъ значенія въ (5), мы получили бы аналогичнымъ образомъ

$$\left.\begin{array}{l} x'=\psi_1(x, y, z, t) \\ y'=\psi_2(x, y, z, t) \\ z'=\psi_3(x, y, z, t) \\ t'=\psi_4(x, y, z, t) \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6 \text{ bis}).$$

Совокупность этихъ обратныхъ другъ относительно друга формулъ (6) и (6 bis) даетъ намъ возможность перейти отъ міра $K$ къ міру $K'$, и обратно, при чемъ соотвѣтственныя значенія $x$, $y$, $z$, $t$ и $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ представляютъ значенія координатъ точекъ соприкосновенія.

Здѣсь необходимо сдѣлать одно замѣчаніе, которое, можетъ быть, слѣдовало бы представить въ видѣ нѣкотораго независимаго постулата. Формулы преобразованія (6) и (6 bis) были установлены лишь для того, чтобы дать возможность перейти отъ какой-нибудь точки первой среды къ соотвѣтствующей ей точкѣ второй среды, при чемъ соотвѣтствіе опредѣляется соприкосновеніемъ. Явленіе соприкосновенія разсматривалось всегда, какъ симметрическое, такъ что, если $K$ касается $K'$ въ точкѣ $A$, то и $K'$ коснется $K$ въ точкѣ $A$. Благодаря этой то гипотезѣ симметричности и можно было разсматривать наши формулы (6) и (6 bis), какъ обратныя другъ относительно друга.

Но, очевидно, можно опредѣлить соприкосновеніе одной изъ средъ съ движущимся тѣломъ, не принадлежащимъ ни къ первой средѣ, ни ко второй. По отношенію къ соприкосновенію этого вида мы выставимъ условіе транзитивности, которое можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если движущееся дѣло $P$ касается $K$ въ $A$, а $A$ касается $K'$ въ $B$, то и $P$ касается $K'$ въ $B$.

Слѣдствіемъ этого постулата транзитивности является то, что формулы (6) и (6 bis) имѣютъ силу не только тогда, когда дѣло идетъ о переходѣ отъ точки $K$ къ соотвѣтствующей ей точкѣ $K'$, но и тогда, когда нужно произвести преобразованіе какого-нибудь явленія ($x, y, z, t$,), наблюдаемаго средою $K$, въ это же самое явленіе ($x'$, $y'$, $z'$, $t'$), какимъ оно представляется средѣ $K'$. Мы будемъ часто разсматривать указываемыя уравненія въ этомъ болѣе общемъ смыслѣ.

## § 5. **Постулаты не-поворотности** (non retournement) **въ пространствѣ и во времени.**

Слѣдуетъ придать болѣе точный видъ уравненіямъ (6) и (6 bis). Мы достигнемъ этого, подчинивъ ихъ ряду произвольныхъ условій или постулатовъ. Первое изъ этихъ условій—это постулатъ не-поворотности.

Возьмемъ снова тотъ случай, когда хронометризована лишь одна среда $K$; формулами преобразованія служатъ выраженія (1). Мы подчинимъ ихъ слѣдующему условію. Если трегранный уголъ, проведенный въ средѣ $K'$, разсматривается, какъ правый, наблюдателемъ $K'$, то онъ отлично можетъ разсматриваться, какъ лѣвый, наблюдателемъ $K$. Мы требуемъ, чтобы не было подобнаго поворота въ пространствѣ, но чтобы, наоборотъ, $K$, геометризуя $K'$, составилъ бы себѣ такое же самое представленіе о направленіяхъ вращенія, что и $K'$, оперируя надъ самимъ собою.

Станемъ дифференцировать (1) при постоянномъ $t$. Мы получимъ слѣдующіе результаты.

$$
\begin{aligned}
dx &= a_{11}\,dx' + a_{12}\,dy' + a_{13}\,dz' \\
dy &= a_{21}\,dx' + a_{22}\,dy' + a_{23}\,dz' \\
dz &= a_{31}\,dx' + a_{32}\,dy' + a_{33}\,dz'
\end{aligned}
$$

Условіе неповоротности заключается въ томъ, чтобы якобіанъ

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{\partial\,(x, y, z)}{\partial\,(x', y', z')}
$$

былъ положителенъ. То же самое слѣдуетъ сказать и объ обратномъ якобіанѣ $\frac{\partial\,(x', y', z')}{\partial\,(x, y, z)}$. Отсюда слѣдуетъ, что въ случаѣ неповоротности формулы (1) дѣйствительно разрѣшимы относительно $x'$, $y'$, $z'$, какъ это было допущено въ предыдущемъ §.

Слѣдуетъ замѣтить, что условіе неповоротности можетъ быть истиннымъ, когда $K$ геометризуетъ $K'$ и перестать быть истиннымъ, когда $K'$ геометризуетъ $K$, предварительно хронометризовавъ самъ себя. Это можно показать на весьма простомъ примѣрѣ, воспользовавшись слѣдующими уравненіями преобразованія:

$$
\left.\begin{aligned}
&x' = x + t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = 2x + t \\
&\text{откуда} \\
&x = t' - x',\ y = y',\ z = z',\ t = 2x' - t'
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (7).
$$

Мы примемъ условіе неповоротности въ пространствѣ съ двойной точки зрѣнія $K$ и $K'$. Оно резюмируется въ слѣдующихъ двухъ неравенствахъ, которыя касаются системъ (6) и (6 bis)

$$
\frac{\partial\,(\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3)}{\partial\,(x'\ y'\ z')} > 0 \text{ и } \frac{\partial\,(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)}{\partial\,(x, y, z)} > 0 \quad \ldots\ (8).
$$

Перейдемъ къ постулату неповоротности во времени. Замѣтимъ сызнова, что понятіе одновременности потеряло всякое абсолютное значеніе. Если два событія не совпадаютъ въ пространствѣ, то они могутъ быть одновременны, или нѣтъ, въ зависимости отъ среды, которая ихъ наблюдаетъ. Даже само направленіе неравенства между эпохами двухъ соприкосновеній $K$ и $K'$ не есть неизмѣнный элементъ. Оно можетъ измѣниться на обратное въ зависимости отъ того, разсматриваются ли эти соприкосновенія съ точки зрѣнія одного или другого изъ наблюдателей.

Это видно на формахъ преобразованія (6) и (6 bis). Мы видимъ здѣсь, что равенство $t_1 = t_2$ влечетъ за собою для среды $K'$ соотвѣтственное равенство $t'_1 = t'_2$ лишь въ томъ случаѣ, если соприкосновенія имѣли мѣсто вообще въ одной и той же точкѣ $K$, т. е. для равныхъ значеній $x$, $y$, $z$.

Предположимъ, что нѣкоторый наблюдатель, неподвижный въ $K'$, отмѣчаетъ время на своихъ собственныхъ часахъ и вмѣстѣ съ тѣмъ на часахъ $K$, передъ которыми онъ проносится, какъ это дѣлаетъ путешественникъ изъ окна вагона, когда онъ сравниваетъ свои часы съ часами встрѣчающихся на пути станцій. Мы допустимъ, что хронометризованія $K$ и $K'$ были произведены такимъ образомъ, что нѣтъ поворотности во времени. Иначе говоря, время, отмѣчаемое $K'$, должно измѣняться въ одномъ и томъ же направленіи, какова бы ни была среда, въ которой онъ его наблюдаетъ, $K$ или $K'$. Это условіе неповоротности двояко: оно должно быть удовлетворено какъ для $K$, проходящаго мимо $K'$, такъ и для $K'$, проходящаго мимо $K$.

Возьмемъ полные дифференціалы отъ формулъ (6) и (6 bis). Мы получимъ результаты вида

$$\left.\begin{array}{l}
dx = a_{11}\,dx' + a_{12}\,dy' + a_{13}\,dz' + a_{14}\,dt' \\
dy = a_{21}\,dx' + a_{22}\,dy' + a_{23}\,dz' + a_{24}\,dt' \\
dz = a_{31}\,dx' + a_{32}\,dy' + a_{33}\,dz' + a_{34}\,dt' \\
dt = a_{41}\,dx' + a_{42}\,dy' + a_{43}\,dz' + a_{44}\,dt'
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (9)$$

И аналогичнымъ образомъ

$$dx' = a'_{11}\,dx + a'_{12}dy + a'_{13}dz + a'_{14}dt \text{ и т. д. . . . . } (9')$$

Если $K'$ проходитъ передъ $K$, то $x'$, $y'$, $z'$ постоянны и $dx' = dy' = dz' = 0$. Согласно (9), промежутки времени, отмѣчаемые $K'$ на обоихъ часахъ, связаны между собою отношеніемъ

$$dt = a_{44}dt'.$$

Если же $K$ проходитъ передъ $K'$, то, согласно (9'),

$$dt' = a'_{44}\,dt.$$

Постулатъ неповоротности въ своемъ двоякомъ значеніи выражается слѣдовательно, неравенствами:

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial t'} = a_{44} > 0,\ \frac{\partial\psi_4}{\partial t} = a'_{44} > 0.\ \ .\ \ .\ \ ..\ \ .\ (10)$$

Слѣдовательно, неповоротность въ пространствѣ и времени выражается четырьмя неравенствами (8) и (10). Легко, однако, доказать, что одно изъ этихъ неравенствъ есть необходимое слѣдствіе остальныхъ и что въ дѣйствительности для выраженія двойного постулата мы имѣемъ лишь три условія:

$$\frac{\partial\ (\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \varphi_4)}{\partial\ (x'\ y'\ z'\ t')} > 0,\ \frac{\partial\ (\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3)}{\partial\ (x'\ y'\ z')} > 0,\ \frac{\partial\varphi_4}{\partial t'} > 0\,,$$

которыя можно написать симметрично

$$\frac{\partial\ (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4)}{\partial\ (x\ y\ z\ t)} > 0,\ \frac{\partial\ (\psi_1\ \psi_2\ \psi_3)}{\partial\ (x\ y\ z)} > 0,\ \frac{\partial\psi_4}{\partial t} > 0.$$

## § 6. Проблема инварiантности геометрiй обоихъ наблюдателей.

Прежде чѣмъ идти дальше, поставимъ себѣ задачей выбрать формулы преобразованія согласно съ принципами неповоротности такого рода, чтобы каждый наблюдатель видѣлъ другого такъ, какъ этотъ послѣдній видитъ самъ себя. Иначе говоря, выберемъ ихъ такими, чтобы геометрія обѣихъ геометризованныхъ средъ не зависѣла отъ ихъ движенія.

Если формулировать условіе, когда *K*, одинъ лишь геометризованный, наблюдаетъ *K'*, то отвѣтъ дается, какъ мы видѣли въ § 4, уравненіями преобразованія линейнаго типа

$$\left.\begin{array}{l} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_3 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

въ которыхъ коэффиціенты *a* зависятъ отъ перемѣнной *t*, причемъ первые изъ нихъ $a_{ij}$ образуютъ правую ортогональную систему. Дифференцируя эти формулы при постоянномъ *t* и беря для сокращенія

$$\left.\begin{array}{l} \delta x' = a_{11}\,dx + a_{12}\,dy + a_{13}\,dz \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \delta z' = a_{31}\,dx + a_{32}\,dy + a_{33}\,dz \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (11\,\text{bis})$$

мы находимъ, дѣйствительно, $dt=0$, $dx'=\delta x'$ и т. д., слѣдовательно,

$$dx'^2+dy'^2+dz'^2=\delta x'^2+\delta y'^2+\delta z'^2=dx^2+dy^2+dz^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Отсюда слѣдуетъ инваріантность измѣреній, благодаря которой *K* геометризуетъ *K'* такимъ же точно образомъ, какимъ *K'* геометризуетъ самъ себя.

Хронометризуемъ, въ свою очередь, *K'* для того, чтобы онъ могъ геометризовать *K*. Положимъ, напримѣръ, $t' = \psi(t, x, y, z)$. Будемъ дифференцировать равенства (11) при постоянномъ *t'*, т. е. при условіи $d\psi = 0$. Это даетъ слѣдующія уравненія между дифференціалами перемѣнныхъ *x*, *y*, *z*, *t*:

$$dt = p dx + q dy + r dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

При этой гипотезѣ количества $dx'$, $dy'$, $dz'$ принимаютъ видъ

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \delta x' + \alpha dt \\ dy' &= \delta y' + \beta dt \\ dz' &= \delta z' + \gamma dt \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Для рѣшенія нашей задачи мы должны, подставивши ихъ въ уравненіе (12), удовлетворить это уравненіе. Это влечетъ за собою отношеніе

$$dt^2\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + dt\ (2\alpha\delta x' + 2\beta\delta y' + 2\gamma\delta z') = 0,$$

которое распадается на два другихъ отношенія. Мы имѣемъ или $dt = 0$ или же

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\ dt = -2\ (\alpha\delta x' + \beta\delta y' + \gamma\delta z'),$$

причемъ эти значенія $dt$ должны, разумѣется, быть тожественны съ (13).

Возьмемъ сперва вторую гипотезу и внесемъ получающееся отсюда выраженіе $dt$ въ формулы (14). Напишемъ для сокращенія $\omega^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. Мы получимъ тогда

$$dx' = \left(1 - \frac{2\alpha^2}{\omega^2}\right) \delta x' - \frac{2\alpha\beta}{\omega^2}\delta y' - \frac{2\alpha\gamma}{\omega^2}\delta z',$$

$$dy' = -\frac{2\alpha\beta}{\omega^2}\ \delta x' + \left(1 - \frac{2\beta^2}{\omega^2}\right)\delta y' - \frac{2\beta\gamma}{\omega^2}\ \delta z',$$

$$dz' = -\frac{2\alpha\gamma}{\omega^2}\ \delta x' - \frac{2\beta\gamma}{\omega^2}\ \delta y' + \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\omega^2}\right)\delta z'.$$

Члены направо образуютъ лѣвую ортогональную подстановку, между тѣмъ какъ преобразованіе (11 bis) $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ въ $dx$, $dy$, $dz$ есть правая ортогональная подстановка. Такимъ образомъ, $dx'$, $dy'$, $dz'$ выражаются черезъ $dx$, $dy$, $dz$ съ помощью лѣваго ортогональнаго преобразованія, когда оперируютъ при постоянномъ $t'$. Слѣдовательно, разсмотрѣнная выше вторая гипотеза противорѣчитъ постулату неповоротности пространства и должна быть устранена. Такимъ образомъ, остается лишь первая гипотеза, въ силу которой $dt' = 0$ влечетъ за собою $dt = 0$.

Мы видимъ, что $t'$ зависитъ только отъ $t$. Слѣдовательно, одновременность двухъ событій, отдѣленныхъ другъ отъ друга въ пространствѣ, имѣетъ одинаковое значеніе для обоихъ наблюдателей. То же самое, впрочемъ, приходится сказать о предшествованіи во времени, какъ это доказываетъ условіе неповоротности во времени или $\frac{dt'}{dt} > 0$. Такимъ образомъ, $t'$ есть растущая функція $t$ и достаточно завести иначе ходъ часовъ въ $K'$, чтобы имѣть попросту $t' = t$.

Если имѣть въ виду это соглашеніе, то можно сказать, что единственное рѣшеніе проблемы, совмѣстимое съ постулатами неповоротности, заключается въ томъ, чтобы дополнить геометрическія уравненія (11) тожествомъ $t' = t$ относительно преобразованія времени.

Совокупность написанныхъ такимъ образомъ уравненій представляетъ съ обыкновенной точки зрѣнія *неравномѣрное движеніе $K$ по отношенію къ $K'$ или $K'$ по* отношенію къ $K$. Эта система уравненій, обезпечивающая инваріантность геометріи движущагося тѣла, наблюдаемаго извнѣ, обезпечиваетъ въ то же время инваріантность понятія о времени. Усвоивши ее, мы не выходимъ изъ сферы принятыхъ идей. Единая сущность—міръ Минковскаго—распадается на двѣ частныя сущности — время и пространство, которыя порознь инваріантны и которыя всѣ наблюдатели измѣряютъ одинаковымъ образомъ, каково бы ни было ихъ состояніе движенія.

Слѣдуетъ, однако, подчеркнуть, что инваріантность геометріи влечетъ за собой инваріантность времени лишь въ томъ случаѣ, если считать удовлетворенными постулаты неповоротности. Въ формулахъ (7), приведенныхъ въ предыдущемъ §, мы имѣемъ примѣръ инваріантности измѣреній, когда $K$ разсматриваетъ среду $K'$ или $K'$ среду $K$. Она не сопровождается инваріантностью времени, и это происходитъ оттого, что имѣется поворотность въ пространствѣ, когда $K'$ разсматриваетъ $K$.

Словомъ, если мы хотимъ построить такое соотвѣтствіе между $K$ и $K'$, которое согласно съ постулатами неповоротности, не приводя, однако, къ синхронизаціи обѣихъ средъ, то слѣдуетъ также отказаться отъ гипотезы инваріантной геометріи. Нетождественность времени есть причина того, что оба наши наблюдателя, измѣряя одно и то же тѣло, не припишутъ ему одной и той же формы и что въ частности каждый будетъ считать себя инымъ, чѣмъ онъ представляется другому.

## § 7. Постулатъ инваріантности равномѣрнаго прямолинейнаго движенія.

*Постулатъ этотъ означаетъ, что всякое* прямолинейное и равномѣрное для одной изъ нашихъ двухъ средъ движеніе остается прямолинейнымъ и равномѣрнымъ для другой среды.

Это условіе значительно ограничиваетъ неопредѣленность формулъ перехода (6) и (6 bis). Согласно вышеупомянутому постулату транзитивности прикосновенія, эти формулы даютъ общее преобразованіе координатъ движущейся точки и въ $K$ и въ $K'$. Отсюда путемъ дифференцированія мы непосредственно выводимъ преобразованіе скоростей $v_x$, $v_y$, $v_z$ или $v'_x$, $v'_y$, $v'_z$ относительно каждой среды. Дѣйствительно, такъ какъ мы имѣемъ $v_x = \frac{dx}{dt}, \quad . \quad . \quad . \; v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad . \quad . \quad .$ то мы получаемъ слѣдующіе результаты:

$$v'_x = \frac{a_{11}v_x + a_{12}v_y + a_{13}v_z + a_{14}}{a_{41}v_x + a_{42}v_y + a_{43}v_z + a_{44}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$v'_z = \frac{a_{31}v_x + a_{32}v_y + a_{33}v_z + a_{34}}{a_{41}v_x + a_{42}v_y + a_{43}v_z + a_{44}}.$$

Но условіе инваріантности равномѣрнаго движенія означаетъ, что если $v_x$, $v_y$, $v_z$ постоянны, то и $v'_x$, $v'_y$, $v'_z$ тоже постоянны. Поэтому коэффиціенты $a_{ij}$ вышеприведенныхъ формулъ суть постоянные; но

$$\left.\begin{aligned} dx' &= \lambda\ (a_{11}dx + a_{12}dy + a_{13}dz + a_{14}dt) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dt' &= \lambda\ (a_{41}dx + a_{42}dy + a_{43}dz + a_{44}dt) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ (15)$$

и такъ какъ дифференціалы первыхъ членовъ суть дифференціалы независимыхъ количествъ, то интегрирующій множитель $\lambda$ не можетъ быть функціей одновременно $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, не будучи постояннымъ.

Будемъ теперь интегрировать уравненія (15). Мы найдемъ для формулъ преобразованія линейную форму

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t + a_{15} \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t + a_{25} \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t + a_{35} \\ t' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t + a_{45} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (16)$$

или симметрически

$$\left.\begin{aligned} x &= a'_{11}x' + a'_{12}y' + a'_{13}z' + a'_{14}t' + a'_{15} \\ y &= a'_{21}x' + a'_{22}y' + a'_{23}z' + a'_{24}t' + a'_{25} \\ z &= a'_{31}x' + a'_{32}y' + a'_{33}z' + a'_{34}t' + a'_{35} \\ t &= a'_{41}x' + a'_{42}y' + a'_{43}z' + a'_{44}t' + a'_{45} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (16')$$

Эти преобразованія (16) и (16′) должны, разумѣется, удовлетворять гипотезамъ неповоротности въ пространствѣ и времени.

Мы желаемъ вывести нѣкоторыя слѣдствія изъ этихъ формулъ (16) и (16′), которыя являются формулами преобразованій міра и служатъ для перехода отъ точки зрѣнія $K$ на точку зрѣнія $K'$.

1) Всякому событію, происходящему въ одномъ изъ міровъ, соотвѣтствуетъ нѣкоторое событіе въ другомъ мірѣ. Если $K$ есть свидѣтель простого ряда или двойного ряда и т. д. событій, то $K'$ съ своей стороны наблюдаетъ ряды явленій, имѣющихъ то же число измѣреній.

Пусть $u$, $v$, $w$... будутъ перемѣнными параметрами. Нѣкоторый простой рядъ $x\,(u)$, $y\,(u)$, $z\,(u)$, $t\,(u)$ характеризуетъ извѣстное движеніе; двойной рядъ $x\,(u,\ v)$,... ...$t\,(u,\ v)$ эквивалентенъ движущейся кривой; тройной рядъ $x\,(u,\ v,\ w)$,... эквивалентенъ движущейся поверхности. Признакомъ инваріантности обладаютъ именно эти понятія движущихся кривыхъ, движущихся поверхностей, а не понятія неподвижныхъ кривыхъ и поверхностей, ибо свойство покоя по существу относительно.

Возьмемъ, напримѣръ, неподвижную прямую въ $K$. Мы имѣемъ для этой прямой

$$\begin{aligned} x &= lu + l' \\ y &= mu + m' \quad (u,\ t = \text{произвольныя}). \\ z &= nu + n'. \end{aligned}$$

Мы, значитъ, имѣемъ двойной рядъ съ параметрами $u$ и $t$, которому въ $K'$ соотвѣтствуетъ геометрическое мѣсто

$$\begin{aligned} x' &= \lambda u + \lambda' t' + \alpha \\ y' &= \mu u + \mu' t' + \beta \quad (u,\ t' = \text{произвольныя}). \\ z' &= \nu u + \nu' t' + \gamma \end{aligned}$$

Это геометрическое мѣсто представляетъ прямую, перемѣщающуюся параллельно самой себѣ съ постоянной скоростью.

2) Всякая точка $K'$ неподвижна въ $K'$. Слѣдовательно, согласно постулату инваріантности всякая точка $K'$ движется относительпо среды $K$ со скоростью, постоянной по величинѣ и направленію. Скорость эта, равная

$$v_x = \frac{a'_{14}}{a'_{44}},\ v_y = \frac{a'_{24}}{a'_{44}},\ v_z = \frac{a'_{34}}{a'_{44}},$$

не измѣняется отъ одной точки къ другой. Это значитъ, что каждая изъ средъ обладаетъ по отношенію къ другой средѣ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ переноснымъ движеніемъ.

3) Если нѣкоторое тѣло $C$, считаемое твердымъ средою $K$, обладаетъ по отношенію къ $K$ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ переноснымъ движеніемъ, то это тѣло будетъ казаться также твердымъ $K'$ и обладающимъ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ переноснымъ движеніемъ, которое можетъ, однако, отличаться отъ перваго движенія.

Разсмотримъ дѣйствительно двѣ точки $(x_1, y_1, z_1)$ и $(x_2, y_2, z_2)$, движущіяся въ $K$. Предположеніе, что соединяющая ихъ прямая перемѣщается, не вращаясь, эквивалентно равенствамъ

$$x_2 - x_1 = \text{const},\ y_2 - y_1 = \text{const},\ z_2 - z_1 = \text{const}.$$

Отсюда мы получаемъ путемъ дифференцированія

$$v_x{}^1 = v_x{}^2,\ v_y{}^1 = v_y{}^2,\ v_z{}^1 = v_z{}^2,$$

причемъ скорости $v^1$ и $v^2$ разсматриваются въ одно и то же время системы $K$. Если принять, кромѣ того, $v'$ неизмѣннымъ, когда это время измѣняется, то формулы преобразованія скоростей дадутъ немедленно

$$(v')^1 = \text{постоянная по отношенію къ } t'.$$

Затѣмъ

$$(v'_x)^1 = (v'_x)^2,\ (v'_y)^1 = (v'_y)^2,\ (v'_z)^1 = (v'_z)^2.$$

Эти отношенія доказываютъ, что $C$ обладаетъ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ переноснымъ движеніемъ относительно $K'$.

Если бы переносное движеніе перестало быть равномѣрнымъ по отношенію къ $K$, то $C$ не казалось бы болѣе твердымъ наблюдателю $K'$ по причинѣ различія временъ $t$ и $t'$.

4) Возьмемъ на мѣсто $C$ саму среду $K$. Въ $K$ $C$ находится въ покоѣ. Слѣдовательно, $K$, разсматриваемое $K'$, тоже твердо. Такимъ же точно образомъ $K'$ кажется твердымъ наблюдателю $K$. Но только вмѣстѣ съ точкой зрѣнія измѣнится и форма обѣихъ средъ. Характеръ измѣненія легко увидѣть, обратившись къ формуламъ (16) и (16').

Пусть $X'$, $У'$, $Z'$ будутъ составляющія нѣкотораго вектора $M'_1$ $M'_2$, принадлежащаго ко второй средѣ. $X$, $У$, $Z$—составляющія того же самаго вектора, какимъ онъ представляется $K$. Формулы преобразованія одного изъ векторовъ въ другой получаются, если сдѣлать въ (16) $t = \text{const}$ и отбросить постоянные члены въ родѣ $a_{14}t + a_{15}$ и т. д. Мы, слѣдовательно, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} X' &= a_{11}\,X + a_{12}\,Y + a_{13}\,Z \\ Y' &= a_{21}\,X + a_{22}\,Y + a_{23}\,Z \\ Z' &= a_{31}\,X + a_{32}\,Y + a_{33}\,Z \end{aligned}\right\} (\mathrm{T}) \quad . \; . \; . \quad (17).$$

Эти формулы представляютъ нѣкоторый тензоръ T [1]), съ помощью котораго $K$ деформируетъ $K'$, когда составляетъ геометрію его при посредствѣ своего понятія времени.

Аналогичнымъ образомъ, когда $K'$ наблюдаетъ $K$, онъ деформируетъ $K$ при посредствѣ нѣкотораго тензора T', представленнаго формулами:

---

[1]) Я употребляю здѣсь терминологію векторіальнаго исчисленія.

$$\left.\begin{aligned} X &= a'_{11}\, X' + a'_{12}\, Y' + a'_{13}\, Z' \\ Y &= a'_{21}\, X' + a'_{22}\, Y' + a'_{23}\, Z' \\ Z &= a'_{31}\, X' + a'_{32}\, Y' + a_{33}\, Z' \end{aligned}\right\} (\mathrm{T}') \;.\; (17').$$

Каждый изъ этихъ деформирующихъ тензоровъ опредѣляетъ нѣкоторое аффинное преобразованіе. Извѣстенъ геометрическій характеръ этого рода преобразованій, устанавливающихъ соотвѣтствіе • эллипсоида одной изъ средъ шару въ другой.

## § 8. Постулатъ симметріи и взаимности.

Этотъ послѣдній постулатъ, завершающій опредѣленіе отношеній (16) и (16′), состоитъ въ слѣдующемъ двойномъ свойствѣ:

a) если $q$ есть скорость, приписываемая $K'$ средѣ $K$, то $K$ приписываетъ также скорость $q$ средѣ $K'$;

b) оба деформирующихъ тензора $T$ и $T'$ тождественны, если ихъ разсматривать самихъ по себѣ, т. е. отвлекаясь отъ ихъ положенія. Кромѣ того, каждый изъ тензоровъ долженъ опредѣляться исключительно скоростью, которой обладаетъ движущаяся система по отношенію къ наблюдающей системѣ.

Благодаря этому постулату, устанавливается совершенная симметрія между проносящимися другъ мимо друга мірами, такъ что ни одинъ изъ признаковъ, принадлежащихъ одному міру, не отсутствуетъ у другого міра и не можетъ служить для того, чтобы ихъ отличить другъ отъ друга.

Чтобы получить формулы (16) и (16′), осуществляющія эту симметрію, начнемъ съ того, что устранимъ постоянные члены: $a_{15} \ldots a_{45}$, $a'_{15} \ldots a'_{45}$. Это—безразличная гипотеза, которую можно всегда принять, установивши въ обѣихъ средахъ соотвѣтствіе между начальными событіями $x$, $y$, $z$, $t = 0$ и $x'$, $y'$, $z'$, $t' = 0$. Напишемъ затѣмъ снова системы (16) и (16′) въ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} x = ax' + by' + cz' + dt \\ y = a'x' + b'y' + c'z' + d't \\ z = a''x' + b''y' + c''z' + d''t \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (18).$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t' \\ y' = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' t' \\ z' = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z + \delta'' t' \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (18').$$

Оріентируемъ въ $K$ систему осей такимъ образомъ, чтобы $OX$ стала параллельна скорости $K'$. Аналогичнымъ образомъ оріентируемъ въ $K'$ систему осей такимъ образомъ, чтобы $O'X'$ стала параллельна скорости $K$.

Тогда обѣ гипотезы

$x' = \text{const}$, $y' = \text{const}$, $z' = \text{const}$, $t =$ перемѣнной

и

$x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$, $t' =$ перемѣнной должны дать соотвѣтственно

$$\frac{dx}{dt} = q, \; \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

и

$$\frac{dx}{dt} = q, \; \frac{dy'}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Отсюда легко увидѣть, что формулы (18) и (18') имѣютъ въ дѣйствительности слѣдующій видъ:

$$\left.\begin{array}{ll} x - qt & = ax' + by' + cz', \\ y & = a'x' + b'y' + c'z', \\ z & = a''x' + b''y' + c''z', \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19).$$

$$\left.\begin{array}{ll} x' - qt' & = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ y' & = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ z' & = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z, \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (19').$$

Такъ какъ уравненій здѣсь лишнее число, то, разумѣется, необходимо, чтобы эти 6 уравненій были совмѣстны.

Условіе a), какъ мы видимъ, удовлетворено. Перейдемъ теперь къ условію b) и разсмотримъ тѣ два деформирующихъ тензора, съ помощью которыхъ среды $K$ и $K'$ деформируютъ одна другую. Это соотвѣтственно $T$ и $T'$ или

$$\left.\begin{aligned} x &= ax' + by' + cz' \\ y &= a'x' + b'y' + c'z' \\ z &= a''x' + b''y' + c''z' \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{T}) \;.\;.\;.\; (19'').$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\ y' &= \alpha' x + \beta' y + \gamma' z \\ z' &= \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{T}') \;.\;.\;.\; (19''').$$

Каждый изъ этихъ тензоровъ долженъ быть тензоромъ вращенія и, если отвлечься отъ положенія, то они должны быть тождественны.

Слѣдовательно, если векторъ $(x', y', z')$ вращается вокругъ $OX'$, то ассоціированный съ нимъ черезъ посредство $T$ векторъ долженъ повернуться на тотъ же уголъ и въ томъ же направленіи вокругъ $OX$. Пусть $OA'$ будетъ первый векторъ и $OA = T\ (OA')$—второй векторъ. Если взять $OA'$ на $OX'$, то при вращеніи онъ не измѣняется. Слѣдовательно, $OA$ находится также на $OX$. Иначе говоря, гипотеза: $y' = z' = 0$, сдѣланная въ таблицѣ $T$, должна повлечь за собою $y = z = 0$. Мы, значитъ, имѣемъ $a' = a'' = 0$. Разсуждая затѣмъ надъ $T'$, какъ надъ $T$, мы получимъ $\alpha' = \alpha'' = 0$. Такъ какъ затѣмъ обѣ послѣднія формулы обѣихъ таблицъ должны представлять рѣшенія другъ друга, то опредѣлитель $b'\, c'' — c'\, b''$ будетъ отличенъ отъ нуля.

Предположимъ теперь, что $OA'$, перпендикулярный къ $OX'$, вращается вокругъ этой оси. Соотвѣтствующій ему векторъ $OA$ описываетъ окружность вокругъ $OX$. Совокупность различныхъ окружностей, полученныхъ такимъ образомъ, измѣняя радіусъ $OA'$, составляетъ прямой конусъ съ вершиной $O$ и осью $OX$. Но этотъ конусъ представляетъ лишь преобразованіе съ помощью $T$ плоскости $Y'Z'$ и такъ какъ плоскость можетъ дать лишь плоскость, то разсматриваемый конусъ можетъ быть лишь плоскостью $YZ$. Такимъ образомъ, допущеніе $x'=0$ должно дать $x=0$. Отсюда мы получаемъ $b=c=0$. Кромѣ того, такъ какъ оба тензора деформируютъ одинаковымъ образомъ векторы, параллельные скоростямъ средъ, то мы должны имѣть $a=\alpha$.

Упростивъ наши уравненія (19) и (19'), считаясь со всѣми этими результатами, мы получимъ, пользуясь нѣсколько иными обозначеніями для нашихъ коэффиціентовъ,

$$\left.\begin{aligned} x - qt &= -ax' \\ y &= b'y' + c'z' \\ z &= b''y' + c''z' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (20).$$

$$\left.\begin{aligned} x' - qt' &= -ax \\ y' &= \beta'y + \gamma'z \\ z' &= \beta''y + \gamma''z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (20').$$

Изъ перваго и четвертаго уравненій мы получаемъ

$$\left.\begin{aligned} t - at' &= \frac{x(1-a^2)}{q} \\ t' - at &= x'\frac{(1-a^2)}{q} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (21).$$

откуда слѣдуетъ, что $a$ должно быть положительно, если принимать въ разсчетъ неповоротность во времени. Благодаря этому знаку, мы видимъ, что оси $OX$ и $O'X'$ соотвѣтствуютъ другъ другу. Но обоимъ наблюдателямъ онѣ кажутся противоположными. Что касается условія неповоротности въ пространствѣ, то оно требуетъ, чтобы опредѣлитель тензоровъ $T$ и $T'$ былъ положителенъ, т. е. чтобы $b'c'' - c'b'' < 0$.

Чтобы закончить опредѣленіе нашихъ преобразованій, возьмемъ снова тензоры $T$ и $T'$ и приложимъ ихъ къ векторамъ, принадлежащимъ соотвѣтственнымъ плоскостямъ $YZ$ и $Y'Z'$. Эти тензоры сводятся тогда къ слѣдующимъ тензорамъ

$$\left.\begin{aligned} y &= b'y' + c'z' \\ z &= b''y' + c''z' \end{aligned}\right\} (\mathfrak{B}) \qquad \left.\begin{aligned} y' &= \beta'y + \gamma'z \\ z' &= \beta''y + \gamma''z \end{aligned}\right\} (\mathfrak{B}')$$

съ отрицательными опредѣлителями, обратными другъ другу. Согласно постулату взаимности, эти самые тензоры, если отвлечься отъ положенія, должны быть тождественны, когда ихъ разсматриваютъ изъ точекъ $X$ и $X'$, находящихся въ безконечности на противоположныхъ осяхъ $OX$ и $OX'$. Кромѣ того, симметрія требуетъ, чтобы оба тензора $T$ и $T'$ были тензорами вращенія вокругъ этихъ осей. Это значитъ, что если одинъ изъ векторовъ вращается на нѣкоторый уголъ вокругъ 0, то соотвѣтствующій ему векторъ вращается на равный уголъ, но въ противоположную сторону вокругъ этой точки.

Отсюда слѣдуетъ сначала, что наши тензоры $T$ и $T'$ не измѣняютъ длинъ. Назовемъ черезъ $\rho$ длину $OA$. Это будетъ также длина $OA'$. Съ другой стороны, существуетъ всегда неизмѣнное направленіе, начиная съ котораго мы будемъ отсчитывать полярные углы $\omega$ для $\overline{OA}$, $\omega'$ для $\overline{OA'}$. Если взять неизмѣнное направленіе за ось $y$ и $y'$ въ каждой средѣ, то мы имѣемъ, какъ мы только что видѣли $\omega' = -\omega$. Въ такомъ случаѣ оба вектора выражаются слѣдующимъ образомъ:

$$y + zi = \rho e^{\omega i}, \quad y' + z'i = \rho e^{-\omega i}$$

и тензоры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ принимаютъ простой видъ

$$\left.\begin{aligned} y &= y' \\ z &= -z' \end{aligned}\right\} (\mathfrak{B}) \qquad \left.\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= -z \end{aligned}\right\} (\mathfrak{B}').$$

Отнынѣ системы осей вполнѣ опредѣлены. $OY'$ параллельно $OY$, $OZ'$ параллельно $OZ$, но противоположно.

Словомъ, если наши преобразованія (16) и (16′) должны удовлетворять постулатамъ неповоротности, равно какъ и постулату симметріи и взаимности, то можно всегда надлежащимъ оріентированіемъ системъ осей въ каждой средѣ привести эти преобразованія къ простому виду:

$$\left.\begin{array}{l} x - qt = -ax' \\ y = y' \\ z = -z' \\ t - at' = \dfrac{x\,(1-a^2)}{q} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21).$$

или же

$$\left.\begin{array}{l} x' - qt' = ax \\ y' = y \\ z' = -z \\ t' - at = \dfrac{(1-a^2)\,x'}{q} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21').$$

### § 9. Инваріантная скорость и постулатъ реальности.

Если бы въ приведенной системѣ (21) мы предположили постоянную $a$ равной единицѣ, то мы получили бы $t = t'$. Формулы дали бы намъ сызнова Галилееву группу съ инваріантностью времени и пространства. Этотъ неинтересный случай мы оставимъ въ сторонѣ и мы предположимъ $a \lessgtr \pm 1$.

Если мы разсмотримъ приведенныя формулы для деформирующихъ тензоровъ Т и Т′, то мы увидимъ, что каждый наблюдатель, разсматривая другого наблюдателя, нисколько не измѣняетъ поперечныхъ размѣровъ, перпендикулярныхъ направленію $q$ относительнаго движенія, между тѣмъ какъ всѣ длины, параллельныя этому направленію, удлиняются или укорачиваются въ отношеніи $1 : a$.

Когда $a < 1$, мы находимъ укороченіе. Это явленіе сокращенія Лорентца-Фиджеральда, согласно которому метръ длиннѣе для тѣхъ, кто сопровождаетъ его во время его движенія, чѣмъ для тѣхъ, кто наблюдаетъ его прохожденіе.

Возьмемъ аналогичнымъ образомъ уравненіе (21')

$t' - at = \frac{x'(1-a^2)}{q}$. Предположимъ $x'$ постояннымъ и $a < 1$.

Мы видимъ, что показанія часовъ наблюдателя $K'$ будутъ меньше, чѣмъ тѣ показанія, которыя онъ читаетъ на часахъ среды $K$. Движущіеся часы отстаютъ по сравненію съ покоящимися часами. Само собою разумѣется, что эти утвержденія пришлось бы замѣнить противоположными, если принять $a > 1$.

a) Одновременный инваріантъ двухъ событій. Приведенныя формулы (21) дозволяютъ получить основное свойство Лорентцова преобразованія. Мы выводимъ изъ нихъ дѣйствительно:

$$q^2 (t^2 - t'^2) = (x + ax')^2 - (x' + ax)^2 = (x^2 - x'^2)(1-a^2)$$

или

$$x^2 - \frac{q^2}{1-a^2} t^2 = x'^2 - \frac{q^2}{1-a^2} t'^2$$

или еще по причинѣ (21)

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{q^2}{1-a^2} t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{q^2}{1-a^2} . t'^2$$

Но общія формулы были сведены къ приведенной формѣ (21) благодаря измѣненіямъ оріентировки, и такъ какъ эти измѣненія оріентировки не оказываютъ никакого вліянія на суммы $x^2 + y^2 + z^2$ и $x'^2 + y'^2 + z'^2$, то мы видимъ, что если общія уравненія (16) сдѣланы однородными, благодаря удаленію коэффиціентовъ $a_{15} \ldots a_{45}$, и если они удовлетворяютъ нашимъ различнымъ постулатамъ, то эти уравненія оставляютъ инваріантной форму:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{q^2}{1-a^2}t^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

гдѣ $q$ есть относительная скорость обѣихъ средъ, $a$—параметръ сокращенія.

Само собою разумѣется, что если бы мы взяли общія неоднородныя формулы съ произвольными, неравными нулю параметрами $a_{15}$ . . . . $a_{45}$, то мы должны были бы разсматривать вмѣсто (22) нѣкоторый инваріантъ, относящійся къ двумъ событіямъ. Отмѣтивъ эти событія значками 1 и 2, мы увидимъ, что роль инваріанта играетъ количество:

$$R=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-\frac{q^2}{1-a^2}(t_1-t_2)^2. \quad (23).$$

Это количество остается неизмѣннымъ, какова бы ни была наблюдающая среда.

b) Инваріантная скорость. Ясно, что количества $dx, dy, dz, dt$ преобразуются въ $dx', dy', dz', dt'$ съ помощью однороднаго преобразованія, соотвѣтствующаго (16) при удаленіи коэффиціентовъ $a_{15}$ . . . $a_{45}$. Мы, значитъ, имѣемъ инваріантъ:

$$dx^2+dy^2+dz^2-\frac{q^2}{1-a^2}dt^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2-$$

$$-\frac{q}{1-a^2}dt'^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Назовемъ черезъ $v$ и $v'$ скорости движущейся точки, какими онѣ являются обоимъ наблюдателямъ. Мы имѣемъ

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \; v_y=\frac{dy}{dt}, \; v_z=\frac{dz}{dt}, \; v'_x=\frac{dx'}{dt'} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Такъ какъ $v^2=v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2$. . . , то предыдущее отношеніе можно написать въ видѣ:

$$\sqrt{\frac{q^2}{1-a^2}-v^2}\,dt=\sqrt{\frac{q^2}{1-a^2}-v'^2}\,dt' \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Отсюда слѣдуетъ, что если

$$v = \frac{q}{\sqrt{1-a^2}},$$

то также

$$v' = \frac{q}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Слѣдовательно, эта величина $\frac{q}{\sqrt{1-a^2}}$ инваріантна. Если движущаяся точка движется въ $K$ со скоростью $\frac{q}{\sqrt{1-a^2}}$, то она движется по отношенію къ $K'$ съ тою же самой скоростью, иначе оріентированной.

Инваріантная скорость единственная. Предположимъ дѣйствительно, что гипотеза $v = u$ влечетъ за собою $v' = u$, причемъ $u$ не равняется $\frac{q}{\sqrt{1-a^2}}$. Тождество (25) даетъ тогда $dt = \pm dt'$. Внося эту величину въ послѣднюю изъ приведенныхъ формулъ (21), мы получимъ:

$$v_x \frac{1-a^2}{q} = 1 \mp a\,, \; v_x = \frac{q}{1 \pm a}\,.$$

Это опредѣляетъ лишь частный случай движенія со скоростью $u$, а не движеніе съ произвольной оріентировкой.

c) Постулатъ реальности. Всѣ предыдущіе постулаты удовлетворены, каково бы ни было положительное значеніе, приписываемое параметру $a$. Въ зависимости отъ того, меньше ли 1 или больше ея этотъ параметръ, инваріантная скорость будетъ вещественной или мнимой. Мы примемъ въ качествѣ новой гипотезы, что въ дѣйствительности имѣетъ мѣсто первый случай или что $a < 1$. Слѣдствіемъ этого будетъ то, что если неподвижные наблюдатели наблюдаютъ со стороны движеніе какого-нибудь тѣла, то имъ будетъ казаться, что продольные размѣры этого тѣла испытываютъ Лорентцово сокращеніе.

Инваріантную вещественную скорость мы обозначимъ буквой $c$. Мы, значитъ, имѣемъ:

$$c^2 = \frac{q}{\sqrt{1-a^2}},\ c = \frac{q}{\sqrt{1-a^2}},\ a = \sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}\ .$$

## § 10. Обратная теорема.

Мы видѣли, что всякое преобразованіе типа (16), если предположить его совмѣстнымъ съ нашими различными постулатами и если сдѣлать его однороднымъ, освободивши его отъ постоянныхъ параметровъ $a_{15} \ldots a_{45}$, относится къ тѣмъ преобразованіямъ, которыя оставляютъ инваріантной форму

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2\,t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26),$$

причемъ постоянная $c$ выбрана соотвѣтственнымъ образомъ.

Я утверждаю, что и обратно всякое преобразованіе этой формы въ самое себя удовлетворяетъ постулату взаимности и симметричности, если оно удовлетворяетъ постулатамъ неповоротности въ пространствѣ и во времени.

Дѣйствительно, положимъ $ct = l$ и разсмотримъ многочленъ

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

который встрѣчается при изученіи неэвклидова движенія въ пространствѣ Лобачевскаго.

Пусть $OXYZ$ будетъ система прямоугольныхъ осей въ этомъ пространствѣ, $M$—точка, находящаяся на разстояніи $OM = r$ отъ начала и расположенная по прямой образующей углы $\alpha, \beta, \gamma$ съ осями. Мы знаемъ, что координатами точки $M$ являются четыре количества:

$$l = \mathrm{ch}r, x = \mathrm{sh}r \cos\alpha, y = \mathrm{sh}r \cos\beta, z = \mathrm{sh}r \cos\gamma,$$

которыя удовлетворяютъ условіямъ:

$$l > 0, l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Измѣнимъ систему осей. Мы получимъ аналогичныя координаты $l', x', y', z'$, дающія такимъ же точно образомъ

$$l' > 0, l'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 1.$$

Новыя координаты связаны съ прежними координатами, отношеніями, оставляющими неизмѣннымъ знакъ $l$ и въ то же время видъ полинома $l^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Напишемъ эти отношенія:

$$\left.\begin{aligned} x' &= b_{11} x + b_{12} y + b_{13} z + b_{14} l \\ y' &= b_{21} x + b_{22} y + b_{23} z + b_{24} l \\ z' &= b_{31} x + b_{32} y + b_{33} z + b_{34} l \\ l' &= b_{41} x + b_{42} y + b_{43} z + b_{44} l \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (28).$$

Условіе $\frac{l'}{l} > 0$, которое должно быть истиннымъ, каковы бы ни были $x, y, z$, въ частности при $x, y, z = 0$, показываетъ, что $b_{44}$ положительно. Съ точки зрѣнія относительности это соотвѣтствуетъ неповоротности во времени.

Съ другой стороны, условіе инваріантности многочлена (27) выражается отношеніями между коэффиціентами $b_{ij}$. Изъ этихъ отношеній можно получить рѣшеніе системы (28) въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} x &= b_{11} x' + b_{21} y' + b_{31} z' - b_{41} l' \\ y &= b_{12} x' + b_{22} y' + b_{32} z' - b_{42} l' \\ z &= b_{13} x' + b_{23} y' + b_{33} z' - b_{43} l' \\ l &= - b_{14} x' - b_{24} y' - b_{34} z' + b_{44} l' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (28').$$

Сравнимъ эту систему съ той, которая получилась бы при прямомъ рѣшеніи (28). Мы заключаемъ, что миноръ какого-нибудь элемента $b_{ij}$ опредѣлителя $D$ формулъ (28) равенъ количеству $\pm b_{ij}$ $D$, причемъ знакъ будетъ $\pm$ въ зависимости отъ того, фигурируетъ ли число 4 четное или нечетное число разъ въ парѣ значковъ $(ij)$. Но всякое неэвклидово перемѣщеніе содержится въ нѣкоторой группѣ перемѣщеній. Благодаря этому опредѣлитель $D$, который долженъ быть $\pm 1$ по причинѣ инваріантности (27), не можетъ быть отрицательнымъ. Слѣдовательно, миноръ отъ $b_{44}$ равенъ самому $b_{44}$. Онъ положителенъ. Это новое свойство соотвѣтствуетъ свойству неповоротности въ пространствѣ принципа относительности.

Можно обратно сказать, что всякое преобразованіе многочлена (27) въ него самого при опредѣлителѣ $D = +1$ удовлетворяетъ одному изъ постулатовъ неповоротности, если оно удовлетворяетъ другому постулату. Въ то же самое время оно тождественно неэвклидову перемѣщенію нѣкотораго твердаго тѣла въ пространствѣ Лобачевскаго.

Чтобы доказать, что подобное преобразованіе удовлетворяетъ постулату симметріи, достаточно замѣтить слѣдующее: если повернуть оси $O\,X\,Y\,Z$ и $O'\,X'\,Y'\,Z'$ вокругъ ихъ соотвѣтственныхъ центровъ, то съ помощью этого измѣненія оріентировки можно привести перемѣщеніе, о которомъ идетъ рѣчь, къ простому переносному движенію вдоль отрѣзка $\overline{OO'}$. Легко получить вытекающія отсюда приведенныя формулы.

Возьмемъ $OO'$ за ось $OX$, $O'O$ за ось $O'X'$. Пусть $OY$ и $O'Y$ будутъ оба перпендикулярны къ $OO'$ и будутъ расположены въ томъ же самомъ направленіи и томъ же самомъ азимутѣ. Пусть далѣе $OZ$ и $O'Z'$ будутъ перпендикулярны въ прямомъ направленіи къ соотвѣтственнымъ первымъ двумъ осямъ. Искомыя формулы, тождественныя формуламъ переноснаго движенія получаются немедленно. Мы получаемъ именно

$$\begin{aligned}
x &= -x'\operatorname{ch}r + l'\operatorname{sh}r \\
y &= y' \\
z &= -z' \\
l &= -x'\operatorname{sh}r + l'\operatorname{ch}r \\
x' &= -x'\operatorname{ch}r + l\operatorname{sh}r \\
y' &= y \\
z' &= -z \\
l' &= -x\operatorname{sh}r + l\operatorname{ch}r
\end{aligned}$$

За исключеніемъ разницы въ обозначеніяхъ эти формулы совпадаютъ съ таблицей (21) § 8. Слѣдовательно, деформирующіе тензоры имѣютъ, очевидно, искомыя свойства симметріи и взаимности, принадлежащія (20). Эта симметрія является, какъ мы видимъ, необходимымъ слѣдствіемъ инваріантности многочлена (27), комбинированной съ принципомъ неповоротности.

Преобразованіе (16) опредѣляется внутреннимъ образомъ съ помощью количествъ $q$ и $a$, соотвѣтственныхъ ему. Опредѣленіе этихъ количествъ на основѣ однѣхъ лишь формулъ (16) и (16') не представляетъ никакихъ трудностей. Дѣйствительно, $q$ есть скорость какой-нибудь точки одной изъ средъ по отношенію къ другой. Слѣдовательно, надо лишь дифференцировать (16) или (16'), оставивъ $x', y', z'$ или $x, y, z$ постоянными, чтобы найти:

$$q^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \ldots . = \frac{a^2{}_{14} + a^2{}_{24} + a^2{}_{34}}{a^2{}_{44}} = \frac{a'_{14}{}^2 + a'_{24}{}^2 + a'_{34}{}^2}{a'_{44}{}^2},$$

Съ другой стороны, $a$ есть сокращеніе, которое, какъ кажется, испытываетъ объемъ $V'$ среды $K'$, когда разсматриваютъ этотъ объемъ съ точки зрѣнія $K$. Пусть $V$ представляетъ сокращенный объемъ, а $\Delta$ — опредѣлитель деформирующаго тензора, соотвѣтствующаго (16). Мы имѣемъ

$$V' = \Delta V;$$

слѣдовательно,

$$a = \frac{1}{\Delta}.$$

## Заключительное замѣчаніе.

Найдя, что одно изъ лорентцовыхъ преобразованій является единственнымъ результатомъ различныхъ нашихъ постулатовъ, мы пришли къ концу своего изслѣдованія. Намъ остается сдѣлать еще одно послѣднее замѣчаніе.

Существованіе инваріантной скорости представляетъ фактъ огромнаго значенія для теоріи относительности. Именно этотъ фактъ позволяетъ выйти изъ области абстрактныхъ положеній, въ которой мы оставались въ этомъ очеркѣ. Мы знаемъ, дѣйствительно, что практически среда отсчета *K* хронометризуется методомъ оптическихъ сигналовъ. Кромѣ того, опытъ Майкельсона и Морлея доказалъ равенство различныхъ системъ отсчета, обладающихъ равномѣрнымъ переноснымъ движеніемъ по отношенію къ первой системѣ. Слѣдовательно, хронометризованіе второй среды должно быть такого рода, чтобы имѣлась инваріантная скорость, именно, скорость свѣта. И если принять линейную форму уравненій перехода, то отсюда неизбѣжно вытекаетъ взаимность и симметрія. Если признать, кромѣ того, какъ фактъ, что никакое тѣло не можетъ имѣть скорости, большей скорости свѣта, то вмѣстѣ съ этимъ приходится признать и постулатъ неповоротности во времени, который, комбинированный съ первымъ принципомъ, приводитъ къ постулату неповоротности въ пространствѣ. Здѣсь, само собой разумѣется, скорость свѣта есть нѣкоторая данная. Мы, значитъ, имѣемъ между скоростью движущейся среды и обнаруживаемымъ ею сокращеніемъ уравненіе:

$$a^2 = 1 - \frac{q^2}{c^2}.$$

Возьмемъ теперь нѣсколько движущихся средъ К′, К″,... изъ которыхъ каждая связана съ средою К однимъ изъ Лорентцовыхъ преобразованій. Всѣ эти преобразованія, оставляя инваріантной форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$, образуютъ непрерывную группу. Такимъ образомъ, относительность съ ея различными свойствами будетъ имѣть мѣсто не только тогда, когда переходятъ отъ К къ одной изъ этихъ движущихся средъ, но и тогда, когда переходятъ отъ одной изъ этихъ послѣднихъ къ любой другой. Самое ясное представленіе, какое можно себѣ составить о строеніи этой группы преобразованій, заключается въ томъ, чтобы истолковать ее въ смыслѣ ея эквивалентности неэвклидовымъ перемѣщеніямъ твердаго тѣла въ пространствѣ, какъ это сдѣлалъ Варичакъ въ нѣсколькихъ мемуарахъ ¹).

*Перевелъ П. Юшкевичъ.*

---

¹) См., напримѣръ, Jahresbericht d. Deutsch. Math. Ver. 1912, p. 103.

## В. Варичакъ.

# О неэвклидовомъ истолкованіи теоріи относительности [1].

Вѣроятно, многимъ приходило въ голову, что установленіе принципа относительности произвело въ физикѣ такое же дѣйствіе, какое произвело въ геометріи установленіе неэвклидовой геометріи, въ частности, геометріи Болiэ-Лобачевскаго. Весьма замѣчательно, что нѣкоторые авторы, излагая теорію относительности, упоминаютъ и о неэвклидовой геометріи, не приписывая ей, однако, никакого значенія для описанія процессовъ природы. Иные даже отказываютъ ей въ этомъ отношеніи во всякомъ значеніи, какъ напримѣръ, Льюисъ, который разсматриваетъ неэвклидовы геометріи, какъ простыя логическія комбинаціи, не имѣющія никакого физическаго значенія [2]. А Винъ, упомянувъ въ своемъ докладѣ „Über die Wandlung des Raum-und Zeitbegriffs in der Physik“ многочисленныя изслѣдованія объ основахъ геометріи, продолжаетъ слѣдующимъ образомъ: „Замѣчательно, что въ противоположность этимъ, полученнымъ

---

[1] Докладъ, прочитанный на годичномъ собраніи союза нѣмецкихъ математиковъ въ Карлсруэ.

[2] G. N. Lewis. A revision of the fundamental laws of matter and energy. Phil. Mag. XVI, 1908, 709.

чисто спекулятивнымъ путемъ, познаніямъ индуктивно изъ экспериментальной физики пробила себѣ медленно дорогу возможность новой концепціи пространства и времени. Но концепція эта не имѣетъ никакихъ непосредственныхъ точекъ соприкосновенія съ неэвклидовой геометріей“ [1]). Я упомяну еще Планка, по мнѣнію котораго релятивистическая концепція понятія времени „превосходитъ по своей смѣлости все, что было сдѣлано до сихъ поръ въ области умозрительнаго естествознанія и философской теоріи познанія; въ сравненіи съ этимъ неэвклидова геометрія, имѣвшая пока серьезное значеніе только для чистой математики, не больше, какъ дѣтская игрушка“ [2]).

Докладъ мой имѣетъ цѣлью показать, что геометрія Лобачевскаго является, повидимому, адэкватнымъ орудіемъ для изслѣдованія теоріи относительности. Аналогія между этими двумя областями пришла мнѣ въ голову еще до того, какъ кельнскій докладъ Минковскаго побудилъ меня тщательнѣе заняться работой Эйнштейна. Въ докладѣ о первомъ періодѣ въ развитіи неэвклидовой геометріи [3]) я упомянулъ также объ изслѣдованіяхъ о допустимой мѣрѣ кривизны пространства или о длинѣ абсолютнаго отрѣзка—единицы (Einheitstrecke) гиперболическаго пространства. Всѣ длины, съ которыми мы имѣемъ дѣло, ничтожно малы по сравненію съ этимъ отрѣзкомъ и поэтому въ области нашего эмпирическаго пространства формулы геометріи Лобачевскаго сводятся къ выраженіямъ обыкновенной эвклидовой

---

[1]) Отдѣльный оттискъ изъ Sitzungsberichten der Physikal med. Gesellschaft zu Würzburg. Jahrgang 1909.

[2]) Planck Acht. Vorlesungen über theoretische Physik, S. 117.

[3]) Появился въ Rad jugoslavenske akademiye 169, 110—194, 1907.

геометріи. Чтобы сдѣлать болѣе понятнымъ отношеніе между этими геометріями съ помощью аналогій изъ физики, я указалъ на отношеніе механики электроновъ къ Ньютоновой механикѣ. Законы первой, общей механики сводятся для малыхъ скоростей къ законамъ классической механики. Точно также формулы гиперболической геометріи приближаются ассимптотически къ формуламъ эвклидовой геометріи. Впослѣдствіи мнѣ бросились въ глаза нѣкоторыя другія, правда, чисто внѣшнія, сходства. Лорентцово сокращеніе, казалось мнѣ, является аналогіей деформаціи длинъ въ одной очень извѣстной интерпретаціи геометріи Лобачевскаго, гдѣ прямыя изображаются съ помощью полукруговъ и линейный элементъ берется въ формѣ $d\sigma = \frac{ds}{y}$. Вообще этотъ линейный элементъ нельзя передвигать, не деформируя его. Это натолкнуло меня на догадку, нельзя ли было бы истолковать Лорентцово сокращеніе, какъ слѣдствіе геометрической анизотропіи пространства? Въ теоріи относительности не имѣетъ силы параллелограммъ скоростей; въ геометріи Лобачевскаго не существуетъ вообще параллелограмма. Въ теоріи относительности, изгнавшей абсолютное изъ физики, существуетъ абсолютная скорость $c$; въ геометріи Лобачевскаго существуетъ абсолютная длина $R$, и т. д. Меня не удивило и то, что и въ исторіи развитія обѣихъ этихъ областей оказались аналогіи. Въ обоихъ случаяхъ борьба идетъ о значеніяхъ нѣкоторыхъ параметровъ, которымъ придаютъ по старымъ теоріямъ безконечную, а по новымъ—конечную величину. Въ исторіи развитія неэвклидовой геометріи не разъ устанавливали мнимыя противорѣчія; точно такъ же и въ теоріи относительности ошибочно находили противорѣчія.

Все это побудило меня преобразовать формулы Эйнштейна и истолковать ихъ неэвклидовымъ образомъ. Между тѣмъ въ это время появилась работа Зоммерфельда, въ которой было показано, что при сложеніи скоростей въ теоріи относительности имѣютъ силу формулы сферической тригонометріи съ мнимыми сторонами [1]). Но гиперболическая геометрія есть мнимое отображеніе сферической, какъ это уже знали Лобачевскій и Боліэ. Тутъ я укрѣпился въ томъ мнѣніи, что для гиперболической геометріи открывается въ теоріи относительности интересная область примѣненія. За моимъ первымъ сообщеніемъ по этому вопросу въ Physikalische Zeitschrift послѣдовали вскорѣ еще два другихъ [2]). Въ нихъ я далъ неэвклидово истолкованіе готовыхъ формулъ теоріи относительности. Въ дальнѣйшемъ я поступилъ обратнымъ путемъ [3]). Я положилъ въ основу своего анализа допущеніе, что явленія происходятъ въ пространствѣ Лобачевскаго, и получилъ путемъ весьма простыхъ логическихъ заключеній формулы теоріи относительности. Результатъ моего изслѣдованія можно формулировать слѣдующимъ образомъ: если положить въ основу неэвклидову терминологію, то не только существеннымъ образомъ упрощаются формулы теоріи относительности, но онѣ допускаютъ также геометрическое истолкованіе, совершенно аналогичное интерпретаціи классической теоріи въ эвклидовой геометріи. И эта аналогія простирается мѣстами такъ далеко, что можно оставить неизмѣнной и словесную формулировку теоремъ съ той лишь разницей, что надо замѣнить эвклидовы образы соотвѣтственными образами пространства Лобачевскаго съ параметромъ $c = 3{,}10^{10}$ снт.

---

[1]) A. Sommerfeld. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie. Physikalische Zeitschrift, **10**, 828, 1909.

[2]) Physikalische Zeitschrift **11**, 93, 287, 586, 1910.

[3]) Sitzungsberichte der k. serbischen Akademie zu Belgrad, **88**, 1911.

## § 1. Опредѣленіе и графическое изображеніе скоростей.

Скорость свѣта играетъ въ физикѣ роль безконечно большой скорости. Она не можетъ быть достигнута путемъ суммированія подъ-свѣтовыхъ скоростей, она не можетъ быть также измѣнена путемъ сложенія или вычитанія какой-нибудь подъ-свѣтовой скорости. Съ помощью соотвѣтственнаго опредѣленія скорости можно легко добиться того, что скорость свѣта будетъ изображаться безконечной величиной. Возьмемъ за единицу длины $c=3{,}10^{10}$ снт., т. е. путь, проходимый свѣтомъ въ одну секунду, и положимъ затѣмъ

$$\frac{v}{c}=\operatorname{th}\frac{U}{c}=\operatorname{th} u \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Соединимъ со скоростью $v$ отрѣзокъ $U$ числовой мѣры $u$, согласно отношенію,

$$u=\operatorname{th}^{-1}\frac{v}{c} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

По англійскому способу начертанія это обозначаетъ обратную функцію гиперболическаго тангенса. Мы изслѣдуемъ теперь, не находится ли наше допущеніе въ рѣзкомъ противорѣчіи съ обычнымъ нагляднымъ изображеніемъ скоростей. Въ качествѣ представителей скоростей равномѣрныхъ движеній въ классической механикѣ пользуются отрѣзками, пропорціональными соотвѣтственнымъ скоростямъ. Въ предѣлахъ нашего обычнаго опыта формула (2) приводитъ къ тому же самому результату. Лишь въ случаѣ скоростей, болѣе или менѣе сравнимыхъ со скоростью свѣта, обнаруживается замѣтное различіе, которое затѣмъ вскорѣ приводитъ къ безконечному искаженію.

Мы положили

$$\frac{U}{c} = u = \frac{v}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{c}\right)^5 + \dots \quad . \quad . \quad (3)$$

Возьмемъ теперь сперва $v = 1 \frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$. Тогда

$$u = \frac{1}{3 . 10^5} + \frac{1}{3^4 . 10^{15}} + \frac{1}{5 . 3^5 . 10^{25}} + \dots$$

Если мы отбросимъ направо всѣ члены послѣ перваго, то мы сдѣлаемъ ошибку, которая не окажетъ вліянія даже на десятый десятичный знакъ. Значитъ, и при нашемъ допущеніи мы имѣемъ для скорости въ $1 \frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$ представителемъ отрѣзокъ въ 1 километръ.

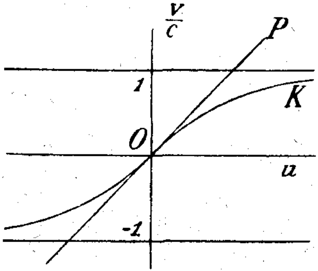
Возьмемъ теперь скорость въ $100 \frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$, являющуюся въ обыкновенннной механикѣ, разумѣется, чрезвычайно большой. Тогда

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{3 . 10^3} + \frac{1}{3 . 3^3 . 10^9} + \frac{1}{5 . 3^5 . 10^{15}} + \dots$$

и отрѣзокъ-представитель $U$ на 3 mm. больше 100 кил. Значитъ, практически разница совсѣмъ незамѣтна. Скорости въ $100.000 \frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$ соотвѣтствуетъ отрѣзокъ въ 103.990 кил. и это представляетъ уже замѣтную разницу. Разсмотримъ еще двѣ скорости β-лучей, которыя были вычислены въ знаменитомъ опытѣ Кауфманна, и которымъ соотвѣтствуютъ отношенія скорости 0,7202 и 0,9326. Онѣ равны, приблизительно, 216.060 и $279.780 \frac{\text{кил.}}{\text{сек.}}$. Ихъ представляютъ отрѣзки въ 272.400 и 503.400 килом.

Для $v = c$ мы имѣемъ $\text{th}\, u = 1$, значитъ, $U = \infty$.

Всѣ эти отношенія легко обозрѣть съ помощью графическаго изображенія. Если взять $u$ за абсциссу и $\frac{v}{c}$ за ординату, то (2) будетъ представлена кривой $K$. Обычному допущенію $u = \frac{v}{c}$ соотвѣтствуетъ прямая $P$, или первый членъ въ безконечномъ ряду (3). Эта прямая есть касательная въ точкѣ перегиба $O$ кривой $K$. Слѣдовательно, она сливается съ кривой на довольно большомъ разстояніи отъ начала координатъ.



Фиг. 1.

Было бы цѣлесообразно ввести особое наименованіе для отрѣзка $U$. Въ своей выше цитированной сербской работѣ я назвалъ его псевдо-скоростью. Проще всего было бы назвать $U$ и $u$ просто (физической) скоростью, а $v$—приведенной скоростью Пока онѣ малы, ихъ практически нельзя отличить другъ отъ друга. Псевдоскорость свѣта безконечно велика. Если исходить изъ нашего допущенія, то вполнѣ естественно, что скорость свѣта образуетъ верхнюю границу для скоростей [1]).

---

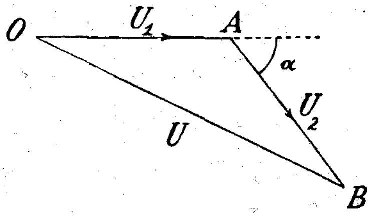
[1]) Norman Campbell въ On the common sense of relativity, Phil. Mag., 1911, I, 508 говоритъ: it is the fact that the second part of the Second Postulate proposes to represent the physically infinite velocity by a mathematically finite number which causes surprises... physical and mathematical infinity could be easily brought into agreement by a change ot definition This line of thought will be developed in a latter paper. Мнѣ неизвѣстно, выполнилъ ли Кэмпбелль свое намѣреніе. Но въ Physik. Zeitschrift, XIII, 1912, 128 въ концѣ своего возраженія Вихерту Кэмпбелль полагаетъ, что подобное опредѣленіе должно быть въ высшей степени сложнымъ.

## § 2. Эйнштейновъ законъ сложенія скоростей.

И въ теоріи относительности имѣетъ силу векторіальное сложеніе скоростей. Но составляющія слѣдуетъ изобразить графически такъ, какъ было только что сказано, и при вычисленіи равнодѣйствующей пользоваться тригонометріей Лобачевскаго.

Пусть $v_1$ и $v_2$—двѣ скорости, образующія между собою уголъ $\alpha$. Имъ соотвѣтствуютъ отрѣзки $U_1$, $U_2$ съ числовыми мѣрами $u_1$, $u_2$ согласно отношеніямъ:

$$\frac{v_1}{c} = \operatorname{th} u_1, \; \frac{v_2}{c} = \operatorname{th} u_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$



Фиг. 2.

Отложимъ отъ точки $O$ въ направленіи $v_1$ отрѣзокъ $OA = U_1$ и приложимъ подъ угломъ $\alpha$ отрѣзокъ $AB = U_2$. Равнодѣйствующей соотвѣтствуетъ отрѣзокъ $OB = U$. Въ треугольникѣ Лобачевскаго $OAB$ имѣетъ мѣсто отношеніе

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \cos \alpha. \quad \ldots \quad (5)$$

Если положимъ

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \ldots \quad (6)$$

то получимъ

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}{1 + \frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}$$

и послѣ нѣкоторыхъ преобразованій

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2+\left(\frac{v_2}{c}\right)^2-\left(\frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2}{\left(1+\frac{v_1v_2\cos\alpha}{c^2}\right)^2}+1=$$

$$=\frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2+\left(\frac{v_2}{c}\right)^2-\left(\frac{v_1v_2}{c^2}\right)^2.(1-\cos^2\alpha)+\frac{2\,v_1v_2\cos\alpha}{c^2}}{\left(1+\frac{v_1v_2\cos\alpha}{c^2}\right)^2}.$$

Отсюда получается въ заключеніе

$$v=\frac{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+2\,v_1v_2\cos\alpha-\left(\frac{v_1v_2\sin\alpha}{c}\right)^2}}{1+\frac{v_1v_2\cos\alpha}{c^2}}, \quad . \quad (7)$$

а это и есть Эйнштейновъ законъ сложенія скоростей.

Въ векторіальномъ неэвклидовомъ обозначеніи его можно написать въ видѣ

$$\mathfrak{u}=\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

слѣдовательно, такъ же, какъ въ классической теоріи, формула которой

$$\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1+\mathfrak{v}_2$$

правильна лишь въ первомъ приближеніи, такъ какъ лишь для малыхъ скоростей можно принять $\mathfrak{v}=\mathfrak{u}$. Если $v_1$ и $v_2$ малы по сравненію со скоростью свѣта, то послѣднимъ членомъ въ числителѣ и знаменателѣ выраженія (7) можно пренебречь и мы получимъ обыкновенную формулу:

$$v=\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+2v_1\ v_2\ cos\ \alpha} \ldots\ldots\ldots (9)$$

Если принять параметръ $c$ нашего пространства Лобачевскаго безконечно большимъ, то оно переходитъ въ эвклидово пространство, и формула (7) сводится въ точности къ формулѣ (9). Если скорости $v_1$ и $v_2$ образуютъ между собою уголъ $\alpha = 0$ и, слѣдовательно, совпадаютъ по направленію, то согласно (5)

$$u = u_1 + u_2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

Равнодѣйствующая приведенная скорость $v$ получается изъ формулы

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{th} u_1 + \operatorname{th} u_2}{1 + \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2},$$

или

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

Равнодѣйствующая въ ариѳметическомъ смыслѣ меньше, чѣмъ сумма составляющихъ, но она изображается—какъ и въ классической механикѣ—съ помощью отрѣзка, равнаго суммѣ отрѣзковъ, изображающихъ составляющія. Если сложить двѣ равныя скорости $U_1$ по одному направленію, то равнодѣйствующая будетъ изображаться отрѣзкомъ $2U_1$.

По поводу подстановки (1), натолкнувшей меня на мысль о неэвклидовомъ истолкованіи теоріи относительности, я замѣчу, что Минковскій разъ какъ то¹) положилъ

$$-i \operatorname{tg} i\psi = \frac{e^{\psi} - e^{-\psi}}{e^{\psi} + e^{-\psi}} = q, \quad \dots\dots \quad (12)$$

т. е. выразилъ отношеніе скорости въ видѣ гиперболическаго тангенса, но онъ не обратилъ больше вниманія на средній членъ этого отношенія. И Герглотцъ выразилъ убѣжденіе, что неэвклидова геометрія можетъ оказаться полезной при сложеніи скоростей ²). Недавно Роббъ опубли-

---

¹) H. Minkowski. Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, 1910, стр. 10, форм. 2.

²) G. Herglotz. Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als „starr“ zu bezeichnen den Körper. Ann. d. Phys. **31**, 404, 1910.

ковалъ интересную работу ¹), въ которой онъ своимъ собственнымъ путемъ пришелъ къ результатамъ, опубликованнымъ мной уже раньше. На стр. 9 онъ пишетъ именно: „Если $v$ есть абсолютная скорость частицы по отношенію къ системѣ, то обратный гиперболическій тангенсъ $v$ мы будемъ называть быстротой (rapidity). Такимъ образомъ, если $w$ есть быстрота, то

$$v = tanh\ w.$$

Вмѣстѣ съ ростомъ $w$ отъ 0 до $\infty$, $v$ растетъ отъ 0 до 1. Для небольшихъ значеній $w$ практически скорость равна быстротѣ, но позже мы увидимъ, что для большихъ значеній быстрота, а не скорость, слѣдуетъ закону сложенія. Затѣмъ на стр. 29: „Такимъ образомъ вмѣсто эвклидова треугольника скоростей мы получаемъ треугольникъ быстротъ Лобачевскаго. Однако, для небольшихъ быстротъ мы можемъ отождествить быстроту и скорость, и треугольникъ Лобачевскаго можно разсматривать, какъ эвклидовъ треугольникъ. Мы видимъ также, что быстроты по одной и той же прямой складываются“.

Различіе путей, какими пришли къ однимъ и тѣмъ же результатамъ, только поднимаетъ довѣріе къ нимъ.

### § 3. Сложеніе скоростей не коммутативно.

Въ геометріи Лобачевскаго нѣтъ вовсе параллелограммовъ. Слѣдовательно, равнодѣйствующую двухъ скоростей нельзя представить, какъ діагональ параллелограмма.

---

¹) Alfred A. Robb. Optical geometry of motion; a new view of the theory of relativity. Cambridge, 1911. Его предисловіе помѣчено 13 мая 1911 г. Мои изслѣдованія по этому вопросу появились въ Physik. Zeitschrift отъ 1 февраля и 1 апрѣля 1910 г. И моя упомянутая выше сербская работа была закончена къ концу 1910 г.

Слѣдствіемъ этого является то, что составляющія не могутъ помѣняться мѣстами. Возьмемъ ради простоты двѣ скорости, образующія между собой уголъ $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Изъ формулы (5) мы получаемъ

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

откуда легко вывести

$$\operatorname{th}^2 u = \operatorname{th}^2 u_1 + \operatorname{th}^2 u_2 - \operatorname{th}^2 u_1 \operatorname{th}^2 u_2$$

или

$$v = \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

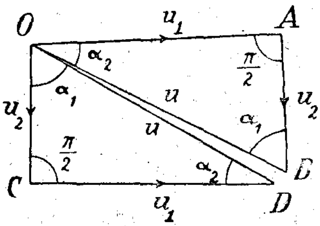
На фиг. 3 мы имѣемъ

$$OA = u_1, \quad AB = u_2, \quad OB = u.$$

Въ гиперболической геометріи сумма угловъ во всякомъ треугольникѣ меньше двухъ прямыхъ. Въ треугольникѣ $OAB$, слѣдовательно,

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2}.$$

Отложимъ отрѣзокъ $u_2$ въ направленіи $OC$ перпендикулярно къ $OA$ и проведемъ затѣмъ подъ прямымъ угломъ отрѣзокъ $u_1$,—тогда мы придемъ къ точкѣ $D$, отличной отъ $B$. Въ классической механикѣ эти точки совпадаютъ. Слѣдовательно, если сложить скорости въ обратномъ порядкѣ, то равнодѣйствующая будетъ имѣть ту же величину, но различное направленіе.



Фиг. 3.

Разницу направленій

$$\delta = \angle BOD = \frac{\pi}{2} - (\alpha_1 + \alpha_2) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

можно легко представить, какъ функцію составляющихъ.

Если внести въ формулу

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

полученныя изъ треугольника Лобачевскаго $OAB$ значенія

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\operatorname{th} u_1}{\operatorname{sh} u_2},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\operatorname{th} u_2}{\operatorname{sh} u_1},$$

то получится

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{\operatorname{th} u_1 \operatorname{sh} u_1 + \operatorname{th} u_2 \operatorname{sh} u_2}{\operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Вслѣдствіе (1) и (6) это переходитъ въ

$$\operatorname{cotg}\delta = \frac{v_1^2\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2} + v_2^2\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}{v_1 v_2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}\right)} \quad \ldots \quad (18)$$

Мы это выразимъ еще иначе. Разница направленій равнодѣйствующихъ равна недостатку треугольника $OAB$. Площадь треугольника Лобачевскаго равна его недостатку. По извѣстной формулѣ [1]) для недостатка можно положить

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{e^{u_1} - 1}{e^{u_1} + 1} \cdot \frac{e^{u_2} - 1}{e^{u_2} + 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \operatorname{th}\frac{u_1}{2} \cdot \operatorname{th}\frac{u_2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Было бы нетрудно ввести и здѣсь приведенныя скорости $v$, а также вычислить отклоненіе равнодѣйствующихъ въ общемъ случаѣ, когда составляющія образуютъ между собой произвольный уголъ.

Если складывать въ пространствѣ три взаимно перпендикулярныя скорости, то получаются шесть равнодѣйствующихъ съ различными направленіями.

---

[1]) H. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie, стр. 149.

Въ геометріи Лобачевскаго нѣтъ подобныхъ фигуръ. Съ другой стороны въ теоріи относительности нѣтъ кинематическаго подобія.

Если умножить всѣ составляющія на нѣкоторое число $k$, то по старой теоріи и равнодѣйствующая становится въ $k$ разъ больше, въ теоріи же относительности это не такъ. Слѣдовательно, въ теоріи относительности нужно было бы изображать силовыя плоскости по абсолютной величинѣ, какъ фигуры въ геометріи Лобачевскаго. Но такъ какъ отрѣзокъ = единица слишкомъ великъ, то въ обоихъ случаяхъ можно дать лишь искаженныя схематическія изображенія.

## § 4. Вейерштрассовы координаты.

За единицу длины мы возьмемъ 1 снт., т. е. $3{,}10^{10}$-ую часть абсолютнаго отрѣзка = единицы нашего пространства Лобачевскаго. Единицу времени мы опредѣлимъ такимъ образомъ, чтобы скорость свѣта равнялась единицѣ, т. е. чтобы въ покоящейся средѣ свѣтъ проходилъ единицу длины (1 снт.) въ единицу времени [1]. Мы обозначимъ новое время, получающееся изъ стараго времени путемъ умноженія на скорость свѣта $c$, измѣренную въ покоящейся средѣ, черезъ $l$. Часы, которые приходится разсматривать при нашемъ анализѣ, мы будемъ себѣ представлять не въ ихъ обычномъ видѣ, но будемъ разсматривать, какъ простую счетную машину, которая показываетъ, сколько разъ извѣстный процессъ, повторяющійся всегда при равныхъ обстоятельствахъ, произошелъ послѣ нѣкотораго опредѣленнаго событія, отмѣчающаго начало времени исчисленія [2]. Соотвѣтственно съ этимъ указаніе времени какихъ-нибудь опредѣленныхъ часовъ мы будемъ

---

[1] A. Brill. Vorlesungen zur Einführung in die Mechanik, 204

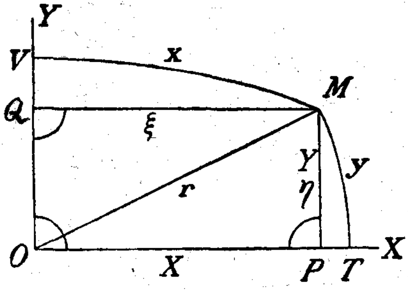
[2] v. Mangoldt. Längen-und Zeitmessung in der Relativitätslehre. Phys. Zeitschrift 11, 737, 1910.

всегда обозначать съ помощью одного единственнаго числа $l = ct$.

Какое-нибудь элементарное событіе опредѣляется системой значеній $x, y, z, l$. Я разсматриваю эти перемѣнныя $x, y, z, l$, какъ однородныя Вейерштрассовы координаты какой-нибудь точки въ трехмѣрномъ пространствѣ Лобачевскаго.

Разсмотримъ сперва болѣе простой случай, когда $z = 0$.

Черезъ точку $M$ (фиг. 4) мы проведемъ двѣ, перпендикулярныя къ осямъ координатъ, дуги предѣльныхъ круговъ $MT$ и $MV$. Длины этихъ дугъ и гиперболическій косинусъ луча $OM$ суть Вейерштрассовы координаты точки $M$. Если изъ точки $M$ мы опустимъ перпендикуляры $MP$ и $MQ$ на оси координатъ, то координаты Лобачевскаго точки $M$ будутъ



Фиг. 4.

$$X = OP, \quad Y = MP.$$

Вейерштрассовы координаты суть

$$x = \text{sh}\ MQ, \quad y = \text{sh}\ MP, \quad l = \text{ch}\ OM,$$

или

$$x = \text{sh}\ \xi, \quad y = \text{sh}\ \eta, \quad l = \text{ch}\ r \quad . \ . \ . \ . \ . \ (21)$$

Изъ четырехъугольника съ тремя прямыми углами OPMQ получаемъ

$$x = \text{sh}\ X\ \text{ch}\ U;$$

далѣе

$$y = \text{sh}\ Y,$$

$$l = \text{ch}\ X\ \text{ch}\ Y,$$

и, такимъ образомъ, Вейерштрассовы координаты выражены черезъ координаты Лобачевскаго.

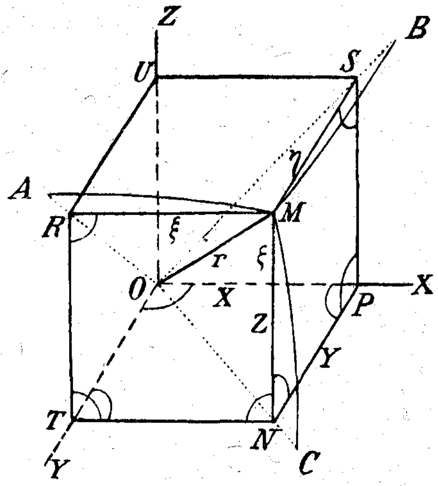
Въ общемъ случаѣ мы имѣемъ фиг. 5. Если $N$, $R$, $S$ суть основанія трехъ перпендикуляровъ $\xi$, $\eta$, $\zeta$, опущенныхъ изъ точки $M$ на координатныя плоскости, то

$$X = OP,\ Y = PN,\ Z = NM$$

суть координаты Лобачевскаго, а

$$\left.\begin{aligned} x &= \operatorname{sh}\ \xi = \operatorname{sh}\ X \operatorname{ch}\ Y \operatorname{ch}\ Z \\ y &= \operatorname{sh}\ \eta = \operatorname{sh}\ Y \operatorname{ch}\ Z, \\ z &= \operatorname{sh}\ \zeta = \operatorname{sh}\ Z, \\ l &= \operatorname{ch}\ r = \operatorname{ch}\ X \operatorname{ch}\ Y \operatorname{ch}\ Z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

суть Вейерштрассовы координаты точки $M$.



Фиг. 5.

Изъ четырехугольника $MNRT$ мы имѣемъ [1])

$$\operatorname{sh}\ \xi = \operatorname{sh}\ NT \operatorname{ch}\ Z,$$

а изъ четырехугольника $OPNT$ мы имѣемъ равенство

$$\operatorname{sh}\ NT = \operatorname{sh}\ X \operatorname{ch}\ Y.$$

Изъ этихъ двухъ отношеній мы получаемъ выраженіе для $x$. Изъ четырехугольника $MNPS$ можно легко найти значеніе $y$. Дуги предѣльныхъ круговъ $MA$, $MB$ и $MC$ представляютъ наши $x$, $y$ и $z$. Мы находимъ дальше

$$l^2 - x^2 = \operatorname{ch}^2\ Y \operatorname{ch}^2\ Z,$$

---

[1]) F. Engel. Nikolaj Jwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, 1898, s. 347.

слѣдовательно,

$$l^2 - x^2 - y^2 = \mathrm{ch}^2\, Z,$$

и, наконецъ,

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Это отношеніе существуетъ между Вейерштрассовыми координатами любой точки. Извѣстно, какую роль играетъ этотъ инваріантъ въ четырехмѣрной интерпретаціи Минковскаго теоріи относительности.

## § 5. Лорентцъ-Эйнштейново преобразованіе

Галилей-Ньютоново преобразованіе

$$x' = x - vt, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = t \quad . \; . \; . \; . \quad (25)$$

представляетъ переносное движеніе вдоль оси $X$ въ эвклидовомъ пространствѣ. Лоретцъ-Эйнштейново преобразованіе

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad . \; . \quad (26)$$

можно совершенно аналогичнымъ образомъ истолковать, какъ переносное движеніе вдоль оси $X$ въ пространствѣ Лобачевскаго.

Если мы будемъ оставаться въ плоскости, то мы можемъ сказать: Лорентцъ-Эйнштейново преобразованіе опредѣляетъ нѣкоторое движеніе вдоль линій равныхъ разстояній, имѣющихъ ось $X$ срединной линіи [1]).

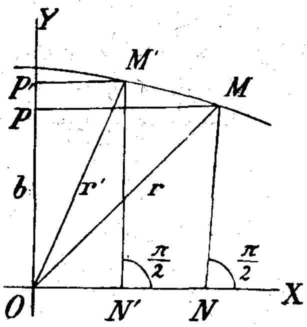
Линія равныхъ разстояній $Y = b$ есть геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на постоянномъ разстояніи $b$

---

[1]) О преобразованіяхъ плоскости Лобачевскаго см. мои работы по этому вопросу въ Rad jugoslavenske Akademije **165**, 50—80, 236—244, 1906 г. или краткое извлеченіе отсюда въ Jahre sber. d. Deutsch. Matematiker-Ver. **17**, 80—83, 1908. г.

отъ оси $X$. Длина дуги ея между двумя точками $M$ и $M'$ равна (фиг. 6)

$$s = (X - X') \operatorname{ch} b \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (27)$$



Фиг. 6.

Перемѣщеніе на отрѣзокъ $s$ вдоль этой линіи равныхъ разстояній въ отрицательную сторону дается равенствами:

$$X' = X - \frac{s}{\operatorname{ch} b}, \quad Y' = Y, \, . \, . \quad (28)$$

Для перехода отъ точки $M'$ къ $M''$ мы имѣемъ

$$X'' = X' - \frac{s'}{\operatorname{ch} b}, \quad Y'' = Y',$$

или

$$X'' = X - \frac{s + s'}{\operatorname{ch} b}, \quad Y'' = Y. \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (29)$$

Отсюда мы видимъ, что перемѣщенія вдоль линіи равныхъ разстояній имѣютъ свойство группы.

Пусть $u$ будетъ проэкція $NN'$ дуги $MM'$ на ось $X$. Тогда

$$X' = X - u, \quad Y' = Y \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (30)$$

слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} X' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{sh} u \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y \end{aligned}\right\} \, . \, . \, . \quad (31)$$

Умножая первое равенство на $\operatorname{ch} Y' = \operatorname{ch} Y$, мы получимъ

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sh} X' \operatorname{ch} Y' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \, sh \, u \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y \end{aligned}\right\} . \quad (32)$$

Далѣе, изъ фиг. 6 мы имѣемъ

$$\operatorname{ch} OM' = \operatorname{ch} X' \operatorname{ch} Y'$$

или

$$\operatorname{ch} r' = \operatorname{ch} (X' - u) \operatorname{ch} Y,$$

т. е.

$$\operatorname{ch} r' = \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \, . \, . \, . \quad (33)$$

До сихъ поръ мы примѣняли координаты Лобачевскаго. Если мы захотимъ перейти къ Вейерштрассовымъ координатамъ, то мы должны будемъ принять во вниманіе формулы преобразованія (22). Съ ихъ помощью можно уравненіямъ (32) и (33) придать видъ

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u \\ y' &= y \\ l' &= l \operatorname{ch} u - x \operatorname{sh} u \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

Если подставить сюда по формулѣ (6)

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

и $l = ct$, то мы тотчасъ же получаемъ Лорентцъ-Эйнштейново преобразованіе въ его обычномъ видѣ (26): Но мы всегда будемъ имъ пользоваться въ видѣ (34). Мы видимъ, такимъ образомъ, дѣйствительно, что преобразованіе пространства-времени, обусловленное равномѣрнымъ движеніемъ со скоростью $u$, можетъ быть вполнѣ охарактеризовано переноснымъ движеніемъ точки $M$, изображающей элементарное событіе. Обратное преобразованіе будетъ

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \operatorname{ch} u + l' \operatorname{sh} u \\ y &= y' \\ l &= x' \operatorname{sh} u + l' \operatorname{ch} u \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

Дифференціальная форма Лорентцъ-Эйнштейнова преобразованія есть

$$Uf = -l \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Инваріанты перваго вида суть

$$\omega(l, x) = l^2 - x^2 - y^2 \coth^2 b = 0 \quad . \quad . \quad (37)$$

такъ какъ $U(\omega) = 0$. Это—линіи равныхъ разстояній $Y = b$ [1]).

Инваріанты второго рода это нормали къ оси $X$

$$\omega(l, x) = \frac{l}{x} - \coth u = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

ибо

$$U(\omega) = -1 + \omega^2 = F(\omega).$$

Въ прямоугольныхъ координатахъ Лобачевскаго уравненіе этихъ нормалей будетъ $X = u$.

Въ пространствѣ мы получимъ линіи равныхъ разстояній, имѣющія ось $X$ срединной линіей, какъ линіи пересѣченія двухъ поверхностей равныхъ разстояній.

$$y - d_1 = 0, \; z - d_2 = 0.$$

Изъ срединныя плоскости суть плоскости координатъ $XY$ и $XZ$.

Лорентцъ-Эйнштейново преобразованіе (34) вмѣстѣ съ равенствомъ $z' = z$ можно истолковать, какъ переносное движеніи вдоль линіи пересѣченія этихъ двухъ поверхностей равныхъ разстояній. Траэкторія точки какого-нибудь твердаго тѣла при переносномъ движеніи вдоль оси $X$ есть линія равныхъ разстояній по отношенію къ оси $X$. Поперечные размѣры тѣла не измѣняются при этомъ перемѣщеніи.

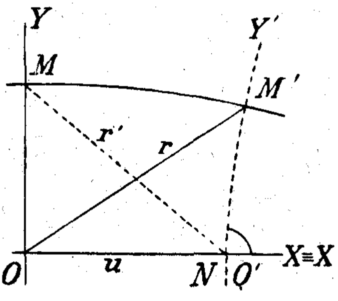
Если мы возьмемъ параметръ $c = \infty$, то пространство Лобачевскаго переходитъ въ Эвклидово пространство, дуги предѣльныхъ круговъ $x$, $y$, $z$ становятся прямолинейными отрѣзками, Вейерштрассовы координаты превращаются въ обыкновенныя Декартовы координаты, вышеуказанныя линіи равныхъ разстояній становятся прямыми, параллельными къ оси $X$. Преобразованіе (34) или (26) переходитъ въ преобразованіе (25).

---

[1]) H. Liebmann. Nichteuclidische Geometrie, 172.

## § 6. Преобразованіе параметра времени.

Изъ двухъ наблюдателей, движущихся съ равномѣрными, но разными, скоростями по параллельнымъ траэкторіямъ, каждый съ одинаковымъ правомъ можетъ утверждать, что онъ находится въ покоѣ относительно другого наблюдателя. На языкѣ геометріи это значитъ, что мы можемъ каждую точку плоскости преобразовать на покой, отнеся ее къ нѣкоторой новой системѣ координатъ. Опустимъ изъ соотвѣтственной точки перпендикуляръ на ось $X$ и возьмемъ этотъ перпендикуляръ за новую ось ординатъ. Если мы возьмемъ, напримѣръ, перпендикуляръ, проходящій черезъ $M$, то $X$, $Y$ есть система координатъ $S$, въ которой наблюдатель $M$ воображаетъ себя въ покоѣ. Если же перенести начало координатъ въ $O'$, т. е. если взять $XY'$ за фундаментальную систему $S'$, то благодаря этому $M'$ и всѣ точки новой оси ординатъ преобразуются на покой. Но благодаря этому преобразованію измѣняется и параметръ времени.



Фиг. 7.

Единица времени наблюдателя въ какой-нибудь опредѣленной точкѣ должна быть представлена гиперболическимъ косинусомъ абсциссы Лобачевскаго этой точки. Единица времени наблюдателя въ $O$ или въ $M$ въ системѣ безъ значковъ равна „1“, между тѣмъ какъ единица времени наблюдателя въ $O'$ ($M'$) равна $\operatorname{ch} u$, если положить $OO' = u$. Наблюдателю, покоящемуся въ $O$, кажется, что движущіеся со скоростью $u$ часы отстаютъ отъ его собственныхъ часовъ въ отношеніи $\operatorname{ch} u : 1$. При опредѣленіи продолжительности какого-нибудь событія съ помощью движущихся часовъ покоящійся наблюдатель найдетъ меньшее число. Слѣдовательно, имѣетъ мѣсто отношеніе

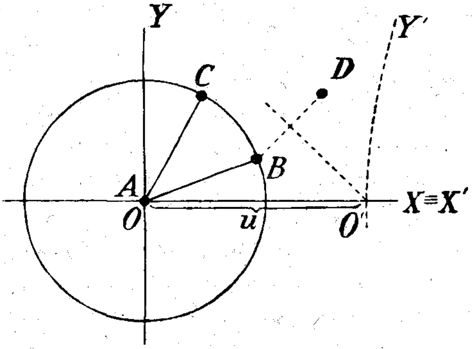
$$l' = \frac{l}{\operatorname{ch} u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

или

$$t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\,.$$

Но въ системѣ съ значками единица времени наблюдателя въ $O'$ равняется „1“, между тѣмъ какъ единица наблюдателя въ $O$ становится равной $\operatorname{ch} u$. Обѣ системы вполнѣ равноправны. Слѣдовательно, нельзя говорить вовсе о продолжительности времени самомъ по себѣ. Поэтому непозволительно высказываться объ одновременности двухъ событій въ абсолютномъ смыслѣ.

Разсмотримъ сперва одинъ примѣръ [1]). Изъ матеріальной точки $A$, находящейся въ нѣкоторой правомѣрной системѣ отсчета $S$ въ началѣ координатъ, выходитъ въ моментъ $l = 1$ короткій свѣтовой сигналъ во всѣ стороны. Ко времени $l > 1$ получившія сигналъ точки находятся на шаровой поверхности, у которой мы разсмотримъ лишь окружность ея пересѣченія съ плоскостью $XY$. Возьмемъ на этой окружности двѣ другія покоящіяся въ $S$ матеріальныя точки $B$ и $C$. Очевидно, что эти



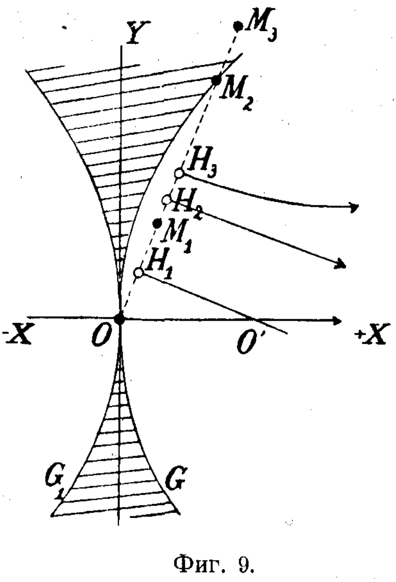
Фиг. 8.

---

[1]) M. Laue. Das Relativitätsprincip, 1911, 35. M. Planck. Acht Vorlesungen über theoretische Physik, 1910, 118.

точки получаютъ сигналъ одновременно, т. е. для одного и того же значенія $l$. Точка $D$ получаетъ сигналъ нѣсколько позже. Но проведемъ черезъ точки $B$ и $D$ окружность изъ центра $O'$, лежащаго на оси абсциссъ. Тогда $X'Y'$ представляютъ систему, въ которой точки $B$ и $D$ получаютъ свѣтовой сигналъ одновременно. Эта система $S'$ движется относительно $S$ со скоростью $u = OO'$. Точно также мы могли бы опредѣлить систему отсчета, въ которой были бы одновременны точки $A$ и $B$.

Но если точка $B$ лежитъ на предѣльномъ кругѣ, имѣющемъ осью ось $X$ и касающемся оси ординатъ въ точкѣ $A$, то перпендикуляръ, возставленный въ серединѣ отрѣзка $AB$ къ этому отрѣзку, будетъ параллеленъ оси $X$. Въ этомъ случаѣ не существуетъ такой системы отсчета, въ которой точки $A$ и $B$ были бы одновременны.



Фиг. 9.

Проведемъ черезъ $O$ два предѣльныхъ круга $G$ и $G_1$, имѣющіе осями положительную и отрицательную стороны оси абсциссъ. Каждую точку внутри этихъ двухъ предѣльныхъ круговъ можно разсматривать съ помощью соотвѣтственной системы отсчета, какъ одновременную съ $O$. Такова, напримѣръ, точка $M_1$. Если $H_1$ есть середина отрѣзка $OM_1$, то перпендикуляръ къ этому отрѣзку, возставленный въ $H_1$, пересѣчетъ ось $X$ на конечномъ разстояніи. Если точка $M_2$ лежитъ на $G$, то перпендикуляръ, возставленный въ $H_2$, будетъ параллеленъ оси $X$. Если примѣнимъ это же самое разсужденіе къ точкѣ $M_3$, лежащей между этими двумя предѣльными кругами, то перпендикуляръ, возставленный въ $H_3$, будетъ отклоняться отъ оси $X$, такъ какъ $OH_3 > OH_2$. Точки на предѣльныхъ окружностяхъ $G$ и $G_1$ и въ заштрихованной промежуточной области не могутъ быть одновременны съ $O$ ни въ какой системѣ отсчета.

Въ пространствѣ мы имѣли бы аналогичнымъ образомъ двѣ предѣльныя шаровыя поверхности, получающіяся путемъ вращенія этихъ предѣльныхъ окружностей вокругъ оси $X$.

Согласно теоріи относительности оптическихъ явленій въ движущихся тѣлахъ скорость свѣта въ пустотѣ въ системѣ со значками такъ же велика, какъ и въ системѣ безъ значковъ. Кромѣ того, свѣтъ распространяется во всѣхъ правомѣрныхъ системахъ отсчета изотропно по всѣмъ направленіямъ. Для движущагося наблюдателя, какъ и для покоящагося, безконечно тонкая свѣтовая волна, возникающая изъ мгновеннаго сигнала, распространяется въ видѣ сферической волны. Уравненіе шара или круга преобразуется вѣдь благодаря (34) въ точно такое же уравненіе. Въ вейерштрассовыхъ координатахъ уравненіе круга можно написать въ видѣ

$$l = \mathrm{ch} r$$

или [1])

$$x^2 + y^2 = l^2 \mathrm{th}^2 r,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

если положить $\rho = \mathrm{sh} r$. Въ точкѣ $M(x, y)$ мы проведемъ касательную къ этой окружности, а изъ центра $O$ проведемъ дугу предѣльнаго круга, перпендикулярную къ

---

[1]) H. Liebmann. Nichteuklidische Geometrie, 1905, 172.

этой касательной. Тогда $\rho$ есть длина дуги этого предѣльнаго круга. Если мы напишемъ (40) въ видѣ

$$x^2 + y^2 = l^2 - 1,$$

то въ виду (34) оно переходитъ въ

$$x'^2 + y'^2 = l'^2 - 1.$$

Здѣсь я напомню еще слова Минковскаго: „Для математика, привыкшаго оперировать многомѣрными многообразiями, а съ другой стороны привыкшаго къ понятiямъ такъ называемой неэвклидовой геометрiи, не составляетъ особенныхъ трудностей приспособить понятiе времени къ Лорентцовымъ преобразованiямъ“ [1]. Въ связи съ тѣмъ, что говоритъ Ф. Клейнъ въ своемъ докладѣ: „Геометрическiя основанiя Лорентцовой группы“ о Минковскомъ, цитированныя сейчасъ слова прiобрѣтаютъ болѣе глубокое значенiе; было бы очень важно знать, не осталось ли въ бумагахъ Минковскаго что-нибудь изъ „его размышленiй по этому вопросу“? [2].

## § 7. Приложенiе уравненiй преобразованiя къ нѣкоторымъ проблемамъ оптики.

Пусть свѣтовой векторъ нѣкоторой распространяющейся въ пустотѣ плоской свѣтовой волны, отнесенный къ системѣ $S$, будетъ пропорцiоналенъ [3])

$$F = \sin \nu \left(t - \frac{x \cos \varphi + y \cos \psi}{c}\right);$$

мы это напишемъ въ видѣ:

$$\mathrm{F} = \sin \nu \left(\frac{l - x \cos \varphi - y \cos \psi}{c}\right). \quad \ldots \quad (41)$$

---

[1] H. Minkowski. Zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik, 1910, 19.

[2] lahresbericht Jder Deut. Math.-Verein., XIX, 1910, 299.

[3] A. Einstein. Ueber des Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik, 4, 1907, 424.

Благодаря преобразованію (35) это переходитъ въ

$$F' = \sin\nu\left(\frac{x'\,\mathrm{sh}u + l'\,\mathrm{ch}u - (x'\mathrm{ch}u + l'\,\mathrm{sh}u)\cos\varphi - y'\cos\psi}{c}\right) =$$

$$= \sin\nu\left(\frac{l'\,(\mathrm{ch}u - \cos\varphi\,\mathrm{sh}u) - x'\,(\mathrm{ch}u\cos\varphi - \mathrm{sh}u) - y'\cos\psi}{c}\right)$$

или

$$F' = \sin\nu\,(\mathrm{ch}u - \cos\varphi\,\mathrm{sh}u)\left(\frac{l' - x'\cos\varphi' - y'\cos\psi'}{c}\right). \quad (42)$$

Мы видимъ, что $F$ и $F'$ можно представить въ одномъ и томъ же видѣ, только слѣдуетъ положить:

$$\nu' = \nu\,(\mathrm{ch}u - \cos\varphi\,\mathrm{sh}u), \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

$$\cos\varphi' = \frac{\mathrm{ch}u\cos\varphi - \mathrm{sh}u}{\mathrm{ch}u - \cos\varphi\,\mathrm{sh}u} = \frac{\cos\varphi - \mathrm{th}u}{1 - \cos\varphi\,\mathrm{th}u}\,. \; . \quad (44)$$

$$\cos\psi' = \frac{\cos\psi}{\mathrm{ch}u - \cos\varphi\,\mathrm{sh}u}\,. \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

Если обратить вниманіе на формулы (1) и (6), то мы тотчасъ же получаемъ Эйнштейновы формулы:

$$\nu' = \nu.\,\frac{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$\cos\psi' = \frac{\cos\psi\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1 - \frac{v}{c}\cos\varphi}. \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Чтобы истолковать геометрически эти отношенія, мы вернемся къ формуламъ (43)—(45), которымъ мы придадимъ такой видъ, что въ нихъ будутъ входить лишь отрѣзки. Большимъ преимуществомъ геометріи Лобачевскаго является то, что въ ней можно выражать длины и углы съ помощью величинъ одного и того же вида: можно именно или ввести во всѣ равенства вмѣсто всякой длины $a$ соотвѣтственный уголъ параллелизма $\alpha = \Pi\,(a)$ или же, наоборотъ, вмѣсто всякаго угла $\alpha$ перпендикуляръ $a$, уголъ параллелизма котораго равняется $\alpha$ [1]).

## § 8. Принципъ Допплера.

Изъ уравненія (43) мы узнаемъ, какую частоту (Frequenz) найдетъ нѣкоторый наблюдатель, движущійся вдоль оси $X$ со скоростью $u$. Свѣтовой лучъ образуетъ съ осью $X$ (если измѣрять въ системѣ $S$) уголъ $\varphi$. Если разсматривать этотъ уголъ, какъ уголъ параллелизма, то ему соотвѣтствуетъ отрѣзокъ $u_1$ и, значитъ, имѣется отношеніе:

$$\cos\varphi = \mathrm{th}\,u_1 \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

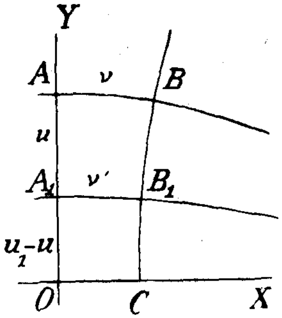
и (43) переходитъ въ

$$\nu' = \nu\,(\mathrm{ch}\,u - \mathrm{th}\,u_1\,\mathrm{sh}\,u), \quad . \quad (50)$$

откуда мы легко получаемъ

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\mathrm{ch}\,(u_1 - u)}{\mathrm{ch}\,u} \quad . \quad . \quad (51)$$

Возьмемъ двѣ линіи равныхъ разстояній (фиг. 10), для которыхъ ось $X$ служитъ общей срединной линіей и параметры которыхъ $OA = u_1$, $OA_1 = u_1 - u$.



Фиг. 10.

Дуги этихъ двухъ линій равныхъ разстояній, заключающіяся между осью $Y$ и перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ точки $C$ къ оси $X$, равны:

$$AB = OC\,\mathrm{ch}\,u_1\,, \quad A_1B_1 = OC\,\mathrm{ch}\,(u_1 - u).$$

---

[1]) Подробнѣе объ этомъ см. у F. Engel. Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen, 1898, 244.

Слѣдовательно,

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{A_1B_1}{AB} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (52)$$

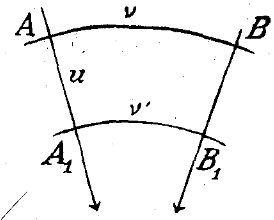
Отношеніе частотъ $\nu'$ и $\nu$ можно представить въ общемъ случаѣ, какъ отношеніе дугъ двухъ линій равныхъ разстояній между общими перпендикулярами.

Положимъ теперь, что свѣтъ приходитъ въ направленіи оси X. Углу параллелизма $\varphi = 0$ соотвѣтствуетъ длина $u_1 = \infty$, гиперболическій тангенсъ которой равенъ единицѣ. Изъ (43) мы получаемъ въ этомъ случаѣ

$$\nu' = \nu \; (\mathrm{ch}\; u - \mathrm{sh}\; u)$$

или

$$\nu' = \nu . \; e^{-u} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (53)$$



Фиг. 11.

При $u_1 = \infty$ вышеуказанныя линіи равныхъ разстояній переходятъ въ предѣльные круги съ общими осями. Формулѣ (53) соотвѣтствуетъ, слѣдовательно, фиг. 11. Отношеніе частотъ можно въ этомъ частномъ случаѣ представить черезъ отношеніе двухъ дугъ предѣльныхъ круговъ между двумя общими осями.

Изъ формулы (1) слѣдуетъ

$$e^{-u} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{1 + \frac{v}{c}}$$

и такимъ образомъ получается эйнштейново выраженіе.

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{v}{c}}}{1 + \frac{v}{c}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (54)$$

Изъ (53) слѣдуетъ далѣе:

$$\nu' = \nu\left(1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \ldots\right).$$

Для небольшихъ значеній $u$ можно пренебречь высшими степенями; если затѣмъ замѣнить скорость $u$ приведенной скоростью $\frac{v}{c}$, то получится выраженіе для Допплерова принципа въ обыкновенной механикѣ:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (55)$$

Слѣдуетъ обратить вниманіе, что въ системѣ со значками $v' = -v$.

Въ эвклидовой геометріи линіи равныхъ разстояній и предѣльные круги превращаются въ прямыя, параллельныя даннымъ прямымъ. Формулу (55) легко представить графически съ помощью отрѣзковъ параллельныхъ сѣкущихъ между сторонами угла, такъ какъ имѣется отношеніе:

$$\nu : \nu' = c : (c - v).$$

## § 9. Аберрація.

Въ системѣ со значками $S'$ взятый нами лучъ свѣта образуетъ уголъ $\varphi'$ съ осью $X'$. Если обозначить черезъ $u'_1$ отрѣзокъ, соотвѣтствующій углу параллелизма $\varphi'$, то (47) переходитъ въ равенство:

$$\operatorname{th} u'_1 = \frac{\operatorname{ch}u \ \operatorname{th}u_1 - \operatorname{sh}u}{\operatorname{ch}u - \operatorname{th}u_1 \ \operatorname{sh}u} = \operatorname{th}(u_1 - u)$$

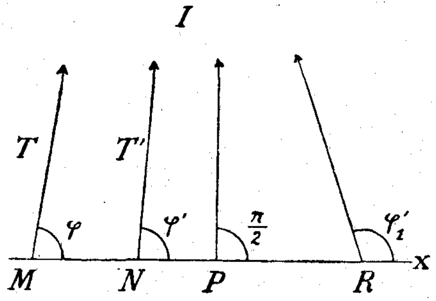
или

$$u'_1 = u_1 - u \ldots\ldots\ldots\ldots (56)$$

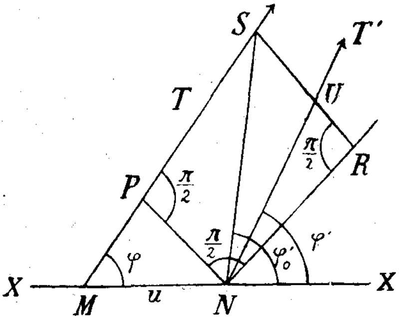
Исходя изъ этого уравненія аберраціи, мы получаемъ слѣдующее построеніе отклоненнаго свѣтового луча. Пусть свѣтовой лучъ T, выходящій изъ безконечно-далекаго источника $J$, пересѣкаетъ ось $X$ въ точкѣ $M$ подъ острымъ угломъ $\varphi$. Если мы возьмемъ $MP = u_1$, то $\varphi = \Pi\ (u_1)$. Отложимъ въ сторону возрастающихъ абсциссъ отрѣзокъ $MN = u$ и проведемъ изъ $N$ параллельную прямую Лобачевскаго къ $T$. Эта параллельная прямая $\mathrm{T}'$ образуетъ съ осью $X$ уголъ $\varphi'$, ибо $\varphi' = \Pi\ (u_1 - u) = \Pi\ (u'_1)$.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $u_1 = 0$, то $u'_1 = -u_1$, и уголъ $\varphi'$ переходитъ въ дополнительный къ нему уголъ $\varphi'_1$. Отклоненный свѣтовой лучъ будетъ $RJ$.

Построеніе искомой параллельной прямой $\mathrm{T}'$ производится слѣдующимъ образомъ (см. фиг. 13[1]). Пусть $MN = = u = \text{th}^{-1}\ \frac{v}{c}$. Опустимъ изъ $N$ перпендикуляръ $NP$ на $\mathrm{T}$, возставимъ затѣмъ въ $N$ перпендикуляръ $NR$ къ $NP$, возьмемъ затѣмъ на $\mathrm{T}$ отрѣзокъ $MS$, равный абсолютному отрѣзку-единицѣ нашего пространства Лобачевскаго и опустимъ затѣмъ изъ $S$ перпендикуляръ $SR$ на $NR$.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Если мы возьмемъ еще $NU = PS$, то $NU$ будетъ параллельно къ $\mathrm{T}$ въ смыслѣ Лобачевскаго, и эта параллельная прямая образуетъ съ осью $X$ уголъ $\varphi'$.

---

[1] Lobatschefskij - Engel. Zwei geometrische Abhandlungen, 256.

Такъ какъ точка $U$ должна всегда лежать между $S$ и $R$, то изъ фигуры легко увидѣть, что въ теоріи относительности $\varphi'$ меньше, чѣмъ $\varphi'_0$ обыкновенной механики.

Въ эйнштейновой формулѣ (47) для аберраціи мы выразимъ косинусы, встрѣчающіеся въ лѣвой сторонѣ и въ числителѣ дроби на правой сторонѣ черезъ соотвѣтствующіе синусы, возведемъ выраженіе въ квадратъ и послѣ нѣкоторыхъ преобразованій получимъ:

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;(57)$$

Если разсматривать движеніе земли по ея орбитѣ по отношенію къ небу неподвижныхъ звѣздъ, разсматриваемому, какъ система отсчета, то $\frac{v}{c} = 0{,}0001$. Для столь малыхъ скоростей можно пренебречь $\frac{v^2}{c^2}$, получая такимъ образомъ приближенное равенство:

$$\sin\varphi' = \frac{\sin\varphi}{1-\frac{v}{c}\cos\varphi}\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;(58)$$

Если раздѣлить эту формулу на (47), то получится:

$$\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi'} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi-\frac{v}{c}},$$

откуда можно легко найти въ согласіи съ обыкновенной теоріей:

$$\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{v}{c}\sin\varphi'.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(59)$$

Но тогда слѣдуетъ взять на чертежѣ $\varphi'_0$ **вмѣсто** $\varphi'$ **и** $\frac{v}{c}$ вмѣсто $u$.

Мы дадимъ здѣсь еще другое выраженіе для аберраціи, которое Плюммеръ интерпретировалъ геометрически двоякимъ образомъ [1]). Изъ (56) слѣдуетъ:

$$e^{-u'_1} = e^{u} \cdot e^{-u} \; ;$$

согласно отношенію, существующему между перпендикуляромъ и соотвѣтствующимъ угломъ параллелизма, это можно написать въ видѣ:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi'}{2} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

## § 10. Отраженіе свѣта отъ движущагося зеркала.

Пусть координатная плоскость $X' = O$ представляетъ совершенное зеркало. Пусть лучъ свѣта, падающій на эту отражающую плоскость въ точкѣ $O'$, опредѣляется амплитудой $A$, угломъ $\varphi$ и частотой $\nu$. Эти величины отнесены къ покоящейся системѣ. Пусть зеркало $X' = O$ движется со скоростью $u$ въ направленіи положительной оси абсциссъ покоящейся системы отсчета.

Вмѣсто угла параллелизма $\varphi$ мы будемъ разсматривать соотвѣтствующій ему отрѣзокъ $u_1$. Въ системѣ со значками ему соотвѣтствуетъ, согласно (56), отрѣзокъ

$$u'_1 = u_1 - u.$$

Углу параллелизма отраженнаго луча соотвѣтствуетъ отрѣзокъ.

$$u''_1 = -u'_1 = u - u_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Въ системѣ со значками $S'$ падающій лучъ образуетъ съ осью $X'$ уголъ $\varphi'$, а послѣ отраженія уголъ $\varphi'' = \pi - \varphi'$. Согласно опредѣленію угла параллелизма для отрицательныхъ перпендикуляровъ, углу $\varphi''$ соотвѣтствуетъ

---

[1]) Plummer. On the theory of Aberration and the Principle of Relativity. Monthly notices of the royal astronomical society, XX, 1910, 259.

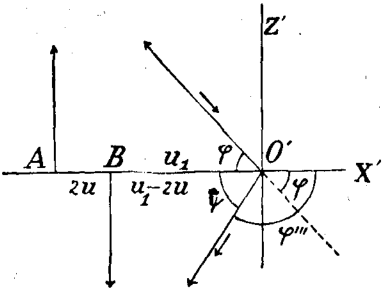
перпендикуляръ — $u'_1$, если дополнительному углу $\varphi'$ соотвѣтствуетъ перпендикуляръ $u'_1$. Если мы приме́мъ во вниманіе уравненіе аберраціи (56), то мы увидимъ, что наблюдателю, покоящемуся въ $O$, отрѣзокъ $u''$ будетъ казаться увеличеннымъ на $u$. Такимъ образомъ мы приходимъ, наконецъ, къ уравненію:

$$u_1''' = 2u - u_1 , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (62)$$

изъ котораго можно видѣть, что для наблюдателя, покоящагося въ $O$, лучъ отражается подъ угломъ.

$$\varphi''' = \Pi\,(2u - u_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (63)$$

На черт. 14 легко понять построеніе отраженнаго луча согласно формулѣ (62). При построеніи выгодно привлечь къ разсмотрѣнію уголъ $\psi$, дополнительный къ углу $\varphi'''$. Вопросъ о томъ, въ какомъ отношеніи будетъ находиться уголъ $\psi$ къ $\varphi$, зависитъ отъ направленія движенія зеркала по отношенію къ источнику свѣта. Въ разсмотрѣнномъ случаѣ $\psi > \varphi$, такъ какъ $\psi$ является угломъ параллелизма для меньшаго перпендикуляра.



Фиг. 14.

Мы можемъ теперь весьма легко перейти къ формуламъ Эйнштейна. По (62) мы имѣемъ:

$$\operatorname{th} u_1''' = -\frac{\operatorname{th} u_1 - \operatorname{th} 2u}{1 - \operatorname{th} 2u \operatorname{th} u_1}$$

или

$$\operatorname{th} u_1''' = -\frac{(1 + \operatorname{th}^2 u) \operatorname{th} u_1 - 2 \operatorname{th} u}{1 - 2 \operatorname{th} u \operatorname{th} u_1 + \operatorname{th}^2 u} \quad . \quad . \quad . \qquad (64)$$

Вмѣсто гиперболическихъ функцій перпендикуляровъ $u'''_1$ и $u_1$ мы введемъ круговыя функціи соотвѣтствующихъ угловъ параллелизма, замѣнимъ затѣмъ th u черезъ $\frac{v}{c}$ и придемъ такимъ образомъ къ формулѣ Эйнштейна ¹):

$$\cos\varphi''' = -\frac{\Bigl((1+\left(\frac{v}{c}\right)^2\Bigr)\cos\varphi - 2\,\frac{v}{c}}{1-2\frac{v}{c}\cos\varphi+\left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad . \; . \quad (65)$$

Въ неэвклидовой интерпретаціи она замѣняется гораздо болѣе простыми формулами (62) или (63).

Согласно (51) и (62) можно установить для частоты $\nu'''$ отраженнаго свѣтового луча формулу

$$\frac{\nu'''}{\nu} = \frac{\operatorname{ch}(2u-u_1)}{\operatorname{ch}u_1} = \frac{\operatorname{ch}(u_1-2u)}{\operatorname{ch}u_1}$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{\nu'''}{\nu} = \operatorname{ch}2u - \operatorname{th}u_1\operatorname{sh}2u = \operatorname{ch}^2 u + \operatorname{sh}^2 u - 2\operatorname{sh}u\operatorname{ch}u\operatorname{th}u_1$$

или

$$\frac{\nu'''}{\nu} = \operatorname{ch}^2 u\,(1 - 2\operatorname{th}u\operatorname{th}u_1 + \operatorname{th}^2 u) \quad . \; . \; . \; . \; (67)$$

Введя уголъ параллелизма, мы получимъ эйнштейново выраженіе:

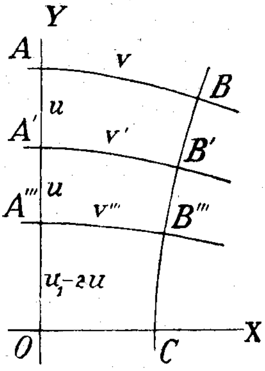
$$\frac{\nu'''}{\nu} = \frac{1-2\frac{v}{c}\cos\varphi+\left(\frac{v}{c}\right)^2}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{A'''}{A}, \quad . \; . \; . \quad (68)$$

ибо амплитуды преобразуются точно такимъ же образомъ, какъ и частоты. Фиг. 15 представляетъ геометрическое изображеніе формулы (66).

---

¹) Annalen der Physik, 17, 1905, 915.

Отношенія между амплитудами и частотами падающаго и отраженнаго свѣта можно представить черезъ отношеніе дугъ двухъ линій равнаго разстоянія между общими нормалями. Параметры этихъ линій равнаго разстоянія будутъ $OA = u_1$, $OA''' = u_1 - 2u$. Легко замѣтить, что $\nu'''$ (A''') получается путемъ отраженія $\nu$ (A) отъ $\nu'$ (A'). Точно также можно опредѣлить уголъ $\varphi'''$ путемъ отраженія падающаго луча отъ луча, испытавшаго дѣйствіе аберраціи.



Фиг. 15.

Для свѣтового луча, падающаго перпендикулярно, $\varphi = 0$, слѣдовательно, $u_1 = \infty$ и формула (66) переходитъ въ

$$\nu''' = \nu e^{-2u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (69)$$

Отношеніе частотъ и амплитудъ можно въ этомъ случаѣ выразить въ видѣ отношенія двухъ дугъ предѣльныхъ круговъ, имѣющихъ общую ось. Соотвѣтственная фигура была бы въ этомъ случаѣ такая же, какъ на фиг. 11, только слѣдовало бы взять $AA_1 = 2u$.

Формула (51) для принципа Допплера и уравненіе аберраціи (56) представляютъ такое же строеніе, какъ формула (66) для частоты и амплитуды и формула (62) для угла отраженія свѣта, отраженнаго отъ движущагося зеркала. Отсюда слѣдуетъ, что тотъ же самый свѣтовой лучъ представляется наблюдателю, движущемуся съ двойной скоростью $2u$, такимъ же, какимъ онъ представлялся бы покоящемуся наблюдателю послѣ отраженія отъ зеркала, движущагося со скоросью $u$. Въ обоихъ случаяхъ движеніе должно совершаться въ одномъ и томъ же направленіи.

Согласно съ этимъ, мы можемъ получить законы для отраженія свѣта отъ движущагося зеркала, замѣнивъ въ формулахъ (34) $u$ черезъ $2u$. Но такъ какъ изображеніе находится на сторонѣ плоскости $X' = 0$, противоположной предмету, то слѣдуетъ еще взять $-x'$ вмѣсто $x'$, т. е. свѣтовой векторъ слѣдуетъ подвергнуть преобразованію.

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x\operatorname{ch}2u + l\operatorname{sh}2u \\ l' &= -l\operatorname{ch}2u - x\operatorname{sh}2u \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Но изъ (1) слѣдуетъ, что

$$\operatorname{ch}2u = \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}$$

$$\operatorname{sh}2u = \frac{2vc}{c^2-v^2},$$

благодаря чему предыдущія равенства принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -\frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\,.\,x + \frac{2vc^2}{c^2-v^2}\,.\,t \\ t' &= \frac{c^2+v^2}{c^2-v^2}\,.\,t - \frac{2v}{c^2-v^2}\,.\,x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (71)$$

Г. Бэтманъ [1]) вывелъ законы отраженія свѣта отъ движущагося зеркала, исходя изъ предпосылки, что изображеніе какого-нибудь предмета возникаетъ путемъ именно этого пространственно-временно̀го преобразованія (71).

Уголъ отраженія въ случаѣ движущагося зеркала можно опредѣлить точно такимъ же образомъ, какъ въ

---

[1]) H. Bateman. The reflexion of light at an ideal plane mirror moving with a uniform velocity of translation. Phil. Mag. **18**, 892, 1909.

случаѣ покоящагося зеркала, путемъ построенія на основаніи принципа Гюйгенса. Я упомяну лишь относящіяся сюда разсужденія Гикса (W. Hicks[1]) и Коля (E. Kohl[2]), развитыя ими при изслѣдованіи опыта Майкельсона-Морлея. Изъ фиг. 14 мы видимъ, что $\psi = \Pi\,(u_1 - 2u)$, или $u_2 = u_1 - 2u$, если мы обозначимъ перпендикуляръ, соотвѣтствующій углу $\psi$, черезъ $u_2$. Отсюда слѣдуетъ:

$$e^{-u_2} = (e^u)^2 e^{-u_1}$$

$$\text{или } \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{c+v}{c-v}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \ldots\ldots \quad (72)$$

Это—формула Гикса. Но онъ принимаетъ $v$ положительнымъ, если зеркало движется навстрѣчу падающему лучу. Слѣдовательно, въ его формулѣ (1) мы должны брать $v$ отрицательнымъ, если мы желаемъ согласовать ее съ нашими формулами[3]). Соотвѣтственно съ этимъ приходится измѣнить и его чертежъ.

*Пер. П. Юшкевичъ.*

---

[1]) Phil. Mag. **3**, 1902, 15.

[2]) Ann. d. Phys. **28**, 1909, 262.

[3]) См. также Laue. Das Relativitätsprinzip, стр. 93.

## Г. Тимердингъ.

# Объ одномъ простомъ геометрическомъ образѣ четырехмѣрнаго міра Минковскаго.

Уже неоднократно [1], пытались сдѣлать геометрически болѣе наглядной ту интерпретацію, которую придалъ Минковскій [2], исходя изъ Эйнштейнова принципа относительности, Лорентцову преобразованію, введя нѣкоторое четырехмѣрное образованіе, „четырехмѣрный міръ пространства и времени“ („Raumzeitwelt“). Но изъ всѣхъ подобныхъ способовъ конкретизаціи особенно удачнымъ и естественнымъ кажется мнѣ тотъ, при которомъ изображаютъ время, связанное съ какой-нибудь точкой пространства, съ помощью радіуса нѣкотораго шара, описаннаго вокругъ разсматриваемой точки. Слѣдуетъ только вспомнить, что не существуетъ болѣе простого электромагнитнаго явленія, чѣмъ распространеніе сферической волны. Но, выраженная геометрическимъ образомъ, сферическая волна означаетъ просто шаръ, радіусъ котораго $r$

---

[1] Klein. Ueber die geometrischen Grundlagen der Lorentsgruppe. Jahresbericht d. D. Math. Ver., **19**, 281 (1910). Heffter. Zur Einführung der vierdimensionalen Welt Minkowskis. Ib. **21**. 1 (1912). Brill. Das Relativitätsprincip. Ib. **21**, 60. Varićak. Ueber die nichteuklidische Interpretation der Relativthéorie, Ib. **21**, 103,

[2] Minkowski. Raum und Zeit. Ib. **18**, 75 (1909).

растетъ пропорціонально времени $t$, такъ что мы должны положить

$$r = ct.$$

Постоянная $c$ представляетъ здѣсь скорость, и притомъ скорость свѣта. Слѣдовательно, если мы желаемъ присоединить къ каждой точкѣ пространства опредѣленіе времени, то намъ остается лишь описывать вокругъ нея шары, пропорціональные—какъ указано—значеніямъ времени. Въ такомъ случаѣ мы сможемъ истолковать все, что̀ доступно аналитическому выраженію въ точечныхъ координатахъ $x$, $y$, $z$ и $t$, геометрическимъ образомъ, какъ связи между шарами пространства.

Но время простирается отъ любого произвольнаго момента не только впередъ, но и назадъ. Поэтому, если мы желаемъ вполнѣ провести нашъ геометрическій образъ, мы вынуждены начать разсматривать и шары съ отрицательнымъ радіусомъ. Подобные шары, радіусъ которыхъ имѣетъ предъ собой опредѣленный знакъ, разсматривались, впрочемъ, уже Лагерромъ (Sur la transformation par directions réciproques, Comptes rendus 1881, Oeuvres t. II, p. 602). Онъ называетъ ихъ полушарами. Мы же предпочитаемъ здѣсь употреблять простое наименованіе шаровъ.

Знакъ, приписываемый нами радіусу шара, можно проще всего объяснить, если мы станемъ разсматривать шаръ не какъ геометрическое мѣсто точекъ, а какъ огибающую плоскостей, имѣющихъ одно и то же разстояніе отъ нѣкоторой опредѣленной точки. Дѣйствительно, и въ аналитической геометріи, и въ элементарной статикѣ оказывается необходимымъ приписать разстоянію какой-нибудь точки отъ извѣстной плоскости опредѣленный знакъ. Мы, согласно съ этимъ, различаемъ въ плоскости двѣ стороны, одну положительную и другую—отрицательную, и можемъ поэтому сказать: у шара съ положительнымъ радіусомъ положительная сторона касательныхъ плоскостей направлена во внутрь, у шара съ отрицательнымъ радіусомъ—во внѣ.

Положительную сторону плоскости мы можемъ обозначить также съ помощью направленія, идущаго перпендикулярно къ плоскости съ ея отрицательной стороны на сторону положительную. Интерпретацію времени съ помощью шаровъ пространства мы можемъ тогда соединить непосредственно съ плоскостью, представивъ себѣ, что каждая плоскость движется въ соотвѣтственномъ направленіи со скоростью *c*.

Такимъ образомъ къ „міровой точкѣ“ ($x$, $y$, $z$, $t$) слѣдуетъ отнести положенія всѣхъ тѣхъ плоскостей въ моментъ $t=0$, которыя во время $t$ проходятъ черезъ пространственную точку ($x$, $y$, $z$); эти положенія плоскостей огибаютъ шаръ, соотвѣтствующій разсматриваемой міровой точкѣ.

Можно установить различіе обѣихъ сторонъ плоскости и такимъ путемъ, чтобы принять въ ней самой опредѣленное направленіе вращенія. Это направленіе вращенія будетъ разнымъ въ *зависимости отъ той стороны* плоскости, на которой становятся. Мы опредѣлимъ направленіе вращенія такимъ образомъ, что для наблюдателя, стоящаго на положительной сторонѣ плоскости, вращеніе происходитъ въ положительномъ направленіи (противъ движенія часовой стрѣлки).

Направленіе вращенія въ касательной плоскости можно перенести непосредственно на самый шаръ. Должно тогда представить себѣ его весь покрытымъ вихрями, имѣющими это направленіе вращенія. Можно и прямо отличать на шаровой поверхности положительную сторону, для которой направленіе вращенія положительно, отъ отрицательной стороны, для которой оно отрицательно. Тогда мы найдемъ, что у шара съ положительнымъ радіусомъ положительная сторона поверхности направлена во-внутрь, у шара съ отрицательнымъ радіусомъ— наружу.

Мы должны хорошенько помнить, что если мы различаемъ на каждой шаровой поверхности и каждой плоскости положительную и отрицательную сторону, то мы можемъ считать какую-нибудь плоскость касательной плоскостью къ шару лишь въ томъ случаѣ, если она касается послѣдняго не въ обыкновенномъ только смыслѣ, но если въ точкѣ соприкосновенія ея положительная сторона совпадаетъ съ положительной стороной шара. Слѣдовательно, касательная плоскость какого-нибудь шара съ положительнымъ радіусомъ должна быть повернута своей положительной стороной къ центру шара.

Мы поэтому находимъ для двухъ шаровъ съ разными радіусами въ лучшемъ случаѣ одинъ общій касательный конусъ. Вершина $S$ этого конуса лежитъ на линіи, соединяющей центры обоихъ шаровъ, и является единственной точкой подобія этихъ шаровъ. Эта точка подобія имѣется и тогда, когда общій касательный конусъ становится мнимымъ. Она удаляется въ безконечность, когда радіусы обоихъ шаровъ становятся равными другъ другу (принимая въ разсчетъ и знаки радіусовъ).

Чтобы изслѣдовать далѣе разсматриваемую здѣсь геометрическую интерпретацію, лучше всего начать съ разсмотрѣнія равномѣрнаго, прямолинейнаго движенія какой-нибудь точки. Это движеніе можно представить себѣ—безъ всякаго ущерба для общности анализа—происходящимъ по оси $x$; мы можемъ также предположить, что движущаяся точка занимаетъ въ моментъ $t = 0$ начало координатъ. Тогда—если мы примемъ, что $v$ означаетъ скорость движенія—мы получимъ въ нашемъ геометрическомъ образѣ

$$x = vt, \qquad r = ct, \qquad y, z = 0.$$

Центры шаровъ, соотвѣтствующихъ различнымъ положеніямъ движущейся точки, лежатъ всѣ на оси $x$; начало координатъ служитъ для нихъ точкой подобія, при томъ внутренней или внѣшней, въ зависимости отъ того, будетъ ли $c^2 \gtrless v^2$, т. е. въ зависимости отъ того, происходитъ ли движеніе съ подсвѣтовой или сверхсвѣтовой скоростью. Въ послѣднемъ случаѣ всѣ полученные такимъ образомъ шары, о которыхъ мы говоримъ, что они образуютъ линейную семью шаровъ (Kugelschar), имѣютъ общій вещественный касательный конусъ, въ первомъ же случаѣ не имѣютъ его. Если движеніе происходитъ со скоростью свѣта, т. е. если $c^2 = v^2$, и, значитъ, $x^2 = r^2$, то всѣ шары проходятъ черезъ начало и имѣютъ въ немъ общую касательную плоскость.

Мы получаемъ такимъ образомъ также основное различеніе отношенія между двумя міровыми точками, въ зависимости отъ того, происходятъ ли онѣ (при равномѣрномъ, прямолинейномъ движеніи отъ одной къ другой) другъ отъ друга съ сверхсвѣтовой, подсвѣтовой или свѣтовой скоростью. Въ первомъ случаѣ изображающіе ихъ шары имѣютъ общій вещественный касательный конусъ, во второмъ—конусъ становится мнимымъ, въ третьемъ—онъ переходитъ въ плоскость. Въ первомъ случаѣ точка подобія обоихъ шаровъ лежитъ внѣ нихъ, во второмъ—внутри, а въ третьемъ—на нихъ.

Аналитически можно различить всѣ три случая въ зависимости отъ того, будетъ ли выраженіе

$$P = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - (r-r')^2 \gtreqqless 0,$$

гдѣ $(x, y, z, t)$ и $(x', y', z', t')$ представляютъ обѣ міровыя точки. Это выраженіе мы назовемъ степенью (Potenz) обоихъ шаровъ. Оно переходитъ въ степень точки для шара, если мы примемъ, что радіусъ одного изъ обоихъ шаровъ равенъ нулю.

Для этой степени мы можемъ также найти простое геометрическое истолкованіе. Возьмемъ „центральные“

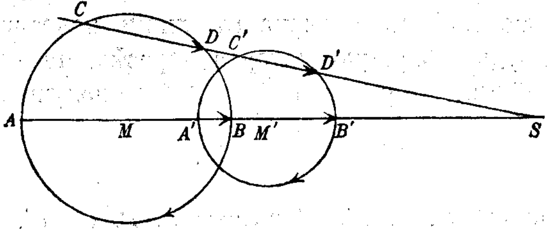
діаметры $AB$ и $A'B'$ обоихъ шаровъ, лежащіе на линіи соединенія центровъ обоихъ шаровъ, такими, что направленіе $AB$ совпадаетъ съ направленіемъ $A'B'$, или противоположно ему, въ зависимости отъ того, имѣютъ ли $r$ и $r'$ одинаковые или разные знаки, и назовемъ $A$ и $A'$ начальными точками, а $B$ и $B'$—конечными точками обоихъ діаметровъ. Тогда мы имѣемъ

$$P = \overrightarrow{AA'} . \overrightarrow{BB'}.$$

Поэтому мы можемъ сказать: степень двухъ шаровъ есть произведеніе изъ разстоянія начальныхъ точекъ на разстояніе конечныхъ точекъ обоихъ центральныхъ діаметровъ.

Если оба шара имѣютъ различные радіусы, то существуетъ опредѣленная точка подобія $S$ на ихъ линіи центровъ. Проведемъ черезъ эту точку какую-нибудь произвольную сѣкущую и назовемъ $C$, $D$ и $C'$, $D'$ точки пересѣченія ея съ обоими шарами, при чемъ мы беремъ точки въ такой послѣдовательности, что $CD$ и $C'D'$ направлены будутъ въ одну сторону, или въ разныя стороны, въ зависимости отъ того, будутъ ли направлены въ одну сторону или въ разныя стороны $AB$ и $A'B'$. Тогда мы легко получаемъ:

$$\overrightarrow{CC'} . \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} . \overrightarrow{BB'}$$



Фиг. 1.

и мы можемъ взять для степени обоихъ шаровъ также выраженіе:

$$P = \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{DD'}.$$

Въ этой формѣ опредѣленіе степени двухъ шаровъ вполнѣ аналогично опредѣленію степени точки для шара.

Если степень $P > 0$, то шары имѣютъ общія вещественныя касательныя, и если $T$, $T'$ представляютъ точки касанія одной подобной касательной, то

$$P = \overrightarrow{TT'}^2.$$

Степень, слѣдовательно, выражается квадратомъ длины, которую имѣютъ общія касательныя шаровъ.

Если, наоборотъ, $P < 0$, то точка подобія шаровъ $S$ лежитъ внутри ихъ обоихъ. Если тогда мы проведемъ черезъ нее перпендикулярно къ линіи центровъ $MM'$ какую-нибудь сѣкущую, которая пересѣкаетъ оба шара по кратчайшимъ хордамъ $UV$ и $U'V'$, то получится

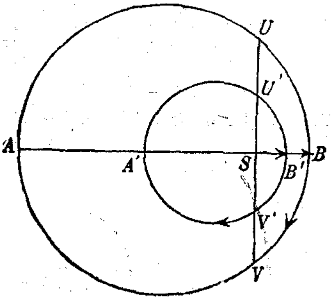
$$\overrightarrow{UU'} = -\overrightarrow{VV'},$$

и, подставивъ $U$, $V$, $U'$, $V'$ вмѣсто $C$, $D$, $C'$, $D'$, мы найдемъ:

$$P = -\overrightarrow{UU'}^2 = -\overrightarrow{VV'}^2.$$

Если степень отрицательна, то она становится равной отрицательному квадрату разстоянія между обоими шарами, отсчитываемому по кратчайшимъ хордамъ, проходящимъ черезъ точку подобія $S$.

Слѣдуетъ, однако, при этомъ обратить вниманіе на то, что, если $r$ и $r'$ имѣютъ разные знаки, то противоположно направлены также $UV$ и $U'V'$, слѣдовательно, $U$, $U'$, а также и $V$, $V'$ лежатъ на различныхъ сторонахъ $S$ и, соотвѣтственно съ этимъ, отрѣзки $UU'$, $VV'$ частично покрываютъ другъ друга. Если же $r$ и $r'$ имѣютъ одинаковые знаки, то у этихъ отрѣзковъ нѣтъ ни одной общей части.



Фиг. 2.

Если оба шара имѣютъ общій центръ, то степень становитсяравной отрицателному квадрату разности радіусовъ. Если, кромѣ того, радіусы ихъ равны и діаметрально противоположны, такъ что, какъ геометрическія мѣста, они совпадаютъ другъ съ другомъ, то степень обоихъ шаровъ становится равной отрицательному квадрату ихъ діаметра.

Если оба шара имѣютъ равные и равно направленные радіусы, но разные центры, то прямыя, параллельныя ихъ линіи центровъ, играютъ роль сѣкущей, проходящей черезъ точку подобія; общія касательныя становятся также параллельными линіи центровъ. Длина этой общей касательной равна разстоянію $m$ центровъ шаровъ и степень обоихъ шаровъ будетъ $m^2$. Если оба шара тождественны, то степень исчезаетъ.

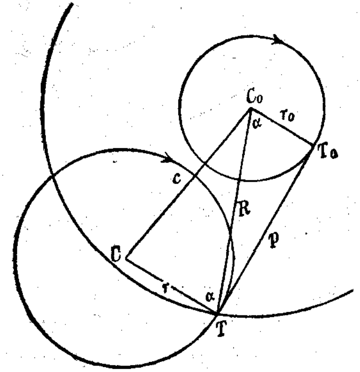
Совокупность всѣхъ шаровъ $K$, обладающихъ для нѣкотораго опредѣленнаго шара $K_0$ данной степенью $P$, совпадаетъ, если эта степень $>0$, съ совокупностью шаровъ, пересѣкающихъ другой опредѣленный шаръ $K_1$ подъ нѣкоторымъ даннымъ угломъ $\alpha$. Если $TT_0 = p$ есть нѣкоторая общая касательная $K$ и $K_0$, $C$, $C_0$—центры этихъ шаровъ и если положить $CC_0 = c$, $CT = r$, $C_0T_0 = r_0$, $C_0I = R$, то длина

$$R = \sqrt{r_0^2 + p^2}$$

будетъ—такъ какъ $P=p^2$ есть данная степень—одна и та же для всѣхъ шаровъ $K$, и для угла $C_0TC$ или $\alpha$ имѣемъ

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{r_0},$$

т. е. онъ также будетъ постояннымъ. Но это есть тотъ уголъ, подъ которымъ шаръ $K_1$, описанный вокругъ $C_0$ радіусомъ $R$, пересѣкаетъ шаръ $K$; слѣдовательно, этотъ шаръ $K_1$ пересѣкаетъ всѣ шары $K$ подъ однимъ и тѣмъ же угломъ $\alpha$.



Фиг. 3.

Если данъ шаръ $K_1$, то шаръ $K_0$ есть огибающая всѣхъ плоскостей, пересѣкающихъ $K_1$ подъ угломъ $\alpha$.

Если степень $P=0$, то мы получаемъ совокупность всѣхъ шаровъ, касающихся нѣкотораго даннаго шара. Эта совокупность представляетъ изображеніе сферической волны, распространяющейся со скоростью свѣта.

Мы можемъ разсмотрѣть также совокупность всѣхъ тѣхъ шаровъ, которые обладаютъ одинаковой степенью для двухъ данныхъ шаровъ. Эта совокупность образуетъ всеобщее линейное многообразіе шаровъ третьей ступени, или „шаровую сѣть“ („Kugelgewebe“), за исключеніемъ особенныхъ многообразій, опредѣляемыхъ тѣмъ, что центры всѣхъ ихъ шаровъ должны лежать на нѣкоторой данной плоскости. Если оба данныхъ шара концентричны, то всѣ шары сѣти имѣютъ одинъ и тотъ же радіусъ. Если они не концентричны, то мы можемъ взять ихъ центры на оси $x$ и принять плоскость $yz$ за ихъ степенную плоскость (Potenzebene) (геометрическое мѣсто точекъ равной степени). Ихъ координаты имѣютъ тогда форму $(x_1, o, o, r_1)$, $(x_2, o, o, r_2)$ и при этомъ $x_1^2 - r_1^2 = x_2^2 - r_2^2$; далѣе, для координатъ $(x, y, z, t)$ какого-нибудь шара сѣти получается условное уравненіе: $(x - x_1)^2 + y^2 + z^2 - (r - r_1)^2 = (x - x_2)^2 + y^2 + z^2 - (r - r_2)^2$ или просто

$$\lambda x = r,$$

если

$$\lambda = \frac{x_1 - x_2}{r_1 - r_2} = \frac{r_1 + r_2}{x_1 + x_2}.$$

Слѣдовательно, сѣть состоитъ изъ всѣхъ шаровъ, радіусы которыхъ пропорціональны разстояніямъ ихъ центровъ отъ нѣкоторой неизмѣнной плоскости, центральной плоскости сѣти.

Постоянное отношеніе $\lambda = \frac{r}{x}$ мы можемъ назвать моментомъ шаровъ для центральной плоскости. Если $\lambda^2 = 1$, то всѣ шары касаются центральной плоскости, сѣть состоитъ тогда изъ двукратно безконечно-многихъ семей шаровъ, соприкасающихся въ одной точкѣ. Если $\lambda^2 < 1$, то ни одинъ шаръ сѣти не пересѣкаетъ центральной плоскости. Если, наоборотъ, $\lambda^2 > 1$, то они всѣ пересѣкаютъ эту плоскость, и шары сѣти устанавливаютъ однозначное сопряженіе между точками пространства (какъ своими центрами) и окружностями центральной плоскости (какъ своими окружностями пересѣченія), причемъ, разумѣется, эти окружности слѣдуетъ брать съ опредѣленнымъ направленіемъ вращенія. Этою связью между точками пространства и окружностями какой-нибудь плоскости занимался В. Фидлеръ въ своей Циклографіи.

Мы можемъ теперь использовать сѣть шаровъ, чтобы установить наивозможно простымъ образомъ однозначныя преобразованія шарового пространства, оставляющія инваріантнымъ выраженіе

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-(r-r')^2,$$

т. е., чтобы установить Лорентцовы преобразованія пространственно-временного міра. Благодаря этимъ преобразованіямъ два соприкасающихся шара переходятъ всегда снова въ два соприкасающихся шара. Далѣе, согласно опредѣленію сѣти шаровъ, при каждомъ подобномъ преобразованіи каждая сѣть шаровъ должна перейти опять-таки въ нѣкоторую шаровую сѣть. Въ частности, шары, касающіеся нѣкоторой плоскости и образующіе нѣкоторую особенную шаровую сѣть, должны опять-таки перейти въ такую же шаровую сѣть и касаться опять-таки нѣкоторой плоскости. Такимъ образомъ, оказывается, что Лорентцовы преобразованія шарового пространства обусловливаютъ собою нѣкоторыя преобразованія плоскостного пространства, причемъ, однако, плоскости слѣдуетъ брать не въ обыкновенномъ смыслѣ, но „односторонними“, т. е. обладающими опредѣленнымъ направленіемъ вращенія. Если мы измѣнимъ это направленіе, то плоскость переходитъ въ другую (противоположную) плоскость, образующую съ первой уголъ въ 180°. Касательныя плоскости какого-нибудь шара переходятъ при этомъ всегда снова въ касательныя плоскости какого-нибудь шара. Въ частности и плоскости, проходящія черезъ какую-нибудь точку, преобразуются въ касательныя плоскости нѣкотораго шара, и совокупность получаемыхъ такимъ образомъ шаровъ образуетъ снова нѣкоторую шаровую сѣть, такъ какъ соотвѣтствующія имъ точки пространства означаютъ особенную шаровую сѣть.

Теперь, если дана шаровая сѣть, въ которую должны перейти при преобразованіи точки пространства, и если найдено преобразованіе, дающее эту шаровую сѣть, то всякое другое преобразованіе, дающее ту же самую шаровую сѣть, можетъ отличаться отъ найденнаго преобразованія лишь на обыкновенное ортогональное преобразованіе пространства, ибо для послѣдняго преобразованія мы имѣетъ, что оно переводитъ каждую точку опять-таки въ нѣкоторую точку, причемъ выраженіе

$$(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

т. е. разстояніе двухъ точекъ, остается неизмѣннымъ.

Все поэтому сводится къ тому, чтобы найти нѣкоторое особенное плоскостное преобразованіе, переводящее точечное пространство въ нѣкоторую данную напередъ шаровую сѣть. Однако, эта шаровая сѣть не можетъ быть произвольной; пока мы находимся въ области вещественнаго, абсолютная величина соотвѣтственнаго момента $\lambda$ должна быть $< 1$. Шаровая сѣть, образуемая точками пространства, такого рода, что основной инваріантъ, а именно, квадратъ разстоянія двухъ точекъ, становится положительнымъ. и, слѣдовательно, то же самое должно имѣть мѣсто для соотвѣтственной шаровой сѣти.

Мы возьмемъ уравненіе сѣти въ видѣ

$$\lambda x = r.$$

Инваріантъ двухъ шаровъ сѣти съ центрами $(x, y, z)$ и $(x', y', z',)$ дается выраженіемъ

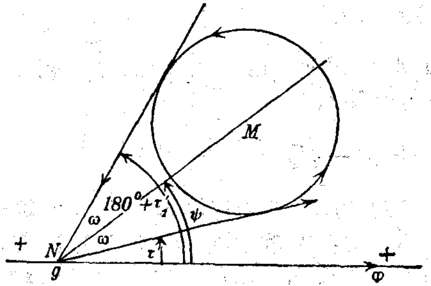
$$(1-\lambda^2)\ (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

содержащимъ только координаты центровъ, но не радіусы шаровъ. Дѣйствительно, это выраженіе лишь тогда всегда положительно, когда $\lambda^2 < 1$. Если мы назовемъ квадратный корень изъ вышеназваннаго выраженія разстояніемъ $p$ обоихъ шаровъ, то мы можемъ построить на этомъ геометрію шаровой сѣти. Если мы замѣнимъ каждый шаръ сѣти его центромъ, то мы получимъ отсюда простую точечную геометрію, и формула для $p$ показываетъ, что эта геометрія вытекаетъ изъ обыкновенной эвклидовой геометріи, если мы сократимъ всѣ разстоянія отъ центральной плоскости въ постоянномъ отношеніи $\sqrt{1-\lambda^2} : 1$. Мы поэтому можемъ сказать: геометрія, получаемая въ точечномъ пространствѣ, благодаря шаровой сѣти, отличается отъ мѣроопредѣленія обыкновенной эвклидовой геометріи лишь тѣмъ, что по сравненію съ послѣдней разстоянія, перпендикулярныя по своему направленію къ центральной плоскости сѣти, испытываютъ сокращеніе въ отношеніи $\sqrt{1-\lambda^2} : 1$.

Нетрудно затѣмъ интерпретировать охарактеризованное такимъ образомъ точечное преобразованіе, которое дается уравненіями преобразованія,

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{1-\lambda^2}}, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

и представляетъ простую перспективную аффинность,— нетрудно его интерпретировать такимъ образомъ, чтобы установить соотвѣтствіе точекъ $(\xi, \eta, \zeta)$ не съ центрами шаровъ $(x, y, z)$, но съ самими шарами сѣти. Тогда разстояніе двухъ точекъ то же самое, что разстояніе соотвѣтственныхъ шаровъ.



Фиг. 4.

Это сродство между точками пространства и шарами сѣти приводитъ тотчасъ же къ искомому нами сродству плоскостей. Мы должны для этого только прослѣдить еще нѣсколько далѣе значеніе момента $\lambda$ шаровой сѣти. Возьмемъ въ центральной плоскости $\varphi$ сѣти какую-нибудь прямую $g$, назовемъ черезъ $n$

разстояніе $MN$ центра $M$ какого-нибудь шара сѣти отъ $g$ и проведемъ черезъ $g$ касательныя плоскости $\pi'$, $\tau'_1$ къ шару. Назовемъ далѣе уголъ между этими двумя касательными плоскостями $2\omega$. Тогда, если мы придадимъ углу знакъ радіуса и будемъ брать $n$ всегда положительнымъ, мы имѣемъ

$$\sin\ \omega = \frac{r}{n}.$$

Назовемъ, далѣе, черезъ $\psi$ уголъ между прямой $MN$ и плоскостью $\varphi$ и будемъ считать его положительнымъ по положительную сторону $\varphi$, а отрицательнымъ—по отрицательную сторону $\varphi$. Мы имѣемъ тогда

$$\sin \psi = \frac{x}{n},$$

глѣ $x$ означаетъ разстояніе центра шара $M$ отъ плоскости $\varphi$. Слѣдовательно, для момента $\lambda = \frac{r}{x}$ мы имѣемъ выраженіе

$$\lambda = \frac{\sin \omega}{\sin \psi.}$$

Но углы между $\varphi$ и обѣими касательными плоскостями равны $\psi - \omega$ и $\psi + \omega - 180^0$. Если мы назовемъ эти углы черезъ $\tau'$ и $\tau'_1$, то мы имѣемъ:

$$\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{\sin \psi - \sin \omega}{\sin \psi + \sin \omega} = - \operatorname{tg} \frac{\tau'}{2} \operatorname{tg} \frac{\tau_1'}{2.}$$

Найденное отношеніе между точками пространства и шарами сѣти мы истолкуемъ такимъ образомъ, что мы установимъ соотвѣтствіе между плоскостями, проходящими черезъ какую-нибудь точку, и плоскостями, касающимися соотвѣтственнаго шара. Но легко замѣтить, что шары сѣти, которые соотвѣтствуютъ точкамъ нѣкоторой плоскости $\pi$ и центры которыхъ поэтому лежатъ опять-таки въ одной плоскости, имѣютъ двѣ общія касательныя плоскости $\pi'$ и $\pi'_1$, пересѣкающія центральную плоскость $\varphi$ по той же самой прямой, что и $\pi$. Мы, слѣдовательно, должны установить сопряженіе между плоскостью $\pi$ и плоскостями $\pi'$ и $\pi'_1$; но отношеніе это все-таки не двузначное, ибо плоскость $\pi$, какъ геометрическое мѣсто, есть двойная плоскость и состоитъ собственно изъ двухъ противоположныхъ плоскостей $\pi$, $\pi_1$. Поэтому мы не можемъ также говорить объ одномъ углѣ, который она образуетъ съ центральной плоскостью, но должны принять два угла $\tau$ и $\tau_1$, отличающіеся другъ отъ друга на 180⁰, такъ что

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}=-1.$$

Изъ ($\alpha$) можно легко вывести, что

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau_1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\operatorname{tg}\left(\frac{\tau'}{2}+\frac{\tau_1'}{2}\right);$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}+\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}=\frac{1+\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\operatorname{tg}\frac{\tau'}{2}+\operatorname{tg}\frac{\tau_1'}{2}\right),$$

и отсюда, далѣе, или

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\operatorname{tg}\frac{\tau'}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (A)$$

или такъ какъ

$$\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}=-1:\operatorname{tg}\frac{\tau}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}=-\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\ \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\tau'}{2}}\ \ldots\ldots\ (B)$$

Такимъ образомъ, разсматриваемое нами сродство между плоскостями пространства опредѣляется тѣмъ, что двѣ соотвѣтственныя плоскости пересѣкаются на центральной плоскости, и образуемые ими съ центральной плоскостью углы $\tau$ и $\tau'$ должны быть связаны между собою отношеніями (A) или (B).

Сродство (B) можно геометрически вывести слѣдующимъ образомъ. Возьмемъ центральную плоскость вмѣстѣ съ шаромъ, центръ котораго отстоитъ отъ нея на разстояніи $h$ и радіусъ котораго $\rho = h \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$, если мы положимъ $\lambda = \sin \vartheta$ $(\vartheta < 90^0)$. Установимъ взаимное сопряженіе между касательными плоскостями этого шара, пересѣкающимися въ центральной плоскости, а также между любыми двумя параллельными къ нимъ плоскостями, которыя опять-таки пересѣкаются въ центральной плоскости. Установимъ далѣе соотвѣтствіе между самой центральной плоскостью и противоположной ей плоскостью. Такимъ путемъ мы находимъ всѣ пары соотвѣтственныхъ плоскостей. Это сродство лучше всего назвать плоскостной инверсіей.

Шаръ, съ помощью котораго мы породили геометрически это сродство, не пересѣкаетъ при данныхъ предпосылкахъ центральной плоскости, ибо по абсолютной величинѣ $\rho < h$. Отсюда слѣдуетъ, что изъ каждой точки центральной плоскости выходитъ вещественный касательный конусъ къ основному шару, и мы, такимъ образомъ, имѣемъ, что любыя двѣ пары соотвѣтственныхъ плоскостей, не проходящихъ черезъ одну и ту же прямую линію центральной плоскости, всегда касаются прямого кругового конуса, вершина котораго лежитъ въ центральной плоскости. Лагерръ взялъ это свойство за исходный пунктъ при опредѣленіи сродства.

Если мы возьмемъ преобразованіе, опредѣляемое отношеніемъ (А), а не отношеніемъ (В), то это означаетъ лишь, что мы замѣнили плоскость, которую мы получили сперва, какъ соотвѣтствующую нѣкоторой данной плоскости, противоположной плоскостью.

Плоскостная инверсія обладаетъ основнымъ свойствомъ, показывающимъ ея аналогію съ обыкновенной точечной инверсіей, а именно, тѣмъ свойствомъ, что плоскости, касающіяся нѣкотораго шара, переходятъ всегда въ плоскости, касательныя къ нѣкоторому шару. Легко пояснить на примѣрѣ ея геометрическое значеніе. Точкамъ круга должна соотвѣтствовать семья шаровъ, которыхъ всѣхъ касаются шары другой шаровой семьи, потому что точки круга лежатъ на безконечно многихъ шарахъ (нѣкотораго пучка). Далѣе, всѣхъ этихъ шаровъ касаются двѣ плоскости, которыя соотвѣтствуютъ плоскости круга, разсматриваемой, какъ геометрическое мѣсто, и поэтому считаемой вдвойнѣ. Обѣ шаровыя семьи огибаютъ одну и ту же циклиду Дюпена; дальнѣйшія свойства этой поверхности ужъ потомъ легко вывести.

Если нужно найти шаръ, соотвѣтствующій шару съ радіусомъ $r$ и съ разстояніемъ $x$ отъ центра до центральной плоскости, то лучше всего исходить изъ уравненій

$$\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}+\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}=-\frac{2q}{x+r},\quad \operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau_1}{2}=-\frac{x-r}{x+r},$$

которымъ удовлетворяютъ углы $\tau$, $\tau_1$ между двумя проходящими черезъ одну и ту же прямую центральной плоскости касательными плоскостями и самой центральной плоскостью. Здѣсь $q$ означаетъ разстояніе прямой отъ основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ центра шара на центральную плоскость. При инверсіи же предыдущія уравненія — если положить въ основу уравненія (А) — переходятъ въ

$$\operatorname{tg}\frac{\tau'}{2}+\operatorname{tg}\frac{\tau_1'}{2}=-\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\cdot\frac{2q}{x+r},\quad \operatorname{tg}\frac{\tau'}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau_1'}{2}= -\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{x-r}{x+r}.$$

Если теперь отличать величины, относящіяся къ преобразованному шару, значками, то мы получимъ:

$$x'+r'=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\cdot(x+r),\quad \frac{x'-r'}{x'+r'}=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{x-r}{x+r}$$

и отсюда

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-\lambda^2}\,.\,x'=x-\lambda r\\ \sqrt{1-\lambda^2}\,.\,r'=r-\lambda x\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(C)$$

Эти уравненія преобразованія удовлетворяютъ, какъ и должно быть, тождеству

$$r'^2-x'^2=r^2-x^2\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(D)$$

Если подставить въ него

$$\lambda=\frac{v}{c},\quad r=ct,$$

то мы сейчасъ же увидимъ его согласіе съ частными Лорентцовыми преобразованіями, какъ ихъ обыкновенно представляютъ. Условіе $\lambda^2<1$ означаетъ $v^2<c^2$, т. е. что мы принимаемъ въ разсчетъ лишь подсвѣтовыя скорости. И сокращеніе въ направленіи, перпендикулярномъ къ центральной плоскости, какъ мы его выше вывели изъ простыхъ геометрическихъ соображеній, находитъ, какъ извѣстно, свое мѣсто въ электромагнитной теоріи. Замѣчательно здѣсь, какъ развиваемыя въ физикѣ идеи полу-

чаются простымъ и естественнымъ образомъ изъ чисто геометрическихъ разсужденій.

Въ заключеніе можно спросить, нельзя ли подчинить нашей геометрической интерпретаціи и четырехмѣрные векторы перваго и второго рода, введенные Минковскимъ. Но для этого необходимо, повидимому, нѣкоторое видоизмѣненіе этой интерпретаціи, которымъ мы не будемъ здѣсь заниматься, какъ оно ни просто само по себѣ.

*Пер. П. Юшкевичъ.*

## А. Брилль.

# Принципъ относительности.

### Предисловіе.

Изъ различныхъ точекъ зрѣнія, на основѣ которыхъ можетъ быть воздвигнута теорія относительности, особенно ясной представляется мнѣ чисто формалистическая точка зрѣнія, согласно которой разсматриваются преобразованія, переводящія сферическія волны опять-таки въ сферическія волны. Это служило исходной точкой для Пуанкарэ и Минковскаго. Слѣдуя ихъ примѣру, я пытался въ другомъ мѣстѣ ¹) представить принципъ относительности въ связи съ электромагнитной теоріей свѣта, черезъ которую Г. А. Лорентцъ и А. Эйнштейнъ пришли къ своей формулировкѣ. Въ нижеслѣдующемъ мы отдѣлимъ принципъ относительности отъ теоріи дифференціальныхъ уравненій съ частными производными и отъ его отношеній къ теоретической физикѣ, ограничившись лишь изложеніемъ ближайшихъ слѣдствій изъ него, имѣющихъ значеніе для чистой механики. Поводомъ для составле-

---

¹) Mechanik raumerfüllender Massen, Lpz. 1909, § 53 и сл., гдѣ приведены также оставленныя здѣсь въ сторонѣ литературныя указанія. Съ тѣхъ поръ появилась обстоятельная работа Лауэ, разсматривающая и физическія приложенія теоріи: Dr. M. Laue, Das Relativitätsprinzip, Braunschweig, 1911.

нія этой работы послужилъ прочитанный въ мартѣ 1911 г. въ Тюбингенѣ каникулярный курсъ, имѣвшій цѣлью ознакомить въ предѣлахъ нѣсколькихъ часовъ группу учителей математики съ этимъ блестящимъ и плодотворнымъ завоеваніемъ математической физики.

За нѣкоторыя цѣнныя указанія и замѣчанія я приношу благодарность профессору д-ру Гансу въ Страсбургѣ.

## I. Заданіе.

### § 1. Введеніе.

Именемъ принципа относительности обозначаютъ, какъ извѣстно, новую концепцію основныхъ понятій механики, прежде всего пространства и времени, затѣмъ также массы и связанныхъ съ нею понятій,—концепцію, которая возникла изъ потребности устранить извѣстныя разногласія и противорѣчія, обнаружившіяся между обычнымъ до послѣдняго времени пониманіемъ электромагнитныхъ процессовъ — въ частности, распространенія свѣта — съ одной стороны, и такими явленіями, какъ аберрація звѣздъ, принципъ Допплера и нѣкоторые новѣйшіе физическіе опыты,—съ другой. Что придаетъ этому принципу универсальное значеніе, заставляющее ознакомиться съ нимъ и математика, такъ это то обстоятельство, что признаніе его можетъ повести, въ концѣ-концовъ, къ подрыву основъ всего гордаго зданія классической механики, въ томъ его видѣ, какъ оно было воздвигнуто Ньютономъ и Лагранжемъ.

Правда, уже въ ближайшихъ слѣдствіяхъ изъ принципа относительности мы наталкиваемся на массу парадоксальныхъ понятій и представленій, съ которыми нелегко справиться и изобрѣтательной фантазіи. Но недаромъ сравниваютъ эти парадоксы съ впечатлѣніями, возникающими у наивнаго читателя, который впервые услышитъ о движеніи земли въ міровомъ пространствѣ или объ антиподахъ. И такъ какъ, во всякомъ случаѣ, механика, созданная на основѣ принципа относительности—механика, которую можно было бы назвать „релятивистической“ или „механикой мірового постулата“—можетъ быть разсматриваема, какъ болѣе тонкая форма классической механики, содержащая, въ свою очередь, эту послѣднюю въ качествѣ предѣльнаго случая, то между обѣими концепціями механики, если ихъ разсматривать съ практической точки зрѣнія, нѣтъ собственно противорѣчія.

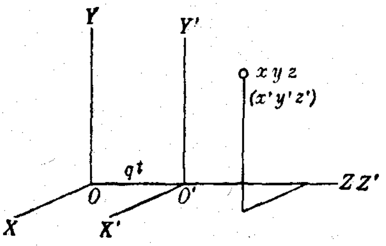
Но, какъ бы ни отвѣчать на вопросъ о томъ, какая изъ обѣихъ механикъ—классическая или релятивистическая—описываетъ правильно процессы въ неорганической природѣ, во всякомъ случаѣ, разсмотрѣніе новой теоріи представляетъ для математика столь большой теоретическій интересъ, что слѣдуетъ желать распространенія въ широчайшихъ кругахъ знакомства съ теоріей, которая уже теперь, благодаря геніальнымъ усиліямъ такихъ людей, какъ Гендрикъ Антунъ Лорентцъ, Альбертъ Эйнштейнъ и Германъ Минковскій, стала однимъ изъ отважнѣйшихъ твореній человѣческаго духа.

## § 2. Уравненіе движенія классической механики.

И классическая механика имѣетъ свой „принципъ относительности“. Правда, механика Ньютона связана съ представленіемъ объ абсолютномъ покоящемся пространствѣ, и Лагранжъ тоже говоритъ о системѣ координатъ, неизмѣнной въ пространствѣ. Но отношеніе между ускореніемъ $\mathfrak{p}$ и массой $m$ свободно движущейся въ пространствѣ матеріальной точки, съ одной стороны, и дѣйствующей на нее силой $\mathfrak{P}$,—съ другой, отношеніе это, выражаемое вторымъ основнымъ закономъ Ньютона и представленное въ видѣ векторіальнаго равенства

$$m\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \quad . . . . . . . . . . . . . . . . . \quad (1)$$

имѣетъ одинаковый видъ, независимо отъ того, относятъ ли его къ неизмѣнной системѣ координатъ или къ системѣ, движущейся равномѣрнымъ прямолинейнымъ образомъ. Допустимъ, въ самомъ дѣлѣ, что движеніе происходитъ параллельно оси $Z$ неизмѣнной прямоугольной системы координатъ $X$, $Y$, $Z$, такъ что ось $Z'$ системы $X'$, $Y'$, $Z'$, которая движется съ равномѣрной скоростью $q$ и у которой время $t'$ совпадаетъ съ временемъ $t$ неизмѣнной системы, перемѣщается вдоль оси $Z$. Въ такомъ случаѣ мы имѣемъ уравненія:



Фиг. 1.

$$x = x';\ y = y';\ z = z' + qt';\ t = t' \quad \dots\dots\dots \quad (2).$$

Если мы подставимъ значенія (2) для $x$, $y$, $z$, $t$ въ уравненія для отдѣльныхъ координатъ

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = \mathfrak{P}_x \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \mathfrak{P}_y \\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = \mathfrak{P}_z, \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3),$$

на которыя распадается уравненіе (1)—причемъ $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ суть составляющія $\mathfrak{P}$, и если мы замѣтимъ, что, такъ какъ $q$ постоянно, то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt'} = \frac{dz'}{dt'} + q; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2},$$

то лѣвыя стороны уравненія (3) переходятъ въ выраженія того же самаго вида, только изображенныя съ помощью координатъ со значками: $x'$, . . . . . . $t'$. Правыя стороны уравненій зависятъ въ общемъ случаѣ отъ координатъ точки $m$ и времени. Но если эти координаты даются здѣсь не сами по себѣ, но въ видѣ разностей: $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, и если допустить, что точка $x_0$, $y_0$, $z_0$ представляетъ не неизмѣнную пространственную точку, но тоже матеріальную точку $m_0$, которая, согласно принципу равенства дѣйствія и противодѣйствія, относится къ $m$ такъ, какъ $m$ относится къ $m_0$, то $x_0$, $y_0$, $z_0$ преобразуются аналогично $x$, $y$, $z$, и разности $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0=(z'-qt')-(z'_0-qt')=z'-z'_0$ не измѣняютъ, какъ и составляющія силы $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$, своего вида, когда переходятъ отъ неизмѣнной системы къ подвижной системѣ.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что уравненія (3) „переводятся въ самихъ себя“ съ помощью уравненій (2) или говорятъ также, что они инваріантны по отношенію къ преобразованію (2). Эта инваріантность означаетъ, что изъ процесса, описываемаго уравненіями (3), невозможно вывести никакого заключенія насчетъ скорости системы координатъ, въ которой она изображена, потому что эти уравненія имѣютъ тотъ же самый видъ для всякой системы, движущейся прямолинейнымъ равномѣрнымъ образомъ.

## § 3. Звуковыя волны.

Наряду съ механикой дискретныхъ точекъ въ прошломъ столѣтіи развилась въ болѣе или менѣе тѣсной связи съ классическими работами Эйлера по гидродинамикѣ механика заполняющихъ пространство (непрерывныхъ) массъ, занимающаяся, между прочимъ, и распространеніемъ состояній возмущенія (напримѣръ, колебаній) въ какой-нибудь средѣ. Опытъ показываетъ, что въ средѣ, одинаковой по всѣмъ направленіямъ („однородной“ и „изотропной“)—разсмотрѣніемъ каковой мы здѣсь и ограничимся—всякое, возникшее въ какомъ-нибудь мѣстѣ $x_0$, $y_0$, $z_0$, возмущеніе распространяется въ видѣ сферическихъ волнъ. Движеніе, вызываемое, напримѣръ, брошеннымъ въ воду камнемъ, распространяется, какъ извѣстно, такимъ образомъ, что водяныя частицы описываютъ вокругъ своего положенія равновѣсія небольшія кривыя, порождающія на поверхности воды возвышенія или пониженія. Эти возвышенія или пониженія распространяются въ видѣ расширяющихся концентрическихъ волнообразныхъ горъ и долинъ. Точно такъ же, въ случаѣ распространенія звуковой волны въ воздухѣ, движенія состоятъ въ небольшихъ колебаніяхъ воздушныхъ частицъ вокругъ ихъ положенія равновѣсія вдоль радіуса, соединяющаго это послѣднее съ центромъ возмущенія [1]).

Опытъ показываетъ, что въ подобной средѣ возмущеніе распространяется въ видѣ сферическихъ волнъ и въ томъ случаѣ, когда эта среда движется равномѣрнымъ прямолинейнымъ образомъ. Такъ, напримѣръ, скорость звука внутри какого-нибудь запертаго движущагося равномѣрнымъ образомъ вагона или судна, движеніе котораго раздѣляется заключеннымъ внутри воздухомъ, одна и та же какъ въ направленіи движенія, такъ и въ обратномъ направленіи, или въ направленіи, перпендикулярномъ къ движенію. Фактъ этотъ можно математически выразить слѣдующимъ образомъ.

Уравненіе шара, имѣющаго центръ $x_0$, $y_0$, $z_0$ и радіусъ $R$, отнесенное сперва къ неизмѣнной системѣ координатъ $X$, $Y$, $Z$, будетъ:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

---

[1]) Теорія описываетъ подобное распространеніе съ помощью системы частныхъ дифференціальныхъ уравненій 2-го порядка для разностей координатъ, соотвѣтствующихъ разстоянію частицы отъ ея положенія равновѣсія.

Если принять, что радіусъ R растетъ отъ нуля пропорціонально времени $t$, отсчитываемаго отъ нѣкотораго момента $t_0$, то мы должны положить:

$$R = V\ (t - t_0).$$

Въ этомъ случаѣ говорятъ о сферической волнѣ и называютъ $V$ скоростью распространенія послѣдней. Если примѣнить къ уравненію подобнаго растущаго шара

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = V^2\ (t - t_0)^2 \ \ldots\ldots (4)$$

уравненія преобразованія (2)

$$x = x';\ y = y';\ z = z' + qt';\ t = t' \ \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

и если допустить, что центръ принимаетъ участіе въ равномѣрномъ движеніи всей массы, т. е. что $x_0$, $y_0$, $z_0$ преобразуются подобно $x$, $y$, $z$, то уравненіе (4) сферической волны переходитъ само въ себя, ибо мы имѣемъ:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - V^2 (t - t_0)^2 = (x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - V^2\ (t' - t'_0)^2 \ \ldots\ldots\ldots (6)$$

Поэтому уравненіе (4) сферической волны „инваріантно“ [1]) по отношенію къ преобразованію (2), если послѣднее измѣняетъ одновременно и координаты точекъ движущейся среды и центръ движенія. Но если этотъ центръ не раздѣляетъ движенія среды, если, слѣдовательно, во время возникновенія волны онъ не обладаетъ той же поступательной скоростью, что и среда, то сферическія волны не будутъ болѣе уже переходить въ сферическія волны. Этотъ случай мы имѣемъ, напримѣръ, тогда, когда въ покоящемся воздухѣ звуковыя волны исходятъ изъ движущагося звукового источника, или наоборотъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе (6) не имѣетъ больше мѣста.

---

[1]) Такъ какъ и дифференціальныя уравненія въ частныхъ производныхъ, о которыхъ была выше рѣчь, заключаютъ въ себѣ лишь разность координатъ, то къ нимъ примѣнимо то же самое замѣчаніе.

Такъ какъ уравненія преобразованія (2) при повторныхъ примѣненіяхъ приводятъ опять-таки лишь къ уравненіямъ того же вида (но только съ иными значеніями $q$), то можно принять, что и разсматриваемая, какъ неизмѣнная, система сама движется въ направленіи оси $Z$ равномѣрнымъ и прямолинейнымъ образомъ, причемъ сферическія волны не перестаютъ переходить опять-таки въ сферическія волны.

## 4. Свѣтовыя волны.

Въ то время, какъ распространеніе возмущеній въ движущейся равномѣрнымъ образомъ упругой средѣ подчиняется въ томъ случаѣ, если источникъ пертурбаціи принимаетъ участіе въ движеніи, вышеуказанному закону (2) относительности, удивительнымъ образомъ оказывается, что распространеніе электромагнитныхъ возмущеній, какъ, напримѣръ, свѣтъ, въ пустомъ пространствѣ не подчиняется ему. Правда, и свѣтъ распространяется, подобно звуку, сферическими волнами независимо отъ того, покоятся ли источникъ свѣта и наблюдатель или же оба обладаютъ одной и той же переносной скоростью.

Но доказать это не легко. Чтобы получить въ свое распоряженіе скорость, хотя до нѣкоторой степени сравнимую со скоростью свѣта, должно привлечь къ разсмотрѣнію движеніе земли по орбитѣ вокругъ солнца, и то эта скорость составляетъ лишь $\frac{1}{10000}$ часть скорости свѣта (равной $3{,}10^{10}\ \frac{\text{снт.}}{\text{сек.}}$). Въ 1881 г. А. Майкельсонъ въ Чикаго доказалъ съ помощью тонко придуманнаго опыта [1]), который онъ впослѣдствіи повторилъ съ Э. Мор-

---

[1]) См., напримѣръ, Drudes Optik, Leipzig, 1900, стр. 140—438. Въ связи съ принципомъ относительности его описываетъ также W. Wien въ Taschenbuch für Mathematiker u. Physiker. Jahrg. 1911, Leipzig, стр. 286.

леемъ, что, дѣйствительно, скорость распространенія свѣта въ направленіи движенія земли и скорость его въ направленіи, перпендикулярномъ къ нему, равны между собою. Отсюда слѣдуетъ заключить, что свѣтъ распространяется въ пространствѣ сферическими волнами даже тогда, когда общая скорость источника свѣта и наблюдателя весьма значительна.

Легко приходитъ въ голову мысль допустить, что, подобно тому, какъ воздухъ распространяетъ звукъ, такъ и нѣкоторое недоступное прямому наблюденію вещество, „эѳиръ“, распространяетъ свѣтъ, раздѣляя въ то же время движеніе источника свѣта, который оно окружаетъ. Но противъ этого допущенія говоритъ то явленіе, которое называютъ аберраціей свѣта. Здѣсь не мѣсто вдаваться въ объясненіе этого явленія [1]). Достаточно указать, что уже Френель убѣдился въ невозможности существованія эѳира, увлекаемаго источникомъ свѣта, и новѣйшая, предпринятая на этой основѣ Стоксомъ, попытка объясненія была отвергнута А. Лорентцомъ, такъ какъ она несоединима съ неустранимымъ допущеніемъ несжимаемости эѳира.

Наконецъ, гипотеза увлекаемаго эѳира несовмѣстима съ однимъ знаменитымъ физическимъ опытомъ (Ann. d. Phys. Ergänzungsb. III стр. 457). Физо заставилъ двигаться воду въ двухъ параллельныхъ трубкахъ въ противоположномъ направленіи съ равной скоростью $v$ и сравнилъ затѣмъ съ помощью явленій интерференціи скорость двухъ свѣтовыхъ лучей, которые двигались черезъ трубки въ одномъ и томъ же направленіи. Онъ нашелъ при этомъ, что разность ихъ скоростей $\delta w$ не равна разности $2v$ скоростей частицъ воды, какъ слѣдовало бы ожидать въ случаѣ полнаго увле-

---

[1]) Популярное объясненіе аберраціи основывается на теоріи истеченія, а не на допущеніи промежуточной среды, которая распространяетъ колебанія.

ченія эѳира водой, но что $\delta w = 2v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, гдѣ $n$ есть показатель преломленія воды. Отклоненіе множителя въ скобкахъ, „Френелева коэффиціента увлеченія“, отъ 1 было подтверждено также Майкельсономъ и Морлеемъ.

## II. Геометрія движенія.

### § 5. Лорентцово преобразованіе.

Согласно предыдущему, должно отвергнуть допущеніе, что свѣтъ распространяется, подобно звуку въ наполненномъ воздухомъ пространствѣ, въ нѣкоторой средѣ, „эѳирѣ“, которая раздѣляетъ скорость источника свѣта. Но такъ какъ, согласно опыту Майкельсона, сферическія волны переходятъ въ сферическія волны независимо отъ того, съ какою скоростью и въ какомъ направленіи движется источникъ свѣта, то возникаетъ задача: ($a$) перевести съ помощью преобразованія, выражающаго равномѣрное прямолинейное движеніе нѣкоторой системы координатъ относительно другой системы, величину

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-c^2\,(t-t_0)^2,$$

гдѣ $c$ есть скорость свѣта, самое въ себя такимъ образомъ, чтобы ($b$) источникъ свѣта, т. е., слѣдовательно, координаты $x_0$, $y_0$ $z_0$, (а также и $t_0$) не принимали участія въ этомъ преобразованіи. Что касается прежде всего послѣдняго требованія, то его можно исполнить попросту тѣмъ, что принимаютъ $x_0 = y_0 = z_0$ и $x_0' = y_0' = z_0' = 0$, Если къ этому прибавить еще $t_0 = t_0' = 0$, то это значитъ, что въ моментъ $t_0 = t_0' = 0$ центръ возбужденія есть общее начало движущихся другъ относительно друга системъ координатъ $S$ ($X$, $Y$, $Z$, „покоящаяся“) и $S'$ ($X'$, $Y'$, $Z'$, „движущаяся“ система). Требованіе ($a$), чтобы преобразованіе, благодаря которому должно получиться

$$x^2+y^2+z^2-c^2\,t^2 = x'^2+y'^2+z'^2-c^2\,t'^2 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

выражало равномѣрное движенiе $S'$ относительно $S$, будетъ удовлетворено, если координаты движущейся системы, или, общѣе, линейныя функцiи ихъ будутъ отличаться отъ координатъ неизмѣнной системы на величины, пропорцiональныя времени $t'$. Но если бы мы къ этому прибавили уравненie $t = t'$, то мы снова пришли бы— какъ это показываетъ уже простѣйшiй случай движенiя вдоль оси $Z$—къ формуламъ преобразованiя (2) § 3, которыя мы должны были отвергнуть для разсматриваемаго случая. Намъ не остается поэтому ничего другого, какъ внести въ отношенiе между временами $t$ и $t'$ системъ $S$, $S'$ и координаты.

Сдѣлавъ это въ наиболѣе общей формѣ, мы получаемъ уравненiя преобразованiя слѣдующаго вида:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\ x' + a_{12}\ y' + a_{13}\ z' + a_{14}\ t' \\ y &= a_{21}\ x' + a_{22}\ y' + a_{23}\ z' + a_{24}\ t' \\ z &= a_{31}\ x' + a_{32}\ y' + a_{33}\ z' + a_{34}\ t' \\ t &= a_{41}\ x' + a_{42}\ y' + a_{43}\ z' + a_{44}\ t' \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

гдѣ между коэффицiентами $a_{ik}$ $(i,\ k = 1,2,3,4)$ должна быть такого рода зависимость, чтобы уравненie (7) удовлетворялось тождественнымъ образомъ. Систему формулъ (8) мы называемъ вмѣстѣ съ Минковскимъ Лорентцовымъ преобразованiемъ. Въ требованiи ихъ примѣнимости ко времени и пространству, т. е. къ „мiру“, и состоитъ принципъ относительности. Само же это требованie Минковскiй называетъ мiровымъ постулатомъ.

Если подставить выраженiя (8) въ лѣвую сторону (7) и сравнить коэффицiенты степеней и произведенiй $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, то мы получимъ слѣдующiя $4 + 6 = 10$ отношенiй:

$$\left.\begin{aligned} & a^2_{1i} + a^2_{2i} + a^2_{3i} - c^2 a^2_{4i} = 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \quad . \quad . \quad (9). \\ & a^2_{14} + a^2_{24} + a^2_{34} - c^2 a^2_{44} = -\, c^2 \\ & a_{1i}\, a_{1k} + a_{2i}\, a_{2k} + a_{3i}\, a_{3k} - c^2 a_{4i}\, a_{4k} = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i \neq y) \end{aligned}\right\}$$

Мы увидимъ далѣе (§ 10), что 16 коэффиціентовъ $a_{ik}$ можно изобразить съ помощью $16 - 10 = 6$ независимыхъ величинъ, а пока отмѣтимъ лишь получающееся путемъ дифференцированія изъ (8) съ помощью уравненій (9) отношеніе:

$$dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2-c^2dt'^2 \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Уравненія (8), дополненныя отношеніями (9), образуютъ наиболѣе общую группу подстановокъ, переводящихъ квадратичную форму $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ самое въ себя. Для знака опредѣлителя $(a_{ik}) = \pm 1$ мы возьмемъ верхній.

Геометрически-механическое значеніе преобразованія можно узнать уже изъ частнаго случая, получающагося изъ общаго случая путемъ выдѣленія оси $Z$. Для этого мы придадимъ уравненіямъ (7), и (8) слѣдующій, болѣе частный, видъ.

Пусть, положивъ

$$z^2 - c^2t^2 \equiv z'^2 - c^2t'^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

(и взявъ также $x = x'$, $y = y'$), мы имѣемъ

$$\left.\begin{aligned} z &= a_{33}z' + a_{34}t' \\ t &= a_{43}z' + a_{44}t' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (11a)$$

Подставивъ въ (11) значенія $z$ и $t$ изъ (11$a$) и сравнивъ степени $z'$, $t'$, мы получимъ три отношенія

$$a^2_{33} - c^2a^2_{43} = 1;\; a^2_{34} - c^2a^2_{44} = -c^2;\; a_{33}a_{34} - c^2a_{43}a_{44} = 0.$$

Если мы положимъ

$$a_{33} = k;\; a_{34} = kq,$$

то, такъ какъ

$$c^4a^2_{43}a^2_{44} = (a^2_{33} - 1)\,(a^2_{34} + c^2) = a^2_{33}\,a^2_{34},$$

получаемъ

$$k^2\,(c^2 - q^2) = c^2,$$

откуда

$$k^2 = \frac{1}{1 - \frac{q^2}{c^2}};$$

отсюда легко получается

$$a_{43} = \frac{kq}{c^2}; \; a_{44} = k.$$

Уравненія (11a) получаютъ, такимъ образомъ, видъ

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' \\ z &= kz' + kqt' \\ t &= \frac{kq}{c^2}\,z' + kt', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

гдѣ

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Прежде, чѣмъ мы изслѣдуемъ содержаніе этихъ формулъ, мы установимъ, что онѣ (какъ и вообще всякое Лоренцово преобразованіе) содержатъ въ себѣ въ качествѣ частнаго случая формулу относительности Ньютоновой механики (2) § 2. Дѣйствительно, если раздѣлить тождество (7) на $c^2$, то оно переходитъ для $c = \infty$ въ $t = t'$. Соотвѣтственно съ этимъ изъ формулъ (12) и (13) мы получаемъ для $c = \infty$

$$k = 1; \; z = z' + qt'; \; t = t'.$$

Чтобы получить значеніе формулъ (12), мы сначала постараемся упростить ихъ—что̀ можно сдѣлать безъ ущерба для общности ихъ, если отвлечься отъ только что разсмотрѣннаго частнаго, случая,—введя для временъ

$t$, $t'$ вмѣсто секунды другую единицу. Именно станемъ писать

$$\text{вмѣсто } ct \ldots t;\ \text{вмѣсто } ct' \ldots t' \quad . \; . \; . \; . \quad (14)$$

т. е., вмѣсто секунды, такую (въ 3. $10^{10} = c$ разъ меньшую) единицу времени, что единица длины (1 снт.) проходится лучемъ свѣта въ эту новую единицу времени. Такъ какъ, согласно (13), величина $q$ имѣетъ размѣръ $c$, т. е. скорости, то слѣдуетъ также взять

$$\text{вмѣсто } \frac{q}{c} \ldots q$$

Благодаря этому $k$ переходитъ въ

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

и на мѣсто формулы (11) получается

$$z^2 - t^2 = z'^2 - t'^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

а на мѣсто (12) получаются слѣдующія формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= x';\ y = y' \\ z &= kz' + kqt' \\ t &= kqz' + kt' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16a)$$

откуда получаются обратныя формулы:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x;\ y' = y \\ z' &= kz - kqt \\ t' &= -kqz + kt \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (16b)$$

Формулы (16a), и (16b) показываютъ, что́ можетъ сказать наблюдатель покоящейся системы $S$ ($Z$, $T$) касательно отношеній движущейся системы, на основаніи извѣстныхъ ему насчетъ $z$, $t$ данныхъ собственной системы; и, обратно,—онѣ раскрываютъ передъ наблюдателемъ движущейся системы $S'$ ($Z'$, $T'$) отношенія покоящейся системы.

Эти (отчасти парадоксальныя) слѣдствія будутъ разсмотрѣны для нѣкоторыхъ отдѣльныхъ случаевъ въ слѣдующемъ §. Но прежде всего мы отмѣтимъ еще одно отношеніе, которымъ мы воспользуемся впослѣдствіи и которое получается изъ (16a) путемъ дифференцированія (на основаніи (15)):

$$dz'^2 - dt'^2 = dz^2 - dt^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

Слѣдуетъ еще указать, что сложеніе двухъ Лорентцовыхъ преобразованій даетъ снова такое же преобразованіе Именно, если прибавить къ (16b) аналогичное отношеніе между $z'$, $t'$ и $z''$, $t''$ съ $q'$ ($< 1$) на мѣсто $q$ ($< 1$) и если исключить $z'$, $t'$, то мы получаемъ:

$$\begin{aligned} z'' &= kk' \, ((1 + qq') \, z - (q + q') \, t) \\ t'' &= kk' \, (-(q + q') \, z + (1 + qq') \, t). \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, получается

$$\text{вмѣсто } q \ldots [q] = \frac{q + q'}{1 + qq'}$$

$$\text{вмѣсто } k \ldots [k] = kk' \, (1 + qq'),$$

гдѣ опять $[q] < 1$ и

$$[k]^2 \, (1 - [q]^2) = 1.$$

Въ частности для $q = -q'$, $z'' = z$; $t'' = t$, что́ соотвѣтствуетъ обратному переходу отъ ($z'$, $t'$) къ ($z$, $t$).

## § 6. Длина и время въ относительной системѣ.

Легко замѣтить сперва, что $S$ и $S'$, какъ требовалось въ § 5, движутся другъ относительно друга съ равномѣрной скоростью. Вѣдь въ моментъ $t = t' = 0$ начало движущейся системы $S'$ $z' = 0$ совпадаетъ съ $z = 0$ покоящейся системы $S$. По истеченіи времени

$t'$ $O'$ отошло отъ $O$ на отрѣзокъ, который можно получить изъ (16b), допустивъ $z' = 0$. Мы получаемъ:

$$z = qt,$$

откуда слѣдуетъ, что начало $O'$, разсматриваемое изъ покоящейся системы, удаляется отъ $O$ съ равномѣрной скоростью $q$ вдоль оси $Z$ въ положительномъ направленіи. Обратно: $O$ удаляется въ отрицательномъ направленіи отъ $O'$, потому что изъ (16a) для $z = 0$ слѣдуетъ

$$z' = -qt'.$$

Въ этомъ пунктѣ новый принципъ относительности совпадаетъ съ принципомъ относительности § 2. Но разсматриваемыя теперь отношенія системъ $S$, $S'$ отличаются отъ разсмотрѣнныхъ въ § 2 отношеній тѣмъ замѣчательнымъ обстоятельствомъ, что при переходѣ отъ покоящейся системы къ движущейся, и обратно, **измѣняются масштабы какъ для времени, такъ и для длины**, причемъ степень ихъ различія зависитъ отъ ихъ относительной скорости $q$.

Дѣйствительно: наблюдатель, связанный съ началомъ $z =$ о неизмѣнной системы $S$, припишетъ замѣченному имъ событію движущейся системы $S'$ время

$$t = \frac{1}{k} t',$$

какъ это вытекаетъ изъ (16b) для $z = 0$. Такъ какъ $k > 1$, то ему будетъ представляться, что движущіеся часы идутъ медленнѣе, чѣмъ это есть въ дѣйствительности. Но и обратно,—наблюдатель движущейся системы заключаетъ изъ (16a) для $z' =$ о, что

$$t' = \frac{1}{k} t,$$

т. е. что часы покоящейся системы идутъ медленнѣе, чѣмъ это есть въ дѣйствительности.

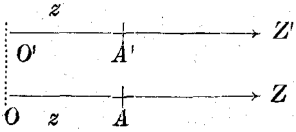
Аналогичное отношеніе наблюдается при измѣреніи длинъ. Разстояніе $z'$, отдѣляющее точку $A'$ оси $Z'$ системы $S'$ отъ начала $O'$, имѣетъ для наблюдателя въ неизмѣнной системѣ $S$ получающуюся изъ (16b) для $t = 0$ длину

$$z = \frac{1}{k} z',$$

что̀ представляетъ кажущееся сокращеніе наблюдаемаго отрѣзка $z$ по отношенію къ дѣйствительному отрѣзку $z' = \overline{O'A'}$. Наоборотъ, для наблюдателя, связаннаго съ движущейся системой $S'$, получается изъ (16a) для момента $t' = 0$ неизмѣнной системы

$$z' = \frac{1}{k} z,$$

что̀ означаетъ кажущееся сокращеніе отрѣзка $z'$ по отношенію къ $z$.—Такимъ образомъ, наблюдателю, находящемуся въ одной изъ двухъ движущихся другъ относительно друга системъ, кажется, что чужіе часы идутъ медленнѣе, а чужія длины сокращаются.



Фиг. 2.

Что касается длинъ, перпендикулярныхъ къ направленію движенія, какъ $x$, $y$, то онѣ оцѣниваются одинаковымъ образомъ.

И выраженіе: „одновременный" различно для обѣихъ системъ $S$, $S'$. Если мы вообразимъ себѣ въ конечныхъ пунктахъ отрѣзка $z = \overline{OA}$ (фиг. 2) въ неизмѣнной системѣ двухъ наблюдателей $O$, $A$, которые отмѣчаютъ на своихъ часахъ время при прохожденіи конечныхъ пунктовъ $O'$, $A'$ отрѣзка $z' = \overline{O'A'}$ движущейся системы, проходящихъ въ одинъ и тотъ же моментъ $t$ мимо $O$, $A$, и если мы вообразимъ себѣ въ движущейся системѣ такихъ же двухъ наблюдателей въ конечныхъ пунктахъ $O'$, $A'$ отрѣзка $z'$, то всѣ четыре пары часовъ надо поставить такимъ образомъ, что когда во время прохожденія часы въ $O$, $A'$, $O'$ показываютъ соотвѣтственно $t = t' = 0$, то часы въ $A'$ показываютъ не $t' = 0$, а

$$t' = -qkz,$$

какъ это получается изъ (16b) для $t = 0$. Слѣдовательно, событіе, „одновременное“ для $O$ и $A$ вовсе не таково для $O'$ и $A'$.

Замѣчательно, далѣе, что въ релятивистической кинематикѣ параллелограммъ скоростей теряетъ свое значеніе. Если дифференцировать уравненія (16b) по $t$, то мы получимъ, пользуясь сокращеніями, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}; \frac{dx'}{dt'} = \dot{x}'$, и т. д.

$$\frac{dx'}{dt} = \dot{x};\ \frac{dy'}{dt} = \dot{y}$$

$$\frac{dz'}{dt} = k\dot{z} - kq;\ \frac{dt'}{dt} = -kq\dot{z} + k$$

или также:

$$\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \dot{x}' = \frac{\dot{x}}{k\,(1 - q\dot{z})};\ \dot{y}' = \frac{\dot{y}}{k\,(1 - q\dot{z})} \qquad (18)$$

$$\dot{z}' = \frac{\dot{z} - q}{1 - q\dot{z}};\ \dot{z} = \frac{\dot{z}' - q}{1 - q\dot{z}'}.$$

Путемъ возведенія въ квадратъ и сложенія мы получаемъ изъ (18), полагая

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2;\ \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 = v'^2,$$

слѣдующее изящное отношеніе [1])

$$\frac{1 - v'^2}{1 - v^2} = \frac{(1 + q\dot{z}')^2}{1 - q^2} = \frac{1 - q^2}{(1 - q\dot{z})^2}, \quad . \quad . \quad (18a)$$

---

[1]) Wiechert, Relativitätsprincip und Äther, Physic. Zeit. 1911, стр. 692.

изъ котораго, между прочимъ, вытекаетъ, что $v'$ не есть равнодѣйствующая $v$ и $q$ въ смыслѣ параллелограмма скоростей.

## § 7. Пространство-временныя координаты.

Объ отношеніяхъ, описываемыхъ этимъ преобразованіемъ, можно составить себѣ удобное представленіе, если разсматривать величины $z$, $t$, какъ прямоугольныя координаты въ нѣкоторой изобразительной плоскости (Bildebene) и найти въ ней значенія $z'$, $t'$. Если ввести уголъ $\varphi$, то, положивъ

$$q = tg\,\varphi, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

т. е.

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}; \; \sin\varphi = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{1-q^2}{1+q^2} = \frac{1}{K^2},$$

гдѣ такимъ образомъ

$$K = \sqrt{\frac{1+q^2}{1-q^2}},$$

получаемъ

$$k = K\cos\varphi, \; kq = K\sin\varphi,$$

и формулы (16a) превращаются въ

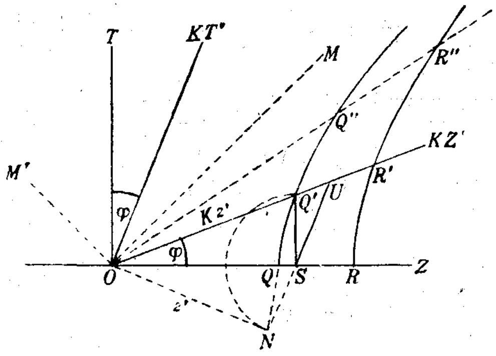
$$\left.\begin{aligned} z &= Kz'\cos\varphi + Kt'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\ t &= Kz'\sin\varphi + Kt'\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21)$$

и обратно:

$$\left.\begin{aligned} Kz'\cos 2\varphi &= z\cos\varphi - t\sin\varphi \\ Kt'\cos 2\varphi &= -z\sin\varphi + t\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21a)$$

Формулы (21) означаютъ переходъ отъ прямоугольной системы $\Sigma = (Z, T)$, координаты которой представляютъ положеніе $(z, t)$ нѣкоторой точки, движущейся, напримѣръ, вдоль оси $Z$ покоящейся системы $S$, къ косоугольной системы $\Sigma' = (KZ', KT')$, представляющей положеніе $(z', t')$ той же самой точки относительно движущейся системы $S'$. Только въ $\Sigma'$ откладываются не самыя ея координаты $z'$, $t'$, но ихъ кратныя $Kz'$, $Kt'$.

Оси косоугольной системы наклонены къ осямъ прямоугольной на углы $\varphi$ и $-\varphi$. Направляющая пара $KZ'$, $KT'$ „сопряженна“ относительно каждой равносторонней гиперболы, ассимптотами которой являются обѣ медіаны $OM$, $OM'$ прямоугольной системы (фиг. 3), слѣдовательно, въ частности относительно самой этой пары медіанъ.



Фиг. 3.

Чтобы найти изъ длины $\overline{OQ'} = Kz'$ какой-нибудь точки оси $KZ'$ саму длину $z'$, должно построить равностороннюю гиперболу, проходящую черезъ $Q'$, ассимптоты которой суть медіаны $OM$, $OM'$. Она отсѣкаетъ на оси $Z$ отрѣзокъ $\overline{OQ} = z'$ [1]). Вѣдь если, наоборотъ, $z$, $t$

---

[1]) Впрочемъ, длину $z' = \overline{OQ}$ можно получить изъ $z'.K = \overline{OQ'}$ слѣдующимъ построеніемъ: мы описываемъ вокругъ точки $S$, основанія перпендикуляра изъ $Q'$ на $\overline{OZ}$, какъ центра, окружность съ радіусомъ $\overline{SQ'} = Kz' \cos\varphi$ и проводимъ къ нему изъ $O$ касательную. Если эта касательная будетъ $\overline{ON}$, то изъ

$$\overline{ON}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{SN}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{SQ'}^2 = K^2 z'^2 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = z'^2$$

слѣдуетъ, что

$$\overline{ON} = \overline{OQ} - {}'.$$

суть координаты той точки $Q'$ равносторонней гиперболы съ осью $z' = \overline{OQ}$, въ которой ее встрѣчаетъ ось $t' = O$, то въ виду того, что

$$\frac{z}{t} = tg\varphi = q$$

и въ виду того, что (16)

$$z^2 - t^2 = z'^2,$$

$$\overline{OQ}'^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SQ}'^2 = z^2 + t^2 = (z^2 - t^2)\frac{1+q^2}{1-q^2} = K^2 z'^2,$$

что̀ и требовалось доказать.

На этой фигурѣ легче разсмотрѣть парадоксальные тезисы предыдущаго §. Такъ, напримѣръ, съ точки зрѣнія прямоугольной системы координатъ $\Sigma(Z, T)$ точка $\Theta'$ имѣетъ координаты $z$, $t$. Съ точки же зрѣнія косоугольной системы $\Sigma'$ она имѣетъ координаты $(K, z', 0)$, гдѣ $z' = \overline{OQ} < z = \overline{OS}$.

Положеніе, которое занимаетъ съ ростомъ $t$ нѣкоторый отрѣзокъ $\overline{OA} = z$ (§ 6), связанный съ неизмѣнной системой $S$, представляется въ изобразительной плоскости въ видѣ параллельныхъ отрѣзковъ къ $z = \overline{OS}$ (фиг. 3), причемъ $O$ движется вдоль оси $T$. Съ момента $t' = 0$ точки скользящаго отрѣзка $\overline{OS}$ переступаютъ одна за другой ось $KZ'$ системы $\Sigma'$ между $O$ и $Q'$ и поэтому представляются наблюдателю въ $S'$ одновременными.

Слѣдовательно, для этого наблюдателя отрѣзокъ $Kz$ сжимается въ $\overline{OQ'} = Kz'$ или же $z = \overline{OS}$ въ $z' = \overline{OQ}$.

Мы видимъ далѣе, что съ точки зрѣнія системы $\Sigma'$ $O$ и $Q'$ имѣютъ одно и то же время $t' = 0$. Съ точки же зрѣнія системы $\Sigma$ $O$ имѣетъ время $t = 0$, $Q'$ имѣетъ время $t = SQ' = kqz'$; и т. д.

Если присоединить къ изобразительной плоскости $(Z, T)$ еще двѣ перпендикулярныя между собою и перпендикулярныя къ $Z$ и $T$ координатныя оси $X$

($X'$), $Y$ ($Y'$), то получится четырехмѣрное изобразительное пространство съ одной прямоугольной системой координатъ $\Sigma$ и одной, отчасти косоугольной, системой $\Sigma'$. Положенію какой-нибудь матеріальной точки[1] $x$ ($=x'$), $y$ ($=y'$), $z$, отнесенному къ прямоугольной системѣ координатъ $S$ обыкновеннаго пространства въ моментъ $t$, соотвѣтствуетъ точка $x$, $y$, $z$, $t$, отнесенная къ координатной системѣ $\Sigma$ четырехмѣрнаго пространства, какъ „изобразительная точка“, „пространство-временная точка“ или „міровая точка“ (по Минковскому); къ координатной системѣ $S'$ обыкновеннаго пространства, движущейся со скоростью $q$ относительно $S$, принадлежатъ координаты $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ косоугольной системы $\Sigma'$ въ четырехмѣрномъ изобразительномъ пространствѣ. Къ этому мы вернемся въ § 9.

## § 8. Міровая линія матеріальной точки; ея собственное время

Если слѣдить въ плоскости $\Sigma$ за изображеніемъ какой-нибудь матеріальной точки $\mu$, которая движется какимъ-нибудь образомъ (напримѣръ, неравномѣрно) въ обыкновенномъ пространствѣ вдоль оси $Z$ прямоугольной системы координатъ $S$, то ей принадлежитъ нѣкоторая кривая, ея „міровая линія“ (Минковскій), касательная къ которой въ какой-нибудь точкѣ ($z$, $t$) даетъ скорость точки $\mu$: $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$ въ $S$ во время $t$.

Очевидно, что скорость $q$ системы $S'$ по отношенію къ системѣ $S$ не можетъ преступить предѣла 1, потому

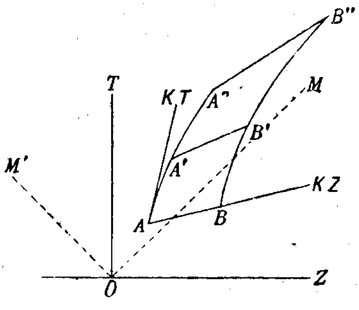
---

[1] Хотя мы находимся еще въ области кинематики, мы, однако, вводимъ уже здѣсь понятіе матеріальной точки, чтобы имѣть удобное отличіе отъ изобразительной точки.

что въ противномъ случаѣ коэффиціенты преобразованія (16) стали бы мнимыми. Мы допустимъ, что и скорость $(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ldots .)$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

точки $\mu$ въ системѣ $S$ имѣетъ верхнимъ предѣломъ 1. Такъ какъ тогда (прежде всего въ случаѣ $x = y = 0$ міровая линія матеріальной точки $\mu$ ни въ одной точкѣ не наклонена къ оси $Z$ больше, чѣмъ медіана $OM$ первой четверти (фиг. 3), то изъ той же фигуры получается, что и относительныя скорости $\dot{z}' = \frac{dz'}{dt'}$; $\dot{z}''$, $\ldots .$ точки $\mu$ по отношенію къ другимъ системамъ $S'$, $S''$, $\ldots .$ должны быть меньше, чѣмъ 1. Такимъ образомъ, для каждаго элемента какой-нибудь міровой линіи можно найти такую косоугольную систему координатъ $\Sigma'$, что ея ось $T'$ параллельна касательной къ міровой линіи въ этой точкѣ, такъ что по отношенію къ соотвѣтствующей системѣ $S'$ точка $\mu$ находится мгновенно въ покоѣ. Мы скажемъ (Минковскій), что благодаря введенію координатной системы $\Sigma'$ точка $\mu$ преобразована на покой.



Фиг. 4.

Пусть міровая линія какой-нибудь матеріальной точки, движущейся вдоль оси $Z$ обыкновенной пространственной координатной системы $S$, будетъ представлена въ изобразительной плоскости кривой $A\,A'A''\ldots$ (фиг. 4). Если мы превратимъ касательную въ какой-нибудь точкѣ $A$ $(z, t)$ въ ось **T** нѣкоторой введенной для этого момента времени косоугольной системы координатъ, **Z**, **T** съ координатами $K\zeta$, $K\tau$, гдѣ

$$\zeta = kz - kqt$$
$$\tau = -kqz + kt$$

$q = \dot{z} = \frac{dz}{dt}$ и $k$, $K$ имѣютъ прежнія значенія (15), (20), благодаря чему, слѣдовательно, точка преобразуется на покой, то, такъ какъ въ разсматриваемой точкѣ $\zeta = \tau = 0$. $\frac{d\zeta}{d\tau} = 0$, мы получаемъ путемъ дифференцированія (какъ выше въ § 5 въ концѣ)

$$d\tau^2 = dt^2 - dz^2$$

или

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = dt\sqrt{1 - \dot{z}^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Но въ виду (17) длина $d\tau$ при введеніи какой-нибудь другой косоугольной системы $\Sigma'$ имѣетъ также выраженіе

$$d\tau = dt'\sqrt{1 - \dot{z}'^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21a)$$

гдѣ $\dot{z}' = \frac{dz'}{dt'}$; слѣдовательно, $d\tau$ есть *нѣкоторая, не зависящая отъ выбора системы, величина.* Минковскій называетъ элементъ $d\tau$ міровой линіи элементомъ „собственнаго времени“ $\tau$ точки, гдѣ

$$\tau = \int d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

причемъ интегралъ берется, начиная отъ какой-нибудь изъ ея точекъ. Элементъ $d\tau$ связанъ съ линейнымъ элементомъ $ds$ міровой линіи, измѣреннымъ въ системѣ $\Sigma$, равенствомъ

$$ds = dt\sqrt{1 + \dot{z}^2} = d\tau\,.\,K,$$

гдѣ

$$K = \sqrt{\frac{1 + \dot{z}^2}{1 - \dot{z}^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

что очевидно и непосредственнымъ образомъ, потому что хотя $d\tau$ есть линейный элементъ вдоль оси $T$, но косоугольныя координаты суть не $\zeta$, $\tau$, а $K\zeta$, $K\tau$.

Вмѣстѣ съ $A$ преобразуются на покой всѣ точки $AKZ$— направленія, сопряженнаго съ касательной $AKT$ по отношенію къ парѣ медіанъ $OM$, $OM'$—если ввести въ качествѣ осей координатъ $AKT$, $AKZ$. Если это происходитъ въ каждой точкѣ міровой линіи $AA'\ A''\ldots.$ и если отложить, сверхъ того, на $AKZ$, $A'K'Z'$, ..... равныя длины $\overline{AB}=\overline{A'B'}=\ldots.$ (однако, каждую въ масштабѣ, соотвѣтствующемъ направленію, такъ что, слѣдовательно, (§ 7), $K.\overline{AB}=K'.\ \overline{A'B'}=\ldots.$), то можно представить себѣ, что точки міровой линіи $BB'B''\ldots.$ неизмѣннымъ образомъ связаны во время движенія $A$ съ этой точкой (M. Born, Phys. Zeitschrift, 1909).

Если мы возьмемъ міровыя линіи въ плоскости $ZT$ системы $\Sigma$, то не безынтересно отыскать движеніе соотвѣтственной матеріальной точки вдоль оси $Z$ системы $S$ въ обыкновенномъ пространствѣ, и обратно. И здѣсь мы наталкиваемся на парадоксы. Такъ, напримѣръ, въ $\Sigma$ существуютъ міровыя линіи такого рода, что для наблюдателя, связаннаго съ соотвѣтственной матеріальной точкой, ни время, ни мѣсто не измѣняются, между тѣмъ какъ такое измѣненіе замѣчается всякимъ наблюдателемъ, неизмѣнно связаннымъ съ системой $S$ или $S'$. Именно, если въ формулахъ

$$z = k\zeta - kq\tau$$
$$t = -kq\zeta + k\tau$$

мы примемъ $\zeta$ и $\tau$ за постоянныя величины, а $q$ (и, слѣдовательно, $k$) за перемѣнныя величины, то формулы эти, вмѣстѣ взятыя, и даютъ міровую линію искомаго рода. Для полученія этого уравненія проще, чѣмъ исключать $q$, исходить изъ тождества

$$z^2 - t^2 = \zeta^2 - \tau^2.$$

Это уравненіе представляетъ равностороннюю гиперболу ($QQ'Q''$, . . . или $RR'R''$ . . . . на фиг. 3), имѣющую ассимптотами медіаны $OM$, $OM'$. Она, какъ мы увидимъ (§ 13), есть міровая линія для матеріальной точки, движущейся равномѣрно ускореннымъ образомъ вдоль оси $Z$ системы $S$.

## § 9. Криволинейное движеніе матеріальной точки.

Опредѣленія § 8 можно прямо перенести на міровую линію матеріальной точки $\mu$, описывающей въ трехмѣрномъ пространствѣ любую кривую траэкторію съ перемѣнной скоростью. Соотвѣтственный образъ въ четырехмѣрномъ („плоскомъ“) пространствѣ съ прямоугольной системой координатъ $\Sigma$ $(X, Y, Z, T)$ (§ 5) представляетъ опять-таки міровую линію $A\,A'A''$ . . . , наклоненіе которой къ оси $T$ ни въ одной точкѣ не больше 45°, потому что изъ $v < 1$ слѣдуетъ также $\dot x < 1$, $\dot y < 1$, $\dot z < 1$. Если взять снова за начало $A$ $(x,\ y,\ z,\ t)$, а касательную къ міровой линіи $A$ за ось $K\mathrm{T}$ косоугольной системы, пространство $\Xi\mathrm{H}\mathrm{Z}$ которой сопряжено относительно этой оси съ трехмѣрнымъ конусомъ съ угломъ раскрытія въ 45°, то по отношенію къ системѣ $S$, соотвѣтствующей системѣ $\Xi\mathrm{H}\mathrm{Z}$, точка $\mu$ находится мгновенно въ покоѣ, и уравненіе (10) § 5, такъ какъ въ точкѣ $\xi = \eta = \zeta = \tau = 0$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{d\zeta}{d\tau} = 0$$

даетъ

$$d\tau^2 = d\,t^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = dt^2\,(1 - v^2). \quad . \quad . \quad (24)$$

если $v$ есть скорость точки $\mu$ по отношенію къ системѣ $S$ обыкновеннаго пространства, т. е. если

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{a}).$$

Теперь, если $d\tau$ есть элементъ міровой линіи $\mu$ въ точкѣ $A$ и собственное время есть

$$\tau = \int d\tau,$$

то изъ (24) получается, какъ въ § 8 (21), (21a),

$$\tau = \int dt \sqrt{1-v^2} = \int dt' \sqrt{1-v'^2} =$$
$$= \int dt'' \sqrt{1-v''^2} = \dots \quad . \; . \; . \; . \; (25)$$

полагая, что

$$\left.\begin{aligned} v'^2 &= \left(\frac{dx'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dz'}{dt'}\right)^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2; \\ v''^2 &= \dot{x}''^2 + \dot{y}''^2 + \dot{z}''^2 \dots \quad . \; . \; . \end{aligned}\right\} (25a)$$

опредѣляютъ скорости точки $\mu$, вычисленныя для какихъ-нибудь другихъ, движущихся въ обыкновенномъ пространствѣ прямолинейно и равномѣрно, системъ координатъ $S', S''$ .... ; иначе говоря, собственное время $\tau$ есть независимая отъ выбора этихъ системъ отсчета величина. Оно, слѣдовательно, инваріантно по отношенію къ Лорентцову преобразованію.

Поэтому цѣлесообразно ввести $\tau$, какъ независимую перемѣнную, и отнести движеніе матеріальной точки $\mu$, сперва кинематически, къ его собственному времени. Тогда первые и вторые дифференціальные коэффиціенты отъ $x, y, z, t$ по $\tau$ преобразуются такимъ же образомъ, какъ сами координаты $x, y, z, t$. Они, какъ и послѣднія, образуютъ составляющія своего рода четырехмѣрнаго вектора, полными аналогами котораго въ обыкновенномъ пространствѣ скорость и ускореніе были бы лишь въ томъ случаѣ, если бы мы замѣнили время $t$ черезъ $t\sqrt{-1}$ и такимъ образомъ ввели мнимое четырехмѣрное пространство. Но это лежитъ внѣ рамокъ нашихъ лекцій.

Замѣтимъ еще слѣдующее, вытекающее изъ (24), равенство, которое намъ пригодится впослѣдствіи.

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2-\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2=-1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (26)$$

## § 10. Общее Лорентцово преобразованіе. Его геометрическое истолкованіе.

Въ заключеніе этого отдѣла приведемъ систему значеній коэффиціентовъ $a_{ik}$ $(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, встрѣчающихся въ общихъ формулахъ преобразованія (8) § 5, которая удовлетворяетъ тождественнымъ образомъ даннымъ въ (9) уравненіямъ (§ 5) для $c=1$

$$\left.\begin{array}{ll} x^2{}_{1i}+a^2{}_{2i}+a^2{}_{3i}-a^2{}_{4i}=1 & (i=1,\ 2,\ 3) \\ a^2{}_{14}+a^2{}_{24}+a^2{}_{34}-a^2{}_{44}=-1 & \\ a_{1i}\,.\,a_{1k}+a_{2i}\,.\,a_{2k}+a_{3i}\,.\,a_{3k}-a_{4i}\,.\,a_{4k}=0 & \\ & (i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4;\ i\neq k). \end{array}\right\}(27)$$

Это можно подтвердить путемъ легкихъ выкладокъ для слѣдующей системы:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11}=\dfrac{k^2u^2}{k+1}+1\,; & a_{12}=\dfrac{k^2uv}{k+1}\,; & a_{13}=\dfrac{k^2uw}{k+1}; & a_{14}=ku \\ a_{21}=\dfrac{k^2vu}{k+1}\,; & a_{22}=\dfrac{k^2v^2}{k+1}+1\,; & a_{23}=\dfrac{k^2vw}{k+1}\,; & a_{24}=kv \\ a_{31}=\dfrac{k^2wu}{k+1}\,; & a_{32}=\dfrac{k^2wv}{k+1}; & a_{33}=\dfrac{k^2w^2}{k+1}+1\,; & a_{34}=kw \\ a_{41}=ku\,; & a_{42}=kv\,; & a_{43}=kw\,; & a_{44}=k, \end{array}\right\}(28)$$

гдѣ

$$k^2\,(u^2+v^2+w^2-1)=-1,\ \text{слѣдовательно,}$$

$$k^2=\frac{1}{1-u^2-v^2-w^2}\,, \; . \; . \; . \; . \qquad (28a)$$

а $u$, $v$, $w$ суть три вещественныя величины, которыя можно истолковать (подобно $q$ для системы $S$ § 6), какъ составляющія скорости движущейся системы $S'$ относительно осей покоящейся системы $S$ (§ 5). Опредѣлитель $|a_{ik}|$ имѣетъ, какъ легко замѣтить, значеніе $+1$. Изъ $a_{ik}$ 1) получаются наиболѣе общія значенія $b_{ik}$ коэффиціентовъ, удовлетворяющихъ уравненіямъ (27), если положить

$$b_{i4} = b_{4i} = a_{4i} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$b_{ik} = a_{1k}\alpha_i + a_{2k}\beta_i + a_{3k}\gamma_i \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)$$

гдѣ девять величинъ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ представляютъ коэффиціенты ортогональной субституціи въ обыкновенномъ пространствѣ, т. е. удовлетворяютъ 6 уравненіямъ:

$$\begin{aligned} \alpha_i{}^2 + \beta_i{}^2 + \gamma_i{}^2 &= 1 \\ \alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k + \gamma_i\gamma_k &= 0, \end{aligned} \qquad (i \neq k = 1,\ 2,\ 3)$$

и могутъ быть выражены извѣстнымъ способомъ съ помощью трехъ независимыхъ величинъ. Если приравнять нулю всѣ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, кромѣ $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1$, если далѣе положить $u = v = 0$; $w = q$, то $b_{ik}$ переходятъ въ систему коэффиціентовъ уравненія (16а) § 5. Формулы преобразованія (8) § 5 съ коэффиціентами (28) можно далѣе превратить въ отношеніе между четырехмѣрной прямоугольной (или косоугольной) системой координатъ $\Sigma$ и косоугольной (или другой косоугольной) системой $\Sigma'$, причемъ направленія осей косоугольныхъ системъ попарно сопряжены по отношенію къ трехмѣрному коническому пространству

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (29)$$

---

1) Изъ (28) получаются коэффиціенты ортогональной субстанціи плоскаго четырехмѣрнаго пространства, если замѣнить въ девяти членахъ опредѣлителя $|a_{ik}|$ $k+1$ черезъ $k-1$, опредѣливъ $k$ изъ

$$k^2(u^2 + v^2 + w^2 + 1) = 1.$$

Если положить именно для $i = 1, 2, 3, 4$:

$$a^2{}_{1i} + a^2{}_{2i} + a^2{}_{3i} + a^2{}_4{}^i = K_i^2, \quad \dots \dots \quad (30)$$

то въ виду (27) для $i = 1, 2, 3$:

$$\left.\begin{array}{l} K_i^2 = 1 + 2\,a^2{}_{4i} \\ K_4^2 = -1 + 2\,a^2{}_{44} \end{array}\right\} \dots \dots \quad (31)$$

или

$$\left.\begin{array}{l} K_1^2 = 1 + 2k^2u^2;\ K_2^2 = 1 + 2k^2v^2; \\ K_3^2 = 1 + 2k^2w^2;\ K_4^2 = -1 + 2k^2 \end{array}\right\} \dots \dots \quad (31a)$$

Если далѣе положить для $i = 1, 2, 3, 4$:

$$a_{1i} = K_i a_i;\ a_{2i} = K_i b_i;\ a_{3i} = K_i c_i;\ a_{4i} = K_i d_i \dots \quad (32)$$

и

$$x'K_1 = \xi';\ y'K_2 = \eta';\ z'K_3 = \zeta';\ t'K_4 = \tau', \quad \dots \dots \quad (33)$$

то система линейныхъ уравненій (8) § 5 переходитъ въ слѣдующую систему:

$$\left.\begin{array}{l} x = a_1\xi' + a_2\eta' + a_3\zeta' + a_4\tau' \\ y = b_1\xi' + b_2\eta' + b_3\zeta' + b_4\tau' \\ z = c_1\xi' + c_2\eta' + c_3\zeta' + c_4\tau' \\ t = d_1\xi' + d_2\eta' + d_3\zeta' + d_4\tau' \end{array}\right\} \dots \dots \quad (34)$$

гдѣ между коэффиціентами существуютъ отношенія (ср. (32) (27) (30)):

$$\left.\begin{array}{l} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 = 1 \\ a_i a_k + b_i b_k + c_i c_k - d_i d_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \end{array}\right\} \quad (35)$$

Система (34) и даетъ искомый переходъ двухъ косоугольныхъ системъ координатъ даннаго вида другъ въ друга въ одномъ и томъ же четырехмѣрномъ пространствѣ; только и здѣсь—какъ и въ частномъ случаѣ § 7—на осяхъ слѣдуетъ откладывать, какъ координаты, не сами длины $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, но эти длины, помноженныя соотвѣтственнымъ образомъ на $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$. Уравненія (35) выражаютъ, что четыре направленія ($a_i$, $b_i$, $c_i$, $d_i$) попарно сопряжены относительно четырехмѣрнаго коническаго пространства второго порядка:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0,$$

ибо они представляютъ естественное обобщеніе извѣстныхъ аналогичныхъ отношеній для трехъ направленій относительно поверхности второго порядка въ обыкновенномъ пространствѣ (ср., напримѣръ, Salmon—Fiedler, Anal. Geom. des Raumes, Lpz. 1863, I, стр. 110).

## III. Динамика.

### § 11. Собственное ускореніе, покоящаяся масса, сила.

Мы ограничивались до сихъ поръ геометріей движенія, т. е. разъясненіемъ однихъ лишь понятій „длины" и „времени" новой относительной механики. Но и понятіе „массы" должно претерпѣть измѣненіе. Вѣдь невѣроятно, чтобы преобразованіе понятій пространства и времени, принудительно требуемое теоріей распространенія свѣта, становилось вдругъ ненужнымъ для механики вѣсомыхъ тѣлъ. Правда, мы увидимъ, что измѣненія, которыя слѣдуетъ внести въ понятіе „массы", для того, чтобы и уравненія движенія остались инваріантными по отношенію къ Лорентцову преобразованію, имѣютъ такую малую величину, что они лишены всякаго значенія для обычныхъ приложеній механики. Но это обстоятельство не освобождаетъ насъ отъ обязанности пересмотрѣть съ новой точки зрѣнія всю механику—даже и механику наполняющихъ пространство массъ—и придать ей форму, соотвѣтствующую принципу относительности. Мы здѣсь ограничимся лишь случаемъ свободно подвижной матеріальной точки [1]).

---

[1]) Релятивистическую механику наполняющихъ пространство массъ развилъ недавно Г. Герглотцъ (Ann. d. Phys. (4) 36, 1911). У него также имѣется уже система коэффиціентовъ (28).

Какъ извѣстно, 2-ая аксіома Ньютона устанавливаетъ такое отношеніе между силой и ускореніемъ, что множитель „масса“ оказывается нѣкоторой неизмѣнной въ пространствѣ и времени величиной. Относительно принципа относительности классической механики (§ 2) это отношеніе инваріантно. Чтобы добиться того же для новаго принципа, должно измѣнить это отношеніе слѣдующимъ образомъ.

Пусть нѣкоторая матеріальная точка [1]) $\mu$ движется въ неизмѣнной (или движущейся прямолинейно и равномѣрно) прямоугольной системѣ координатъ $S$ обыкновеннаго пространства во время $t$ съ нѣкоторой, произвольно направленной, скоростью $v$. Пусть на нее дѣйствуетъ сила $\mathfrak{K}$, составляющія которой будутъ $\mathfrak{K}_x$, $\mathfrak{K}_y$, $\mathfrak{K}_z$. Мы примемъ, что эта (назовемъ ее „минковской“) сила $\mathfrak{K}$ пропорціональна не обыкновенному ускоренію, но „собственному ускоренію“ (Wiechert, цит. соч.) $\mathfrak{p}$ точки $\mu$, т. е. вектору, составляющія котораго суть дифференціальные коэффиціенты координатъ $x$, $y$, $z$ точки $\mu$ по ея собственному времени $\tau$:

$$\mathfrak{p} = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

гдѣ опять-таки (§ 9)

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2}$$

и $v$ есть скорость точки $\mu$ во время $t$. Мы, слѣдовательно, требуемъ, чтобы въ системѣ $S$ для точки $\mu$ имѣло мѣсто векторіальное равенство

$$\mu\mathfrak{p} = \mathfrak{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

---

[1]) Никакой путаницы не получается, если мы обозначимъ и „покоящуюся массу“ точки черезъ $\mu$.

и называемъ множитель $\mu$, нѣкоторую (независящую въ частности отъ положенія и времени) постоянную, „покоящейся массой“ („Ruhmasse“) точки $\mu$.

Если присоединить къ тремъ уравненіямъ, на которыя распадается (37), слѣдующее четвертое

$$\frac{\mu d^2 t}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_t, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

то это послѣднее уравненіе опредѣлитъ нѣкоторую, зависящую отъ $\mathfrak{K}$, величину $\mathfrak{K}_t$, значеніе которой мы вскорѣ узнаемъ. Если понимать подъ $\overline{\mathfrak{p}}$ систему четырехъ величинъ

$$\overline{\mathfrak{p}} = \left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{d^2t}{d\tau^2}\right), \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

и если подвергнуть координаты $x$, $y$, $z$, $t$ какой-нибудь точки міровой линіи $\mu$ въ системѣ $\Sigma$ (§ 9) Лоренцову преобразованію, по отношенію къ которому, какъ извѣстно (§ 9), собственное время $\tau$ инваріантно, то система четырехъ дифференціальныхъ коэффиціентовъ $\mathfrak{p}$ преобразуется (точно такъ же, какъ $x$, $y$, $z$, $t$ переходятъ въ $x'$, $y'$, $z'$, $t'$) въ систему четырехъ другихъ коэффиціентовъ

$$\mathfrak{p}' = \left(\frac{d^2x'}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^2t'}{d\tau^2}\right),$$

какъ показываетъ двукратное дифференцированіе уравненій преобразованія ((8) § 2) по $\tau$. Если теперь $\mathfrak{K}_{x'}$, $\mathfrak{K}_{y'}$, $\mathfrak{K}_{z'}$ означаютъ три составляющихъ нѣкоторой, приложенной къ той же точкѣ $\mu$, силы $\mathfrak{K}'$, разложенной, однако, по осямъ системы $S'$, движущейся въ обыкновенномъ пространствѣ относительно $S$ со скоростью ($u$, $v$, $w$) (§ 10), и если $\mathfrak{K}_{t'}$ представляетъ опять-таки нѣкоторую величину, опредѣляемую изъ равенства

$$\frac{\mu d^2 t'}{d\tau^2} = \mathfrak{K}_{t'},$$

если далѣе $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{K}'}$ означаютъ каждое систему четырехъ величинъ $(\mathfrak{K}_x, \ldots \mathfrak{K}_t)$, $(\mathfrak{K}_{x'}, \ldots \mathfrak{K}_{t'})$, то мы скажемъ, что сила $\overline{\mathfrak{K}'}$ тождественна съ $\overline{\mathfrak{K}}$, когда $\overline{\mathfrak{K}}$ переходитъ въ $\overline{\mathfrak{K}'}$ съ помощью того же Лоренцова преобразованія, которое переводитъ $\overline{\mathfrak{p}}$ въ $\overline{\mathfrak{p}'}$ или $x, y, z, t$ въ $x', y', z', t'$ [1]) Въ силу этого опредѣленія минковской силы отношеніе

$$\mu\overline{\mathfrak{p}} = \overline{\mathfrak{K}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{40}$$

переходитъ такимъ образомъ въ

$$\mu\overline{\mathfrak{p}'} = \overline{\mathfrak{K}'}$$

или, иначе, ıa

$$\left.\begin{aligned} \mu\,\frac{d^2x}{d\tau^2} &= \mathfrak{K}_x \\ \mu\,\frac{d^2y}{d\tau^2} &= \mathfrak{K}_y \\ \mu\,\frac{d^2z}{d\tau^2} &= \mathfrak{K}_z \\ \mu\,\frac{d^2t}{d\tau^2} &= \mathfrak{K}_t \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \tag{41}$$

переходятъ въ ту же систему уравненій, только написанную въ отмѣченной значками системѣ $x'$, $y'$, $z'$, $t'$. Имѣя эти соглашенія насчетъ покоящейся массы $\mu$, насчетъ четырехмѣрныхъ величинъ $\overline{\mathfrak{p}}$ и $\overline{\mathfrak{K}}$, равно какъ и насчетъ инваріантности ихъ по отношенію къ Лоренцову преобразованію, мы можемъ сказать, что механика матеріальной точки включена въ принципъ относительности.

---

[1]) Обратимъ вниманіе еще разъ: хотя оси $X$, $X'$, … движущихся системъ $S$, $S'$, … параллельны, но $\mathfrak{K}_x$ не $= \mathfrak{K}_{x'}$, … и $|\mathfrak{K}|$ не $= |\mathfrak{K}'|$.

## § 12. Энергія.

Послѣднее изъ уравненій (41) можно связать съ предшествующими слѣдующимъ образомъ. Если $v$ есть скорость точки $\mu$ въ системѣ $S$ обыкновеннаго пространства, т. е. если

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \;\ldots\ldots\; (42).$$

и если взять изъ уравненія (24) § 9, что

$$\frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}=\varkappa\,,$$

то получимъ:

$$\frac{dx}{d\tau}\frac{d^2x}{d\tau^2}+\frac{dy}{d\tau}\frac{d^2y}{d\tau^2}+\frac{dz}{d\tau}\frac{d^2z}{d\tau^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\tau}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right]=\frac{d}{d\tau}\frac{v^2\varkappa^2}{2}\,.$$

Съ другой стороны, если умножить уравненія системы (41) послѣдовательно на $\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, -\frac{dt}{d\tau}$ и сложить ихъ между собой, то получимъ:

$$\mu\frac{d}{d\tau}\frac{(v^2-1)\varkappa^2}{2}=\mathfrak{K}_x\frac{dx}{d\tau}+\mathfrak{K}_y\frac{dy}{d\tau}+\mathfrak{K}_z\frac{dz}{d\tau}-\mathfrak{K}\mathfrak{t}\frac{dt}{d\tau}\,.$$

Но такъ какъ лѣвая сторона равна 0, то мы получаемъ для $K\mathfrak{t}$ слѣдующее изящное истолкованіе. Если назвать величину

$$\mu d\frac{dt}{d\tau}=\mathfrak{K}\mathfrak{t}\,d\tau=\frac{\mathfrak{K}_x}{\varkappa}dx+\frac{\mathfrak{K}_y}{\varkappa}dy+\frac{\mathfrak{K}_z}{\varkappa}dz=d\mathsf{E}\;\ldots\; (43).$$

приращеніемъ „потенціальной энергіи“, вычисленнымъ въ системѣ $S$, при чемъ, съ другой стороны (41):

$$d\mathsf{E} = \frac{\mu}{2}\, d\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2\right] \quad \ldots (44).$$

можно разсматривать, какъ приращеніе „кинетической энергіи“, то послѣднее уравненіе системы (41) выражаетъ не что иное, какъ извѣстное отношеніе между живой силой и работой, „принципъ живой силы“, поскольку потенціальная энергія вычисляется не для силы $\mathfrak{K}$, но для „Ньютоновой силы“:

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{K}}{\varkappa} = \mathfrak{K}\sqrt{1 - v^2} \quad \ldots\ldots\ldots (45).$$

съ составляющими:

$$\mathfrak{P}_x = \frac{\mathfrak{K}_x}{\varkappa},\ \mathfrak{P}_y = \frac{\mathfrak{K}_y}{\varkappa},\ \mathfrak{P}_z = \frac{\mathfrak{K}_z}{\varkappa},$$

для которыхъ въ силу (37) имѣетъ мѣсто отношеніе:

$$\frac{\mu}{\varkappa}\,\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (46).$$

Но это векторіальное равенство есть все-таки, какъ и (37), слѣдствіе ихъ четырехмѣрнаго отношенія (40), которое слѣдуетъ разсматривать, какъ настоящее обобщеніе 2 Ньютоновой аксіомы.—Такъ какъ

$$\frac{\mu}{\varkappa}\,\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{\mu}{\varkappa}\,\frac{d}{d\tau}\left(\varkappa\,\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mu\varkappa\,\frac{dx}{dt}\right),$$

то (46) разлагается на слѣдующія три составляющія:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\mu\varkappa\,\frac{dx}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx}{dt}\right) = \mathfrak{P}_x\\
\frac{d}{dt}\left(\mu\varkappa\,\frac{dy}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dy}{dt}\right) = \mathfrak{P}_y\\
\frac{d}{dt}\left(\mu\varkappa\,\frac{dz}{dt}\right) &= \frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dz}{dt}\right) = \mathfrak{P}_z,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (46a),$$

гдѣ

$$\mu\varkappa = \frac{\mu}{\sqrt{1-v^2}} = m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46b).$$

называется „обыкновенной массой“ (Лорентцъ) точки $\mu$ (съ „покоящейся массой“ $\mu$). Если ввести въ это уравненіе снова секунду, какъ единицу времени, положивъ (§ 5 (14) (14a))

$$\text{вмѣсто } t \ldots ct\,;\; v \ldots \frac{v}{c}\,;\; \varkappa \ldots \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

и также вмѣсто

$$\mathfrak{P} \ldots \frac{\mathfrak{P}}{c^2}\,;\; \mathfrak{K} \ldots \frac{\mathfrak{K}}{c^2}\,,$$

то формулы (46a) вообще не измѣняютъ своего вида. Выраженіе для обыкновенной массы (46b) принимаетъ тогда видъ:

$$m = \mu\,\varkappa = \frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46c).$$

Если перейти теперь къ случаю Ньютоновой механики, формулы которой получаются изъ формулъ относительной механики, если положить $c = \infty$ (§ 5), то опять-таки формулы (46a) не измѣняются; только $\varkappa$ становится $= 1$, масса $m$ становится постоянной и система (46a) принимаетъ видъ (3) § 2, какъ и слѣдовало ожидать.

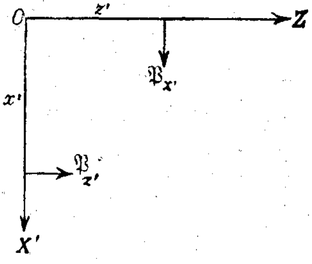
### § 13. Два примѣра.

1. Статика. Пусть неимѣющій массы ломаный рычагъ[1]), плечи котораго, длиной въ $z'$ и $x'$, совпадаютъ съ осями $Z'$ и $X'$ „покоящейся“ системы координатъ $S'$ и имѣютъ на

---

[1]) См. насчетъ этого примѣра Lewis и Tolman въ Phil. Mag., 1909; M. Laue, Ber. d. D. phys. Ges. 13; 1911; P. Epstein, Ann. Phys. (4) 36, 1911.

своихъ концахъ матеріальныя точки съ одинаковой покоящейся массой ($\mu$), находится въ равновѣсіи благодаря приложеннымъ къ этимъ конечнымъ пунктамъ (Ньютоновымъ) силамъ $\mathfrak{P}_{x'}$, $\mathfrak{P}_{y'}$, дѣйствующимъ перпендикулярно къ соотвѣтственному плечу. Пусть нѣкоторая другая система $S$ движется относительно $S'$ въ направленіи отрицательной оси $Z'$ съ равномѣрной скоростью $q$. Спрашивается: имѣетъ ли мѣсто равновѣсіе въ этой системѣ?



Фиг. 5.

Вмѣсто того, чтобы разсматривать систему $S$, какъ движущуюся относительно $S'$, можно принять $S$ за неподвижную, а систему $S'$ вмѣстѣ съ находящимся въ ней ломанымъ рычагомъ разсматривать, какъ движущуюся относительно $S$ въ положительномъ направленіи.

Условіе равновѣсія по отношенію къ системѣ $S'$ гласитъ (см. фиг. 5):

$$z'\,\mathfrak{P}_{x'} - x'\,\mathfrak{P}_{z'} = 0 \,\ldots\ldots\ldots\ (47).$$

Изъ (45) § 12 слѣдуетъ, что въ виду (47) и для соотвѣтствующихъ минковскихъ силъ $\mathfrak{K}_{x'}$, $\mathfrak{K}_{z'}$ имѣетъ мѣсто отношеніе:

$$z'\mathfrak{K}_{x'} - x'\,\mathfrak{K}_{z'} = 0. \,\ldots\ldots\ldots\ (47a).$$

Но $\mathfrak{K}_{x'}$, $\mathfrak{K}_{z'}$ можно разсматривать, какъ составляющія нѣкоторой единой, приложенной въ точкѣ пересѣченія линій дѣйствія $\mathfrak{P}_{x'}$, $\mathfrak{P}_{z'}$, силы. Такъ какъ ея составляющія $\mathfrak{K}_{x'}$, $\mathfrak{K}_{z'}$ вмѣстѣ съ $\mathfrak{K}_{t'}$, которое равно нулю (43) въ виду $\dot{x}' = \dot{y}' = \dot{z}' = 0$, преобразуются такимъ образомъ, какъ координаты $x'$, $z'$ (§ 11), то и уравненіе (47a), если выбрать для наблюденія моментъ $t' = 0$ (чтобы отвлечься отъ силъ реакцій, которыя, умноженныя на $t'$‘

выступили бы при преобразованіи моментовъ), переходить въ

$$z\,\mathfrak{R}_x - x\,\mathfrak{R}_z = 0,$$

что́, въ свою очередь, даетъ

$$z\,\mathfrak{P}_x - x\,\mathfrak{P}_z = 0,$$

Это и даетъ утвердительный отвѣтъ на поставленный нами себѣ вопросъ.

2. **Динамика.** Пусть точка съ покоящейся массой $\mu$ движется подъ вліяніемъ нѣкоторой, неизмѣнной по величинѣ и направленію (Ньютоновой), силы $\mathfrak{P}$.

Если взять за это направленіе направленіе оси $Z$ координатной системы $S$, то $\mathfrak{P}_x = \mathfrak{P}_y = 0$, $\mathfrak{P}_z = \mu\gamma$, гдѣ $\gamma$ — нѣкоторая постоянная. Мы получаемъ затѣмъ изъ (46а) послѣ однократнаго интегрированія $(\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ldots)$:

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-v^2}} = a\,;\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{1-v^2}} = b\,;\ \frac{\dot{z}}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma\,(t-t_0),$$

дѣ $a$, $b$, $t_0$ суть постоянныя, вводимыя интегрированіемъ. Для $t_0 = 0$ интегралы этихъ уравненій будутъ

$$\sin\mathrm{hyp}\ \gamma\,(x-x_0) = \sin\mathrm{hyp}\ \gamma\,(y-y_0) = \frac{\gamma t}{M}\,;$$

$$(\gamma\,(z-z_0) + M)^2 = M^2 + \gamma^2\,t^2\,,$$

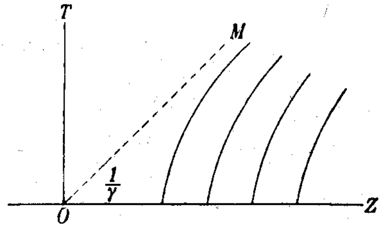
$$\text{гдѣ}\ M^2 = 1 + a^2 + b^2,$$

если $x_0$, $y_0$, $z_0$ означаютъ начальное положеніе нашей точки. Если положить еще $a = b = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, то движеніе происходитъ вдоль оси $Z$, и рѣшенія принимаютъ видъ

$$x = 0;\ y = 0;\ \left(z - z_0 + \frac{1}{\gamma}\right)^2 - t^2 = \frac{1}{\gamma^2}\,.$$

Соотвѣтственная мiровая линiя въ изобразительной плоскости $\Sigma$ (§ 7) представляетъ равностороннюю гиперболу, длина оси которой $= \frac{1}{\gamma}$.

Если, слѣдовательно, вообразить себѣ систему матерiальныхъ точекъ $\mu = 1$, распредѣленныхъ по оси $Z$ обыкновеннаго пространства (напримѣръ, $z_0 = 1, 2, 3\ .\ .\ .$), причемъ на каждую изъ нихъ дѣйствуетъ сила $\gamma$ и въ моментъ $t = 0$ онѣ находятся въ покоѣ, то ихъ мiровыя линiи изображаются съ помощью конгруэнтныхъ равностороннихъ гиперболъ, длина оси которыхъ у всѣхъ $= \frac{1}{\gamma}$ (§ 8 въ концѣ). Но ихъ движенiе не будетъ похоже на движенiе неизмѣнно связанныхъ между собою точекъ. Для этого было бы необходимо, чтобы ни въ одинъ моментъ какiя-нибудь двѣ точки системы не обладали относительной скоростью по направленiю соединяющей ихъ линiи. Но, очевидно, нѣтъ никакой прямой—за исключенiемъ оси $Z$,—встрѣчающей какiя-нибудь двѣ изъ указываемыхъ гиперболъ въ элементахъ, которыя одновременны и параллельны и сопряжены съ направленiемъ прямой (относительно пары ассимптотъ $OM$, $OM'$). Поэтому никакiя двѣ изъ разсматриваемыхъ точекъ не могутъ быть преобразованы на покой, исключая перваго момента, когда всѣ онѣ одновременно находятся въ покоѣ.



Фиг. 6.

## § 14. Масса въ относительной системѣ.

Въ заключенiе сравнимъ еще уравненiя движенiя (46а) релятивистической механики съ уравненiями классической механики, приведя ихъ къ формѣ послѣднихъ. Для этого допустимъ относительно направленія мгновенной скорости $v$ матеріальной точки $\mu$ въ $S$, что оно совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ оси $Z$ системы $S$. Мы, слѣдовательно, положимъ для момента $t$, пользуясь опять-таки сокращеніями $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ и т. д.

$$\dot{x} = 0; \quad \dot{y} = 0; \quad \dot{z} = v; \quad \varkappa = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{z}^2}} \cdot$$

Тогда мы имѣемъ для этого момента уравненія (46а):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu\varkappa\dot{x}) = \mu\varkappa\ddot{x} + \mu\dot{\varkappa}\dot{x} = \mu\varkappa\ddot{x} = \mathfrak{P}_{x,\, y,\, z} \\ \frac{d}{dt}(\mu\varkappa\dot{y}) = \mu\varkappa\ddot{y} = \mathfrak{P}_{x,\, y,\, z} \\ \frac{d}{dt}(\mu\varkappa\dot{z}) = \frac{d}{dt}\frac{\mu\dot{z}}{\sqrt{1-\dot{z}^2}} = \frac{\mu\ddot{z}}{(\sqrt{1-\dot{z}^2})^3} = \mu\varkappa^3\ddot{z} = \mathfrak{P}_{x,\, y,\, z} \end{aligned}\right\} (48)$$

Система координатъ $S$ есть опять-таки прямоугольная, движущаяся въ обыкновенномъ пространствѣ прямолинейно и равномѣрно, система, $t$—время, $v$—относительная скорость точки $\mu$ въ направленіи $OZ$ оси $Z$, $\mu$—покоящаяся масса этой точки. Если истолковать уравненія (48) съ точки зрѣнія классической механики, то они показываютъ, что коэффиціентъ массы, отличающій, согласно Ньютоновой аксіомѣ, силу отъ ускоренія, зависитъ отъ скорости $v$ точки $\mu$ относительно $S$, причемъ онъ получаетъ различное значеніе для составляющей ускоренія $\mu$ по направленію $OZ$ скорости $\mu$ и для составляющихъ по направленіямъ $OX$, $OY$, перпендикулярнымъ къ этой скорости. Въ направленіи, перпендикулярномъ къ движенію точки $\mu$ этотъ множитель даетъ „поперечную“ массу $\mu$:

$$m = \mu\varkappa = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Въ направленіи же движенія $\mu$ онъ даетъ „продольную“ массу.

$$\mu\varkappa^3 = m\varkappa^2.$$

Слѣдовательно, въ относительной механикѣ продольная и поперечная массы точки $\mu$ представляютъ величины, растущія вмѣстѣ съ относительной скоростью $v$; по мѣрѣ приближенія $v$ къ скорости свѣта $c$ онѣ растутъ до безконечности. Отсюда снова слѣдуетъ (§ 8), что скорость любой матеріальной точки по отношенію къ какой-нибудь движущейся прямолинейно и равномѣрно (съ любой скоростью) системѣ координатъ имѣетъ верхнимъ предѣломъ скорость свѣта.

Изъ выраженія для приращенія энергіи, установленнаго въ § 12, можно вывести еще другое слѣдствіе. Если въ уравненіе (43):

$$d\mathsf{E} = \mu d\frac{dt}{d\tau} = \mu d\varkappa = dm$$

ввести обыкновенную мѣру времени, то въ виду (46c)

$$dm = d\frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

и въ виду того, что

$$d\mathsf{E} = \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{K}_x\, dx + \mathfrak{K}_y\, dy + \mathfrak{K}_z\, dz)$$

переходитъ въ

$$\frac{1}{c^2}\,d\mathsf{E} = \frac{1}{\varkappa}\left(\frac{\mathfrak{K}_x}{c^2}\,dx + \frac{\mathfrak{K}_y}{c^2}\,dy + \frac{\mathfrak{K}_z}{c^2}\,dz\right),$$

получится:

$$d\mathsf{E} = c^2 dm = c^2 d\,\frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Отсюда слѣдуетъ замѣчательный фактъ, что вмѣстѣ съ пріобрѣтеніемъ или потерей кинетической энергіи, испытываемой матеріальной точкой, происходитъ также—отличающееся лишь нѣкоторымъ постояннымъ множителемъ—пріобрѣтеніе или потеря „обыкновенной“ (поперечной) массы m,—пріобрѣтеніе или потеря, представляющія, въ виду величины этого множителя $c^2$ для всѣхъ движеній, несравнимыхъ со скоростью свѣта, ничтожнѣйшую величину.

Это слѣдствіе, сдѣланное впервые А. Эйнштейномъ въ докладѣ на зальцбургскомъ собраніи естествоиспытателей въ 1909 г., повидимому, подтверждаетъ мысль, защищавшуюся столь рано умершимъ В. Ритцемъ [1]), что эѳиръ вообще ненуженъ въ качествѣ посредника и носителя возмущеній, ощущаемыхъ нами, какъ свѣтъ и электричество, и что должно вернуться къ Ньютоновой теоріи истеченія. Такъ какъ электромагнитная теорія свѣта Г. А. Лорентца, удовлетворяющая принципу относительности, даетъ также уравненія въ частныхъ производныхъ волнообразной теоріи, которая одна до сихъ поръ, повидимому, справлялась съ объясненіемъ явленій диффракціи и интерференціи, то съ этой стороны ничего нельзя было бы возразить.

---

[1]) Oeuvres complètes Paris 1911, Artt. XVIII., XX.

Что и явленія тяготѣнія можно изобразить въ рамкахъ теоріи относительности, это показалъ недавно— слѣдуя методу Пуанкарэ и Минковскаго—М. Абрагамъ (Phys. Zeitschr. 1912, стр. 1), исходя изъ допущенія, что потенціалъ тяготѣнія распространяется въ пространствѣ со скоростью свѣта въ видѣ продольныхъ волнъ.

*Пеф. П. Юшкевичъ.*

## Н. Умовъ.

# Единообразный выводъ преобразованій, совмѣстныхъ съ принципомъ относительности[1]).

1. Общее замѣчаніе. Преобразованіе, составляющее главный предметъ теоріи относительности, это преобразованіе Г. А. Лорентца. Выводъ его основывается на нѣкоторой совокупности допущеній и разсужденій, которыя не вытекаютъ сами собой изъ одного единственнаго положенія, но—какъ кажется—связаны между собою остроуміемъ изслѣдователя. По сравненію съ простотой преобразованія выводъ его представляется слишкомъ громоздкимъ. Кромѣ того, этотъ выводъ не даетъ никакихъ спорныхъ пунктовъ для обсужденія положенія, занимаемаго Лорентцовымъ преобразованіемъ въ ряду другихъ возможныхъ преобразованій, и не показываетъ путей, которые могли бы повести къ новымъ преобразованіямъ. Обычно употребляемыя разсужденія пригодны скорѣе для разъясненія Лорентцова преобразованія, чѣмъ для вывода его.

Эти мысли побудили меня выработать единообразный методъ, который, исходя лишь изъ одного положенія, приводитъ къ общему описанію преобразованій, совмѣстныхъ съ принципомъ относительности.

---

[1]) Physikalische Zeitschr. 1910.

2. Опредѣленіе и задача. Вообразимъ себѣ въ пространствѣ два міра, находящихся въ какомъ-нибудь кинематическомъ отношеніи другъ къ другу.

a) Міры называются эквивалентными, если явленія одного и того же рода слѣдуютъ въ обоихъ однимъ и тѣмъ же законамъ.

b) Двѣ точки этихъ міровъ, въ которыхъ разсматриваемое явленіе происходитъ одинаковымъ образомъ, называются соотвѣтственными.

c) Задача состоитъ въ розысканіи уравненій, связывающихъ перемѣнныя пространства и времени соотвѣтственныхъ точекъ.

Чтобы рѣшить поставленную нами себѣ задачу, мы должны выбрать то явленіе природы, которое будетъ основнымъ при нашемъ изслѣдованіи. Изъ всѣхъ явленій природы мы выберемъ, въ виду его всеобщности, волнообразное движеніе.

Пусть перемѣнныя пространства и времени, опредѣляющія однозначнымъ образомъ нѣкоторую точку, будутъ для перваго міра $x, y, z, t$; для второго — $x', y', z', t'$. Мы примемъ, что $x, y, z$ представляютъ прямоугольныя пространственныя координаты; что же касается $x', y', z'$, то относительно ихъ я не дѣлаю напередъ никакого соглашенія.

Разсматриваемое явленіе характеризуется нѣкоторой функціей $\psi$, которая, выраженная въ первый разъ въ $x, y, z, t$, во второй разъ—въ $x', y', z', t'$, въ двухъ физически изотропныхъ и эквивалентныхъ мірахъ, должна удовлетворять однимъ и тѣмъ же по формѣ дифференціальнымъ уравненіямъ второго порядка съ частными производными:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\psi}{dt^2} &= \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}+\frac{d^2\psi}{dz^2} \\ \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2\psi}{dt'^2} &= \frac{d^2\psi}{dx'^2}+\frac{d^2\psi}{dy'^2}+\frac{d^{2'}\psi}{dz'^2} \end{aligned} \quad \ldots\ldots (1)$$

Коэффиціентъ $\omega$ означаетъ постоянную скорость распространенія волнъ въ обоихъ мірахъ.

Эта скорость не должна непремѣнно равняться скорости свѣта. Задачу относительности можно поставить для различныхъ явленій. Напримѣръ, мы можемъ вообразить себѣ въ покоящемся вѣсомомъ тѣлѣ, частицы котораго находятся въ колебаніи, нѣкоторую движущуюся систему отсчета вмѣстѣ съ наблюдателемъ и можемъ поставить вопросъ объ отношеніяхъ, существующихъ между координатами пространства и времени соотвѣтственныхъ точекъ обоихъ этихъ міровъ.

Изложенныя здѣсь понятія представляютъ единственную основу нижеслѣдующей теоріи; дальнѣйшія разсужденія сводятся лишь къ производству математическихъ выкладокъ.

3. Рѣшеніе задачи. Назовемъ черезъ $u$ одну изъ перемѣнныхъ пространства и времени перваго міра, и вообразимъ себѣ, что функція $\psi$ выражена въ перемѣнныхъ второго міра. Мы имѣемъ:

$$\frac{d\psi}{du}=\frac{d\psi}{dx'}\frac{dx'}{du}+\frac{d\psi}{dy'}\frac{dy'}{du}+\frac{d\psi}{dz'}\frac{dz'}{du}+\frac{d\psi}{dt'}\frac{dt'}{du}.$$

По этому образцу мы образуемъ и вторыя производныя $\frac{d^2\psi}{du^2}$. Подобный выводъ при $u=t$ составляетъ первую часть слѣдующаго выраженія, получающагося путемъ подстановки вторыхъ производныхъ по $t, x, y, z$ въ первое изъ уравненій (I). Въ этомъ выраженіи я пользуюсь двумя знаками суммы:

$$\int\left(\frac{d_1}{dx}\right)^2=\left(\frac{d_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{d_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{d_1}{dz}\right)^2$$

$$\sum\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}=\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx}+\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}$$

и также знакомъ

$$\Delta_1 = \frac{d^2{}_1}{dx^2} + \frac{d^2{}_1}{dy^2} + \frac{d^2{}_1}{dz^2}\,.$$

Мы получаемъ

$$\frac{d^2\psi}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\psi}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\psi}{dz'^2}\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\psi}{dt'^2}\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 +$$
$$+ \frac{d\psi}{dx'}\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{d\psi}{dy'}\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{d\psi}{dz'}\frac{d^2z'}{dt^2} + \frac{d\psi}{dt'}\frac{d^2t'}{dt^2} + 2\frac{d^2\psi}{dx'dy'}\frac{dx'}{dt}\frac{dy'}{dt} +$$
$$+ 2\frac{d^2\psi}{dx'dz'}\frac{dx'}{dt}\frac{dz'}{dt} + 2\frac{d^2\psi}{dz'dy'}\frac{dy'}{dt}\frac{dz'}{dt} + 2\frac{d^2\psi}{dx'dt'}\frac{dx'}{dt}\frac{dt'}{dt} +$$
$$+ 2\frac{d^2\psi}{dy'dt'}\frac{dy'}{dt}\frac{dt'}{dt} + 2\frac{d^2\psi}{dz'dt'}\frac{dz'}{dt}\frac{dt'}{dt} = \omega^2\left\{\frac{d^2\psi}{dx'^2}\int\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 +\right.$$
$$+ \frac{d^2\psi}{dy'^2}\int\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\psi}{dz'^2}\int\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2 + \frac{d^2\psi}{dt'^2}\int\left(\frac{dt'}{dx}\right)^2 + \frac{d\psi}{dx'}\Delta x' +$$
$$+ \frac{d\psi}{dy'}\Delta y' + \frac{d\psi}{dz'}\Lambda z' + \frac{d\psi}{dt'}\Delta t' + 2\frac{d^2\psi}{dx'dy'}\sum\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dx} +$$
$$+ 2\frac{d^2\psi}{dx'dz'}\sum\frac{dx'}{dx}\frac{dz'}{dx} + 2\frac{d^2\psi}{dz'dy'}\sum\frac{dy'}{dx}\frac{dz'}{dx} + 2\frac{d^2\psi}{dx'dt'}$$
$$\left.\sum\frac{dx'}{dx}\frac{dt'}{dx} + 2\frac{d^2\psi}{dy'dt'}\sum\frac{dy'}{dx}\frac{dt'}{dx} + 2\frac{d^2\psi}{dz'dt'}\sum\frac{dz'}{dx}\frac{dt'}{dx}\right\}.$$

Это уравненіе должно быть тождественно со вторымъ изъ уравненій (1). Поэтому въ немъ должны остаться лишь производныя второго порядка формы $\frac{d^2\psi}{du^2}$, и коэффиціенты ихъ должны удовлетворять извѣстнымъ условіямъ. Коэффиціенты производныхъ формы $\frac{d\psi}{du}$ и $\frac{d\psi}{dudv}$ должны равняться 0. Такимъ путемъ мы получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія преобразованія:

$$\begin{aligned} &\omega^2 \int\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \omega^2 \int\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2 - \\ &\quad - \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 = \omega^2 \int\left(\frac{dz'}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \\ &\quad = \omega^2 \left[\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 - \omega^2 \int\left(\frac{dt'}{dx}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{II}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x'}{dt^2} = \omega^2\, \Delta x', \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \omega^2\, \Delta y', \\ &\frac{d^2z'}{dt^2} = \omega^2\, \Delta z'; \quad \frac{d^2t'}{dt^2} = \omega^2\, \Delta t'. \end{aligned} \tag{III}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega^2}\frac{dx'}{dt}\frac{dy}{dt} = \sum\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dx}, \\ &\frac{1}{\omega^2}\frac{dy'}{dt}\frac{dz'}{dt} = \sum\frac{dy'}{dx}\frac{dz'}{dx}, \\ &\frac{1}{\omega^2}\frac{dx'}{dt}\frac{dz'}{dt} = \sum\frac{dx'}{dx}\frac{dz'}{dx}. \end{aligned} \tag{IV}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\omega^2}\frac{dx'}{dt}\frac{dt'}{dt} = \sum\frac{dx'}{dx}\frac{dt'}{dx}, \\ &\frac{1}{\omega^2}\frac{dy'}{dt}\frac{dt'}{dt} = \sum\frac{dy'}{dx}\frac{dt'}{dx}, \quad \ldots\ldots \\ &\frac{1}{\omega^2}\frac{dz'}{dt}\frac{dt'}{dt} = \sum\frac{dz'}{dx}\frac{dt'}{dx}. \end{aligned} \tag{V}$$

Интегралы этой системы дифференцiальныхъ уравненiй представляютъ описанiе преобразованiй, совмѣстимыхъ съ принципомъ относительности. Можно также разсматривать $x', y', z', t'$, какъ функцiи промежуточныхъ координатъ $x_1, y_1, z_1$, описывающихъ данное относительное движенiе обоихъ мiровъ, и ввести соотвѣтственно съ этимъ въ приведенныя выше условiя производныя $\frac{\partial x'}{\partial x_1}$ и т. д., $\frac{dx_1}{dx}$ и т. д.

4. **Ограниченія. Лорентцово преобразованіе.** Мы могли бы получить Лорентцово преобразованіе изъ общихъ уравненій (II)—(V), введя промежуточныя координаты. Но мы воспользуемся другимъ методомъ. Простѣйшее преобразованіе соотвѣтствуетъ тому случаю, когда лишь одна пространственная координата $x'$ зависитъ отъ времени $t'$, и временная координата $t'$ зависитъ лишь отъ одной пространственной координаты $x$.

Положимъ, что

$$\frac{dy'}{dt}=0,\quad \frac{dz'}{dt}=0,\quad \frac{dt'}{dy}=0,\quad \frac{dt'}{dz}=0. \quad . \quad (1)$$

Мы должны, кромѣ того, ввести условія, опредѣляющія взаимныя отношенія перемѣнныхъ $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ и $x, y, z, t$. Пусть отношенія эти даются указаніемъ, что вообще

$$\frac{dx'}{dx},\quad \frac{dy'}{dy},\quad \frac{dz'}{dz},\quad \frac{dt'}{dt} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

отличны отъ нуля. Мы имѣемъ тогда изъ уравненій (V):

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{dx'}{dt}\frac{dt'}{dt}=\frac{dx'}{dx}\frac{dt'}{dx},\quad \frac{dy'}{dx}\frac{dt'}{dx}=0,\ \frac{dz'}{dx}\frac{dt'}{dx}=0. \quad (3)$$

Такъ какъ $\frac{dt'}{dx}$ отлично отъ нуля, то мы получаемъ:

$$\frac{dy'}{dx}=0,\quad \frac{dz'}{dx}=0. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

Уравненія 4 принимаютъ видъ:

$$\begin{aligned} 0&=\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dy}+\frac{dx'}{dz}\frac{dy'}{dz},\\ 0&=\frac{dy'}{dy}\frac{dz'}{dy}+\frac{dy'}{dz}\frac{dz'}{dz}, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (5)\\ 0&=\frac{dx'}{dy}\frac{dz'}{dy}+\frac{dx'}{dz}\frac{dz'}{dz}. \end{aligned}$$

Исключенія $\frac{dy'}{dy}$ и $\frac{dz'}{dz}$, которыя, согласно (2), отличны отъ нуля, приводятъ къ отношенію

$$\left[\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2+\left(\frac{dx'}{dz}\right)^2\right]\frac{dy'}{dz}\,\frac{dz'}{dy}=0. \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Это уравненіе можетъ быть удовлетворено троякимъ образомъ. Для конечнаго результата безразлично, какой изъ трехъ множителей уравненія (6) мы приравняемъ нулю. Если мы примемъ $\frac{dy'}{dz}=0$, то мы получимъ изъ (5), въ виду условій (2), еще новыя условія. Всѣ вмѣстѣ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{dy'}{dz}=0, \quad \frac{dz'}{dy}=0, \quad \frac{dx'}{dz}=0, \quad \frac{dx'}{dy}=0. \quad . \quad (7)$$

Мы, слѣдовательно, приходимъ къ заключенію, что

$$x'=f_1\,(t,\,x),\ y'=f_2\,(y),\ z'=f_3\,(z),\ t'=f_4\,(t,\,x), \quad . \ (8)$$

гдѣ $f$ есть знакъ нѣкоторой функціи.

Уравненія (II) и (III) принимаютъ теперь видъ:

$$\begin{gathered}\omega^2\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2-\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2=\omega^2\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2=\omega^2\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)^2=\\ =\omega^2\left[\left(\frac{dt'}{dt}\right)^2-\omega^2\left(\frac{dt'}{dx}\right)^2\right]\end{gathered} \quad . \ (9)$$

$$\begin{gathered}\frac{d^2x'}{dt^2}=\omega^2\,\frac{d^2x'}{dx^2},\quad \frac{d^2t'}{dt^2}=\omega^2\,\frac{d^2t'}{dx^2},\\ \frac{\partial^2y'}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2z'}{\partial z^2}=0.\end{gathered} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (10)$$

Допустимъ, что при $y=0, z=0$ и $y'=0, z'=0$; оба послѣднихъ уравненія (10) и среднее изъ уравненій (9) дадутъ:

$$y'=\beta y, \quad z'=\beta z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (IV)$$

гдѣ $\beta$ есть нѣкоторая постоянная.

Уравненія (9) даютъ тогда:

$$\begin{gathered}\omega^2\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2-\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2=\omega^2\beta^2\\ \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2-\omega^2\left(\frac{dt'}{dx}\right)=\beta^2.\end{gathered} \quad \ldots\ldots (11)$$

Дифференцируя первое изъ этихъ уравненій сперва по $x$, затѣмъ по $t$, и принимая во вниманіе первое изъ уравненій (10), мы получимъ:

$$\begin{gathered}\omega^2\,\frac{dx'}{dx}\,\frac{d^2x'}{dx^2}-\frac{dx'}{dt}\,\frac{d^2x'}{dtdx}=0\\ \frac{dx'}{dx}\,\frac{d^2x'}{dx\partial t}-\frac{dx'}{dt}\,\frac{d^2x}{dx^2}=0.\end{gathered} \quad \ldots\, (12)$$

Помножимъ послѣднее изъ этихъ уравненій на $\frac{\partial x'}{\partial t}$, а первое на $\frac{\partial x'}{\partial x}$ и сложимъ. Мы получимъ:

$$\left[\omega^2\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2-\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2\right]\frac{d^2x'}{dx^2}=0. \quad \ldots (13)$$

Такъ какъ первый множитель по (11) не равенъ нулю, то, принимая во вниманіе первыя изъ уравненій (10) и (12), мы получимъ:

$$\frac{d^2x'}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2x'}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2x'}{dtdx}=0. \quad \ldots\, (14)$$

Разсматривая аналогичнымъ образомъ второе изъ уравненій (11), мы получимъ:

$$\frac{d^2t'}{dx^2}=0,\quad \frac{d^2t'}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2t'}{dtdx}=0. \quad \ldots (15)$$

Интегрируя уравненія (14) и (15), при допущеніи, что если $t=0$, $x=0$ и $t'=0$, $x'=0$, мы получимъ:

$$x'=\alpha\,(x-vt),\ t'=\alpha_1t+\alpha_2x, \quad \ldots (16)$$

гдѣ $x$, $v$, $d_1, d_2$ представляютъ постоянныя. Введя эти значенія въ первое изъ уравненій (3), мы получимъ:

$$\alpha_2 = -\frac{1}{\omega^2}\alpha_1 v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

Введя ихъ въ уравненіе (11), мы получимъ:

$$\alpha^2\left(\omega^2 - v^2\right) = \omega^2\beta^2 = \alpha_1{}^2\left(\omega^2 - v^2\right), \quad . \; . \quad (18)$$

откуда имѣемъ:

$$\alpha_1 = \alpha, \; \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \quad . \; . \; . \; . \quad (IV)$$

Мы получаемъ, слѣдовательно, Лорентцово преобразованіе:

$$x' = \alpha\,(x - vt), \; y' = \beta y, \; z' = \beta z$$

$$t' = \alpha\left(t - \frac{v}{\omega^2}\,x\right), \; \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}. \quad . \; . \quad (L)$$

$x_1 = x - dt$ представляетъ промежуточную координату.

5. Замѣчанія. Въ то время какъ $x$, $y$, $z$ означаютъ прямоугольныя и прямолинейныя координаты, $x'$, $y'$, $z'$ могутъ вообще оказаться криволинейными. Существо, которое бы жило въ подобномъ мірѣ и которое въ виду ограниченности своихъ ощущеній могло бы измѣрять лишь безконечно-малые отрѣзки, считало бы подобныя координаты прямолинейными.

*Пер. П. Юшкевичъ.*

## Н. Умовъ.

# Условія инваріантности уравненія волны.

Въ предыдущей статьѣ я установилъ общія отношенія между двумя системами пространственно-временныхъ перемѣнныхъ $x$, $y$, $z$, $t$ и $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, обусловливающія инваріантность уравненія волны при преобразованіи одной системы въ другую. Отношенія эти допускаютъ весьма простое истолкованіе, которое мы и изложимъ здѣсь.

Обозначимъ черезъ $\omega$ постоянную скорость распространенія волны и введемъ вмѣсто перемѣнныхъ времени $t$ и $t'$ новыя перемѣнныя $\tau$ и $t''$, которыя связаны съ первыми слѣдующими отношеніями:

$$\tau = i\omega t \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (1)$$

$$\omega t' = i t'' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \qquad (2)$$

гдѣ $i = \sqrt{-1}$.

Оставимъ за символомъ $\Delta$ прежнее значеніе оператора Лапласа по перемѣннымъ системы безъ значковъ и введемъ символъ $hj^2$ для суммы квадратовъ первыхъ производныхъ какой-нибудь перемѣнной величины системы со значками по перемѣннымъ системы безъ значковъ. Въ такомъ случаѣ уравненія преобразованія (II) — (V) предыдущей статьи принимаютъ слѣдующій видъ:

$$h_1^2 = h_2^2 = h_3^2 = h_4^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (I)$$

$$\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = \Delta t'' = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (II)$$

и шесть уравненій вида:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial \tau}\cdot\frac{\partial v}{\partial \tau}=0 \qquad \text{(III)}$$

гдѣ $u$, $v$ обозначаютъ двѣ какихъ-нибудь изъ перемѣнныхъ $x'$, $y'$, $z'$, $t''$.

Чтобы понять простымъ образомъ эти формулы, мы ограничимся обычнымъ случаемъ трехъ измѣреній. Для этого мы положимъ $z = z'$ и получимъ:

$$h_1^2 = h_2^2 = h_4^2 = 1, \qquad (3)$$

$$\triangle x' = \triangle y' = \triangle t'' = 0, \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial x'}{\partial \tau}\frac{\partial y'}{\partial \tau}=0,\\
&\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial t''}{\partial x}+\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial t''}{\partial y}+\frac{\partial x'}{\partial \tau}\frac{\partial t''}{\partial \tau}=0,\\
&\frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial t''}{\partial x}+\frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial t'}{\partial y}+\frac{\partial y'}{\partial \tau}\frac{\partial t''}{\partial \tau}=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Уравненія (4) и (5) представляютъ не что иное, какъ уравненія преобразованія прямоугольной системы координатъ $x$, $y$, $\tau$ въ криволинейную, ортогональную и трикратно изотермическую систему, такъ называемые, термометрическіе параметры которой (по Ламе) представлены перемѣнными $x'$, $y'$, $t''$.

Извѣстно, что въ случаѣ криволинейной системы координатъ имѣютъ мѣсто уравненія слѣдующаго вида:

$$\triangle x' = h_1 h_2 h_4 \frac{\;\frac{\partial h_1}{h_2 h_4}\;}{\partial x'} \text{ и т. д.}$$

Мы видимъ, что въ виду условій (3) уравненія (4) удовлетворяются тождественнымъ образомъ.

Но вопросъ можно разсмотрѣть и съ другой точки зрѣнія. $x'$, $y'$, $t''$ представляютъ потенціалы трехъ распредѣленій массъ, дѣйствующихъ по закону Кулона, поверхности равнаго уравненія которыхъ пересѣкаются подъ прямымъ угломъ и изъ которыхъ каждое даетъ силовое поле одной и той же постоянной интенсивности.

Задача имѣетъ одно единственное рѣшеніе: $x'$, $y'$, $t''$ суть потенціалы трехъ неограниченныхъ, перпендикулярныхъ другъ къ другу плоскостей, покрытыхъ массами постоянной плотности. Это рѣшеніе есть Лорентцъ-Эйнштейново преобразованіе.

Обозначимъ черезъ $\mu$, $\nu$, $\gamma$ нѣкоторыя постоянныя и полезныя.

$$\left.\begin{aligned} x' &= \mu_1 x + v_1 y + \gamma_1 \tau, \\ y' &= \mu_2 x + v_2 y + \gamma_2 \tau, \\ t'' &= \mu_3 x + v_3 y + \gamma_3 \tau, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Формулы (3) и (5) даютъ:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1{}^2 + \nu_1{}^2 + \gamma_1{}^2 = 1 \ \ldots \ &\text{(3 уравненія)} \\ \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \ \ldots \ &\text{(3 уравненія)} \end{aligned}\right\} \ . \qquad (7)$$

Но мы можемъ положить:

$$\nu_1 = 0, \mu_2 = \gamma_2 = 0, \nu_2 = 1.$$

Въ такомъ случаѣ условія (7) даютъ:

$$\nu_3 = 0, \mu_3 = \gamma_1, \mu_1 = -\gamma_3 = \sqrt{1 - \gamma_1{}^2}$$

Если мы положимъ

$$\frac{\gamma_1 \omega i}{\sqrt{1 - \gamma_1{}^2}} = -v,$$

откуда

$$1 - \gamma_1{}^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}$$

и примемъ во вниманіе (1) и (2), то мы получимъ уравненія:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}}, \; y' = y, \; z' = z$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{\omega^2}}} \left( (t - \frac{v}{\omega^2} x \right)$$

*Пеф. П. Юшкевичъ.*