И. А. Виноградова, С. Н. Олехник,
В. А. Садовничий

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

И. А. Виноградова,
С. Н. Олехник,
В. А. Садовничий

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Под общей редакцией
В. А. САДОВНИЧЕГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

ББК 22.161
В49
УДК 517(075.8)

Рецензенты:
чл.-кор. АН СССР *Л. Д. Кудрявцев*,
чл.-кор. АН СССР *В. А. Ильин*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Виноградова И. А. и др.
В49 Задачи и упражнения по математическому анализу/ И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. Под общ. ред. В. А. Садовничего. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 416 с.: ил.
ISBN 5–211–00081–1.

Учебное пособие соответствует программе 1-го курса для студентов-математиков и отражает опыт преподавания математического анализа на механико-математическом факультете МГУ. Бо́льшая часть задач отлична от содержащихся в известном задачнике Б. П. Демидовича.

В $\dfrac{1702050000(4309000000)-121}{077(02)-88}$ 81—88 **ББК 22.161**

Учебное издание

ВИНОГРАДОВА ИРИНА АНДРЕЕВНА,
ОЛЕХНИК СЛАВ НИКОЛАЕВИЧ,
САДОВНИЧИЙ ВИКТОР АНТОНОВИЧ

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*. Редактор *Л. А. Николова*. Художественный редактор *Е. М. Дёмина*. Технический редактор *М. Б. Терентьева*. Корректоры *М. И. Эльмус*, *Н. В. Картышева*

ИБ № 3105

Сдано в набор 31.07.87. Подписано в печать 15.07.88. Формат 60×90/16. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 26,0. Уч.-изд. л. 29,77. Тираж 15 000 экз. Заказ 162. Изд. № 136. Цена 1 р. 30 к.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.

Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. 119899, Москва, Ленинские горы

ISBN 5–211–00081–1

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сборник составлен на материале занятий по курсу математического анализа на I курсе механико-математического факультета МГУ и отражает опыт преподавания кафедры математического анализа. Он состоит из двух частей, соответствующих I и II семестру.

В каждой части отдельно выделены вычислительные упражнения и теоретические задачи. Первая часть включает построение эскизов графиков функций, вычисление пределов, дифференциальное исчисление функций одного действительного переменного, теоретические задачи. Вторая часть — неопределенный интеграл, определенный интеграл Римана, дифференциальное исчисление функций многих переменных, теоретические задачи.

В главах, содержащих вычислительные упражнения, каждый параграф предваряется развернутыми методическими указаниями. В них даны все используемые в этом параграфе определения, формулировки основных теорем, вывод некоторых необходимых соотношений, приведены подробные решения характерных задач, обращено внимание на часто встречающиеся ошибки. Всего в обеих частях разобрано около 250 примеров.

Содержание задач и упражнений согласовано с теоретическим курсом математического анализа, читаемым на I курсе мехмата. Бо́льшая часть задач и упражнений отлична от задач, содержащихся в известном задачнике Б. П. Демидовича, существенно также изменено изложение и объем темы «Построение эскизов и графиков функций». В главу «Вычисление пределов» включено большое количество упражнений, требующих использования формулы Тейлора. В главе «Дифференциальное исчисление функций многих переменных» методические указания написаны с точки зрения современного изложения этой темы в учебных курсах.

В обе части сборника включено около 1800 упражнений на вычисления и 350 теоретических задач.

Авторы выражают искреннюю благодарность всем сотрудникам кафедры математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова за полезные обсуждения, замечания, предложения при подготовке настоящей книги.

Часть I

ГРАФИКИ, ПРЕДЕЛЫ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава I
ПОСТРОЕНИЕ ЭСКИЗОВ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

§ 1. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Основными элементарными функциями считаются: *степенная функция* $y=x^a$, *показательная функция* $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, *логарифмическая функция* $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, *тригонометрические функции* $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$, *обратные тригонометрические функции* $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Элементарной называется функция, полученная из основных элементарных функций конечным числом их композиций и арифметических операций.

Рассмотрим построение эскизов графиков функций путем качественного анализа с наименьшим числом вычислений. Мы выделим некоторые классы элементарных функций и установим их главные свойства, опираясь на известные свойства основных элементарных функций и правила преобразования графика при определенных операциях с функцией. Техника дифференцирования практически применяться не будет; она либо излишняя (нет необходимости пользоваться производной для определения положения вершины параболы или максимумов синусоиды), либо слишком громоздка, например, при анализе рациональных дробей. Но некоторые утверждения, которые строго доказываются с помощью дифференциального исчисления, будут сформулированы, и соответствующие свойства функций и их графиков будут использоваться. Более конкретно о том, что именно должен иллюстрировать в поведении функции эскиз ее графика, будет сказано в соответствующих замечаниях и при разборе примеров.

Допустим, что построен график функции $y=f(x)$, $x\in X$. В следующей таблице описано, как изменяется этот график при определенном преобразовании функции $f(x)$ или ее аргумента.

Построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ в общем случае сводится к ряду преобразований (сдвиг, сжатие, отображение и т. д.) графика функции $f(x)$.

Представим y в виде

$$y=Cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]+D.$$

Таблица

Функция	Преобразование, которое следует провести с графиком $y = f(x)$ на плоскости XOY
$f(x)+A \quad A \neq 0$	Сдвиг вверх по оси OY графика функции $y=f(x)$ на A единиц, если $A>0$, и сдвиг вниз на $\|A\|$ единиц, если $A<0$
$f(x-a) \quad a \neq 0$	сдвиг вправо по оси OX на a единиц, если $a>0$, сдвиг влево на $\|a\|$ единиц, если $a<0$
$kf(x),\ k>0 \quad k \neq 1$	растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в k раз, если $k>1$, сжатие вдоль оси OY в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$f(kx),\ k>0 \quad k \neq 1$	сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в k раз, если $k>1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0<k<1$
$-f(x)$	симметричное отображение графика относительно оси OX
$\|f(x)\|$	часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси, остальная часть остается без изменения
$f(-x)$	симметричное отображение графика относительно оси OY
$f(\|x\|)$	стереть часть графика функции $y=f(x)$, лежащую слева от оси OY; оставить часть графика $y=f(x)$, лежащую справа от оси OY и на ней; часть графика функции $y=f(x)$, расположенную в области $x \geqslant 0$, симметрично отобразить относительно оси OY в область $x<0$

Из такого представления y видно, что для построения графика этой функции достаточно построить график функции

$$y_1=Cf\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right).$$

Для построения графика функции y_1 достаточно построить график функции $y_2=f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$. В свою очередь для построения графика функции y_2 достаточно построить график функции $y_3=f(ax)$. Итак, для построения графика функции $y=Cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]+D$ необходимо с графиком функции $f(x)$ произвести следующие преобразования:

1. Сжать или растянуть график функции $f(x)$ вдоль оси OX относительно оси OY, если $a>0$; симметрично отобразить относительно оси OY и сжать или растянуть вдоль оси OX относительно оси OY, если $a<0$.

2. Сдвинуть по оси OX полученный график функции $f(ax)$ на $\left|\frac{b}{a}\right|$: влево, если $\frac{b}{a}>0$, и вправо, если $\frac{b}{a}<0$.

3. Сжать или растянуть полученный график функции $f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ вдоль оси OY относительно оси OX, если $C>0$; симметрично отобразить относительно оси OX и сжать или растянуть вдоль оси OY относительно оси OX, если $C<0$.

4. Сдвинуть полученный график функции $Cf\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$ на D вверх, если $D>0$, и вниз на $|D|$, если $D<0$.

Последовательность этих преобразований при построении графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ можно представить символически в виде цепочки

$$f(x)\to f(ax)\to f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\equiv f(ax+b)\to Cf(ax+b)\to$$
$$\to Cf(ax+b)+D.$$

На практике удобнее построение графика функции $y=Cf(ax+b)+D$ начинать с написания цепочки

$$Cf(ax+b)+D\leftarrow Cf(ax+b)\leftarrow f(ax+b)\equiv$$
$$\equiv f\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]\leftarrow f(ax)\leftarrow f(x).$$

Отсюда видно, график какой функции в этой цепочке является базовым для построения графика последующей функции.

Пример 1. Построим эскиз графика функции

$$y=\log_3(1-2x).$$

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_3(1-2x) \equiv \log_3\left[-2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \xleftarrow{\text{сдвиг на } 1/2 \text{ вправо}}$$

$$\leftarrow \log_3(-2x) \leftarrow \log_3(2x) \leftarrow \log_3 x.$$

Итак, построение эскиза графика функции $y=\log_3(1-2x)$ начинается с построения графика $y_1=\log_3 x$, затем сжатия этого графика вдоль оси OX относительно оси OY в два раза, затем симметричного отображения относительно оси OY и, наконец, сдвига полученного графика на 1/2 вправо вдоль оси OX (см. рис. 1).

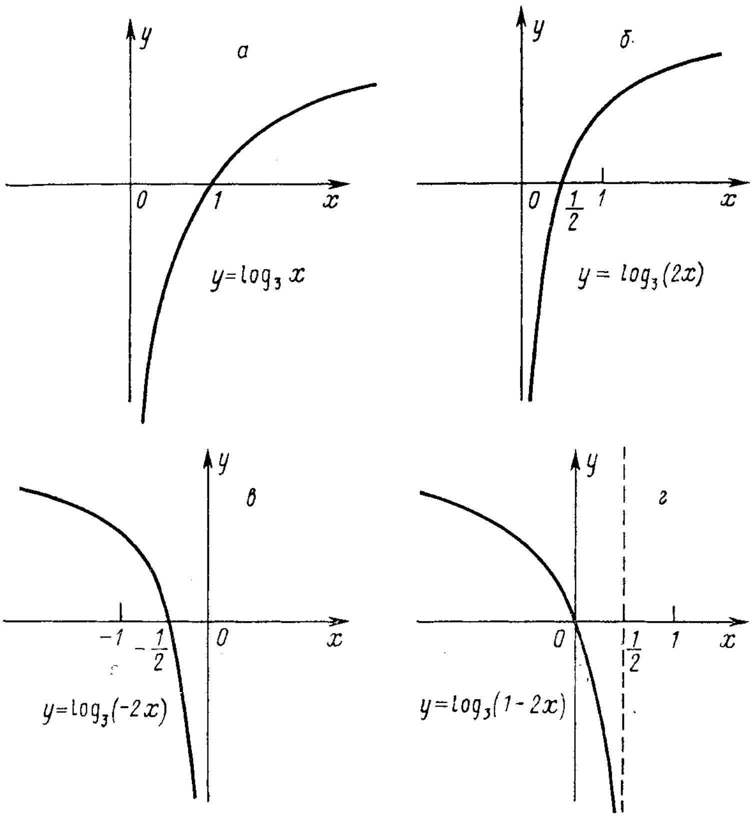

Рис. 1

Чтобы избежать ошибок при построении графиков, следует подчеркнуть еще раз, что величина сдвига вдоль оси OX определяется той константой, которая прибавляется непосредственно к аргументу x, а не к аргументу ax. Поэтому для нахождения этой константы выражение $ax+b$ сначала преобразуется к виду $a\left(x+\frac{b}{a}\right)$.

В связи с этим рекомендуется операцию сдвига вдоль оси OX проводить после операций сжатия или растяжения вдоль оси OX относительно оси OY.

Пример 2. Построим эскиз графика функции

$$y = -2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6}.$$

Решение. Напишем цепочку преобразований

$$-2\,\mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{3\pi x - 4\pi}{6} \equiv \mathrm{tg}\left[\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)\right] \leftarrow$$

$$\leftarrow \mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2} \leftarrow \mathrm{tg}\,x.$$

Последовательно эскизы смотри на рис. 2.

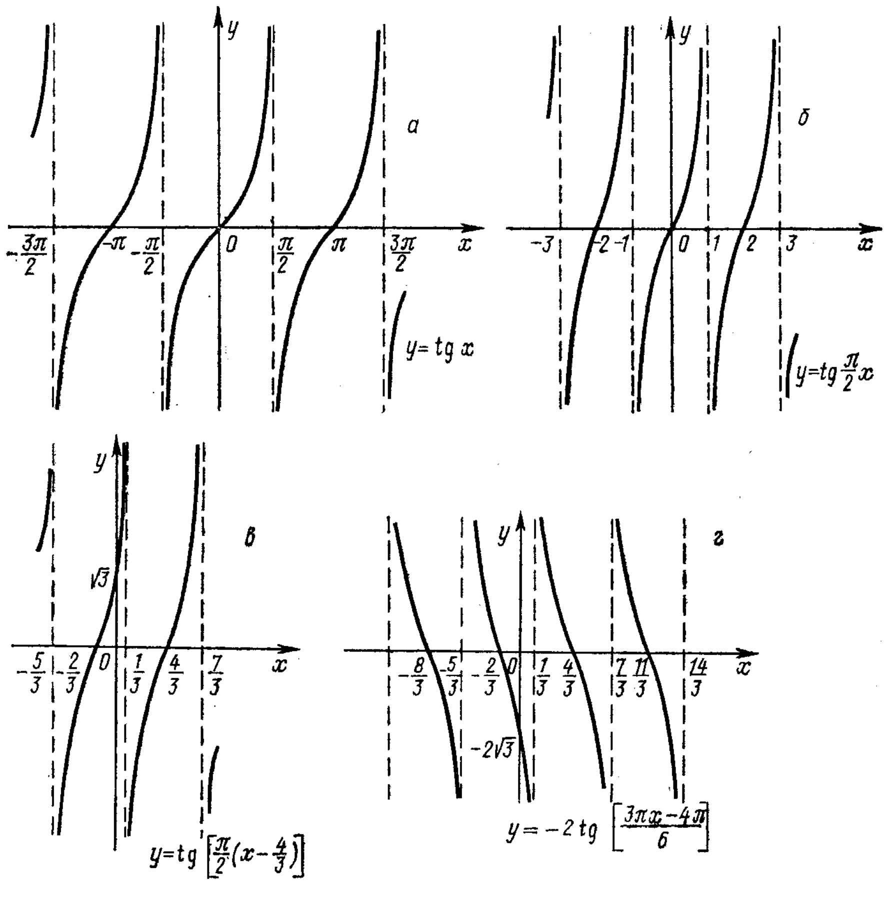

Рис. 2

Пример 3. Построим эскиз графика функции

$$y = \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leftarrow \frac{1}{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leftarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \equiv$$

$$\equiv \sin\left[3\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right] \leftarrow \sin 3x \leftarrow \sin x.$$

Последовательно эскизы смотри на рис. 3.

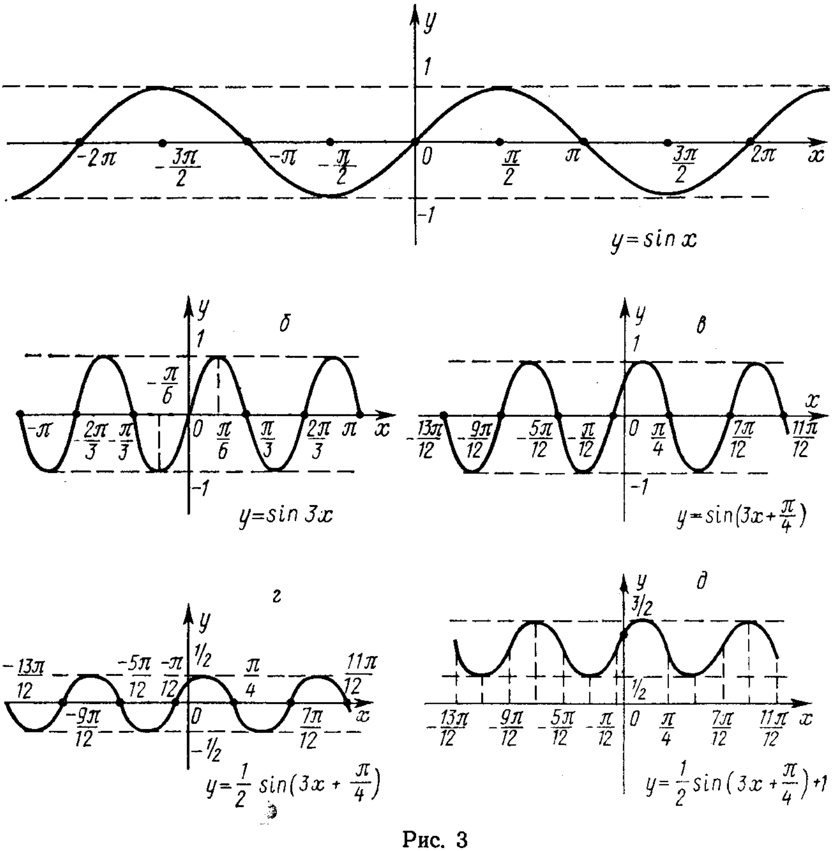

Рис. 3

Аналогичным методом строятся эскизы графиков функций с применением и других преобразований.

Пример 4. Построим эскиз графика $y = \log_{\frac{1}{2}} |1 - 2||x| - 1||$.

Решение. Напишем цепочку преобразований:

$$\log_{1/2}|1-2||x|-1|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2|x-1|| \xleftarrow{\text{сдвиг на 1 вправо}}$$

$$\leftarrow \log_{1/2}|1-2|x|| \xleftarrow{x>0} \log_{1/2}|1-2x| \equiv \log_{1/2}|2x-1| \equiv$$

$$\equiv \log_{1/2}\left|2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right| \xleftarrow{\text{сдвиг на 1/2 вправо}} \log_{1/2}|2x| \xleftarrow{x>0}$$

$$\leftarrow \log_{1/2} 2x \xleftarrow{\text{сжатие в 2 р.}} \log_{1/2} x.$$

Эскизы смотри на рис. 4.

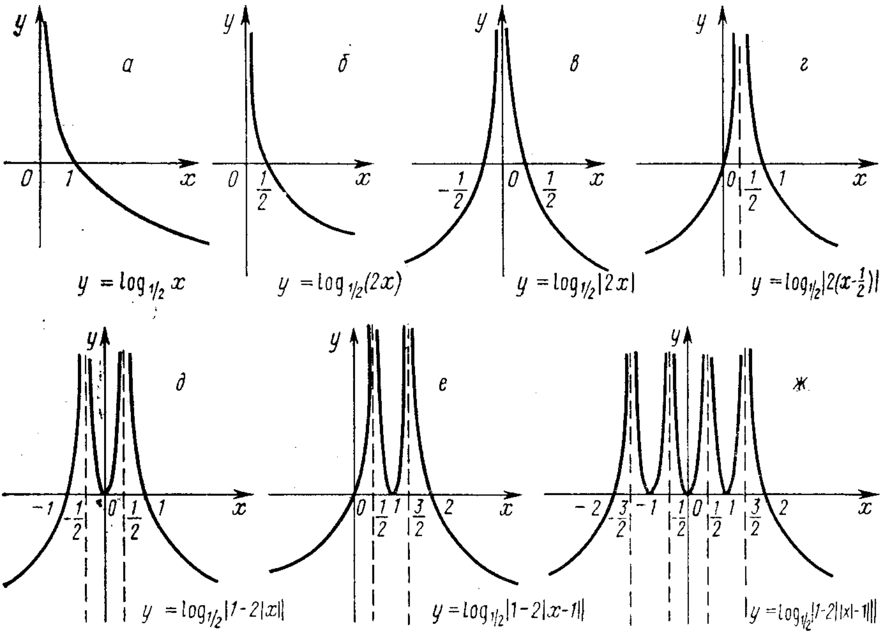

Рис. 4

Разберем следующий пример, где потребуются несколько иные рассуждения.

Пример 5. Построим эскиз графика функции $y=2^{1/x}$.

Решение. Графики функций $g=1/x$ и $y=2^g$ смотри на рис. 5, *а*, *б*. Функция $y=2^{1/x}$ определена на объединении множеств $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, т. е. на множестве $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$. На множестве $(-\infty, 0)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к 0 при $x\to-\infty$ и монотонно стремится к $-\infty$ при $x\to 0$; на множестве $(0, +\infty)$ функция $g(x)$ монотонно стремится к $+\infty$ при $x\to 0$ и монотонно стремится к 0 при $x\to+\infty$. Отсюда легко заключить, что функция $y=2^g$ определена на множестве $(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$.

На множестве $(-\infty, 0)$, когда x стремится к $-\infty$, функция $y=2^g$ стремится к единице, оставаясь меньше 1, а когда $x \to 0$, то стремится к 0. На множестве $(0, +\infty)$, когда $x \to 0$, функция $y=2^g$ стремится к $+\infty$, а когда $x \to +\infty$, то стремится к единице,

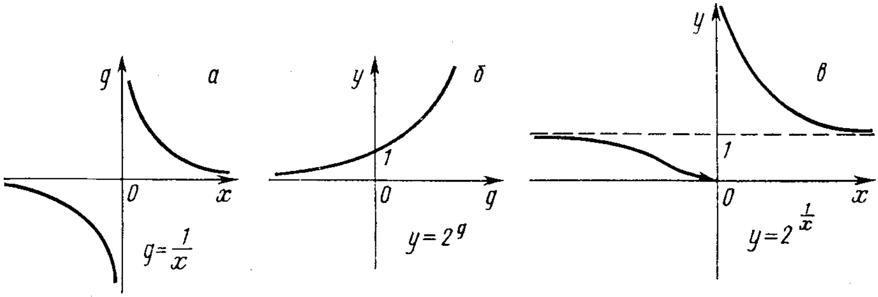

Рис. 5

оставаясь больше 1. Теперь рисуем эскиз графика функции $y=2^{1/x}$ (см. рис. 5, *в*).

Замечание. Полученные исследования полезно свести в таблицу и потом строить график

x	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	участки монотонности функции $\frac{1}{x}$
$g=\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	изменение $g(x)$ на этих участках
$y=2^{\frac{1}{x}}$	$1 \searrow 0$	$+\infty \searrow 1$	изменение $y=y(g(x))$ на этих участках

Пример 6. Построим эскиз графика функции $y=\log_{1/2}(x^2+x)$.

Решение. Построим графики $g=x^2+x$ и $y=\log_{1/2} g$ (см. рис. 6, *а*, *б*). Так как при $-1 \leqslant x \leqslant 0$ функция $g=x^2+x$ не положительна (рис. 6, *а*), то функция $y=\log_{1/2}(x^2+x)$ определена при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Составим таблицу.

x	$-\infty \nearrow -1$	$0 \nearrow +\infty$
$g=x^2+x$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$
$y=\log_{1/2} g$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Переходим к эскизу графика функции $y=\log_{1/2}(x^2+x)$ (см. рис. 6, *в*). Одной из существенных качественных характеристик функции является ее поведение у «границы области определения», т. е. при $x \to a$, где a — граничная точка области определения и при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, если область определения не ограничена слева или справа.

Введем некоторые количественные оценки этого поведения. Если при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$ разность $f(x)-g(x) \to 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ на плюс или минус бесконечности ведут себя асимптотически одинаково. Если $g(x)$ по структуре более

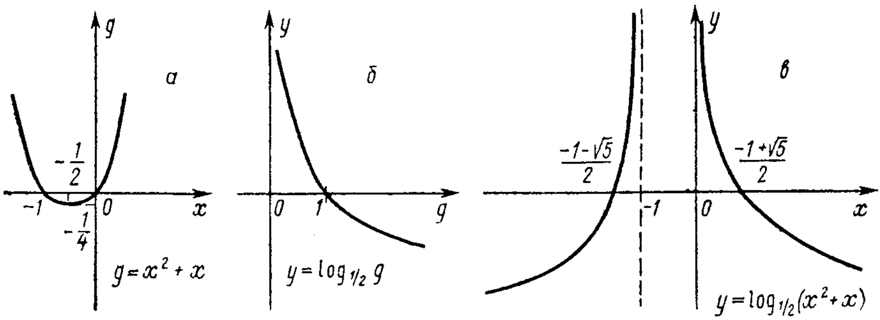

Рис. 6

«проста», чем $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ асимптотически ведет себя как $g(x)$.

Пример 7. Рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^4+e^{3x}}{x^2+e^{2x}}$.

После тождественных преобразований получим

$$\frac{x^4+e^{3x}}{x^2+e^{2x}}=e^x+\left(\frac{x^4}{e^{2x}}-\frac{x^2}{e^x}\right):\left(\frac{x^2}{e^{2x}}+1\right)=x^2+\frac{e^{3x}-x^2e^{2x}}{x^2+e^{2x}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ (показательная функция $y=a^x$, $a>1$, на плюс бесконечности растет быстрее степенной $y=x^\alpha$, $\alpha>0$, это строго доказывается позже) и $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{2x}=$ $=\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{z^2}{e^{2z}}=0$, то видно, что $y(x)$ на плюс бесконечности асимптотически ведет себя как e^x и на минус бесконечности — как x^2. Если $g(x)=kx+b$ и $f(x)-g(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, то говорят, что график функции $f(x)$ имеет правую (левую) асимптоту, наклонную при $k\neq 0$, горизонтальную при $k=0$. Правая асимптота существует тогда и только тогда, когда существуют оба предела: $k_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x}$ и $b_+ = \lim\limits_{x \to +\infty} (y(x) - k_+ x)$, левая — когда существуют $k_- = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{y(x)}{x}$ и $b_- = \lim\limits_{x \to -\infty} (y(x) - k_- x)$. Если правая и левая асимптоты совпадают, то говорят, что график функции имеет асимптоту (наклонную или горизонтальную).

Пример 8. Рассмотрим функцию $f(x) = x + (\sin x)/x$. Так как $(\sin x)/x \to 0 \, (x \to \infty)$ (почему ?), то прямая $y = x$ есть асимптота графика этой функции. Обратите внимание, что график данной

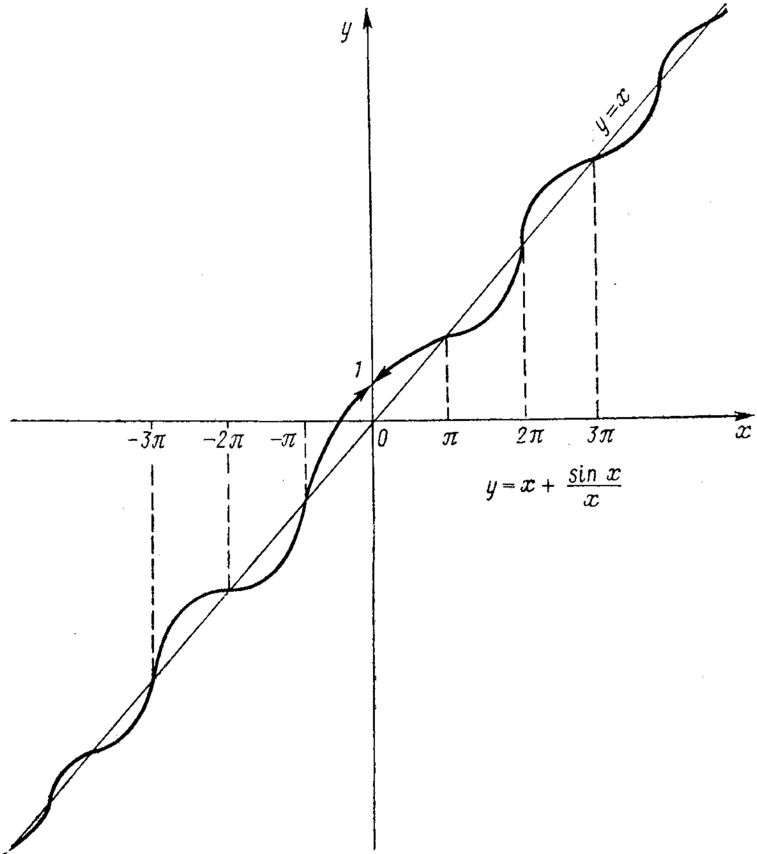

Рис. 7

функции пересекает свою асимптоту в бесконечном числе точек: $x = k\pi$ для каждого целого k, $k \neq 0$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 7.

Если при $x \to a \, (x \to a^+, \, x \to a^-)$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности, тогда прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой (двусторонней или односторонней). В таком случае иногда используется следующая характеристика функции: если в некоторой окрестности (правой или левой полуокрестностях) точки $x=a$ имеет место соотношение $0<C_1<|f(x)/g(x)|<C_2$, то говорят, что $f(x)$ имеет при $x \to a$ ($x \to a^+$, $x \to a^-$) порядок роста $g(x)$.

§ 2. ГРАФИКИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение. Рациональной функцией (рациональной дробью) называют отношение двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \quad (Q_m(x) \neq 0).$$

Простейшим после многочленов подклассом рациональных функций является класс дробно-линейных функций

$$y(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad c \neq 0.$$

Если числитель и знаменатель дробно-линейной функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ имеют общий множитель $x-\alpha$, то функция всюду, кроме точки $x=-d/c$, есть постоянная a/c и график ее имеет вид,

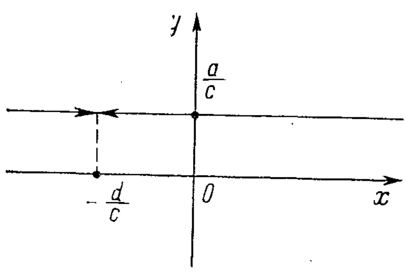

Рис. 8

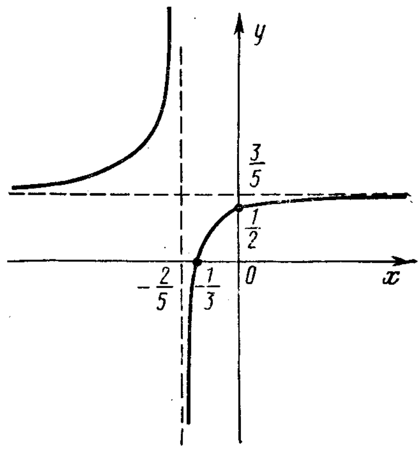

Рис. 9

изображенный на рис. 8. Обратите внимание на отличие этого графика от графика функции $y=a/c$!

В дальнейшем предполагаем, что рассматриваемая дробь несократима (т. е. $bc \neq ad$). После тождественного преобразования

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\dfrac{bc-ad}{c^2}}{x+\dfrac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{k}{x+\dfrac{d}{c}}$$

видно, что график дробно-линейной функции — кривая обратной пропорциональности $y=k/x$ (гипербола), сдвинутая по оси OX на $|d/c|$ вправо или влево в зависимости от знака d/c и по оси OY на $|a/c|$ вверх или вниз в зависимости от знака a/c. Таким образом, чтобы построить эскиз графика дробно-линейной функции, достаточно знать ее асимптоты и расположение относительно них одной из ветвей гиперболы, так как вторая ветвь симметрична с первой относительно точки пересечения асимптот. Асимптотами являются прямые $x=-d/c$ и $y=a/c$, полученные соответствующим сдвигом асимптот кривой $y=k/x$, а положение одной из ветвей определяется точкой пересечения гиперболы с осью OX или OY.

Пример 1. Построим эскиз графика функции $y=\frac{3x+1}{5x+2}$.

Решение. Асимптотами являются прямые: $x=-2/5$, $y=3/5$. Точка пересечения гиперболы с осью OY есть $(0, y(0))=(0, 1/2)$. Итак, одна из ветвей гиперболы лежит в четвертой четверти относительно асимптот; вторая, симметричная с первой, — во второй. Эскиз графика смотри на рис. 9.

Из эскиза графика рациональной дроби должны быть видны следующие свойства: знак, нули и точки неопределенности функции, ее поведение около точек неопределенности и асимптотическое поведение на бесконечности.

Всякая рациональная дробь $R(x)$ представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби (степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя), т. е. $R(x)=T_q(x)+\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$, $k<m$, где T_q, P_k, Q_m — многочлены. Правильная дробь при $x\to\infty$ стремится к нулю (почему?), поэтому $R(x)$ на бесконечности асимптотически ведет себя как многочлен $T_q(x)$, в частности, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ или уходит в бесконечность, или имеет один и тот же конечный предел. Если рассматривать только несократимые дроби, то через каждую точку неопределенности (нуль знаменателя) проходит вертикальная асимптота; если $x=a$ нуль знаменателя кратности k, т. е. знаменатель имеет вид $(x-a)^kQ(x)$, $Q(a)\neq 0$, то порядок роста функции около такой точки есть $1/(x-a)^k$.

Если α — корень числителя кратности m, то функция в окрестности точки $x=\alpha$ имеет вид $C(x-\alpha)^m$.

Пример 2. Построим эскиз графика функции

$$y=\frac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

Решение. Запишем соотношения

$$\frac{4x^5+13x^4}{(x+2)^2(1-x^2)}=-4x+3+\frac{25x^2+4x-12}{(x+2)^2\ (1-x)\ (1+x)}=$$
$$=\frac{x^4(4x+13)}{(x+2)^2(1-x^2)}.$$

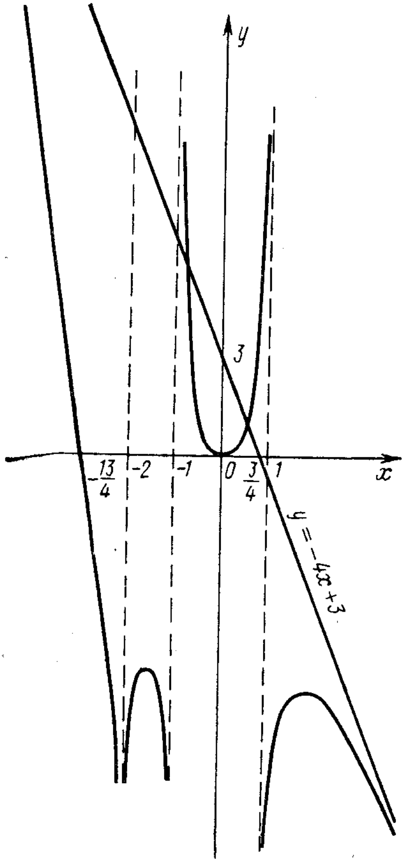

Рис. 10

Отсюда заключаем, что точки $x=0$, $x=-13/4$ — нули функции, прямые $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ — вертикальные асимптоты, прямая $y=-4x+3$ — наклонная асимптота. Перемена знака функции происходит в точках $x=-13/4$, $x=-1$, $x=1$; точка $x=0$ — корень четного порядка числителя, точка $x=-2$ — знаменателя, поэтому в этих точках знак функции не меняется. Эскиз графика представлен на рис. 10. Заметим, что на промежутке $(-1,\ 1)$ кривая дважды пересекла асимптоту $y=-4x+3$. Так как многочлен $25x^2+4x-12$ более двух корней иметь не может, то больше точек пересечения графика функции с этой асимптотой нет. Вообще, точное положение таких точек чаще всего находить не обязательно, достаточно ограничиться качественным анализом, как в этом примере. Точно так же чисто качественные рассуждения о поведении функции приводят к выявлению экстремальных точек на промежутках $(-2,\ -1)$, $(1,\ +\infty)$.

§ 3. ГРАФИКИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе рассматриваем функции вида $y=P_1^{\alpha_1}(x)\cdot P_2^{\alpha_2}(x)\ldots P_k^{\alpha_k}(x)$, где $P_1(x),\ \ldots,\ P_k(x)$ — многочлены, а $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k$ — рациональные числа, или конечные суммы таких произведений. После выделения всех множителей вида $(x-\alpha)^\beta$, $\beta>0$ произведение $P_1^{\alpha_1}\ldots P_k^{\alpha_k}$ примет вид

$$\frac{(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_p)^{\alpha_p}}{(x-b_1)^{\beta_1}(x-b_2)^{\beta_2}\ldots(x-b_q)^{\beta_q}}\cdot T(x), \qquad (1)$$

где $\alpha_i\geqslant 0$, $1\leqslant i\leqslant p$, $\beta_j\geqslant 0$, $1\leqslant j\leqslant q$, $T(x)$ всюду определенная и не обращающаяся в нуль функция. Если в (1) все α_i — натуральные числа, все β_i равны нулю и $T(x)$ — многочлен, то числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p$ называются *корнями*, а числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_p$ называются *кратностью* соответствующего корня; в общем случае принято говорить о порядке корня в числителе и в знаменателе.

Например, функция $y=x\sqrt[3]{\dfrac{x}{(x+2)^2}}$ имеет в числителе корень $x=0$ порядка 4/3, а в знаменателе корень $x=-2$ порядка 2/3.

Отметим основные свойства степенной функции $y=x^\alpha$ с положительным рациональным показателем $\alpha=m/n$, где $m\in N$, $n\in N$.

Если n четное, то функция $y=x^{1/n}$ определена для $x\geqslant 0$ и $y = (\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$.

Если n нечетное, то функция $y=x^{m/n}$ определена для всех действительных x, причем для $x>0$ имеем

$$y=(\sqrt[n]{x})^m=\sqrt[n]{x^m}$$

и

$$y(-x)=(\sqrt[n]{-x})^m=(-\sqrt[n]{x})^m=(-x^{1/n})^m.$$

Отсюда видно, что функция $y=x^{m/n}$ нечетна, если m и n нечетны, и четна, если n нечетно, а m четно. Поэтому для любого рационального α достаточно рассматривать поведение функции $y=x^\alpha$ на положительной полуоси, а ее поведение на отрицательной полуоси, если она там определена, обусловливается свойством четности или нечетности.

Так как $\alpha>0$, то график функции $y=x^\alpha$ проходит через начало координат, точку (1, 1) и функция стремится к плюс бесконечности при $x\to+\infty$. Чем больше α, тем ближе к оси OX график функции $y=x^\alpha$ на промежутке (0, 1) и дальше от оси OX на промежутке $(1, +\infty)$. Пользуясь техникой дифференцирования, можно показать, что при $\alpha>1$ график функции $y=x^\alpha$ не только лежит ниже прямой $y=x$ на (0, 1), но имеет в нуле горизонтальную касательную, а если $0<\alpha<1$, то график функции $y=x^\alpha$ лежит выше прямой $y=x$ и имеет в нуле вертикальную касательную.

Эти характерные свойства степенной функции используются для построения эскизов графиков.

Отметим еще, что график функции $y=(x-a)^\alpha\cdot h(x)$ (если $h(a)\neq 0$, и график функции $h(x)$ не имеет в точке $x=a$ вертикальной касательной) имеет в точке $x=a$ вертикальную или горизонтальную касательную одновременно с графиком функции $y=(x-a)^\alpha$.

Пример 1. Для функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ поведение в окрестности точки $x=0$ определяется множителем $(-\sqrt[3]{x^2})$, поскольку $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{x^3-1}$ и $\sqrt[3]{x^3-1}\neq 0$ при $x=0$. Поведение функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ в окрестности точки $x=0$ показано на рис. 11. В точке $x=1$ поведение функции $y=\sqrt[3]{x^2(x^3-1)}$ определяется множителем $\sqrt[3]{x-1}$, поскольку $y=\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}$ и $\sqrt[3]{x^2(x^2+x+1)}\neq 0$ при $x=1$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 11.

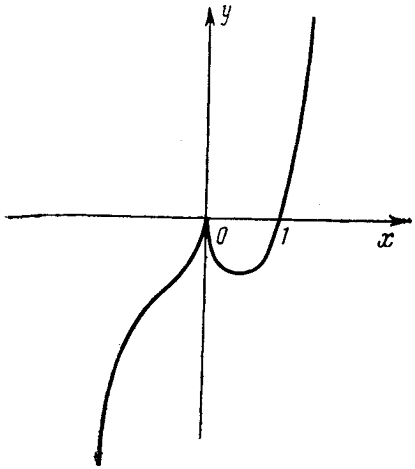

Рис. 11

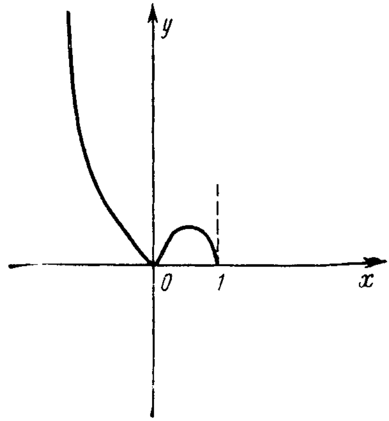

Рис. 12

Пример 2. Для функции $y=\sqrt{x^2-x^3}$ поведение в точке $x=0$ определяется множителем $\sqrt{x^2}=|x|$, так как $y=\sqrt{x^2-x^3}=\sqrt{x^2}\times\times\sqrt{1-x}$, а в точке $x=1$ определяется множителем $\sqrt{1-x}$. Эскиз графика данной функции приведен на рис. 12.

Если $y=y_1(x)+y_2(x)$ и функция $y_1(x)$ имеет в точке $x=x_0$ вертикальную касательную, а функция $y_2(x)$ не имеет такой касательной в точке $x=x_0$, то функция y имеет в точке $x=x_0$ вертикальную касательную.

Пример 3. График функции $y=\sqrt{x}-\cos x$ касается оси OY в точке $(0, -1)$, поскольку график функции $y=\sqrt{x}$ имеет в точке $x=0$ вертикальную касательную (рис. 13).

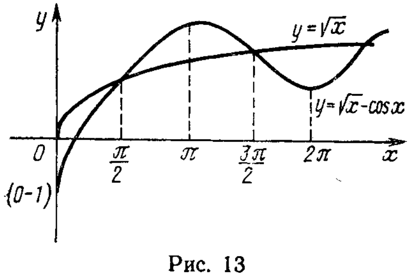

Рис. 13

На эскизе графика функции
$$y=P_1^{\alpha_1}(x)\cdot P_2^{\alpha_2}(x)\cdot\ \ldots\ \cdot P_m^{\alpha_m}(x),$$
где $P_i(x)$ — многочлены, α_i — рациональные числа, должны быть видны асимптоты этой кривой, точки пересечения с осями координат, расположение кривой относительно осей координат, точки, в которых кривая имеет вертикальную или горизонтальную касательную.

Пример 4. Построим эскиз графика функции

$$y=\frac{\sqrt{(x-1)^2(x+2)}\cdot\sqrt[3]{x-2}}{x\sqrt[6]{(x+1)^4(x+4)}}.$$

Решение. Функция определена при $x\geqslant-2$. Точки $x=-2$, $x=1$, $x=2$ — нули функции, прямая $x=-1$ и ось OY — вертикальные асимптоты, перемена знака функции происходит в точках $x=0$ и $x=2$, график имеет вертикальные касательные в точках $x=-2$ и $x=2$, точка $x=1$ — угловая (т. е. в окрестности этой точки данная функция имеет вид $C\sqrt{(x-1)^2}=C|x-1|$). После преобразования, тождественного для $x>2$, имеем

$$y=\frac{\sqrt{(1-1/x)^2(1+2/x)}\cdot\sqrt[3]{1-2/x}}{\sqrt[6]{(1+1/x)^4(1+4/x)}}.$$

Отсюда видно, что при $x\to+\infty$ прямая $y=1$ — горизонтальная асимптота. Эскиз графика функции представлен на рис. 14.

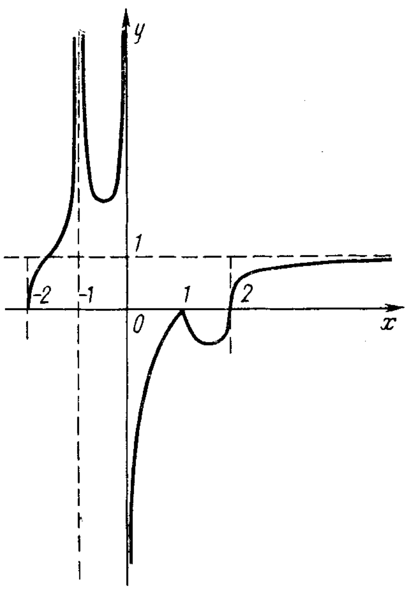

Рис. 14

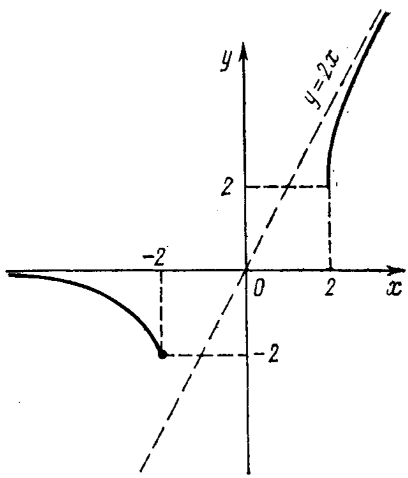

Рис. 15

При построении подобных эскизов, вообще говоря, не требуется ответа на вопрос, пересекается ли график функции со своими асимптотами. В данном примере можно ответить на этот вопрос.

Пусть $-1<x<0$, тогда $|x-2|>2$, $|x-1|^2|x+2|>1$, $|x|\sqrt[6]{(x+1)^4\cdot(x+4)}<\sqrt[6]{4}$ и $y>\sqrt[3]{2}\,/\,\sqrt[6]{4}=1$, т. е. график функции на этом промежутке лежит выше асимптоты. Пусть $x>2$, тогда

$(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2=(x-1)^6(x^2-4)^2(x+2)<x^6(x+4)(x^2-4)^2<$
$<x^6(x+4)(x^2+2x+1)^2$, следовательно, $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^6(x+2)^3(x-2)^2}}{\sqrt[6]{x^6(x+1)^4(x+4)}}<1$,
т. е. кривая лежит ниже асимптоты.

Пример 5. Построим эскиз графика функции $y=x+\sqrt{x^2-4}$.

Решение. Функция определена при $x\geqslant 2$ и $x\leqslant -2$. Рассмотрим функцию при $x\geqslant 2$. В точке $x=2$ график имеет вертикальную касательную, проходит через точку $(2, 2)$ и монотонно растет к плюс бесконечности с ростом x. Проверим, имеет ли график наклонную асимптоту

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right)=2;\quad \lim_{x\to+\infty}(y-2x)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2-4}+x}=0.$$

Следовательно, прямая $y=2x$ — правая асимптота. Для рассмотрения функции на промежутке $x<-2$ удобно сделать замену $z=-x$, тогда $y=\sqrt{z^2-4}-z$ и видно, что для $z>2$, $y>-2$, при $z\to+\infty$, $y\to 0$; в точке $x=-2$ график имеет вертикальную касательную, проходит через точку $(-2, -2)$, и так как $y=\dfrac{-4}{\sqrt{z^2-4}+z}$, то функция монотонно убывает при $z\to+\infty$ $(x\to-\infty)$. Эскиз графика функции представлен на рис. 15.

При построении эскиза графика сложной функции, в определение которой входят функции

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}\quad \text{и}\quad \operatorname{sign}x=\begin{cases} 1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

наиболее естественно выделить и рассмотреть отдельно промежутки, на которых выражение под знаком модуля или sign не меняет знака. Стоит обратить внимание на то, что функция $|x|$ — элементарная (почему?) и непрерывная, но имеет в нуле угловую точку, так что и в композиции с этой функцией непрерывность не нарушается, а угловые точки могут появиться; функция $y=\operatorname{sign}x$ разрывна, и при композиции с этой функцией также могут появиться точки разрыва.

§ 4. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

Рассмотрим функцию $y=\sin x$. Эта функция, рассматриваемая на всей числовой прямой, не является монотонной. Чтобы говорить об обратной функции, выделим участок монотонности функции $y=\sin x$. Одним из участков монотонности этой функции является отрезок $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. Функцию, обратную для функции $y=\sin x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, обозначим через $y=\arcsin x$, т. е. $y=\arcsin x$ означает, что $x=\sin y$ и $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Если рассмотрим функцию $y=\sin z$ на другом участке, например $\pi/2 \leqslant z \leqslant 3\pi/2$, то существует обратная функция, которая выражается через функцию $y=\arcsin z$ следующим образом: $y=\pi-\arcsin z$ (почему?). Аналогично, рассматривая функцию $y=\cos x$ на промежутке $[0, \pi]$, определяется обратная функция $y=\arccos x$, т. е. запись $y=\arccos x$ означает, что $x=\cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Для функции $y=\operatorname{tg} x$ на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$ определяется обратная функция $y=\operatorname{arctg} x$, т. е. запись $y=\operatorname{arctg} x$ означает, что $x=\operatorname{tg} y$ и $-\pi/2<y<\pi/2$. Для функции $y=\operatorname{ctg} x$ на промежутке

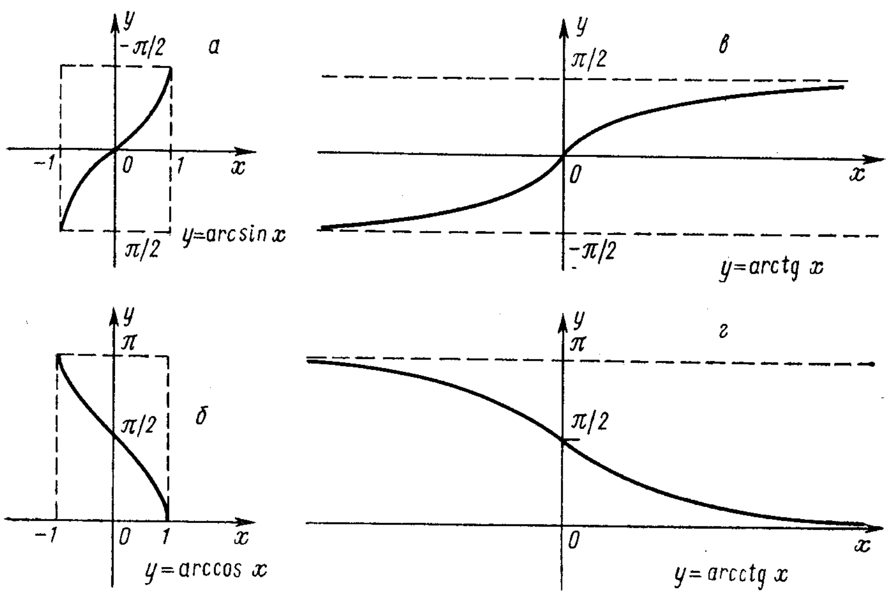

Рис. 16

$(0, \pi)$ определяется обратная функция $y=\operatorname{arcctg} x$, т. е. запись $y=\operatorname{arcctg} x$ означает, что $x=\operatorname{ctg} y$ и $0<y<\pi$.

Приводим графики обратных тригонометрических функций (см. 16).

Пример 1. Построим эскиз графика функции

$$y=\arcsin \frac{x-2}{3}.$$

Решение. Пишем цепочку преобразований:

$$y=\arcsin\frac{x-2}{3}\equiv\arcsin\left[\frac{1}{3}(x-2)\right]\xleftarrow{\text{сдвиг на 2 вправо}}$$

$$\leftarrow\arcsin\frac{1}{3}x\leftarrow\arcsin x.$$

Последовательно эскизы графиков смотри на рис. 17.

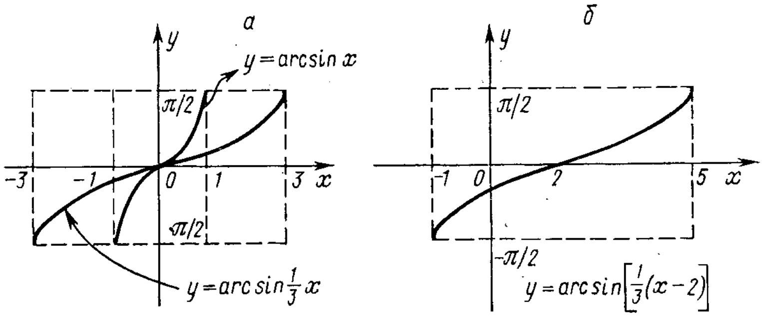

Рис. 17

Пример 2. Построим эскиз графика функции

$y=\arccos|(1-2|x|)/3|$.

Решение. Пишем цепочку преобразований:

$$\arccos|(1-2|x|)/3|\xleftarrow{x>0}\arccos|(1-2x)/3|\equiv$$

$$\equiv\arccos\left|\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right|\xleftarrow{\text{сдвиг на 1/2 вправо}}\arccos\left|\frac{2}{3}x\right|\xleftarrow{x>0}$$

$$\leftarrow\arccos\left(\frac{2}{3}x\right)\leftarrow\arccos x.$$

Последовательно эскизы графиков изображены на рис. 18.

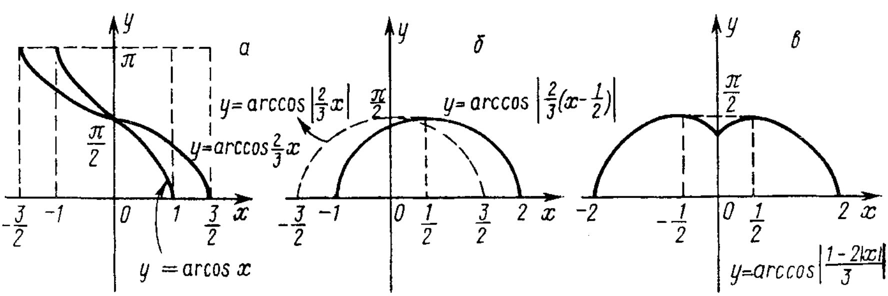

Рис. 18

Справедливы следующие формулы:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, \quad |x| < \infty;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2, \quad |x| < \infty;$$

$$\arcsin(\sin x) \equiv x, \quad |x| \leqslant \pi/2;$$

$$\sin(\arcsin x) \equiv x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\arccos(\cos x) \equiv x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$

$$\cos(\arccos x) \equiv x, \quad |x| \leqslant 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \equiv x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) \equiv x, \quad |x| < \pi/2;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \equiv x, \quad |x| < \infty;$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) \equiv x, \quad 0 < x < \pi;$$

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$= \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 0 < x < 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0;$$

$$\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Докажем некоторые из них.

1. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad |x| \leqslant 1.$

Пусть $\arccos(-x) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -x$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Из соотношения $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ следует $0 \leqslant \pi - \alpha \leqslant \pi$, а из соотношения $\cos\alpha = -x$ следует, что $\cos(\pi - \alpha) = x$. Поэтому $\pi - \alpha = \arccos x$, откуда $\alpha = \pi - \arccos x$, т. е. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

2. $\arcsin x + \arccos x = \pi/2, \quad |x| \leqslant 1.$

Пусть $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta$, тогда $x = \sin\alpha = \cos\beta$ и $-\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$. Имеем $\sin\alpha = \cos\beta = \sin(\pi/2 - \beta)$. Из соотношения $0 \leqslant \beta \leqslant \pi$ следует, что $-\pi/2 \leqslant \pi/2 - \beta \leqslant \pi/2$. Итак,

$$\sin\alpha = \sin(\pi/2 - \beta) \text{ и } -\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2, \quad -\pi/2 \leqslant \pi/2 - \beta \leqslant \pi/2.$$

Поэтому $\alpha = \pi/2 - \beta$, откуда получаем, что

$$\alpha + \beta = \pi/2, \text{ т. е. } \arcsin x + \arccos x = \pi/2.$$

3. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2}, \quad 0 < x < 1.$

Пусть $0 < x < 1$. Обозначим $\arcsin x = \alpha$, тогда $x = \sin\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$. Значит, $\cos\alpha = +\sqrt{1 - x^2}$, откуда

$$\alpha = \arccos\sqrt{1 - x^2}, \text{ т. е. } \arcsin x = \arccos\sqrt{1 - x^2},$$

что и требовалось доказать.

4. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1 - xy}{x + y}, \quad x > 0,\ y > 0.$

Обозначим $\operatorname{arctg} x = \alpha$, $\operatorname{arctg} y = \beta$, $x > 0$, $y > 0$. Тогда $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < \beta < \pi/2$. Поэтому

$$0 < \alpha + \beta < \pi, \quad \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{1 - xy}{x + y}.$$

Так как $0 < \alpha + \beta < \pi$, то $\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1 - xy}{x + y}$, т. е.

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1 - xy}{x + y}.$$

Пример 3. Вычислим $\arcsin(\sin 10)$.

Решение. Поскольку $\arcsin(\sin x) \equiv x$ при $|x| \leqslant \pi/2$, то, пользуясь свойствами функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, а также периодичностью функции $y = \sin x$, имеем $\arcsin(\sin 10) = \arcsin\sin(10 - 2\pi) = \arcsin\sin[\pi - (10 - 2\pi)] = 3\pi - 10$, поскольку $|3\pi - 10| < \pi/2$.

Пример 4. Построим эскиз графика функции $y = \arccos(\sin x^2)$.

Решение. Областью определения функции является вся ось OX. Из тождества $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ при $|x| \leqslant 1$ имеем $\arccos(\sin x^2) = \pi/2 - \arcsin\sin x^2$ (так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$ для любого x). В силу четности функции $\arcsin\sin x^2$ достаточно построить ее график в области $x \geqslant 0$. Поскольку $\arcsin\sin x \equiv x$, если $|x| \leqslant \pi/2$, то $\arcsin\sin x^2 \equiv x^2$ при $x^2 \leqslant \pi/2$, т. е. при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$. Следовательно, при $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi/2}$ имеем, что $\arccos \sin x^2 = \pi/2 - x^2$ (см. рис. 19, *а*). Если $x \in (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2})$, то $x^2 \in (\pi/2, 3\pi/2)$, а поскольку $x^2 - \pi \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\sin(x^2 - \pi) = -\sin x^2$, то $\arcsin(\sin x^2) = \arcsin(-\sin(x^2 - \pi)) = -\arcsin(\sin(x^2 - \pi)) = -(x^2 - \pi) = \pi - x^2$.

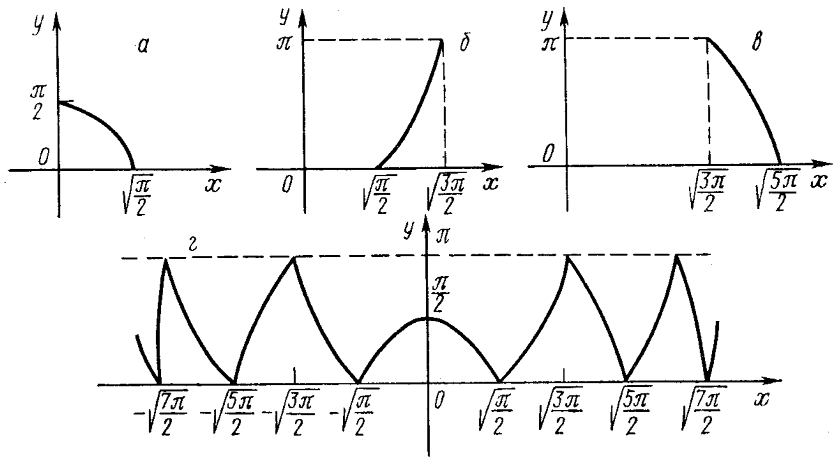

Рис. 19

Поэтому при $x \in (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{3\pi/2})$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\pi/2 - (\pi - x^2) = x^2 - \pi/2$ (см. рис. 19,*б*). При $x \in (\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{5\pi/2})$ имеем, что $x^2 \in (3\pi/2, 5\pi/2)$, $x - 2\pi \in (-\pi/2, \pi/2)$, и так как $\sin x^2 = \sin(x^2 - 2\pi)$, то $\arcsin \sin x^2 = x^2 - 2\pi$. Поэтому при $x \in (\sqrt{3\pi/2}, \sqrt{5\pi/2})$ график исходной функции совпадает с графиком функции $\pi/2 - (x^2 - 2\pi) = 5\pi/2 x^2$ (см. рис. 19,*в*). Аналогично при $x \in (\sqrt{2k-1)\pi/2}, \sqrt{(2k+1)\pi/2})$, $k \geqslant 3$, имеем, что график исходной функции совпадает с графиком функции

$$y = \pi/2 + (-1)^{k+1}(x^2 - k\pi).$$

Окончательный вид эскиза графика функции $y = \arccos \sin x^2$ представлен на рис. 19, *в*.

§ 5. КРИВЫЕ, ЗАДАННЫЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Кривой, заданной параметрически, называется множество точек плоскости XOY, координаты которых определяются из соотношений $x = x(t)$, $y = y(t)$ при каждом фиксированном t из некоторого множества T. Обычно в качестве множества T берется некоторый промежуток. Если от функций $x(t)$ и $y(t)$ потребовать только непрерывность на промежутке T, то образом этого промежутка при отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$ может быть множество в плоскости XOY, совсем непохожее на интуитивное представление о кривой. Например, можно задать такое отображение, что образом будет внутренность квадрата. Не углубляясь в теорию кривых, предполагаем, что рассматриваемый промежуток T изменения параметра t разбивается на конечное число промежутков, на каждом из которых функция $x(t)$ строго монотонна. На таком промежутке определена обратная функция $t(x)$ и $y(t)=y(t(x))$. Итак, каждому промежутку строгой монотонности $x(t)$ соответствует однозначная функция $y(x)$, график которой называется ветвью данной кривой. Количество ветвей определяется количеством участков строгой монотонности $x(t)$. Если точка $(x(t_0), y(t_0))$ не является общей для нескольких ветвей данной кривой, то в окрестности этой точки можно определить функцию $y=y(x)$, заданную параметрически, график которой проходит через эту точку.

Для построения эскиза кривой, заданной параметрически, на плоскости XOY необходимо отдельно рассматривать участки монотонности $x(t)$, а затем проводить рассуждения, аналогичные тем, которые проводятся при рассмотрении сложной функции. Пусть t возрастает. Тогда если $x(t)$ и $y(t)$ возрастают, то движение по кривой происходит направо вверх; если $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает, то движение по кривой происходит влево вверх и т. д. Если при $t \to t_0$ имеем $x \to a$, а $y(t)$ стремится к бесконечности, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x=a$. Если при $t \to t_0$ имеем, что $x(t)$ стремится к бесконечности, а $y(t) \to b$, то кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=b$. Наклонная асимптота может быть только тогда, когда при $t \to t_0$ функции $x(t)$ и $y(t)$ одновременно стремятся к бесконечности. Коэффициенты асимптоты $y=kx+b$ вычисляются, как было указано выше, с заменой условия $x \to \infty$ $(x \to \infty,\ x \to -\infty)$ на условие $t \to t_0$ $(t \to t_0^+,\ t \to t_0^-)$.

Из всего вышесказанного видно, что для построения эскиза кривой, заданной параметрически, важно точное определение участков монотонности, по крайней мере функции $x(t)$. Иногда это можно сделать из качественных соображений, но часто приходится обращаться к помощи производных.

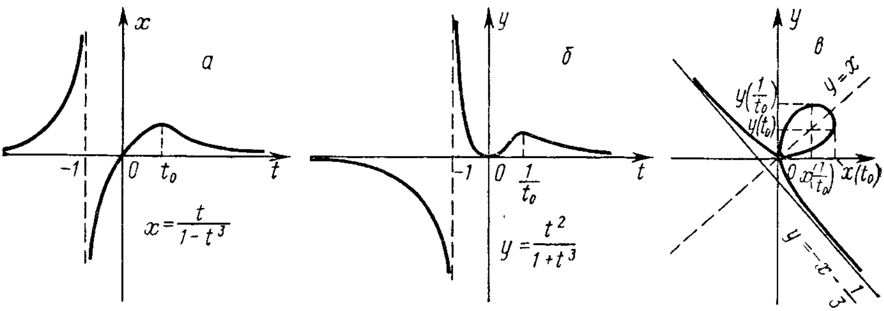

Рис. 20

Пример 1. Построим эскиз кривой $x=t/(1+t^3)$, $y=t^2/(1+t^3)$.

Решение. Эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ смотри на рис. 20, *а*, *б*. Примем без доказательства, что точка t_0 — единственная точка экстремума $x(t)$. Тогда участками монотонности $x(t)$ будут промежутки $(-\infty, -1)$, $(-1, t_0)$, $(t_0, +\infty)$. Оценим положение точки t_0. Поскольку $y/x=t$, то для $0<t<1$ имеем, что $0<y<x$, т. е. исследуемая кривая лежит в первой четверти ниже прямой $y=x$, а для $t>1$ — выше. Так как $x(1/t)=y(t)$, $y(1/t)=x(t)$, то кривая симметрична относительно прямой $y=x$ (вместе с точкой (x, y) на ней лежит и точка (y, x)). Если $t_0>1$, то точка, симметричная с точкой $(x(t_0), y(t_0))$, лежащей выше прямой $y=x$, имеет координату $x=y(t_0)=x(1/t_0)$, большую, чем $x(t_0)$, что противоречит условию. Итак, $0<t_0<1$.

Проверим, имеет ли кривая наклонную асимптоту. Имеем

$$\lim_{t\to-1} y/x=\lim_{t\to-1} t=-1;\quad \lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1} t(t+1)/(t^3+1)=$$
$$=\lim_{t\to-1} t/(t^2-t+1)=-1/3,$$

поэтому прямая $y=-x-1/3$ есть наклонная асимптота исследуемой кривой. Кривая проходит через начало координат: $x(0)=0$, $y(0)=0$. Когда t растет от 0 до t_0, значения функций $x(t)$, $y(t)$ растут, движение по кривой происходит направо вверх до точки $(x(t_0), y(t_0))$. Когда t убывает от 0 до -1, движение по кривой происходит налево вверх, асимптотически приближаясь к прямой $y=-x-1/3$. В точке $(x(t_0), y(t_0))$ начинается вторая ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $(t_0, +\infty)$. С ростом t функция $x(t)$ убывает и движение по кривой происходит влево, сначала вверх до точки $(x(1/t_0), y(1/t_0))$, а затем вниз; при $t\to+\infty$ имеем $x(t)\to 0$, $y(t)\to 0$. Наконец, при росте t на промежутке $(-\infty, -1)$ функция $x(t)$ возрастает, $y(t)$ убывает. При $t\to-\infty$ получаем, что $x(t)\to 0$, $y(t)\to 0$, при $t\to-1$ движение по кривой происходит вправо вниз, асимптотически приближаясь к прямой $y=-x-1/3$. Как уже говорилось, кривая симметрична при замене t на $1/t$, поэтому можно было бы ограничиться рассмотрением t на промежутке $(-1, 1)$, а оставшуюся часть нарисовать по симметрии относительно прямой $y=x$. Эскиз кривой представлен на рис. 20, *в*.

Пользуясь техникой дифференцирования, покажем теперь, что утверждение о монотонности функции $x(t)$ верно, и определим точно значение t_0. Имеем

$$x'_t=\frac{t^3+1-3t^3}{(t^3+1)^2}=\frac{1-2t^3}{(t^3+1)^2}.$$

При $t<\sqrt[3]{1/2}$, $t\neq-1$, имеем $x'_t>0$ и поэтому $x(t)$ строго возрастает на промежутках $(-\infty, -1)$ и $(-1, \sqrt[3]{1/2})$; при $t>\sqrt[3]{1/2}$ имеем $x'_t<0$ и поэтому $x(t)$ строго убывает на промежутке $(\sqrt[3]{1/2},$

$+\infty$). Так как функция $x(t)$ непрерывна в точке $t_0=\sqrt[3]{1/2}$, то эта точка есть точка экстремума (точка максимума).

Пример 2. Построим эскиз кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $a>0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0+2\pi),\ y(t_0+2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0),\ y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке $(0,\ 2\pi)$. Построим эскизы графиков функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 21, *а*, *б*).

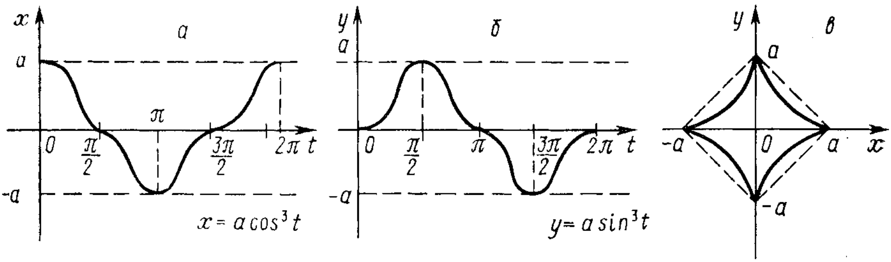

Рис. 21

Промежутками монотонности $x(t)$ являются $(0,\ \pi)$ и $(\pi,\ 2\pi)$. Когда t растет от 0 до $\pi/2$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(a,\ 0)=(x(0),\ y(0))$ до точки $(x(\pi/2),\ y(\pi/2))=(0,\ a)$; когда t растет от $\pi/2$ до π, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi),\ y(\pi))=(-a,\ 0)$. В этой точке начинается вторая ветвь кривой. Когда t растет от π до $3\pi/2$, движение по кривой происходит вправо вниз до точки $(x(3\pi/2),\ y(3\pi/2))=(0,\ a)$. Когда t растет от $3\pi/2$ до 2π, движение по кривой происходит вправо вверх до точки $(x(2\pi),\ y(2\pi))=(a,\ 0)$. Так как $x(2\pi-t_0)=x(t_0)$, $y(2\pi-t_0)=-y(t_0)$, $x(\pi-t_0)=-x(t_0)$, $y(\pi-t_0)=y(t_0)$, то вместе с точкой $(x_0,\ y_0)$ на кривой лежат точки $(-x_0,\ y_0)$ и $(x_0,\ -y_0)$, т. е. она симметрична относительно обеих координатных осей. Пусть t меняется на промежутке $(0,\ \pi/2)$. Соответствующие точки кривой лежат в первой четверти. Рассмотрим множество точек $\tilde{x}=a\cos^2 t$, $\tilde{y}=a\sin^2 t$. Это отрезок прямой $\tilde{x}+\tilde{y}=a$, лежащий в первой четверти. Так как при любом t, $0<t<\pi/2$, $x<\tilde{x}$, $y<\tilde{y}$, то исследуемая кривая лежит ниже этой прямой. Эскиз кривой представлен на рис. 21, *в*.

Пример 3. Построим эскиз кривой $x=a\cos 2t$, $y=a\sin 3t$, $a>0$.

Решение. Так как точка $(x(t_0+2\pi),\ y(t_0+2\pi))$ совпадает с точкой $(x(t_0),\ y(t_0))$, то достаточно рассматривать t на промежутке длины 2π. Отметим еще следующие соотношения: $x(-t)=x(t)$, $y(-t)=-y(t)$, $x(\pi-t)=x(t)$, $y(\pi-t)=y(t)$; из них видно, что при изменении t на промежутке $[0,\ \pi/2]$ получаются те же точки кривой, что и при изменении t на $[\pi/2,\ \pi]$, а при изменении t на промежутке $[-\pi,\ 0]$ получаются точки кривой, симметричные относительно оси OX с точками, полученными при изменении t

на $[0, \pi]$. Таким образом, достаточно рассматривать t на промежутке $[0, \pi/2]$. Построим графики функций $x(t)$ и $y(t)$ (см. рис. 22, *а*, *б*).

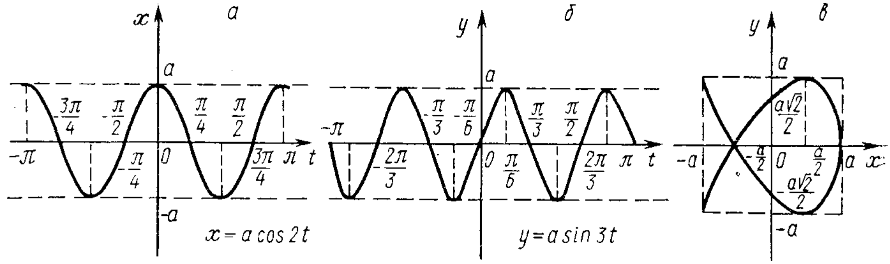

Рис. 22

На промежутке $[0, \pi/2]$ $x(t)$ монотонно убывает, следовательно, этому промежутку соответствует одна ветвь кривой. Когда t растет от 0 до $\pi/6$, движение по кривой происходит влево вверх от точки $(x(0), y(0)) = (a, 0)$ до точки $(x(\pi/6), y(\pi/6)) = (a/2, a)$. Когда t растет от $\pi/6$ до $\pi/2$, движение по кривой происходит влево вниз до точки $(x(\pi/2), y(\pi/2)) = (-a, -a)$, пересекая ось OY в точке $(x(\pi/4), y(\pi/4)) = (0, a\sqrt{2}/2)$ и ось OX в точке $(x(\pi/3), y(\pi/3)) = (-a/2, 0)$. При дальнейшем росте t от $\pi/2$ до π, как было отмечено выше, точки $(x(t), y(t))$ лежат на той же самой кривой. При изменении t от 0 до $-\pi$ получаем вторую ветвь кривой, симметричную с первой относительно оси OX. Эскиз кривой представлен на рис. 22, *в*.

§ 6. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ В ЭТОЙ СИСТЕМЕ

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой полюсом, луча OP, выходящего из этой точки, называемого полярной осью, масштаба для измерения длины и направления отсчета углов. Положительными называем углы, отсчитываемые от полярной оси против часовой стрелки, а отрицательными — по часовой стрелке.

Полярными координатами r и φ точки M, не совпадающей с полюсом, называются: расстояние r от точки M до полюса O и угол φ от полярной оси до луча OM. Для полюса O полагается, что $r=0$, а φ — не определен. Полярный угол точки M, отличной от O, имеет бесконечно много значений, главным значением угла φ называется его значение, удовлетворяющее условию $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Если полюс O принять за начало декартовой прямоугольной системы координат, направление полярной оси за положительное направление оси OX, а за ось OY принять такую ось, что угол от положительного направления оси OX до положительного направления оси OY равен $\pi/2$ (такие системы назовем совмещенными), то между декартовыми координатами x, y точки M и ее полярными координатами r и φ имеют место соотношения:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

И обратно, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = x/r$, $\sin\varphi = y/r$.

Замечание. Если $x \neq 0$, $y \neq 0$, то угол φ можно найти из условия $\operatorname{tg}\varphi = y/x$, причем за главное значение φ взять угол из $[0, 2\pi)$ такой, что знак $\sin\varphi$ равен знаку y.

Пример 1. Пусть точка $M(x, y)$ имеет декартовы координаты $(-1, -1)$. Найдем полярные координаты этой точки, если системы совмещены.

Решение. $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$;

$$\cos\varphi = -\sqrt{2}/2, \quad \sin\varphi = -\sqrt{2}/2, \text{ откуда } \varphi = 5\pi/4 + 2\pi k, \ k \in Z,$$

т. е. полярные координаты точки M есть $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 5\pi/4 + 2\pi k$, $k \in Z$.

Пример 2. Нарисуем кривую, заданную в полярной системе координат уравнением $r = \cos 3\varphi$.

Решение. Функция $\cos 3\varphi$ — периодическая с главным периодом T, равным $2\pi/3$, поэтому достаточно построить кривую для $0 \leqslant \varphi < 2\pi/3$, а затем, используя периодичность, построить ее для $2\pi/3 \leqslant \varphi < 4\pi/3$ и, наконец, для $4\pi/3 \leqslant \varphi < 2\pi$. Построим ту часть кривой, которая расположена в угле $0 \leqslant \varphi < 2\pi/3$. Функция $r = \cos 3\varphi$ на отрезке $[0, \pi/6]$ монотонно убывает от 1 до 0; на интервале $(\pi/6, \pi/2)$ $r < 0$, поэтому нет точек линии, расположенных внутри угла $\pi/6 < \varphi < \pi/2$; на отрезке $[\pi/2, 2\pi/3]$ кривая монотонно возрастает от 0 до 1. Для $\varphi \in [0, \pi/6] \cup [\pi/2, 2\pi/3]$ эскиз кривой представлен на рис. 23, *а*. Осталось построить кривую в других двух углах: $2\pi/3 \leqslant \varphi < 4\pi/3$ и $4\pi/3 \leqslant \varphi < 2\pi$, используя при этом периодичность функции $\cos 3\varphi$. Эскиз кривой приведен на рис. 23, *б*.

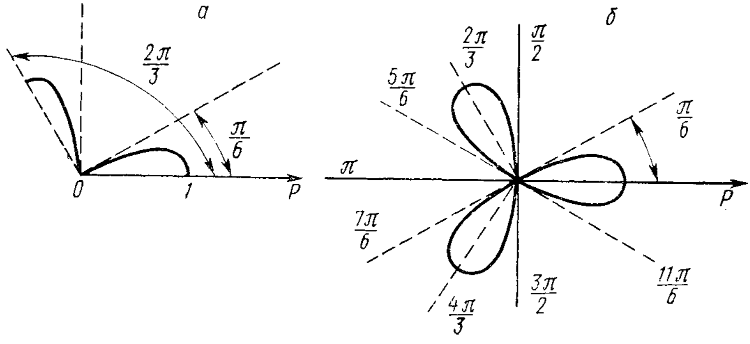

Рис. 23

Пример 3. Определим вид кривой на декартовой плоскости XOY, уравнение которой в полярной системе координат, совмещенной с декартовой, имеет вид $r = \cos\varphi$.

Решение. Поскольку $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$, то в декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид $\sqrt{x^2+y^2} = x/\sqrt{x^2+y^2}$ или $x^2+y^2=x$, откуда $(x-1/2)^2+y^2=1/4$, — это есть уравнение окружности радиуса 1/2 с центром в точке (1/2, 0).

Замечание. Из условия $r=\cos\varphi$ следует, что $r^2 = r\cos\varphi$, откуда $x^2+y^2=x$.

Пример 4. Построим эскиз кривой, задаваемой в декартовой системе уравнением $(x^2+y^2)^{3/2}=2xy$.

Решение. Ясно, что кривая располагается в I и III квадрантах симметрично относительно начала координат (если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на кривой, то и точка $M'(-x_0, -y_0)$ лежит на кривой). Поэтому достаточно построить кривую в первой четверти.

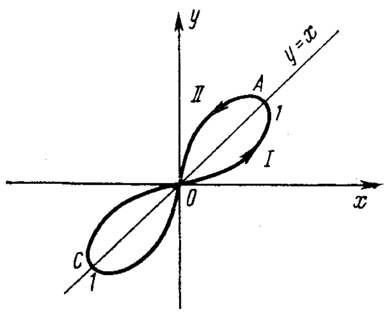

Рис. 24

Перейдем к полярной системе координат, совмещенной с декартовой, тогда имеем $r^3=2r^2\cos\varphi\sin\varphi$ или $r=\sin 2\varphi$. При изменении угла φ от 0 до $\pi/4$ r возрастает от 0 до 1 (на рис. 24 это движение от точки 0 до точки A — путь I). При изменении угла φ от $\pi/4$ до $\pi/2$ r убывает от 1 до 0 (на рис. 24 это движение от точки A до точки 0 — путь II). Используя замечание, приведенное выше, получаем эскиз кривой (см. рис. 24).

§ 7. ФУНКЦИИ, ЗАДАННЫЕ НЕЯВНО

Пусть задано уравнение $F(x, y)=0$. Если множество точек плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, состоит из конечного числа непрерывных кривых, каждая из которых есть график однозначной функции $y=y(x)$, то говорят, что это уравнение неявно определяет соответствующее семейство функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_k(x)$. Если точка (x_0, y_0) лежит только на одной из этих кривых, то условие $y(x_0)=y_0$ позволяет однозначно выбрать эту кривую из всего семейства, т. е. уравнение $F(x, y)=0$ и условие $y(x_0)=y_0$ определяют (или задают) однозначную неявную непрерывную функцию в окрестности точки (x_0, y_0) такую, что $F(x, y(x))\equiv 0$, $y(x_0)=y_0$.

Простейшим уравнением вида $F(x, y)=0$ является уравнение $x-f(y)=0$, определяющее функцию, обратную к $f: y=f^{-1}(x)$. Ось OY меняется местами с осью OX при симметричном отображении плоскости XOY относительно биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, кривая $y=f(x)$ симметрична кривой $x=f(y)$ или $y=f^{-1}(x)$ относительно этой биссектрисы. При этом отображении непрерывная монотонная функция перейдет в непрерывную монотонную функцию, т. е. обратная функция однозначна, непрерывна и монотонна. Если же непрерывная функция $x=f(y)$ не монотонна, то кривая, определяемая уравнением $x-f(y)=0$, уже не будет графиком функции $y=y(x)$, так как нет однозначной зависимости функции от аргумента.

Если уравнение $F(x, y)=0$ можно разрешить относительно одной из переменных, то построение множества точек (x, y), для которых это уравнение справедливо, следует из предыдущих рассмотрений. Иногда можно ввести параметр t так, что уравнение $F(x, y)=0$ равносильно соотношению $\{x=x(t), y=y(t), t\in T\}$ (или нескольким таким соотношениям).

Пример 1. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением $x=y-\sin y$.

Решение. Имеем, что $x(k\pi)=k\pi$, $k\in Z$; $x_y'=1-\cos y\geqslant 0$, $x(y)$ — монотонная нечетная функция. Эскиз кривой в системе YOX представлен на рис. 25,*а*, а эскиз кривой, определенной уравнением $x=y-\sin y$ (т. е. в системе XOY), представлен на рис. 25, *б*.

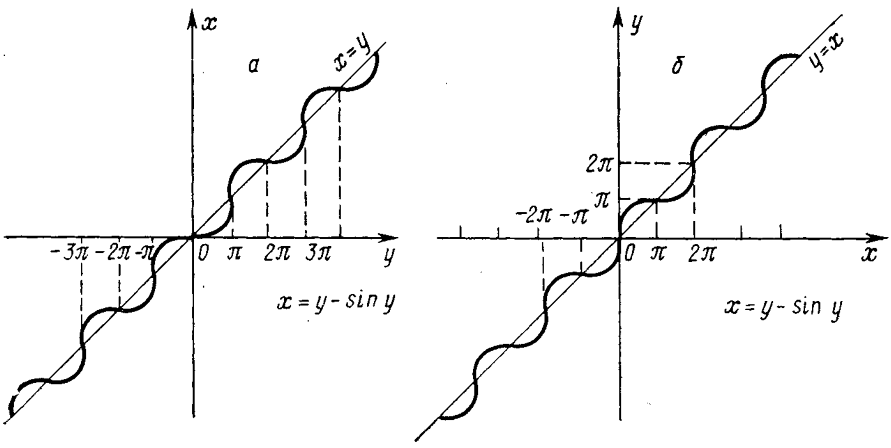

Рис. 25

Пример 2. Нарисуем эскиз кривой, заданной уравнением $x=y\cos y$.

Решение. Функция $x(y)$ — нечетная; для $y\geqslant 0$ имеем $|x|\leqslant y$, $x(\pi/2+k\pi)=0$, $x(2k\pi)=2k\pi$, $x((2k+1)\pi)=-(2k+1)\pi$. Эскиз кривой $x(y)$ в системе YOX представлен на рис. 26, *а*, а эскиз кривой $y(x)$ — в системе XOY, определяемой уравнением $x=y\cos y$, представлен на рис. 26, *б*.

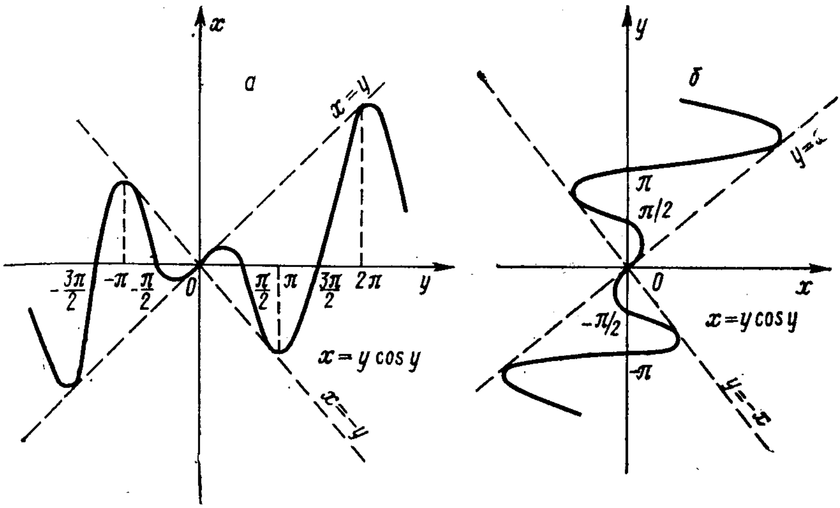

Рис. 26

Пример 3. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением $x^5+y^5=2x^2y^2$.

Решение. Заметим, что точка (0, 0) принадлежит данной кривой. Других точек вида $(0, y)$ на этой кривой нет. Для построения кривой введем параметр $t=y/x$. Тогда данное уравнение преобразуется следующим образом:

$$x^5(1+t^5)=2t^2x^4.$$

Отсюда видно, что уравнение $x^5+y^5=2x^2y^2$ равносильно соотношениям $x(t)=2t^2/(1+t^5)$, $y(t)=2t^3/(1+t^5)$, так как точка (0, 0) также принадлежит этой кривой при $t=0$. Построение таких кривых было проведено выше. Кривая представлена на рис. 27.

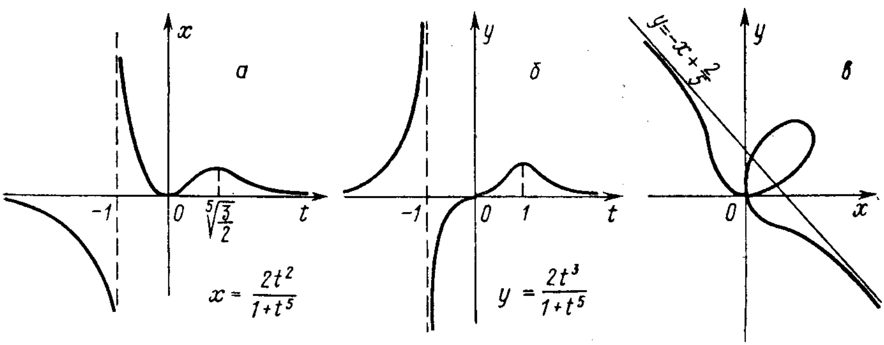

Рис. 27

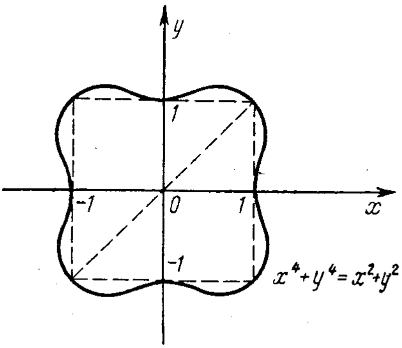

Рис. 28

Пример 4. Нарисуем в системе XOY эскиз кривой, заданной уравнением

$$x^4+y^4=x^2+y^2.$$

Решение. Перейдем к полярной системе координат, совмещенной с декартовой, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда уравнение данной кривой принимает вид

$$r^2=1/(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi), \text{ т. е.}$$

$$r^2=4/(3+\cos 4\varphi).$$

Построение таких кривых также было приведено выше. Эскиз данной кривой представлен на рис. 28.

Задачи

В одной и той же системе координат построить эскизы графиков следующих функций:

1. $y=x$, $y=x^2$, $y=x^4$.
2. $y=x$, $y=x^3$, $y=x^5$.
3. $y=x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt[3]{x}$, $y=\sqrt[4]{x}$.
4. $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x^3}$.
5. $y=\sqrt{x^2}$, $y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=\sqrt[4]{x^2}$.
6. $y=2^x$, $y=3^{2x}$, $y=2^{2x}$, $y=x$.
7. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$, $y=3^{-x}$, $y=2^{-2x}$, $y=x$.
8. $y=x$, $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$.
9. $y=x$, $y=\log_{1/2} x$, $y=\log_{1/3} x$.
10. $y=x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$.
11. $y=x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

Используя правило построения графика функции $y=Af(x)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

12. $y=-x^2$. **13.** $y=-\dfrac{1}{x}$. **14.** $y=-\cos x$.

15. $y=\frac{1}{4}\operatorname{tg}x$. 16. $y=3\log_2 x$. 17. $y=2{,}1\sqrt{x}$.

18. $y=-\frac{1}{3}\cdot 5^x$. 19. $y=\frac{1}{2}\log_{1/3}x$. 20. $y=0{,}2\operatorname{ctg}x$.

Используя правило построения графика функции $y=f(-x)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

21. $y=\log_2(-x)$. 22. $y=\sqrt[3]{-x}$. 23. $y=\sqrt{-x}$.

24. $y=\sin(-x)$. 25. $y=\operatorname{tg}(-x)$. 26. $y=\operatorname{ctg}(-x)$.

27. $y=2^{-x}$. 28. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$. 29. $y=(2{,}1)^{-x}$.

30. $y=-3\sqrt[4]{-x}$. 31. $y=\cos(-x)$. 32. $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-5x}$.

Используя правило построения графика функции $y=f(kx)$ $(k\neq 0)$ по графику $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

33. $y=\sin 2x$. 34. $y=\cos\frac{1}{2}x$. 35. $y=\cos\pi x$.

36. $y=\sin\frac{1}{\pi}x$. 37. $y=\log_2 2x$. 38. $y=\log_{1/2}\left(\frac{1}{3}x\right)$.

39. $y=\operatorname{ctg}\frac{1}{4}x$. 40. $y=\operatorname{tg}3x$. 41. $y=\sqrt{2x}$.

42. $y=\sqrt[3]{-0{,}5x}$. 43. $y=\sqrt[100]{-2x}$. 44. $y=\sqrt[33]{4x}$.

45. $y=\log_3(-3x)$. 46. $y=\sin(-2x)$. 47. $y=\operatorname{ctg}(-2x)$.

Используя правило построения графика функции $y=f(x+a)$ $(a\neq 0)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

48. $y=(x-2)^2$. 49. $y=(x+1)^3$. 50. $y=\sqrt{2+x}$.

51. $y=(x+4)^2$. 52. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. 53. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

54. $y=\frac{1}{x-3}$. 55. $y=\operatorname{tg}(1-x)$. 56. $y=(2{,}2)^{1-x}$.

57. $y=\sqrt{1-x}$. 58. $y=\sqrt[3]{x+3}$. 59. $y=\log_{1/3}(x+1)$.

Используя правило построения графика функции $y=f(ax+b)$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

60. $y=\log_3(2x+3)$. 61. $y=\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$. 62. $y=\operatorname{tg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$.

63. $y=\operatorname{ctg}\frac{3x+\pi}{6}$. 64. $y=\cos\frac{2\pi x+\pi}{4}$. 65. $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

66. $y=\sin\frac{6\pi x-\pi}{3}$. 67. $y=\cos\frac{2\pi x-\pi}{5}$. 68. $y=\operatorname{tg}\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)$.

69. $y=\frac{1}{1-2x}$. 70. $y=\sqrt[3]{2-3x}$. 71. $y=\sqrt{(1-3x)^3}$.

72. $y=\sqrt[3]{(2x-5)^2}$. 73. $y=\frac{3}{(1-2x)^2}$. 74. $y=(\pi-3)^{2x-1}$.

75. $y=\sin x+\cos x$. 76. $y=x^2+2x-5$. 77. $y=2x-x^2+4$.

Используя правило построения графика функции $y=f(x)+A$ по графику функции $y=f(x)$, построить эскизы графиков следующих функций:

78. $y=1+\sin x$. 79. $y=2-3\cos x$. 80. $y=2-\sqrt{-x}$.

81. $y=2+\log_2(1+x)$. 82. $y=\sin^2 x$. 83. $y=\cos^2 x$.

84. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log_{1/2}(1+2x)$. 85. $y=2-3\sqrt[3]{1-2x}$.

86. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. 87. $y=2-3(x-1)^2$.

88. $y=x^2+4x+8$. 89. $y=1-3x-4x^2$.

Построить эскизы графиков следующих дробно-линейных функций:

90. $y=\frac{5x-1}{3x+2}$. 91. $y=\frac{9x-3}{15x-5}$. 92. $y=\frac{4+x}{2x+1}$.

93. $y=\frac{7x+2}{x}$. 94. $y=\frac{5x+20}{3x+12}$. 95. $y=\frac{2x-8}{x-2}$.

96. $y=-\frac{x+2}{x+5}$. 97. $y=-\frac{7x+6}{x+1}$. 98. $y=\frac{14x-8}{2x-1}$.

Построить эскизы графиков следующих рациональных функций:

99. $y=(x-2)(x^2-4)$. 100. $y=(x+2)(x-1)^3$.

101. $y=(1-x^4)(x+3)(x-2)^2$. 102. $y=(1-x)(1-x^2)^3(2+x)^5$.

103. $y=\frac{x^2}{1-x}$. 104. $y=\frac{x^3}{1-x^2}$.

105. $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$. 106. $y=\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}$.

107. $y=\frac{x^2-4}{2x^2-1}$. 108. $y=\frac{(x-4)(x^2-9)}{x^2-5x+6}$.

109. $y=\frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$. 110. $y=\frac{3x^2-2x-1}{(x^2-4)(x+2)}$.

111. $y=\frac{3x^2+4x+1}{(2x+1)(x-1)}$. 112. $y=\frac{(x^2-3x-4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$.

113. $y=\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$.

114. $y=\frac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

115. $y=\frac{(x-1)(x+2)^2}{(2x-1)^2}$.

116. $y=\frac{(4x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2(2x+1)}$.

117. $y=\frac{x^4-4x^3+2x^3}{(x-2)^2(x+1)}$.

118. $y=\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)(x^2+1)}$.

119. $y=\frac{(x-4)^2(x+1)(x+3)}{(x^2-4)(x+2)^2}$.

120. $y=\frac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

121. $y=\frac{x^4+2x^3-3x^2}{(x^2-4)(x+1)^2}$.

122. $y=\frac{(x-2)(x^4+2x^3+3x^2)}{(4x^2-4x+1)(4x^2-1)}$.

Построить эскизы графиков следующих алгебраических функций:

123. $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$.

124. $y=\sqrt[3]{(x+3)^5(x-2)^2(x+1)}$.

125. $y=\sqrt[3]{x^2}-x$.

126. $y=(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^2(x-3)^{-\frac{2}{3}}$.

127. $y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9}$.

128. $y=x^{2/3}+\sqrt[5]{(x-1)^2}$.

129. $y=\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2(x-3)}}{\sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)^3}\cdot\sqrt{x+10}}$.

130. $y=\frac{\sqrt[5]{(x+4)^7(x-2)^2(x+1)}}{\sqrt{(x+2)^2(x+5)}}$.

Построить эскизы графиков следующих функций:

131. $y=|x|-x$.

132. $y=|x|-(\sqrt{x})^2$.

133. $y=|x|-\sqrt{x^2}$.

134. $y=||x|-1|$.

135. $y=||2x-1|-2|$.

136. $y=|x|-|x-1|$.

137. $y=|x|+|x+1|$.

138. $y=|x|-|x+1|-|x+2|$.

139. $y=x^2-|x|$.

140. $y=|x^2-1|-x^2$.

141. $y=x^2-3|x|+1$.

142. $y=|x^2+x|-x+1$.

143. $y=|x^2+3x|+2x-8$.

144. $y=(|x|-1)(x+1)$.

145. $y=\left|\frac{2x-1}{3x+2}\right|$.

146. $y=\frac{|1-3x|}{|2x+1}$.

147. $y=\left|\frac{|x|-1}{x}\right|$.

148. $y=\frac{|2x+3|}{|x|-1}$.

149. $y=\operatorname{sign}\cos x$.

150. $y=x+\operatorname{sign}\sin x$.

151. $y=\frac{x^2 \operatorname{sign} \cos \pi x}{1+x^2}$.

152. $y=\sqrt[3]{x^2 \operatorname{sign} \cos \pi x}$.

153. $y=\operatorname{sign} \sin \pi x+\operatorname{sign} \cos \pi x$.

154. $y=\operatorname{sign}(\sin \pi x+\cos \pi x)$.

Вычислить:

155. $\cos(\arcsin 1)$.

156. $\sin(\arccos 0{,}8)$.

157. $\sin\left(2 \arccos \frac{1}{4}\right)$.

158. $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{2}{3}\right)$.

159. $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}-\arccos \frac{5}{13}\right)$.

160. $\sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)$.

161. $\sin\left(\arcsin \frac{1}{3}+\arcsin \frac{1}{4}\right)$.

162. $\operatorname{tg}\left(2 \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

163. $\arcsin(\sin 11)$.

164. $\arccos(\cos 7)$.

165. $\arcsin(\cos 8)$.

166. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 25)$.

167. $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 4)$.

168. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

Доказать, что:

169. $\arcsin \frac{4}{5}=\arccos \frac{3}{5}=\operatorname{arctg} \frac{4}{3}=\operatorname{arcctg} \frac{3}{4}$.

170. $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right)=\pi-\arcsin \frac{40}{41}$.

171. $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right)=-\operatorname{arctg} \frac{7}{24}$.

172. $2 \operatorname{arctg} \frac{1}{4}+\operatorname{arctg} \frac{7}{23}=\frac{\pi}{4}$.

173. $\pi-\arcsin 0{,}9=2 \operatorname{arctg} 4$.

174. $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}+\operatorname{arctg} \frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$.

175. $\cos(2 \arccos x)=2x^2-1, \quad |x| \leqslant 1$.

176. $\sin(3 \arcsin x)=3x-4x^3, \quad |x| \leqslant 1$.

177. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}=2|\operatorname{arctg} x|, \quad |x|<\infty$.

178. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)=\frac{1}{x}, \quad 0<|x|<\infty$.

179. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\begin{cases}\operatorname{arcctg}x, & x>0,\\ \operatorname{arcctg}x-\pi, & x<0.\end{cases}$

180. $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}=\begin{cases}\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}, & x<1,\\ \operatorname{arctg}x-\frac{3\pi}{4}, & x>1.\end{cases}$

Построить эскизы графиков следующих обратных тригонометрических функций:

181. $y=\arcsin(2x+1)$.

182. $y=\arccos(3x-2)$.

183. $y=\operatorname{arctg}(2-3x)$.

184. $y=\operatorname{arcctg}(1-2x)$.

185. $y=\arcsin\left(\frac{1-5x}{4}\right)$.

186. $y=\arccos\left(\frac{1+3x}{7}\right)$.

187. $y=\arccos\left(\frac{1-|x|}{2}\right)$.

188. $y=\arcsin\left(\frac{2+3|x|}{4}\right)$.

189. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1+|x|}{4}\right)$.

190. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{2|x|-3}{5}\right)$.

191. $y=\arcsin\frac{1}{x+2}$.

192. $y=\arccos\frac{2}{x-3}$.

193. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

194. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$.

195. $y=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x-3}$.

196. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x+1}{|x|-2}$.

197. $y=\operatorname{arctg}\frac{|1-x|}{\sqrt{3}x+2}$.

198. $y=\arcsin\frac{1+x}{1-x}$.

199. $y=\frac{1}{\operatorname{arctg}||x|-1|}$.

200. $y=\frac{1}{\arcsin\left|\frac{1-|x|}{3}\right|}$.

201. $y=\arcsin(\sin x)$.

202. $x=\arcsin\cos x$.

203. $y=\arccos(\cos x)$.

204. $y=\arccos(\sin x)$.

205. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

206. $y=\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}x)$.

207. $y=\arcsin(\operatorname{tg}x)$.

208. $y=\arccos(\operatorname{ctg}x)$.

209. $y=\sin\arcsin 2x$.

210. $y=\cos\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$.

211. $y=\sin(\operatorname{arctg}x)$.

212. $y=\sin(\operatorname{arcctg}x)$.

213. $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

214. $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}x)$.

215. $y=\operatorname{tg}(\arccos x)$.

216. $y=\operatorname{ctg}(\arcsin x)$.

217. $y=\arccos\sin x^3$.

218. $y=\arcsin\cos\sqrt{x}$.

219. $y=\cos\arcsin\frac{1}{x}$.

220. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(2x+1))$.

221. $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

222. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x^2-4}$.

223. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x^2+1}{x}$.

224. $y=\operatorname{arctg}\frac{2^x+1}{2^x-1}$.

225. $y=\arcsin\frac{(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^3}$.

226. $y=\arccos\frac{x^3-4x}{(x-1)^2(x+1)}$.

227. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-9}$.

228. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x^4-4x^3+2x^2}{(x-2)^2(x+1)^2}$.

229. $y=\operatorname{arctg}\frac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^3+1)(x-3)^5}$.

230. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x^4-9x^2}{(x-4)^2(x+1)^3}$.

231. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^3-x}{(x+2)^2(x-10)}$.

232. $y=\operatorname{arcctg}\frac{(x+1)^2(x-2)^2}{(x-3)^2(x^2+1)}$.

Построить эскизы графиков следующих функций:

233. $y=(\sqrt{x})^2-|x|$.

234. $y=\sqrt{2}^{\log_2 x}$.

235. $y=\log_{1/2}(x-1)^2$.

236. $y=2^{|\log_2 x|}$.

237. $y=-\frac{1}{2}\sin x\cos x$.

238. $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

239. $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

240. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$.

241. $y=\sin^2 x+\cos^2 x$.

242. $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

243. $y=2^{\log_4 \sin x}$

244. $y=\sin^2 x-\cos^2 x$.

245. $y=x^{\log_x(x^2-1)}$

246. $y=\cos x+\sqrt{\cos^2 x}$.

247. $y=\sin x-\sqrt{\sin^2 x}$.

248. $y=\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x}$.

249. $y=\frac{1}{\operatorname{tg} x}+\operatorname{ctg}|x|$.

250. $y=\sin^4 x-\cos^4 x$.

251. $y=(\sqrt{\sin 3x})^{22}$.

252. $y=(\sqrt{\cos x})^{18}$.

253. $y=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

254. $y=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

255. $y=\frac{1+|\cos x|}{\sin|x|}$.

256. $y=|x^3-x^5+2|$.

257. $y=|x^2-x^4|+4$.

258. $y=(|x|+1)(x-3)x^2$.

259. $y=\sqrt{x^2(x-1)^2(x-2)}$.

260. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$.

261. $y=\sqrt[3]{x^6(2+x)^4(1-x)}$.

262. $y=\frac{1}{|1-|x|-2|}$.

263. $y=\sqrt[5]{2x^2(x-3)^3(x^2-2x)^4}$.

264. $y=\frac{|2|x-1|-3|}{|x-1|+2}$.

265. $y=\frac{|x-3|+|x+1|}{|x+3|+|x-1|}$.

266. $y=\frac{||x-1|-2|}{||x|-1|-2}$.

267. $y=\left|\sqrt[3]{x^2-x}\right|+1$.

268. $y=\left|\sqrt[3]{x^2+x}-2\right|$.

269. $y=\frac{|x+2|(x-1)^2}{x^2+1}$.

270. $y=\frac{(x^3-1)(x+4)|x|}{(x^4+2)(x-3)}$.

271. $y=\frac{(x^3-1)(x-2)}{(|x|-1)^2(x-4)}$.

272. $y=\frac{1}{|2^x-1|}$.

273. $y=\frac{1}{x^2-4|x|+3}$.

274. $y=\frac{1}{\sin x+\cos x}$.

275. $y=\frac{1}{\log_2(x-3)-1}$.

276. $y=\frac{1}{\sqrt[3]{1-2|x|}-1}$.

277. $y=\log_{1/2}|x^2-x|$.

278. $y=\log_{1/\pi}\sin 2x$.

279. $y=\log_{\sqrt{\pi}}\frac{|x|}{x+2}$.

280. $y=\log_{1/7}\cos\frac{3\pi x-\pi}{5}$.

281. $y=\log_2\frac{|x+2|x}{2-x}$.

282. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-1}}$.

283. $y=2^{|\sin x|+|\cos x|}$.

284. $y=2^{\frac{|1-2x|}{3x+4}}$.

285. $y=\log_3\frac{x^3}{1-x^2}$.

286. $y=\log_5|1-2^{-x}|$.

287. $y=\cos^3\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

288. $y=\sin^4\left(5x-\frac{10\pi}{3}\right)$.

289. $y=2^{\sec\left(\frac{2\pi x-3\pi}{8}\right)}$.

290. $y=e^{-x^2+x}$.

291. $y=\sin\frac{1}{x}$.

292. $y=\cos\frac{1}{x}$.

293. $y=x^4-(1-x)^4$.

294. $y=x^2+\frac{x^2}{|x|}+\frac{(1-x)^2}{|1-x|}$.

295. $y=\frac{(x+1)^3}{x+1}-\frac{|x^3|}{x}$.

296. $y=\frac{x^2+x}{|x|}+\frac{x^2-x}{|1-x|}+\frac{x^2-1}{|1+x|}$.

297. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{2x-\pi}{3}\right)}-1$.

298. $y=3^{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

299. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x-\cos^3 x}}$.

300. $y=2^{\frac{x^2-1}{x^2-4}}$.

301. $y=x+\sin x$.

302. $y=x-\sin x$.

303. $y=x+2^x$.

304. $y=x+\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$.

305. $y=x^2\sin x$.

306. $y=x\sin x$.

307. $y=e^x\sin\pi x$.

308. $y=e^{-x}\cos\pi x$.

309. $y=e^{-x^2}\sin 2\pi x$.

310. $y=\frac{\cos\pi x}{1+x^2}$.

311. $y=(x^2-1)\cos\frac{\pi}{x}$.

312. $y=(x^2-1)\sin\frac{\pi}{x}$.

313. $y=\operatorname{arctg}\lg x$.

314. $y=\arccos\frac{1}{\lg x}$.

315. $y=\operatorname{arcctg}\lg\frac{x+1}{x-1}$.

316. $y=\operatorname{arctg}\frac{x^3-8}{x^2-9}$.

317. $y=\arccos\frac{2x-4}{x^2-4x+5}$.

318. $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos x}$.

319. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$.

320. $y=\operatorname{arcctg}\frac{x^5-1}{x^6-1}$.

321. $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}$.

322. $y=\dfrac{x}{2^{\frac{x}{1-x}}-1}$.

323. $y=\dfrac{x+2}{2^{\frac{x-1}{x+1}}-1}$.

324. $y=(\sin 7)^{\frac{1}{\cos(2|x|-1)}}$.

325. $y=x\left(2-\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

326. $y=x^2\left(2+\sin^2\dfrac{1}{x}\right)$.

327. $y=x\arcsin\dfrac{1}{x}$.

328. $y=\dfrac{x}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{x^2-1}}-1}$.

329. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x^4-4|}}$.

330. $y=-\sqrt[3]{x^2}+x$.

331. $y=\sqrt[3]{x^2}+2x+1$.

332. $y=x+\sqrt[5]{(x-1)^2}$.

333. $y=\sqrt[5]{(x-1)^4}-x$.

334. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2-x}}$.

335. $y\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

336. $y=\sqrt[4]{x^4}+\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2}}$.

337. $y=\dfrac{x+2}{x-1}\cdot\sqrt{x}$.

338. $y=\dfrac{x-2}{|x+3|}\cdot\sqrt[3]{x+2}$.

339. $y=\sqrt{1-x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}$.

340. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2-4}$.

341. $y=\sqrt[5]{(x+2)^2}\,(x-1)$.

342. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-x}}{x^2-x-6}$.

343. $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$.

344. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+6x-10$.

345. $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

346. $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

347. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x\,|\sin x|}$.

348. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

349. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{|x^2-4|}}$.

350. $y=\dfrac{x^2e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-5x-4}$.

351. $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$.

352. $y=\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)^2(x-2)}}{x^2-7x+12}$.

353. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$.

354. $y=\log_2(x+\sqrt{x^2-4x})$.

355. $x=\arcsin\left(x-\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}\right)$.

356. $y=\sqrt[3]{x}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{2x-1}$.

357. $y=e^{-100(1-x)^2}+e^{-100(1+x)^2}$.

358. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$.

359. $y=(x-1)\sqrt{(x+1)^3(2-x)}\cdot(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{|x|}+1)$.

360. $y=\dfrac{e^x(x^2-4x+3)}{x-5}$.

361. $y=(\sqrt{9-x^2}-x-3)\,e^x\cdot x\,(x-1)$.

362. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{(x-4)^2}}{x-2}$.

363. $y=2^{\frac{x}{x-1}}(|x|-2-||x|-2|)$.

364. $y=2^{\frac{x}{x-1}}[\operatorname{sgn}(4-x^2)+1]$.

365. $y=x\sqrt{|x^2-1|}-\sqrt{x^2+1}+1$.

366. $y=\arcsin(x\sqrt{x^2-1}-\sqrt{|x^4-2|})$.

Построить эскизы графиков следующих кривых, заданных параметрически:

367. $x(t)=\dfrac{t}{t^2-1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$.

368. $x(t)=\dfrac{4-t^2}{1+t^3},\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3}$.

369. $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1},\ y(t)=\dfrac{t^2}{1+t^3}$.

370. $x(t)=t^2,\ y(t)=\dfrac{t^3+2t^2+t}{t+2}$.

371. $x(t)=\dfrac{t^2-1}{t(t+2)},\ y(t)=\dfrac{t^2}{(t+2)(t+1)}$.

372. $x(t)=\dfrac{t^2+1}{4(t-1)}$, $y(t)=\dfrac{t}{t+1}$.

373. $x(t)=\dfrac{t}{1-t^2}$, $y(t)=\dfrac{t(1-4t^2)}{1-t^2}$.

374. $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}$, $y(t)=\dfrac{t^2+1}{t+2}$.

375. $x(t)=\arcsin(\sin t)$, $y(t)=\arccos(\cos t)$.

376. $x(t)=\operatorname{arctg} t$, $y(t)=t^3-t$.

377. $x(t)=(\ln t)\sin t$, $y(t)=\cos t$.

378. $x(t)=e^t\sin t$, $y(t)=e^t\cos t$.

379. $x(t)=\sin 2t$, $y(t)=\sin 4t$.

380. $x(t)=\sin 4t$, $y(t)=\cos t$.

381. $x(t)=\cos 4t$, $y(t)=\cos 3t$.

Построить эскизы графиков кривых, заданных в полярной системе координат уравнениями:

382. $r=2\varphi$. 383. $r=\dfrac{a}{\varphi}$. 384. $r=e^{2\varphi}$.

385. $r=\sin\varphi$. 386. $r=\cos\varphi$. 387. $r=\cos 2\varphi$.

388. $r=\cos 5\varphi$. 389. $r=\dfrac{1}{\cos\varphi}$. 390. $r=\dfrac{2}{\sin\varphi}$.

391. $r=2$. 392. $\varphi=\pi/3$. 393. $r=\dfrac{1}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$.

394. $r^2=a^2\cos 2\varphi$. 395. $r=\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$. 396. $r=1+2\cos\varphi$.

Преобразовать к полярным координатам уравнение линии (системы совмещены):

397. $x^2+y^2=x$. 398. $x^2+y^2=y$. 399. $x^2+y^2=5$.

400. $y=2x$. 401. $y=4$. 402. $x=3$.

403. $x+y=2$. 404. $(x^2+y^2)^2=xy$. 405. $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.

406. $x^4+y^4=x^2+y^2$. 407. $x^2+y^2=(x^2-y^2)^2$.

408. $xy^2+yx^2=(x^2+y^2)^2$.

Преобразовать к декартовым координатам уравнение линии (системы совмещены):

409. $r\cos\varphi=3$. 410. $r^2\sin 2\varphi=2$. 411. $r\sin\varphi=2$.

412. $r=2\cos\varphi$. **413.** $r=1+\cos\varphi$. **414.** $r=\cos^2\varphi$.

415. $r=\sqrt{2}$. **416.** $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **417.** $r=\frac{1}{\cos\varphi+\sin\varphi}$.

Нарисовать эскизы графиков следующих кривых:

418. $|y|=x-1$. **419.** $|y|=1-|x|$. **420.** $|x|+|y|=1$.

421. $[x]+[y]=1$. **422.** $|x+y|=-x+|y|$.

423. $||x|-|y||=1$.

424. $||x|+||y|-3|-3|=1$.

425. $|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}(|x|-x)$.

426. $|y+|y||=||x|-x|$. **427.** $x^2+y^2=x+2$.

428. $x^2+y^2=x+y$. **429.** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

430. $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. **431.** $x^3+y^3=1$. **432.** $x^4+y^4=1$.

433. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. **434.** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

435. $y^2=x-x^3$. **436.** $x=y-y^3$. **437.** $x^2=y-y^3$.

438. $y^2=x+x^3-2x^2$. **439.** $x^2y^2+y=1$.

440. $x^4-y^4=x^2-2y^2$. **441.** $y^3-x^2y+x^5=0$.

442. $x^5+y^5=xy^2$. **443.** $x^2=y^4+y^6$. **444.** $2xy^2-3x^2+y^4=0$.

445. $x^2-xy+y^2=1$. **446.** $4y^2=4x^2y+x^5$.

447. $x^3+y^3=3x^2$. **448.** $y^3-2y^2x-x^2=0$.

449. $x^4+y^4=x^8+y^8$. **450.** $y^5+x^4=xy^2$.

451. $\max\{(144-25x^2-9y^2-54y),\ (\min(y,\ 25-5y-x^2))\}=0$.

452. $(x^2+y^2-25)(16x^2+y^2-4)(x^2+16y^2-96y+140)\times$
$\times(4x^2-16x\operatorname{sign}x+4y^2-16y+31)=0$.

453. $\left\{(42-38\operatorname{sign}x)y+x\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{10}\right)^2}-1\right)(\sqrt{13-4x}+1)\right\}\times$
$\times\{9\sqrt{5}y-x(x-1)\sqrt{x+2}\}\cdot\{4x^2+16y^2+56x-64y+$
$+259\}=0$.

454. $\{(4y+x^2)^2+\operatorname{sign}(x^2+2x)+1\}\cdot\{(x^2+y^2)^{5/2}-$
$-4x(x^2-y^2)\}=0.$

455. $\{x^2-\operatorname{sign}(3y-y^2)+1\}\cdot\{(x^2+y^2)^{5/2}-2(|y|+y)(x^2+y^2)\}\times$
$\times\{(x^2+y^2-2y+1)^{5/2}-2(|y-1|+y-1)(x^2-y^2+2y-1)\}\times$
$\times\{(x^2+y^2-6y+9)^2-2|xy-3x|\}=0.$

456. $\{x^2-\operatorname{sign}(6y-y^2)\}\{x^2+(y-6)^2\}\times$
$\times\{(y-5)^2+(x-2\operatorname{sign}x)^2-1\}\times$
$\times\{(y-6)^2+(x-\operatorname{sign}x)^2-2\operatorname{sign}(y-6)+1\}\times$
$\times\{(x^2+y^2)^2-16y|x|\}\cdot\{\min[(x^4-3y^4),\ (9y+18-$
$-|5x^2-2|)]\}=0.$

457. $\{\min[(x^2+y^2-2x),\ (x^2+16y^2-1),\ y]\}\times$
$\times\{8y+x\sqrt{|x+1|(2+x-x^2)}\}\cdot\{2x^2+2y^2-2x-2y+1\}=0.$

458. $\left\{27y-x^2(x+2)^2(2-x)\left(\sqrt{9-x^2}+\frac{x+3}{40}\right)\right\}\times$
$\times\left\{\max\left[\left(y-\sqrt{x+3}\sqrt[3]{x-2}\,(e^{-100(x+1)^2}+6e^{-100(x-2)^2}\right)\right),\right.$
$\left.\left.\operatorname{sign}(x-2)+\frac{1}{2}\right]\right\}\cdot\{9x^2+48x+9y^2+64\}=0.$

459. $(\max\{(2-|x|-2|2y-x+3|),\ (\min[(x^2+y^2-4x),$
$(3x^2-y^2+9-4x\sqrt{9-y^2}),\ (4y^2+x+1-5y\sqrt{1+x})])\})\times$
$\times(16x^2-32x+16y^2-32y+31)=0.$

460. $[(x+4)^2+1-\operatorname{sign}(1-y^2)]\cdot[(x+3)^2+y^2+$
$+2\operatorname{sign}(x+3)+1][(2x+3)^2+y^2-1]\times$
$\times[(x^2-x)^2-\operatorname{sign}(1-y^2)+1]\cdot[y^2+\operatorname{sign}(x^2-x)+1]\times$
$\times[(x-3)^2+y^2+2\operatorname{sign}(x-3)+1]\cdot[(x-2)^2+(y-1)^2+$
$+\operatorname{sign}(2-x)+\operatorname{sign}(y-1)+1]\cdot[(x^2-9x+20)^2-$
$-\operatorname{sign}(1-y^2)+1]\cdot\left[(y+|x-4|+|x-5|)^2-\right.$
$\left.-\operatorname{sign}\left[(x-4)\left(\frac{21}{4}-x\right)\right]+1\right]=0.$

Глава II
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Пусть a — точка расширенной числовой прямой, т. е. число или один из символов $+\infty$, $-\infty$, ∞. Обозначим через $U(a)$ окрестность точки a и через $\dot{U}(a)$ – проколотую окрестность: $\dot{U}(a)=U(a)\setminus\{a\}$. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E, для которого точка a есть предельная точка (точка сгущения).

Определение. Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x\to a$ (обозначение: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$), если для любого положительного числа ε $(\forall\varepsilon>0)$ существует окрестность $U(a)$ точки a $(\exists U(a))$ такая, что для любого x из проколотой окрестности, принадлежащего E $(\forall x\in\dot{U}(a)\cap E)$, выполнено неравенство

$$|f(x)-A|<\varepsilon \quad (\forall\varepsilon>0\ \exists U(a):\forall x\in\dot{U}(a)\cap E\ |f(x)-A|<\varepsilon).$$

В таком случае иногда говорят: функция $f(x)$ при $x\to a$ имеет предел, равный A ($f(x)$ стремится к A при $x\to a$).

Если a — собственная точка числовой прямой (т. е. число), то окрестностью $U(a)$ является интервал с центром в точке a. Тогда определение предела записывается в таком виде: $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$, если для любого положительного числа ε $(\forall\varepsilon>0)$ существует такое положительное число δ $(\exists\delta=\delta(\varepsilon))$, что для любого x $(\forall x)$ такого, что $0<|x-a|<\delta$, $x\in E$, выполнено неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Проколотой окрестностью несобственной точки $(+\infty)$ является любой луч $x>\alpha$; проколотой окрестностью несобственной точки $(-\infty)$ — любой луч $x<\alpha$; проколотой окрестностью несобственной точки (∞) — объединение двух лучей: $\{x>\alpha\}\cup\{x<-\alpha\}$. Тогда определение предела записывается (с использованием символов) в таком виде:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\ (\lim_{x\to-\infty} f(x)=A;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=A),$$

если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists C=C(\varepsilon)>0:\forall x,\ x>C,\ x\in E\ (x<-C,\ x\in E;$$

$$|x|>C,\ x\in E)\ |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Внимание! В определении $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ нет никаких условий на значение $f(a)$; более того, нет даже требования, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке a. Поэтому ни неопределенность в точке a, ни значение $f(a)$, если $a\in E$, не влияют на существование и величину $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Пример: Пусть $f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq 5, \\ 0, & x=5. \end{cases}$

Так как разность $f(x)-1=0$ для всех значений x, кроме $x=5$ (т. е. в любой окрестности $\mathring{U}(5)$), то из определения предела следует, что $\lim\limits_{x=5} f(x)=1$.

В частности, если две функции $f(x)$ и $g(x)$ совпадают в некоторой проколотой окрестности точки a, то либо обе они не имеют предела при $x\to a$, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Пусть a — собственная точка числовой прямой. Если в определении предела функции $f(x)$ заменить множество E на множество $E_+=E\cap\{x>a\}$ $(E_-=E\cap\{x<a\})$, то получим определение односторонних пределов в точке $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to a-} f(x))$. В терминах окрестностей это значит, что берется правая (левая) полуокрестность точки a, т. е. интервал вида $(a, a+\delta)$, $\delta>0$, $((a-\delta, a)$, $\delta>0)$; в терминах неравенств это значит, что рассматриваются значения x, удовлетворяющие неравенству

$0<x-a<\delta$, $\delta>0$ $(0<a-x<\delta$, $\delta>0)$.

Для простоты изложения в дальнейшем считаем, что $f(x)$ определена всюду в некоторой, быть может проколотой, окрестности точки a, тем более что при вычислении пределов имеет место именно это.

Пример 2. Покажем, что $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x=1$.

Решение. Оценим разность $|1-\sin x|$ (см. определение). Имеем $1-\sin x=2\cos(\pi/4+x/2)\sin(\pi/4-x/2)$. Так как для любого x: $|\cos(\pi/4+x/2)|\leq 1$ и $|\sin(\pi/4-x/2)|\leq|\pi/4-x/2|$, то $|1-\sin x|\leqslant|\pi/2-x|$. Следовательно, если $\delta=\varepsilon$, то из неравенства $0<|x-\pi/2|<\delta$ следует неравенство $|1-\sin x|<\varepsilon$. Таким образом, для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\varepsilon$, $\forall x: 0<|x-\pi/2|<\delta => |1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \sin x=1$.

Следует обратить внимание на то, что мы не решаем неравенства $|1-\sin x|<\varepsilon$, т. е. не находим множества всех тех и только тех значений x, для которых оно верно. Нас интересует только определение такой окрестности точки $a=\pi/2$, в которой это неравенство выполняется. Выполняется оно вне этой окрестности или нет, нас не интересует. В такой ситуации бывает удобно заранее выделить некоторую окрестность точки a, в которой и проводить дальнейшие оценки. Необходимо только следить за тем, чтобы окрестность, найденная в результате этих оценок, не оказалась больше, чем выделенная заранее.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to-3} x^2=9$.

Решение. Необходимо оценить разность $|x^2-9|$. Имеем $|x^2-9|=|x-3|\cdot|x+3|$. Так как на всей числовой прямой множитель $|x-3|$ не ограничен, то оценку произведения сделать проще, если выделить некоторую, например, 1-окрестность точки $a=-3$ — интервал $(-4, -2)$. Для всех $x \in (-4, -2)$ имеем $|x-3|<7$, следовательно, $|x^2-9|<7|x+3|$. Так как δ-окрестность точки $a=-3: (-3-\delta, -3+\delta)$ не должна выходить за пределы 1-окрестности, то берем $\delta=\min(1, \varepsilon/7)$, и из предыдущих оценок видно, что из неравенства $0<|x+3|<\delta$ следует неравенство $|x^2-9|<\varepsilon$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to-3} x^2=9$.

Пример 4. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0$.

Решение. Так же, как в предыдущем примере, выделим удобную для дальнейших оценок окрестность точки $+\infty$ (луч $x>\alpha$): именно луч $x>200$. Для $x>200$ имеем $x^2-100x+3000 > x(x-100) > \dfrac{x^2}{2}$, следовательно,

$$\left|\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right| < \frac{x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x}.$$

Таким образом, если $\alpha=\max\{200, 2/\varepsilon\}$, то из неравенства $x>\alpha$ следует

$$\left|\frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}\right| < \varepsilon, \text{ т. е. } \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-100x+3000}=0.$$

Пример 5. Покажем, что функция $f(x)=\sin(1/x)$ не имеет предела при $x\to 0$.

Решение. Запишем с использованием символов утверждение «число A не является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ (a — собственная точка числовой прямой)»:

$$\exists\varepsilon_0>0: \forall\delta>0\ \exists x_\delta=x(\delta): 0<|x_\delta-a|<\delta,\ x_\delta\in E,$$
$$|f(x_\delta)-A|\geqslant\varepsilon_0.$$

Если $A=0$, то возьмем $\varepsilon_0=1/2$ и $x_k=1/(2\pi k+\pi/2)$, тогда $\forall\delta\exists k\in N: 0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-0|=|f(x_k)|=1>\varepsilon_0$, таким образом, нуль не есть предел $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to 0$. Если же $A\neq 0$, то возьмем $\varepsilon_0=|A|/2$ и $x_k=1/2\pi_k$. Тогда $\forall\delta\exists k\in N: 0<x_k<\delta$ и $|f(x_k)-A|=|A|>\varepsilon_0$, таким образом, и любое отличное от нуля число не есть предел функции $f(x)=\sin(1/x)$ при $x\to 0$.

Из приведенных примеров видно, что, пользуясь определением предела, мы проверяем, является ли данное число пределом данной функции или нет, но не имеем конструктивного метода вычисления предела данной функции.

Непосредственно из определения предела можно получить утверждения: если $y(x)$ есть постоянная функция, т. е. $y(x)\equiv C$, то $\lim\limits_{x\to a} y(x)=C$; если $y(x)\equiv x$ и a — собственная точка числовой прямой, то $\lim\limits_{x\to a} y(x)=\lim\limits_{x\to a} x=a$. Несмотря на тривиальность этих равенств, они являются отправными точками для вычисления пределов.

Основные утверждения, используемые для вычисления пределов.

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то

a) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)+\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

b) $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

c) если $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$;

d) если в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ имеем

$f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a} g(x)=A$

(принцип двустороннего ограничения).

Пример 6. Найдем $\lim\limits_{x\to a}(\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n)$ (a— собственная точка числовой прямой).

Решение. Пользуясь утверждениями о пределе суммы и произведения, получаем, что

$$\lim_{x\to a}(\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n)=\alpha_0a^n+\alpha_1a^{n-1}+$$
$$+\ldots+\alpha_{n-1}a+\alpha_n,$$

т. е. предел многочлена при x, стремящемся к числу a, существует и равен значению этого многочлена в точке a.

В дальнейшем постоянно пользуемся тем, что для любой основной элементарной функции $f(x)$ и точки a из ее области определения справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Определение. Если функция $f(x)$ определена всюду в некоторой окрестности точки a (правой полуокрестности, левой полуокрестности) и $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ ($\lim\limits_{x\to a+} f(x)=f(a)$, $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=f(a)$), то функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* a (непрерывной справа, непрерывной слева).

Пользуясь этим определением, можно предыдущее замечание сформулировать так: каждая основная элементарная функция непрерывна в каждой внутренней точке своей области определения и непрерывна справа (слева) в крайней левой (крайней правой) точке области определения.

При вычислении пределов постоянно применяется *теорема о пределе композиции:*

если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$ и существует $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a$, то верно утверждение

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t)) = f(\lim_{t\to t_0} x(t)) = f(a).$$

Пример 7. Найдем $\lim\limits_{x\to 4\pi} \ln(1+\sqrt{1+\sin^2(x/2)})$.

Решение. Напишем цепочку соотношений

$$y_1 = x/2,\ y_2=\sin y_1,\ y_3=y_2^2,\ y_4=1+y_3,$$

$$y_5=\sqrt{y_4},\ y_6=1+y_5,\ y_7=\ln y_6.$$

Применяя последовательно теорему о пределе композиции, получим

$$\lim_{x\to 4\pi} y_1(x) = 2\pi;\ \lim_{x\to 4\pi} y_2(x) = \lim_{y_1\to 2\pi} \sin y_1 = 0;$$

$$\lim_{x\to 4\pi} y_3(x) = \lim_{y_2\to 0} y_2^2 = 0;\ \lim_{x\to 4\pi} y_4(x) =$$

$$= \lim_{y_3\to 0}(1+y_3) = 1;\ \lim_{x\to 4\pi} y_5(x) = \lim_{y_4\to 1}\sqrt{y_4} = 1,$$

$$\lim_{x\to 4\pi} y_6(x) = \lim_{y_5\to 1}(1+y_5) = 2,$$

$$\lim_{x\to 4\pi} \ln(1+\sqrt{1+\sin^2(x/2)}) = \lim_{x\to 4\pi} y_7(x) = \lim_{y_6\to 2} \ln y_6 = \ln 2.$$

Заметим, что условие непрерывности функции f в точке $x=a$ в теореме о пределе композиции нельзя заменить на условие существования предела функции f при $x\to a$. Дело в том, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, $\lim\limits_{t\to t_0} x(t)=a$ и $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t))$ существует, то верно равенство $\lim\limits_{t\to t_0} f(x(t)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, но существование предела $f(x(t))$ не вытекает из существования пределов функций $f(x)$ и $x(t)$.

Пример 8. Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign}^2 x = \begin{cases} 1, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

и

$$x(t) = \begin{cases} t, & x\in(1/2k,\ 1/(2k-1)),\ k\in Z,\ k\neq 0; \\ -t, & x\in(1/(2k+1),\ 1/2k),\ k\in Z,\ k\neq 0; \\ 0, & x=1/k,\qquad k\in Z,\ k\neq 0. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число и $\delta=\varepsilon$. Так как $|x(t)|\leqslant|t|$, то из неравенства $0<|t|<\delta$ следует неравенство $|x(t)|<\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{t\to 0} x(t)=0$. Так как для любого $x\neq 0$ имеем $f(x)-1=0$, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Рассмотрим $f(x(t))$. Для любого $\delta>0$ в интервалах $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$ найдется бесконечно много t, равных $1/k$, $k\in Z$, $k\neq 0$, для которых $x(t)=0$ и, следовательно, $f(x(t))=0$. С другой стороны, при всех значениях t, отличных от нуля, и чисел вида $1/k$, $k\in Z$, $k\neq 0$, имеем $x(t)\neq 0$, следовательно, $f(x(t))=1$.

Таким образом, в любой проколотой окрестности точки $t=0$ функция $f(x(t))$ принимает как значение 1, так и значение 0. Отсюда следует, что $f(x(t))$ не имеет предела при $t\to 0$.

Пример 9. Найдем $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin(1/x)$.

Решение. Пользуясь неравенством $-x^2\leqslant x^2\sin(1/x)\leqslant x^2$ и принципом двустороннего ограничения, получаем, что

$$\lim_{x\to 0} x^2\sin(1/x)=0.$$

Пример 10. Найдем $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$.

Решение. Пользуясь результатом первого примера и утверждением о пределе отношения, получаем, что

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to -1}(x^3-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2-4x+3)}=\frac{-1-1}{1+4+3}=\frac{1}{4}.$$

Определение. Функция $f(x)$ при $x\to a$ называется бесконечно большой, если для любого положительного числа C существует окрестность $U(a)$ такая, что $|f(x)|>C$ для любых $x\in \mathring{U}(a)\cap E$ (E — множество определения функции $f(x)$).

Заменяя в этом определении неравенство $|f(x)|>C$ на $f(x)>C$ $(f(x)<-C)$, получаем определение положительной бесконечно большой (отрицательной бесконечно большой) функции.

Сравнивая определение бесконечно большой функции с определением функции, имеющей предел, видим большую общность: если в первом определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси OX попадали в заданную окрестность несобственной точки оси OY, во втором определении требуется, чтобы все значения функции в некоторой проколотой окрестности точки a оси OX попадали в заданную окрестность собственной точки A оси OY.

Коротко утверждение, что функция $f(x)$ при $x\to a$ является бесконечно большой (положительной бесконечно большой, отрицательной бесконечно большой) записывается так:

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to a} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to a} f(x)=-\infty).$$

Основные соотношения для бесконечно больших функций:

е) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $f(x)\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$,
обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x)=0$;

f) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x))=\infty$;

g) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=+\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)+$ $+f_2(x))=+\infty$;

h) если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=A\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=\infty$.

Из соотношений a) — h) следует, что если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A\neq 0$, $f_2(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=\infty$; если же $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)/f_2(x)=0$.

Пример 11. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$.

Решение. Пользуясь соотношением e) и утверждением о пределе произведения, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\lim_{x\to 0}\ln(x^2+4x+2)\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}=\ln 2\cdot 0=0.$$

Пример 12. Найдем $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{2^x}$.

Решение. Рассмотрим обратную величину $\dfrac{2^x}{x}=2^x\cdot\dfrac{1}{x}$. Применяя соотношение e) и утверждение о пределе произведения, получаем

$$\lim_{x\to -\infty}\left(2^x\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to -\infty}2^x\cdot\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0,$$

откуда, применив еще раз соотношение e), следует, что $\lim\limits_{x\to -\infty} x/2^x=-\infty$.

Пример 13. Найдем $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)$.

Решение. Из соотношения g) следует, что

$$\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)=+\infty.$$

Пример 14. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}(x+\cos x)$.

Решение. Так как $0\leqslant|\cos x/x|\leqslant 1/|x|$, то применяя соотношение e) и принцип двустороннего ограничения, получаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}|\cos x/x|=0$, т. е. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x/x=0$, следовательно, в силу утверждения о пределе суммы $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x/x)=1$, применяя соотношение h), получаем, что

$$\lim_{x\to\infty}(x+\cos x)=\lim_{x\to\infty}x(1+\cos x/x)=\infty.$$

Рассмотрим теперь, как находится предел степенно-показательной функции $[u(x)]^{v(x)}\,(u(x)>0)$.

Пользуясь непрерывностью показательной функции, получаем

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)]}.$$

Таким образом, нахождение предела степенно-показательной функции сводится к нахождению $\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)]$.

Рассмотрим подробнее отдельные случаи (I—III).

I. Если $\lim\limits_{x\to a} v(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \ln u(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x) = e^B$, так как

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} \ln u(x)} = e^B$$

и

$$e^{\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)]} = e^{A\cdot B} = (e^B)^A = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}.$$

Другими словами, если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = u$, $u > 0$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = v$, то $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u^v$.

II. Если $\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)] = +\infty$, то и $e^{\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)]} = +\infty$, если $\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)] = -\infty$, то $e^{\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)]} = 0$.

Отсюда видно, что если $\lim\limits_{x\to a} [v(x)\ln u(x)] = \infty$ и произведение $v(x)\ln u(x)$ не сохраняет знак ни в какой проколотой окрестности точки a, то функция $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$ не имеет предела при $x \to a$.

Пример 15. Найдем $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg} \pi x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^2}{x^2+1} = \ln \frac{1}{2}, \text{ а } \lim_{x\to 1} \operatorname{ctg} \pi x = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to 1} \left[\ln \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \operatorname{ctg} \pi x\right] = \infty.$$

При $0 < x < 1$ имеем, что

$$\ln \frac{x^2}{x^2+1} \operatorname{ctg} \pi x > 0,$$

при $1 < x < 2$ имеем

$$\ln \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \operatorname{ctg} \pi x < 0,$$

таким образом, бесконечно большая функция $\ln\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\operatorname{ctg}\pi x$ в любой проколотой окрестности точки $a=1$ принимает значения разных знаков. Поэтому функция

$$\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=e^{\operatorname{ctg}\pi x\ln\frac{x^2}{x^2+1}}$$

не имеет предела при $x\to1$ и не является бесконечно большой при $x\to1$. (В то же время

$$\lim_{x\to1+}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=+\infty,\quad \lim_{x\to1-}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\operatorname{ctg}\pi x}=0.)$$

Пример 16. Найдем $\lim\limits_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \lim_{x\to1}(x^2+3)=4,$$

то

$$\lim_{x\to1}\left(\sin\frac{\pi x}{4}\right)^{x^2+3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}.$$

Пример 17. Найдем $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to1}\operatorname{ctg}^2\pi x=+\infty,$$

то

$$\lim_{x\to1}\operatorname{ctg}^2\pi x\ln\frac{x+1}{x+3}=-\infty,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{\operatorname{ctg}^2\pi x}=0.$$

Пример 18. Найдем $\lim\limits_{x\to\pi+}(\sin^2x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\pi+}\ln\sin^2x=-\infty,\quad \lim_{x\to\pi+}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\infty,$$

то

$$\lim_{x\to\pi+}(\ln\sin^2x)\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=+\infty,\quad \lim_{x\to\pi+}(\sin^2x)^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=+\infty.$$

III. Пусть в произведении $v(x)\ln u(x)$ предел одного из сомножителей при $x \to a$ равен нулю, а второй сомножитель является бесконечно большой функцией. Такое положение возможно в трех случаях:

а) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} u(x)=+\infty$ (символически ∞^0),

б) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} u(x)=0$ (символически 0^0),

в) $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} u(x)=1$ (символически 1^∞).

Непосредственное применение теорем о свойствах пределов и бесконечно больших функций не дает возможности вычислить такие пределы. Так же обстоит дело с вычислением $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Этот предел нельзя найти, пользуясь теоремой о пределе отношения, так как предел знаменателя равен нулю, нельзя использовать и соотношения e)—h), так как предел числителя равен нулю. В этом случае говорят, что имеется неопределенность $\frac{0}{0}$.

Аналогично вводятся символические обозначения неопределенностей $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$.

В тех случаях, когда имеет место неопределенность, для вычисления предела — «раскрытия неопределенности» — преобразовывают выражение так, чтобы получить возможность его вычислить. Для таких преобразований используются или тождественные (в проколотой окрестности точки a) соотношения, либо сравнение поведения функций при стремлении аргумента к предельной точке.

Пример 19. Найдем $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right)$.

Решение. В проколотой окрестности точки $x=1$ функции $\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ и $\frac{x^2+x+1}{x-3}$ тождественно равны, значит, имеют при $x\to 1$ один и тот же предел. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3}$ вычисляется с использованием утверждения о пределе частного и пределе многочлена. Итак,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-3)}=-\frac{3}{2}.$$

Пример 20. Найдем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}\quad (m>n\geqslant 1,\quad \alpha_0\beta_0\neq 0)$$

$\left(\text{неопределенность } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. $\dfrac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\ldots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\ldots+\beta_{m-1}x+\beta_m}=$

$$=\frac{\alpha_0\cdot\dfrac{1}{x^{m-n}}+\ldots+\alpha_{n-1}\cdot\dfrac{1}{x^{m-1}}+\alpha_n\dfrac{1}{x^m}}{\beta_0+\beta_1\cdot\dfrac{1}{x}+\ldots+\beta_{m-1}\cdot\dfrac{1}{x^{m-1}}+\beta_m\dfrac{1}{x^m}},$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha_0x^n+\cdots+\alpha_n}{\beta_0x^m+\ldots+\beta_m}=\dfrac{0}{\beta_0}=0$ (правильная рациональная дробь при $x\to\infty$ стремится к нулю).

Если в числителе такой дроби стоит многочлен нулевой степени, т. е. константа, то стремление дроби к нулю при $x\to\infty$ следует непосредственно из соотношения е) для бесконечно больших функций.

Пример 21. Найдем $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)$ (неопределенность типа $\infty-\infty$).

Решение. Если $x<0$, то $(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=\dfrac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}=$

$$=\frac{4+\dfrac{5}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}}-1},\text{ следовательно, }\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+4x+5}+x)=$$

$=-2.$

Пример 22. Найдем $\lim\limits_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (неопределенность типа $0\cdot\infty$).

Решение. Если $\pi<x<\dfrac{3\pi}{2}$, то $\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\dfrac{x}{2}}=$

$=-\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}$, следовательно,

$$\lim_{x\to\pi+}\sqrt{1+\cos x}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\lim_{x\to\pi+}\left(-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)=-\sqrt{2}.$$

Пример 23. Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}$ $\left(\text{неопределенность}\right.$ типа $\left.\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Имеем

$$\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2\ln|x|+\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{10\ln|x|+\ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)}=$$

$$=\frac{2+\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}}{10+\frac{\ln\left(1+\frac{x^3+x}{x^{10}}\right)}{\ln|x|}}.$$

Применяя соотношение e) для бесконечно больших функций и соотношение b) для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)}{\ln|x|}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{4x+2}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln|x|}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x^2+1}{x^9}\right)}{\ln|x|}=0,$$

откуда, применяя соотношения a) и b) для вычисления пределов, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x)}=\frac{2+0}{10+0}=\frac{1}{5}.$$

Пример 24. Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}$ $\left(\text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

Решение. Методом математической индукции доказывается, что для всех натуральных чисел n имеем $n<2^n$. Пользуясь монотонностью показательной функции 2^x, отсюда получаем, что для $x>0$ имеем $x/2<[x/2]+1<2^{[x/2]+1}\leqslant 2^{x/2+1}$, где $[\alpha]$ — целая часть α. Следовательно, для $x>0$ имеем $x^2/4<2^{x+2}$ и $0<x/2^x<16/x$. Применяя соотношение e) для бесконечно больших функций, получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=0.$$

Пример 25. Найдем $\lim\limits_{x\to 0+}x^x$ (неопределенность типа 0^0).

Решение. Необходимо найти $\lim\limits_{x\to 0+}x\ln x$. Положим $x=2^{-\alpha}$, тогда условие $x\to 0+$ эквивалентно условию $\alpha\to+\infty$. Пользуясь результатом предыдущего примера, получаем, что

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{\alpha\to+\infty}\frac{-\alpha\ln 2}{2^\alpha}=0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x} = e^0 = 1.$$

Сравнение поведения функций при $x\to a$.

Определения.

1. $f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$ ($f(x)$ *эквивалентна* $g(x)$ при $x\to a$), если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)\to 1$ при $x\to a$.

2. $f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, если $f(x)=\alpha(x)g(x)$, где $\alpha(x)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$.

3. $f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если $f(x)=\alpha(x)\cdot g(x)$, где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Замечание. Если $g(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$, то

$f(x)\sim g(x)$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$;

$f(x)=O(g(x))$ при $x\to a$, если отношение $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$;

$f(x)=o(g(x))$ при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

Отметим, что символом $O(1)$ обозначается ограниченная в некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ функция, символом $o(1)$ обозначается функция, имеющая нулевой предел при $x\to a$ (бесконечно малая функция при $x\to a$).

Свойства введенных соотношений. (Везде подразумевается, что $x\to a$.)

1. Если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$ (симметричность соотношения эквивалентности).
2. Если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$.
3. Если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)=O(g(x))$.
4. Если $f(x)=o(g(x))$, то $f(x)=O(g(x))$.
5. Если $f(x)\sim g(x)$, то $o(f(x))=o(g(x))$.
6. Если постоянная $C\neq 0$, то
   $C\cdot O(g(x))=O(g(x))$, $\quad C\cdot o(g(x))=o(g(x))$.
7. $O(O(g(x))=O(g(x))$, $\quad O(o(g(x))=o(O(g(x)))=o(g(x))$,
   $o(o(g(x)))=o(g(x))$.
8. $h(x)\cdot O(g(x))=O(h(x)\cdot g(x))$, $\quad h(x)\cdot o(g(x))=o(h(x)g(x))$.
9. $O(g(x))\cdot O(g(x))=O(g^2(x))$, $\quad O(g(x))\cdot o(g(x))\cdot o(g^2(x))$,
   $o(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$.
10. $O(g(x))+O(g(x))=O(g(x))$, $\quad O(g(x))+o(g(x))=O(g(x))$,
    $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$.
11. Если $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim s(x)$, то $f(x)\cdot h(x)\sim g(x)\cdot s(x)$.
12. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k\neq 0$, то $f(x)\sim k$.

Из этих свойств следует, что если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)-g(x)=$ $=o(g(x))$ или $f(x)=g(x)+o(g(x))$. Если функция $f(x)$ представлена в виде такой суммы, то говорят, что $g(x)$ есть главная часть $f(x)$ при $x\to a$.

Пример 26. Рассмотрим соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n}{\alpha_0x^n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha_0+\dfrac{\alpha_1}{x}+\dfrac{\alpha_2}{x^2}+\dots+\dfrac{\alpha_n}{x^n}}{\alpha_0}=1,\quad \alpha_0\neq 0.$$

Следовательно, α_0x^n есть главная часть

$$\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n\quad(\alpha_0\neq 0)\ \text{при}\ x\to\infty.$$

(Обращаем внимание, что, например, функции

$$y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}\ \text{и}\ y=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\alpha_2x^{n-2}$$

также являются главными частями данной функции при $x\to\infty$.)

Пример 27.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\dots+\alpha_{n-m}x^m}{\alpha_{n-m}x^m}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha_0x^{n-m}+\alpha_1x^{n-m-1}+\dots+\alpha_{n-m}}{\alpha_{n-m}}=1\quad(\alpha_{n-m}\neq 0,\ \ \alpha_0\neq 0,\ \ 1\leqslant$$

$$\leqslant m\leqslant n),$$

следовательно, $\alpha_{n-m}x^m$ есть главная часть $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\dots+\alpha_{n-m}x^m$ при $x\to 0$.

Справедливы следующие соотношения (*два основных предела*):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

В другой записи:

$$\sin x\backsim x,\quad e^x-1\backsim x\ \text{при}\ x\to 0.$$

Отсюда получаем, что при $x\to 0$:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\backsim\frac{x^2}{2}\quad(\text{свойство 11});$$

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\backsim x\quad(\text{свойства 11 и 12});$$

$$\arcsin x\backsim\sin(\arcsin x)=x;$$

$$\ln(1+x)\backsim e^{\ln(1+x)}-1=x.$$

Сведем полученные и аналогичные им соотношения в таблицу (с. 62). Из разобранных примеров следует, что при $x\to+\infty$

1) $\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}x+\alpha_n=$
$=o(\beta_0x^m+\beta_1x^{m-1}+\dots+\beta_{m-1}x+\beta_m)\quad(\alpha_0\beta_0\neq 0,\quad m>n),$

2) $x=o(2^x)$.

Эквивалентность при $x \to 0$	Равенство при $x \to 0$
$\sin x \sim x$	$\sin x = x + o(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} x = x + o(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin x = x + o(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} x = x + o(x)$
$e^x - 1 \sim x$	$e^x = 1 + x + o(x)$
$\ln(1+x) \sim x$	$\ln(1+x) = x + o(x)$
$(1+x)^m - 1 \sim mx$	$(1+x)^m = 1 + mx + o(x)$

Пример 28. Справедливы соотношения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}5x-\cos x}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt[5]{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+5x+o(x)-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-\frac{x}{5}+o(x)}=$$

$$=\lim_{\to}\frac{5x+o(x)}{-\frac{x}{5}+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{5+o(1)}{-\frac{1}{5}+o(1)}=\frac{5}{-\frac{1}{5}}=-25;$$

$$\lim_{\to}\frac{\ln(e^x+x)-\sin 3x}{\operatorname{arctg}4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x+o(x))-3x+o(x)}{4x+o(x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-3x+o(x)}{4x+o(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-1+o(1)}{4+o(1)}=-\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+o(x))\left(1-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Для упрощения выкладок полезно заметить, что из соотношения $f \sim g$ при $x \to a$ следует, что $\lim\limits_{x\to a} h(x) f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) g(x)$ или оба эти предела одновременно не существуют, т. е. при вычислении предела произведения $f(x)\cdot g(x)$ один из сомножителей $f(x)$ или $g(x)$ (или оба) в этом произведении можно заменить эквивалентной функцией. Пользуясь этим свойством, решение предыдущего примера записывается короче:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

В этом примере ясно видно, что соотношение $f(x)=o(x)$ при $x \to 0$ определяет только то, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}=0$, поэтому из соотношений $\sin x = x+o(x)$, $\operatorname{tg} x = x+o(x)$ $(x \to 0)$, следует только, что $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x)$, $x \to 0$ (свойства 6 и 10), т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x}=0$, но эти соотношения никак не дают сравнения функции $\operatorname{tg} x - \sin x$ с функцией x^3. Для такого сравнения требуется более глубокий анализ.

Внимание! Одна из самых распространенных ошибок при вычислении предела некоторого выражения заключается в замене функции, не являющейся множителем всего этого выражения, на эквивалентную функцию (чаще всего такая ошибочная замена делается в отдельном слагаемом алгебраической суммы).

Пример 29. Справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2-2\cos 2x - \sin^2 2x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{x^4} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos 2x)^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{4x^4}{x^4} = 4.$$

Если же заменить функцию $y=2-2\cos 2x$ при $x \to 0$ эквивалентной функцией $4x^2$ и функцию $y=\sin^2 2x$ эквивалентной функцией $4x^2$, то получим $\lim\limits_{x \to 0} \frac{4x^2-4x^2}{x^4}=0$, что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

Пример 30. Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2^x}=0$ (см. с. 59) и соотношением е) для бесконечно больших функций, получаем, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2+x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{x}{2^x}\cdot\frac{1}{2^{x^2-x}}}{2^x}=0.$$

Если же в функции $y=2^{x^2+x}$ заменить показатель эквивалентной при $x \to +\infty$ функцией $y=x^2$, то получим

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{x^2}+x}{2^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{x}{2^x}\cdot\frac{1}{2^{x^2-x}}\right)=1,$$

что не совпадает с ранее полученным верным результатом.

Если ищется предел функции при $x \to a$, $a \neq 0$, то для удобства можно перейти к новому аргументу $y=x-a$, предел которого равен нулю при $x \to a$.

Пример 31. Найдем $\lim\limits_{x \to \pi/4} (x-\pi/4)\operatorname{tg} 2x$.

Решение. Положим $x-\pi/4=y$, тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}2x=\lim_{y\to0}y\cdot\operatorname{tg}\left(2y+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{y\to0}y(-\operatorname{ctg}2y)=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left(\frac{y}{\sin 2y}\cdot\cos 2y\right)=-\lim_{y\to0}\frac{y}{\sin 2y}\cdot\lim_{y\to0}\cos 2y=$$

$$=-\left(\lim_{y\to0}\frac{y}{2y}\right)\cdot 1=-\frac{1}{2}.$$

Пример 32. Найдем

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi x^{\alpha}}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}.$$

Решение. Положим $y=x-1$, тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{\cos\frac{3\pi x^{\alpha}}{2}}{\ln(2x-\sqrt[7]{x})}=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}(1+y)^{\alpha}\right)}{\ln(2y+2-\sqrt[7]{1+y})}=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right)}{\ln\left(2y+2-1-\frac{1}{7}y+o(y)\right)}=\lim_{y\to0}\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right)}{\ln\left(1+\frac{13}{7}y+o(y)\right)}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left[\left(\frac{3\pi}{2}\alpha y+o(y)\right):\left(\frac{13}{7}y+o(y)\right)\right]=\frac{21}{26}\pi\alpha.$$

Пример 33. Найдем

$$\lim_{x\to1}(\sin\pi x+x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$$

Решение. Вычислим

$$\lim_{x\to1}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\right],$$

полагая $y=x-1$. Имеем

$$\lim_{x\to1}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\ln(\sin\pi x+x)\right]=\lim_{y\to0}\left[\operatorname{tg}\frac{\pi(y+1)}{2}\ln(\sin\pi(y+1)+\right.$$

$$\left.+y+1)\right]=-\lim_{y\to0}\left[\operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2}\ln(1+y-\sin\pi y)\right]=$$

$$=-\lim_{y\to0}\left[\frac{2}{\pi y}(y-\sin\pi y)\right]=-\lim_{y\to0}\frac{2(y-\pi y+o(y))}{\pi y}=\frac{2(\pi-1)}{\pi}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}(\sin \pi x + x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = e^{\frac{2(\pi-1)}{\pi}}.$$

Отметим, что при $x \to a$ утверждения «$f(x) \sim g(x)$» и «$g(x)$ есть главная часть $f(x)$» равносильны. Так как функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет бесконечное множество эквивалентных функций, то при постановке задачи выделения главной части $f(x)$ при $x \to a$, т. е. нахождении эквивалентной функции, указывается, какой именно вид эта главная часть должна иметь.

Пример 34. Найдем главную часть вида Cx^α для функции

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ при } x \to 0.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2}} \cdot \ln\frac{1-x^2}{1+x^2} = \sqrt{x + x^{2/3}} \cdot \ln\left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) =$$

$$= |x|^{\frac{1}{3}} \sqrt{x^{1/3}+1} \cdot \ln\left(1 - \frac{2x^2}{1+x^2}\right) \sim |x|^{1/3} \cdot (-2x^2) =$$

$$= -2|x|^{7/3} \quad (x \to 0).$$

Следовательно, главной частью $f(x)$ при $x \to 0$ является функция

$$g(x) = -2|x|^{7/3}.$$

Пример 35. Найдем главную часть вида $C(1-x)^\alpha$ для функции

$$f(x) = 4\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[5]{x} + 1 \text{ при } x \to 1.$$

Решение. Если ввести новую переменную $z = 1 - x$, то получим, что

$$f(x) = 4(1-z)^{1/4} - 5(1-z)^{1/5} + 1 = 4\left(1 - \frac{z}{4} + o(z)\right) -$$

$$-5\left(1 - \frac{z}{5} + o(z)\right) + 1 = 4 - z + o(z) - 5 + z + o(z) + 1 = o(z),$$

таким образом, этим методом мы не получили функцию, эквивалентную данной. Введем переменную t так, чтобы избавиться от иррациональности: $x = t^{20}$. Тогда так как $x \to 1$, то $t \to 1$ и

$$1 - x = 1 - t^{20} = (1-t)(1 + t + t^2 + \ldots + t^{19}) \sim 20(1-t),$$

$$1 - t \sim \frac{1-x}{20}$$

и

$$f(x)=4t^5-5t^4+1=(1-t)^2(4t^3+3t^2+2t+1)\backsim 10(1-t)^2.$$

Следовательно,

$$f(x)\backsim\frac{(1-x)^2}{400}\cdot 10=\frac{(1-x)^2}{40}.$$

Итак, главной частью функции $f(x)$ является функция

$$g(x)=\frac{(1-x)^2}{40}\quad(x\to 1).$$

Пример 36. Найдем главную часть вида Cx^{α} для функции

$$f(x)=\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\quad\text{при } x\to+\infty.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=0,$$

следовательно, при $x\to+\infty$

$$\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)\backsim\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}x-\arccos\frac{1}{x}\right)=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1+x\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{1}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\backsim$$

$$\backsim\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\backsim\frac{1}{2x^3}.$$

Итак, главной частью функции является функция $g(x)=\dfrac{1}{2x^3}$ $(x\to+\infty)$.

Пример 37. Найдем асимптоты графика функции $y=x+1+\sqrt{x^2+3x+7}$.

Решение. При $x\to+\infty$ имеем

$$y=x+1+x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=x+1+x\left(1+\frac{3}{2x}+\right.$$

$$\left.+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=2x+\frac{5}{2}+o(1),$$

а при $x=-\infty$

$$y=x+1-x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=x+1-x\left(1+\frac{3}{2x}+\right.$$
$$\left.+\frac{7}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=-\frac{1}{2}+o(1).$$

Итак, график данной функции имеет правую асимптоту $y=2x+$ $+\frac{5}{2}$ и левую асимптоту $y=-1/2$.

§ 2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Последовательность $\{a_n\}$ есть функция, заданная на множестве натуральных чисел $N=\{1, 2, 3,\ldots\}$. Это множество имеет единственную предельную точку — несобственную точку $+\infty$. Переформулируем определение *предела* функции на случай *последовательности:* $A=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, если для любого положительного $\varepsilon(\forall\varepsilon>0)$ найдется такой номер $N(\exists N)$, что для любого n, $n>N(\forall n>N)$, справедливо неравенство $|A-a_n|<\varepsilon$. Если вместо множества всех натуральных чисел взять некоторое его бесконечное подмножество $\{n_k\}$, $k=1, 2, \ldots, n_k<n_{k+1}$, то получим подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$. Предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$, если он существует, называется *частичным пределом данной последовательности.*

Если последовательность ограничена сверху, то и множество всех ее частичных пределов ограничено сверху. Тогда доказывается, что это множество обязательно содержит максимальный элемент. Этот максимальный элемент называется верхним пределом данной последовательности и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. Другими словами, $A=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n>N$: $a_n<A+\varepsilon$ и $\exists$ $\{a_{n_k}\}:\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=A$.

Если последовательность не ограничена сверху, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=+$ $+\infty$.

Аналогично определяется $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ — нижний предел последовательности $\{a_n\}$. Если последовательность не ограничена снизу, то $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-\infty$, в противном случае $B=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ есть наименьший из частичных пределов, т. е. $B=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N:\forall n>N$, $a_n>B-\varepsilon$ и $\exists\{a_{n_k}\}:\underline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, a_{n_k}=B$.

Условие существования предела последовательности эквивалентно условию равенства верхнего и нижнего пределов этой последовательности.

Так как последовательность есть функция, заданная на множестве натуральных чисел, то все рассмотренные выше методы вычисления пределов функций применяются и для вычисления пределов последовательностей.

Рассмотрим еще один метод вычисления предела последовательности. Разберем его на примерах последовательностей, заданных рекуррентно.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+1$, $\forall n\in N$. Прежде всего выясним, существует ли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Методом математической индукции проверяем, что для любого n справедливо неравенство $a_n<2$. Отсюда получаем, что $a_{n+1}-a_n=1-a_n/2>0$. Таким образом, $\{a_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, следовательно, последовательность $\{a_n\}$ имеет предел. Обозначим его через A. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $a_{n+1}=a_n/2+1$, имеем $A=A/2+1$, откуда $A=2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

Пример 2. Рассмотрим последовательность

$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$

(n корней). Возрастание a_n с ростом n следует непосредственно из формулы для a_n. Для того чтобы сделать вывод о существовании предела a_n, необходимо проверить, что последовательность a_n ограничена сверху. Действительно, заменив в последнем радикале число 2 на 4, тем самым увеличив выражение для a_n, получим, что для любого n выполняется $a_n<2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует. Обозначим его через A. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, имеем $A=\sqrt{2+A}$, откуда $A=2$. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $a_n=(-1)^n$, $n\in N$. Так как $a_{2k}=1$, $a_{2k+1}=-1$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=1$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-1$, откуда следует, что данная последовательность предела не имеет. Члены ее удовлетворяют рекуррентному соотношению $a_n=-a_{n-1}$. Если формально перейти к пределу в этом соотношении, то получим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Этот пример показывает, что возможность перехода в рекуррентном соотношении к пределу должна быть обоснована, т. е. существование предела должно быть установлено заранее.

Вычисление верхнего и нижнего пределов последовательности сводится к тому, что выделяют сходящиеся подпоследовательности и сравнивают их пределы — частичные пределы исходной последовательности.

Пример 4. Пусть дана последовательность $a_n = n^{(-1)^n}$, $n \in N$. Так как для любого n имеем, что $a_n > 0$, то любой частичный предел этой последовательности неотрицателен. Поскольку $a_{2n} = 2n$ и

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, \text{ то } \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = +\infty \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0.$$

Пример 5. Пусть дана последовательность $a_n = \left(2 + \cos\frac{\pi n}{3}\right) \times$ $\times \left(1 + \frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{6}\right)$, $n \in N$. Так как для любого n имеем, что $a_n \leqslant$ $\leqslant 3(1 + 1/n)$, то $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leqslant 3$. С другой стороны, $a_{12k} = 3(1 + 1/12k)$, откуда следует, что $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 3$. Точно так же из соотношений $a_n \geqslant$ $\geqslant 1 - 1/n$, для $n \in N$ и $a_{6k+3} = 1$, $k \in N$, следует, что $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 1$.

Замечание. В этом примере кроме подпоследовательностей $\{a_{12k}\}$ и $\{a_{6k+3}\}$ существуют и подпоследовательности, сходящиеся к пределу, отличному от 1 и 3, например $\{a_{6k+2}\}$. Ее предел равен 3/2.

Используя понятие предела последовательности, можно дать определения *верхнего* и *нижнего пределов функции* $f(x)$, $x \in E$:

число A есть верхний предел функции $f(x)$ при $x \to a$ (обозначение $A = \overline{\lim_{x\to a}}\, f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}(a) : \forall x \in \dot{U}(a),\ x \in E,\ f(x) <$ $< A + \varepsilon$ и существует последовательность $x_k \to a$, для которой $A =$ $= \lim_{k\to\infty} f(x_k)$. Число B есть нижний предел функции $f(x)$ при $x \to a$ (обозначение $B = \underline{\lim_{x\to a}}\, f(x)$), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \dot{U}(a) : \forall x \in \dot{U}(a),\ x \in E$ $f(x) > B - \varepsilon$ и существует последовательность $x_k \to a$, для которой $B = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$.

Условие существования предела функции при $x \to a$ эквивалентно условию равенства ее верхнего и нижнего пределов при $x \to a$.

Пример 6. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ при $x \to 0$. С одной стороны, $-1 \leqslant \sin\frac{\pi}{x} \leqslant 1$ для любого x, $x \neq 0$; с другой стороны, если $x_k = \frac{1}{2k + 1/2}$, $k \in N$, то $x_k \to 0$ и $\sin\frac{\pi}{x_k} = 1$; если $\tilde{x}_k = \frac{1}{2k - 1/2}$, $k \in N$, то $\tilde{x}_k \to 0$ и $\sin\frac{\pi}{\tilde{x}_k} = -1$. Отсюда следует, что $\overline{\lim_{x\to 0}}\, f(x) = 1$, $\underline{\lim_{x\to 0}}\, f(x) = -1$. Следовательно, данная функция предела при $x \to 0$ не имеет.

§ 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА

Иногда соотношения эквивалентности могут оказаться недостаточными для определения главной части функции при $x \to a$. В таком случае одним из методов определения главной части является разложение функции в многочлен Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. При этом важно, с одной стороны, не потерять членов нужного порядка, взяв слишком малую степень многочлена Тейлора, а с другой — не выписывать лишних членов, так как это загромождает и затрудняет выкладки. Поэтому при вычислении пределов полезно оценить заранее, какого порядка малости погрешность уже не влияет на предел соответствующего выражения.

Многочленом Тейлора порядка n функции f в точке a является многочлен $T_n(f, a)$ вида $\sum\limits_{=0}^{n} c_k (x-a)^k$ такой, что $f - T_n(f, a) = o(x-a)^n$. Приведем следующие основные формулы:

а) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \ x \to 0;$

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \ x \to 0;$

в) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0;$

г) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \ x \to 0;$

д) $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots +$

$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \ x \to 0.$

Обратим внимание на то, что степень многочлена Тейлора $T_n(f, a)$ может быть и меньше его порядка (больше не может быть по определению), т. е. любые его коэффициенты, в том числе и при старших степенях, могут быть равны нулю. В частности, один и тот же многочлен может быть многочленом Тейлора разных порядков функции f в точке a. Например, многочлен $x - \frac{x^3}{6}$ является многочленом Тейлора как третьего, так и четвертого порядков функции $\sin x$ в нулевой точке.

Пример 1. Пусть $y(x) = (x^6 - 2x^{10}) e^{x^4}$. Так как $y(x) \sim x^6$ при $x \to 0$, то все многочлены Тейлора ниже шестого порядка функции y в нулевой точке представляют собой тождественный нуль ($c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$). Так как $y - x^6 = o(x^6)$, $x \to 0$, то многочлен Тейлора шестого порядка $T_6(y, 0)$ функции y в нулевой точке есть x^6, а так как $e^{x^4}=1+x^4+o(x^4)$ и, следовательно, $y(x)=(x^6-2x^{10})(1+x^4+o(x^4))=x^6-x^{10}+o(x^{10})$, то $T_6(y,\ 0)=T_7(y,\ 0)=T_8(y,\ 0)=T_9(y,\ 0)=x^6$ и $T_{10}(y,\ 0)=x^6-x^{10}$.

Из всего вышесказанного следует, что если в многочлене Тейлора порядка n функции y в точке a все коэффициенты c_i с номерами меньше k $(k<n)$ равны нулю, а $c_k\neq 0$, то при $x\to a$ имеем, что $y\backsim T_n(y,\ 0)\backsim c_k(x-a)^k$.

Используя формулы а)—д) для нахождения многочлена Тейлора, необходимо правильно оценивать отклонение полученного многочлена от данной функции, иначе можно допустить грубые ошибки.

Пример 2. Найдем многочлены Тейлора первого, второго, третьего и четвертого порядков функции $y=\ln(1+x+x^2)$ в нулевой точке.

Решение. Воспользуемся формулой $\ln(1+\alpha)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}\alpha^i}{i}+o(\alpha^n)$, $\alpha\to 0$. В нашем примере $\alpha=x+x^2$. Заметим, что $\alpha\backsim x$, $x\to 0$, следовательно, $o(\alpha^n)=o(x^n)$, $x\to 0$, $n\in N$. Поэтому $\ln(1+x+x^2)=\alpha+o(\alpha)=x+x^2+o(x)=x+o(x)$. Итак, многочлен Тейлора первого порядка функции y в нулевой точке есть $T_1(y,\ 0)=x$.

Обратим внимание, что поскольку $y=x+x^2+o(x)$, то нельзя утверждать, что многочлен второй степени $x+x^2$ является многочленом Тейлора второго порядка функции в нулевой точке. Покажем, что это неверно. Действительно, при $x\to 0$ $\ln(1+x+x^2)=\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+o(\alpha^2)=(x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)$; при раскрытии скобок используем то, что $x^k=o(x^2)$, если $k>2$, $k\in N$, следовательно, $(x+x^2)-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+o(x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$. Итак, многочленом Тейлора второго порядка функции y в нулевой точке является многочлен $T_2(y,\ 0)=x+\frac{x^2}{2}$. Таким же образом получаем

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3+o(x^3)=$$

$$=x+x^2-\frac{1}{2}(x^2+2x^3)-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3+o(x^3),$$

следовательно,

$$T_3(y,\ 0)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3;$$

$$\ln(1+x+x^2)=x+x^2-\frac{1}{2}(x+x^2)^2+\frac{1}{3}(x+x^2)^3-\frac{1}{4}(x+x^2)^4+$$

$$+o(x^4)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4),$$

следовательно,

$$T_4(y,\ 0)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4.$$

Пример 3. Найдем главную часть вида $C|x|^a$ функции

$$y(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right) \text{ при } x\to 0.$$

Решение. Пользуясь формулами б) и т), пишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(x)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка имеем

$$y(x)=\sin x-\ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)=(x+o(x))-(x+o(x))=$$
$$=o(x),\ x\to 0,$$

т. е. $T_1(y,\ 0)\equiv 0$.

Для второго порядка

$$y(x)=(x+o(x^2))-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)=o(x^2),\ x\to 0,$$

т. е. $T_2(y,\ 0)\equiv 0$.

Для третьего порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)=$$
$$=o(x^3),\ (x\to 0),$$

т. е. $T_3(y,\ 0)\equiv 0$.

Для четвертого порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}\right)-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)\right)=o(x^4),\ x\to 0,$$

т. е. $T_4(y,\ 0)\equiv 0$.

Для пятого порядка

$$y(x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)-\left(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{4}\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}+\frac{3x^5}{4}\right)-\frac{1}{4}(x^4+2x^5)+\frac{1}{5}x^5+o(x^5)\right)=$$
$$=-\frac{1}{15}x^5+o(x^5),\ x\to 0,$$

т. е. $T_5(y,\ 0) = -\dfrac{1}{15}x^5$ и степенная функция $-\dfrac{1}{15}x^5$ есть главная часть функции $y = \sin x - \ln\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8}\right)$ при $x \to 0$.

Пример 4. Найдем главную часть вида $C|x-1|^a$ функции $y = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}$ при $x \to 1$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулами а)–д), сделаем замену переменного $x = t + 1$. Тогда задача сводится к нахождению главной части вида $C|t|^a$ функции $y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{\frac{2t+t^2}{8}}$ при $t \to 0$. Пользуясь формулами а) и д), пишем последовательно многочлены Тейлора функции $y(t)$ в нулевой точке увеличивающегося порядка, пока не получим многочлен, отличный от нуля.

Для первого порядка

$$y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{t/4 + t^2/8} = \left(1 + \frac{1}{4}t + o(t)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + o(t)\right) = o(t),\ t \to 0,$$

т. е. $T_1(y,\ 0) \equiv 0$.

Для второго порядка

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{4}(t + t^2) - \frac{3}{32}t^2 + o(t^2)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{16} + o(t^2)\right) = o(t^2),\ t \to 0,$$

т. е. $T_2(y,\ 0) \equiv 0$.

Для третьего порядка

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{4}(t + t^2) - \frac{3}{32}(t^2 + 2t^3) + \frac{7}{128}t^3 + o(t^3)\right) - \left(1 + \frac{t}{4} + \frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{16} + \frac{t^3}{32}\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{t^3}{64} + o(t^3)\right) = -\frac{1}{6}t^3 + o(t^3),\ t \to 0,$$

т. е. $T_3(y,\ 0) = -\dfrac{1}{6}t^3$ и степенная функция $-\dfrac{1}{6}t^3$ есть главная часть функции $y(t) = (1 + t + t^2)^{1/4} - e^{t/4 + t^2/8}$ при $t \to 0$. Возвращаясь к переменному x, получим, что функция $-1/6\,(x-1)^3$ есть главная часть функции $y(x) = \sqrt[4]{x^2 - x + 1} - \sqrt[8]{e^{x^2-1}}$ при $x \to 1$.

Пример 5. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}.$$

Решение. Так как в знаменателе стоит x^5, то достаточно найти разложение числителя в многочлен Тейлора с погрешностью порядка $o(x^5)$ при $x\to 0$. Так как $\sin x \backsim x$, то $o(x^5)=o(\sin^5 x)$, $x\to$ $\to 0$. По формуле Тейлора имеем

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+\frac{\sin^5 x}{120}+o(\sin^5 x),$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5).$$

Тогда

$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)^3=(x+\alpha(x))^3=$$

$$=x^3+3x^2\cdot\alpha(x)+3x\alpha^2(x)+\alpha^3(x),$$

где $\alpha(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$. Поэтому $\alpha(x)\backsim-\frac{x^3}{6}$, $x\to 0$; $x\alpha^2(x)\backsim$ $\backsim x\cdot\frac{x^6}{36}=o(x^5)$, $x\to 0$; $\alpha^3(x)\backsim-\frac{x^9}{216}=o(x^5)$, $x\to 0$, и, следовательно, $\sin^3 x=x^3-\frac{1}{2}x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Так как $\alpha(x)\backsim-\frac{x^3}{6}=o(x)$, $x\to 0$, то $x+\alpha(x)\backsim x$, $x\to 0$, и $\sin^5 x=(x+\alpha(x))^5\backsim x^5$ $x\to 0$, т. е. $\sin^5 x=x^5+o(x^5)$, $x\to 0$. Итак, при $x\to 0$

$$\sin(\sin x)=x-\frac{y^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)-\frac{1}{6}\left(x^3-\frac{x^5}{2}\right)+$$

$$+o(x^5)+\frac{1}{120}x^5+o(x^5)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

Аналогично

$$x\sqrt[3]{1-x^2}=x(1-x^2)^{\frac{1}{3}}=x\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right)=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{9}x^5+o(x^5).$$

Итак,

$$\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5+o(x^3)-x+$$

$$+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{9}x^5+o(x^5)=\frac{19}{90}x^5+o(x^5),$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{19}{90}+\frac{o(x^5)}{x^5}\right)=\frac{19}{90}.$$

Приведем еще ряд примеров разложения по степеням x некоторых функций.

Пример 6. Найдем разложение функции $y=\operatorname{tg}x$ при $x\to 0$ до порядка $o(x^5)$.

Решение. Первый способ. Имеем

$$\operatorname{tg}x=(\sin x)(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}=\sin x\left(1+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{3}{8}\sin^4 x+\right.$$

$$\left.+o(x^4)\right)=\sin x+\frac{1}{2}\sin^3 x+\frac{3}{8}\sin^5 x+o(x^5)=$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]+\frac{1}{2}\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right]^3+$$

$$+\frac{3}{8}[x+o(x)]^5+o(x^5)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)+$$

$$+\frac{1}{2}x^3-\frac{x^5}{4}+o(x^5)+\frac{3}{8}x^5+o(x^5)=$$

$$=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+o(x^5)\quad(x\to 0).$$

Второй способ. Надлежит найти разложение функции $\operatorname{tg}x$ по степеням x с погрешностью $o(x^5)$ при $x\to 0$. Ищем это разложение в виде

$$\operatorname{tg}x=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+o(x^5).$$

Из того, что $y=\operatorname{tg}x$ — нечетная функция легко показать, что $a_0=a_2=a_4=0$. Поскольку $\operatorname{tg}x\backsim x$ при

$$x\to 0 \text{ и } a_1x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5)\backsim a_1x,\ x\to 0, \text{ то } a_1=1.$$

Для нахождения остальных коэффициентов имеем соотношение

$$\sin x=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))\cdot\cos x,\ x\to 0,$$

или

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)=$$

$$=(x+a_3x^3+a_5x^5+o(x^5))\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right),$$

т. е.

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)=x+x^3\left(a_3-\frac{1}{2}\right)+$$
$$+x^5\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o\left(x^5\right).$$

Поделив это равенство на x^3, получаем

$$-\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+o\left(x^2\right)=a_3-\frac{1}{2}+x^2\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o\left(x^2\right).$$

Переходя к пределу при $x \to 0$, получаем

$$-\frac{1}{6}=a_3-\frac{1}{2}, \quad \text{т. е.} \quad a_3=\frac{1}{3}.$$

Аналогично из соотношения

$$\frac{x^2}{120}+o\left(x^2\right)=x^2\left(a_5-\frac{a_3}{2}+\frac{1}{24}\right)+o\left(x^2\right)$$

получим, что $a_5=2/15$.

Итак, при $x \to 0$ имеем $\operatorname{tg} x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o\left(x^5\right)$.

При разложении рациональных дробей удобно пользоваться методом деления многочлена на многочлен углом.

Пример 7. Найдем разложение функции

$$y=\frac{1+x-4x^2+2x^3}{1+3x+x^2} \quad \text{до} \qquad \text{а } o\left(x^7\right) \text{ при } x \to 0.$$

Решение. Имеем

$$\begin{array}{l|l}
\;\;1+x-4x^2+2x^3 & 1+3x+x^2 \\
-\;\underline{1+3x+x^2} & \overline{1-2x+x^2+x^3-4x^4+11x^5-29x^6+76x^7+o(x^7)} \\
\qquad -2x-5x^2+2x^3 & \\
\qquad \underline{-2x-6x^2-2x^3} & \\
\qquad\qquad x^2+4x^3 & \\
\qquad\qquad \underline{x^2+3x^3+x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad x^3-x^4 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{x^3+3x^4+x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-4x^4-x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{11x^5+4x^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-29x^6-11x^7} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 76x^7+o\left(x^7\right). &
\end{array}$$

Пример 8. Найдем разложение функций $y=\operatorname{sh} x$ и $y=\operatorname{ch} x$ до порядка $o\left(x^7\right)$ при $x \to 0$.

Решение. Получаем, что

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^7}{7!}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+o(x^7)\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\right)\right]=$$
$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+o(x^7)\quad(x\to 0).$$

Аналогично

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+o(x^7)\quad(x\to 0).$$

Задачи

1. Доказать соотношения $(x\to a)$:

а) если $f(x)\sim g(x)$, то $g(x)\sim f(x)$.

б) если $f(x)\sim g(x)$ и $g(x)\sim h(x)$, то $f(x)\sim h(x)$;

в) если $f(x)\sim g(x)$, то $f(x)=O(g(x))$;

г) если $f(x)=o(g(x))$, то $f(x)=O(g(x))$;

д) если $f(x)\sim g(x)$, то $o(f(x))=o(g(x))$;

е) если C—константа $(C\neq 0)$, то $C\cdot O(g(x))=O(g(x))$, $C\cdot o(g(x))=o(g(x))$;

ж) $O(O(g(x))=O(g(x))$, $O(o(g(x)))=o(O(g(x)))=o(o(g(x)))=$ $=o(g(x))$;

з) $h(x)\cdot O(g(x))=O(h(x)\cdot g(x))$, $h(x)\cdot o(g(x))=o(h(x)\cdot g(x))$;

и) $O(g(x))\cdot O(g(x))=O(g^2(x))$, $O(g(x))\cdot o(g(x))=O(g^2(x))$, $o(g(x))\cdot o(g(x))=o(g^2(x))$;

к) $O(g(x))+O(g(x))=O(g(x))$, $O(g(x))+o(g(x))=O(g(x))$, $o(g(x))+o(g(x))=o(g(x))$;

л) если $f(x)\sim g(x)$ и $h(x)\sim s(x)$, то $f(x)h(x)\sim g(x)s(x)$;

м) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=k$, $k\neq 0$, то $f(x)\sim k$.

2. Показать, что для любых $a>1$ и $p>0$ при $x\to+\infty$ $x^p=$ $=o(a^x)$, $\ln x=o(x^p)$ и что $\lim\limits_{x\to 0+}(\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}=1$.

3. Показать, что для любого $p>0$ при $x\to 0$ $\ln|x|=o(1/x^p)$.

4. Показать, что $x-\sin x=O(x^3)$ при $x\to 0$.

5. Найти главные части вида Cx^α при $x\to+\infty$ следующих функций:

а) $\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_n}$, $a_0b_0\neq 0$.

б) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

в) $(x-\sqrt{x^2-1})^a+(x+\sqrt{x^2-1})^a$ $(a>0)$;

г) $x^2\operatorname{arc\,ctg} x$;

д) $x^2\operatorname{arcctg}(-x)$;

е) $(x^2-4x+10)\,e^{\frac{1}{x}}$;

ж) $\ln(x^2+4+4^{x^2})$;

з) $(x^2+2)\ln(x+2)-x^2\ln x$;

и) $\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{x+1}$;

к) $\arcsin\dfrac{4x+1}{x^2+10x}$.

6. Найти главные части вида Cx^α при $x \to 0$ следующих функций:

а) $(1+mx)^n-(1+nx)^m$, $m, n \in N$

б) $\sqrt{1-2x-4x^2}+x-1$;

в) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

г) $\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+bx}-1$;

д) $\ln \cos \pi x$;

е) a^x-b^x, $a \neq b$;

ж) $1+\sin ax-\cos ax$;

з) $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x-1$;

и) $\ln(x^2+4^x)$;

к) $\operatorname{ctg} \pi x$.

7. Найти главные части вида $C(1-x)^\alpha$ при $x \to 1$ следующих функций:

а) x^3+5x^2-3x-3;

б) $x+x^2+\ldots+x^n-n$;

в) $(x^6-x^4-x^2+1) \operatorname{tg} \pi x$;

г) $\arccos x$;

д) x^x-1;

е) $\ln \sin \dfrac{\pi x}{2}$;

ж) $3 \cdot 2^x-2 \cdot 3^x$;

з) $\dfrac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\sqrt[3]{1-\sqrt[7]{x}}}$;

и) $\dfrac{1}{\ln \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}$;

к) $\dfrac{\sqrt[5]{x^a-x^b}}{\operatorname{arctg} x-\pi/4}$ $(a \neq b)$.

8. Найти главные части вида $C \cdot \dfrac{1}{n^\alpha}$ для следующих последовательностей при $n \to \infty$:

а) $a_n=\sqrt[4]{n^4+an+b}-n$;

б) $a_n=\ln \dfrac{n+1}{n+5} \cdot \sin \dfrac{\pi}{n}$;

в) $a_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+k})$;

г) $a_n=a^{\frac{1}{n}}-\dfrac{1}{2}\left(b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}\right)$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, $a^2 \neq bc$;

д) $a_n=\operatorname{ctg} \dfrac{\pi n}{4n-2}-1$;

е) $a_n=\sin \dfrac{\pi n}{2n+1}-1$;

ж) $a_n=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n}$;

з) $a_n=\sqrt[n]{2}-\sqrt[n+1]{2}$;

и) $a_n=\dfrac{\pi}{2}-\arcsin \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

к) $a_n=\ln(1+3^n)$.

9. Проверить, что при $x \to 0$:

а) $x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(x)$ и $x = O\left(x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right)$;

б) $x \cos \frac{1}{x} = O(x)$, но $x \neq O\left(x \cos \frac{1}{x}\right)$.

10. Проверить, что при $x \to \infty$:

а) $\sqrt{x^2+4} \operatorname{arctg} x = O(x)$ и $x = O(\sqrt{x^2+4} \operatorname{arctg} x)$;

б) $\ln(x^2+2^x) = O(x)$, но $x \neq O(\ln(x^2+2^x))$.

Вычислить:

11. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

12. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$.

14. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-12x+16}{x^2-4}$.

15. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^3-3x-2}$.

16. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{4-\sqrt{21-x}}{\sqrt[3]{x-13}+2}$.

17. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{29-x}}{x-\sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}}$.

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$.

20. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+5x}+x)$.

21. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

22. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2+2x}-x)$.

23. $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

24. $\lim\limits_{x \to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}+x)$.

25. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

26. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{1+2x+x^2}-\sqrt{x^2-4x+1})$.

27. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+x-1})$.

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[3]{x}\,(\sqrt[3]{(x+4)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2})$.

29.

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1+x}+x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\sqrt[3]{1+x}-4\sqrt[4]{1+x}+1}{2-2\sqrt{1-x}-x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{x}$.

31. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}$.

32. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}$.

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

34. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

35. $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{2x}$.

36. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x\right)$.

37. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\pi - \operatorname{arc\,ctg} x)$.

38. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 4\pi x}$.

39. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{\arcsin^3 x}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos 2\pi x + \cos \pi x}{\ln(x^2 - 2x + 2)}$.

41. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

42. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

43. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$.

44. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin 2x - \cos 2x + 1}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + x\sin x - \cos 2x}{\operatorname{arc\,tg} \sin^2 x}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 \alpha x - \sin^2 \beta x}{\operatorname{arc\,tg}^2 x + x^3}$.

47. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 3x - \sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \ln(1 + 7x)}$.

48. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x - x^3) + \arcsin 2x - 3x^3}{\sin 3x + \operatorname{tg}^2 x + (e^x - 1)^{10}}$.

49. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx - n}{\sin x^2}$.

50. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{\sqrt{1+2x} - 1}$.

51. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \ldots + \operatorname{tg} nx}{\operatorname{arc\,tg} x}$.

52. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} + \sqrt[3]{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x} - \sqrt{1+6x}}{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1+2x}}$.

53. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}^2 x}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$.

54. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$.

55. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$.

56. $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{e^{\sin x} - e^{\sin 2x}}{\sqrt[3]{\pi x^2} - \pi}$.

57. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{1 - \cos \pi x}$.

58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{\cos\dfrac{\pi+x}{2}}$.

59. $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{(a^x-a)^3}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{2x-2}}$.

60. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\ln\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{\pi}}$.

61. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln\cos\pi x}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$.

62.

а) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt[4]{4x^4+1}}{x}$.

63. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

64. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[5]{x^5+2}}{x}$.

65. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

66. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$.

67. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+xe^2}$.

68. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln\left(x^2+\cos\dfrac{\pi x}{2}\right)}{\sqrt{x}-1}$.

69. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(1+xe^x)}$.

70. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos 4x}{x^2+\sqrt[3]{1-x^2}-1}$.

71. $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

72. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-x)}{\ln(x^4+x^2-x)}$.

73. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\sin^2 ax}{\ln\sin^2 bx}$.

74. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^2-4x+4)}{\ln(x^{10}+5x^7+2)}$.

75. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{\sqrt[3]{bx^2}-b}$ $(a>0)$.

76. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha^x-\beta^x}{x}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$.

77. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{x^2}-16}{\ln(x^2-x-1)}$.

78. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{\ln\cos 2x}$ $(a>0,$ $b>0)$.

79. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[21]{1+\sin 3x}-1+\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$.

80. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln\ln x}{2x-2e}$.

81. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^\alpha-x^\beta}{\sqrt[5]{x}-1}$.

82. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}\quad (a>0).$

83. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}.$

84. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x^{\alpha}}{\sin 2\pi x^{\beta}}\quad (\beta\neq 0).$

85. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a^{\sin x}+b^{\sin x}}{2}\right]^{\frac{1}{x}}\quad (a>0,\ b>0).$

86. $\lim\limits_{x\to \beta}\left(\dfrac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}\right)^{\frac{1}{x-\beta}}\quad (\alpha\neq k\pi,\ \beta\neq n\pi,\ k\in Z,\ n\in Z).$

87. $\lim\limits_{x\to \alpha}\left(2-\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{\alpha}}.$

88. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x+\sin x)^{\operatorname{ctg} x}.$

89. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\ln\cos x}}.$

90. $\lim\limits_{x\to 1}[\ln(e^x+x-1)]^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}.$

91. $\lim\limits_{x\to 0}[\ln(x^2+e^{x+1})]^{\operatorname{ctg} x}.$

92. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\alpha_1^x+\alpha_2^x+\ldots+\alpha_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{\sin x}}\quad (\alpha_i>0).$

93. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{\operatorname{arc\,tg}^2 x}.$

94. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$

95. $\lim\limits_{x\to \infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\sqrt[5]{\dfrac{x^3+2x}{1+x^3}}\right).$

96. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x\cdot 2^x+1}{x\cdot 3^x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$

97. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+\sin^2\pi x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

98. $\lim\limits_{x\to 1}(\cos 2\pi x)^{\frac{1}{\ln(x^2-2x+2)}}.$

99. $\lim\limits_{x\to 1}(3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x})^{\frac{1}{\ln x}}.$

100. $\lim\limits_{x\to 0+}[\ln(x+e^x)]^{\frac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}}.$

101. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\dfrac{\ln(10+e^x)}{x}\right]^{\sqrt{e^{2x}+10}}.$

102. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x+3}-2}}.$

103. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$

104. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^{\frac{1}{(\sqrt{\pi x}-\pi)^2}}.$

105. $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{-x})^{\operatorname{ctg} x}.$

106. $\lim\limits_{x\to 1}(4^x-\sqrt{x+8})^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}.$

107. $\lim\limits_{x\to 0}(3^x+x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

108. $\lim\limits_{x\to 0}[\cos(\sin x)]^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$.

109. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$.

110. $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\sqrt{e^{x^2}-1}}{\arcsin x}$.

111. $\lim\limits_{x\to \pi+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

112. $\lim\limits_{x\to \pi-}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{x-\pi}$.

113. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}-1}\right)$.

114. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

115. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

116. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}\right)^x$.

117. $\lim\limits_{x\to 0}|\operatorname{th} x|^{\operatorname{sh} 2x}$.

118. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin 2x}-1}{x^3}$.

119. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\operatorname{th} x)^{\operatorname{sh} 2x}$.

120. $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{\arccos x}{\sqrt{-\ln x}}$.

121. $\lim\limits_{x\to 1-}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\frac{1}{\arccos^2 x}}$.

Найти следующие пределы:

122. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

123. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}\quad (a>1)$.

124. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[2+(-1)^n]^n}{3^n\ln n}$.

125. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right)$.

126. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

127. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$.

128. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+3n-1}}{\ln(1+n)-\ln(2+n)}$.

129. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right)$.

130. $\lim\limits_{n\to\infty} n\arccos\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

131. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$.

132. $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\cos\pi(\sqrt{4n^2+10})$.

133. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg} nx\right)^{\operatorname{ctg}\pi\sqrt{n^2+1}}$ $(x>0)$.

134. Доказать сходимость и найти пределы следующих последовательностей:

а) $a_n=\sin(\sin(\sin\ldots\sin x))\ldots)$ (n скобок);

б) $a_n=x_{n+1}-x_n$, где $0<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots$ и $x_n=\operatorname{tg} x_n$;

в) $a_{n+1}=\frac{a_n+A}{4}$, $a_1=0$;

г) $a_{n+1}=\operatorname{arc\,tg} a_n$, $a_1=25$;

д) $a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2a_n+\frac{M}{a_n^2}\right)$, $a_1=M>0$;

е) $3,\ 3+\frac{1}{3},\ 3+\cfrac{3}{3+\cfrac{1}{3}},\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}},\ \ldots$.

135. Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$ последовательностей:

а) $a_n=((-1)^n+1)\cdot 2^n$; б) $a_n=n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;

в) $a_n=(n+1):(n+1+n\cdot(-1)^n)$;

г) $a_n=\left(1+\sin\frac{\pi n}{4}\right)\left(1-\cos\frac{\pi n}{6}\right)$.

136. Найти $\varliminf\limits_{x\to 0} f(x)$ и $\varlimsup\limits_{x\to 0} f(x)$ следующих функций:

а) $f(x)=\frac{\operatorname{sign} x}{x^2+1}$; б) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+1)$;

в) $f(x)=(\sin\pi x)\cos\frac{\pi}{x}$.

137. Найти $\varlimsup\limits_{x\to 2} f(x)$ и $\varliminf\limits_{x\to 2} f(x)$ функции $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x-2}\cdot\sin\frac{\pi}{x-2}$.

138. Проверить следующие формулы $(x\to 0)$:

а) $(1+x)^x=1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5}{6}x^4+o(x^4)$;

б) $\ln\left(1+x^3+\frac{x^6}{2}\right)=x^3-\frac{x^9}{6}+\frac{x^{12}}{8}+o(x^{12})$;

в) $\operatorname{ch}(\sin x)=1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

г) $\cos(\operatorname{sh} x)=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)$;

д) $(\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{12} + \frac{37}{1440} x^4 + o(x^4)\right]$;

е) $\sin(\operatorname{tg} x) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{40} x^5 + o(x^5)$;

ж) $\operatorname{tg}(\operatorname{th} x) = x - \frac{x^5}{15} + o(x^5)$.

139. При $x \to 0$ найти главные части вида Cx^n для следующих функций:

а) $(\cos x)^{2\sin x} - e^{-x^2}$;

б) $e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

в) $(1+x)^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12}} - e$;

г) $\operatorname{tg}(\sin x) - \operatorname{sh} x$;

д) $(\cos x^4 - 1) \operatorname{arctg} x^2 \cdot 2x^2 e^{\sin x}$;

е) $\sin x^3 - \ln\left(1 + x^3 + \frac{x^6}{2}\right)$;

ж) $[\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{tg} x] \arcsin x^2$;

з) $\sqrt[3]{\cos(x\sqrt{6})} - 1 - \ln(1 - x^2)$;

и) $\sqrt[3]{\cos\left(3xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)} - \cos(\sqrt{3}\,x)$;

к) $\left[\operatorname{sh}\left(\operatorname{sh} x - \operatorname{tg} x + \frac{1}{6} x^3\right)\right] \cdot \operatorname{tg} x^2$.

л) $e^{[\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)]} - \sqrt[5]{1 + \sin x}$.

Вычислить пределы, используя формулу Тейлора:

140. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sqrt[3]{\cos x} - \sin x}{x^5}$.

141. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - \operatorname{th} x}{x^5}$.

142. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[4]{e^{-x^2}}}{x^4}$.

143. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x^2 + \sqrt[6]{1 + 3x^4} - 1}{x^8}$.

144. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2 + \frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg} x^4}$.

145. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2 - \frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg} x^4}$.

146. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1 + x^2)^{\frac{1}{x} + 5} - e^x}{\ln\cos x}$.

147. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - \sqrt{\frac{x+3}{3-x}}}{x^3}$.

148. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x\sqrt[3]{1 + x^2}}{x^5}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{18\sqrt[3]{\sin x^3} - 18x + x^7}{x^{13}}$.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x)^{\sin x}-\sqrt{1-x^3}}{x^6}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos^2 x+x^2\sqrt[6]{1+x^2-x^4}}{x^6}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{x^4}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\sin x)-\operatorname{sh}x}{(\sqrt[5]{\cos x}-1)^2\operatorname{arctg}x^2}$.

154. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x-e^{-x^2}\operatorname{ch}x+\cos x}{x^6}$.

155. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sqrt{1+x}-\sin^3 x-\dfrac{x^3}{2}\operatorname{tg}x}{\ln(1+x^2)(\sqrt[3]{1+2x^3}-1)}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3\sin x}-e^{-x^2}-\operatorname{sh}x}{\arcsin x^3}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x\sqrt[3]{1+3x+6x^2}}{\arcsin 2x\cdot\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{sh}3x}$.

158. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\left(\sqrt{1-x+\dfrac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)}{x^3}$.

159. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(xe^{\frac{x^2}{6}}\right)-x\cos x^2}{x^2\cdot\ln(1+x^3)}$.

160. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{\sin x}{x}+e^{\frac{x^2}{6}}-1}{\ln\cos x+\sqrt{1+x^2}-1}$.

161. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{-x^2}{2}}-\sqrt[4]{\cos 2x}\cdot\operatorname{ch}x^3}{\ln^2(\cos 2x)}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cdot\cos x-\operatorname{ch}x}{x^5+x^3\sin^3 x}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}\cos x-\operatorname{ch}x+x^5}{x^6+x^2\sin^3 x}$.

164. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x-\sin(x+x^3)}$.

165. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right]^2}{\ln(x+\cos x)-x}$.

166. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x+e^{\frac{x^2}{2}}-1}{(\sqrt[3]{1+3x}-\sqrt{1+2x})\operatorname{tg}^2(\sin x)}$.

167. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-x^2}-\cos x\ln(1+x)-\dfrac{x^2}{2}}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

168. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2e^{-x}-x^3}{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}$.

169. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sin x)-x+\dfrac{x^3}{3}}{\operatorname{sh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{tg}x}$.

170. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x+x^2-x^3+x^4)-\ln(1-x+x^2)+x^3\cos x-\dfrac{x^5}{2}\sqrt[3]{1+3x}}{x^7}$.

171. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^4\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{8x^9+12x^8+14x^7+15x^6+16x^5}\right)$.

172. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-e^{-2x^2-\frac{4}{3}x^4}}{\operatorname{tg}(3x^2)-3\operatorname{th}x^2}$.

173. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[4]{\cos 4x}-\cos(2xe^{x^2})}{(\sin 2x-2\operatorname{tg}x)^2}$.

174. Найти наклонную асимптоту для графика функции:

а) $y=\sqrt{x^2+2x+3}-x$;

б) $y=(2x+3)e^{\frac{1}{x}}$;

в) $y=\sqrt{x^4+x^3}-x^2$;

г) $y=x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

д) $y=x\cos\dfrac{1}{x}$;

е) $y=\ln(1+e^{2x})$;

ж) $y=\dfrac{x^2+\sin x}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

Ответы

5. а) $\dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}$; б) $x^{\frac{1}{2}}$; в) $2^a x^a$; г) x; д) πx^2; е) x^2; ж) $x^2\ln 4$; з) $2x$; и) $\dfrac{1}{2x}$; к) $\dfrac{4}{x}$. 6. а) $\dfrac{mn(m-n)}{2}x^2$; б) $-2x^2$; в) $x^{\frac{1}{8}}$; г) $\left(\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}\right)x$; д) $-\dfrac{\pi^2}{2}x^2$; е) $x\ln\dfrac{a}{b}$; ж) ax; з) $-7x^2$; и) $x\ln 4$; к) $\dfrac{1}{\pi x}$.

7. а) $-10(1-x)$; б) $-\frac{n(n+1)}{2}(1-x)$; в) $-8\pi(1-x)^3$; г) $\sqrt{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}$;

д) $-(1-x)$; е) $-\frac{\pi^2}{8}(1-x)^2$; ж) $6\ln\frac{3}{2}(1-x)$; з) $\frac{2}{\pi}\sqrt[3]{7}(1-x)^{-\frac{4}{3}}$;

и) $-\frac{2}{\pi}(1-x)^{-1}$; к) $2(a-b)^{\frac{1}{5}}(1-x)^{-4/5}$. 8. а) $\frac{a}{4n^2}$; б) $-\frac{4\pi}{n^2}$;

в) $\frac{(-1)^k}{2n}\pi k$; г) $\frac{1}{n}\ln\frac{a}{\sqrt{bc}}$; д) $\frac{\pi}{n}$; е) $\frac{\pi}{2n}$; ж) $\frac{1}{n^{3/2}}$; з) $\frac{\ln 2}{n^2}$;

и) $\frac{1}{\sqrt{2n}}$; к) $\ln 3\left(\frac{1}{n}\right)^{-1}$. 11. -1. 12. 5. 13. 1. 14. 0. 15. ∞. 16. $\frac{3}{2}$.

17. $\frac{4}{27}$. 18. 0. 19. $+\infty$. 20. $-\frac{5}{2}$. 21. 1. 22. $+\infty$. 23. $+\infty$.

24. $-\frac{1}{2}$. 25. 3. 26. -3. 27. $\frac{2}{3}$. 28. $\frac{10}{3}$. 29. а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$. [Указание: $x=t^{12}-1$. 30. π. 31. 1. 32. 0. 33. $\frac{1}{2}$. 34. $\frac{\pi}{8}$. 35. 0. 36. 1.

37. -1. 38. $-\frac{1}{4}$. 39. -1. 40. $-\frac{3\pi^2}{2}$. 41. 1. 42. -1. 43. $-\frac{1}{4}$.

44. $-\frac{1}{2}$. 45. 3. 46. $\alpha^2-\beta^2$. 47. $\frac{3}{7}$. 48. 1. 49. $-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$.

50. $\frac{n(n+1)}{2}$. 51. $\frac{n(n+1)}{2}$. 52. $\frac{40}{3}$. 53. 4. 54. $-\frac{3}{2}$. 55. π. 56. $-\frac{9}{2}$.

57. $-\frac{1}{\pi^2}$. 58. 0. 59. 0. 60. 0. 61. $-2\sqrt{2}\pi^2$. 62. а) $1-\sqrt[4]{4}$;

б) $\sqrt[4]{4}-1$. 63. -2. 64. 0. 65. $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 66. $-\infty$. 67. ∞. 68. $4-\pi$. 69. 1.

70. -12. 71. 1. 72. $\frac{3}{5}$. 73. 1. 74. $\frac{1}{5}$. 75. $\frac{3a^b\ln a}{2}$. 76. $\ln\frac{\alpha}{\beta}$. 77. $\frac{64}{3}\ln 2$.

78. $-\frac{1}{2}\ln\frac{a}{b}$. 79. $\frac{8}{7}$. 80. $\frac{1}{2e}$. 81. $5(\alpha-\beta)$. 82. $a^a\ln\frac{a}{e}$. 83. 1.

84. $-\frac{\alpha}{2\beta}$. 85. $\sqrt{ab}$. 86. $e^{\alpha\operatorname{ctg}\alpha\beta}$. 87. $e^{-\frac{1}{\pi}}$. 88. $2e$. 89. e^{-2}.

90. $e^{3\left(1+\frac{1}{e}\right)}$. 91. e. 92. $\sqrt[n]{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n}$. 93. $\frac{\beta^2-\alpha^2}{m}$. 94. e^2. 95. $\frac{9}{10}$.

96. $\left(\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{e}\right)^{-\frac{2}{3\pi}}$. 97. e^2. 98. $e^{-2\pi^2}$. 99. 1. 100. 0. 101. 1. 102. $e^{2\pi}$.

103. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 104. e^{16}. 105. e. 106. $e^{-\frac{2}{\pi}\left(4\ln 4-\frac{1}{6}\right)}$. 107. $3e$. 108. $e^{-\frac{1}{2}}$.

109. 1. 110. -1. 111. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 112. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 113. $-\frac{1}{2}$. 114. $\frac{1}{2}$.

115. $e^{\frac{1}{2}}$. 116. e^2. 117. 1. 118. -1. 119. e^{-1}. 120. $\sqrt{2}$. 121. $e^{-\frac{\pi}{4}}$. 122. 1. 123. 0. 124. 0. 125. $\frac{1}{12}$. 126. $\frac{1}{4}$. 127. 0. 128. -2. 129. 0. 130. $\sqrt{2}$. 131. $\ln a$. 132. -1. 133. $e^{-\frac{2}{\pi x}}$. 134. а) 0; б) π; в) $\frac{A}{3}$; г) 0; д) $\sqrt[3]{M}$; е) $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. 135. а) 0, $+\infty$; б) -1; 1; в) $\frac{1}{2}$; $+\infty$; г) 0; 4. 136. а) 1; -1; б) $+\infty$; 0; в) 0; 0. 137. $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$. 139. а) $-\frac{1}{40}x^7$; б) $\frac{ex}{2}$; в) $-\frac{1}{24}x^3$; г) $-\frac{1}{30}x^5$; д) $-x^{12}$; е) $-\frac{1}{8}x^{12}$; ж) $-\frac{1}{30}x^7$; з) $-\frac{13}{30}x^6$; и) $-\frac{21}{20}x^6$; к) $-\frac{1}{8}x^7$; л) $-\frac{1}{6}x^7$. 140. $-\frac{1}{45}$. 141. $-\frac{1}{30}$. 142. $-\frac{1}{24}$. 143. $-\frac{17}{24}$. 144. $-\frac{8}{3}$. 145. 0. 146. -10. 147. $-\frac{1}{81}$. 148. $\frac{11}{45}$. 149. $-\frac{1}{180}$. 150. $\frac{1}{4}$. 151. $-\frac{101}{360}$. 152. $-\frac{1}{6}$. 153. $-\frac{10}{3}$. 154. $-\frac{4}{45}$. 155. $\frac{9}{16}$. 156. $\frac{4}{3}$. 157. $\frac{1}{2}$. 158. $-\frac{1}{2}e$. 159. $\frac{79}{180}$. 160. $-\frac{1}{25}$. 161. $\frac{1}{12}$. 162. 0. 163. 1. 164. $-\frac{3}{5}$. 165. $-\frac{e^2}{4}$. 166. $-\frac{1}{12}$. 167. $-\frac{2}{3}$. 168. $-\frac{5}{2}$. 169. -3. 170. $\frac{13}{24}$. 171. 0. 172. $-\frac{32}{225}$. 173. -3. 174. а) $y=1$ при $x\to+\infty$; $y=-2x-1$ при $x\to-\infty$; б) $y=2x+5$; в) $y=\frac{x}{2}-\frac{1}{8}$; г) $y=x$; д) $y=x$; е) $y=2x$ при $x\to+\infty$; $y=0$ при $x\to-\infty$; ж) $y=\frac{x}{2}$ при $x\to+\infty$.

Глава III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $f:(a, b)\to R$ определена на интервале $(a, b)\subset R$ и $x_0\in(a, b)$.

Определение. Число $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется *производной функции f в точке* x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*. Функция, имеющая производную в данной точке, называется дифференцируемой в этой точке. Необходимым условием дифференцируемости в точке является непрерывность функции в данной точке.

Если функция f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то на этом интервале определяется функция f', значение которой в точке $x \in (a, b)$ равно *производной* $f'(x)$ *функции* f в этой точке.

Формулы дифференцирования основных элементарных функций:

1. $(1)' = 0.$
2. $(x^{a})' = ax^{a-1}.$
3. $(a^{x})' = a^{x} \ln a$ (в частности, $(e^{x})' = e^{x}$).
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\left(\text{в частности, } (\ln x)' = \dfrac{1}{x}\right).$
5. $(\sin x)' = \cos x.$
6. $(\cos x)' = -\sin x.$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
16. $(\operatorname{cth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Заметим, что все эти формулы справедливы для точек, являющихся внутренними точками промежутка, на котором зависимость f от x задана соответствующей функцией, если в этой точке аналитическое выражение $f'(x)$ имеет смысл.

Основные правила дифференцирования

Если f и g функции, дифференцируемые в точке x_0, α и β постоянные, то в этой точке

1) $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$;

2) $(fg)' = f'g + g'f$;

3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - g'f}{g^2}$ $(g(x_0) \neq 0)$;

4) если $h(x)$ дифференцируема в точке x_0, а $f(h)$ дифференцируема в точке $h_0=h(x_0)$, то в точке x_0

$$f_x'=f_h'\cdot h_x',$$

индекс h в выражении f_h' показывает, что производная берется по аргументу h, т. е.

$$f_h'=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{f(h_0+\Delta h)-f(h_0)}{\Delta h}.$$

Для дифференцирования степенно-показательной функции $[u(x)]^{v(x)}(u(x)>0)$, где $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, пользуются тождеством $[u(x)]^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

Степенная функция $y=x^\alpha$ при $0<\alpha<1$ определена, но не дифференцируема при $x=0$; и именно при $x=0$ аналитическое выражение ее производной теряет смысл. Точно так же аналитическое выражение производной функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ теряет смысл, если $|x|\geqslant 1$, т. е. именно при тех значениях аргумента, при которых соответствующие функции либо не определены, либо не дифференцируемы. Все остальные основные элементарные функции дифференцируемы во всех точках множества определения, и аналитические выражения их производных имеют смысл во всех точках соответствующего множества. Поэтому любая элементарная функция f дифференцируема во всякой точке, в которой аналитическое выражение ее производной имеет смысл. Если же аналитическое выражение производной (т. е. функция f') не определено для некоторого значения x_0 из множества определения f, то это говорит о том, что какая-то из основных элементарных функций, композицией которых является функция f, не дифференцируема при соответствующем значении аргумента; и, следовательно, вопрос о существовании и величине производной f в этой точке требует дополнительного исследования.

Пример. Пусть $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$, $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$. Формально применяя правила дифференцирования, получаем

$$f'=\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}+x\cdot\frac{2x\cos x^2\cdot(1-x)^2-2(1-x)\sin x^2}{2\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}}. \qquad (1)$$

Функция f' не определена только при $x=0$ и $x=1$. Поэтому для всех x из множества $\{(-\sqrt{3},\sqrt{3})\setminus\{0\}\setminus\{1\}\}$ производная существует и ее значение вычисляется по формуле (1). Вопрос о существовании и величине производной данной функции при $x=0$ и при $x=1$ решаем непосредственно исходя из определения производной в точке.

Рассмотрим отношение $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ при $x_0=0$ и $x_0=1$. Если $x_0=0$, то $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\sqrt{(1-h)^2\sin h^2}$, следовательно,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0=f'(0).$$

Если $x_0=1$, то $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=(1+h)\sqrt{\sin(1+h)^2}\cdot\frac{\sqrt{h^2}}{h}$. Эта функция не имеет предела при $h\to 0$.

Итак, функция $f(x)=x\sqrt{(1-x)^2\sin x^2}$ не дифференцируема при $x=1$, а при $x=0$ имеет производную, равную нулю.

Пример 2. Найдем производную функции

$$y=\frac{4x^2-2x+10}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Имеем

$$y=4x^{3/2}-2x^{1/2}+10x^{-1/2},$$

$$y'=4\cdot\frac{3}{2}x^{1/2}-2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}+10\cdot(-1/2)x^{-3/2}=$$

$$=\frac{6x^2-x-5}{x\sqrt{x}},\ x>0.$$

Пример 3. Найдем производную функции $y=x(\cos x-4\sin x)$.

Решение. Имеем

$$y'=(\cos x-4\sin x)+x(-\sin x-4\cos x)=$$

$$=(1-4x)\cos x-(4+x)\sin x,\ x\in R.$$

Пример 4. Найдем производную функции $y=\frac{\arcsin x}{1-x^2}$.

Решение. Получаем

$$y'=\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)-(-2x)\arcsin x}{(1-x^2)^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}+2x\arcsin x}{(1-x^2)^2},\quad |x|<1.$$

Пример 5. Найдем производную функции $y=\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}$, $|x|<\frac{\pi}{8}$.

Решение. Запишем $y(x)$ в виде цепочки суперпозиций основных элементарных функций: $y=h^{1/2}$; $h=t^3+2$; $t=\operatorname{tg} z$; $z=2x$.

Следовательно,

$$y'_x=y'_h\cdot h'_x=y'_h\cdot h'_t\cdot t'_x=y'_h\cdot h'_t\cdot t'_z\cdot z'_x=$$

$$=\frac{1}{2}h^{-1/2}\cdot 3t^2\cdot\frac{1}{\cos^2 z}\cdot 2=\frac{1}{2}\cdot(\operatorname{tg}^3 2x+2)^{-1/2}\cdot 3\operatorname{tg}^2 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2,$$

т. е.

$$y'_x=\frac{3\operatorname{tg}^2 2x}{\sqrt{\operatorname{tg}^3 2x+2}\cdot\cos^2 2x}.$$

Пример 6. Найдем производную функции

$$y=\ln^3 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}.$$

Решение. Получаем

$$y'=3\ln^2 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}} \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}} \cdot 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{x^3}} \times$$

$$\times \frac{1}{1+\frac{1}{x^3}} \cdot \left(-\frac{3}{2} x^{-5/2}\right) = -\frac{9 \ln^2 \operatorname{arctg}^2 \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{x^3}}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}, \quad x>0.$$

Пример 7. Найдем производную функции $y=x^x$, $x>0$.
Решение. Имеем $y=e^{x\ln x}$,

$$y'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=e^{x\ln x}\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right)=$$

$$=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

Числа

$$\lim_{\Delta x\to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_+(x_0) \text{ и } \lim_{\Delta x\to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'_-(x_0)$$

называются соответственно левой и правой производной функции f в точке x_0. Условие $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ эквивалентно дифференцируемости функции f в точке x_0, при этом $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

Пример 8. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции

$$f(x)=\sqrt{1-e^{-x^2}}.$$

Решение. Имеем

$$f'(x)=\frac{-e^{-x^2}\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-e^{-x^2}}}=\frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}.$$

Функция f' определена для всех $x\neq 0$. Если $x\to 0$, то

$$\sqrt{1-e^{-x^2}}\backsim\sqrt{x^2},$$

следовательно,

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=1$$

и

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1.$$

Итак, $f'_+(x)=f'_-(x)=\dfrac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$, $x\neq 0$, $f'_+(0)=1$; $f'_-(0)=-1$.

Так как $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, то в точке $x=0$ рассматриваемая непрерывная функция не дифференцируема.

Пример 9. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции $f(x)=x\sqrt{\ln(1+x^2)}$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\sqrt{\ln(1+x^2)}+\frac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}.$$

Функция $f'(x)$ определена для всех $x\neq 0$. Для $x=0$ находим

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim_{x\to 0+}\sqrt{\ln(1+x^2)}=0$$

и

$$f'_-(0)=0.$$

Так как $f'_+(0)=f'_-(0)=0$, то $f'(0)=0$.

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\begin{cases}\sqrt{\ln(1+x^2)}+\dfrac{x^2}{\sqrt{\ln(1+x^2)}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Пример 10. Найдем $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция f непрерывна на всей числовой оси (почему?). Если $x\neq 0$, то

$$f'_+(x)=f'_-(x)=f'(x)=\sin\frac{1}{x}-x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}=$$
$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}.$$

Найти производную $f'(0)$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования, нельзя, так как точка 0 не лежит внутри интервала, на котором зависимость f от x задана элементарной функцией. Так как $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$ и функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела как при $x\to 0+$, так и при $x\to 0-$, то функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной.

На практике удобно пользоваться следующим свойством: если функция f непрерывна в точке a, производная f' существует в некоторой правой (левой) полуокрестности a и существует $\lim\limits_{x\to a+} f'(x)$

($\lim\limits_{x\to a-} f'(x)$), то этот предел равен $f'_+(a)$ ($f'_-(a)$). Обратим внимание, что условие непрерывности функции f в этом утверждении существенно. В самом деле,

пусть

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$-\pi/2 = \lim_{x\to 0-} f(x) < f(0) < \lim_{x\to 0+} f(x) = \pi/2,$$

т. е. функция f в точке $x=0$ не является непрерывной ни справа, ни слева, откуда видно, что функция f не имеет в точке $x=0$ ни левой, ни правой производной. В то же время для $x\neq 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$

и существуют оба предела

$$\lim_{x\to 0-} f'(x) = -1, \ \lim_{x\to 0+} f'(x) = -1.$$

Пример 11. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 0, \\ x^2 + x, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Для $x>0$ имеем $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, для $x<0$ $f'(x) = 2x+1$, следовательно,

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x^2} = 1, \ f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} (2x+1) = 1.$$

Итак, функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой прямой и

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x > 0; \\ 1, & x = 0; \\ 2x+1, & x < 0. \end{cases}$$

Пример 12. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} (x-4)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-4}, & x \neq 4; \\ 0, & x = 4. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Если $x \neq 4$, то

$$f'(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} + \frac{x-4}{1+(x-4)^2},$$

откуда получаем

$$f'_+(4) = \lim_{x \to 4+} f'(x) = \frac{\pi}{2},$$

$$f'_-(4) = \lim_{x \to 4-} f'(x) = - \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-4} + \frac{x-4}{1+(x-4)^2}, \quad x \neq 4,$$

так как

$f'_-(4) = -\frac{\pi}{2}$, $f'_+(4) = \frac{\pi}{2}$, то в точке $x = 4$

функция $f(x)$ не дифференцируема.

Пример 13. Найдем производную функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Имеем $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$, если $x \neq 0$. Значение $f'(0)$ вычислим по определению:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Итак, функция f дифференцируема на всей числовой прямой, и

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что пределы $\lim\limits_{x \to 0+} f'(x)$ и $\lim\limits_{x \to 0-} f'(x)$ не существуют.

Пример 14. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \geqslant a; \\ h(x), & x < a. \end{cases}$$

Какому условию должны удовлетворять непрерывные функции g и h, чтобы функция f была дифференцируемой на всей числовой прямой?

Решение. Так как $f(x)=g(x)$ для $x>a$ и $f(x)=h(x)$ для $x<a$, то условие дифференцируемости g для $x>a$ и h для $x<a$ необходимо и достаточно для дифференцируемости f на множестве $\{x<a\}\cup\{x>a\}$. Для дифференцируемости f в точке a прежде всего необходимо условие непрерывности $h(a)=\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, т. е. $\lim\limits_{x\to a-} h(x)=g(a)$.

Если $\Delta x>0$, то $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x}$; если $\Delta x<0$, то $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}$. Таким образом, для дифференцируемости f в точке a необходимо и достаточно, чтобы $g(a)=h(a)$ и $g'_+(a)=h'_-(a)$, поскольку

$$f'_+(a)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(a+\Delta x)-g(a)}{\Delta x} \text{ и } f'_-(a)=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{h(a+\Delta x)-h(a)}{\Delta x}.$$

Пример 15. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0,\\ x^2+ax+b, & x>0.\end{cases}$$

Найдем такие значения a и b, чтобы f была дифференцируемой на всей числовой прямой.

Решение. Заметим, что так как f должна быть непрерывна в точке 0, то $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$, т. е.

$$\lim_{x\to 0+}(x^2+ax+b)=b=e^0=1, \text{ откуда } b=1.$$

Далее, $f'_+(0)=(x^2+ax+b)'|_{x=0}=a$ и $f'_-(0)=(e^x)'|_{x=0}=1$, следовательно, $f'(0)$ существует, если $a=1$ и $b=1$. При этих значениях a и b функция f дифференцируема на всей прямой.

Перейдем теперь ко второй производной и производной n-го порядка.

Производная функции $f'(x)$ называется *второй производной функции* f и обозначается f''. Далее определение идет по индукции: *производная n-го порядка* (n-я производная) — f^n — есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$.

Пример 16. Покажем, что n-я производная функции $y=\sin x$ есть $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right)$.

Решение. Имеем $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Если $y^{(n-1)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$, то

$$y^{(n)}(x)=(y^{(n-1)}(x))'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}(n-1)\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}n\right).$$

Согласно принципу математической индукции формула доказана.

Справедливы следующие формулы:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \, (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi}{2} n\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\, x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Для нахождения n-й производной функции f в некоторых случаях полезно функцию предварительно преобразовать, например, рациональную функцию разложить в сумму простейших дробей, понизить степень тригонометрической функции с помощью кратных углов, перейти к комплексным переменным и т. д. Так, например, при нахождении n-й производной от функций

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y = \sin^4 x, \quad y = \ln \frac{1+x}{3x+1}, \quad y = \sin 2x \cos^2 3x, \quad y = e^x \cos x$$

$$y = e^x \cos x$$

представим их соответственно в виде

$$y = \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right); \quad y = \sin^4 x =$$

$$= \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3);$$

$$y = \ln \frac{1+x}{3x+1} = \ln|1+x| - \ln|3x+1|; \quad y = \sin 2x \cdot \cos^2 3x =$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 8x - \sin 4x) + \frac{1}{2}\sin 2x; \quad y = e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{x(1+i)}.$$

При нахождении производных высших порядков от произведения двух функций полезно пользоваться *формулой Лейбница:*

если каждая из функций $u = f(x)$ и $v = g(x)$ имеет в точке x_0 производную n-го порядка, то их произведение $u \cdot v$ также имеет n-ю производную в точке x_0, причем

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)},$$

здесь

$$u^{(0)} \equiv u(x), \quad v^{(0)} \equiv v(x), \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Пример 17. Найдем $y^{(10)}$, если $y(x)=(x^3+4x^2+2)e^{2x}$.

Решение. Обозначим $u(x)=x^3+4x^2+2$, $v(x)=e^{2x}$, тогда, применяя формулу Лейбница, имеем

$$[(x^3+4x^2+2)e^{2x}]^{(10)}=C_{10}^0\cdot(x^3+4x^2+2)^{(0)}\cdot(e^{2x})^{(10)}+$$

$$+C_{10}^1\cdot(x^3+4x^2+2)^{(1)}\cdot(e^{2x})^{(9)}+C_{10}^2\cdot(x^3+4x^2+2)^{(2)}\cdot(e^{2x})^{8}+$$

$$+C_{10}^3\cdot(x^3+4x^2+2)^{(3)}\cdot(e^{2x})^{(7)}=2^{10}\cdot e^{2x}\cdot(x^3+4x^2+2)+$$

$$+2^9\cdot 10\cdot(3x^2+8x)e^{2x}+2^8\cdot 45\cdot(6x+8)e^{2x}+2^7\cdot 120\cdot 6\cdot e^{2x}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что все производные порядка более трех от функции $y=x^3+4x^2+2$ равны нулю.

Поясним теперь, как находятся производные функций, заданных параметрически.

Пусть функция $y(x)$ задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$. Если в некотором промежутке $(\alpha,\beta)\subset T$ функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t)\neq 0$, то в промежутке (α,β) функция $y(x)$ однозначно определена, дифференцируема и $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Производная y_x' связана с аргументом x так же, как и исходная функция y через параметр $t: y_x'=\varphi(t)$, $x=x(t)$. Поэтому при выполнении соответствующих условий вторая производная y по x равна $y''_{x^2}=(y'_x)'_x=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{y''_{t^2}x'_t-x''_{t^2}y'_t}{(x'_t)^3}$ и т. д.

Пример 18. Найдем y'_x, y''_{x^2} и y'''_{x^3} для функции $y(x)$, заданной параметрически:

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t).$$

Решение. Так как $x_t'=a(1-\cos t)$ неотрицательна для $t\neq 2\pi k$, $k\in Z$, то в соответствующих точках

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},\quad y''_{x^2}=\frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\dfrac{t}{2}}}{2a\sin^2\dfrac{t}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{4a\sin^4\dfrac{t}{2}};\quad y'''_{x^3}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}\cdot\sin^5\dfrac{t}{2}}=\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{4a^2\sin^7\dfrac{t}{2}}.$$

Рассмотрим теперь дифференцирование функции, заданной неявно, т. е. соотношением $F(x,y(x))=0$. Предположим, что такая функция определена и дифференцируема на некотором интервале (α,β). Тогда при формальном дифференцировании соотношения

$F(x, y(x))=0$ по переменной x получим линейное относительно y_x' уравнение, из которого находим выражение этой производной (условие существования и дифференцирования заданной таким образом функции $y(x)$ рассматривается в теории функций многих переменных).

Пример 19. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $x^3+y^3-y^5-x=0$.

Найдем $y_x'(1)$, если $y(1)=1$.

Решение. Заметим, что значения $x=1$ и $y=1$ удовлетворяют данному уравнению. Дифференцируя соотношение

$$x^3+y^3(x)+y^5(x)-x\equiv 0$$

по переменной x, получаем

$$3x^2+3y^2y_x'-5y^4y_x'-1=0.$$

При $x=1$ и $y=1$ имеем

$$3+3y_x'(1)-5y_x'(1)-1=0,$$

откуда $y_x'(1)=1$.

При соответствующих условиях функция $y(x)$ будет иметь и производные высших порядков, которые определяются уравнениями $(F(x, y(x)))''_{x^2}=0$, $(F(x, y(x)))'''_{x^3}=0$ и т. д.

Пример 20. Пусть функция $y(x)$ определяется из уравнения $\ln(x^2+y^2)=x-y$ и $x_0=y_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Найдем $y'(x_0)$ и $y''(x_0)$.

Решение. Дифференцируя соотношение $\ln(x^2+y^2(x))=x-y(x)$, имеем

$$\frac{2x+2y(x)\,y_x'(x)}{x^2+y^2(x)}-1+y'_x(x)=0,$$

или

$$2x+2y(x)y'(x)-(1-y'(x))(x^2+y^2(x))=0, \tag{2}$$

откуда следует, что $y'(x)=\frac{x^2+y^2(x)-2x}{x^2+y^2(x)+2y(x)}$, следовательно, $y'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Дифференцируя по x равенство $y'=\frac{x^2+y^2-2x}{x^2+y^2+2y}$, получим y''. Заметим, что в соотношение, определяющее y'', входит y', которое уже найдено. Технически проще вычислить y'', дифференцируя соотношение (2). В нашем случае имеем

$$2+2(y'(x))^2+2y(x)\,y''+y''(x^2+y^2(x))-$$
$$-(1-y'(x))(2x+2y(x)\,y'(x))=0.$$

Откуда

$$2+2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^2+\sqrt{2}\,y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-$$

$$-\left(1-\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)=0$$

и

$$y''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{-4}{(1+\sqrt{2})^3}.$$

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ И ИНВАРИАНТНОСТЬ ЕГО ФОРМЫ

Пусть f определена в некоторой окрестности точки x_0. Если приращение функции f имеет главную часть, линейную относительно приращения аргумента, т. е. если справедливо представление $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$, $\Delta x\to 0$, где $A\neq 0$, то эта главная часть $A\Delta x$ называется *дифференциалом* df *функции* f в точке x_0 и говорят, что f имеет в точке x_0 дифференциал. В случае $A=0$ дифференциал функции по определению считается равным нулю.

Для функции одного переменного существование производной в точке x_0 и существование дифференциала в точке x_0 эквивалентны. Поэтому термин «дифференцируемая в точке x_0 функция» означает одновременно существование и производной, и дифференциала y функции f в точке x_0. Если функция дифференцируема в точке x_0, то ее дифференциал в этой точке равен $f_x'(x_0)\Delta x$. В частности, для функции $y=x$ имеем $dy=\Delta x$, т. е. дифференциал независимого переменного x совпадает с приращением Δx. Поэтому дифференциал функции f записывается в форме $df=f_x'dx$, и производная f_x' может быть записана как отношение дифференциалов: $f_x'=\dfrac{df}{dx}$.

Основные правила вычисления дифференциалов функций те же, что и для вычисления производной.

Если функции f и g дифференцируемы в точке x_0, то в этой точке имеем

1. $d(\alpha f+\beta g)=\alpha df+\beta dg$ (α и β — постоянные);

2. $d(fg)=gdf+fdg$.

3. $d\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gdf-fdg}{g^2}\ (g(x_0)\neq 0)$.

Главным свойством дифференциала является инвариантность его формы относительно композиции функций, а именно если $y=y(x)$ и $x=x(t)$, то $dy=y_t'dt=y_x'\cdot dx$. Необходимо только иметь в виду, что если x — независимая переменная, то dx есть приращение Δx, а если $x=x(t)$, то dx есть главная часть приращения Δx, линейная относительно Δt.

Свойством инвариантности дифференциала широко пользуются при преобразовании выражений, содержащих производные.

Пример 1. Пусть дано выражение $(1-x^2)y_x'-xy\,(y=y(x))$. Положим $x=\sin t$, тогда, переходя в этом выражении к новой независимой переменной t и считая, что $y=y(t)$, имеем

$$y_x'=\frac{dy}{dx},\quad dx=\cos t\,dt,\quad y_t'=\frac{dy}{dt}.$$

Следовательно,

$$(1-x^2)\,y_x'-xy=\frac{(1-x^2)\,dy-xydx}{dx}=$$

$$=\frac{(1-\sin^2 t)\,y_t'\cdot dt-\sin t\cdot y\cdot\cos t dt}{\cos t\cdot dt}=\cos t\cdot y_t'-y\sin t.$$

В данном случае, вместо того чтобы использовать понятие дифференциала, можно было пользоваться только правилами дифференцирования сложной функции: $y_t'=y_x'\cdot x_t'$, откуда $y_x'=\dfrac{y_t'}{x_t'}$, но при более сложной замене переменной и функции использование дифференциалов дает более простой путь при вычислениях.

Пример 2. В выражении $(1+x^2)y''-y$, где $y=y(x)$, перейдем к функции $u(t)$, если $y=\dfrac{u}{\cos t}$, $x=\operatorname{tg} t$.

Имеем

$$y_x'=\frac{dy}{dx},\quad y_{x^2}''=(y_x')_x'=\frac{d(y_x')}{dx},\quad dx=\frac{dt}{\cos^2 t},$$

$$dy=\frac{\cos t\cdot du+u\sin t\cdot dt}{\cos^2 t};\quad y_x'=\frac{\cos t\cdot du+u\sin t\cdot dt}{\cos^2 t\cdot dt}\times$$

$$\times\cos^2 t=\cos t\cdot u_t'+u\sin t;\quad d(y_x')=-\sin t\cdot dt\cdot u_t'+$$

$$+\cos t\cdot d(u_t')+du\sin t+u\cos t\cdot dt=-\sin t\cdot u_t'dt+$$

$$+\cos t\cdot u_{t^2}''dt+\sin t u_t'\cdot dt+u\cos t\cdot dt;$$

$$y_{x^2}''=\frac{d(y_x')}{dx}=\frac{(-\sin t\cdot u_t'dt+\cos t\cdot u_{t^2}''dt+\sin t\cdot u_t'dt+u\cos t dt)\cos^2 t}{dt}=$$

$$=\cos^3 t\,(u_{t^2}''+u).$$

Подставляя выражения для y и y'' в исходное выражение, получаем

$$(1+\operatorname{tg}^2 t)\,(u_{t^2}''+u)\cos^3 t-\frac{u}{\cos t}=\frac{u''\cos^2 t-u\sin^2 t}{\cos t}.$$

Пример 3. В выражении $2y''+(x+y)(1-y')^3$, $y=y(x)$ перейдем к функции $v(u)$, если $x=u+v$, $y=v-u$.

Решение. Имеем $dx=du+dv=du(1+v_u')$;

$$dy=dv-du=(v_u'-1)\,du;\quad y_x'=\frac{dy}{dx}=\frac{v_u'-1}{v_u'+1};$$

$$dy_x'=\frac{d(v')(v'+1)-d(v')(v'-1)}{(v'+1)^2}=\frac{2dv'}{(v'+1)^2},$$

$$y_{x^2}''=\frac{d(y_x')}{dx}=\frac{2dv'}{(v'+1)^2\,du\,(1+v')}=\frac{2v_{u^2}''}{(1+v')^3}.$$

Подставляя выражения для x, y, y', y'' в исходное выражение, получаем

$$\frac{4v_{u^2}''}{(1+v_u')^3}+2v\left(1-\frac{v_u'-1}{v_u'+1}\right)^3=\frac{4v_{u^2}''+4v}{(1+v_u')^3}.$$

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Касательные и нормали к кривым

Пусть L — непрерывная кривая и точка M_0 лежит на L. Пусть l_M — полупрямая, выходящая из M_0 и проходящая через несовпадающую с M_0 точку M, лежащую на L. Рассмотрим множество полупрямых l_M, когда точки M лежат на L по одну сторону от M_0. Если существует полупрямая l_0, выходящая из точки M, такая, что угол между l_0 и l_M стремится к нулю, когда $M \to M_0$, то полупрямая l_0 называется *односторонней полукасательной* к L в точке M_0. Если в точке M_0 существуют односторонние полукасательные к L как с одной, так и с другой стороны и угол между ними равен π (т. е. эти две полупрямые сливаются в прямую), то эта прямая называется *касательной к кривой* L в точке M_0.

Если кривая L на плоскости является графиком непрерывной функции $y=y(x)$, то дифференцируемость y в точке x_0 эквивалентна существованию невертикальной касательной в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ кривой и уравнение $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$ является уравнением этой касательной.

Если функция y непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=$ $=+\infty$ (или $-\infty$), то в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ соответствующая кривая имеет вертикальную касательную, уравнение которой есть $x=$ $=x_0$. Локальное поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 29, *а* и *б*.

Если в точке x_0 непрерывная функция y не дифференцируема, однако существуют $y'_+(x_0)$ и $y'_-(x_0)$, то соответствующая кривая имеет в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ односторонние полукасательные: ле-

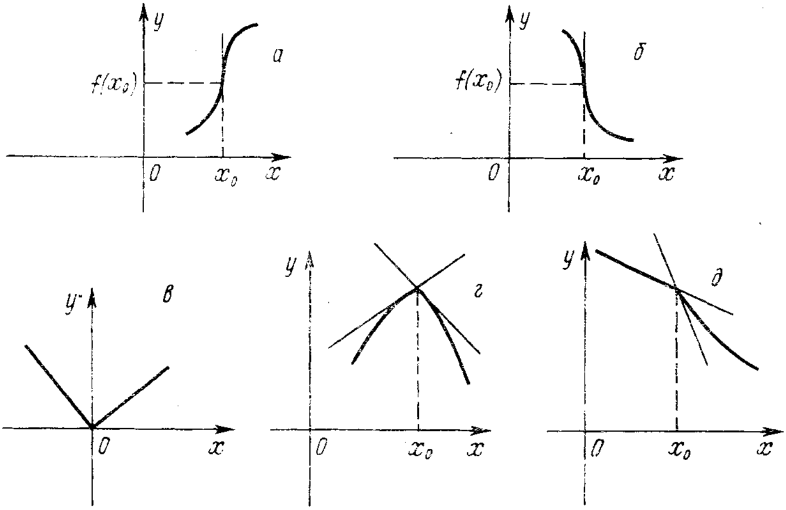

Рис. 29

вую — полупрямую $y-y_0=y'_-(x_0)(x-x_0)$, $x\leqslant x_0$ и правую — полупрямую $y-y_0=y'_+(x_0)(x-x_0)$, $x\geqslant x_0$. Тогда точка x_0 называется *точкой излома* или *угловой точкой кривой* (см. рис. 29 *в, г, д*).

Если функция y непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0-}\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=+\infty\right)$, то соответствующая кривая в точке $M_0(x_0, y(x_0))$ имеет левую и правую полукасательные, каждая из которых является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=x_0$, $y\geqslant y_0$ (вниз: $x=x_0$, $y\leqslant y_0$). Точка кривой, в которой односторонние полукасательные являются одинаково направленными полупрямыми, называется *точкой возврата*. Поведение кривой в окрестности такой точки показано на рис. 30, *а, б, в*. Отметим, что для графика непрерывной функции возможен только один из вариантов: а) или б).

Если две кривые имеют общую точку M_0 и в этой точке каждая из этих кривых имеет касательную, то углом между этими кривыми называется угол между их касательными в точке M_0. Для краткости в дальнейшем вместо слов «кривая, являющаяся графиком функции $y=y(x)$», говорим «кривая $y=y(x)$».

Пример 1. Напишем уравнения касательных к кривой $y=x2^{-x}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$, б) $x=-1$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(-1)=-2$, $y'_x=2^{-x}-x2^{-x}\ln 2=2^{-x}(1-x\ln 2)$, $y'(0)=1$, $y'(-1)=2(1+\ln 2)$.

Следовательно, уравнения касательных соответственно будут: а) $y=x$, б) $y+2=2(1+\ln 2)\ (x+1)$ (см. рис. 31).

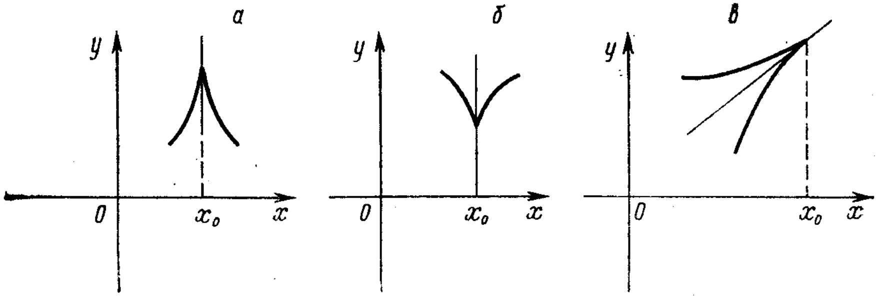

Рис. 30

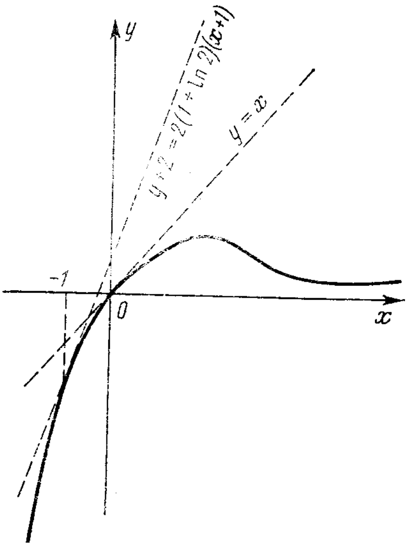

Рис. 31

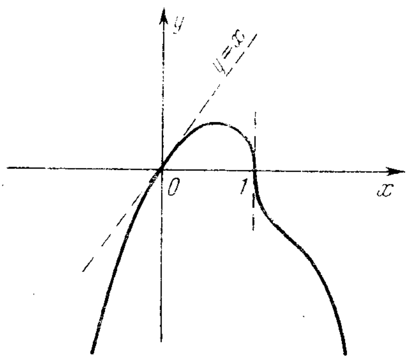

Рис. 32

Пример 2. Напишем уравнения касательных к кривой $y=x\sqrt[3]{(1-x)}$ в точках с абсциссами: а) $x=0$; б) $x=1$; в) $x=9$.

Решение. Имеем $y(0)=0$, $y(1)=0$, $y(9)=-18$,

$$y'=(1-x)^{1/3}-x\cdot\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}=\frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(3-4x), \tag{3}$$

$$y'(0)=1,\ y'(9)=-\frac{11}{4}.$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y=x$ и $y+18=-\frac{11}{4}(x-9)$; в случае б) при $x=$

$=1$ формула (3) теряет смысл. В данном случае можно непосредственно вычислить, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{y(x)-y(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{-\sqrt[3]{(1-x)^2}}=-\infty.$$

Заметим, что проще использовать утверждение: если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0)=\infty$ (соответственно $+\infty$ или $-\infty$). Таким образом, в точке $(1, 0)$ непрерывная кривая $y=x\sqrt[3]{1-x}$ имеет вертикальную касательную $x=1$ (см. рис. 32).

Пример 3. Напишем уравнения касательных к кривой $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$ в точках:

а) $t=\pi/2$; б) $t=\pi$; в) $t=3\pi/2$.

Решение. Имеем

$$t=\pi/2 \Rightarrow x=1,\ y=2;\ t=\pi \Rightarrow x=-3,\ y=0;$$

$$t=3\pi/2 \Rightarrow x=1,\ y=-2;$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\sin\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{3t}{2}\sin\frac{t}{2}}=\operatorname{tg}\frac{3t}{2};\ y'_x|_{t=\pi/2}=-1;\ y'_x|_{t=3\pi/2}=1.$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y-2=-(x-1)$ и $y+2=x-1$; б) в точке $t=\pi$ $(x=-3,\ y=0)$ функция y_x' не определена.

Рассмотрим кривую в окрестности точки $x=-3$. Параметрическую связь x и y можно рассматривать и как определение функции $y(x)$, и как определение функции $x(y)$. Так как в окрестности точки $t=\pi$ имеем $y_t'<0$, то в этой окрестности x есть непрерывная однозначная функция y и $x_y'=x_t'/y_t'=\operatorname{ctg}(3t/2)$, т. е. уравнение касательной к графику этой функции в точке $y=0$, $x=-3$ есть $x+3=0\cdot y$ или $x=-3$ – касательная параллельна оси OY. Если же рассматривать функцию $y(x)$, то точка $x=-3$, $y=0$ является общей точкой графиков двух однозначных непрерывных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, соответствующих участкам монотонного изменения $x(t)$: при $t\in(\pi/3, \pi)$ x убывает от $3/2$ до -3, при $t\in(\pi, 5\pi/3)$ x возрастает от -3 до $3/2$. Так как $x\geqslant -3$, то обе ветви $y_1(x)$ и $y_2(x)$ кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$ лежат справа от прямой $x=-3$, и в этой точке можно говорить только об односторонних полукасательных к каждой из ветвей. Имеем

$$\lim_{x\to -3+} y_1'(x)=\lim_{t\to\pi-}\operatorname{tg}\frac{3t}{2}=+\infty,\quad \lim_{x\to -3+} y_2'(x)=\lim_{t\to\pi+}\operatorname{tg}\frac{3t}{2}=-\infty.$$

Отсюда, рассматривая кривую в целом, видим, что полукасательная «сверху» в точке $(-3, 0)$ является вертикальной полупрямой, направленной вверх: $x=-3$, $y\geqslant 0$; полукасательная «снизу» —

вертикальной полупрямой, направленной вниз: $x=-3$, $y\leqslant 0$. Так как угол между этими полупрямыми равен π, то кривая в точке имеет вертикальную касательную $x=-3$ (см. рис. 33).

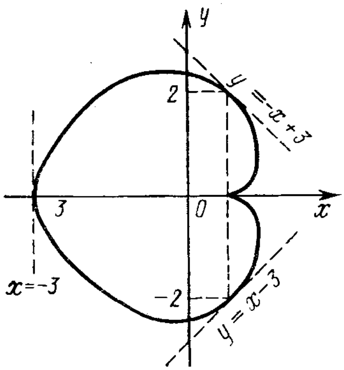

Рис. 33

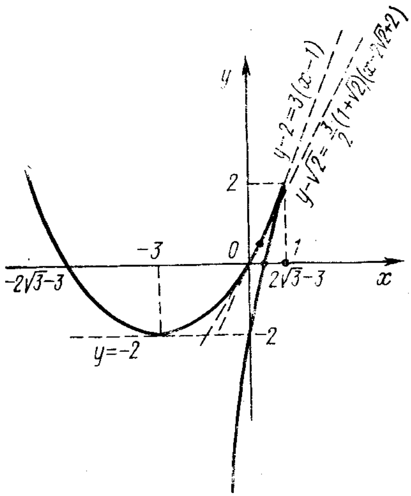

Рис. 34

Пример 4. Напишем уравнения касательных к кривой $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ в точках а) $t=-1$; б) $t=1$; в) $t=\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $t=-1 \Rightarrow x=-3$, $y=-2$; $t=1 \Rightarrow x=1$, $y=2$; $t=\sqrt{2} \Rightarrow x=2\sqrt{2}-2$; $y=\sqrt{2}$;

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}=\frac{3}{2}(1+t),\quad t\neq 1;$$

$$y'_x|_{t=-1}=0,\quad y'_x|_{t=\sqrt{2}}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2}).$$

Следовательно, уравнения касательных будут в случаях а) и в) соответственно $y+2=0$ и $y-\sqrt{2}=\frac{3}{2}(1+\sqrt{2})(x-2\sqrt{2}+2)$; случае б) в точке $t=1$ функция $\frac{3(1-t^2)}{2(1-t)}$ не определена. В отличие от предыдущего примера при $t=1$ и $y_t'=0$, и $x_t'=0$. Поэтому нельзя утверждать, что в окрестности точки (1, 2) переменная y является однозначной функцией x или переменная x является однозначной функцией y. Функция $x(t)$ имеет два участка монотонности: на $(-\infty, 1]$ она возрастает от $-\infty$ до 1, на $[1, +\infty)$ — убывает от 1 до $(-\infty)$. Соответственно имеем две однозначные непрерывные ветви рассматриваемой кривой $y_1(x)$ и $y_2(x)$ каждая с областью определения $x\leqslant 1$. Точка $M_0(1, 2)$ — общая для них. Так как $x \leqslant 1$, то можно определить только односторонние полукасательные к каждой из ветвей в точке M_0. Имеем

$$\lim_{x\to 1-} \frac{y_1(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} y_1'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{3}{2}(1+t) = 3;$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{y_2(x)-2}{x-1} = \lim_{x\to 1-} y_2'(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{3}{2}(1+t) = 3.$$

Итак, полупрямая $y-2=3(x-1)$, $x\leqslant 1$, является общей полукасательной для обеих ветвей рассматриваемой кривой в точке (1; 2). Точка (1; 2) – точка возврата (см. рис. 34).

Пример 5. Напишем уравнения касательных к кривой $xy(x+y)+x^2=2y^2$ в точках с абсциссами а) $x=4$; б) $x=0$.

Решение. Из данного уравнения получаем

$$y=\frac{x^2 \pm \sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x},$$

т. е. кривая состоит из двух ветвей

$$y_1=\frac{x^2+\sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x} \text{ и } y_2=\frac{x^2-\sqrt{x^4+8x^2-4x^3}}{4-2x}.$$

Таким образом, значение $x=4$ определяет две точки, лежащие соответственно на двух ветвях кривой: $M_1(4, -2\sqrt{2}-4)$ и M_2 $(4, 2\sqrt{2}-4)$, а при $x=0$ имеем $y_1=y_2=0$, т. е. точка $M_0(0, 0)$ является общей для обеих ветвей. Пользуясь правилом дифференцирования неявной функции, находим, что

$$2xy+x^2y'+2yy'x+y^2+2x=4yy', \tag{3}$$

откуда $y'=\dfrac{2xy+y^2+2x}{4y-x^2-2xy}$. Угловые коэффициенты касательной в точке M_1 и в точке M_2 равны нулю, и уравнения соответствующих касательных есть $y=2\sqrt{2}-4$ и $y=-2\sqrt{2}-4$. В точке $M_0(0, 0)$ уравнение (3) вырождается — превращается в тождество $0=0$. Найти касательную к каждой из ветвей в этой точке можно, например, дифференцируя каждую из явных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, однако сделаем это другим способом, поскольку часто уравнения ветвей неявно заданной функции не выражаются аналитически в явном виде $y=y(x)$ или $x=x(y)$.

В некоторых случаях удается разделить ветви кривой, заданной уравнением $F(x, y)=0$, введением параметра. Так, для нашей кривой введем параметр $t=\dfrac{y}{x}$, тогда параметр t и переменная x связаны уравнением $tx^2(x+tx)+x^2=2t^2x^2$, откуда $x=\dfrac{2t^2-1}{t(1+t)}$. Точке $M_0(0, 0)$ соответствуют два значения параметра $t=1/\sqrt{2}$ и $t=-1/\sqrt{2}$. Легко проверить, что функция $x(t)$ строго монотонна как в окрестности точки $t=1/\sqrt{2}$, так и в окрестности точки $t=-1/\sqrt{2}$. Так что действительно при изменении t в соответствующей окрестности этих точек мы получаем две различные ветви нашей кривой. Имеем

$$y'_x(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0} t.$$

Поскольку условие $x\to 0$ на одной из ветвей эквивалентно условию $t\to 1/\sqrt{2}$, а на другой — условию $t\to -1/\sqrt{2}$, то касательная к одной из ветвей в точке (0, 0) имеет уравнение $y=x/\sqrt{2}$, а к другой — $y=-x/\sqrt{2}$. Отметим, что особая точка $M_0(0, 0)$ кривой $xy(x+y)+x^2=2y^2$ представляет собой точку пересечения двух ее гладких ветвей, образующих между собой угол $\alpha=\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

Пример 6. Найдем угол, под которым пересекаются кривые

$$x^2+y^2=12x \text{ и } y=\sqrt[3]{(x-6)^2}.$$

Решение. Чтобы найти точку пересечения кривых, надо решить уравнение $(x-6)^2+\sqrt[3]{(x-6)^4}=36$. Положим $(x-6)^2=z^3$, тогда $z^3+z^2=36$. Так как $z^3+z^2-36=(z-3)(z^2+4z+12)$, то уравнение имеет единственный корень $z=3$, откуда $x=6\pm\sqrt{27}$. Итак, точками пересечения кривых являются точки $M_1(6+\sqrt{27}, 9)$ и $M_2(6-\sqrt{27}, 9)$. Для первой кривой имеем $2x+2yy'=12$, откуда $y'=(6-x)/y$. Следовательно, угловые коэффициенты касательных к ней в точке M_1 есть $-\sqrt{3}/3$, а в точке M_2 есть $\sqrt{3}/3$. Для второй кривой $y'=2(x-6)^{1/3}/3$, следовательно, в точке M_1 угловой коэффициент касательной есть $2/3\sqrt{3}$, а в точке M_2 есть $-2/3\sqrt{3}$. Углы, под которыми пересекаются кривые в точках M_1 и M_2, одинаковы и равны

$$\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}}{1-\frac{2}{9}}=\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{3}}{7} \text{ (см. рис. 35).}$$

Пример 7. Найдем угол между левой и правой полукасательными к кривой $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$ в угловой точке (см. стр. 104).

Решение. Имеем

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}(1+x^2)}\ (|x|\neq 1).$$

Следовательно, угловыми точками могут быть только точки

$M_1(1,\ \pi/2)$ и $M_2(-1,\ -\pi/2)$. Имеем

$$y'_+(1)=\lim_{x\to1+}y'_x=\lim_{x\to1+}\frac{-2}{1+x^2}=-1;\ y'_-(1)=\lim_{x\to1-}y'_x=1.$$

Угловые коэффициенты левой и правой полукасательных в точке M_1 равны 1 и -1, угол между ними равен $\pi/2$. Так как функция

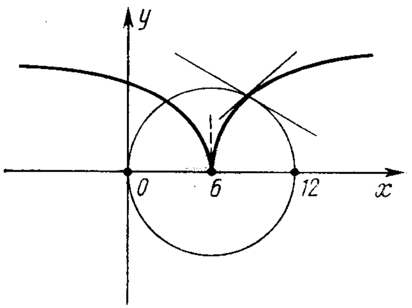

Рис. 35

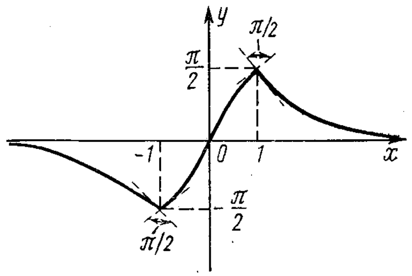

Рис. 36

$y(x)$ нечетная, то кривая симметрична относительно начала координат и угол между левой и правой полукасательными в точке M_2 также равен $\pi/2$ (см. рис. 36).

Возрастание и убывание функции

Определение. Пусть функция f определена на интервале $(a,\ b)$. Если произведение $(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)$ не меняет знака на $(a,\ b)$, то говорят, что функция f *монотонна* на $(a,\ b)$. Если $(f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)>0$ $((f(x_1)-f(x_2))(x_1-x_2)<0)$ для любых $x_1,\ x_2,\ x_1\neq x_2$, из $(a,\ b)$, то f *строго возрастает* (*строго убывает*) на $(a,\ b)$, если же это произведение обращается в нуль для несовпадающих $x_1,\ x_2$, то говорят, что монотонность нестрогая.

Если монотонная на $(a,\ b)$ функция дифференцируема на $(a,\ b)$, то ее производная не меняет знака на $(a,\ b)$. Если f дифференцируема на $(a,\ b)$ и $f'(x)>0\,(f'(x)<0)$ для всех $x\in(a,\ b)$, исключая, быть может, конечное множество (на котором $f'(x)=0$), то f строго возрастает (строго убывает) на $(a,\ b)$.

Определение. Функция f, заданная на $(a,\ b)$, имеет в точке $x_0\in(a,\ b)$ локальный экстремум, если существует такая окрестность $U(x_0)\in(a,\ b)$, что разность $f(x)-f(x_0)$ не меняет знака для $x\in U(x_0)$.

Если $f(x)-f(x_0)\leqslant0$ для любого $x\in U(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой максимума*; если $f(x)-f(x_0)\geqslant0$ для любого $x\in\in U(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума*. Заметим, что точка локального экстремума обязательно есть внутренняя точка области определения функции.

Точки, в которых $f(x)$ определена, а $f'(x)$ равна нулю или не существует, называем критическими точками f. Всякая точка локального экстремума является критической точкой, но, как показано ниже на примерах, не всякая критическая точка есть точка экстремума.

Достаточные условия локального экстремума

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности критической точки x_0 и дифференцируема в ее проколотой окрестности, причем $f'(x)$ в левой $(U_-(x_0))$ и правой $(U_+(x_0))$ полуокрестностях сохраняет знак. Тогда если $f'(x)>0$ для $x\in U_-(x_0)$, а $f'(x)<0$ для $x\in U_+(x_0)$, то точка x_0 есть точка максимума; если $f'(x)<0$ для $x\in U_-(x_0)$ и $f'(x)>0$ для $x\in U_+(x_0)$, то точка x_0 — точка минимума. Требование непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 существенно.

Пример 8. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1+x, & x<0; \\ 0, & x=0; \\ -1-x, & x>0, \end{cases}$$

тогда $f'(x)=1$ при $x<0$ и $f'(x)=-1$ при $x>0$, т. е. при переходе через точку $x=0$ производная меняет знак, но точка $x=0$ не является точкой локального экстремума.

2. Пусть f имеет в точке x_0 производную порядка n, $f'(x_0)=$ $=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ и $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Если n — четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка минимума; если $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка максимума; если n — нечетное, то критическая точка x_0 не будет точкой экстремума.

Если функция f рассматривается на отрезке $[a, b]$ или луче $[a, +\infty)$, то кроме локальных экстремумов f может иметь краевой экстремум: точка a (точка b) является точкой краевого экстремума, если существует такая ее правая (левая) полуокрестность, в которой разность $f(x)-f(a)$ $(f(x)-f(b))$ не меняет знака.

Пример 9. Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции

$$y(x)=\frac{1+\sqrt{x+1}}{x+2}+\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}.$$

Решение. Имеем

$$y'(x)=\frac{1-\sqrt{x+1}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}}\quad (x>-1).$$

Функция $y(x)$ определена и непрерывна на луче $x\geqslant -1$, а функция $y'(x)$ — на луче $x>-1$; $y'(x)>0$ для $-1<x<0$, $y'(0)=0$,

$y'(x)<0$ для $x>0$. Итак, на интервале $-1<x<0$ функция $y(x)$ возрастает, на луче $x>0$ — убывает, $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{\pi}{2}$; в точке $x=-1$ — краевой минимум $y(-1)=1$, в точке $x=0$ — локальный и абсолютный максимум $y(0)=1+\pi/4$.

Пример 10. Найдем точки экстремума и промежутки монотонности функции $y(x)=x^3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}$.

Решение. Имеем

$$y'(x)=\frac{x^2(11x^2-9)}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}.$$

Точки $x=0$, $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{3}{\sqrt{11}}$, $x=-\frac{3}{\sqrt{11}}$ являются критическими точками данной непрерывной функции. Функция $y'(x)$ меняет знак только в точках $x_1=-3/\sqrt{11}$ и $x_2=3/\sqrt{11}$, причем $y'(x)>0$ для $x<-3/\sqrt{11}$, $y'(x)<0$ для $-3/\sqrt{11}<x<3/\sqrt{11}$, $y'(x)>0$ для $x>3/\sqrt{11}$. Таким образом, функция $y(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -3/\sqrt{11})$, убывает на $(-3/\sqrt{11}, 3/\sqrt{11})$, возрастает на $(3/\sqrt{11}, +\infty)$, в точке $x_1=-3/\sqrt{11}$ имеет локальный максимум, в точке $x_2=3/\sqrt{11}$ — локальный минимум. Критические точки $x=-1$, $x=0$, $x=1$ не являются точками локального экстремума.

Пример 11. Покажем, что функция $y(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ строго возрастает при $x>0$.

Решение. Имеем

$$y'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right).$$

Так как $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>0$ для $x>0$, то знак $y'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x)=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}$. Имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $g'(x)=$ $=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x(x+1)}<0$, $x>0$. Итак, функция $g(x)$ стремится к нулю при $x\to+\infty$, монотонно убывая, следовательно, для всех $x>0$ функция $g(x)>0$ и, значит, $y'(x)>0$, $x>0$. Откуда вытекает, что $y(x)$ строго возрастает при $x>0$.

Пример 12. Доказать неравенство $1+2\ln x\leqslant x^2$ для $x>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-2\ln x-1$. Имеем $f(1)=0$, $f'=\frac{2(x^2-1)}{x}$. Для $x>1$ имеем $f'(x)>0$, а для $0<x<1$ имеем $f'(x)<0$. Таким образом, $f(x)$ на интервале $(0, 1)$ убывает, на интервале $(1, +\infty)$ возрастает, и так как $f(x)$ непрерывна при $x=1$, то точка $x=1$ является точкой минимума. Следовательно, для $x>0$ $f(x)=x^2-2\ln x-1\geqslant f(1)=0$, откуда и вытекает неравенство $x^2\geqslant 1+2\ln x$, $x>0$.

Пусть непрерывная функция f задана на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[a, b]$ существуют точки x_1 и x_2 такие, что

$$f(x_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \text{ и } f(x_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Если хотя бы одна из этих точек лежит внутри отрезка, т. е. на интервале (a, b), то в этой точке функция f имеет локальный экстремум. Таким образом, точки x_1 и x_2 входят в множество, состоящее из всех точек локального экстремума функции f на (a, b) и концевых точек $x=a$ и $x=b$.

В свою очередь это множество есть подмножество множества, состоящего из точек $x=a$, $x=b$ и всех критических точек функции f на (a, b). Сравнивая значения функции f во всех точках этого множества (т. е. в концевых и критических точках), находим $\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Пример 13. Найдем $\max\limits_{x\in[-4,4]} f(x)$ и $\min\limits_{x\in[-4,4]} f(x)$, если $f(x) = x^3+3x^2-9x+5$.

Решение. Так как функция $f(x)$ дифференцируема на всей прямой, то критические точки данной функции есть те точки, где $f'(x)=0$. Поскольку $f'(x)=3x^2+6x-9$ и $f'(x)=0$ при $x=-3$ и $x=1$, то критические точки есть $x_1=-3$ и $x_2=1$. Эти точки принадлежат отрезку $[-4, 4]$. Следовательно, надо сравнить значение функции в точках $x_0=-4$, $x_1=-3$, $x_2=1$ и $x_3=4$. Поскольку $f(-4)=25$; $f(-3)=32$, $f(1)=0$ и $f(4)=81$, то $\max\limits_{[-4,4]} f(x)=f(4)=81$, $\min\limits_{[-4,4]} f(x)=f(-1)=0$.

Пример 14. Найдем $\max\limits_{[-2,3]} f(x)$ и $\min\limits_{[-2,3]} f(x)$, если $f(x)=|3x^4-16x^3+24x^2-43|$.

Решение. Функция $f(x)$ может быть недифференцируема в тех точках, где $3x^4-16x^3+24x^2-43=0$. Имеем $3x^4-16x^3+24x^2-43=(x+1)(3x^3-19x^2+43x-43)$. Положим $g(x)=3x^3-19x^2+43x-43$. Тогда $g'(x)=9x^2-38x+43>0$ для всех x, т. е. $g(x)$ монотонно возрастает, и так как $g(3)=-4$, то $g(x)<0$ для всех $x\in[-2, 3]$. Следовательно, $x=-1$ единственная возможная точка недифференцируемости $f(x)$ на $[-2, 3]$. Для $x<-1$ имеем $f'(x)=12x(x-2)^2$, для $x>-1$ имеем $f'(x)=-12x(x-2)^2$, следовательно, критическими точками $f(x)$ на отрезке $[-2, 3]$ будут точки $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$. Вычисляя значения $f(x)$ для $x_0=-2$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=3$, получаем $f(-2)=229$, $f(-1)=0$, $f(0)=43$, $f(2)=27$, $f(3)=16$, т. е.

$$\max_{[-2,3]} f(x)=f(-2)=229, \quad \min_{[-2,3]} f(x)=f(-1)=0.$$

Формула Тейлора, правило Лопиталя

Пусть функция f в некотором интервале (a, b) имеет n производных. Тогда для любой точки $x_0\in(a, b)$ можно написать *мно-*

гочлен Тейлора $T_n(f, x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. Разность $R_n(f, x_0)=f(x)-T_n(f, x_0)$ называется *остаточным членом формулы Тейлора* $f(x)=T_n(f, x_0)+R_n(f, x_0)$.

При данных условиях, налагаемых на функцию f, $R_n(f, x_0)=o(x-x_0)^n (x\to x_0)$ и R_n называется *остаточным членом в форме Пеано.* Если потребовать, что на (a, b) существует $f^{(n+1)}(x)$, то для любого x из (a, b) $R_n(f, x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где ξ — некоторая точка интервала (x_0, x), и R_n называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

Использование формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для выделения главной части функции f в окрестности некоторой точки и для вычисления пределов было подробно рассмотрено выше. Выражение R_n в форме Пеано в отличие от R_n в форме Лагранжа позволяет оценить величину погрешности, допускаемой при замене функции f многочленом $T_n(x)$ на некотором промежутке.

Пример 15. Оценим погрешность при замене функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$ многочленом Тейлора $T_5(f, 1)$ на отрезке $[1/2, 3/2]$.

Решение. Поскольку

$$f'_x=\frac{1}{1+x^2},\quad f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n\operatorname{arcctg} x),\quad n\geqslant 2$$

(это можно показать, используя тождество

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)\Big),$$

то

$$T_5(f, 1)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3-\frac{1}{40}(x-1)^5$$

и

$$f(x)-T_5(f, 1)=R_5(f, 1)=\frac{f^{(6)}(\xi)(x-1)^6}{6!}.$$

Так как точка ξ лежит между x и 1, $|x-1|<1/2$ и $|\sin(n\operatorname{arcctg}\xi)|\leqslant 1$, то

$$|R_5(f, 1)|\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\frac{1}{6!}\cdot\frac{5!}{(1+\xi^2)^3}\leqslant\frac{1}{2^6\cdot 6}\cdot\frac{4^3}{5^3}=\frac{1}{6\cdot 5^3}=\frac{1}{750}.$$

Итак, многочлен

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3-\frac{1}{40}(x-1)^5$$

приближает функцию $\operatorname{arctg} x$ для всех $x \in [1/2, 3/2]$ с погрешностью не более чем $1/750$.

Правило Лопиталя. Пусть функции f и g определены и дифференцируемы в некоторой правой полуокрестности точки $a: U_+(a) = \{x : a<x<a+\delta\}$, $\delta>0$, причем $g'(x) \neq 0$, $x \in U_+(a)$ и $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Тогда, если

1) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$

или

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$,

то

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Правило верно и тогда, когда A есть один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\lim\limits_{x\to a-} \frac{f(x)}{g(x)}$ и для $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (в первом случае функции f и g должны удовлетворять соответствующим условиям в некоторой левой полуокрестности точки a, во втором случае — в некоторой проколотой окрестности точки a).

Пример 16. Найдем

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x\right).$$

Решение. Чтобы иметь возможность применить правило Лопиталя, представим данную разность в виде отношения функций

$$\frac{1}{\ln x} - \pi \operatorname{ctg} \pi x = \frac{\sin \pi x - \pi \ln x \cdot \cos \pi x}{\ln x \cdot \sin \pi x} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Функции $f(x) = \sin \pi x - \pi \ln x \cos \pi x$ и $g(x) = \ln x \cdot \sin \pi x$ удовлетворяют условиям применимости правила Лопиталя при x из окрестности $\overset{\circ}{U}_{\frac{1}{2}}(1) = (1/2, 3/2) \setminus \{1\}$. Отношение производных $f'(x)/g'(x)$ равно

$$\frac{\pi \cos \pi x - \frac{\pi}{x} \cos \pi x + \pi^2 \ln x \cdot \sin \pi x}{\frac{1}{x} \sin \pi x + \pi \cos \pi x \cdot \ln x} =$$

$$= \frac{\pi x \cos \pi x - \pi \cos \pi x + \pi^2 x \ln x \sin \pi x}{\sin \pi x + \pi x \cos \pi x \cdot \ln x}.$$

Это отношение опять представляет собой неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя к нему. Отношение производной числителя к производной знаменателя равно

$$\frac{\pi\cos\pi x-\pi^2 x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ln x\cdot\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^3 x\ln x\cos\pi x}{\pi\cos\pi x+\pi\cos\pi x\ln x+\pi\cos\pi x-\pi^2 x\ln x\sin\pi x}.$$

Предел этого отношения при $x\to 1$ равен 1/2. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x-\pi\cos\pi x\cdot\ln x}{\sin\pi x\cdot\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi x\cos\pi x-\pi\cos\pi x+\pi^2 x\ln x\cdot\sin\pi x}{\sin\pi x+\pi x\cos\pi x\cdot\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x-\pi^2 x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^2\ln x\sin\pi x+\pi^2\sin\pi x+\pi^3 x\ln x\cos\pi x}{\pi\cos\pi x+\pi\cos\pi x\ln x+\pi\cos\pi x-\pi^2 x\ln x\ \sin\pi x}=$$

$$=\frac{1}{2}.$$

По смыслу эта цепочка равенства должна читаться с конца: так как предел последнего отношения существует, то существует и равен ему предел предпоследнего отношения и т. д.

Если же предел отношения производных не существует, то это ничего не говорит о существовании или несуществовании предела отношения функций. Приведем соответствующий пример.

Пусть

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}+2\sin x \text{ и } g(x)=x.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}+2\,\frac{\sin x}{x}\right)=2,$$

а отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ равно $\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2\cos x}{1}$ и не имеет предела при $x\to 0$.

Применяя правило Лопиталя, необходимо также следить за тем, чтобы было выполнено либо условие 1), либо условие 2). Так, например, пусть

$$f(x)=\sin x+\cos x \text{ и } g(x)=x+2.$$

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2},\quad \text{а}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{1}=1.$$

(Здесь не выполнены ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, ни условие $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\infty$.)

Исследование функций и построение кривых

Считаем, что исследовать функцию — это означает:

1) найти область определения;

2) отметить (если они есть) особенности функции (периодичность, четность и нечетность, сохранение знака), найти точки пересечения графика функции с осями координат;

3) если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значения функции в этих точках, в противном случае — выяснить поведение функции в окрестности этих точек (включая и несобственные точки $-\infty$ и $+\infty$);

4) найти наклонные асимптоты (вертикальные и горизонтальные определяются в пункте 3) или убедиться в их отсутствии;

5) найти участки возрастания и убывания функции, определить локальные и краевые экстремумы;

6) найти интервалы, на которых функция выпукла вверх или вниз, определить точки перегиба.

По результатам такого исследования функции строится ее график.

Пример 17. Исследуем функцию $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ и построим ее график.

Решение.

1) $x\neq 1$;

2) при $x=0$ $y=1$, при $x=-1$ $y=0$, при $x>-1$ $y>0$, при $x<-1$ $y<0$;

3) $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} y(x)=+\infty$,
$\lim\limits_{x\to -\infty} y(x)=-\infty$;

4) $k_+=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{y(x)}{x}=1$, $b_+=\lim\limits_{x\to +\infty}(y(x)-x)=5$,
$k_-=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{y(x)}{x}=1$, $b_-=\lim\limits_{x\to -\infty}(y(x)-x)=5$;

5) $y'(x)=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$, $x\neq 1$, $y'>0$ при $x<1$ и $x>5$;
$y'<0$ при $1<x<5$;

6) $y''(x)=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$, $x\neq 1$, $y''>0$ при $x>-1$, $x\neq 1$; $y''<0$ при $x<-1$.

Итак, функция $y(x)=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ определена на множестве $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$. График ее пересекает ось OY в точке $(0, 1)$ и ось OX в точке $(-1, 0)$. Вертикальная асимптота $x=1$, наклонная асимптота $y=x+5$. На промежутках $x<1$ и $x>5$ функция возрастает, на промежутке $1<x<5$ убывает, в точке $\left(5, 13\frac{1}{2}\right)$ имеет локальный минимум. На промежутке $x<-1$ функция выпукла вверх, на промежутках $-1<x<1$ и $x>1$ — вниз, $(-1, 0)$ — точка перегиба. График данной функции представлен на рис. 37.

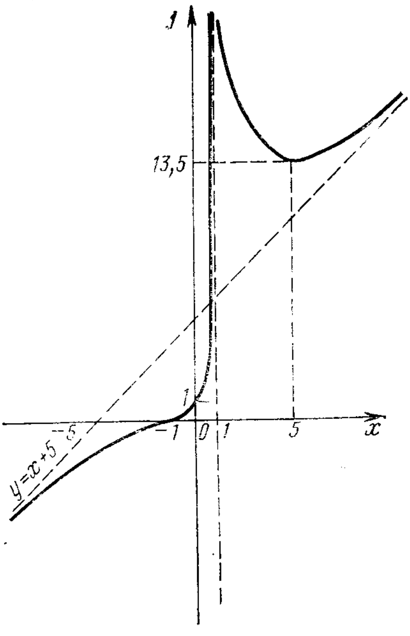

Рис. 37

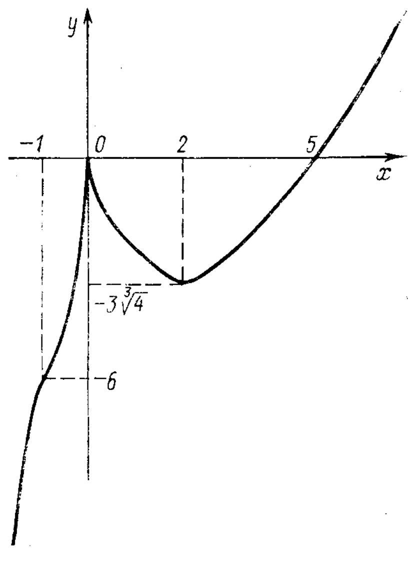

Рис. 38

Отметим, что $y'(-1)=0$, т. е. график функции имеет в этой точке горизонтальную касательную, точка $x=-1$ является критической, но локального экстремума у функции в этой точке нет.

Пример 18. Исследуем функцию $y=(x-5)\sqrt[3]{x^2}$ и построим ее график.

Решение. Имеем

1) $x\in R$;

2) $y=0$ при $x=0$ и $x=5$; $y>0$ при $x>5$; $y<0$ при $x<$ <5, $x\neq 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$;

4) $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty, \quad k_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = +\infty;$

5) $y'(x) = \frac{5x^{-1/3}(x-2)}{3}, \ x \neq 0, \ y'(x) > 0$ при $x < 0$ и $x > 2$; $y'(x) < 0$ при $0 < x < 2$;

6) $y''(x) = \frac{10}{9} x^{-\frac{4}{3}} (x+1), \ x \neq 0, \ y''(x) > 0$ при $-1 < x < 0$ и $x > 0$; $y''(x) < 0$ при $x < -1$.

Итак, функция $y(x) = (x-5)\sqrt[3]{x^2}$ определена на всей числовой прямой. График ее пересекает ось OX в точках $x=0$ и $x=5$. Асимптот нет. На промежутках $-\infty<x<0$ и $2<x<+\infty$ функция возрастает, на промежутке $0<x<2$ — убывает, в точке $(0, 0)$ имеет локальный максимум, в точке $(2, -3\sqrt[3]{4})$ — локальный минимум. На промежутках $-1<x<0$ и $0<x<+\infty$ функция выпукла вниз, на промежутке $-\infty<x<-1$ — вверх. Точка $(-1, -6)$ — точка перегиба. Поскольку $f(x)$ непрерывна в нуле и

$$\lim_{x\to0+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to0+} \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x\to0-} \frac{x-5}{\sqrt[3]{x}} = +\infty,$$

то полупрямая $x=0$, $y\leqslant0$ является и левой и правой полукасательной к графику функции в точке $(0, 0)$. Следовательно, точка $(0, 0)$ – точка возврата кривой. График данной функции представлен на рис. 38.

Пример 19. Исследуем и построим график кривой, заданной параметрически

$$x(t) = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad y(t) = \frac{t^2}{t^3+1}.$$

Решение. Параметрические соотношения определяют функцию $y(x)$, однозначную и непрерывную на тех промежутках изменения параметра t, на которых функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна. Выделим такие промежутки. Имеем

$$x'_t = \frac{-2t}{(t^2-1)^2}, \quad y'_t = \frac{t(2-t^3)}{(t^3+1)^2}.$$

Графики функций $x(t)$ и $y(t)$ изображены на рис. 39, *а*, *б*. Функция $x(t)$ строго монотонна на четырех промежутках: $(-\infty, -1)$; $(-1, 0]$, $[0, 1)$, $(1, +\infty)$. Так как формальное дифференцирование на всех промежутках производится одинаково, то имеем при $t\neq0$ и $t\neq-1$

$$y'_x = \frac{t(2-t^3)(t^2-1)^2}{(t^3+1)^2(-2t)} = \frac{(t^3-2)(t-1)^2}{2(t^2-t+1)^2},$$

$$y''_{x^2} = -\frac{(t^2-1)^3(t^3-3t^2+9t-8)}{4(t^2-t+1)^3} \quad t \neq 0,\ t \neq -1.$$

Пусть $t < -1$, тогда:

1) $x > 1$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y < 0$ (см. рис. 39, *б*);

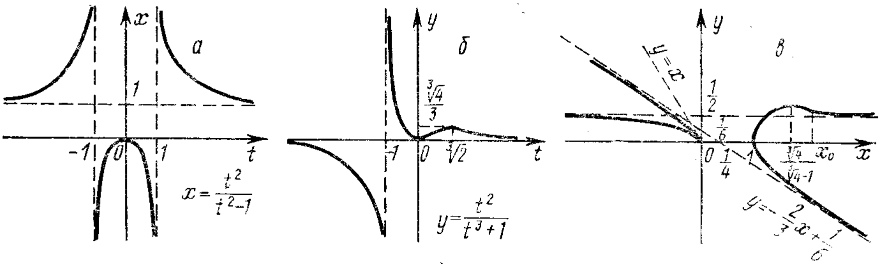

Рис. 39

3) условие $x \to 1+$ эквивалентно на промежутке $t < -1$ условию $t \to -\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = \lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = 0$; точно так же $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{t\to -1-} y(t) = -\infty$;

4) $k_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{t-1}{t^2-t+1} = -\frac{2}{3}$;

$b_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(y(x) + \frac{2}{3}x\right) = \lim\limits_{t\to-1-} \frac{t^2(2t-1)}{3(t-1)(t^2-t+1)} = \frac{1}{6}$;

5) так как $t < -1$, то $y'_x < 0$;

6) обозначим через $g(t)$ многочлен $t^3 - 3t^2 + 9t - 8$; так как $g(-1) = -21 < 0$ и $g'(t) = 3t^2 - 6t + 9 > 0$, то $g(t) < 0$ для $t < -1$. Отсюда следует, что для $t < -1$ имеем $y''_{x^2} > 0$. Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $(-\infty, -1)$, представляет график непрерывной, отрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вниз на луче $x > 1$ функции с асимптотой $y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}$ и краевым условием $\lim\limits_{x\to 1+} y(x) = 0$.

Пусть $-1 < t \leqslant 0$, тогда:

1) $x \leqslant 0$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y \geqslant 0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x \to -\infty$ эквивалентно на промежутке $-1 < t \leqslant 0$ условию $t \to -1+$, поэтому $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \lim\limits_{t\to-1+} y(t) = +\infty$, значению $x = 0$ соответствует значение $t = 0$, следовательно, значение y при $x = 0$ равно 0;

4) $k_- = \lim\limits_{t\to-1+} \frac{y(t)}{x(t)} = -\frac{2}{3}$, $b_- = \lim\limits_{t\to-1+} \left(y(t) - \frac{2}{3}x(t)\right) = \frac{1}{6}$;

5) так как $-1 < t < 0$, то $y'_x < 0$, $\lim\limits_{t\to 0-} y'_x = -1$;

6) $y_{x^2} < 0$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $-1<t\leqslant 0$, представляет график непрерывной, неотрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вверх на луче $x\leqslant 0$ функции с асимптотой $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}$ и краевым минимумом $x=0$, $y=0$, имеющей в точке (0, 0) левую полукасательную: луч $y=-x$, $x\leqslant 0$.

Пусть $0\leqslant t<1$, тогда:

1) $x\leqslant 0$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y\geqslant 0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x\to -\infty$ эквивалентно на промежутке $0\leqslant t<1$ условию $t\to 1-$, поэтому $\lim\limits_{x\to -\infty} y(x)=\lim\limits_{t\to 1-} y(t)=\frac{1}{2}$. Значению $x=0$ соответствует значение $y=0$;

4) наклонных асимптот нет, так как при $x\to -\infty$ $y(x)$ не является бесконечно большой величиной;

5) так как $0\leqslant t<1$, то $y'_x<0$, $\lim\limits_{t\to 0} y'_x=-1$;

6) $y''_{x^2}<0$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $0\leqslant t<1$, представляет график непрерывной, неотрицательной, монотонно убывающей, выпуклой вверх на луче $x\leqslant 0$ функции с асимптотой $y=1/2$ и с краевым минимумом $x=0$, $y=0$, имеющей в точке (0, 0) левую полукасательную — луч $y=-x$, $x\leqslant 0$.

Таким образом, точка (0, 0) является общей точкой двух ветвей кривой, которые подходят к ней слева и сверху, и обе эти ветви имеют в точке (0, 0) общую левую полукасательную: луч $y=-x$, $x\leqslant 0$. Точка (0, 0) является точкой возврата кривой.

Пусть $t>1$, тогда:

1) $x>1$ (см. рис. 39, *а*);

2) $y>0$ (см. рис. 39, *б*);

3) условие $x\to 1+$ эквивалентно на промежутке $t>1$ условию $t\to +\infty$, поэтому $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=\lim\limits_{t\to +\infty} y(t)=0$.

Аналогично $\lim\limits_{x\to +\infty} y(x)=\lim\limits_{t\to 1+} y(t)=\frac{1}{2}$;

4) наклонных асимптот нет;

5) $y'_x>0$ для $t>\sqrt[3]{2}$, т. е. для $1<x<\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1)$; $y'_x<0$ для $1<t<\sqrt[3]{2}$, т. е. для $x>\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1)$, точка $(\sqrt[3]{4}\,/\,(\sqrt[3]{4}-1);\ \sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального максимума;

6) для многочлена $g(t)=t^3-3t^2+9t-8$ имеем $g(1)=-1<0$,

$$g(\sqrt[3]{2})=-3\sqrt[3]{4}+9\sqrt[3]{2}-6=-3(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2}-2)>0,$$

$g'(t)>0$.

Следовательно, на промежутке $(1, \sqrt[3]{2})$ существует единственная точка t_0 такая, что $y''_{x^2}<0$ для $1<t<t_0$ и $y''_{x^2}>0$ для $t_0<t<\sqrt[3]{2}$.

Итак, ветвь кривой, соответствующая изменению t на промежутке $t>1$, представляет собой график непрерывной положительной на луче $x>1$ функции. Эта функция имеет горизонтальную асимптоту $y=1/2$ и краевое условие $\lim\limits_{x\to 1+} y(x)=0$. На промежутке $(1, \sqrt[3]{4} / (\sqrt[3]{4}-1))$ функция возрастает, на промежутке $(\sqrt[3]{4} / (\sqrt[3]{4}-1), +\infty)$ убывает, точка $(\sqrt[3]{4} / (\sqrt[3]{4}-1), \sqrt[3]{4}/3)$ — точка локального максимума. Существует точка $x_0=x(t_0)$, $x_0>\sqrt[3]{4} / (\sqrt[3]{4}-1)$ такая, что на промежутке $(1, x_0)$ функция выпукла вверх, на промежутке $(x_0, +\infty)$ выпукла вниз, точка $(x(t_0), y(t_0), t_0\in(1, \sqrt[3]{2}))$ — точка перегиба. Заметим еще, что при параметрическом задании кривой, если существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=a$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=b$, то точка (a, b) также считается принадлежащей этой кривой. Таким образом, в нашем случае точка $(1, 0)$ принадлежит кривой. Имеем $\lim\limits_{x\to 1+} y'_x=\lim\limits_{t\to -\infty} y'_x=-\infty$ для $t<-1$ и $\lim\limits_{x\to 1+} y'_x=\lim\limits_{t\to +\infty} y'_x=+\infty$ для $t>1$.

Таким образом, ветвь кривой, подходящая снизу к точке $(1, 0)$, в этой точке имеет правую полукасательную — луч $x=1$, $y\leqslant 0$; ветвь кривой, подходящая сверху к точке $(1, 0)$, имеет в этой точке правую полукасательную — луч $x=1$, $y\geqslant 0$. Угол между этими лучами равен π, следовательно, кривая имеет в точке $(1, 0)$ вертикальную касательную $x=1$. Объединяя все сказанное, строим кривую (см. рис. 39, *в*).

Задачи

Найти производную следующей функции:

1. $y=\dfrac{(x+\sqrt[3]{x})^2}{x^3}$.

2. $y=(3x-5)^6$.

3. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(3x+4)^2}}$.

4. $y=\sqrt[4]{(8x-3)^3}$.

5. $y=\dfrac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x\sqrt{1-x}}$.

6. $y=\dfrac{1}{\sin^3 2x}$.

7. $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

8. $y=\ln \operatorname{tg} x+\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} 2x$.

9. $y=e^{3x}\cdot(x+3)$.

10. $y=e^{-x}(\cos x+\sin x)$.

11. $y=3^{\sin^2 \frac{x}{2}}$.

12. $y=\log_2 \dfrac{\cos x+x\sin x}{\sin x-x\cos x}$.

13. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-2x}{1+2x}}$.

14. $y=x^2\operatorname{arctg} x$.

15. $y=x\cdot 2^{1-x^2}$.

16. $y=\dfrac{\sin 2x+1}{\sin x-\cos x}$.

17. $y=2^{\sqrt[5]{\operatorname{tg} 5x+1}}$.

18. $y=\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$.

19. $y=3^{\ln^2(1+e^{-x})}$.

20. $y=\arccos\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$.

21. $y=x^2\cdot\arccos 3x$.

22. $y=4^{x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

23. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\arcsin x^3}$.

24. $y=2^{\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+1}}$.

25. $y=(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}$.

26. $y=(\operatorname{arctg} 4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}$.

27. $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}$.

28. $y=(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}$.

29. $y=\left(\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}$.

30. $y=\arcsin(\sin x)$.

31. $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

32. $y=\begin{cases}(x+1)\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x+1}+2x, & x\neq -1,\\ -2, & x=-1.\end{cases}$

33. Найти $f'(0)$, если

а) $f(x)=|x|\,(1-\cos x)$;

б) $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^4\sin\dfrac{5}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{4}{3x}+\dfrac{x}{2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

34. Найти числа a_1, b_1, a_2, b_2 так, чтобы следующие функции были дифференцируемы на всей числовой прямой:

а) $y=\begin{cases}a_1x+b_1, & x>\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right],\\ a_2x+b_2, & x<-\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

б) $y=\begin{cases}a_1x^2+b_1, & x>1,\\ x\sin\pi x, & x\in[-1,\ 1],\\ a_2x+b_2, & x<-1;\end{cases}$

в) $y = \begin{cases} a_1(x-2)^2 + b_1, & x > 1, \\ x^2 \operatorname{arctg} x, & |x| \leqslant 1, \\ a_2(x+2)^2 + b_2, & x < -1; \end{cases}$

г) $y = \begin{cases} a_1x^2 + b_1, & x < \frac{1}{e}, \\ x^2 \ln x, & \frac{1}{e} \leqslant x \leqslant e, \\ a_2x + b_2, & x > e. \end{cases}$

35. Найти многочлен наименьшей степени $g(x)$ такой, чтобы функция $f(x)$ была: 1) непрерывна на всей прямой, 2) дифференцируема на всей прямой, если

а) $f(x) = \begin{cases} \frac{5x}{4+x^2}, & |x| \geqslant 1, \\ g(x), & |x| < 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x^2e^{-2x}, & |x| \leqslant 1, \\ g(x), & |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x^2}{1+x^2}, & 1 \leqslant |x| \leqslant 2, \\ g(x), & |x| \leqslant 1 \text{ или } |x| \geqslant 2. \end{cases}$

(только пункт 1)

Найти $y'_-(x)$ и $y'_+(x)$ для следующих функций:

36. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

37. $y = x|\sin x|$.

38. $y = \begin{cases} \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} - 1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

39. $y = \begin{cases} x \arcsin \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

40. $y = \arcsin e^{-x^2}$.

41. $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$.

42. Для каких значений p и q функция

$$y = |x|^p \cos \frac{\pi}{|x|^q}, \quad x \neq 0, \quad y(0) = 0 \quad (q > 0)$$

а) непрерывна в точке $x=0$;
б) дифференцируема в точке $x=0$;
в) функция $y'(x)$ непрерывна в точке $x=0$.

Найти производную n-го порядка следующих функций:

43. $y = \cos^4 x$.

44. $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

45. $y = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$.

46. $y = e^{-x} \sin x$.

47. $y = \frac{x+2}{\sqrt[3]{1-x}}$.

48. $y = \frac{1+2x}{3x-1}$.

49. $y=\sin x\cdot\cos^2 2x$. **50.** $y=x^2\sin^2 x$. **51.** $y=x^2\ln\frac{1}{1+x}$.

52. $y=e^{3x}\sin 4x$. **53.** $y=\operatorname{arctg} x$. **54.** $y=e^x\cos^2 x$.

Найти производные указанного порядка следующих функций, заданных параметрически, если:

55. $y'''_{x^3}: x(t)=e^t(\cos t+\sin t),\quad y(t)=e^t(\cos t-\sin t)$.

56. $y''_{x^2}: x(t)=a\left(\cos t-\ln\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right),\quad y(t)=a\sin t$.

57. $y''_{x^2}: x(t)=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\ y(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

58. $y'''_{x^3}: x(t)=a(1+\cos t)\cos t,\quad y(t)=a(1-\cos t)\sin t$.

59. $y'''_{x^3}: x(t)=a\cos t+(at+b)\sin t,\quad y(t)=a\sin t-(at+b)\cos t$.

60. $y'''_{x^3}: x(t)=a\cos^5 t,\quad y(t)=a\sin^5 t$.

61. $y'''_{x^3}: x(t)=t^2,\quad y(t)=\ln\sin t-t\operatorname{ctg} t$.

62. $y''_{x^2}: x(t)=t^3+3t,\quad y(t)=t\operatorname{arctg} t-\ln\sqrt{1+t^2}$.

Найти производные y'_x и y''_{x^2} следующих функций, заданных неявно, если:

63. $x+y=e^{x-y}$.

64. $x^2-1+\cos xy=0$.

65. $x^3+4y^3-3yx^2=2$.

66. $x^2+2xy+y^2-4x+2y=2,\ x=1$.

67. $x(x^2+y^2)=a(x^2-y^2),\ x=\frac{a}{2}$.

68. $x\cos\pi y-y\sin\pi x=x-1,\ x=y=\frac{1}{2}$.

Сделать указанную замену переменных в следующих уравнениях:

69. $x^2y''-4xy'+6y=0,\quad x=e^t,\quad y=y(t)$.

70. $(tu')'+u^nt^\sigma=0,\quad s=\ln t,\quad u=u(s)$.

71. $v''+\frac{v'}{t}+\left(1-\frac{\mu^2}{t^2}\right)v=0,\quad u=\sqrt{t}\,v,\quad u=u(t)$.

72. $u''+\frac{\mu}{t^2}u=0,\quad u=\sqrt{t}\,z,\quad t=e^s,\quad z=z(s)$.

73. $(x^2-1)u''+2xu'-\frac{m^2}{x^2-1}u=0,\quad x=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad u=u(t)$.

74. $u''-q(t)u=0,\quad u=\sqrt{t}\,v,\quad s=\frac{1}{2}\ln t,\quad v=v(s)$.

75. $(t^3u')'+t^3u^2=0,\quad s=\frac{1}{2}t^2,\quad u=\frac{2v}{s},\quad v=v(s)$.

76. $(\sqrt{t}\,u')'-t^{1/2}u^5=0,\quad s=2\sqrt{t},\quad u=4v,\quad v=v(s)$.

77. $y''+2y(y')^2=0,\quad x=x(y)$.

78. $y'-\frac{x-y}{x+y}=0,\quad x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad r=r(\varphi)$.

79. $(x^2+y^2)^3 y'' - 2(xy'-y)(yy'+x)^2=0,$
$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad r=r(\varphi).$

Написать уравнения касательной и нормали или полукасательной к кривой в заданной точке:

80. $y=2^{-x^2}\cdot\sin\pi x$ а) $x=0$; б) $x=1$.

81. $x(t)=e^{-t}\sin t, \quad y(t)=e^{-t}\cos t$ а) $t=0$; б) $t=\frac{\pi}{4}$;
в) $t=\frac{3\pi}{4}$.

82. $x(t)=\pi t-\sin\pi t, \quad y(t)=t-\operatorname{arctg} t$ а) $t=0$; б) $t=1$;
в) $t=2$.

83. $y=x^2\arcsin\frac{x}{2}$ а) $x=1$; б) $x=\sqrt{3}$.

84. $2x^4-y^2-x^2+2y=0, \quad x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

85. $y=\sqrt[3]{1-\cos^3 2x}$ а) $x=0$; б) $x=\frac{\pi}{6}$.

86. $y=x^3\operatorname{ctg}\pi x$ а) $x=\frac{1}{4}$; б) $x=\frac{1}{2}$.

87. $x^2-xy+2y^2+x-y-14=0, \quad x=1$.

88. $2^{\frac{x}{y}}+2^{\frac{2y}{x}}=6 \quad x=2, \quad y=1$.

89. $x(t)=t^3-3t$; $y(t)=t^2+2t$ а) $t=-1$; б) $t=0$;
в) $t=\sqrt{3}$.

Найти углы между кривыми:

90. $y=x^2\ln x, \quad y=4-4x^2$.

91. $y=\frac{x^2}{2}, \quad y=\frac{1}{1+x^2}$.

92. $x(t)=t^3+3t, \quad y(t)=(t+1)\ln(1+t), \quad y=-\frac{x}{1+x^2}$.

93. $y=4+2\sqrt[3]{x-2}, \quad y=2x$.

94. $r=a, \quad r^2=2a^2\cos 2\varphi$.

95. $r=5a\cos\varphi, \quad r=a(4-3\cos\varphi)$.

96. Найти такое значение R, чтобы окружности $x^2+y^2=1$ и $(x-2)^2+y^2=R^2$ пересекались под прямым углом (были ортогональны).

97. Показать, что семейство гипербол $x^2-y^2=a^2$ и $xy=b$ образуют ортогональную сетку, т. е. любая кривая первого семейства пересекает любую кривую второго семейства под прямым углом.

98. Найти угол между левой и правой касательными в угловых точках кривых:

а) $y=\sqrt{\ln(1+9x^2)}$;

б) $y=\arccos\frac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$;

в) $y=\arccos(\sin x)$, $\quad x\in[-2\pi,\ 2\pi]$.

99. Доказать, что любая касательная к логарифмической спирали $r=ae^{m\varphi}$ образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

100. Проверить, что любая касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ образует с ее асимптотами треугольник постоянной площади.

101. Проверить, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ для любой касательной длина ее отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.

102. Проверить, что у трактрисы $x(t)=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}+\cos t\right)$, $y(t)=a\sin t$, $0<t<\pi$, для любой касательной длина ее отрезка от точки касания до оси OX постоянна.

103. Найти угол между двумя окружностями одного радиуса, если центр одной из них лежит на другой.

104. Проверить, что кривая $xy\sin(x+y)=2x^2-y^2$ касается с прямой $y=x$ во всех общих точках, кроме начала координат.

105. Проверить, что расстояние от начала координат до любой нормали к кривой $x(t)=a(\cos t+t\sin t)$, $y(t)=a(\sin t-t\cos t)$ постоянно.

106. Проверить, что касательные к кривой $x(t)=a(t-\sin t)$, $y(t)=a(1-\cos t)$, проведенные в точках, соответствующих значениям t_0 и $t_0+\pi$, перпендикулярны при любом $t_0\neq k\pi$, $k\in Z$.

107. Найти промежутки возрастания и убывания, выделить точки экстремума и выяснить их характер для следующей функции:

а) $y=x^2e^{-x}$; б) $y=(x-2)^3\cdot\sqrt[3]{x^2}$;

в) $y=\frac{3x-7}{(x^2-1)^2}$; г) $y=\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$;

д) $y=\arcsin\sqrt{1-4x^2}-2\sqrt{1-4x^2}$; е) $y=\operatorname{arctg}x-\ln x$;

ж) $y=x^x$; з) $y=x-\sin 2x$;

и) $y=x^2-\ln x^2$; к) $y=\frac{\pi}{2}x-x\operatorname{arctg}x$.

108. Доказать неравенства:

а) $x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $\quad x>0$;

б) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x$, $\quad x>0$;

в) $(x^a+y^a)^{\frac{1}{a}}>(x^b+y^b)^{\frac{1}{b}}$, $\quad x>0$, $\quad y>0$, $\quad 0<a<b$;

г) $e^x + e^{-x} \geqslant x^2 + 2$;

д) $\dfrac{2x + \pi x^2}{2x^2 + 2} > \operatorname{arctg} x, \quad x > 0$;

е) $xe^{-x} \geqslant \dfrac{1}{e} - \dfrac{(x-1)^2}{2}, \quad x > 0$;

ж) $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{\sin y}{y}, \quad 0 < x < y < \pi$;

з) $\dfrac{1}{x} - \operatorname{ctg} x < \dfrac{1}{y} - \operatorname{ctg} y, \quad 0 < x < y < \pi$.

109. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

I. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$: а) $a = -4$, $b = 2$; б) $a = -1$, $b = 0$; в) $a = -6$, $b = 4$;

II. $f(x) = e^x(x^2 - x - 1)$: а) $a = -3$, $b = 0$; б) $a = -3$, $b = 2$; в) $a = -1$, $b = 0$.

110. Найти $\sup\limits_{x \in E} f(x)$ и $\inf\limits_{x \in E} f(x)$, если

I. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 10}$: а) $E = \{x : x > 2\}$; б) $E = \{x : |x| < \infty\}$; в) $E = \{x : |x| < 2\}$.

II. $f(x) = \dfrac{x^2 + x\sqrt{3 + x^2}}{3 + x^2}$: а) $E = \{x : x > 0\}$; б) $E = \{x : |x| < \infty\}$; в) $E = \{x : |x| < 1\}$.

111. Средней порядка s для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}, \text{ если } s \neq 0.$$

Доказать, что

а) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s \leqslant \max(a, b)$;

б) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

в) найти:

1) $\lim\limits_{s \to -\infty} \Delta_s(a, b)$.

2) $\lim\limits_{s \to +\infty} \Delta_s(a, b)$.

3) $\lim\limits_{s \to 0} \Delta_s(a, b)$.

112. Найти вертикальные касательные к кривой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и показать, что кривая лежит между этими касательными.

113. По углам прямоугольной пластинки со сторонами a и b вырезаны четыре равных квадрата. Из оставшейся фигуры образована коробка, высота которой равна стороне квадрата. Найти длину стороны вырезаемого квадрата, при которой получается коробка наибольшего объема.

114. Прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна произведению основания на квадрат высоты этого прямоугольника. Найти форму такого бруса, вытесанного из бревна, поперечное сечение которого есть круг радиуса a, допускающего наибольшую нагрузку.

115. Найти наибольшую площадь прямоугольника, вписанного симметрично в сектор круга радиуса a с центральным углом 2α.

116. Найти наибольший объем конуса с данной образующей длины l.

117. Найти наименьший объем конуса, описанного около полушара радиуса a.

118. Из сектора круга радиуса a свертывается коническая воронка. При каком центральном угле она имеет наибольший объем?

119. Две точки равномерно движутся по осям координат. Скорость первой точки равна v_1, скорость второй — v_2. В некоторый момент времени точки занимали положения $A(a, 0)$ и $B(0, b)$ соответственно. Найти возможное кратчайшее расстояние между ними.

120. Точка движется по плоскости со скоростью v_1, а по оси OX со скоростью v_2, $v_2 > v_1$. Найти путь из точки $A(0, a)$ в точку $B(b, 0)$, требующий наименьшего времени на его прохождение.

121. Рычаг второго рода имеет точку опоры на одном конце и уравновешивается силой F на втором. Вес единицы длины рычага равен m. На расстоянии a от точки опоры к рычагу подвешен груз P. При какой длине рычага l сила F будет наименьшей?

122. Чашка имеет форму полушара радиуса a. В нее опущен стержень длиной l, $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

123. Стержень длиной $2b$ опирается концами на две прямые в вертикальной плоскости, наклоненные к горизонтами под углами α и β. При каком положении стержня его середина находится выше всего?

124. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции ее площадь будет наибольшая, если меньшее основание трапеции равно a, а боковые стороны равны b.

125. Сечение канала представляет равнобедренную трапецию площадью S и высотой h. Каким должен быть угол между боковой стороной и основанием, чтобы сумма длин нижнего основания и боковых сторон была наименьшая?

126. От канала шириной a под прямым углом к нему отходит канал шириной b. Стенки каналов прямолинейны вплоть до вершины угла. Найти наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

127. Яркость освещения выражается формулой $I = \frac{m \sin \varphi}{r^2}$, где φ — угол наклона лучей, r — расстояние от площадки до источника света, m — постоянная (сила источника света). На какой высоте h надо поместить фонарь на столбе, чтобы освещение горизонтальной площадки на расстоянии a от столба было наибольшим?

128. Под каким углом к оси OX надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a>0, b>0)$, чтобы отрезок ее между положительными полуосями координат имел наименьшую длину?

129. Под каким углом к оси OX надо провести прямую через точку $A(a, b)$ $(a>0, b>0)$, чтобы треугольник, образованный этой прямой и положительными полуосями координат, имел наименьший периметр?

130. На оси OX найти точку $A(x, 0)$ $(x>0)$ такую, что отрезок $[1, 4]$ оси OY виден из точки A под наибольшим углом.

131. Написать многочлен Тейлора $T_4(f, 0)$ четвертого порядка для следующих функций:

а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{\sin x}{x}}$; б) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; в) $y=\operatorname{arcctg} x$.

132. Написать многочлен Тейлора $T_n(f, x_0)$ порядка n и оценить разность этого многочлена и функции на указанном отрезке, принимая в качестве x_0 середину этого отрезка:

а) $y=\sqrt[3]{x}$ на $[-9, -7]$, $n=4$; б) $y=\operatorname{tg} x$ на $[-\pi/6, \pi/6]$, $n=5$;

в) $y=\cos x$ на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $n=6$; г) $y=xe^{-x}$ на $[0, 2]$, $n=6$;

д) $y=x\ln(1+x)$ на $[1, 3]$, $n=4$.

133. Вычислить с точностью до 10^{-3}:

а) $\sqrt{10}$; б) $\sqrt[3]{26}$;

в) $\arcsin\dfrac{1}{3}$; г) $\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$;

д) $\ln 10$ $(\ln 3 \simeq 1{,}0986)$; е) $\ln 15$ $(\ln 2 \simeq 0{,}6932)$.

134. Написать многочлен Тейлора третьего порядка в указанной точке для следующей функции $y(x)$, заданной неявно:

а) $x^4-4ax^2y+2ay^3+a^2y^2=0$, $x=y=a$ $(a>0)$;

б) $x^3+y^3-axy=a^3$, $x=0$, $y=a$;

в) $y^3-x^2y+x^5=1$, $x=1$, $y=0$;

г) $x\cos y+y\cos x=2x$, $x=y=0$.

Найти следующие пределы, используя правило Лопиталя:

135. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln x}$.

136. $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$.

137. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{1-\cos x}$.

138. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}{x-\sin x}$.

139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\dfrac{x^2}{2}-\sin x}{\operatorname{arctg}^3 x}$.

140. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x^3)}$.

141. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

142. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{1-\cos x}\right)$.

143. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg} x+\dfrac{2}{2x-\pi}\right)$.

144. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

145. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\pi-2\operatorname{arctg} x)\ln x$.

146. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1}}$.

147. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

148. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x\left(e^{2\pi x}-1\right)}\right]$.

150. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2\operatorname{arctg} x^2-\pi}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln\ln\dfrac{1}{x}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0+}\sin x\cdot\ln x$.

153. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{x}\right)$.

154. $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{\frac{1}{x}}$.

155. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{x}}$.

156. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

157. $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

158. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\pi x}}$.

159. $\lim\limits_{x\to \pi-}(\sin x)^{\pi-x}$.

160. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^x$.

161. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.

162. $\lim\limits_{x\to 0+}(\ln\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

163. $\lim\limits_{x\to 0}(2\sqrt{x}+x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

164. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

165. Найти такое значение a, при котором функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=0$. Проверить существование и найти величины производных $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{\mathrm{V}}(0)$, если

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0;\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$

Исследовать функции и начертить их графики:

166. $y=\frac{x^4}{x^3-2}$.

167. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{1-x^2}}$.

168. $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2}{x^2}}$.

169. $y=\frac{(x+2)(x^2+6x+4)}{(x+1)^3}$.

170. $y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

171. $y=\frac{x^3(x+2)}{(x+1)^3}$.

172. $y=\frac{x^3(3x+4)}{(x+1)^3}$.

173. $y=\frac{x^3(x+3)}{(x+1)^3}$.

174. $y=\sqrt[3]{(x+2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

175. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}$.

176. $y=\sqrt[3]{x^2}\,e^{-\frac{2x}{3}}$.

177. $y=(x-6)\,e^{-\frac{1}{x}}$.

178. $y=\sqrt{x}\ln x$.

179. $y=x^2\ln^2 x$.

180. $y=x\ln^{2/3}x$.

181. $y=\frac{\ln^{2/3}x}{x}$.

182. $y=x^2e^{-x^2}$.

183. $y=x^2e^{-x}$.

184. $y=2x+4\operatorname{arcctg}x$.

185. $y=x\operatorname{arctg}x-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)x$.

186. $y=\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{2x}{5}$.

187. $y=2+\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$.

188. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{17}$.

189. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$.

Исследовать и начертить кривые, заданные параметрически:

190. $x(t)=\frac{t^3}{t^3+1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t^3+1}$.

191. $x(t)=\frac{t}{3-t^2}$, $y(t)=\frac{t(2-t^2)}{3-t^2}$.

192. $x(t)=\frac{(t+2)^2}{t+1}$, $y(t)=\frac{(t-2)^2}{t-1}$.

193. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-t$.

194. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-6t$.

195. $x(t)=\frac{2t}{1+t^2}$, $y(t)=t^3-3t$.

196. $x(t)=\frac{\ln t}{t^2}$, $y(t)=t^2\ln t$.

197. $x(t)=\frac{t^2}{t-1}$, $y(t)=\frac{t}{t^2-1}$.

198. $x(t)=\dfrac{t^3}{t^3+1}, \quad y(t)=\dfrac{t^3}{t+1}$.

199. $x(t)=\dfrac{t^2}{t^2-1}, \quad y(t)=\dfrac{t^2}{t-1}$.

Ответы

1. $-\dfrac{x\sqrt[3]{x}+10\sqrt[3]{x^2}+7}{3x^3\sqrt[3]{x}}$. 2. $18(3x-5)^5$. 3. $\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(3x+4)^5}}$. 4. $\dfrac{6}{\sqrt[4]{8x-3}}$.

5. $\dfrac{6-5x-7x^2+3(3x-2)(1+x)^{2/3}}{6x^2(1-x)^{3/2}(1+x)^{2/3}}$. 6. $\dfrac{-6\cos 2x}{\sin^4 2x}$.

7. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 8. $\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}$. 9. $e^{3x}(3x+10)$.

10. $-2e^{-x}\sin x$. 11. $\dfrac{\ln 3}{2}\sin x\cdot 3^{\sin^2\frac{x}{2}}$. 12. $\dfrac{-x^2}{\ln 2}\cdot\dfrac{2}{(1-x^2)\sin 2x-2x\cos 2x}$.

13. $-\dfrac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$. 14. $2x\,\mathrm{arctg}\,x+\dfrac{x^2}{1+x^2}$. 15. $2^{1-x^2}(1-x^2\ln 4)$.

16. $\dfrac{(\cos x+\sin x)(\sin 2x-3)}{1-\sin 2x}$. 17. $2^{\sqrt[5]{\mathrm{tg}5x+1}}\cdot\dfrac{\ln 2}{(\mathrm{tg}\,5x+1)^{4/5}}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 5x}$.

18. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 19. $-3^{\ln^2(1+e^{-x})}\cdot\dfrac{2\ln 3\ln(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}e^{-x}$.

20. $\dfrac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$. 21. $2x\arccos 3x-\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-9x^2}}$. 22. $4^{x\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\cdot\ln 4\cdot\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\right.$ $\left.+\dfrac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right)$. 23. $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\arcsin x^2}\cdot\ln\frac{1}{3}\cdot 2x}{\sqrt{1-x^4}}$. 24. $2^{\mathrm{arcctg}\sqrt{1+x^2}}\cdot\ln 2\,\times$ $\times\dfrac{-x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. 25. $(\arcsin x)^{\frac{\sin x}{x}}\left(\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}\ln\arcsin x+\right.$ $\left.+\dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{1}{\arcsin x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. 26. $(\mathrm{arctg}\,4x)^{\sqrt[3]{1+x^2}}\left(\dfrac{2}{3}x(1+x^2)^{-2/3}\,\times\right.$ $\left.\times\ln\mathrm{arctg}\,4x+\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}}{\mathrm{arctg}\,4x}\cdot\dfrac{4}{1+16x^2}\right)$. 27. $\left(\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{x\arcsin 2x}\left(\arcsin 2x\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\right.$ $\left.+\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}\ln\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{x\arcsin 2x}{\sin x}\right)$. 28. $(e^x+e^{-x})^{\cos 2x}\left(-2\sin 2x\cdot\ln(e^x+\right.$ $\left.+e^{-x})+\cos 2x\cdot\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$. 29. $\left(\mathrm{ctg}\dfrac{x}{3}\right)^{\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}}\left(\dfrac{1}{3}(e^x-e^{-x})^{-\frac{2}{3}}\,\times\right.$

$\times(e^x+e^{-x})\ln\operatorname{ctg}\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sin\frac{2x}{3}}\cdot\sqrt[3]{e^x-e^{-x}}\Big)$. **30.** $y'=\operatorname{sign}\cos x$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $y'_+\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k$, $y'_-\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=(-1)^{k+1}$, $k\in Z$.

31. $y'=\begin{cases}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+1, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ **32.** $y'=\begin{cases}\frac{-2(x+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}}{x^2+2x+2}+\\ +\operatorname{arctg}^2\frac{1}{x+1}+2, & x\neq -1;\\ \frac{\pi^2}{4}+2, & x=-1.\end{cases}$

33. а) 0; б) 0; в) $\frac{1}{2}$. **34.** а) $a_1=-1$, $b_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=1$, $b_2=\frac{\pi}{2}$; б) $a_1=-\frac{\pi}{2}$, $b_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\pi$, $b_2=\pi$; в) $a_1=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}$, $b_1=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}$, $a_2=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}$, $b_2=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}$; г) $a_1=-\frac{1}{2}$, $b_1=-\frac{1}{2e^2}$, $a_2=3e$, $b_2=-2e^2$. **35.** а) 1) x, 2) $-\frac{1}{5}x^3+\frac{6}{5}x$; б) 1) $\frac{e^{-2}-e^2}{2}x+\frac{e^2+e^{-2}}{2}$, 2) $\left(\frac{-3}{4}e^2-\frac{e^{-2}}{4}\right)x^3+e^2x^2+\left(\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}e^2\right)x+\left(\frac{e^{-2}}{2}-\frac{e^2}{2}\right)$; в) 1) $-\frac{1}{2}x^2+2$. **36.** $y'_+=y'_-=\frac{2\operatorname{sign}x}{1+x^2}$, $x\neq 0$, $y'_+(0)=2$, $y'_-(0)=-2$. **37.** $y'_+=y'_-=|\sin x|+x\cos x\operatorname{sign}\sin x$, $x\neq k\pi$, $y'_+(0)=y'_-(0)=0$, $y'_+(k\pi)=k\pi\operatorname{sign}k$, $y'_-(k\pi)=-k\pi\operatorname{sign}k$, $k\in Z$.

38. $y'_+=y'_-=\frac{2^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{\ln 2}{x}\right)-1}{\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)^2}$, $x\neq 0$, $y'_+(0)=0$, $y'_-(0)=-1$.

39. $y_+=y_-=\frac{1}{x}\operatorname{sign}\left(\sin\frac{1}{x}\right)+\arcsin\cos\frac{1}{x}$, $x\neq\frac{1}{k\pi}$, $x\neq 0$, $y'_+(0)$ и $y'_-(0)$ не существуют, $y'_-\left(\frac{1}{\pi k}\right)=(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $y'_+\left(\frac{1}{\pi k}\right)=(-1)^{k+1}\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right)$. **40.** $y'_+=y'_-=\frac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}$, $x\neq 0$, $y'_+(0)=-\sqrt{2}$, $y'_-(0)=\sqrt{2}$. **41.** $y'_+=y'_-=\frac{\operatorname{sign}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\neq 0$, $y'_+(0)=1$, $y'_-(0)=-1$. **42.** а) $p>0$; б) $p>1$; в) $p>q+1$. **43.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}n\right)+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}n\right)$. **44.** $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\right.$

$-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\Big)$. **45.** $(-1)^{n-2}3^{n-2}e^{-3x}(9x^2+x(9-6n)+n^2-4n+9)$.
46. $(\sqrt{2})^n e^{-x}\sin\left(x+\frac{3\pi n}{4}\right)$. **47.** $\frac{2\cdot(-1)^n}{3^n}(1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-5))\cdot(x-1)^{\frac{2}{3}-n}-\frac{(-1)^n}{3^{n-1}}(1\cdot 4\ \ldots\ (3n-2))(x-1)^{-\frac{1}{3}-n}$, $n\geqslant 2$.
48. $\frac{(-1)^n\cdot 5\cdot 3^{n-1}\cdot n!}{(3x-1)^{n+1}}$. **49.** $\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{\pi n}{2}\right)+\frac{5^n}{4}\sin\left(5x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **50.** $y'=x-x\cos 2x+x^2\sin 2x$, $y''=1-\cos 2x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x$, $y^{(n)}=-2^{n-3}\left(4x^2\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+4nx\cos\left(2x+\frac{\pi(n-1)}{2}\right)+(n^2-n)\cos\left(2x+\frac{\pi(n-2)}{2}\right)\right)$, $n\geqslant 3$. **51.** $y'=-2x\ln(1+x)-\frac{x^2}{1+x}$, $y''=-2\ln(1+x)-\frac{4x+3x^2}{(1+x)^2}$, $y^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-3)!}{(x+1)^n}(2x^2+2xn+n^2-n)$, $n\geqslant 3$. **52.** $5^n e^{3x}\sin(4x+n\varphi)$, $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. **53.** $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}}\sin(n\operatorname{arcctg}x)$. **54.** $\frac{e^x}{2}+\frac{e^x}{2}5^{n/2}\times\cos\left(2x+n\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **55.** $\frac{\cos t-3\sin t}{4e^{2t}\cos^5 t}$. **56.** $\frac{\sin t}{a\cos^4 t}$.
57. $\frac{t^2-1}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$. **58.** $-\frac{3}{16a^2}\frac{\cos 2t}{\cos^5\frac{t}{2}\sin^3\frac{3t}{2}}$. **59.** $\frac{3(at+b)\sin t-a\cos t}{(at+b)^3\cos^5 t}$.
60. $-\frac{3}{25a^2}\frac{1+7\sin^2 t}{\cos^{13}t\cdot\sin t}$. **61.** $\frac{t+2t\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin 2t}{4t^3\sin^4 t}$. **62.** $\frac{1-2t\operatorname{arctg}t}{9(1+t^2)^3}$.
63. $y'_x=-\frac{1-x-y}{1+x+y}$, $y''_{xx}=\frac{4x+4y'}{(1+x+y)^3}$. **64.** $y'_x=\frac{2}{\sin xy}-\frac{y}{x}$, $y''_{xx}=\frac{2y}{x^2}-\frac{2}{x\sin xy}-\frac{4x\cos xy}{\sin^3 xy}$. **65.** $y'_x=\frac{x}{x+2y}$, $y''_{xx}=\frac{2xy+4y^2-x^2}{(x+2y)^3}$. **66.** $y'_x=-2$; $y''_{xx}=\frac{1}{3}$ при $x=1$, $y=-5$; $y'_x=0$, $y''_{xx}=-1/3$ при $x=1$, $y=1$. **67.** $y'_x=\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $y''_{xx}=\frac{-8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{\sqrt{12}}$; $y'_x=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$, $y''_{xx}=\frac{8\sqrt{3}}{9a}$ при $x=\frac{a}{2}$, $y=-\frac{a}{\sqrt{12}}$. **68.** $y'_x=\frac{-2}{\pi+2}$, $y''_{xx}=\frac{\pi^3+2\pi^2+8\pi}{(\pi+2)^2}$. **69.** $y''-5y'+6y=0$. **70.** $u''+e^{s(\sigma+1)}\cdot u^n=0$.
71. $u''+\left(1-\frac{\mu^2-1/4}{t^2}\right)u=0$. **72.** $z''+\left(\mu-\frac{1}{4}\right)z=0$. **73.** $u''+$

$+\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}u'-\frac{m^2}{\operatorname{sh}^2 t}u=0$. **74.** $v''-[1+4e^{4s}q(e^{2s})]v=0$. **75.** $v''+\frac{v^2}{s^2}=0$. **76.** $v''-s^8v^5=0$. **77.** $x''-2x'y=0$. **78.** $r'\cos\left(2\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-r\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$. **79.** $r''-r=0$. **80.** а) $y=\pi x$, $y=-\frac{1}{\pi}x$; б) $y=-\frac{\pi}{2}(x-1)$, $y=\frac{2}{\pi}(x-1)$. **81.** а) $y-1=-x$, $y-1=x$; б) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}$; в) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}$. **82.** а) $y=\frac{2}{\pi^3}x$, $y=-\frac{\pi^3}{2}x$; б) $y+\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{4\pi}(x-\pi)$, $y+\frac{\pi}{4}-1=-4\pi(x-\pi)$; в) $x=2\pi$, $y=2-\operatorname{arctg}2$. **83.** а) $y-\frac{\pi}{6}=\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(x-1)$, $y-\frac{\pi}{6}=\frac{-1}{\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}}(x-1)$; б) $y-\pi=\left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+3\right)(x-\sqrt{3})$, $y-\pi=\frac{-1}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}+3}(x-\sqrt{3})$. 84. $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y=\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=0$; $y-2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $y-2=-\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=2$. **85.** а) полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; б) $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{49}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$, $y-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}=-\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$. **86.** а) $y-\frac{1}{64}=\frac{6-\pi}{32}\left(x-\frac{1}{4}\right)$, $y-\frac{1}{64}=\frac{32}{\pi-6}\left(x-\frac{1}{4}\right)$; б) $y=-\frac{\pi}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)$, $y=\frac{8}{\pi}\left(x-\frac{1}{12}\right)$. **87.** $y=3$, $x=1$ при $x=1$, $y=3$, $y+2=\frac{1}{2}(x-1)$, $y+2=-2(x-1)$ при $x=1$, $y=-2$. **88.** $y-1=\frac{1}{2}(x-2)$, $y-1=-2(x-2)$. **89.** а) полукасательная $y+1=-\frac{1}{3}(x-2)$, $x\leqslant 2$; б) $y=-\frac{2}{3}x$, $y=\frac{3}{2}x$; в) $y-(3+2\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}+1}{3}x$, $y-(3+2\sqrt{3})=-\frac{3}{\sqrt{3}+1}x$. **90.** $\operatorname{arctg}\frac{9}{7}$. **91.** $\operatorname{arctg}3$. **92.** $\operatorname{arctg}2$. Указание. Показать, что точка (0, 0) единственная точка пересечения. **93.** $\varphi=\operatorname{arctg}4/7$ в точках (1; 2) и (3; 6); $\varphi=\operatorname{arctg}1/2$ в точке (2; 4). **94.** $\pi/3$. Указание. Уравнение данных кривых представить в виде $x=x(\varphi)$, $y=y(\varphi)$, полагая $x=r(\varphi)\cos\varphi$, $y=r(\varphi)\sin\varphi$. **95.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$.

Указание. См. предыдущую задачу. **96.** $R=\sqrt{3}$. **98.** а) $\operatorname{arctg}(3/4)$; б) $\operatorname{arctg}(4/3)$; в) $\pi/2$. **103.** $\pi/3$. **107.** а) на промежутках $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ убывает, на промежутке $(0, 2)$ возрастает; при $x=0$ минимум, $x=2$— локальный максимум; б) на промежутках$(-\infty, 0)$, $(4/11, +\infty)$ возрастает, на промежутке $(0, 4/11)$ убывает, $x=0$— локальный максимум, $x=4/11$— локальный минимум; в) на промежутках $(-\infty, -1)$, $(1/9, 1)$, $(3, +\infty)$ убывает, на промежутках $(-1, 1/9)$, $(1, 3)$ возрастает, $x=1/9$ и $x=3$— локальные максимумы; г) на промежутках $(0, 1)$, $(e^4, +\infty)$ убывает, на промежутке $(1, e^4)$ возрастает, $x=1$— минимум, $x=e^4$— локальный максимум; д) на промежутках $(-1/2, -1/4)$, $(0, 1/4)$ возрастает, на промежутках $(-1/4, 0)$, $(1/4, 1/2)$ убывает, при $x=\pm 1/2$ краевой минимум; при $x=\pm 1/4$ максимум, $x=0$— локальный минимум; е) на промежутке $(0, +\infty)$ убывает; ж) на промежутке $(0, 1/e)$ убывает, на промежутке $(1/e, +\infty)$ возрастает, $x=1/e$ минимум. з) на промежутках$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k<x<\frac{5\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$, возрастает, на промежутках $(-\pi/6+\pi k<x<\pi/6+\pi k)$, $k\in Z$ убывает, $x=-\pi/6+\pi k$, $k\in Z$,— локальные максимумы, $x=\pi/6+\pi k$, $k\in Z$, — локальные минимумы; и) на промежутках $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ убывает, на промежутках $(-1, 0)$, $(1, +\infty)$ возрастает, $x=\pm 1$— — минимум; к) на промежутке $(-\infty, +\infty)$ возрастает. **109.** I. а) $\max f(x)=29$, $\min f(x)=-3$; б) $\max f(x)=13$, $\min f(x)=2$; в) $\max f(x)=78$, $\min f(x)=-52$. II. а) $\max f(x)=5e^{-2}$, $\min f(x)=-1$; б) $\max f(x)=e^2$, $\min f(x)=-e$; в) $\max f(x)=1/e$, $\min f(x)=-1$. **110.** I. а) $\sup f(x)=7/5$, $\inf f(x)=8/7$; б) $\sup f(x)=7/5$, $\inf f(x)=0$; в) $\sup f(x)=8/7$, $\inf f(x)=0$. II. а) $\sup f(x)=2$, $\inf f(x)=0$, б) $\sup f(x)=2$, $\inf f(x)=-1/4$; в) $\sup f(x)=3/4$, $\inf f(x)=-1/4$.

111. в) 1) $\min(a, b)$; 2) $\max(a, b)$; 3) $\sqrt{ab}$. **112.** $x=2a$, $x=-a/4$. **113.** $\dfrac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. **114.** $2a/\sqrt{3}$—ширина, $2a\sqrt{2}/\sqrt{3}$—высота.

115. $a^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **116.** $\dfrac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$. **117.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$. **118.** $2\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

119. $\dfrac{|av_2-bv_1|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$. **120.** Если $x=\dfrac{av_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}}<b$, то ломаная ACB, где $C=C(x, 0)$; если $x\geqslant b$, то прямая AB. **121.** $l=\sqrt{2ap/m}$, если $p>ma/2$; $l=a$, если $p\leqslant ma/2$. **122.** При $l\leqslant 4a$ угол наклона стержня к горизонту равен $\arccos\dfrac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}$. **123.** $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, где φ—угол наклона стержня к горизонту. **124.** $\varphi=\arccos\dfrac{\sqrt{a^2+8b^2}-a}{4b}$.

125. $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ при $S\geqslant\dfrac{h^2}{3}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{h^2}{S}$ при $S<\dfrac{h^2}{3}$. **126.** $l=(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$. **127.** $h=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **128.** $\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$. **129.** $\varphi=\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-$

$-\arcsin\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **130.** $x=2$. **131.** а) $1-\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x^4}{3240}$; б) $e-\dfrac{ex}{2}+\dfrac{11e}{24}x^2-\dfrac{7e}{16}x^3+\dfrac{2447e}{5760}x^4$; в) $\dfrac{\pi}{2}-x+\dfrac{1}{3}x^3$. **132.** а) $-2+\dfrac{1}{12}(x+8)+\dfrac{1}{9\cdot 32}(x+8)^2+\dfrac{5}{2^8}(x+8)^3+$ $+\dfrac{5}{3^5\cdot 2^{10}}(x+8)^4$, $|R_4(f,\ 8)|\leqslant\dfrac{22\cdot\sqrt[3]{7}}{3^6\cdot 7^5}\leqslant\dfrac{1}{10^6}$; б) $x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5$, $|R_5(f,\ 0)|\leqslant\dfrac{1}{45}\cdot\dfrac{2^6}{27\sqrt{3}}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^6\cdot\dfrac{189}{8}<\dfrac{1}{50}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-$ $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3+\dfrac{1}{24\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^4-\dfrac{1}{120\sqrt{2}}\times$ $\times\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^5-\dfrac{1}{720\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^6$, $\left|R_6\left(f,\ \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^7\cdot\dfrac{1}{7!}\leqslant$ $\leqslant\dfrac{1}{5000}$; г) $\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2e}(x-1)^2+\dfrac{1}{3e}(x-1)^3-\dfrac{1}{8e}(x-1)^4+\dfrac{1}{30e}(x-1)^5-$ $-\dfrac{1}{144e}(x-1)^6$, $|R_6(f,\ 1)|\leqslant\dfrac{1}{6!}=\dfrac{1}{720}$; д) $2\ln 3+\left(\ln 3+\dfrac{2}{3}\right)(x-2)+$ $+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{9}(x-2)^2+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{27}(x-2)^3+\dfrac{1}{24}\cdot\dfrac{4}{27}(x-2)^4$, $|R_4(f,\ 2)|\leqslant$ $\leqslant\dfrac{6}{5!}\cdot\dfrac{6}{32}<\dfrac{1}{100}$. **133.** а) 3,162; б) 2,963; в) 0,340; г) 1,823; д) 2,303; е) 2,708. **134.** а) $a+(x-a)-\dfrac{1}{4a}(x-a)^2-\dfrac{(x-a)^3}{8a^2}$; б) $a+\dfrac{1}{3}x-$ $-\dfrac{28}{81}x^3$; в) $5(x-1)+130(x-1)^3$; г) $x+x^3$. **135.** 1. **136.** 1/2. **137.** 2. **138.** 1. **139.** 1/2. **140.** 1/2. **141.** 1/2. **142.** 1/2. **143.** 0. **144.** $\dfrac{2}{3}$. **145.** 0. **146.** -1. **147.** -1. **148.** 0. **149.** $\pi^2/6$. **150.** $-1/2$. **151.** 0. **152.** 0. **153.** 2π. **154.** 2. **155.** 1. **156.** $e^{-1/3}$. **157.** e. **158.** $e^{1/\pi}$. **159.** 1. **160.** $e^{\frac{1}{\pi}}$. **161.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **162.** 1. **163.** $\sqrt{e}$. **164.** 1. **165.** а) $a=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1/3$, $f'''(0)=0$, $f^{(IV)}(0)=\dfrac{1}{5}$; б) $a=1$; $f'(0)=1/2$; $f''(0)=1/3$; $f'''(0)=1/4$; $f^{(IV)}(0)=1/5$; в) $a=0$, $f'(0)=1/3$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=2/15$, $f^{(IV)}(0)=0$. **166.** $x\neq\sqrt[3]{2}$; асимптоты $y=x$ и $x=\sqrt[3]{2}$; локальный минимум $\left(2,\ 2\dfrac{2}{3}\right)$; локальный максимум $(0,\ 0)$; на $(-\infty,\ 0)$ и $(2,\ +\infty)$ возрастает; на $(0,\ \sqrt[3]{2})$ и $(\sqrt[3]{2},\ 2)$ убывает; $\left(-\sqrt[3]{4},\right.$ $\left.-\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ — точка перегиба; на $(-\infty,\ -\sqrt[3]{4})$ и $(\sqrt[3]{2},\ +\infty)$ выпукла вниз; на $(-\sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{2})$ выпукла вверх. **167.** $x\neq\pm 1$; четная; асимптоты $x=-1$, $x=1$ и $y=-1$; локальный минимум $(0, 0)$; на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ возрастает; на $(-\infty, -1)$ и $(-1, 0)$ убывает; $(0, 0)$ — точка возврата, вертикальная полукасательная $x=0$, $y \geqslant 0$; $(-1/3, 2)$; $(1/3, 2)$ — точки перегиба; на $(-\infty, -1)$, $(-1/3, 0)$, $(0, 1/3)$, $(1, +\infty)$ выпукла вверх; на $(-1, -1/3)$ и $(1/3, 1)$ выпукла вниз. **168.** $x \neq 0$; четная; асимптоты $x=0$ и $y=-1$; в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ вертикальная касательная; на $(-\infty, 0)$ возрастает; на $(0, +\infty)$ убывает; точки перегиба $\left(-\sqrt{5/3}, \sqrt[3]{4/5}\right)$, $\left(\sqrt{5/3}, \sqrt[3]{4/5}\right)$, $(1, 0)$ и $(-1, 0)$; на $(-\infty, -1)$, $\left(-\sqrt{5/3}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{5/3}\right)$ и $(1, +\infty)$ выпукла вниз; на $\left(-1, -\sqrt{5/3}\right)$ и $\left(\sqrt{5/3}, 1\right)$ выпукла вверх. **169.** $x \neq -1$; $y=0$ при $x=-\sqrt{5}-3$, $x=-2$, $x=\sqrt{5}-3$; асимптоты $x=-1$ и $y=x+6$; локальный максимум $(-3, 5/4)$; на $(-\infty, -3)$ и $(-1, +\infty)$ возрастает; на $(-3, -1)$ убывает; точка перегиба $(0, 8)$, на $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ выпукла вверх; на $(0, +\infty)$ выпукла вниз. **170.** $y=0$ при $x=0$ и $x=-3$; асимптота $y=x-2$; локальный максимум $\left(1, \sqrt[3]{4}\right)$; локальный минимум $(3, 0)$; $(3, 0)$ — точка возврата; вертикальная полукасательная $x=3$, $y \geqslant 0$; на $(-\infty, 1)$ и $(3, +\infty)$ возрастает; на $(1, 3)$ убывает; точка перегиба $(0, 0)$; на $(0, 3)$ и $(3, +\infty)$ выпукла вверх; на $(-\infty, 0)$ выпукла вниз. **171.** $x \neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-2$; асимптоты $x=-1$ и $y=x-1$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$; точка перегиба $(0, 0)$; на $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$ выпукла вниз; на $(-1, 0)$ выпукла вверх. **172.** $x \neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-4/3$; асимптоты $x=-1$ и $y=3x-5$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$; точки перегиба $(-2, -16)$, $(0, 0)$; на $(-\infty, -2)$ и $(-1, 0)$ выпукла вверх; на $(-2, -1)$ и $(0, +\infty)$ выпукла вниз. **173.** $x \neq -1$; $y=0$ при $x=0$ и $x=-3$; асимптоты $x=-1$, $y=x$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$; точки перегиба $(0, 0)$ и $(3, 81/32)$; на $(-\infty, -1)$ и $(0, 3)$ выпукла вниз; на $(-1, 0)$ и $(3, +\infty)$ выпукла вверх. **174.** Четная; положительная, локальный максимум $\left(0, 2\sqrt[3]{4}\right)$; минимум $\left(-2, 2\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(2, 2\sqrt[3]{2}\right)$; возрастает на $(-2, 0)$ и $(2, +\infty)$; убывает на $(-\infty, -2)$ и $(0, -2)$; в точках $\left(-2, 2\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(2, 2\sqrt[3]{2}\right)$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y \geqslant 2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y \geqslant 2\sqrt[3]{2}$; выпукла вверх на $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$. **175.** Нечетная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$. Максимум $\left(-2, 2\sqrt[3]{2}\right)$; минимум $\left(2, -2\sqrt[3]{2}\right)$; возрастает на $(-\infty, -2)$, $(2, +\infty)$; убывает на $(-2, 2)$, в точках $\left(-2, 2\sqrt[3]{2}\right)$ и $\left(2, -2\sqrt[3]{2}\right)$ вертикальные полукасательные $x=-2$, $y \leqslant 2\sqrt[3]{2}$ и $x=2$, $y \geqslant -2\sqrt[3]{2}$, точка перегиба $(0, 0)$; на $(0, 2)$ и $(2, +\infty)$ выпукла вверх, на $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ выпукла вниз. **176.** Неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$ при $x \to +\infty$; локальный максимум $\left(1, \sqrt[3]{e^{-2}}\right)$; минимум $(0, 0)$; возрастает на $(0, 1)$; убывает на $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$; в точке $(0, 0)$ — вертикальная полукасательная $x=0$, $y \geqslant 0$; точки перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $x_1 = 1 - \sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_1 = y(x_2)$, $x_2 = 1 +$

$+\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y_2=y(x_1)$, на $(x_1, 0)$ и $(0, x_2)$ выпукла вверх; на $(-\infty, x_1)$ $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз. **177.** $x\neq 0$, $y=0$ при $x=6$; наклонная асимптота $y=x-7$; вертикальная асимптота $x=0$, $y\leqslant 0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=$ $=0$; локальный максимум $(-3, -9\sqrt[3]{e})$; локальный минимум $(2, -4/\sqrt{e})$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; точка перегиба (x_0, y_0), где $x_0=6/13$, $y_0=$ $=y(x_0)$; на $(-\infty, 0)$ и $(0, 6/13)$ выпукла вверх; на $(6/13, +\infty)$ выпукла вниз. **178.** $x>0$; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; минимум $(1/e^2, -2/e)$; возрастает на $(1/e^2, +\infty)$; убывает на $(0, 1/e^2)$; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=-\infty$; точка перегиба $(1, 0)$; на $(0, 1)$ выпукла вверх; на $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **179.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y=0$; локальный максимум $(1/e, 1/e^2)$; минимум $(1, 0)$; на $(0, 1/e)$ и $(1, +\infty)$ возрастает; на $(1/e, 1)$ убывает; $\lim\limits_{x\to 0+} y'=0$; точки перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $\ln x_1=(-3-\sqrt{5})/2$, $\ln x_2=$ $=(-3+\sqrt{5})/2$, $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$; на $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз; на (x_1, x_2) выпукла вверх. **180.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$; минимум в точке $(1, 0)$; локальный максимум в точке $(e^{-2/3}, e^{-2/3}\sqrt[3]{4/9})$; в точке $(1, 0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; точка перегиба $(\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e/9})$; на $(0, 1)$ и $(1, \sqrt[3]{e})$ выпукла вверх; на $(\sqrt[3]{e}, +\infty)$ выпукла вниз. **181.** $x>0$; неотрицательная; $y=0$ при $x=1$; $x=0$, $y\geqslant 0$ — вертикальная асимптота; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; минимум в точке $(1, 0)$; локальный максимум в точке $(e^{2/3}, e^{-2/3}\sqrt[3]{4/9})$; убывает на $(0, 1)$ и $(e^{2/3}, +\infty)$; возрастает на $(1, e^{2/3})$; в точке $(1, 0)$ вертикальная полукасательная $x=1$, $y\geqslant 0$; точка перегиба (x_1, y_1) и (x_2, y_2), где $\ln x_1=(3-\sqrt{13})/6$, $y_1=y(x_1)$, $\ln x_2=(3+\sqrt{13})/6$, $y_2=y(x_2)$; на $(0, x_1)$ и $(x_2, +\infty)$ выпукла вниз; на $(x_1, 1)$ и $(1, x_2)$ выпукла вверх. **182.** Четная; неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$; максимум в точках $(-1, 1/e)$ и $(1, 1/e)$; минимум в точке $(0, 0)$; возрастает на $(-\infty, -1)$ и $(0, 1)$; убывает на $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$; точки перегиба (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), где $x_1=-\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $x_2=-\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_3=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{5-\sqrt{17}}$, $x_4=\frac{1}{2}\sqrt{5+\sqrt{17}}$, $y_1=y(x_1)$, $y_2=y(x_2)$, $y_3=$ $=y(x_3)$, $y_4=y(x_4)$; на $(-\infty, x_1)$, (x_2, x_3), $(x_1, +\infty)$ выпукла вниз; на (x_1, x_2) и (x_3, x_4) выпукла вверх. **183.** Неотрицательная; $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=0$ при $x\to+\infty$; минимум в точке $(0, 0)$; локальный максимум в точке $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$; возрастает на $(0, 2)$; убывает на $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$; точки перегиба (x_1, y_1), (x_2, y_2), где $x_1=$

$=2-\sqrt{2}$, $y_1=y(x_1)$, $x_2=2+\sqrt{2}$, $y_2=y(x_2)$; на $(-\infty,\ x_1)$, $(x_2,\ +\infty)$ выпукла вниз; на $(x_1,\ x_2)$ выпукла вверх. **184.** $y=2\pi$ при $x=0$, асимптота $y=2x$ при $x\to+\infty$; асимптота $y=2x+4\pi$ при $x\to-\infty$; локальный максимум в точке $(-1,\ -2+3\pi)$; локальный минимум в точке $(1,\ 2+\pi)$; возрастает на $(-\infty,\ -1)$, $(1+\infty)$; убывает на $(-1,\ 1)$; точка перегиба $(0,\ 2\pi)$; на $(-\infty,\ 0)$ выпукла вверх; на $(0,\ +\infty)$ выпукла вниз. **185.** $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)x-1$ при $x\to+\infty$; асимптота $y=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)x-1$ при $x\to-\infty$; минимум в точке $(1,\ -1/2)$; убывает на $(-\infty,\ 1)$; возрастает на $(1,\ +\infty)$; выпукла вниз. **186.** $y=\pi/2$ при $x=0$; асимптота $y=-\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{2}$; локальные минимумы в точках $\left(-2,\ \pi+\frac{4}{5}-\arccos\frac{4}{5}\right)$, $(1,\ -2/5)$; локальные максимумы в точках $\left(-1,\ \pi+\frac{2}{5}\right)$, $\left(2,\ \arccos\frac{4}{5}-\frac{4}{5}\right)$; точки $\left(-1,\ \pi+\frac{2}{5}\right)$, $\left(1,\ -\frac{2}{5}\right)$ — угловые; в точке $\left(-1,\ \pi+\frac{2}{5}\right)$ левая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)+\frac{3}{5}(x+1)$, $x\leqslant-1$, правая полукасательная $y=\left(\pi+\frac{2}{5}\right)-\frac{7}{5}(x+1)$, $x\geqslant-1$; в точке $(1,\ -2/5)$ левая полукасательная $y=-\frac{2}{5}-\frac{7}{5}(x-1)$, $x\leqslant 1$; правая полукасательная $y=-\frac{2}{5}+\frac{3}{5}(x-1)$, $x\geqslant 1$; убывает на $(-\infty,\ -2)$, $(-1,\ 1)$, $(2,\ +\infty)$; возрастает на $(-2,\ -1)$, $(1,\ 2)$; точка перегиба $(0,\ \pi/2)$; на $(-\infty,\ -1)$, $(0,\ 1)$ выпукла вниз; на $(-1,\ 0)$ и $(1,\ +\infty)$ выпукла вверх. **187.** $x>6$, $x\leqslant 0$; $y=2$ при $x=0$; асимптота $y=-x-1$ при $x\to-\infty$; асимптота $y=x+5$ при $x\to+\infty$; локальный минимум в точке $(9,\ 2+9\sqrt{3})$, краевой минимум в точке $(0,\ 2)$; убывает на $(-\infty,\ 0)$ и $(6,\ 9)$; возрастает на $(9,\ +\infty)$; выпукла вниз на $(-\infty,\ 0)$ и $(6,\ +\infty)$. **188.** $y=\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; асимптота $y=-\frac{2x}{17}-\frac{\pi}{2}$; локальный минимум в точке $(-4,\ 8/17-\arcsin 15/16)$; локальный максимум в точке $(0,\ \pi/2)$; точка $(0,\ \pi/2)$ — угловая, левая полукасательная $y=\frac{\pi}{2}+\frac{32}{17}x$; правая полукасательная $y=\frac{\pi}{2}-\frac{36}{17}x$; убывает на $(-\infty,\ -2)$ и $(0,\ +\infty)$; возрастает на $(2,\ 0)$; выпукла вниз на $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$. **189.** $x\neq 0$; $\lim\limits_{x\to 0+} y(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0-} y(x)=\pi$; асимптота $y=(\pi-x)/2$; локальный минимум $\left(-1,\ \frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$;

локальный максимум $\left(1, \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$; убывает на $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$; возрастает на $(-1, 0)$ и $(0, 1)$; выпукла вниз на $(-\infty, 0)$; выпукла вверх на $(0, +\infty)$. **190.** $y=0$ при $x=0$; асимптота $y=-x+1/3$; локальный минимум в точке $(0, 0)$; локальный максимум в точке $(2/3, \sqrt[3]{4}/3)$; на $(-\infty, 0)$ и $(2/3, +\infty)$ убывает; на $(0, 2/3)$ возрастает; $(0, 0)$ точка возврата; вертикальная полукасательная $x=0$, $y\geqslant 0$; $(1, 0)$ точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ и $(0, 1)$ выпукла вверх; на $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **191.** Кривая состоит из трех ветвей. Для первой ветви $y(-x)=-y(x)$; при $x=0$, $x=\pm\sqrt{2}$, $y=0$; локальный минимум в точке $(-1/2, -1/2)$; локальный максимум в точке $(1/2, 1/2)$; правая асимптота $y=-x+\sqrt{3}$; левая асимптота $y=-x-\sqrt{3}$; на $(-\infty, -1/2)$ и $(1/2, +\infty)$ убывает; на $(-1/2, 1/2)$ возрастает; $(0, 0)$ — точка перегиба; на $(-\infty, 0)$ выпукла вниз; на $(0, +\infty)$ выпукла вверх. Вторая ветвь: $x>0$, асимптота $x=0$, $y=-x-\sqrt{3}$; максимум в точке $(\sqrt{2/3}, -4\sqrt{2/3})$; выпукла вверх. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. **192.** Кривая состоит из четырех ветвей. Первая ветвь $x\geqslant 4$, $-9/2<y\leqslant -4$; асимптота $y=-9/2$; краевой максимум $(4, -4)$; на $(4, +\infty)$ убывает; выпукла вниз. Вторая ветвь симметрична первой ветви относительно прямой $y=-x$. Третья ветвь $x>9/2$, $y\geqslant 0$, $y=0$ при $x=16/3$, асимптоты $x=9/2$ и $y=x-6$, минимум в точке $(16/3, 0)$, выпукла вниз. Четвертая ветвь симметрична относительно прямой $y=-x$ второй ветви; $(4, -4)$ — точка возврата кривой с полукасательной $y=-x$, $x\geqslant 4$. **193.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая ветвь $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y(-x)=-y(x)$, $y=0$, при $x=0$, $x=1$ и $x=-1$, $(-\sqrt{3}/2, 2/3\sqrt{3})$ — точка максимума, $(\sqrt{3}/2, -2/3\sqrt{3})$ — точка минимума, на $(-1, -\sqrt{3}/2)$ и $(\sqrt{3}/2, 1)$ возрастает, на $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$ убывает, $(0, 0)$ — точка перегиба, на $(-1, 0)$ выпукла вверх, на $(0, 1)$ выпукла вниз. Вторая ветвь $0<x\leqslant 1$, $y\geqslant 0$; $y=0$ при $x=1$; асимптота $x=1$; $(1, 0)$ — краевой минимум; на $(0, 1)$ убывает; $\left(\sqrt{15}/4, \frac{2}{3}\sqrt{5/3}\right)$ — точка перегиба; на $(0, \sqrt{15}/4)$ выпукла вниз; на $(\sqrt{15}/4, 1)$ выпукла вверх. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. Кривая в точках $(-1, 0)$ и $(1, 0)$ имеет вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$. **194.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая ветвь $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y(-x)=-y(x)$; $y=0$ при $x=0$, $y(-1)=5$, $y(1)=-5$; краевой максимум $(-1, 5)$; краевой минимум $(1, -5)$; на $(-1, 1)$ убывает; $(0, 0)$ — точка перегиба; на $(-1, 0)$ выпукла вниз; на $(0, 1)$ выпукла вверх. Вторая ветвь $0<x\leqslant 1$; $y(1)=-5$; $y(2\sqrt{6}/7)=0$; асимптота $x=0$; $(2\sqrt{2}/3, 4\sqrt{2})$ — точка минимума; на $(0, 2\sqrt{2}/3)$ убывает; на $(2\sqrt{2}/3, 1)$ возрастает; выпукла вниз. Третья ветвь симметрична со второй ветвью относительно начала координат. Кривая имеет в точках $(-1, 5)$ и $(1, -5)$ вертикальные касательные $x=-1$ и $x=1$ и две двойные точки — пересечение первой ветви со второй и третьей. **195.** Кривая состоит из трех ветвей. Первая

ветвь $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $y(1) = -2$; $y(-x) = -y(x)$; $y(0) = 0$, $y(-1) = 2$; краевой максимум $(-1, 2)$; краевой минимум $(1, -2)$; на $(-1, 1)$ убывает; $(0, 0)$ — точка перегиба; на $(-1, 0)$ выпукла вниз; на $(0, 1)$ выпукла вверх. Вторая ветвь $0 < x \leqslant 1$, $y(\sqrt{3}/2) = 0$; асимптота $x = 0$; $(1, -2)$ — краевой минимум; на $(0, 1)$ убывает; выпукла вниз. Третья ветвь симметрична со второй относительно начала координат. Точки возврата кривой $(-1, 2)$, $(1, 2)$; полукасательные $y = 2 - 12(x+1)$, $x \geqslant -1$ и $y = -2 - 12(x-1)$, $x \leqslant 1$. **196.** Кривая симметрична относительно прямой $y = -x$; при $x = 0$. На промежутке $(-\infty, 0]$ имеем $y = 0$ при $x = 0$, асимптота $y = 0$, минимум в точке $(-e/2, -1/2e)$, на $(-\infty, -e/2)$ убывает, на $(-e/2, 0)$ возрастает, $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2, -\sqrt{2}/2e^{\sqrt{2}})$ — точка перегиба, на $(-\infty, -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2)$ выпукла вверх, на $(-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}/2, 0)$ выпукла вниз. **197.** Кривая состоит из пяти ветвей. Первая ветвь $x < -1/2$, $y < 0$; асимптоты $y = 0$, $x = -1/2$; на $(-\infty, -1/2)$ убывает и выпукла вверх. Вторая ветвь $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$; возрастает и выпукла вниз. Третья ветвь $-1/2 < x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $x = -1/2$; убывает и имеет точку перегиба x_0, соответствующей t_0 такому, что $t_0^3 + 3t_0 - 1 = 0$; на $(-1/2, x_0)$ выпукла вниз; на $(x_0, 0)$ выпукла вверх. Четвертая ветвь $x \geqslant 4$, $y \geqslant 2/3$; $y(4) = \frac{2}{3}$; асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$, возрастает и выпукла вверх. Пятая ветвь $x \geqslant 4$, $y \leqslant 2/3$; асимптота $y = 0$; убывает и выпукла вниз. Кривая имеет вертикальные касательные в точках $(0, 0)$ и $(4, 2/3)$ соответственно $x = 0$ и $x = 4$ и двойную точку — пересечение первой и второй ветвей. **198.** $x \neq 1$; $y = 0$ при $x = 0$; асимптоты $x = 1$, $y = 3x + 1$; локальный минимум в точке $(27/19, 27/4)$; на $(-\infty, 1)$ и $(27/19, +\infty)$ возрастает; на $(1, 27/19)$ убывает; $(8/133, 8/175)$ — точка перегиба; на $(-\infty, 8/133)$ выпукла вверх; на $(8/133, 1)$ и $(1, +\infty)$ выпукла вниз. **199.** Кривая состоит из четырех ветвей. Первая ветвь $x \leqslant 0$, $-1/2 < y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = -1/2$; возрастает; выпукла вниз. Вторая ветвь $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $y(0) = 0$; асимптота $y = 2x + \frac{1}{2}$; возрастает; выпукла вверх. Третья ветвь $x > 1$, $y > 0$; асимптоты $x = 1$, $y = 2x + \frac{1}{2}$; минимум в $(4/3, 4)$; на $(1, 4/3)$ убывает; на $(4/3, +\infty)$ возрастает; выпукла вниз. Четвертая ветвь $x > 1$, $y < 0$; асимптоты $x = 1$, $y = -1/2$; возрастает; выпукла вверх; $(0, 0)$ — точка возврата кривой с полукасательной $y = x$, $x \leqslant 0$.

Глава IV
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ НА ПРЯМОЙ

Множества обозначим большими буквами латинского алфавита. Знак «$\bigcup$» обозначает объединение, знак «$\bigcap$» — пересечение, а знак «$\diagdown$» — разность множеств. Для любого множества M через CM обозначим дополнение множества M до всей прямой.

1. Доказать, что каждое из условий $A\bigcap B=A$ и $A\bigcup B=B$ необходимо и достаточно для того, чтобы $A\subset B$.

2. Доказать, что если $A\diagdown B=D$, то $A\subset(B\bigcup D)$.

3. Привести пример таких множеств A и B, что $A\neq B\bigcup(A\diagdown B)$.

4. Доказать, что если $A=B\bigcup D$, то $A\diagdown B\subset D$.

5. Привести пример таких множеств A, B, D, что $A=B\bigcup D$, но $A\diagdown B\neq D$.

6. Доказать, что $A\diagdown(B\bigcup E)=(A\diagdown B)\diagdown E$.

7. Привести пример таких множеств A, B, E, D, что $D=A\bigcup\bigcup(B\diagdown E)$, но $D\neq(A\bigcup B)\diagdown E$.

8. Доказать, что если $D=A\bigcup(B\diagdown E)$, то $(A\bigcup B)\diagdown E\subset D$.

9. Доказать, что $(A_1\bigcup A_2)\diagdown(B_1\bigcup B_2)\subset(A_1\diagdown B_1)\bigcup(A_2\diagdown B_2)$.

10. Привести пример таких множеств A_1, A_2, B_1, B_2, что $(A_1\bigcup A_2)\diagdown(B_1\bigcup B_2)\neq(A_1\diagdown B_1)\bigcup(A_2\diagdown B_2)$.

11. Доказать, что

а) $C(A\bigcup B)=CA\bigcap CB$;

б) $C(A\bigcap B)=CA\bigcup CB$.

12. Доказать, что

а) $C((A\bigcup B)\diagdown(A\bigcap B))=(C(A\bigcup B))\bigcup(A\bigcap B)$,

б) $(A\bigcup CB)\bigcap(CA\bigcup B)=(A\bigcap B)\bigcup(CA\bigcap CB)$.

Пусть E — подмножество числовой прямой. Через E' обозначим множество предельных точек множества E, через $\bar{E}$ — замыкание E, т. е. пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E, через ∂E — множество граничных точек E.

13. Привести примеры множества E, удовлетворяющего соотношению:

а) $E=E'$; б) $E'\subset E$ и $E\diagdown E'\neq\varnothing$; в) $E\subset E'$ и $E'\diagdown E\neq\varnothing$; г) $E'-E\neq\varnothing$ и $E\diagdown E'\neq\varnothing$; д) $E\bigcap E'=\varnothing$; е) $\sup E\subset E$; ж) $\sup E\,\overline{\in}\, E$; з) $\sup E\in E\diagdown E'$.

14. Привести пример множества, имеющего:

а) ровно одну предельную точку; б) ровно шесть предельных точек.

15. Дано множество E на прямой, причем

$$\inf_{n,m,n\neq m}|x_n-x_m|=a>0,$$

где x_n, x_m — любые точки E. Доказать, что множество E не имеет предельных точек.

16. Может ли множество, состоящее только из изолированных точек, иметь предельные точки.

17. Доказать, что, для того чтобы множество было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои точки прикосновения, т. е. точки, любые окрестности которых имеют непустые пересечения с множеством.

18. Доказать, что для любого множества E имеем $\bar{E}=E\cup E'$.

19. Доказать, что если множество включается в производное (т. е. в множество всех предельных точек этого множества), то оно не содержит изолированных точек.

20. Является ли замкнутым множеством множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$.

21. Найти множество предельных точек множества рациональных чисел.

22. Привести пример множества, не являющегося ни замкнутым, ни открытым.

23. Найти множество предельных точек множества иррациональных чисел, больших чем два.

24. Привести пример множества, являющегося одновременно открытым и замкнутым.

25. Доказать, что изолированная точка множества E является граничной.

26. Доказать, что если предельная точка не принадлежит множеству, то она является граничной.

27. Доказать, что $\partial(A\cup B)\subset\partial A\cup\partial B$.

28. Доказать, что $\partial(A\cap B)\subset\partial A\cup\partial B$.

29. Привести пример множества A такого, что A'' непусто, а A''' пусто, где $A''=(A')'$ и $A'''=(A'')'$.

30. Пусть f отображает отрезок $[0, 1]$ на множество $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\}$.

Доказать, что по крайней мере для одного из чисел c_i $(1\leqslant i\leqslant 6)$ множество $f^{-1}(c_i)$ имеет предельную точку. Построить пример отображения f такого, чтобы только одно из таких множеств имело предельную точку; чтобы ровно три таких множества имели предельную точку.

31. Пусть $E=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n$. Доказать, что $E'=\bigcup\limits_{n=1}^{N} E_n'$.

32. Привести пример последовательности множеств E_n таких, что для любого n $E_n'=\varnothing$, а $E'\neq\varnothing$, где $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

33. Доказать, что непустое пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

34. Доказать, что сумма конечного числа замкнутых множеств замкнута.

35. Привести пример последовательности замкнутых множеств F_n такой, что множество $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ не замкнуто; в частности, чтобы множество A было интервалом.

36. Доказать, что сумма любого семейства открытых множеств является открытым множеством.

37. Доказать, что непустое пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством.

38. Привести пример последовательности открытых множеств G_n такой, что множество $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ — не открытое; в частности, множество A — отрезок.

39. Найти замыкание множества $\{2^{p/q}\}$, где p и q натуральные.

40. Доказать, что множество граничных точек любого множества замкнуто.

41. Какова мощность множества всех квадратов на плоскости с рациональными координатами вершин?

42. Доказать, что множество непересекающихся интервалов на прямой не более чем счетно.

43. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества A больше единицы, то множество A не более чем счетно.

44. Доказать, что множество всех многочленов $P(x)=a_0+$ $+a_1x+\ldots+a_nx^n$ с рациональными коэффициентами счетно.

45. Известно, что множество предельных точек множества A счетно.

Доказать, что множество A счетно.

46. Пусть $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и каждое из E_n содержит только изолированные точки. Доказать, что E не более чем счетно.

47. Доказать, что для любого счетного множества $A=\{x_n\}$ существует число a такое, что множество $\{x_n+a\}\cap A$ пусто.

48. Представить множество натуральных чисел как счетное объединение непересекающихся счетных множеств.

49. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$.

50. Построить взаимно однозначное отображение $[0, +\infty)$ на (a, b).

51. Доказать равномощность отрезка $[0, 1]$ и квадрата с вершинами $O(0; 0)$, $A(0; 1)$, $B(1; 0)$; $C(1; 1)$.

52. Доказать, что всякое несчетное множество содержит несчетное ограниченное подмножество.

53. Привести пример счетного множества, каждое ограниченное подмножество которого конечно.

54. Привести пример счетного множества, имеющего ровно три предельные точки.

55. Доказать, что все точки счетного множества граничные.

56. Привести пример последовательности вложенных интервалов, имеющих одну точку пересечения.

57. Привести пример последовательности вложенных интервалов, содержащих в пересечении отрезок.

58. Привести пример последовательности вложенных интервалов (a_n, b_n) такой, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)=\varnothing$. При каком дополнительном условии можно утверждать, что последовательность вложенных интервалов имеет непустое пересечение?

59. Пусть $[a, b]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, где F_n — замкнутые множества. Доказать, что существуют отрезок $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ и число n_0 такие, что $F_{n_0}\cap[\alpha, \beta]=[\alpha, \beta]$.

60. Привести пример последовательности вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ такой, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ содержит не менее двух точек.

61. Доказать, что для последовательности вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ есть или точка, или отрезок.

62. Дано множество $E=\left\{0;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n};\ \ldots\right\}$ и система интервалов $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $((1-\varepsilon)/2^n, (1+\varepsilon)/2^n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, где $0<\varepsilon<1/2$. Выделить конечную подсистему, покрывающую E.

63. Дано множество $E=\left\{1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots\right\}$ и система интервалов $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и $((1-\varepsilon)/2^n, (1+\varepsilon)/2^n)$, $n=0, 1, 2, \ldots, 0<\varepsilon<1/2$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

64. Дано множество $E=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ и система интервалов $(n-\varepsilon, n+\varepsilon)$, $n=1, 2, \ldots, 0<\varepsilon<1/2$. Можно ли выбрать конечное подпокрытие из этой системы интервалов?

65. Привести пример покрытия отрезка системой отрезков, из которых нельзя выбрать конечную систему покрытия.

66. Привести пример покрытия интервала системой интервалов, из которых нельзя выбрать конечную систему покрытия.

67. Привести пример покрытия интервала бесконечной системой отрезков, из которых нельзя выбрать конечного покрытия.

68. Привести пример покрытия числовой прямой интервалами, не допускающего конечного подпокрытия.

69. Доказать, что если из всякого покрытия множества системой интервалов можно выбрать конечное подпокрытие, то множество ограничено (т. е. содержится в некотором отрезке числовой прямой).

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

70. Какое свойство последовательности определяет следующее высказывание:

$\forall n \in N \quad \exists A > 0$, такое, что $|a_n| \leqslant A$.

71. Доказать, что если некоторая подпоследовательность монотонной последовательности ограничена, то и сама последовательность ограничена.

72. Привести пример неограниченной последовательности, у которой есть ограниченная подпоследовательность.

73. Привести пример последовательности, у которой нет ограниченной подпоследовательности.

74. Доказать, что у любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

75. Доказать, что если у последовательности $\{a_n\}$ нет конечных частичных пределов, то последовательность $\{|a_n|\}$ стремится к $+\infty$.

76. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = A$, а предел последовательности $\{a_n\}$ не существует.

Пусть $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и A — множество значений этой последовательности.

77. Показать, что предельная точка A является частичным пределом последовательности $\{a_n\}$.

78. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что точка $a = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ не является предельной точкой множества A.

79. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что ни один из ее частичных пределов не принадлежит A.

80. Показать, что если b есть частичный предел последовательности $\{a_n\}$, то b принадлежит $\bar{A}$.

81. Дана последовательность $\{a_n\}$. Построить последовательность $\{b_n\}$, для которой каждое из a_i является ее частичным пределом. Может ли последовательность $\{b_n\}$ иметь частичные пределы, отличные от a_i?

82. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится. Является ли сходящейся последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$?

83. Построить пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ расходится. При каком условии на $\{a_n\}$ последовательность $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ обязательно сходится?

84. Привести пример последовательности $\{a_n\}$ такой, что $a_n \to +\infty$ и

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 10$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$;

в) последовательность $\{a_{n+1} - a_n\}$ не имеет предела ни конечного, ни бесконечного;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$;

ж) последовательность $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не имеет предела.

85. Привести пример сходящейся последовательности $\{a_n\}$, для которой $n(a_{n+1} - a_n)$ стремится к бесконечности.

86. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

87. Доказать, что если у последовательности $\{a_n\}$ есть две подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ и $\{a_{m_k}\}$, причем объединение индексов n_k и m_k есть все N и $a_{n_k} \to a$, $a_{m_k} \to a$, то и $a_n \to a$.

88. Доказать, что для сходимости последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходилась любая ее подпоследовательность.

89. Доказать, что для сходимости монотонной последовательности достаточно сходимости некоторой ее подпоследовательности.

90. Дана последовательность $\{a_n\}$, у которой все подпоследовательности a_{2^i}, $a_{3\cdot 2^i}$, $a_{5\cdot 2^i}$, $\ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ сходятся к одному и тому же числу b. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{a_n\}$?

91. Привести примеры последовательностей, удовлетворяющих соотношениям:

а) $\inf a_n < \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$;

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n$;

в) $\inf a_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

92. Доказать, что для любой последовательности

$$\inf a_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \sup a_n.$$

93. Доказать, что сходящаяся последовательность достигает либо своей нижней грани, либо своей верхней грани, либо той и другой.

Построить примеры последовательностей этих типов.

94. Доказать, что если $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n < \sup a_n$, то существует такое n_0, что $a_{n_0} = \sup a_n$.

95. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0);$

в) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n;$

г) $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n \geqslant 0,\ b_n \geqslant 0).$

96. Привести примеры последовательностей, для которых в соотношениях предыдущей задачи имеют место строгие неравенства.

97. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то для любой последовательности $\{b_n\}$ имеем

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n;$

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n \quad (\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0).$

98. Доказать, что если последовательность $\{a_n\}$ такова, что для любой последовательности $\{b_n\}$ или

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} b_n,$

или

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \quad (a_n > 0),$

то последовательность $\{a_n\}$ сходится.

99. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > q > 0.$

Доказать, что существуют числа C и N такие, что $a_n > Cq^n$ для любого $n > N$.

100. Пусть дана последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < q.$

Доказать, что $a_n = o(q^n)$, $n \to \infty$.

101. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n\, b_n\}$?

102. Привести примеры двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ таких, что последовательность $\{a_n\}$ расходится, а последовательности $\{b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$ сходятся. При каком условии на предел $\{b_n\}$ последовательность $\{a_n\, b_n\}$ может сходиться, если последовательность $\{a_n\}$ расходится.

103. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = A.$$

104. Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = A.$$

105. Доказать, что если $a_n > 0$, $n \in N$ и $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

106. Последовательность $\{a_n\}$ называется последовательностью с ограниченным изменением, если существует число C такое, что для любого $n \in N$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k| \leqslant C.$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится. Привести пример сходящейся последовательности с неограниченным изменением.

107. Доказать, что последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{n}$ расходится.

108. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что:

а) некоторая ее подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится,

б) $\lim_{k\to\infty} \max_{n_k < p \leqslant n_{k+1}} |a_p - a_{n_k}| = 0.$

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

109. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что:

а) некоторая ее подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится,

б) существует число M такое, что для любого $k \in N$ $|n_{k+1} - n_k| < M$,

в) $\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0.$

Доказать, что последовательность $\{a_n\}$ сходится.

110. Пусть $f_n : [0, 1] \to R$. Для натуральных n и m и числа $\varepsilon > 0$ обозначим через $B_{\varepsilon,n,m}$ множество $\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon\}$. Пусть $A_{\varepsilon,n} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{\varepsilon,n,m}$. Доказать, что для сходимости $f_n(x)$ на $[0, 1]$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{\varepsilon,n} = [0, 1]$.

111. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad n \in N, \quad x > -1.$$

112. Доказать, что последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонны и имеют общий предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=e.$$

113. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n,\quad n\in N.$$

114. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\quad n\in N;$

б) $\frac{1}{4n}<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{4}{n},\quad n\in N.$

§ 3. ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА

115. Пусть $y=x^3-3x$.

I. Найти множество на прямой OY, являющееся образом множества: а) $[0, \sqrt{3}]$; б) $[0, 1]$; в) $(-1, 1)$; г) $(-2, 2)$; д) $(-5, 5)$ е) $[-\sqrt{3}, 0]\cup(\sqrt{3}, 2)$; ж) $[-\sqrt{3}, 0]\cup(1/2, \sqrt{3})$.

II. Найти множество на оси OX, являющееся прообразом множества:

а) $(-2, 2)$; б) $[-2, 0]$; в) $(0, 110)$.

116. Пусть $X=[0, 1]$, $Y=[0, 1]$. Какие из следующих функций $y=f(x)$ задают отображение X на Y; какие — X в Y; какие задают биективное отображение (взаимно однозначное), если

а) $f(x)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}$; б) $f(x)=\sin\pi x$; в) $f(x)=2(x-x^2)$;

г) $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$; д) $f(x)=x^3$; е) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

117. Пусть A — любое множество из области определения функции $f(x)$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

118. Пусть A — любое множество из области значений функции $f(x)$. Доказать, что $f(f^{-1}(A))=A$.

119. Пусть A — любое множество из области определения строго монотонной функции $f(x)$. Как соотносятся множества A и $f^{-1}(f(A))$?

120. Пусть A и B — множества из области определения функции $f(x)$.

Доказать, что $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

121. Пусть A и B — множества из области определения функции $f(x)$.

Доказать, что $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

122. Пусть A и B — множества из области определения функции $f(x)$, причем $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение. Тогда $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$. Доказать.

123. Пусть R — область определения функции $f(x)$ и A — любое множество из R. Как соотносятся множества

$f(R\setminus A)$ и $f(R)\setminus f(A)$?

124. Пусть B — область значений $f(x)$ и $A\subset B$. Доказать, что $f^{-1}(B\setminus A)=f^{-1}(B)\setminus f^{-1}(A)$.

125. Доказать, что для любых множеств A и B из области значений функции $f(x)$ верно

а) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

б) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

126. Функция f отображает отрезок $[a, b]$ в отрезок $[a, b]$.

Доказать, что если $f(f(x))\equiv x$, то график функции симметричен относительно прямой $y=x$.

127. Функция f определена на всей числовой прямой и ее график симметричен относительно точки $A(a, b)$ и прямой $x=C$ $(C\neq a)$.

Доказать, что функция f периодическая.

128. Сформулировать, что означает, что функция f не является четной на промежутке $(-l, l)$*.

129. Функция f определена на симметричном промежутке $(-l, l)$.

Доказать, что ее можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

130. Сформулировать утверждение: функция f не является ограниченной на множестве M.

131. Какие из следующих функций являются бесконечно большими при $x\to 1$, какие ограниченными, какие неограниченными:

а) $y=\dfrac{1}{x-1}\sin^2\dfrac{\pi}{x-1}$; б) $y=\dfrac{1}{x-1}\left(\sin\dfrac{\pi}{x-1}+2\right)$;

в) $y=\dfrac{\sin\pi(x-1)}{x-1}$; г) $y=\dfrac{\sin\pi(x-1)}{x-1}\cos\dfrac{\pi}{x-1}$.

132. Привести пример функции, определенной на $[0, 1]$, но неограниченной на любом $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$.

133. Сформулировать, что означает, что функция $f(x)$ не является монотонной на промежутке $[a, b]$.

134. Является ли произведение двух монотонных на $(-\infty, +\infty)$ функций монотонной на $(-\infty, +\infty)$ функцией.

---

* Всюду в дальнейшем требование сформулировать отрицание некоторого утверждения означает, что соответствующую формулировку надо записать на языке символики с использованием кванторов. Так, например, отрицание утверждения «число A является пределом последовательности $\{a_n\}$ при $n\to\infty$» должно быть сформулировано следующим образом: существует положительное число ε такое, что для любого натурального числа N существует натуральное число n, большее числа N, для которого $|a_n-A|\geqslant\varepsilon$, т. е.

$$\exists\varepsilon>0:\ \forall N\in\mathbb{N}\ \exists n>N:\ |a_n-A|\geqslant\varepsilon.$$

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется *монотонно возрастающей* в точке, если существует такое $\delta>0$, что для любого x из левой δ-полуокрестности точки x_0 $(x: x_0-\delta<x<x_0)$ имеем $f(x)\leqslant f(x_0)$ и для любого x из правой δ-полуокрестности $(x: x_0<x<x_0+\delta)$ $f(x)\geqslant f(x_0)$.

135. Привести пример функции, определенной на $[-1, 1]$, возрастающей в точке $x_0=0$ и не являющейся монотонной на отрезке $[-\delta, \delta]$ для любого $\delta>0$.

136. Доказать, что функция, монотонная в каждой точке отрезка $[a, b]$, монотонна на этом отрезке.

137. Следует ли из равенства $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, что f постоянна на (a, b)?

§ 4. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

138. Пусть $f(x)=x^2\cos\frac{\pi}{x}$, $g(y)=\operatorname{sign}^2 y$. Показать, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, $\lim\limits_{y\to 0} g(y)=1$, но $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x))$ не существует. Объяснить, почему неприменима теорема о пределе сложной функции?

139. Доказать, что равенство $\varliminf\limits_{x\to x_0} f(x)=\varlimsup\limits_{x\to x_0} f(x)$ необходимо и достаточно для того, чтобы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

140. Доказать, что существует $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega[f, (x_0-\delta, x_0+\delta)]$ для любой f, ограниченной в некоторой окрестности x_0, где $\omega[f, (\alpha, \beta)]$ есть колебание f на (α, β):

$$\omega[f, (\alpha, \beta)]=\sup_{x_1,x_2\in(\alpha,\beta)}|f(x_1)-f(x_2)|.$$

Этот предел называется *колебанием f в точке x_0* и обозначается $\omega(f, x_0)$.

141. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\omega(f, x_0)=0$.

142. Привести пример ограниченной в некоторой окрестности точки $x_0=0$ функции, для которой $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ не существует, а $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)$ существует.

143. Доказать, что

$$\omega(f, x_0)=\max\big(\varlimsup_{x\to x_0} f(x)-f(x_0),\ \varlimsup_{x\to x_0} f(x)-\varliminf_{x\to x_0} f(x),$$
$$f(x_0)-\varliminf_{x\to x_0} f(x)\big).$$

144. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ не существует. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\varphi(x)$ не существует.

145. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, а $\varphi(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$. Доказать, что $f(x)\varphi(x)$ — бесконечно большая при $x \to x_0$.

146. Что можно сказать о непрерывности в точке x_0 функций $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ и $f(x)g(x)$, если:

а) функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $g(x)$ разрывна в точке x_0;

б) функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0?

147. Построить пример функций $f(x)$ и $g(x)$ таких, что $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0, а $g(f(x))$ разрывна в точке x_0.

148. Функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Пусть $\{a_n\}$ — некоторая числовая последовательность неотрицательных чисел и для любого $n \in N$ существует $\delta_n > 0$ такое, что из неравенства $|x-x_0| < \delta_n$ следует неравенство $|f(x)-f(x_0)| < a_n$. Какое свойство функции описывается этим условием? Каким свойством должна обладать последовательность $\{a_n\}$, чтобы из этого условия следовала непрерывность $f(x)$ в точке x_0?

149. Доказать, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{m}{n} \text{ и дробь } \dfrac{m}{n} \text{ несократима}, \\ 0, & x \text{ — иррациональное} \end{cases}$$

разрывна в каждой рациональной точке и непрерывна в каждой иррациональной.

150. Доказать, что функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — рациональное}, \\ 1, & x \text{ — иррациональное} \end{cases}$$

разрывна в каждой точке.

151. Привести пример функции непрерывной только

а) в одной точке, б) в двух точках, в) в n точках.

152. Доказать, что если

$$f \in C[a, b], \quad g \in C[a, b]$$

и

$$\varphi_1 = \max\{f, g\}, \quad \varphi_2 = \min\{f, g\},$$

то $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$.

153. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция на $(-\infty, +\infty)$ и

$$f(x, n) = \begin{cases} f(x), & x: |f(x)| \leqslant n, \\ n, & x: f(x) > n, \\ -n, & x: f(x) < -n, \quad n \in N. \end{cases}$$

Доказать, что для любого n функция $f(x, n)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

154. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi) \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi)$$

также непрерывны на $[a, b]$.

155. Может ли разрывная функция удовлетворять условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon \forall |h| < \delta \quad |f(x_0 + h) - f(x_0 - h)| < \varepsilon?$$

156. Может ли разрывная функция удовлетворять условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon \forall |h| < \delta \quad |f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)| < \varepsilon?$$

157. Может ли разрывная функция удовлетворять условию

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \colon \forall |h| < \delta, \forall |h'| < \delta \quad |f(x_0 + h) -$$
$$- 2f(x_0) + f(x_0 - h')| < \varepsilon?$$

158. Найти все непрерывные на $(-\infty, +\infty)$ функции, удовлетворяющие условию

а) $f(x) \equiv f(2x)$; б) $f(x_1 + x_2) \equiv f(x_1) \cdot f(x_2)$.

159. Функция $f(x)$ определена на (a, b) и удовлетворяет условию

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2)$$

для любых x_1, $x_2 \in (a, b)$ и любого $0 < \lambda < 1$. Доказать, что $f(x)$ непрерывна на (a, b). Верно ли утверждение, если вместо интервала (a, b) взят отрезок $[a, b]$?

160. Привести пример разрывной в каждой точке отрезка $[0, 1]$ функции такой, что ее квадрат является непрерывной на $[0, 1]$ функцией.

161. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и не принимает на нем нулевого значения. Показать, что существует положительное число $\eta > 0$ такое, что для любого $x \in [a, b]$ $|f(x)| \geqslant \eta$. Показать, что для интервала это утверждение неверно.

162. Пусть $f(x)$ — непрерывная на (a, b) функция и x_1, x_2, x_3 — любые точки из этого интервала. Тогда существует точка ξ на интервале (a, b) такая, что

$$f(\xi) = \frac{1}{3} (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)).$$

Доказать.

163. На плоскости задан произвольный многоугольник и некоторый вектор. Показать, что найдется прямая, параллельная этому вектору, рассекающая многоугольник на две части одинаковой площади.

164. На плоскости задан произвольный многоугольник и некоторая точка. Показать, что найдется прямая, проходящая через эту точку и рассекающая многоугольник на две части одинаковой площади.

165. Доказать, что любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.

166. Доказать, что если $f \in C[a, b]$, $g \in C[a, b]$ и $f(a) > g(a)$, $f(b) < g(b)$, то найдется точка $x_0 \in (a, b)$, в которой $f(x_0) = g(x_0)$.

167. Доказать, что для любой непрерывной функции $f: [0, 1] \to [0, 1]$ существует точка $x_0 \in [0, 1]$, в которой $f(x_0) = x_0$ (неподвижная точка отображения f).

168. Привести пример непрерывного отображения $f: (0, 1) \to (0, 1)$, у которого не существует неподвижной точки.

169. Функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и $f(f(x)) \equiv x$ для всех $x \in (-\infty, +\infty)$.

Доказать, что существует x_0 такое, что $f(x_0) = x_0$.

170. Функция $f(x)$ непрерывна на окружности. Доказать, что существуют две диаметрально противоположные точки a и b такие, что $f(a) = f(b)$.

171. Привести пример функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 1]$, принимающей на любом отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$ все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, но не являющейся непрерывной на $[0, 1]$.

172. Привести пример функции, ограниченной на отрезке $[0, 1]$, но разрывной на этом отрезке.

173. Доказать, что непрерывная на отрезке функция, не имеющая на этом отрезке ни одного внутреннего экстремума, монотонна. Привести пример, показывающий, что для разрывных функций это утверждение неверно.

174. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет обратную функцию, то $f(x)$ — монотонная функция на $[a, b]$.

175. Привести пример функции $f: [0, 1] \to [0, 1]$, не являющейся монотонной, для которой существует обратная функция

$g(y): [0, 1] \to [0, 1]$.

176. Привести пример разрывной функции, для которой обратная функция является непрерывной.

177. Привести пример монотонной на $[0, 1]$ функции с бесконечным числом точек разрыва.

178. Доказать, что для функции, определенной на $[a, b]$, множество точек строгого локального экстремума не более чем счетно. Построить пример функции, непрерывной на $[a, b]$, с бесконечным множеством точек строгого локального экстремума.

179. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, взаимно однозначно отображающая $[a, b]$ на $(-\infty, +\infty)$?

180. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, взаимно однозначно отображающая $[a, b]$ на (c, d)?

181. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, взаимно однозначно отображающая $[a, b]$ на $[0, 1] \cup [3, 4]$?

182. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на интервале $(0, 1)$, для которой множеством значений является множество

а) $(0; 2)$; б) $(0; 2)\cup(3; 5)$; в) $(1, +\infty)$; г) $[0, 2]$?

Если нет, то почему, если да, то привести примеры.

183. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на интервале $(-1; 2)$, для которой образом интервала $(0; 1)$ является множество а) $(0; 2)$; б) $(0; 2)\cup(3, 5)$; в) $(1, +\infty)$; г) $[0; 2]$. Если нет, то почему, если да, то привести примеры.

184. Существует ли непрерывное биективное отображение $(-1; 2)$ в R такое, что образом $(0, 1)$ является множество а) $(0; 2)$; б) $(0; 2)\cup(3; 5)$; в) $(1; +\infty)$; г) $[0; 2]$? Если нет, то почему, если да, то привести примеры.

185. Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, если для любого c множества $\{x, x\in[a, b], f(x)>c\}$ и $\{x, x\in[a, b], f(x)<c\}$ открыты относительно $[a, b]$. Что можно сказать о функции, если таковыми являются только множества вида $\{x : x\in[a, b], f(x)>c\}$? Привести пример разрывной функции, для которой все такие множества открыты относительно $[a, b]$.

186. Пусть функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0, 1]$ и $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для любого $x\in[0, 1]$. Доказать, что $f(x)$ имеет на $[0, 1]$ хотя бы одну точку непрерывности.

187. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то множество $E_1\cup E_3\cup E_5\cup\ldots$ замкнуто, где E_n — множество тех точек из $[a, b]$, для которых $n\leqslant f(x)\leqslant n+1$. Показать, что в случае интервала (a, b) предыдущее утверждение может быть неверно. Рассмотреть пример $y=\dfrac{1}{x}$, $(a; b)=(0; 2)$.

188. Сформулировать, что означает, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве M.

189. Привести пример функции непрерывной, но не равномерно непрерывной на множестве а) $0<x<1$; б) $x\geqslant 0$.

190. Привести пример функции неограниченной и равномерно непрерывной на множестве $x\geqslant 0$.

191. Доказать, что равномерно непрерывная на ограниченном множестве функция ограничена на нем.

192. Привести пример ограниченной и непрерывной на $(0; 1)$ функции, не являющейся равномерно непрерывной на нем.

193. Доказать, что функция $f(x)$, равномерно непрерывная на каждом из двух отрезков, равномерно непрерывна на их объединении. Привести пример, показывающий, что для интервалов это утверждение неверно.

194. Доказать, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале (a, b) тогда и только тогда, когда существует непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $g(x)$, совпадающая с $f(x)$ на интервале (a, b).

195. Известно, что $f(x)$ непрерывна при $x\geqslant 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=C$.

Доказать, что а) $f(x)$ ограничена при $x \geqslant 0$; б) $f(x)$ равномерно непрерывна на $x \geqslant 0$.

196. Является ли функция $\sqrt{x}$ равномерно непрерывной на

а) $[0, 1]$; б) $(0; 1)$; в) $[5, +\infty)$; г) $[0, +\infty)$; д) $[0, +\infty)$.

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ

197. Привести пример двух недифференцируемых функций в точке x_0:

а) произведение которых дифференцируемо в точке x_0;

б) сумма которых дифференцируема в точке x_0;

г) частное которых дифференцируемо в точке x_0.

198. Привести пример функции, дифференцируемой в точках $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$ и разрывной в остальных точках отрезка $[-2, 2]$.

199. Имеют ли производные в точке $x=0$, следующие функции:

а) $y=x|\sin x|$; б) $y=x|x^3|$.

200. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, а функция $g(x)$ не является дифференцируемой в x_0, но является непрерывной в x_0.

Доказать, что функция $f(x) \cdot g(x)$ не является дифференцируемой в x_0.

201. Найти $f'(0)$, если $f(x)=\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)$.

202. Привести пример монотонной функции, производная которой не является монотонной функцией.

203. Пусть функция $f(x)$ — нечетная, дифференцируемая на $(-\infty, +\infty)$. Доказать, что $f'(x)$ — четная функция.

204. Доказать, что производная периодической функции является периодической функцией.

205. Доказать, что функция $f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}\,x$ не является периодической.

206. Привести пример функции $f(x)$ такой, что $f'(x)$ существует всюду на $(-1; 1)$, ограничена и разрывна только в точке $x=0$.

207. Привести пример функции $f(x)$ такой, что $f'(x)$ существует всюду на $(-2; 2)$, ограничена и множество

$\left\{\pm\dfrac{1}{n}\right\}$, $n=1, 2, \ldots$, есть множество точек разрыва $f'(x)$.

208. Известно, что $f(x)$ дифференцируема в точке $x=0$ и $\varphi(x)=$

$$=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

Доказать, что $f(\varphi(x))$ имеет в точке $x=0$ производную, равную 0.

209. Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a, +\infty)$, у которой существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, но не существует предела производной при $x\to+\infty$.

210. Привести пример ограниченной функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a, +\infty)$, такой, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$, но не существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

211. Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на $(0; 1)$, такой, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$, но предела производной не существует при $x\to 0$.

212. Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на $(0; 1)$, такой, что $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)=\infty$, но $f(x)$ является ограниченной на $(0; 1)$.

213. Показать, что если для непрерывной в точке x_0 функции f существует $\lim\limits_{x\to x_0+} f'(x)=A$, то существует $f'_+(x_0)=A$.

214. Привести пример непрерывной на $[-1, 1]$ функции $f(x)$ такой, что для всех $x\in(-1, 1)$ производная $f'(x)$ существует, но не существует $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to 0-} f'(x)$.

215. Привести пример функции, непрерывной в $x_0=0$, но не имеющей в $x_0=0$ ни левой, ни правой производной.

216. Рассмотрим функции $y_1(x)=|x|$, $y_2(x)=x$ и $y_3(x)=\sqrt[3]{x^2}$. На отрезке $[-1; 1]$ у этих функций нет точки, в которой производная обращается в нуль.

Какое условие теоремы Ролля нарушено?

217. Доказать, что если все корни многочлена $P_n(x)$ степени n действительны, то все уравнения $P_n^{(k)}(x)=0$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ имеют действительные корни.

218. Доказать, что функция $f\colon (a, b)\to R$, имеющая ограниченную производную на $(a; b)$, равномерно непрерывна на $(a; b)$.

219. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[0; 1]$ и $f'(0)\times \times f'(1)<0$. Тогда на интервале $(0, 1)$ существует c такое, что $f'(c)=0$. Доказать.

220. Пусть $f(x)=F'(x)$ для любого $x\in[a, b]$. Доказать, что для любых $\alpha\in[a, b]$, $\beta\in[a, b]$, если $f(\alpha)<f(\beta)$ и $f(\alpha)<c<f(\beta)$, то существует точка γ такая, что $\gamma\in(\alpha, \beta)$ и $f(\gamma)=c$ (свойство Дарбу).

221. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1, x_2]$ и $0< <x_1<x_2$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_2-x_1}\left(x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)\right)=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

где $\xi\in(x_1, x_2)$.

222. Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a; b)$. Верно ли, что для любого $\theta \in (a; b)$ существуют $x_1 \in (a, b)$, $x_2 \in (a, b)$ такие, что $\theta \subset (x_1, x_2)$ и

$$f'(\theta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

223. Нарисовать график такой непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, что множество ξ, удовлетворяющее соотношению $f(1) - f(0) = f'(\xi)$, состоит ровно из трех точек.

224. Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на $[0; 1]$, дифференцируема на $(0; 1)$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f'(x) \geqslant -2$. Доказать, что $f(x)$ — линейная функция.

225. Функция $f(x)$ имеет на $(0, +\infty)$ непрерывную производную и $f(0) = 1$, $|f(x)| \leqslant e^{-x}$ для $x \geqslant 0$. Доказать, что существует точка x_0 такая, что $f'(x_0) = -e^{-x_0}$.

226. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы при $x \geqslant x_0$ и $|f'(x)| \leqslant \varphi'(x)$.

Доказать, что для $x \geqslant x_0$ имеем $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

227. Пусть $\varphi \in C^n(x \geqslant x_0)$, $\psi \in C^n(x \geqslant x_0)$; $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ для $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ и $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ для $x \geqslant x_0$.

Доказать, что для $x \geqslant x_0$ имеем $\varphi(x) > \psi(x)$.

228. Функция $f(x)$ для всех x удовлетворяет условию

$$f(x + \Delta x) - f(x) = A\Delta x + \alpha(x, \Delta x),$$

где $|\alpha| \leqslant C|\Delta x|^3$.

Доказать, что $f(x) = Ax + B$.

229. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ и для любых $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|^\alpha$, где K — константа и $\alpha > 1$. Доказать, что $f(x)$ постоянна на $[a, b]$.

230. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0; +\infty)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, $|f''(x)| \leqslant 1$.

Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

231. Пусть $f(x)$ дважды дифференцируема на всей оси и ограничена.

Доказать, что существует x_0 такое, что $f''(x_0) = 0$.

232. Функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, не меняет направление выпуклости на $(0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

233. Известно, что функция $f(x)$ дифференцируема для $x \geqslant a$, не меняет направление выпуклости на $[a, +\infty)$, прямая $y = kx + b$ является асимптотой $f(x)$ при $x \to +\infty$ и график $f(x)$ расположен ниже асимптоты.

Доказать, что при этих условиях $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = k$ и $f(x)$ выпукла вверх.

234. Привести пример двух выпуклых вверх функций таких, что их произведение не является выпуклой вверх функцией.

235. Функция $f(x)$ дифференцируема на $[0, 1]$, $f(0)=0$, и для некоторого $k>0$ справедливо неравенство $|f'(x)|\leqslant k|f(x)|$.

Доказать, что $f(x)\equiv 0$, $x\in[0, 1]$.

236. Пусть $f\in C^{\infty}(-\infty, +\infty)$ и существует $L>0$ такое, что $|f^{(n)}(x)|\leqslant L$ для любых n и любых x.

Доказать, что если $f\left(\frac{1}{n}\right)=0$ при $n\in N$, то $f(x)\equiv 0$.

237. Пусть $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, $f(0)=f(1)=0$ и $\min\limits_{x\in[0;\,1]} f(x)=-1$. Используя формулу Тейлора, доказать, что $\max\limits_{x\in[0;\,1]} f''\geqslant 8$.

Ответы, решения, указания

3. Например, $A=(0;3)$; $B=(1;5)$. **5.** Например, $A=[0;10]$; $B=[0;7]$; $D=[5;10]$. **6.** Пусть $x\in A\setminus(B\cup E)=D$. Это значит, что $x\in A$, но $x\overline{\in} B\cup E$, т. е. 1) $x\in A$, но 2) $x\overline{\in} B$ и 3) $x\overline{\in} E$. Из 1) и 2) следует, что $x\in A\setminus B$, а отсюда и из (3) следует, что $x\in(A\setminus B)\setminus E$. Итак, $A\setminus(B\cup E)\subset(A\setminus B)\setminus E$. С другой стороны, пусть $x\in(A\setminus B)\setminus E$, тогда $x\in(A\setminus B)$, но $x\overline{\in} E$, т. е. 1) $x\in A$, но 2) $x\overline{\in} B$ и 3) $x\overline{\in} E$. Из 2) и 3) следует, что $x\overline{\in}(B\cup E)$, отсюда и из 1) следует, что $x\in A\setminus(B\cup E)$, т. е. $(A\setminus B)\setminus E\subset A\setminus(B\cup E)$. Тем самым доказано равенство множеств $(A\setminus B)\setminus E$ и $A\setminus(B\cup E)$. **7.** Например, $A=[0, 1]$; $B=[1/2, 2]$; $E=[2/3, 3/4]$; $D=[0;2]$. **10.** Например, $A_1=[0;2]$; $A_2=[2;4]$; $B_1=[1;3]$; $B_2=[5/2, 5]$. **11.** а) Пусть $x\in C(A\cup B)$, это значит, что $x\overline{\in}(A\cup B)$, т. е. $x\overline{\in} A$ и $x\overline{\in} B$; отсюда следует, что $x\in CA$ и $x\in CB$, т. е. $x\in CA\cap CB$. С другой стороны, если $x\in CA\cap CB$, это значит, что $x\in CA$ и $x\in CB$, т. е. $x\overline{\in} A$ и $x\overline{\in} B$, следовательно, $x\overline{\in} A\cup B$, т. е. $x\in C(A\cup B)$. Итак, $C(A\cup B)\subset CA\cap CB$ и $CA\cap CB\subset C(A\cup B)$, т. е. $C(A\cup B)=CA\cap CB$. **13.** Например, а) $E=[0;1]$; б) $E=[0, 1]\cup\{-1\}\cup\{2\}$; в) $E=(0;1)$; г) $E=(0, 1)\cup\{2\}\cup\{3\}\cup[4, 5]$; д) $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n=1, 2, \dots$, или $E=\{1\}\cup\{2\}$; е) $E=(-1, 1)\cup\{2\}$, или $E=(-1, 1]$; ж) $E=[0, 2)$; з) $E=[0, 2]\cup\{4\}\cup\{5\}$. **14.** Например, а) $E=\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$, $n=1, 2, \dots$; б) $E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4\cup E_5\cup E_6$, где $E_i=\left\{2i+\frac{1}{n}\right\}$; $n=1, 2, \dots$, $1\leqslant i\leqslant 6$. **15.** Указание. Доказать от противного. **16.** Да, например, множество $E=\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n=1, 2, \dots$. **20.** Нет (см. следующую задачу). **21.** Все действительные числа. **22.** Например, множество всех рациональных чисел или промежуток $E=(0, 10]$. **23.** Все действительные числа не меньше чем два. **24.** Вся прямая и пустое множество. **29.** Например, $A=\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{4(n+1)^2}\cdot\frac{1}{k}\right\}$,

$n, k \in N$. Указание. Показать, что $A' = \left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$, $A'' = \{0\}$, $A''' = \varnothing$.
30. Например, а) $f(0) = c_1$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = c_2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = c_3$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = c_4$, $f(1) = c_5$, $f(x) = c_6$ для $x \in [0, 1] \setminus \left\{0; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1\right\}$; б) $f(0) = c_1$; $f(x) = c_2$ для $x \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = c_3$; $f(x) = c_4$ для $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $f\left(\frac{2}{3}\right) = c_5$; $f(x) = c_6$ для $x \in \left(\frac{2}{3}; 1\right)$. **32.** Например, E_n состоит из одной точки $\frac{1}{n}$, $n \in N$. **35.** Например, $F_n = \left[-\frac{n-1}{n}, \frac{n-1}{n}\right]$, $n = 2, \ldots$. **38.** Например, $G_n = \left(-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)$, $n \in N$. **39.** $x \geqslant 0$. Указание. Показать, что в любом интервале (α, β), если $0 < \alpha < \beta$, найдется точка $x_0 = 2^{p/q}$. **41.** Данное множество счетно. Указание. Каждый такой квадрат характеризуется упорядоченным набором восьми рациональных чисел. **42.** Указание. Показать, что это множество эквивалентно некоторому подмножеству рациональных чисел. **43.** Использовать утверждение задачи № 42. **45.** Указание. Рассмотреть множество $A \setminus A'$, предположив, что A несчетно, прийти к противоречию. **46.** Применить утверждение задачи № 42 к каждому из E_n. **47.** Указание. Так как A — счетное, то множество B значений $|x_n - x_m|$, где $x_n \in A$, $x_m \in A$, не более чем счетно (почему?); следовательно, найдется число a, не входящее в B, т. е. $x_n + a \neq x_m$ ни для каких $x_n \in A$, $x_m \in A$. **48.** Например, $N = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, 2^k\right)$. **49.** Например, обозначим $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ для $n = 2, 3, \ldots$. Положим $\varphi(x_k) = x_{k+2}$, $k = 0, 1, \ldots$; $\varphi(z) = z$, если $z \neq \frac{1}{2^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда φ — искомое отображение. **50.** Например, пусть $\varphi_1(x)$ взаимно однозначно отображает $[0, 1]$ на $\left(a, \frac{a+b}{2}\right]$ (сравнить с предыдущей задачей), а $\varphi_2(x) = \operatorname{arctg}(x-1) \cdot \frac{b-a}{\pi} + \frac{a+b}{2}$. Нужное отображение есть $\varphi_1(x)$ на $[0, 1]$ и $\varphi_2(x)$ на $(1, +\infty)$. **51.** Указание. Каждая точка квадрата характеризуется двумя действительными числами. **52.** Указание. Если A_n есть пересечение множества A с отрезком $[-n, n]$, $n \in N$, то $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. **53.** Например, множество натуральных чисел. **54.** Например, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, где $E_i = \left\{2i + \frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$, $n \in N$, $i = 1, 2, 3$. **56.** Например, $\left(-\frac{1}{n} + 2, 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n \in N$. **57.** Например, $\left(-\frac{1}{2^n} - 4, -2 + \frac{1}{n+3}\right)$, $n \in N$. **58.** Например, $\left(1, \frac{n+1}{n}\right)$,

$n \in N$. Последовательность вложенных интервалов имеет непустое пересечение, если замыкание последующего интервала полностью входит в предыдущий интервал. **59.** Предположим противное. Тогда на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ найдется точка, не принадлежащая F_1, следовательно, найдется интервал (α', β'), целиком входящий в дополнение F_1. Возьмем отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, лежащий в этом интервале, тогда в этом отрезке найдется интервал (α_1', β_1'), целиком входящий в дополнение F_2. Таким образом, строится последовательность интервалов (α_n', β_n') так, что для любого n (α_n', β_n') лежит в дополнении к множествам $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ и замыкание (α_n', β_n') — отрезок $[\alpha_n', \beta_n']$ — лежит внутри интервала $(\alpha_{n-1}', \beta_{n-1}')$. Используя результат предыдущей задачи, получаем, что $[\alpha, \beta] \cap \{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n', \beta_n')\} \neq \varnothing$. Это противоречит тому, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n', \beta_n') \subset C\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, а $(C\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n) \cap [\alpha, \beta] = \varnothing$. **60.** Например, $\left[\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{4n^3+2}{n^3+1}\right]$, $n \in N$. **62.** Система состоит из интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ и интервалов $\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right)$ с номерами n, удовлетворяющими условию $2^{n+1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. **63.** Да, хотя множество E незамкнуто. Сравнить с предыдущей задачей. **64.** Нет. **65.** Например, отрезок $[0, 1]$ и совокупность отрезка $[-1, 0]$ и системы отрезков $\left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right]$, $k \in N$. Указание. Показать, что если $A_m = [-1, 0] \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{m}\left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right]\right)$, то для любого m имеем $[0, 1] \setminus A_m \neq \varnothing$. **66.** Например, интервал $(0, 1)$ и система интервалов $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$, $n \in N$. Сравнить с анализом предыдущей задачи. **67.** Например, интервал $(0, 1)$ и система отрезков $\left[\frac{1}{n}, 2\right]$, $n \in N$. **68.** Например, система интервалов $(-n+2, \sqrt{n}+100)$, $n \in N$. **70.** Это свойство выполнено для любой последовательности. **72.** Например, $a_n = n^{(-1)^n}$. **73.** Например $a_n = n^2$. **76.** Например, $a_n = (-1)^n$. **78.** Например, $a_n = [1 + (-1)^n] \cdot \frac{1-n}{n}$. Указание. $A = \left\{-2 + \frac{2}{n}\right\} \cup \{0\}$, $n \in N$. **79.** Например, $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n}$. Указание. Частичными пределами последовательности $\{a_n\}$ являются точки 1 и -1. **81.** Частичными пределами последовательности $\{b_n\}$ будут, например, все частичные пределы последовательности $\{a_n\}$ (сравните с результатом задачи № 80). **82.** Да. $a_{n+1} - a_n \to 0$ при $n \to +\infty$. **83.** Например, а) $a_n = \frac{1}{n!}$ или $a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. **84.** Например, а) $a_n = 10n + \frac{1}{n}$; б) $a_n = n^2$; в) $a_n = n + (-1)^n$; г) такой последовательности не существует, так как условия $a_n \to +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ взаимно противоречат (см. задачу № 100), д) $a_n = 3^n + \sin n$; е) $a_n = n^3$; ж) $a_n = n(2 + (-1)^n)$. **85.** Например, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, или $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\left[\frac{n}{2}\right]}}$. **90.** Такая последовательность или сходится к числу b или расходится. Указание. Рассмотреть последовательность a_k, где $a_k = 1$, если $k = (2p+1)\cdot 2^q$, $p \in N$, $q \in N$; $a_k = 0$, если $k = 3^n$, $n \in N$, и $a_k = 2$, если k не входит ни в одно из вышеуказанных множеств. **91.** Например, а) $a_n = -1 - \frac{1}{n}$, или $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n}$, или $a_1 = -4$, $a_n = \frac{1}{n}$, $n > 1$; б) $a_n = 2\cdot(-1)^n - \frac{1}{n}$, в) $a_n = -n$, или $a_n = -10 + \frac{1}{n}$, $n \in N$. **95.** а) Пусть $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = A$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} b_n = B$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) = C$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n = B_1$. Ограничимся случаем, когда A, B, B_1, C конечны (если хотя бы одно из этих чисел бесконечно, доказательство аналогично). 1) Существует подпоследовательность $\{n_k\}$ такая, что $a_{n_k} + b_{n_k} \to C$. Из подпоследовательности $\{a_{n_k}\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{a_{n_{k_p}}\}$, тогда $\lim\limits_{p\to\infty} a_{n_{k_p}} = A' > A$, так как $A = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Так как $b_{n_{k_p}} = (a_{n_{k_p}} + b_{n_{k_p}}) - a_{n_{k_p}}$, то $C - A' = \lim\limits_{p\to\infty} b_{n_{k_p}}$, а так как $B = \underline{\lim}_{n\to\infty} b_n$, то $C - A' \geqslant B$. Итак, $C \geqslant B + A' \geqslant B + A$.

2) Существует подпоследовательность $a_{n_q} \to A$. Из последовательности $\{b_{n_q}\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\{b_{n_{q_s}}\}$. Так как $B_1 = \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$, то $b_{n_{q_s}} \to B' \leqslant B_1$. Тогда $a_{n_{q_s}} + b_{n_{q_s}} \to A + B'$. Так как $C = \underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n)$, то $C \leqslant A + B' \leqslant A + B_1$. **96.** Например, для неравенств пунктов а) и в)

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 3k; \\ -1, & n = 3k-1; \\ 0, & n = 3k-2;\ k \in N; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} -2, & n = 3k; \\ 0, & n = 3k-1; \\ 1, & n = 3k-2;\ k \in N; \end{cases}$$

для неравенств пунктов б) и г)

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 3k; \\ 2, & n = 3k-1; \\ \frac{1}{3}, & n = 3k-2;\ k \in N; \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 3, & n = 3k; \\ 1/2, & n = 3k-1; \\ 4, & n = 3k-2;\ k \in N. \end{cases}$$

98. Указание. Если последовательность $\{a_n\}$ расходится, то для последовательности $b_n = -a_n$, $n \in N$ не выполняется условие а), а для последовательности $b_n = \frac{1}{a_n}$, $n \in N$ не выполнено условие б). **99.** Указание. Воспользоваться равенством: $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}$. **100.** См. указание к задаче № 99. **101.** Последовательность $\{a_n + b_n\}$ расходится, последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ тоже расходится, если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Если же $a_n \to 0$, то эта последовательность может как сходиться, так и расходиться (см. ответ к задаче № 102). **102.** Например, $a_n = (-1)^n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Такое положение возможно, только если $b_n \to 0$. Сравните с ответом к задаче № 101. **103.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_1(\varepsilon)$ такое, что $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ для всех $n > N_1$. Возьмем $N_2 > \frac{2\,|a_1 + a_2 + \ldots + a_M|}{\varepsilon}$, $M = N_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ и $N = \max\{M, N_2\}$, тогда для $n > N$ имеем

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1 + a_2 + \ldots + a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1} + \cdots + a_n|}{n} <$$

$$< \frac{|a_1 + \ldots + a_{N_1}|}{N_2} + \frac{|a_{N_1+1}| + \ldots + |a_n|}{n - N_1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

что доказывает утверждение задачи. Случай $A \neq 0$ сводится к разобранному. **104.** Указание. Отдельно рассмотреть случай $A = 0$, а случай $A \neq 0$ свести к рассмотрению случая $A = 1$. **105.** Использовать результат задачи № 104. **106.** Примером может служить последовательность $a_n = \frac{(-1)^n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Указание. Применить критерий Коши. **107.** Показать, что последовательность $S_{2^n} - S_{2^{n-1}}$ не стремится к нулю с ростом n, и применить критерий Коши. **108.** Для такой последовательности выполняется критерий Коши. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $K(\varepsilon)$ такое, что для $k_1 > K$, $k_2 > K$ $|a_{n_{k_1}} - a_{n_{k_2}}| < \varepsilon$. В силу условия б) существует такое $\widetilde{K}$, что $|a_p - a_{n_k}| < \varepsilon/3$ для $\forall p$: $n_k < p \leqslant n_{k+1}$ и $\forall k > \widetilde{K}$. Пусть $N = \max\left(n_{K\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}, n_{\widetilde{K}}\right)$. Для любого $m > N$ единственным образом определяется $K(m)$ так, что $n_{k(m)} \leqslant m < n_{k(m)+1}$. Если $m_1 > N$, $m_2 > N$, то $k(m_1) > \widetilde{K}$, $k(m_2) > \widetilde{K}$ и $k(m_1) > K(\varepsilon/3)$, $k(m_2) > K(\varepsilon/3)$, $|a_{m_1} - a_{m_2}| \leqslant |a_{m_1} - a_{n_{k(m_1)}}| + |a_{n_{k(m_1)}} - a_{n_{k(m_2)}}| + |a_{n_{k(m_2)}} - a_{m_2}| < \varepsilon$. **109.** Указание. Использовать результат задачи № 108. **110.** Указание. Показать, что условие задачи эквивалентно выполнению критерия Коши для последовательности $f_n(x_0)$ при любом $x_0 \in [0, 1]$. **111.** Указание. Использовать метод математической индукции. **112.** Указание. Применить неравенство Бернулли к отношениям $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ и $\frac{b_n}{b_{n+1}}$. **113.** Указание. Использовать метод математической индукции. **114.** Указание: а) использовать результат задачи № 112; б) использовать неравенство $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (см. задачу № 112) и применить неравенство Бернулли для оценки разности $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

115. I. а) $[-2, 0]$; б) $[-2, 0]$; в) $(-2, 2)$; г) $[-2, 2]$; д) $(-110, 110)$; е) $[0, 1] \cup [0, 2)$; ж) $[-2, 2]$. II. 1) $(-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 2)$; 2) $[-2, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$; 3) $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, 5)$. **116.** 1) X в Y; 2) X на Y; 3) X на Y; 4) X биективно отображается на Y; 5) X биективно отображается на Y; 6) X в Y. **117.** $A \subset f^{-1}(f(A))$ (сравните с задачами № 115 и № 118). **119.** $A = f^{-1}(f(A))$. **121.** Рассмотреть пример $f(x) = \sin x$ на R: $A = \left\{x : x \in \left[0, 2\pi + \frac{\pi}{4}\right]\right\}$, $B = \{x : x \in [2\pi, 4\pi]\}$.

122. Пусть $y_0 \in f(A \cap B)$, тогда y_0 есть значение функции $f(x_0)$, где $x_0 \in A \cap B$, т. е. $x_0 \in A$ и $x_0 \in B$. Следовательно, $y_0 \in f(A)$ и $y_0 \in f(B)$, т. е. $y_0 \in f(A) \cap f(B)$. В силу биекции x_0 — единственная точка, для которой $f(x_0) = y_0$. Если $x_0 \overline{\in} A \cap B$, то или $x_0 \overline{\in} A$, или $x_0 \overline{\in} B$. Если $x_0 \overline{\in} A$, то f на множестве A не принимает значения y_0, т. е. $y_0 \overline{\in} f(A)$. Если $x_0 \overline{\in} B$, то $y_0 \overline{\in} f(B)$. Полученное противоречие показывает, что $x_0 \in A \cap B$. **123.** См. задачу № 120. **126.** Указание. Вместе с точкой (x_0, y_0) графику функции принадлежит и точка (y_0, x_0). **127.** Указание. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике функции. Рассмотрим результат последовательных симметрических отображений точки M относительно точки A, прямой $x = C$, снова точки A и снова прямой $x = C$. **128.** Существует $x_0 \in (-l, l)$, что $f(x_0) \neq f(-x_0)$. **129.** Указание. Рассмотреть $\varphi(x) = (f(x) + f(-x))/2$ и $\psi(x) = (f(x) - f(-x))/2$. **130.** Для любого $C > 0$ существует $x_0 \in M$ такое, что $|f(x_0)| > C$. **131.** а) неограниченная; б) бесконечно большая; в) ограниченная; г) ограниченная. **132.** Например, $f(x) =$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0; \\ n^2, & \text{если } x = \frac{m}{n},\ m \text{ и } n \text{ взаимно простые, } n > 0; \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

133. Сформулируем утверждение, что означает, что функция $f(x)$ не является неубывающей: существуют $x_0 \in [a, b]$ и $x_1 \in [a, b]$ такие, что $x_0 < x_1$, но $f(x_0) > f(x_1)$. **134.** Не обязательно, например, $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x$.

135. Например, $f(x) = \begin{cases} 2 + x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 2, & x = 0. \end{cases}$ **136.** Указание.

Рассмотрим случай неубывающей функции; если $f(x)$ **не** является таковой на $[a, b]$, то найдутся точки $a' \in [a, b]$, $b' \in [a, b]$ такие, что $a' < b'$, но $f(a') > f(b')$ (см. ответ к задаче № 133). Показать, что в точке $c = \sup\{x, x \in [a', b'], f(x) \geqslant f(a')\}$ не выполняется условие неубывания. **137.** Да. Указание. Провести доказательство от противного. **140.** Указание. Показать, что $\omega[f, (x_0 - \delta, x_0 + \delta)]$ есть монотонная и ограниченная функция δ в некоторой правой полуокрестности нуля. **142.** Например, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x > 0; \\ \cos x, & x < 0 \\ 5, & x = 0. \end{cases}$ **143.** Указание. Рассмотреть три случая: а) $f(x_0) > \overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$; б) $\overline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$; в) $f(x_0) < \underline{\lim\limits_{x \to x_0}} f(x)$. **146.** а) $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ разрывны; $f(x)g(x)$ может быть как непрерывной, так и разрывной, например: 1) $f(x) = x$, $g(x) = \operatorname{sign} x$; 2) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \operatorname{sign} x$; б) рассмотреть примеры: 1) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = -\operatorname{sign} x$; 2) $f(x) = \operatorname{sign} x$, $g(x) = 2 \operatorname{sign} x$; 3) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ **147.** Например, $g(x) = \operatorname{sign} x$, $f(x) = x(x^2 - 1)$, $x_0 = 0$. **148.** Функция ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Более того, можно сказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon + \inf a_n$. Условие $\inf a_n = 0$ необходимо и достаточно для эквивалентности сформулированного условия и непрерывности $f(x)$ в точке x_0. **149.** Указание. Показать, что для любого натурального N и любой иррациональной точки найдется такая ее окрестность, в которой не будет ни одной рациональной точки вида $\frac{m}{n}$, где $n \leqslant N$. **150.** Использовать результат задачи № 141. **151.** Например, а) $f(x) = x \cdot D(x)$; б) $f(x) = x(x - 5) D(x)$; в) $f(x) = (x - 1)(x - 2) \ldots (x - n) D(x)$ (см. задачу № 150). **155.** Да. Например, $f(x) = \operatorname{sign}^2 x$, $x_0 = 0$ или $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$. **156.** Да. Например, $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$. **157.** Нет. Указание. Рассмотреть $h' = -h$. **158.** а) $f(x) \equiv C$. Указание. Для любого $x \in R$ $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \ldots = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. б) $f(x) = a^x$. Указание.

Рассмотреть $f(2)=f(1+1)$, затем $f(n)$, $n\in N$, затем $f\left(\frac{1}{n}\right)$, $n\in N$, затем $f\left(\frac{m}{n}\right)$, $m\in Z$, затем $f(c)$, где c иррационально. **159.** Пусть $x_0\in(a,\ b)$ и $a<x_0-h_0<x_0-h_1<x_0<x_0+h_2<x_0+h_0<b$, положим $\lambda=(h_0-h_2)/h_0$, $x_1=x_0$, $x_2=x_0+h_0$. Тогда из условия задачи получим неравенство $(-f(x_0)+f(x_0+h_2))/h_2\leqslant(-f(x_0)+f(x_0+h_0))/h_0$. Аналогично получается неравенство $(f(x_0)-f(x_0-h_1))/h_1\geqslant(f(x_0)-f(x_0-h_0))/h_0$. Обозначив $A=(f(x_0+h_0)-f(x_0))/h_0$, $B=(f(x_0)-f(x_0-h_0))/h_0$, получим, что на интервале $(x_0-h_0,\ x_0+h_0)$ функция f удовлетворяет неравенству $B(x-x_0)\leqslant f(x_0)-f(x)\leqslant A(x-x_0)$, откуда следует непрерывность f в точке x_0 Если же $x_0=a$ или $x_0=b$, то разностное отношение $(f(x_0)-f(x))/(x_0-x)$ ограничено только с одной стороны, откуда непрерывность не вытекает. Рассмотрите функцию $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<1;\\ 1, & x=0,\ x=1.\end{cases}$ **160.** Например, $f(x)=D(x)-\frac{1}{2}$ (см. задачу № 150). **162.** Указание. Пусть $x_1<x_2<x_3$, показать, что $\min\limits_{x\in[x_1,x_3]}f(x)\leqslant f(\xi)\leqslant\max\limits_{x\in[x_1,x_3]}f(x)$. **163.** Пусть l — прямая, параллельная данному вектору, не пересекающая данный многоугольник; ось OX перпендикулярна l; $S(x_0)$ — площадь части многоугольника, лежащей между прямой l и прямой $x=x_0$. Поскольку данный многоугольник можно заключить в прямоугольник, стороны которого параллельны l и OX, то $|\Delta S(x)|\leqslant|\Delta x|\cdot K$. Далее надо воспользоваться теоремой о промежуточном значении. **164.** Пусть l — произвольная прямая, проходящая через данную точку. Выберем на ней положительное направление и обозначим направленную прямую $\bar{l}$. Пусть $\bar{l}(\alpha)$ есть направленная прямая, образующая с $\bar{l}$ угол α $(\bar{l}(\pi)=-\bar{l},\ \bar{l}(2\pi)=\bar{l})$. Обозначим $S(\alpha)$ площадь той части многоугольника, которая лежит справа от $\bar{l}(\alpha)$. Показать, что $S(\alpha)$ — непрерывная функция на $[0,\ \pi]$, и воспользоваться теоремой о промежуточном значении. **165.** Показать, что найдется отрезок $[a,\ b]$, на котором многочлен меняет знак. **166.** Указание. Рассмотреть функцию $\varphi(x)=f(x)-g(x)$. **167.** Указание. Если $f(0)=a\neq0$ и $f(1)=b\neq1$, то функция $\varphi(x)=f(x)-x$ должна принять на $[0,\ 1]$ нулевое значение. **168.** Например, $f(x)=x^2$. **169.** Указание. Показать, что $f(x)$ принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$ и применить результат задачи № 126. **170.** Предположим для определенности, что радиус окружности равен 1. Пусть M_0 — фиксированная точка окружности и $M(x)$ — точка, полученная из точки M_0 поворотом на угол x в положительном направлении (против часовой стрелки). Рассмотреть функцию $\varphi(x)=f(M(x))-f(M(x+\pi))$ на отрезке $[0,\ \pi]$. **171.** Например, $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{x-\frac{1}{2}}\right)$, $x\neq\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. **172.** Например, $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\right), & x\neq\frac{1}{2};\\ 2, & x=\frac{1}{2}.\end{cases}$

173. Указание. Доказательство провести от противного. Пример: $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0;\\ x, & 0<x\leqslant 1;\\ 1/2, & x=0.\end{cases}$ **175.** Например, $f(x)=\begin{cases}x, & \text{если } x \text{ рационально};\\ 1-x, & \text{если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$

176. Любая монотонная, но разрывная функция, например, $f(x)=x+\operatorname{sign}x$. **177.** Например, $f(x)=\begin{cases}0, & x=0;\\ 1/2^n, & 1/2^n<x\leqslant 1/2^{n-1}, \quad n\in N.\end{cases}$

178. Указание. Пусть E_n есть множество тех x из (a, b), что $f(x)>f(x+t)$ для всех t таких, что $0<|t|<\frac{1}{n}$ и $a\leqslant x-t<x+t<b$. Доказать, что множество E точек строгого локального максимума есть $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$ и каждое из множеств E_n состоит только из изолированных точек. Далее применить результат задачи № 46. Пример: $f(x)=\begin{cases}(x-a)\sin\dfrac{\pi}{x-a}, & x\neq a.\\ 0, & x=a.\end{cases}$ **179.** Нет, в силу теоремы об ограниченности непрерывной на отрезке функции. **180.** Нет, в силу теоремы о максимуме и минимуме непрерывной на отрезке функции. **181.** Нет, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции. **182.** а) $f(x)=2x$; б) нет, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции; в) $f(x)=\frac{1}{1-x}$; г) $f(x)=1+\sin 2\pi x$. **183.** а) $f(x)=2x$; б) нет, см. ответ к задаче № 182; в) нет, так как $f((0, 1))\subset f([0, 1])$, а на $[0, 1]$ f непрерывна, следовательно, ограничена; г) $f(x)=1+\sin 2\pi x$. **184.** а) $f(x)=2x$; б) нет, см. ответ к задаче № 182; в) нет, см. ответ к задаче № 183; г) нет, так как непрерывная на отрезке и биективная на нем функция монотонна, т. е. если $0<x<1$, то $f(0)<f(x)<f(1)$ (см. задачу № 174). **185.** Открытым относительно отрезка $[a, b]$ называется множество, являющееся пересечением $[a, b]$ с открытым множеством на прямой. Пусть $f\in C[a, b]$, $E(c)=\{x,\ x\in[a, b],\ f(x)<c\}$, $x_0\in E(c)$. Так как $f(x_0)<c$, то в силу непрерывности f в точке x_0 существует такая окрестность $U(x_0)$, что $f(x)<C$ для всех $x\in U(x_0)\cap[a, b]$, т. е. $E(c)$ есть множество, открытое относительно $[a, b]$. Точно так же доказывается это свойство для множеств $\widetilde{E}(c)=\{x,\ x\in[a, b],\ f(x)>c\}$. С другой стороны, пусть все множества $E(c)$ и $\widetilde{E}(c)$ открыты относительно $[a, b]$. Возьмем точку $x_0\in[a, b]$, число $\varepsilon>0$ и рассмотрим множество $E(x_0, \varepsilon)=\{x,\ x\in[a, b],\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}$. Имеем

$E(x_0, \varepsilon) = E(f(x_0)+\varepsilon) \cap \widetilde{E}(f(x_0)-\varepsilon)$, поэтому $E(x_0, \varepsilon)$ — открытое относительно $[a, b]$ множество (ср. с утверждением задачи № 37). Так как $x_0 \in E(x_0, \varepsilon)$, то существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $U(x_0) \cap [a, b] \subset E(x_0, \varepsilon)$, т. е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in U(x_0) \cap [a, b]$, что доказывает непрерывность f в точке x_0. Пример: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1/2]; \\ 1, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$ **186.** Из утверждения предыдущей задачи следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любых $m \in N$, $n \in N$ множество $B_{n,m,\varepsilon} = \{x,\ x \in [0, 1],\ |f_n(x) - f_{n+m}(x)| \leqslant \varepsilon\}$ замкнуто. Применяя результат задачи № 33, получаем, что и множество $A_{n,\varepsilon} = \bigcap_{m=1}^{\infty} B_{n,m,\varepsilon}$ замкнуто. Для $x \in A_{n,\varepsilon}$ имеем $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. Используя результаты задач № 59 и 110, получаем, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ найдется число n_0 и отрезок $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ такой, что $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$ для $x \in [\alpha', \beta']$. В силу равномерной непрерывности $f_{n_0}(x)$ на $[\alpha, \beta]$ найдется отрезок $[a, b] \subset [\alpha', \beta']$, на котором колебание $f_{n_0}(x)$ меньше ε, следовательно, на этом отрезке колебание f меньше 3ε. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ и любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ найдется отрезок $[a_\varepsilon, b_\varepsilon] \subset [\alpha, \beta]$, на котором колебание f меньше 3ε. Построим систему вложенных отрезков $[a_q, b_q]$ для $\varepsilon = \frac{1}{q}$ соответственно. Если c — общая точка этих отрезков, то $\omega(f, c) = 0$ (см. условие задачи № 140) и, следовательно, f непрерывна в точке c (см. задачу № 141). **187.** Указание. Использовать результат задач 185 и 34. **188.** Существует $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, что, хотя $|x_1 - x_2| < \delta$, но $|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon$. **189.** а) Например, $y = \sin\frac{1}{x}$, или $y = \frac{1}{x}$; б) Например, $y = x\cos x$, или $y = \sin x^2$. **190.** Например, $y = \sqrt{x}$, или $y = x + \sin x$. **191.** Указание. Представить множество E в виде объединения множеств E_n таких, что $E_n \subset \left[(n-1)\cdot\frac{\delta(1)}{2},\ n\cdot\frac{\delta(1)}{2}\right]$, $n \in N$, где $\delta(1)$ — число, удовлетворяющее условию: из неравенства $|x_1 - x_2| < \delta$ (1) следует неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. **192.** Например, $y = \cos\frac{1}{x}$. **193.** Пример: $f = |\sin x|/x$, $E_1 = (-1, 0)$, $E_2 = (0, 1)$. **195.** Решение. а) В силу $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c$ имеем, что для $\varepsilon = 1$ существует $x_0 \geqslant 0$ такое, что для любого $x > x_0$ $c - 1 < f(x) < c + 1$. На отрезке $[0, x_0]$ $f(x)$ непрерывна, значит, по теореме Вейерштрасса ограничена, т. е. $|f(x)| \leqslant M$, а тогда для любого $x \geqslant 0$ $|f(x)| \leqslant \max\{M, |c-1|, |c+1|\}$. б) Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Существует $a > 0$ такое, что для любого $x > a$ $|f(x) - c| < \varepsilon/2$, т. е. для любых $x_1 > a$, $x_2 > a$ $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. На отрезке $[0, a+1]$ f непрерывна, поэтому для данного ε существует такое $\delta > 0$, что для любых $\tilde{x}_1 \in [0, a+1]$, $\tilde{x}_2 \in [0, a+1]$ таких, что $|\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| < \delta$, $|f(\tilde{x}_1) - f(\tilde{x}_2)| < \varepsilon$. Отсюда следует, что если $\delta_1 = \min\{\delta, 1\}$, то для любых x_1 и x_2 из $[0, +\infty)$ таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, имеем $|f(x_1) -$

$-f(x_2)|<\varepsilon$. **196.** а) Да; б) да; в) да; г) да; д) да. **197.** Например, а) $f(x)=|x|$, $g(x)=|x|$, $x_0=0$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $g(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$; в) $f(x)=|x|+1$, $g(x)=(|x|+1)(x+2)$, $x_0=0$. **198.** Например, $f(x)=x^2(x^2-1)^2D(x)$ (см. задачу № 159). **199.** Да. **201.** $n!$. **202.** Например, $f(x)=x-\sin x$. **206.** Например, $f(x)=$
$$=\begin{cases} x^2\sin(\pi/x), & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$
207. Обозначим $g(x)=x(x-1)^2\sin\dfrac{\pi}{(x-1)^2}$, $\varphi_n(x)=g\left(\dfrac{x-\dfrac{1}{n+1}}{n(n+1)}\right)$, положим $\varphi(x)=(1-x)^2$, $x\in[1,2]$; $\varphi(x)=$ $=\varphi_n(x)$, $x\in\left[\dfrac{1}{n+1},\dfrac{1}{n}\right)$; $\varphi(0)=0$; $\varphi(x)=\varphi_n(-x)$, $x\in\left(-\dfrac{1}{n},-\dfrac{1}{n+1}\right]$, $\varphi(x)=(x+1)^2$, $x\in(-2,1]$, тогда функция $f(x)=x^2\varphi(x)$ на интервале $(-2, 2)$ удовлетворяет поставленным условиям. Проверить это. **209.** Например, $f(x)=\dfrac{\sin(x^2)}{x}$. **210.** Например, $f(x)=\cos(\ln x)$.
211. Например, $f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$. **212.** Например, $f(x)=\sqrt{x}$.
214. Например, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **215.** Например, $f(x)=$
$$=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$$ или $f(x)=xD(x)$.
219. Указание. Пусть $f'(0)>0$, тогда $f'(1)<0$. Так как f непрерывна на $[0, 1]$, то существует точка c, в которой функция f достигает максимума, причем $c\in(0, 1)$. **221.** Указание. Применить теорему Коши о среднем значении к функциям $u=f(x)/x$ и $v=\dfrac{1}{x}$ на $[x_1, x_2]$. **222.** Нет. Пусть $f(x)=x^3$; $(a, b)=(-1, 1)$, $\theta=0$. Для любой пары $x_1\in(-1, 0)$, $x_2\in(0, 1)$ имеем $f'(0)=0$, но $(f(x_2)-f(x_1))/(x_2-x_1)\neq 0$. **224.** Указание. Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)+2x-4$. **225.** Указание. Рассмотреть функцию $g(x)=f(x)-e^{-x}$. **233.** Указание. Доказать, что в условиях задачи $f'(x)$ монотонна и ограничена. **234.** Например, $f_1(x)=1-x^2$, $f_2(x)=-e^x$. **235.** Решение. Пусть $x\in\left[0,\dfrac{1}{2k}\right]\cap[0, 1]$. Тогда, применяя неоднократно теорему Лагранжа, получаем $|f(x)|=|f(x)-$ $-f(0)|=|f'(\xi_1)|x\leqslant k|f(\xi_1)|x\leqslant\dfrac{1}{2}|f(\xi_1)|=\dfrac{1}{2}|f'(\xi_2)|\xi_1\leqslant$ $\leqslant\dfrac{1}{2^2}|f(\xi_2)|\leqslant\ldots\leqslant\dfrac{1}{2^n}|f(\xi_n)|$, где $\xi_1\in(0, x)$, $\xi_{i+1}\in(0, \xi_i)$ $(i=$ $=1, 2, \ldots, n-1)$. Так как $f(x)$ ограничена на $[0, 1]$ и n — любое натуральное число, то отсюда следует, что $f(x)=0$ для любого

$x \in \left[0, \frac{1}{2k}\right] \cap [0, 1]$. Если $k \leqslant \frac{1}{2}$, то $\left[0, \frac{1}{2k}\right] \cap [0, 1] = [0, 1]$ и утверждение задачи доказано. Если же $k > \frac{1}{2}$, то проводим те же рассуждения последовательно на каждом из отрезков $\left[\frac{i-1}{2k}, \frac{i}{2k}\right]$, $i = 2, 3, \ldots, [2k]$ и на отрезке $\left[\frac{[2k]}{2k}, 1\right]$. **236.** Решение. Докажем, что для любого целого $k \geqslant 0$ существует сходящаяся к нулю последовательность точек $\{u_n\}$, в каждой из которых $f^{(k)}(u_n) = 0$. Доказательство проведем методом математической индукции. Для $k = 0$ утверждение следует из условия задачи. Пусть предположение верно для $k = m$, т. е. существует последовательность точек $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $f^{(m)}(x_n) = 0$. Тогда для любого i, $i \in N$, в силу теоремы Ролля между точками x_i и x_{i+1} найдется точка y_i такая, что $f^{(m+1)}(y_i) = 0$, а это означает, что существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ и $f^{(m+1)}(y_i) = 0$. Итак, утверждение доказано. Отсюда следует, что $f^{(k)}(0) = 0$ для любого натурального k (так как $f \in C^\infty$). Применяя формулу Тейлора к отрезку $[0, x_0]$, имеем $f(x_0) = f(0) + f'(0)x_0 + \frac{f''(0)}{2!}x_0^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x_0^n = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x_0^n$, $0 < |\xi| < |x_0|$. Следовательно, $|f(x_0)| \leqslant L|x_0|^n/n!$ для любого натурального n и любого x_0, т. е. $f(x_0) = 0$, откуда следует, что $f(x) = 0$ при любом x.

Часть II

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава I
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ПРОСТЕЙШИЕ СПОСОБЫ ЕЕ НАХОЖДЕНИЯ

Определение. Функция $F(x)$ называется *точной первообразной* для функции $f(x)$ на (a, b), если $F'(x)=f(x)$, $x\in(a, b)$, или, что то же самое, $f(x)dx$ служит дифференциалом для $F(x)$: $dF(x)=f(x)dx$.

Определение. Функция $F(x)$ называется *обобщенной первообразной* для $f(x)$ на (a, b), если $F(x)$ непрерывна на (a, b) и для любого $x\in(a, b)\setminus K_n$, где K_n — множество, состоящее не более чем из n точек, имеем $F'(x)=f(x)$. Если нет необходимости подчеркивать, что мы имеем дело именно с точной или обобщенной первообразной, то называем $F(x)$ *первообразной*.

Пример 1. Функция $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ есть первообразная для функции $1/\sqrt{1+x^2}$ на всей числовой прямой, т. к. $(\ln(x+\sqrt{1+x^2}))' = 1/\sqrt{1+x^2}$. Функция $|x|$ есть обобщенная первообразная для функции $\operatorname{sign} x$ на $(-1, 1)$, так как $|x|\in C(-1, 1)$ и $|x|'=\operatorname{sign} x$, $x\neq 0$.

Соотношение $F'(x)=f(x)$ определяет $F(x)$ неоднозначно.

Пример 2.

а) $(\cos 2x)'=-2\sin 2x$,

$$(-2\sin^2 x)'=-4\sin x\cos x=-2\sin 2x;$$

б) $$[2\ln(\sqrt{4+x^2}-x)]'=\frac{-2}{\sqrt{4+x^2}},$$

$$\left[\ln\frac{\sqrt{4+x^2}-x}{\sqrt{4+x^2}+x}\right]'=-\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Основным свойством первообразных является следующее: если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные для одной и той же функции $f(x)$ на одном и том же промежутке, то их разность постоянна на этом промежутке.

Определение. Множество всех первообразных для данной функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$ (промежуток

(a, b) обычно можно определить из контекста, чаще всего это промежуток непрерывности $f(x)$ и поэтому не указывается).

Следовательно, если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на (a, b), то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Пример 3. Найдем точную первообразную для функции $f(x) = e^{|x|}$ на всей числовой прямой.

Решение. При $x \geqslant 0$ имеем $e^{|x|} = e^x$, и для этой функции в области $x > 0$ одна из первообразных будет e^x. При $x < 0$ имеем $e^{|x|} = e^{-x}$, для этой функции в области $x < 0$ первообразной будет функция $(-e^{-x} + k)$ при любой постоянной k. Так как первообразная функции $e^{|x|}$ по определению должна быть функцией непрерывной, то должно выполняться условие

$$\lim_{x \to 0+} e^x = \lim_{x \to 0-} (-e^{-x} + k),$$

т. е. $1 = -1 + k$, откуда $k = 2$.

Итак, функция

$$F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0; \\ 1, & x = 0; \\ -e^{-x} + 2, & x < 0 \end{cases}$$

является непрерывной на всей числовой оси. Для $x > 0$ имеем $F'(x) = e^x = e^{|x|}$, для $x < 0$ имеем $F'(x) = e^{-x} = e^{|x|}$. Докажем, что эта функция будет точной первообразной для функции $e^{|x|}$ на всей числовой прямой. Для этого осталось проверить, что $F'(0) = e^0 = 1$. Имеем

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-e^{-x} + 2 - 1}{x} = 1, \text{ т. е.}$$

$$F'_+(0) = F'_-(0) = F'(0) = 1 = e^{|0|}.$$

Следовательно, можно записать

$$\int e^{|x|}\,dx = F(x) + C = \begin{cases} e^x + C, & x \geqslant 0; \\ -e^{-x} + 2 + C, & x < 0. \end{cases}$$

Доказывается, что любая непрерывная на $[a, b]$ функция имеет на (a, b) точную первообразную, но в отличие от производной первообразная элементарной функции не всегда представляется элементарной функцией, например, первообразные для функций

$$\frac{\sin x}{x}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad e^{x^2}, \quad e^{-x^2}.$$

Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)\,dx=f(x)\,dx$;

2) $(\int f(x)\,dx)'=f(x)$;

3) $\int df(x)=\int f'(x)\,dx=f(x)+C$.

Таблица простейших интегралов

$$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\quad(\alpha\neq-1).$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C\quad(x\neq0).$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\,(a>0,\ a\neq1).$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C.$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C\quad(a\neq0).$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\quad(a\neq0).$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\quad(a\neq0).$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}=\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C\,(k\neq0).$$

$$\int\operatorname{sh}x\,dx=\operatorname{ch}x+C.$$

$$\int\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}=-\operatorname{cth}x+C.$$

$$\int\frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}=\operatorname{th}x+C.$$

Нахождение первообразной или вычисление неопределенного интеграла в основном состоит в преобразовании подынтегрального выражения так, чтобы получить интегралы из этой таблицы («табличные интегралы»).

Правила вычисления неопределенных интегралов

1. $\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx\quad(k\neq0)$.
2. $\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$.
3. Если $\int f(x)\,dx=F(x)+C$ и $u=\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема, то $\int f(u)\,du=F(u)+C$.

Правило 3 показывает, что таблица интегралов справедлива независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или функцией. Заметим, что

$$dx=\frac{1}{a}d(ax+b),\quad x^n dx=\frac{dx^{n+1}}{n+1},$$

$$\frac{dx}{x}=d\ln x,\quad \frac{1}{x^2}dx=-d\left(\frac{1}{x}\right),\quad \cos x\,dx=d\sin x,$$

$$\sin x\,dx=-d\cos x,\quad \frac{dx}{2\sqrt{x}}=d\sqrt{x}.$$

Пример 4.

$$\int(x+1)\,dx=\int(x+1)\,d(x+1)=\int u\,du=\frac{u^2}{2}+C=\frac{(x+1)^2}{2}+C.$$

Пример 5.

$$\int (5-3x)^{51}dx = -\frac{1}{3}\int (5-3x)^{51}d(5-3x) = -\frac{1}{156}(5-3x)^{52}+C.$$

Заметим, что под знаком интеграла выражение в скобках можно возвести в степень 51 и взять интеграл как линейную комбинацию интегралов от степенных функций. Понятно, что этот метод здесь крайне громоздок, и наглядно видно преимущество предложенного здесь метода.

Пример 6.

$$\int x(1-2x)^{37}\,dx = \int\left[-\frac{1}{2}(1-2x)+\frac{1}{2}\right](1-2x)^{37}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{38}dx + \frac{1}{2}\int (1-2x)^{37}dx = \left(-\frac{1}{2}\right)^2\int (1-2x)^{38}d(1-2x) +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int (1-2x)^{37}d(1-2x) = \frac{1}{156}(1-2x)^{39} - \frac{1}{152}(1-2x)^{38}+C.$$

Пример 7.

$$\int e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{x^2}}\,d\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}+C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{1}{\sin x}dx = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{du}{\sin u\cos u} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 u}\cdot du}{\frac{\sin u\cdot\cos u}{\cos^2 u}} =$$

$$= \int \frac{d\,\mathrm{tg}\,u}{\mathrm{tg}\,u} = \ln|\mathrm{tg}\,u| + C = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{\arcsin^5 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d\arcsin x}{\arcsin^5 x} = -\frac{1}{4\arcsin^4 x}+C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}\,dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,dx = \frac{1}{3}(x+1)^{3/2} - \frac{1}{3}(x-1)^{3/2}+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

1. $\int (2-3\sqrt{x})^2\,dx.$

2. $\int\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}\right)dx.$

3. $\int \left(\frac{1+x}{x}\right)^2 dx.$ 4. $\int \left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right) dx.$

5. $\int \frac{(1+x)^3}{x^2}\, dx.$ 6. $\int \frac{x^2}{1-x^2}\, dx.$

7. $\int \frac{4-x^2}{3+x^2}\, dx.$ 8. $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2-3)}\, dx.$

9. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$ 10. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx.$

11. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx.$ 12. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}\, dx.$

13. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\, dx.$ 14. $\int \frac{dx}{2x^2+3}.$

15. $\int \frac{dx}{3x^2-7}.$ 16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}.$ 18. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-7}}.$

19. $\int (5^x-2^x)^2\, dx.$ 20. $\int \frac{2^{2x-1}-3^{2x+3}}{6^{2x}}\, dx.$

21. $\int 2^x\cdot 3^x\cdot 5^x\, dx.$ 22. $\int \frac{2^x\cdot 3^{2x}\cdot 4^{3x}}{5^x\cdot 6^{2x}}\, dx.$

23. $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}\, dx.$ 24. $\int \frac{2^{2x}-1}{\sqrt{2^x}}\, dx.$

25. $\int \sin^2\frac{x}{2}\, dx.$ 26. $\int \cos^2\frac{x}{2}\, dx.$

27. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}.$ 28. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}\, dx.$

29. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx.$ 30. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx.$

31. $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx,\ x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right).$ 32. $\int (2\operatorname{ch} x-3\operatorname{sh} x)\, dx.$

33. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx.$ 34. $\int \frac{dx}{x-1}.$

35. $\int \frac{dx}{2x+3}.$ 36. $\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}\, dx.$

37. $\int \frac{x+3}{(x+2)(x-1)}\, dx.$ 38. $\int \frac{2+x}{1+x}\, dx.$

39. $\int \frac{x\,dx}{1+2x}.$ 40. $\int (x-1)^{10}\, dx.$

41. $\int (2x+5)^{17}\, dx.$ 42. $\int \frac{dx}{(1-3x)^{30}}.$

43. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}.$ 44. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(1+3x)^4}}.$

45. $\int \sqrt[15]{(1+4x)}\,dx.$

46. $\int x(x-2)^5\,dx.$

47. $\int x\sqrt{1-2x}\,dx.$

48. $\int (x+2)\sqrt{x-2}\,dx.$

49. $\int \frac{2x-7}{\sqrt{1+3x}}\,dx.$

50. $\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx.$

51. $\int \frac{x^2+1}{2x-1}\,dx.$

52. $\int (2x+3)^2(1-x)^8\,dx.$

53. $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-2}}\,dx.$

54. $\int \frac{x^3dx}{x^2-4}.$

55. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

56. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$

57. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2-10}}\,dx.$

58. $\int \frac{1-4x}{\sqrt{1-2x^2}}\,dx.$

59. $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx.$

60. $\int x(1-x^2)^5\,dx.$

61. $\int \frac{xdx}{1+x^4}.$

62. $\int \frac{x^2dx}{x^6-5}.$

63. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+x^5}}.$

64. $\int \frac{1}{x\ln^5 x}\,dx.$

65. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

66. $\int \frac{dx}{x(\ln x+3)}.$

67. $\int \frac{dx}{x(2+\ln^2 x)}.$

68. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x}\,dx.$

69. $\int \frac{e^x+e^{2x}}{1-e^x}\,dx.$

70. $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$

71. $\int \sin 5x\,dx.$

72. $\int \cos\frac{x}{7}\,dx.$

73. $\int \cos\alpha x\sin\beta x\,dx,$
$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

74. $\int \cos\alpha x\cos\beta x\,dx,$
$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

75. $\int \sin\alpha x\sin\beta x\,dx,$
$\alpha\neq\beta,\ \alpha\neq-\beta.$

76. $\int \sin^2 x\cos\alpha x\,dx,$
$\alpha\neq\pm 2,\ \alpha\neq 0.$

77. $\int \cos^3 x\sin\beta x\,dx,$
$\beta\neq\pm 1,\ \beta\neq\pm 3.$

78. $\int x\sin x^2\,dx.$

79. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}\,dx.$

80. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}.$

81. $\int \sin^2 x\,dx.$

82. $\int \cos^2 x\,dx.$

83. $\int (\sin x+2\cos x)^2\,dx.$

84. $\int e^x\cos e^x\,dx.$

85. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos^2 x}.$

86. $\int \frac{dx}{\sin^2 7x}.$

87. $\int \frac{dx}{\cos^2 8x}$.

88. $\int \frac{1}{\sin 3x} dx$.

89. $\int \frac{1}{\cos x} dx$.

90. $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

91. $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

92. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$.

93. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

94. $\int \frac{1+\cos x}{(x+\sin x)^3} dx$.

95. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}} dx$.

96. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx$.

97. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

98. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg} x} dx$.

99. $\int \frac{\sin x \cos x\, dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$.

100. $\int \frac{\operatorname{arcctg} 3x}{1+9x^2} dx$.

101. $\int \frac{x+\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx$.

102. $\int \frac{\arcsin x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

103. $\int \frac{x+\arcsin^3 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

104. $\int \frac{x+\arccos^{3/2} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

105. $\int (\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x)^2 dx$.

106. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Если $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, то

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du.$$

Суть применения этого метода интегрирования состоит в том, что интеграл $\int v du$ может быть «проще» интеграла $\int u dv$. Этот метод часто применяется, когда под интегралом стоит произведение «разнородных» функций, например, $e^{\alpha x}$ и x^{β}, $e^{\alpha x}$ и $\sin \beta x$, x и $\ln x$, x и $\operatorname{arctg} x$ и т. п.

Пример 1.

$$\int x \cos x\, dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Здесь в интеграле $\int \sin x dx$ подынтегральная функция не является произведением «разнородных» функций x и $\cos x$.

Пример 2.

$$\int x \operatorname{arctg} x\, dx = \int \operatorname{arctg} x\, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C.$$

Здесь в интеграле $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$ подынтегральная функция является алгебраической функцией, а не трансцендентной, как в данном интеграле.

Иногда, применяя метод интегрирования по частям, удается получить нетривиальное уравнение для нахождения первообразной функции.

Пример 3. Вычислим $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Имеем

$$I=\int e^x \cos x dx=\int \cos x de^x=e^x \cos x+\int e^x \sin x dx=e^x \cos x+$$
$$+\int \sin x de^x=e^x \cos x+e^x \sin x-\int e^x \cos x dx=$$
$$=e^x(\cos x+\sin x)-I.$$

Поэтому

$$\int e^x \cos x\, dx=\frac{e^x(\cos x+\sin x)}{2}+C.$$

Пример 4. Вычислим $\int \sqrt{x^2+k}\, dx,\ k\neq 0$.

Решение. Имеем

$$I=\int \sqrt{x^2+k}\, dx=x\sqrt{x^2+k}-\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+k}}=x\sqrt{x^2+k}-$$
$$-\int \frac{x^2+k-k}{\sqrt{x^2+k}}\, dx=x\sqrt{x^2+k}+k\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+I,$$

поэтому

$$\int \sqrt{x^2+k}\, dx=\frac{x\sqrt{x^2+k}}{2}+\frac{k}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

107. $\int x \sin x\, dx$.

108. $\int x \cos^2 x\, dx$.

109. $\int x \sin^3 x\, dx$.

110. $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$.

111. $\int x \operatorname{ctg}^2 x\, dx$.

112. $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x}\, dx$.

113. $\int \ln^2 x\, dx$.

114. $\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

115. $\int x^2 \ln(1+x)\, dx$.

116. $\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

117. $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$.

118. $\int \sqrt{2-x^2}\, dx$.

119. $\int \sqrt{x^2+3}\, dx$.

120. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

121. $\int \arccos x\,dx.$

122. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\,dx.$

123. $\int x \arcsin x\,dx.$

124. $\int \frac{3+2x^2}{1+x^2} \operatorname{arctg} x\,dx.$

125. $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\,dx.$

126. $\int \cos^2 (\ln x)\,dx.$

127. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x}\,dx.$

128. $\int x \arccos \frac{1}{x}\,dx.$

§ 3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОГО

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, функции $x(t)$ и $t(x)$ взаимно обратны и непрерывно дифференцируемы на соответствующих промежутках. Тогда первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)=\Phi(t(x))$, где $\Phi(t)$ есть первообразная для функции $f(x(t))\times x'(t)$. Коротко это утверждение записывается так:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = \Phi(t(x)) + C = \Phi(t) + C = \int f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Функция $x(t)$ подбирается таким образом, чтобы подынтегральное выражение приняло более удобный для интегрирования вид. Выбор ее определяется конкретно видом подынтегрального выражения. Рассмотрим некоторые *часто встречающиеся замены.*

А. Вычисление интегралов $\int \sin^n x \cos^m x dx$; n, m — целые

I. Если оба показателя n и m — неотрицательные четные числа, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

II. Если n и m — натуральные числа такие, что хотя бы одно из них нечетное, то в случае нечетного m полагают $\sin x = t$, а в случае нечетного n полагают $\cos x = t$ и применяют либо формулу $1-\cos^2 x = \sin^2 x$, либо $1-\sin^2 x = \cos^2 x$.

III. Если n и m — целые отрицательные числа такие, что оба числа $|m|$ и $|n|$ либо четные, либо нечетные, то полагают $\operatorname{tg} x = t$ либо $\operatorname{ctg} x = t$ и применяют формулы

$$1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1+\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

К этому типу сводятся интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}, \ n>0, \ \text{и} \int \frac{dx}{\cos^m x}, \quad m>0.$$

В самом деле,

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{2^{n-1} \sin^n \frac{x}{2} \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cos^n u},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^m u}.$$

IV. Если n и m — целые отрицательные числа, причем одно из чисел $|n|$ или $|m|$ нечетное, то в случае нечетного $|m|$ полагают $\sin x = t$, а в случае нечетного $|n|$ полагают $\cos x = t$. Иногда в случае больших степеней $|n|$ и $|m|$ полезно в числителе подынтегральной функции неоднократно заменить единицу суммой $\sin^2 x + \cos^2 x$.

V. Если n — четное число, а m — целое отрицательное число, то можно заменить $\sin^2 x$ по формуле $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, и в этом случае интегралы сводятся к интегралам вида

$$\int \frac{dx}{\cos^\alpha x}, \quad \alpha \in N.$$

В случае четного m и целого отрицательного n заменяют $\cos^2 x$ на $1 - \sin^2 x$. В некоторых специальных случаях полагают $\operatorname{tg} x = t$.

VI. Если n нечетное и m — целое отрицательное число, то полагают $\cos x = t$ и применяют формулу $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. В случае, когда m нечетное, а n — целое отрицательное число, полагают $\sin x = t$ и применяют формулу $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

При вычислении рассматриваемых интегралов часто используются следующие формулы:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right].$$

Пример 1.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x \sin^2 2x\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 4x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x)\, dx = \frac{1}{16}x + \frac{\sin 2x}{32} -$$

$$- \frac{\sin 4x}{64} - \frac{1}{32}\int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{16}x + \frac{\sin 2x}{32} - \frac{\sin 4x}{64} -$$

$$- \frac{1}{64}\sin 2x - \frac{1}{192}\sin 6x + C = \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 2x -$$

$$- \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{192}\sin 6x + C.$$

Пример 2.

$$\int \sin^5 x \cos^4 x\, dx = -\int \sin^4 x \cos^4 x d \cos x = -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x d\cos x =$$
$$= -\int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x)\, d\cos x = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x}\, dx = \int \frac{dx}{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\cos^2 x \cos^6 x} = \int \frac{d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^3 x \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3}} =$$
$$= \int \frac{(1+\mathrm{tg}^2 x)^3\, d\,\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}^3 x} = \int \frac{(1+u^2)^3}{u^3}\, du = \int \frac{du}{u^3} + 3\int \frac{du}{u} +$$
$$+ 3\int u du + \int u^3\, du = \frac{u^{-2}}{-2} + 3\ln|u| + \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 + C =$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x} + 3\ln|\mathrm{tg}\, x| + \frac{3}{2}\mathrm{tg}^2 x + \frac{1}{4}\mathrm{tg}^4 x + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{\sin^7 x}{\cos^2 x}\, dx = -\int \frac{\sin^6 x\, d\cos x}{\cos^2 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^3\, d\cos x}{\cos^2 x} =$$
$$= -\int \frac{1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6}{u^2}\, du = \frac{1}{u} + 3u - u^3 + \frac{u^5}{5} + C =$$
$$= \frac{1}{\cos x} + 3\cos x - \cos^3 x + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^5\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2^4}\int \frac{d\frac{u}{2}}{\sin^5\frac{u}{2}\cos^5\frac{u}{2}} =$$
$$= \frac{1}{2^4}\int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}}{\frac{\sin^5\frac{u}{2}}{\cos^5\frac{u}{2}}\cdot\cos^{10}\frac{u}{2}} = \frac{1}{16}\int \frac{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{u}{2}\right)^4}{\mathrm{tg}^5\frac{u}{2}}\, d\,\mathrm{tg}\,\frac{u}{2} =$$
$$= \frac{1}{16}\int \frac{(1+z^2)^4}{z^5}\, dz = \frac{1}{16}\int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5}\, dz =$$
$$= -\frac{1}{64}z^{-4} - \frac{1}{8}z^{-2} + \frac{3}{8}\ln|z| + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{64}z^4 + C =$$
$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} + \frac{3\sin x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^5 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^5 x} - 2\int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x} =$$
$$= \frac{\sin x}{4\cos^4 x} - \frac{5}{8}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

Пример 7.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x} = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2\,dx}{\sin^3 x\cos^4 x} = \int \frac{\sin x}{\cos^4 x}\,dx +$$
$$+2\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x}\,dx +$$
$$+\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + 2\left(\frac{1}{\cos x} + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) + \left(-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|\right) + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{2}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

В. Интегрирование выражений, содержащих радикалы

$\sqrt{a^2 \pm x^2}$; $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, $a \neq 0$

I. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, $a>0$, то можно положить $x=a\sin t$.

Так как выражение $\sqrt{a^2-x^2}$ имеет смысл только при $|x| \leqslant a$, то и первообразная ищется на промежутке $-a<x<a$. Для переменной t промежуток изменения выбирается так, чтобы $-a<a\sin t<$ $<a$, следовательно, можно считать, что $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$, тогда $\sqrt{a^2-x^2}=$ $=a\cos t$.

II. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, $a>0$, то можно положить $x=\frac{a}{\cos t}$.

В этом случае первообразная ищется на луче $x>a$ или на луче $x<-a$. Так как нет никаких оснований предпочесть один луч другому, то можно выбрать тот луч, на котором будет более простая запись преобразованного подынтегрального выражения, т. е. луч $x>a$, тогда берем $0<t<\frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{x^2-a^2}=a\operatorname{tg} t$.

В этом же случае можно сделать замену $x=a\operatorname{ch} t$, тогда $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\operatorname{ch}^2 t-1)}=a|\operatorname{sh} t|$.

III. Если подынтегральная функция содержит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, $a>0$, то можно положить $x=a\operatorname{tg} t$. Функция $x=a\operatorname{tg} t$ непрерывно дифференцируема на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, при этом промежутком изменения x является вся числовая прямая, поэтому $\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t}$.

В этом же случае можно положить $x=a\operatorname{sh} t$, тогда $\sqrt{x^2+a^2}=$ $=a\operatorname{ch} t$.

Для удобства приведем некоторые формулы, связывающие гиперболические функции между собой:

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},\quad \operatorname{cth} x=\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},\quad \operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x=1,$$

$$\operatorname{ch}^2 x+\operatorname{sh}^2 x=\operatorname{ch} 2x,\quad \operatorname{sh} 2x=2\operatorname{sh} x\operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x=\frac{\operatorname{ch} 2x+1}{2},\quad \operatorname{sh}^2 x=\frac{\operatorname{ch} 2x-1}{2}.$$

Пример 8. Вычислим

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx.$$

Решение. Положим $x=a\operatorname{tg} t$, тогда $dx=\dfrac{a\,dt}{\cos^2 t}$ и

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\,dx=\int\frac{a^3\operatorname{tg}^2 t\cdot\cos^3 t\,dt}{a^3\cos^2 t}=\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}\,dt=$$

$$=\int\frac{1-\cos^2 t}{\cos t}\,dt=\int\frac{dt}{\cos t}-\int\cos t\,dt=$$

$$=\int\frac{d\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}-\sin t=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin t+C.$$

Так как $t=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$, то

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Пример 9. Вычислим $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x=a\sin t$, тогда

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a^2\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.$$

Так как

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\quad \sin\arcsin\frac{x}{a}=\frac{x}{a},$$

$$\cos\arcsin\frac{x}{a}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},\quad |x|\neq a,$$

то

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+C.$$

Пример 10. Вычислим $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

Решение. Положим $x=a\operatorname{sh}t$, тогда

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2(1+\operatorname{sh}^2t)}\,a\operatorname{ch}t\,dt=a^2\int\operatorname{ch}^2t\,dt=$$

$$=a^2\int\frac{\operatorname{ch}2t+1}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh}2t+t\right)+C=\frac{a^2}{2}(\operatorname{sh}t\operatorname{ch}t+t)+C.$$

Так как

$$\operatorname{ch}t=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2t}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}},$$

$$e^t=\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

то

$$t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

и

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C.$$

C. Вычисление интегралов вида

$$\int R(e^x,\ e^{2x},\dots,e^{nx})\,dx,$$

где R — рациональная функция

Полагая $e^x=z$, имеем $R(e^x,\ e^{2x},\dots,e^{nx})=R(z,\ z^2,\dots,z^n)$ и $dx=\frac{dz}{z}$.

Пример 11. Вычислим $\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx$.

Решение. Полагая $e^x=z$, имеем

$$\int\frac{e^x+1}{e^x-1}dx=\int\frac{z+1}{z-1}\cdot\frac{dz}{z}=\int\frac{2dz}{z-1}-\int\frac{dz}{z}=2\ln|z-1|-$$

$$-\ln|z|+C=2\ln|e^x-1|-\ln e^x+C=\ln(e^x-1)^2-x+C.$$

D. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Так называются дифференциалы вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где a, b — постоянные, отличные от нуля, m, n, p — рациональные числа.

Первообразная для функции $x^m(a+bx^n)^p$ является элементарной функцией в следующих трех случаях: а) p — целое, б) $\frac{m+1}{n}$ —

целое, в) $\frac{m+1}{n}+p$ — целое;

а) если p — целое, то полагают $x=z^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

Пример 12. Вычислим $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$.

Решение. Положим $x=z^6$, поскольку $p=-2$ — целое. Тогда $\sqrt{x}=z^3$, $\sqrt[3]{x}=z^2$, $dx=6z^5dz$
и

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=6\int \frac{z^8dz}{(1+z^2)^2}=6\int\left(z^4-2z^2+3-\frac{4z^2+3}{(1+z^2)^2}\right)dz=$$

$$=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z-18\operatorname{arctg} z-6\int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2},$$

$$\int \frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}=-\frac{1}{2}\int zd\frac{1}{1+z^2}=-\frac{z}{2(1+z^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx=\frac{6}{5}z^5-4z^3+18z+\frac{3z}{1+z^2}-21\operatorname{arctg} z+C,$$

$$z=\sqrt[6]{x};$$

б) если $\frac{m+1}{n}$ — целое, тогда полагают $a+bx^n=z^N$, где N — знаменатель дроби p.

Пример 13. Вычислим $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

Решение. Положим $1+x^{2/3}=z^2$, поскольку $\frac{m+1}{n}=3$ — целое. Тогда

$$x=(z^2-1)^{\frac{3}{2}},\quad dx=\frac{3}{2}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2zdz.$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int (z^2-1)^2dz=\frac{3}{5}z^5-2z^3+3z+C,$$

$$z=\sqrt{1+x^{2/3}},$$

в) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое, тогда полагают $ax^{-n}+b=z^N$ где N — знаменатель дроби p.

Пример 14. Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Решение. Положим $z^4=1+x^{-4}$, поскольку $\frac{m+1}{n}+p=0$ — целое. Тогда

$$x=(z^4-1)^{-1/4},\ dx=-z^3(z^4-1)^{-5/4}dz,$$
$$\sqrt[4]{1+x^4}=z(z^4-1)^{-1/4}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=-\int\frac{z^2dz}{z^4-1}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}\right)dz-$$
$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{z+1}{z-1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z+C,\ z=(1+x^{-4})^{1/4}.$$

Если подынтегральная функция содержит трансцендентную функцию сложного аргумента $\varphi(x)$, то полезно для упрощения подынтегрального выражения сделать замену $\varphi(x)=t$.

Пример 15. Вычислим

$$\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Решение. Положим $\frac{1}{\sqrt{x}}=t$, тогда $dx=-\frac{2dt}{t^3}$

и

$$\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{-2\arcsin t}{t^3}\,dt.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$-2\int\frac{\arcsin t}{t^3}\,dt=\int\arcsin t\,d\left(\frac{1}{t^2}\right)=\frac{\arcsin t}{t^2}-\int\frac{dt}{t^2\sqrt{1-t^2}}=$$
$$=\frac{\arcsin t}{t^2}+\int\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}=\frac{\arcsin t}{t^2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}+C.$$

Следовательно,

$$\int\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=x\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\sqrt{x-1}+C.$$

Пример 16. Вычислим $\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx$.

Решение. Положим $-\sqrt[3]{x+1}=t$, тогда $x+1=-t^3$, $dx=-3t^2dt$. Следовательно,

$$\int e^{-\sqrt[3]{x+1}}dx=-3\int e^t t^2dt=-3\left(e^t\cdot t^2-2\int te^tdt\right)=-3\left(e^t\cdot t^2-\right.$$
$$\left.-2te^t+2e^t\right)+C=-3t^2e^t+6te^t-6e^t+C,\quad t=-\sqrt[3]{x+1}.$$

Задачи

Найти интегралы:

129. $\int \sin^4 x\,dx$.

130. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

131. $\int \cos^6 x dx$.

132. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

133. $\int \sin^7 x dx$.

134. $\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$.

135. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$.

136. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\,dx$.

137. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\,dx$.

138. $\int \frac{\cos^7 x}{\sin^3 x}\,dx$.

139. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$.

140. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

141. $\int \operatorname{ctg}^4 x\,dx$.

142. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx$.

143. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^4 x}$.

144. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$.

145. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

146. $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

147. $\int x^2 \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

148. $\int x^2 \sqrt{x^2-a^2}\,dx$.

149. $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$.

150. $\int \frac{x^4}{(x^2+a^2)^2}\,dx$.

151. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.

152. $\int \sqrt{e^{3x}+e^{2x}}\,dx$.

153. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

154. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

155. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^7}}$.

156. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

157. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})}$.

158. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

159. $\int 5^{\sqrt{x}}dx$.

160. $\int x \cos\sqrt{x}\,dx$.

§ 4. ПРОСТЕЙШИЕ ИНТЕГРАЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Рассмотрим интегралы вида

I. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx$;

II. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$;

III. $\int (Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$;

IV. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Выделяя из квадратного трехчлена ax^2+bx+c полный квадрат, запишем его в виде $ax^2+bx+c=a(x+\beta)^2+q$. Если в интегралах I, II, III сделать замену $x+\beta=z$, то получим интегралы

$$\text{I}'.\ \int\frac{A_1z+B_1}{az^2+q}\,dz;\quad \text{II}'.\ \int\frac{A_1z+B_1}{\sqrt{az^2+q}}\,dz;$$

$$\text{III}'.\ \int(A_1z+B_1)\sqrt{az^2+q}\,dz.$$

Вычисление этих интегралов в зависимости от знака числа a сводится к вычислению интегралов вида

$$\int\frac{C_r+D}{z^2\pm r^2}\,dz,\quad \int\frac{Cz+D}{\sqrt{z^2\pm r^2}}\,dz,\quad \int\frac{Cz+D}{\sqrt{r^2-z^2}}\,dz,\quad \int(Cz+D)\sqrt{r^2-z^2}\,dz,$$

$$\int(Cz+D)\sqrt{z^2\pm r^2}\,dz,$$

каждый из которых представляет собой комбинацию двух интегралов, один из которых табличный, а другой сводится к табличному, применяя равенство $d(z^2\pm a^2)=2zdz$. Интегралы $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ и $\int\sqrt{x^2+k}\,dx$ не входят в таблицу на с. 176, но они уже были вычислены ранее. Так как интегралы такого вида часто встречаются в приложениях, а вычисление их технически сложно, то предлагается соответствующие первообразные просто запомнить. Поэтому эти интегралы также называют *табличными*:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

$$\int\sqrt{x^2+k}\,dx=\frac{x\sqrt{x^2+k}}{2}+\frac{1}{2}k\ln|x+\sqrt{x^2+k}\,|+C.$$

Пример 1. Вычислим $\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx.$

Решение. Так как $x^2+4x+7=(x+2)^2+3$, то, полагая $x+2=z$, имеем

$$\int\frac{2x+5}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx=\int\frac{2(x+2)+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\,dx=\int\frac{2z+1}{\sqrt{z^2+3}}\,dz=$$

$$=\int\frac{d(z^2+3)}{\sqrt{z^2+3}}+\int\frac{dz}{\sqrt{z^2+3}}=2\sqrt{z^2+3}+\ln|z+\sqrt{z^2+3}|+C=$$

$$=2\sqrt{x^2+4x+7}+\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x+7}\,|+C.$$

Пример 2. Вычислим $\int\frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$

Решение. Так как $1-x-x^2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, то, полагая $x+\frac{1}{2}=z$, имеем

$$\int\frac{1-3x}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx=\int\frac{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx=\int\frac{-3z+\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}}\,dz=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{d\left(\frac{5}{4}-z^2\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}}=3\sqrt{\frac{5}{4}-z^2}+$$

$$+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2z}{\sqrt{5}}+C=3\sqrt{1-x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}+C.$$

Пример 3. Вычислим $\int(2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решение. Так как $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, то

$$\int(2x+7)\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)+6\right]\sqrt{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\int\left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)+6\right]\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,d\left(x+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\int(2z+6)\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz=2\int z\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz+$$

$$+6\int\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz=\int\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,d\left(z^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+6\int\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\,dz=\frac{2}{3}\left(z^2+\frac{3}{4}\right)^{3/2}+6\left(\frac{z\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\ln\left|z+\sqrt{z^2+\frac{3}{4}}\right|\right)+C=\frac{2}{3}(x^2+x+1)^{3/2}+$$

$$+3\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

Для вычисления интеграла $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ делаем в нем замену $x-\alpha=z$, тогда получаем интеграл

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{az^2+b_1z+c_1}}=\int\frac{dz}{z\,|z|\sqrt{a+\frac{b_1}{z}+\frac{c_1}{z^2}}}.$$

Подынтегральная функция непрерывна на лучах $x>\alpha$ и $x<\alpha$. Как указывалось выше, можно выбрать тот, на котором запись подынтегрального выражения более проста, т. е. луч $x>\alpha$, а тогда $z>$

>0. Такой же выбор в подобных ситуациях применяется и далее без особой оговорки. Полагая $\frac{1}{z}=u$, получаем табличный интеграл

$$\int \frac{dz}{z^2\sqrt{a+\frac{b_1}{z}+\frac{c_1}{z^2}}}=\int \frac{d\left(-\frac{1}{z}\right)}{\sqrt{a+\frac{b_1}{z}+\frac{c_1}{z^2}}}=-\int \frac{du}{\sqrt{a+b_1u+c_1u^2}}.$$

Замечание. В интеграле IV можно сразу положить

$$\frac{1}{x-\alpha}=z.$$

Пример 4. Вычислим $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+4x+8}}$.

Решение. Полагая $x-2=z$, имеем при $z>0$

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{2x^2+4x+8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z\sqrt{(z+2)^2+2(z+2)+4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+6z+12}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{z\,|z|\sqrt{1+\frac{6}{z}+\frac{12}{z^2}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-du}{\sqrt{1+6u+12u^2}}=-\frac{1}{\sqrt{24}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{12}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{24}}\int \frac{d\left(u+\frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{48}}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{24}}\ln\left|u+\frac{1}{4}+\sqrt{u^2+\frac{1}{2}u+\frac{1}{12}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{24}}\ln\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{12}}\right|+C=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{24}}\ln\left|\frac{1}{x-2}+\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{12}}\right|+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

161. $\int \frac{2x-5}{x^2+x+3}\,dx.$ **162.** $\int \frac{1-2x}{2x^2-4x-6}\,dx.$

163. $\int \frac{7-3x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$

164. $\int \frac{4x-11}{\sqrt{1+x-x^2}}\,dx.$

165. $\int \frac{\ln x+2}{x\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}}\,dx.$

166. $\int \frac{e^{2x}+3e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,dx.$

167. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-4\sin x+\cos^2 x}}\,dx.$

168. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+2e^x+4}\,dx.$

169. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-5e^x+6}}.$

170. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$

171. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}.$

172. $\int (x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx.$

173. $\int (1-3x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx.$

174. $\int \frac{x^3+x}{-1-x^2+x^4}\,dx.$

175. $\int \frac{x-x^3}{\sqrt{1+x^2+x^4}}\,dx.$

176. $\int \frac{x^3dx}{x^4-x^2+5}.$

177. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}.$

178. $\int \frac{(x+1)^2}{x\sqrt{1+3x+x^2}}\,dx.$

179. $\int (x^3+x)\sqrt{1+x^4}\,dx.$

180. $\int \sqrt{\cos 2x}\cos x\,dx.$

181. $\int \sqrt{\cos 2x}\sin x\,dx.$

182. $\int \frac{1+\sin x}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}\,dx.$

§ 5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

В этом параграфе рассматривается интегрирование функций вида $\frac{T(x)}{R(x)}$, где $T(x)$ и $R(x)$ — многочлены от x. Если степень многочлена $T(x)$ больше или равна степени многочлена $R(x)$, то делением многочлена $T(x)$ на многочлен $R(x)$ выделяем целую часть — многочлен $\Phi(x)$, т. е. $\frac{T(x)}{R(x)}=\Phi(x)+\frac{Q(x)}{R(x)}$, где степень многочлена $Q(x)$ меньше степени многочлена $R(x)$. Интегрирование рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Интегрирование правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ основано на теореме о представлении этой дроби конечной суммой простейших дробей. Вид этого разложения зависит от разложения многочлена $Q(x)$ на множители. Множителям вида $(x-\alpha)^k$ (α — действительный корень многочлена $Q(x)$ кратности k) соответствуют k простейших дробей:

$$\frac{A_m}{(x-\alpha)^m},\quad m=1, 2, \ldots, k,$$

где A_m — постоянные.

Множителям вида $(x^2+px+q)^l$ (трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней) соответствует l простейших дробей вида

$$\frac{B_i x + D_i}{(x^2 + px + q)^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l,$$

где B_i, D_i — постоянные.

Если разложение многочлена $Q(x)$ на множители имеет вид

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdot (x-\alpha_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_i)^{k_i} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots$$
$$\ldots \cdot (x^2 + p_j x + q_j)^{l_j},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ — действительные корни многочлена, соответственно кратности $k_1, k_2, \ldots, k_i$, а трехчлены $x^2+p_1x+q_1, \ldots, x^2+p_jx+q_j$ не имеют действительных корней, то разложение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей ищется в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{A_1^{(i)}}{x-\alpha_i} + \ldots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x-\alpha_i)^{k_i}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1 x + q_1} +$$
$$+ \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{B_{l_1}^{(1)}x + C_{l_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{B_1^{(j)}x + C_1^{(j)}}{x^2 + p_j x + q_j} + \frac{B_2^{(j)}x + C_2^{(j)}}{(x^2 + p_j x + q_j)^2} + \ldots + \frac{B_{l_j}^{(j)}x + C_{l_j}^{(j)}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}}.$$

Здесь в (1) $A_1^{(i)}, \ldots, A_{k_i}^{(i)}, B_1^{(j)}, \ldots, B_{l_j}^{(j)}, C_1^{(j)}, \ldots, C_{l_j}^{(j)}$ — некоторые, пока неопределенные коэффициенты, способ отыскания которых будет указан ниже.

Итак, интегрирование рациональной функции приводится к интегрированию дробей вида

$$\text{I.}\ \frac{A}{x-a}. \quad \text{II.}\ \frac{D}{(x-a)^k}, \ k \geqslant 2. \quad \text{III.}\ \frac{Bx + C}{x^2 + px + q}.$$

$$\text{IV.}\ \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^m}, \ m \geqslant 2.$$

(трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней). Для дробей вида I, II, III соответственно имеем

$$\int \frac{A}{x-a}\, dx = A \ln |x + a| + C;$$

$$\int \frac{D}{(x-a)^k}\, dx = -\frac{D}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C, \ k \geqslant 2;$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{Bp}{2}}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{\sqrt{q^2-\frac{p^2}{4}}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$$

(так как x^2+px+q не имеет действительных корней, то $q-\frac{p^2}{4} > 0$). При вычислении интеграла IV поступим следующим образом: представим линейную функцию в числителе в виде комбинации производной квадратного трехчлена и константы, т. е.

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+\left(C-\frac{Bp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^m}\,dx =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^m} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} =$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\frac{1}{1-m}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)I_m,\quad m \geqslant 2.$$

Рассмотрим интеграл

$$I_m = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}\quad \left(\frac{p^2}{4}-q<0\right).$$

Выделением полного квадрата $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$ и заменой $x+\frac{p}{2}=z$ он приводится к виду $\int \frac{dz}{(b^2+z^2)^m}$.

Для вычисления такого интеграла используется подстановка $z = b\,\mathrm{tg}\,u$ или выводится рекуррентное соотношение, позволяющее понизить степень m в знаменателе интегрированием по частям. Действительно, представляя I_m в виде комбинации I_{m-1} и $\int \frac{z^2dz}{(z^2+b^2)^m}$ и вычисляя последний интегрированием по частям, получим

$$I_m = \int \frac{dz}{(z^2+b^2)^m} = \frac{1}{b^2}\int \frac{(b^2+z^2)-z^2}{(z^2+b^2)^m}\,dz =$$

$$= \frac{1}{b^2}I_{m-1} - \frac{1}{b^2}\int z\,\frac{zdz}{(z^2+b^2)^m} = \frac{1}{b^2}I_{m-1} -$$

$$-\frac{1}{b^2}\int zd\left(\frac{1}{2(1-m)}\cdot\frac{1}{(z^2+b^2)^{m-1}}\right)=\frac{1}{b^2}I_{m-1}+$$

$$+\frac{z}{2b^2(m-1)(z^2+b^2)^{m-1}}-\frac{1}{2(m-1)b^2}\int\frac{dz}{(z^2+b^2)^{m-1}}=$$

$$=\frac{z}{2b^2(m-1)(z^2+b^2)^{m-1}}+\frac{2m-3}{2b^2(m-1)}I_{m-1}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов при разложении правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей правую часть искомого разложения (1) приводят к общему знаменателю (им будет многочлен $Q(x)$) и у получившегося в числителе многочлена, и у многочлена $P(x)$ приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. Таким образом, получается система линейных уравнений, из которой находятся неопределенные коэффициенты (в алгебре доказывается ее однозначная разрешимость).

Пример 1. Вычислим $\int\frac{x\,dx}{(x+1)(x-2)^2}$.

Решение. Разложение дроби $\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}. \tag{2}$$

Приводя в (2) к общему знаменателю правую часть, имеем

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Приравнивая числители дробей, получаем тождество

$$x=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1). \tag{3}$$

Перепишем его в виде

$$x=(A+B)x^2+(C-B-4A)x+(4A-2B+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ C-B-4A=1, \\ 4A-2B+C=0, \end{cases}$$

откуда $A=-\frac{1}{9}$, $B=\frac{1}{9}$, $C=\frac{2}{3}$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-2} + C.$$

Иногда полезно в равенство, полученное приравниванием многочлена $P(x)$ к числителю дроби, полученной после приведения к общему знаменателю простейших дробей, подставлять вместо x некоторые специально подобранные числа (обычно действительные корни знаменателя данной рациональной дроби). В результате получаются линейные уравнения относительно искомых коэффициентов, хотя следует помнить, что при подстановке произвольных чисел полученные уравнения могут быть зависимыми.

Применим этот метод к предыдущему примеру, полагая в тождестве (3) $x=2$, имеем $2=3C$, откуда $C=2/3$. Полагая $x=-1$, имеем $-1=9A$, откуда $A=-1/9$. Полагая $x=0$, имеем $0=4A-2B+$ $+C$, откуда с учетом найденных $A=-1/9$ и $C=2/3$ имеем $B=$ $=4A+C/2=1/9$.

Пример 2. Вычислим $\int \frac{3x^2-x-2}{(1+x^2)^2(x-1)}dx$.

Решение. Разложение дроби $\frac{3x^2-x-2}{(1+x^2)^2(x-1)}$ в сумму простейших дробей ищем в виде

$$\frac{3x^2-x-2}{(1+x^2)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}.$$

Коэффициенты A, B, C, D и E определим, исходя из тождества

$$3x^2-x+2 = A(1+x^2)^2 + (Bx+C)(x-1)(1+x^2) + (Dx+E)(x-1).$$

Полагая $x=1$, находим $A=1$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -B+C=0, \\ 2A-C+D+B=3, \\ C-B+E-D=-1, \\ A-C-E=2, \end{cases}$$

откуда находим, учитывая, что $A=1$, остальные коэффициенты: $B=-1$, $C=-1$, $D=1$, $E=0$.

Следовательно,

$$\int \frac{3x^2-x+2}{(1+x^2)^2(x-1)}dx = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{x+1}{1+x^2}dx + \int \frac{xdx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2} + C.$$

Так как разложение на простейшие дроби часто требует громоздких выкладок, то иногда при вычислении интегралов от рациональной функции полезно производить некоторые преобразования, делать замены переменных, позволяющие упростить вычисление данных интегралов.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{(x+2)^2(x-3)^2} = \int \left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x-3)^2} + \frac{1}{25}\int \frac{dx}{(x+2)^2} - \frac{2}{25}\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} =$$

$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{2}{125}\int\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+2}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+2} - \frac{2}{125}\ln|x-3| +$$

$$+ \frac{2}{125}\ln|x+2| + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+2-x^2}{x^2(2+x^2)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2(2+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right)dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(2+x^2)^2} = -\frac{1}{4x} - \frac{x}{8(x^2+2)} - \frac{3}{8\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{x^3-1}{(x+2)^6}\,dx = \int \frac{(x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 12(x+2) - 9}{(x+2)^6}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+2)^3} - 6\int \frac{dx}{(x+2)^4} + 12\int \frac{dx}{(x+2)^5} - 9\int \frac{dx}{(x+2)^6} =$$

$$= -\frac{1}{2(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{9}{5(x+2)^5} + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{x^3(x-1)^6} = \int \frac{dx}{x^9\left(\frac{x-1}{x}\right)^6} = \int \frac{(1-z)^7\,dz}{z^6} =$$

$$= \int \frac{1 - 7z + 21z^2 - 35z^3 + 35z^4 - 21z^5 + 7z^6 - z^7}{z^6}\,dz =$$

$$=\int\frac{dz}{z^6}-7\int\frac{dz}{z^5}+21\int\frac{dz}{z^4}-35\int\frac{dz}{z^3}+$$

$$+35\int\frac{dz}{z^2}-21\int\frac{dz}{z}+7\int dz-\int zdz=$$

$$=-\frac{1}{5z^5}+\frac{7}{4z^4}-\frac{7}{z^3}+\frac{35}{2z^2}-\frac{35}{z}-21\ln|z|+$$

$$+7z-\frac{z^2}{2}+C,\ z=\frac{x-1}{x}.$$

Пример 7.

$$\int\frac{dx}{x(1-x^3)^2}=\int\frac{x^2dx}{x^3(1-x^3)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{dx^3}{x^3(1-x^3)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u(1-u)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{1}{1-u}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{(1-u)^2}+\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{1-u}\right)du=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-u}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{1-u}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3-1}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{x^3-1}\right|+C.$$

Пример 8.

$$\int\frac{dx}{x^3(x^2-2)}=\int\frac{xdx}{x^4(x^2-2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx^2}{x^4(x^2-2)}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2(u-2)}=-\frac{1}{4}\int\frac{u-2-u}{u^2(u-2)}du=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^2}+\frac{1}{4}\int\frac{du}{u(u-2)}=\frac{1}{4u}+$$

$$+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|+C=\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^2-2}{x^2}\right|+C.$$

Пример 9. Для $x\neq 0$

$$\int\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}dx=\int\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}dx=$$

$$=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^2}=\int\frac{du}{(u+1)^2}=$$

$$= -\frac{1}{u+1} + C = -\frac{x}{x^2+x+1} + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2+3+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+5} = \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C.$$

Пример 11.

$$\int \frac{x^4+1}{x^6-1}\,dx = \int \frac{x^4+1-2x^2}{x^6-1}\,dx + 2\int \frac{x^2}{x^6-1}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx + \frac{2}{3}\int \frac{dx^3}{x^6-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| +$$

$$+ \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right| + C.$$

Пример 12.

$$\int \frac{3x^7+5x^3}{(x^8+4)^2}\,dx = \frac{3}{8}\int \frac{d(x^8+4)}{(x^8+4)^2} + \frac{5}{4}\int \frac{dx^4}{[(x^4)^2+4]^2} =$$

$$= \frac{3}{8}\int \frac{du}{u^2} + \frac{5}{4}\int \frac{du}{(u^2+4)^2} =$$

$$= -\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x^8+4} + \frac{5}{32}\cdot\frac{x^4}{x^8+4} + \frac{5}{64}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2} + C.$$

Пример 13. Вычислим $\int \frac{x^2dx}{(x^2-3)^3}$.

Решение.

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2-3)^3} = \int x\cdot\frac{xdx}{(x^2-3)^3} = \frac{1}{2}\int \frac{xd(x^2-3)}{(x^2-3)^3} =$$

$$= \frac{1}{2}\int x\left(-\frac{1}{2}\,d(x^2-3)^{-2}\right) = -\frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2-3)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x^2-3)^2};$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{3-x^2+x^2}{(x^2-3)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-3} + \frac{1}{3}\int x\,\frac{xdx}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + \frac{1}{3}\int x\,\frac{\frac{1}{2}\,d(x^2-3)}{(x^2-3)^2} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + \frac{1}{6}\int xd\left(\frac{-1}{x^2-3}\right) =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| - \frac{1}{6}\,\frac{x}{x^2-3} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2-3} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| - \frac{1}{6}\,\frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{12\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2-3)^3} = -\frac{1}{24}\cdot\frac{x}{x^2-3} - \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2-3)^2} +$$

$$+ \frac{1}{48\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+x}{\sqrt{3}-x}\right| + C.$$

Метод Остроградского

Иногда при интегрировании правильной рациональной дроби $\frac{P(x)}{Q(x)}$ используют метод, суть которого состоит в выделении рациональной части первообразной. Пусть $Q(x)$ имеет кратные корни (включая и комплексные). Составим многочлен $Q_2(x)$ так, чтобы все его корни были простые и каждый корень $Q_2(x)$ являлся бы корнем многочлена $Q(x)$. Тогда $Q(x)=Q_2(x)Q_1(x)$, где корни $Q_1(x)$ есть корни многочлена $Q(x)$ с кратностями каждый на единицу меньше. В частности, все простые корни $Q(x)$ будут корнями $Q_2(x)$ и не будут корнями $Q_1(x)$.

Справедливо соотношение

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{R(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{\Phi(x)}{Q_2(x)}\,dx, \qquad (4)$$

где $R(x)$ и $\Phi(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней многочленов $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Неопределенные коэффициенты многочленов $R(x)$ и $\Phi(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования равенства (4). Обычно метод Остроградского применяется, если многочлен $Q(x)$ имеет несколько корней большой кратности.

Пример 14. Вычислим $\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx$.

Решение. Полагаем

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+4x+8} + \int \frac{cx+d}{x^2+4x+8}dx.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2} = \frac{a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)}{(x^2+4x+8)^2} + \frac{cx+d}{x^2+4x+8},$$

откуда

$$2x+12 = a(x^2+4x+8)-(2x+4)(ax+b)+(cx+d)(x^2+4x+8). \tag{5}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства (5), получим систему уравнений

$$\begin{cases} c=0, \\ 0=a-2a+d+4c, \\ 2=4a-4a+2b+4d+8c, \\ 12=8a-4b+8d, \end{cases}$$

откуда $c=0$, $a=d=b=1$. Следовательно,

$$\int \frac{2x+12}{(x^2+4x+8)^2}dx = \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} =$$

$$= \frac{x+1}{x^2+4x+8} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C.$$

Задачи

Найти интегралы:

183. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$.

184. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

185. $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$.

186. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

187. $\int \frac{x^2}{1-x^4}dx$.

188. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

189. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

190. $\int \frac{x^2}{1+x^4}dx$.

191. $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

192. $\int \frac{dx}{x^4(x-2)^3}$.

193. $\int \frac{dx}{(x^2-3x+2)^3}$.

194. $\int \frac{2x^2-x^5}{1+x^6}dx$.

195. $\int \frac{dx}{x(1+x^3)^2}$.

196. $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\,dx$.

197. $\int \frac{x^2+1}{x^4+5x^2+1}\,dx$.

198. $\int \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1}\,dx$.

199. $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

200. $\int \frac{dx}{x^4(x^6+1)}$.

201. $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^2}\,dx$.

202. $\int \frac{x^{11}}{(x^6+1)^3}\,dx$.

§ 6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где в общем случае R — рациональная функция, приводятся к интегрированию рациональных функций с помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, при этом

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2} =$$

$$= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Обратим внимание, что применение подстановки $\operatorname{tg}(x/2)=t$ возможно только на промежутках, не содержащих точек вида $2k\pi$, $k\in Z$. В дальнейшем это подразумевается.

Пример 1.

$$\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x} = \int\frac{dx}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \int\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+6\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= -2\int \frac{d\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 6\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 1} = -2\int \frac{du}{(u-3)^2 - 10} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{u-3-\sqrt{10}}{u-3+\sqrt{10}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 3 - \sqrt{10}}{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} - 3 + \sqrt{10}}\right| + C.$$

Подстановка $t = \mathrm{tg}(x/2)$, являющаяся универсальной для интегралов от рациональных выражений, содержащих функции $\sin x$ и $\cos x$, приводит иногда к довольно сложным выкладкам. Ниже рассматриваются некоторые случаи, когда подынтегральная функция приводится к рациональной дроби более простым способом.

I. Если $R(-\sin x,\ \cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$, то применяется подстановка $\cos x = t$.

II. Если $R(\sin x,\ -\cos x) = -R(\sin x,\ \cos x)$, то применяется подстановка $\sin x = t$.

III. Если $R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$, то применяется подстановка $\mathrm{tg}\,x = t$.

Замечание. Любое рациональное выражение $R(u,\ v)$ всегда можно представить в виде суммы трех выражений, рассмотренных в пунктах I, II, III:

$$R(u, v) = \frac{R(u, v) - R(-u, v)}{2} + \frac{R(-u, v) - R(-u, -v)}{2} +$$
$$+ \frac{R(-u, -v) + R(u, v)}{2}.$$

Пример 2. Вычислим $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$.

Решение. $R = \frac{\sin x}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)}$.

Так как $R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$, то, полагая $\mathrm{tg}\,x = t$, имеем

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)} = \int \frac{\mathrm{tg}\,x\,d\,\mathrm{tg}\,x}{1 + \mathrm{tg}\,x} =$$
$$= -\ln|1 + \mathrm{tg}\,x| + \mathrm{tg}\,x + C.$$

Пример 3. Вычислим $\int \frac{\sin 2x}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}\,dx$.

Решение. Пусть $R = \frac{\sin 2x}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}$.

Так как $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, полагая $\cos x = t$, имеем

$$\int \frac{\sin 2x}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7}\,dx = \int \frac{-2t\,dt}{4\left(t^2 + 3t + \frac{9}{4}\right) - 16} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{\left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - 4} = -\frac{1}{2}\int \frac{u\,du}{u^2 - 4} + \frac{3}{4}\int \frac{du}{u^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln|u^2 - 4| + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\left(\cos x + \frac{3}{2}\right)^2 - 4\right| + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{\cos x - \frac{1}{2}}{\cos x + \frac{7}{2}}\right| + C.$$

Пример 4. Вычислим $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$.

Решение. $R = \dfrac{\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1}$. Так как $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то, полагая $\sin x = t$, имеем

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x + 1} = \int \frac{d\sin x}{1 + \sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 + 2\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^4 + 1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}\,dt -$$

$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1}\,dt = \frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x + 1}{\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 1} +$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x + 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\sin x - 1)\right] + C.$$

Иногда, если это не нарушает рациональности подынтегрального выражения, полезно понизить степени $\sin x$ и $\cos x$, используя переход к кратным углам.

Пример 5. Вычислим $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$.

Решение. Применяя формулы

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

имеем $\cos^6 x + \sin^6 x = \frac{1}{4}(1 + 3\cos^2 2x)$.

Полагая $\operatorname{tg} 2x=t$, находим

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x+\cos^6 x}=\int \frac{4dx}{1+3\cos^2 2x}=2\int \frac{dt}{t^2+4}=\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2}+C.$$

Рассмотрим некоторые специальные методы.

Пример 6. Вычислим $\int \frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx.$

Решение. Представим числитель $(\sin x-3\cos x)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(4\sin x+5\cos x)$ и его производной, т. е.

$$\sin x-3\cos x=A(4\sin x+5\cos x)+B(4\cos x-5\sin x).$$

Для нахождения коэффициентов A и B имеем систему

$$\begin{cases} 1=4A-5B, \\ -3=5A+4B, \end{cases} \text{ откуда } A=-\frac{11}{41},\ B=-\frac{17}{41},$$

поэтому

$$\int \frac{\sin x-3\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx=-\frac{11}{41}\int \frac{4\sin x+5\cos x}{4\sin x+5\cos x}dx-$$

$$-\frac{17}{41}\int \frac{d(4\sin x+5\cos x)}{4\sin x+5\cos x}=-\frac{11}{41}x-\frac{17}{41}\ln|4\sin x+5\cos x|+C.$$

Пример 7. Вычислим $\int \frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx.$

Решение. Представим числитель $(2\sin x+\cos x-1)$ в виде линейной комбинации знаменателя $(\sin x-\cos x+2)$, его производной и константы, т. е.

$$2\sin x+\cos x-1=A(\sin x-\cos x+2)+B(\cos x+\sin x)+C.$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C имеем систему

$$\begin{cases} 2=A+B, \\ 1=-A+B, \\ -1=2A+C, \end{cases}$$

откуда $B=\frac{3}{2}$, $A=\frac{1}{2}$, $C=-2$. Поэтому

$$\int \frac{2\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\sin x-\cos x+2}{\sin x-\cos x+2}dx+$$

$$+\frac{3}{2}\int \frac{\cos x+\sin x}{\sin x-\cos x+2}dx-2\int \frac{dx}{\sin x-\cos x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x+2|-$$

$$-2\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}+2\sin^2\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x+2|-4\int\frac{d\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(3\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\ln|\sin x-\cos x+2|-2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример 8. Вычислим $\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx.$

Решение. Представим выражение $2\sin^2x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x$ в виде

$$2\sin^2x+3\sin x\cos x+5\cos^2x=(A\sin x+B\cos x)(\sin x-2\cos x)+$$
$$+C(\sin^2x+\cos^2x).$$

Для нахождения коэффициентов A, B и C имеем систему

$$\begin{cases}2=A+C\\3=B-2A,\\5=-2B+C,\end{cases}\quad \text{откуда } A=-\frac{9}{5},\ B=-\frac{3}{5},\ C=\frac{19}{5}.$$

Поэтому

$$\int\frac{2\sin^2 x+3\sin x\cos x+5\cos^2 x}{\sin x-2\cos x}dx=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5}\int\frac{2\,d\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}=$$

$$=\frac{9}{5}\cos x-\frac{3}{5}\sin x+\frac{19}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C.$$

Задачи

Найти интегралы:

203. $\int\frac{dx}{3+\sin x}$. **204.** $\int\frac{dx}{1+5\cos x}$.

205. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 6}$.

206. $\int \frac{\cos x\, dx}{2 - \cos x}$.

207. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x}$.

208. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

209. $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$.

210. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x + 1)^2}$.

211. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}$.

212. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}$.

213. $\int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}$.

214. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

215. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$.

216. $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

217. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}\, dx$.

218. $\int \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} x}\, dx$.

219. $\int \frac{\sin x}{2\sin x + 3\cos x}\, dx$.

220. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\, dx$.

221. $\int \frac{\cos 2x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.

222. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^5 x \cos x + \cos^5 x \sin x}$.

223. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x + 3\cos x}\, dx$.

224. $\int \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x}\, dx$.

225. $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^4 x}\, dx$.

226. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

227. $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(4 + \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg}^3 x}\, dx$.

228. $\int \frac{\sin x + \cos x + 1}{2\sin x + \cos x + 2}\, dx$.

229. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{(2\cos x - 3\sin x)^2}\, dx$.

230. $\int \frac{1 + 3\sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x - 2\cos x}\, dx$.

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ РАДИКАЛЫ

I. Интегрирование функций вида $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$, где R — рациональная функция двух аргументов, m — натуральное число, α, β, γ, δ — некоторые константы.

При интегрировании таких функций полагают $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} = t^m$, тогда x будет некоторая рациональная функция $\varphi(t)$ и интеграл запишется в виде

$$\int R(\varphi(t), t)\varphi'(t)\, dt,$$

где подынтегральная функция есть рациональная функция t.

Пример 1. Вычислим $\int \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 - \sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Положим $\sqrt{x}=t$, тогда $\frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt$, т. е. $dx=2tdt$

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t+1}{t^4-t}\cdot 2t\,dt=2\int \frac{t+1}{t^3-1}\,dt.$$

Разлагая рациональную функцию $\frac{t+1}{t^3-1}$ в сумму простейших дробей, имеем

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\,dx=\frac{4}{3}\int \frac{dt}{t-1}-\frac{2}{3}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt=\frac{4}{3}\ln|t-1|-$$

$$-\frac{2}{3}\ln|t^2+t+1|+C=\frac{2}{3}\ln\frac{t^2-2t+1}{t^2+t+1}+C=$$

$$=\frac{2}{3}\ln\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}+1}+C.$$

Пример 2. Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

Решение. Положим $\sqrt[4]{x}=t$, тогда $\frac{x^{-3/4}}{4}dx=dt$, т. е. $dx=4t^3dt$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=4\int \frac{t^3\,dt}{t^2+t}=4\int \frac{t^2\,dt}{t+1}=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=4\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln|\sqrt[4]{x}+1|+C.$$

Пример 3. Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\frac{1}{(x+2)^2}\sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}.$$

Полагая $\frac{x+2}{x-1}=t^4$, имеем

$$x=\frac{2+t^4}{t^4-1},\quad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1},\quad dx=\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}\,dt,$$

тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\int \sqrt[4]{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^3}\cdot\frac{dx}{(x+2)^2}=$$

$$=\int t^3\cdot\frac{(t^4-1)^2}{9t^8}\cdot\frac{(-12t^3)}{(t^4-1)^2}dt=\int -\frac{4}{3}\cdot\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t}+C=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

II. Интегрирование функций вида $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $R(x)$ — рациональная функция.

Выделяя из рациональной дроби $R(x)$ целую часть — многочлен $P(x): R(x)=P(x)+\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ — и раскладывая дробь $\frac{\Phi(x)}{Q(x)}$ в сумму простейших дробей, видим, что интегрирование функций $\frac{R(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ приводится к вычислению интегралов следующих типов:

а) $\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, $P(x)$ — многочлен;

б) $\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$, A — константа;

в) $\int\frac{(Mx+N)\,dx}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$, M, N — константы и трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Укажем методы вычисления этих интегралов.

а. Можно показать, что первообразную для функции $\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P(x)$ — многочлен степени n, следует искать в виде

$$\int\frac{P(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{1}$$

где $Q(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами, λ — неизвестная константа.

Коэффициенты многочлена $Q(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (1).

Пример 4. Вычислим $\int\frac{(x^3-2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Решение. Полагаем

$$\int\frac{(x^3-2)\,dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=(ax^2+bx+c)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Дифференцируя это тождество, имеем

$$\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}=(2ax+b)\sqrt{x^2+x+1}+$$
$$+\frac{(ax^2+bx+c)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

откуда

$$2(x^3-2)=(4ax+2b)(x^2+x+1)+(ax^2+bx+c)(2x+1)+2\lambda.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов a, b, c и λ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2=4a+2a, \\ 0=4a+2b+a+2b, \\ 0=4a+2b+b+2c, \\ -4=2b+c+2\lambda, \end{cases}$$

откуда $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{5}{12}$, $c=-\frac{1}{24}$, $\lambda=-\frac{25}{16}$.

Следовательно,

$$\int\frac{x^3-2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\frac{25}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{12}x-\frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2+x+1}-$$
$$-\frac{25}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C.$$

6. Интеграл вида $\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $(x-\alpha)=\frac{1}{t}$ приводится к виду, рассмотренному в предыдущем пункте.

Пример 5. Вычислим $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. Положим $x=\frac{1}{t}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$ и для $t>0$ имеем

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{t^3\,dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$
$$=-\int\frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}dt=-\int\sqrt{t^2+1}\,dt+\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=$$

$$= -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C =$$

$$= -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| + C, \quad t = \frac{1}{x}.$$

в. Рассмотрим вычисление интеграла

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}\,(x^2+px+q)^m}\,dx.$$

Предположим вначале, что

$$ax^2+bx+c = \alpha(x^2+px+q).$$

Тогда

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{(M_1x+N_1)\,dx}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}.$$

Поскольку

$$M_1x+N_1 = \frac{M_1}{2}(2x+p) + N_1 - \frac{M_1p}{2},$$

то

$$\int \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}\,dx = C_1\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^{m+1/2}} +$$

$$+ B_1\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}.$$

Первый из полученных интегралов табличный.

Для вычисления интеграла $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{m+1/2}}$ применяется подстановка Абеля: $t = \left(\sqrt{x^2+px+q}\right)'$.

В общем случае, т. е. если отношение трехчленов ax^2+bx+c и x^2+px+q непостоянно, в интеграле делают замену переменного так, чтобы во вновь полученных трехчленах одновременно исчезли члены с первой степенью. Это достигается, например, с помощью дробно-линейной подстановки $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$,

если $p \neq \frac{b}{a}$, и $x = t - \frac{p}{2}$, если $p = \frac{b}{a}$.

В результате получаем интеграл

$$\int \frac{At+B}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}}\,dt.$$

Для вычисления этого интеграла представим его в виде

$$\int \frac{At\,dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}} + B\int \frac{dt}{(t^2+\lambda)^m\sqrt{\delta t^2+r}}.$$

К первому из этих интегралов применяем подстановку $u=\sqrt{\delta t^2+r}$; а ко второму — подстановку $v=(\sqrt{\delta t^2+r})$.

Пример 6. Вычислим $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+x+2)^5}}$.

Решение. Полагаем

$$t=(\sqrt{x^2+x+2})'=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}},$$

тогда

$$4t^2(x^2+x+2)=4x^2+4x+1=4(x^2+x+2)-7,$$

откуда

$$x^2+x+2=\frac{-7}{4t^2-4}.$$

Дифференцируя равенство

$$t\sqrt{x^2+x+2}=x+\frac{1}{2},$$

имеем

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+\frac{(2x+1)\,t\,dx}{2\sqrt{x^2+x+2}}=dx,$$

откуда

$$dt\sqrt{x^2+x+2}+t^2\,dx=dx.$$

Итак,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}=\frac{dt}{1-t^2},$$

поэтому

$$\int\frac{dx}{(x^2+x+2)^{5/2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+2}}\cdot\frac{1}{(x^2+x+2)^2}=$$

$$=\int\frac{dt}{1-t^2}\cdot\frac{(4t^2-4)^2}{49}=\frac{16}{49}\int(1-t^2)\,dt=\frac{16}{49}\left(t-\frac{t^3}{3}\right)+C=$$

$$=\frac{16}{49}\left[\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+2}}-\frac{1}{24}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}}\right)^3\right]+C.$$

Пример 7. Вычислим $\int\frac{(x+2)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$.

Решение. Имеем

$$\int\frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx=\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}+\int\frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1)\sqrt{u+2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2z\,dz}{(z^2-1)\,z} =$$

$$= \int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| + C.$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ положим

$$t = (\sqrt{x^2+2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Тогда $t^2 = \frac{x^2}{x^2+2}$, т. е.

$$x^2 = \frac{2t^2}{1-t^2},\quad t\sqrt{x^2+2} = x,$$

$$dt\cdot\sqrt{x^2+2} + \frac{xt\,dx}{\sqrt{x^2+2}} = dx,\quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \frac{dt}{1-t^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{2dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2}\cdot\frac{1}{\frac{2t^2}{1-t^2}+1} = \int \frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,t + C = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C$$

и

$$\int \frac{x+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+2}-1}{\sqrt{x^2+2}+1}\right| +$$

$$+ 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + C.$$

Замечание. Интеграл $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$ на промежутке $x>0$ $(x<0)$ заменой $u = \frac{1}{x^2}$ приводится к виду $\int \frac{\ulcorner - du \urcorner}{(u+1)\sqrt{1+2u}}$.

Пример 8. Вычислим $\int \frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

Решение. Выделяя из дроби $\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1}$ правильную часть, имеем

$$\frac{x^4+x^3+4x-7}{x^3+1} = x+1+\frac{3x-8}{x^3+1}.$$

Разложим дробь $\frac{3x-8}{x^3+1}$ в сумму простейших дробей

$$\frac{3x-8}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

откуда $3x-8=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. Полагая в этом равенстве $x=-1$, находим $A=-11/3$. Из равенства $A+B=0$ и $A+C=-8$ находим $A=-B=-\frac{11}{3}$, $C=-\frac{13}{3}$.

Следовательно,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx+\int\frac{-\frac{11}{3}dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}+$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx;$$

$$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$$

Для $x+1>0$ имеем

$$-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}=-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}}=$$

$$=\frac{11}{3}\int\frac{du}{\sqrt{1-2u+2u^2}}=$$

$$=\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{1-\frac{2}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}}\right|+C.$$

Таким образом,

$$\int\frac{x^4+x^3+4x-7}{(x^3+1)\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+$$

$$+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{3}\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\sqrt{x^2+1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\frac{11}{3\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{x^2+1}{(x+1)^3}}\right|-$$

$$-\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}-\frac{4}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{6(x^2+1)}+\sqrt{2}(x+1)}{\sqrt{6(x^2+1)}-\sqrt{2}(x+1)}\right|+C.$$

Вычисление последнего интеграла разобрано в следующем примере.

Пример 9. Вычислим $\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx.$

Решение. Так как отношение трехчленов x^2-x+1 и x^2+1 — не константа, полагаем $x=\frac{\alpha t+\beta}{t+1}$. Тогда

$$x^2-x+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2-(\alpha t+\beta)(t+1)+t^2+2t+1}{(t+1)^2}.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе полученной дроби, имеем соотношение между α и β:

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0.$$

Поскольку

$$x^2+1=\frac{\alpha^2t^2+2\alpha t\beta+\beta^2+t^2+2t+1}{(t+1)^2},$$

то, приравнивая к нулю коэффициент при t в числителе этой дроби, получаем еще одно соотношение между α и β: $2\alpha\beta+2=0$. Из системы

$$\begin{cases} 2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0, \\ 2\alpha\beta+2=0 \end{cases}$$

находим $-\alpha=\beta=-1$.

Следовательно, в данном интеграле надо сделать замену $x=\frac{t-1}{t+1}$. Тогда имеем

$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(t+1)^2}, \quad x^2+1=\frac{2t^2+2}{(t+1)^2},$$

поэтому

$$11x-13=\frac{-2t-24}{t+1}, \quad dx=\frac{2}{(t+1)^2}dt,$$

$$\int\frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}dx=-2\sqrt{2}\int\frac{(t+12)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}.$$

Далее, имеем

$$\int\frac{tdt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}=\int\frac{d\sqrt{t^2+1}}{t^2+3}=\int\frac{du}{u^2+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}}+C.$$

Для вычисления $\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}}$ сделаем подстановку $z=(\sqrt{t^2+1})'$.

Имеем $\frac{dz}{1-z^2}=\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$, $t^2+3=\frac{3-2z^2}{1-z^2}$,

$$\int \frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{t^2+1}} = \int \frac{dz}{3-2z^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3}+z\sqrt{2}}{\sqrt{3}-z\sqrt{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}\,t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}\,t} \right| + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{11x-13}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+1}}\,dx = -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{2}} -$$

$$-4\sqrt{3}\ln\left| \frac{\sqrt{3t^2+3}+\sqrt{2}\,t}{\sqrt{3t^2+3}-\sqrt{2}\,t} \right| + C,$$

где $t = \frac{x+1}{1-x}$.

Задачи

Вычислить следующие интегралы:

231. $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$.

232. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$.

233. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

234. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

235. $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2+2}\,dx$.

236. $\int \frac{dx}{(x^2+x)^{3/2}}$.

237. $\int \frac{x^4-5x^3+6x-7}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$.

238. $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx$.

239. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x-2}}$.

240. $\int (x+1)\sqrt{x^2+4x+1}\,dx$.

241. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}}\,dx$.

242. $\int \frac{x-1}{(x^2+1)\sqrt{3-x^2}}\,dx$.

243. $\int \frac{x^2+3x+1}{(x^2+2x-1)^{5/2}}\,dx$.

244. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

245. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x+1)^2}}$.

246. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

247. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2\cdot(x-1)^7}}$.

248. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[3]{x}}$.

249. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

250. $\int \frac{dx}{(3-x)\sqrt{1-x}}$.

251. $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\,dx$.

252. $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

§ 8. ЗАДАЧИ НА РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Применяя различные методы, найти следующие интегралы:

253. $\int \frac{dx}{x\ln x - x}$.

254. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2\ln x + x^3}}\,dx$.

255. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}}$.

256. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

257. $\int \frac{dx}{e^{2x}+6}$.

258. $\int \frac{x^3+1}{x^2(1-x)}\,dx$.

259. $\int \frac{x^2dx}{(1+x)^2(2+x)^2}$.

260. $\int \frac{dx}{(1+x)^3(1-x)^2}$.

261. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

262. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

263. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

264. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$.

265. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$.

266. $\int x^2\cos x\,dx$.

267. $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$.

268. $\int \frac{x}{\sin^4 x}\,dx$.

269. $\int x\ln\frac{x}{1+x^2}\,dx$.

270. $\int \frac{dx}{(x+1)(1+x^2)^2}$.

271. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2(2+x^2)^2}$.

272. $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$.

273. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x+6}$.

274. $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x-3\cos x+2}$.

275. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x-\cos^4 x}$.

276. $\int \frac{dx}{\sin x\cdot\sin 2x}$.

277. $\int \frac{\cos^4 x\,dx}{\sin^3 x}$.

278. $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$.

279. $\int x^2\arcsin x\,dx$.

280. $\int x^3\,\mathrm{arctg}^2 x\,dx$.

281. $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4}\,dx$.

282. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

283. $\int x^3 (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx.$

284. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$

285. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^2 x}.$

286. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^2} dx.$

287. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}.$

288. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{3-4x^2+8x}} dx.$

289. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})(\sqrt[4]{x}+2\sqrt[6]{x})^2}.$

290. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+5}.$

291. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{3x^2-6x+13}} dx.$

292. $\int \frac{4\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x})^3} dx.$

293. $\int \frac{\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x})^2} dx.$

294. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{4x^2-10x+7}}.$

295. $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}.$

296. $\int \frac{x^4+1}{x^6-1} dx.$

297. $\int \frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)} dx.$

298. $\int \frac{1+x^4}{x^3-x^2+x-1} dx.$

299. $\int \frac{2x^3-1}{(2x+1)^5} dx.$

300. $\int \frac{x^2+4}{(x-2)^4} dx.$

301. $\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}.$

302. $\int \frac{2x^3-1}{x(x^3+1)} dx.$

303. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}.$

304. $\int \frac{x(1+2x^2)}{1+x^4} dx.$

305. $\int \frac{x^5 dx}{x^6+1}.$

306. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-4)}.$

307. $\int \frac{x^4 dx}{(x^2+1)^2}.$

308. $\int \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)^2 \cdot \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}} dx.$

309. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{3x^2+4x}}.$

310. $\int \frac{x dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}.$

311. $\int \frac{dx}{(2\sin x-3\cos x-5)^2}.$

312. $\int \frac{\cos^4 x\, dx}{\sin x(\cos^5 x+\sin^5 x)}.$

313. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x})}.$

314. $\int \frac{x^2-1}{(2x^2-1)^2} dx.$

315. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+x+1)^3}$.

316. $\int \frac{x+2}{(x^2-1)\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

317. $\int \frac{dx}{(x-1)^5\sqrt{2-x^2}}$.

318. $\int \frac{dx}{(x^4-1)\sqrt{1-x^2}}$.

319. $\int x^4\sqrt{1+x^2}\,dx$.

320. $\int \frac{dx}{x^4\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

321. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$.

322. $\int \frac{x^5dx}{2-x^3-x^6}$.

323. $\int \frac{x^2-1}{x\sqrt{x^4-1}}\,dx$.

324. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}$.

325. $\int \mathrm{tg}^5\, x\,dx$.

326. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}$.

327. $\int \mathrm{ctg}^3\, x\,dx$.

328. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

329. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x}\,dx$.

330. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.

331. $\int \frac{x\left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}\right)}{\left(x+4\sqrt[3]{x^2}\right)^3}\,dx$.

332. $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}{(x+1)\left(4-\sqrt[3]{x+1}\right)}\,dx$.

333. $\int \frac{dx}{(x^2+3x+2)\sqrt{3-4x+x^2}}$.

334. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x-5\cos x}$.

335. $\int \frac{dx}{\sin x+\mathrm{tg}\, x}$.

336. $\int \frac{dx}{\cos x+\mathrm{tg}\, x}$.

337. $\int \frac{dx}{\sin x+\mathrm{ctg}\, x}$.

338. $\int \frac{dx}{\cos x+\mathrm{ctg}\, x}$.

339. $\int \frac{\cos x\,dx}{\cos^3 x+\sin^3 x}$.

340. $\int \frac{x^2+3x+1}{(x^2+2x-1)^{5/2}}\,dx$.

341. $\int \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$.

342. $\int \frac{\sin^5 x\,dx}{\cos x\,(\cos^3 x+\sin^3 x)}$.

343. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}}$.

344. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{3}\,a+\sqrt{x^2-a^2}\right)}$. $(a\neq 0)$

345. $\int \frac{x-1}{x^3+1}\,dx$.

346. $\int \frac{x^4+1}{x^6-5x^4-5x^2+1}\,dx$.

347. $\int \frac{dx}{x^5(1+x^8)}$.

348. $\int \frac{dx}{x(1+x^4)^2}$.

349. $\int \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^8}\,dx$.

350. $\int \frac{x^4}{(x^4-1)^2}\,dx$.

351. $\int \ln(-x+\sqrt{1+x^2})\,dx.$

352. $\int (e^x-\sin x)^2\,dx.$

353. $\int (\arccos x)^2\,dx.$

354. $\int \frac{x-2}{(1-x)^2}\,e^x\,dx.$

355. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx.$

356. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x-\cos^3 x}.$

357. $\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}\,dx.$

358. $\int \frac{dx}{\sin^6 x-\cos^6 x}.$

359. $\int \frac{dx}{3\operatorname{ctg} x+2\sin x}.$

360. $\int \frac{2\sin x-\cos x+3}{3\sin x+\cos x+1}\,dx.$

361. $\int \frac{2\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx.$

362. $\int \frac{\cos x\sin x-\sin^2 x}{2\sin x+3\cos x}\,dx.$

363. $\int \frac{dx}{(x+1)^4\sqrt{x^2-2x}}.$

364. $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx.$

365. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\,dx.$

366. $\int x^2\sqrt{x^2+4x}\,dx.$

367. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^{7/2}}.$

368. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}.$

369. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx.$

370. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

371. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x+1)^5}}.$

372. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx.$

373. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

374. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx.$

375. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$

376. $\int \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}\,dx.$

377. $\int \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

378. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}.$

379. $\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{3/2}dx.$

380. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}.$

381. $\int \frac{1-2x}{(1-3\sqrt{x})^2}\,dx.$

382. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}.$

383. $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x^2-\sqrt{x}}\,dx.$

384. $\int \frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

385. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x}}$.

386. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+3\sqrt{(1+x)^3}}\,dx$.

387. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

388. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-2)^3(x+1)^5}}$.

389. $\int \frac{(\sin x-\cos x)\,dx}{(\sin x+\cos x)\sqrt{\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x}}$.

390. $\int \frac{dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

391. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+\cos x\cdot\sqrt{\sin x\cos x}}$.

392. $\int \frac{x}{\cos^4 x}\,dx$.

393. $\int \frac{e^x(x+2)}{(x+3)^3}\,dx$.

394. $\int \frac{x\sin x+\cos x}{x^2}\,dx$.

395. $\int x|x-1|\,dx$.

396. $\int |1-4x^2|\,dx$.

397. $\int \min(\sqrt{x},\ 2)\,dx$.

398. $\int \max(|x|,\ 4)\,dx$.

399. $\int \max(4-x^2,\ 2)\,dx$.

400. $\int \min\{5-x^2,\ 1,\ x^2\}\,dx$.

Ответы *

1. $4x-8x^{3/2}+\frac{9}{2}x^2$. **2.** $\frac{4}{5}x^{5/4}+\frac{12}{13}x^{\frac{13}{12}}$. **3.** $-\frac{1}{x}+2\ln|x|+x$. **4.** $\ln|x|-\frac{2}{x}-\frac{3}{2x^2}$. **5.** $-\frac{1}{x}+3\ln|x|+3x+\frac{x^2}{2}$. **6.** $-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. **7.** $-x+\frac{7}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$. **8.** $\frac{1}{8\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$. **9.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. **10.** $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{x}$. **11.** $2\operatorname{arctg}x+\ln|x|$. **12.** $\arcsin x+\ln|x+\sqrt{1+x^2}|$. **13.** $\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\ln|x+\sqrt{x^2+1}|$. **14.** $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}x$. **15.** $\frac{1}{2\sqrt{21}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{7}}{\sqrt{3}x+\sqrt{7}}\right|$. **16.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. **17.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+5}|$. **18.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-7}|$. **19.** $\frac{25^x}{\ln 25}-\frac{2\cdot 10^x}{\ln 10}+\frac{4^x}{\ln 4}$. **20.** $-\frac{1}{2\ln 9}\left(\frac{1}{9}\right)^x+\frac{27}{\ln 4}\left(\frac{1}{4}\right)^x$. **21.** $\frac{30^x}{\ln 30}$.

* В ответах этого раздела ради краткости произвольная аддитивная постоянная C опущена.

22. $\left(\frac{32}{5}\right)^x \frac{1}{\ln\frac{32}{5}}$. 23. $\frac{e^{2x}}{2}+e^x+x$. 24. $\frac{2}{\ln 2}\left[\frac{2^{\frac{3x}{2}}}{3}+2^{-\frac{x}{2}}\right]$.

25. $\frac{1}{2}x-\frac{\sin x}{2}$. 26. $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}$. 27. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$. 28. $-\frac{1}{4}\operatorname{tg} x-$ $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} x$. 29. $-x-\operatorname{ctg} x$. 30. $\operatorname{tg} x-x$. 31. $-\cos x+\sin x$.

32. $2\operatorname{sh} x-3\operatorname{ch} x$. 33. $-\operatorname{th} x+x$. 34. $\ln|x-1|$. 35. $\frac{1}{2}\ln|2x+3|$.

36. $\ln\left|\frac{x+2}{x+3}\right|$. 37. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{(x-1)^4}{x+2}\right|$. 38. $x+\ln|1+x|$. 39. $\frac{1}{2}x-$ $-\frac{1}{4}\ln|1+2x|$. 40. $\frac{(x-1)^{11}}{11}$. 41. $\frac{1}{36}(2x+5)^{18}$. 42. $\frac{1}{87}(1-3x)^{-29}$.

43. $-\sqrt{1-2x}$. 44. $\frac{5}{3}(1+3x^{\frac{1}{5}})$. 45. $\frac{15}{64}(1+4x)^{\frac{16}{15}}$.

46. $\frac{1}{7}(x-2)^7+\frac{1}{3}(x-2)^6$. 47. $\frac{1}{10}(1-2x)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{6}(1-2x)^{3/2}$.

48. $\frac{2}{5}(x-2)^{5/2}+\frac{8}{3}(x-2)^{3/2}$. 49. $\frac{4}{27}(1+3x)^{3/2}-\frac{46}{9}(1+3x)^{1/2}$.

50. $\frac{(x+1)^2}{2}-2x+2\ln|1+x|$. 51. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}\ln|2x-1|$.

52. $-\frac{4}{11}(1-x)^{11}+2(1-x)^{10}-\frac{25}{9}(1-x)^9$. 53. $\sqrt{x^2-2}-$ $-4\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|$. 54. $\frac{x^2}{2}+2\ln|x^2-4|$. 55. $\frac{1}{2}\arcsin x^2$.

56. $3\sqrt{x^2+4}-\ln\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|$. 57. $\sqrt{x^2-10}+2\ln\left|x+\sqrt{x^2-10}\right|$.

58. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x\sqrt{2}+2\sqrt{1-2x^2}$. 59. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}$. 60. $-\frac{1}{2}(1-x^2)^6$.

61. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2$. 62. $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3-\sqrt{5}}{x^3+\sqrt{5}}\right|$. 63. $\frac{2}{5}\sqrt{3+x^5}$. 64. $-\frac{1}{4\ln^4 x}$.

65. $2\sqrt{\ln x}$. 66. $\ln|\ln x+3|$. 67. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\ln x}{\sqrt{2}}$. 68. $\frac{3}{5}\ln^{5/3} x$.

69. $-e^x-2\ln|e^x-1|$. 70. $\ln(1+e^x)$. 71. $-\frac{1}{5}\cos 5x$. 72. $7\sin\frac{1}{7}x$.

73. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha-\beta}\cos(\alpha-\beta)x-\frac{1}{\alpha+\beta}\cos(\alpha+\beta)x\right]$. 74. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\sin(\beta-\alpha)x+\right.$ $\left.+\frac{1}{\alpha+\beta}\sin(\alpha+\beta)x\right]$. 75. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\sin(\beta-\alpha)x-\frac{1}{\beta+\alpha}\sin(\alpha+\beta)x\right]$.

76. $\frac{1}{2\alpha}\sin\alpha x-\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2-\alpha}\sin(2-\alpha)x+\frac{1}{\alpha+2}\sin(\alpha+2)x\right]$.

77. $-\frac{3}{8(\beta-1)}\cos(\beta-1)x-\frac{3}{8(\beta+1)}\cos(\beta+1)x-\frac{1}{8(\beta+3)}\cos(3+\beta)x-$ $-\frac{1}{8(\beta-3)}\cos(\beta-3)x$. 78. $-\frac{1}{2}\cos x^2$. 79. $2\sin\sqrt{x}$. 80. $\ln|1+\sin x|$.

81. $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x$. 82. $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x$. 83. $\frac{5}{2}x-\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x$.

84. $\sin e^x$. 85. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\right|$. 86. $-\frac{1}{7}\operatorname{ctg}7x$. 87. $\frac{1}{8}\operatorname{tg}8x$.

88. $\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3x}{2}\right|$. 89. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 90. $-\ln|\cos x|$.

91. $\ln|\sin x|$. 92. $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 93. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. 94. $-\frac{1}{2(x+\sin x)^2}$.

95. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-4\sin^2 x}$. 96. $-\ln\left|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right|$. 97. $\ln|1+\operatorname{tg}x|$.

98. $-\operatorname{ctg}x+\ln|1+\operatorname{ctg}x|$. 99. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sin^2 x}{\sqrt{3}}$. 100. $-\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}^2 3x$.

101. $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^{3/2}2x$. 102. $\frac{1}{2}(\arcsin^2 x+\arccos^2 x)$.

103. $-\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}+\frac{1}{8}\arcsin^4 2x$. 104. $-\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{5}\arccos^{5/2}x$.

105. $\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x-\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x$. 106. $-2\operatorname{cth}2x$. 107. $-x\cos x+\sin x$.

108. $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x$. 109. $\frac{3}{4}\sin x-\frac{3}{4}x\cos x-\frac{1}{36}\sin 3x+$ $+\frac{1}{12}x\cos 3x$. 110. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|$. 111. $-\frac{x^2}{2}-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$.

112. $\frac{x}{\cos x}-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. 113. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x$.

114. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$. 115. $\frac{x^3}{3}\ln(1+x)-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\ln(1+x)$.

116. $\frac{x^2}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|1+x|$. 117. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}$.

118. $\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$. 119. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|$.

120. $x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. 121. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$. 122. $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}x-$ $-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$. 123. $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$.

124. $2x\operatorname{arctg}x-\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x$. 125. $\frac{\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}$.

126. $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}$. 127. $\operatorname{tg}x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg}x-x$.

128. $\frac{x^2}{2}\arccos\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\operatorname{sign}x$. 129. $\frac{3}{8}x-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$.

130. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}-\frac{\sin^3 2x}{48}$. **131.** $\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+$ $+\frac{3}{64}\sin 4x$. **132.** $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}$. **133.** $-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+$ $+\frac{\cos^7 x}{7}$. **134.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **135.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$. **136.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$. **137.** $-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **138.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}-3\ln|\sin x|+\frac{3}{2}\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin^4 x$. **139.** $\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+$ $+\frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **140.** $-\operatorname{ctg} x-\frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x-$ $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$. **141.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x$. **142.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **143.** $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{2}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **144.** $-\frac{\operatorname{ctg}^4 x}{4}+$ $+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln|\sin x|$. **145.** $-\operatorname{ctg} x+2\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}$. **146.** $\frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4}-$ $-\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$. **147.** $-\frac{x}{4}(a^2-x^2)^{3/2}+$ $+\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}$. **148.** $\frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4}+\frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2-a^2}-$ $-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$. **149.** $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}$. **150.** $x+$ $+\frac{a^2x}{2(a^2+x^2)}-\frac{3a}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. **151.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$. **152.** $\frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2}$. **153.** $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|$. **154.** $\frac{12}{7}z^7-3z^4$, $z=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$. **155.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+\frac{2}{7}\operatorname{arctg} z$, $z=\sqrt[4]{1+x^7}$. **156.** $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}$. **157.** $6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x})$. **158.** $-\frac{1}{8}\,\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}}$. **159.** $\frac{2}{\ln 5}\times$ $\times\left(5^{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}-\frac{5^{\sqrt{x}}}{\ln 5}\right)$. **160.** $2(3x-6)\cos\sqrt{x}+2(x\sqrt{x}-6\sqrt{x})\sin\sqrt{x}$. **161.** $\ln(x^2+x+3)-\frac{12}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}$. **162.** $-\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-3|-$ $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|$. **163.** $-3\sqrt{x^2+x+1}+\frac{17}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$. **164.** $-4\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. **165.** $-\sqrt{1-\ln x-\ln^2 x}+$ $+\frac{3}{2}\arcsin\frac{2\ln x+1}{\sqrt{5}}$. **166.** $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}+\frac{5}{2}\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{e^{2x}+e^x+1}\right)$.

167. $\arcsin\frac{\sin x+2}{\sqrt{6}}$. **168.** $\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+2e^{x}+4)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{e^{x}+1}{\sqrt{3}}$.

169. $-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|e^{-x}-\frac{5}{12}+\sqrt{e^{-2x}-\frac{5}{6}e^{-x}+\frac{1}{6}}\right|$. **170.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\times$
$\times\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{1+x^2}}{1+x}\right|$. **171.** $-\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\right|$.

172. $\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{3/2}+\frac{3}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{9}{16}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\right.$
$\left.+\sqrt{x^2+x+1}\right|$. **173.** $(1+x+x^2)^{3/2}-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)\sqrt{1+x-x^2}-$
$-\frac{5}{16}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. **174.** $\frac{1}{4}\ln|-1-x^2+x^4|+\frac{3}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^2-1-\sqrt{5}}{2x^2-1+\sqrt{5}}\right|$.

175. $-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^2+x^4}+\frac{3}{4}\ln\left|x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{1+x^2+x^4}\right|$.

176. $\frac{1}{4}\ln|x^4-x^2+5|+\frac{1}{2\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{19}}$. **177.** $-\frac{1}{2}\times$
$\times\ln\left|\frac{2+x^2+2\sqrt{1+x^2+x^4}}{2x^2}\right|$. **178.** $\sqrt{x^2+3x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}+\right.$
$\left.+\sqrt{x^2+3x+1}\right|-\ln\left|\frac{2+3x+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x}\right|$. **179.** $\frac{1}{6}(1+x^4)^{3/2}+$
$+\frac{1}{4}x^2\sqrt{1+x^4}+\frac{1}{4}\ln|x^2+\sqrt{1+x^4}|$. **180.** $\frac{1}{2}\sin x\sqrt{\cos 2x}+$
$+\frac{\sqrt{2}}{4}\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$. **181.** $-\frac{1}{2}\cos x\sqrt{\cos 2x}-\frac{\sqrt{2}}{4}\ln|\sqrt{2}\cos x+$
$+\sqrt{\cos 2x}|$. **182.** $\arcsin\frac{2\sin x-1}{\sqrt{2}(1-\sin x)}$. **183.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\right|$.

184. $\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **185.** $-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}$.

186. $\operatorname{arctg}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. **187.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$.

188. $\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **189.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right|+$
$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}$. **190.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{2}}\right)$.

191. $-\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$. **192.** $\frac{1}{64}\left(-\frac{1}{2z^2}+\frac{5}{z}+\right.$
$\left.+10\ln|z|-10z+\frac{5}{2}z^2-\frac{z^3}{3}\right)$, $z=\frac{x-2}{x}$. **193.** $-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}-$
$-2\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. **194.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x^3-\frac{1}{6}\ln(1+x^6)$. **195.** $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^3}+$
$+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3}{1+x^3}\right|$. **196.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|$. **197.** $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{7}}$.

198. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}\right|$. 199. $\operatorname{arctg} x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$. 200. $-\frac{1}{3x^3}+$ $+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^3}$. 201. $\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x^4}$. 202. $-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6+1}+$ $+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(x^6+1)^2}$. 203. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}$. 204. $-\frac{1}{2\sqrt{6}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}}\right|$. 205. $\frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{31}}$. 206. $-x+$ $+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. 207. $\frac{1}{2}\ln|2\operatorname{ctg} x-1|$. 208. $\frac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$. 209. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. 210. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left|1+\right.$ $\left.+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. 211. $\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x-2}\right|$. 212. $-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}+$ $+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\pi/4\right)$. 213. $-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.
214. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}\right|$. 215. $\operatorname{arctg}(2\sin^2 x-1)$. 216. $\frac{1}{4}\ln|\sin x+$ $+\cos x|-\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$. 217. $\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}x$.
218. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|$. 219. $\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|2\sin x+3\cos x|$.
220. $\ln(1+\sin^2 x)$. 221. $2x-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. 222. $\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 2x}{2-\sin^2 2x}$.
223. $\frac{1}{10}\cos x+\frac{3}{10}\sin x-\frac{1}{10\sqrt{10}}\ln\left|\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1-\sqrt{10}}{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1+\sqrt{10}}\right|$. 224. $x-$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right)$. 225. $-\operatorname{arctg}(\cos^2 x)$. 226. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}}\right)$.
227. $\frac{1}{32}\ln(4+\operatorname{tg}^2 x)-\frac{1}{8}\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{16}\ln|\operatorname{tg} x|$. 228. $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\ln|2\sin x+$ $+\cos x-2|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3}\right|$. 229. $\frac{7}{13}\frac{1}{2\cos x-3\sin x}+$

$+\dfrac{4}{13\sqrt{13}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{13}}\right|$. **230.** $\dfrac{1}{5}\cos x+\dfrac{8}{5}\sin x+$ $+\dfrac{21}{5\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1+\sqrt{5}}\right|$. **231.** $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{x^2+x+1}+$ $+\dfrac{15}{8}\ln\left|x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|$. **232.** $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$. **233.** $-\dfrac{x^3}{4}\sqrt{1-x^2}-\dfrac{3}{8}x\sqrt{1-x^2}+\dfrac{3}{8}\arcsin x$. **234.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **235.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+\sqrt{\dfrac{3}{2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\times\right.$ $\left.\times\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right)$. **236.** $-\dfrac{4x+2}{\sqrt{x^2+x}}$. **237.** $\left(\dfrac{1}{4}x^3-\dfrac{9}{4}x^2+\dfrac{9}{2}x+6\right)\times$ $\times\sqrt{x^2+2x+3}-\dfrac{53}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|$. **238.** $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times$ $\times\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{x-1}+\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{1}{x-1}-1+\right.$ $\left.+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}}\right|$. **239.** $x-2\ln|x+2|+\sqrt{x^2-x-2}-$ $-\dfrac{5}{2}\ln\left|x-\dfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\right|-2\ln\left|\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{5}{8}+\right.$ $\left.+\sqrt{\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{5}{4(x+2)}+\dfrac{1}{4}}\right|$. **240.** $\dfrac{1}{3}(x^2+4x+1)^{3/2}-$ $-\dfrac{(x+2)\sqrt{x^2+4x+1}}{2}+\dfrac{3}{2}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|$. **241.** $\dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+\right.$ $\left.+\dfrac{3}{2}+\sqrt{x^4+3x^2+1}\right|+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{3}{x^2}+1}\right|$. **242.** $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{\sqrt{3-x^2}-2}{\sqrt{3-x^2}+2}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{\sqrt{3-x^2}}$. **243.** $-\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)^{-3/2}-$ $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}-\dfrac{(x+1)^3}{12(\sqrt{x^2+2x-1})^3}$. **244.** $6\sqrt[6]{x}-3\sqrt[3]{x}+$ $+2\sqrt{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})$. **245.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t+t^2}{(1-t)^2}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{\dfrac{x}{x+1}}$. **246.** $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{t^2+t+1}{(t-1)^2}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2t+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{2t}{t^3-1}$, $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. **247.** $\dfrac{3}{16}(3x-5)\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{(x-1)^4}}$. **248.** $-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+t+t^2}{(1-t)^2}+$

$+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}},\ t=\sqrt[3]{x}$. **249.** $(1+\sqrt[4]{2x-1})^2+\ln(\sqrt{2x-1}-1)^2$.
250. $-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2}}$. **251.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x^2-x-6}+\frac{35}{8}\ln\left|x-\right.$
$\left.-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-6}\right|+3\sqrt{x^2-x-6}$. **252.** $12(\sqrt[12]{x}+\ln|\sqrt[12]{x}-1|-$
$-\ln\sqrt[12]{x})$. **253.** $\ln|\ln x-1|$. **254.** $2\sqrt{\ln x+x}$. **255.** $\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.
256. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$. **257.** $\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}\ln(e^{2x}+6)$.
258. $-x-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|+\ln|x|$. **259.** $-\frac{1}{1+x}-\frac{4}{2+x}-$
$-4\ln\left|\frac{1+x}{2+x}\right|$. **260.** $\frac{3(x-1)}{16(x+1)}-\frac{x+1}{16(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2}+$
$+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$. **261.** $\frac{1}{5}u^{-5}-\frac{2}{3}u^{-3}+u^{-1},\ u=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
262. $-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}\right|$.
263. $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **264.** $\frac{1}{2}\cos^2 x+\ln|\sin x|$. **265.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.
266. $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$. **267.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$.
268. $\frac{1}{3}\left(-\frac{x\operatorname{ctg}x}{\sin^2 x}-\frac{1}{2\sin^2 x}-2x\operatorname{ctg}x+2\ln|\sin x|\right)$. **269.** $\frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{1+x^2}+$
$+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **270.** $\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{1+x^2}+\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{1+x^2}}+2\operatorname{arctg}x\right)$.
271. $\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\frac{x}{x^2+2}+\frac{9}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$.
272. $\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{2}}$. **273.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}+$
$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$. **274.** $-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.
275. $\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|$. **276.** $-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|$. **277.** $-\cos x-$
$-\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$. **278.** $\frac{x}{2}+\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arcctg}x$. **279.** $\frac{x^3}{3}\arcsin x+$
$+\frac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}$. **280.** $\frac{1}{4}x^4\operatorname{arctg}^2 x-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}^2 x-\frac{1}{6}(x^3-3x)\operatorname{arctg}x+$
$+\frac{x^2}{12}-\frac{1}{3}\ln(1+x^2)$. **281.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{e^{2x}}{2}$. **282.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}$.
283. $\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **284.** $\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}$. **285.** $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}-$

$-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3}{8}\frac{\cos x}{\sin^2 x}+\frac{15}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **286.** $\frac{-6}{\sqrt[6]{x}+1}+12\left(\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}+1}+\right.$ $\left.+\operatorname{arctg}\sqrt[12]{x}\right)$. **287.** $\frac{1}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{3}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **288.** $-\frac{5}{4}\sqrt{3-4x^2+8x}+$ $+2\arcsin\frac{2x-2}{\sqrt{7}}$. **289.** $12\left[\frac{t^2}{2}-3t+\frac{1}{9}\ln|t-1|+\frac{80}{9}\ln|t+2|+\right.$ $\left.+\frac{16}{3(t+2)}\right]$, $t=\sqrt[12]{x}$. **290.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)$.

291. $\sqrt{3x^2-6x+13}+\frac{5}{\sqrt{3}}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+\frac{13}{3}}\right|$.

292. $-\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{(2t^2+1)^2}+\frac{45\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}(t\sqrt{2})+\frac{30t}{1+2t^2}+\frac{15}{2}\frac{t(1-2t^2)}{(1+2t^2)^2}$, $t=\sqrt[15]{x}$. **293.** $\frac{-3}{t^2+4}-\frac{9}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}-\frac{9t}{4(t^2+4)}$, $t=\sqrt[6]{x}$.

294. $-\ln\left|\frac{2-x+\sqrt{4x^2-10x+7}}{x-1}\right|$. **295.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|$.

296. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. **297.** $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{5}{2(x-1)}-$ $-\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{3}{4}\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg}x$. **298.** $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-$ $-\operatorname{arctg}x$. **299.** $-\frac{1}{8}(2x+1)^{-1}+\frac{3}{16}(2x+1)^{-2}-\frac{1}{8}(2x+1)^{-3}+$ $+\frac{5}{32}(2x-1)^{-4}$. **300.** $-\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{(x-2)^3}$.

301. $-\frac{1}{16}(x-1)^{-2}+\frac{1}{16}(x+1)^{-2}+\frac{3}{16}(x-1)^{-1}+\frac{3}{16}(x+1)^{-1}+$ $+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **302.** $\ln\left|\frac{1+x^3}{x}\right|$. **303.** $-\frac{1}{2}\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+1)}-\ln\frac{x^2}{1+x^2}$.

304. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\frac{1}{2}\ln(1+x^4)$. **305.** $\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{12}\ln\frac{(1+x^2)^2}{x^4-x^2+1}$.

306. $\frac{1}{8x^2}+\frac{1}{32}\ln\left|\frac{x^2-4}{x^2}\right|$. **307.** $x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x$.

308. $\frac{2t^3}{1-t^2}+6t+3\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|$, $t=\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$. **309.** $-\arcsin\frac{x+2}{2(x+1)}$.

310. $-2\arcsin\frac{1}{x-2}-\sqrt{\frac{x-3}{x-1}}$. **311.** $\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2-2z+4}-$ $-\frac{1}{12}\cdot\frac{z-1}{z^2-2z+4}$, $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **312.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}^5 x}{1+\operatorname{tg}^5 x}\right|$. **313.** $2\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+$

$+\frac{12}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t-1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[12]{x}$. **314.** $\frac{3}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\,x-1}{\sqrt{2}\,x+1}\right|+\frac{1}{4}\,\frac{x}{2x^2-1}$.

315. $-\frac{2}{9}\sqrt{3}\,t-\frac{1}{18}\sqrt{3}\sin 4t+\frac{4}{9}\cos^4 t-\frac{2\sqrt{3}}{9}\sin 2t$, $t=\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

316. $-\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}}\right|+$ $+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}}\right|$. **317.** $-\left(\frac{1}{4}u^3+\right.$ $\left.+\frac{7}{12}u^2+\frac{11}{6}u+\frac{20}{3}\right)\sqrt{u^2-2u-1}-\frac{17}{2}\ln\left|u-1+\sqrt{u^2-2u-1}\right|$, $u=\frac{1}{x-1}$. **318.** $-\frac{1}{2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$. **319.** $\left(\frac{1}{6}x^5+\right.$ $\left.+\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{16}x\right)\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{16}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|$. **320.** $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-$ $-\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$. **321.** $z\operatorname{tg}^2 z-\operatorname{tg} z+z$, $z=\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$. **322.** $-\frac{1}{9}\times$ $\times\ln\left|(x^3-1)(x^2+2)^2\right|$. **323.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4-1}\right|+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x^2}$.

324. $\frac{1}{2\cos^2 x}-\ln|\operatorname{ctg} x|$. **325.** $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|$. **326.** $\operatorname{tg} x-$ $-2\operatorname{ctg} x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. **327.** $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|$. **328.** $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5}$.

329. $\frac{\cos^3 x}{3}+\cos x+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **330.** $-8\operatorname{ctg} 2x-\frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x$.

331. $-\frac{3}{2}\,\frac{1}{(t^2+4)^2}-\frac{3}{4}\,\frac{t}{(t^2+4)^2}-\frac{9}{32}\,\frac{t}{t^2+4}-\frac{9}{64}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}$, $t=$ $=\sqrt[6]{x}$. **332.** $-6t-3\ln|4-t^2|-6\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|$, $t=\sqrt[6]{x+1}$.

333. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{8}}\right.+$ $\left.+\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{1}{x+2}-\frac{4}{15}+\sqrt{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{8}{15(x+2)}+\frac{1}{15}}\right|\right.$.

334. $-\frac{5}{26}x+\frac{1}{26}\ln|\sin x-5\cos x|$. **335.** $-\frac{1}{2(1+\cos x)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.

336. $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\sin x-1-\sqrt{5}}{2\sin x-1+\sqrt{5}}\right|$. **337.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\cos x-1-\sqrt{5}}{2\cos x-1+\sqrt{5}}\right|$.

338. $-\frac{1}{2(1+\sin x)}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **339.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg} x+1)^2}{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} x-1}{\sqrt{3}}$. **340.** $-\frac{1}{3}(x^2+2x-1)^{-3/2}-\frac{1}{4}\,\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}-$

$-\frac{1}{12}\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\right)^3$. **341.** $\frac{1}{9}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{(x^2+3)^{3/2}}\right)$. **342.** $\frac{1}{3}\ln|1+z|+\frac{1}{3(1+z)}$, $z=\operatorname{tg}^3 x$. **343.** $\frac{2}{3}(1-\sqrt{1-x^2})^{3/2}-$ $-2\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$. **344.** $\frac{1}{4a}\arccos\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{3}}{4a}\ln\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{x}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\right)$. **345.** $-\frac{2}{3}\ln|1+x|+\frac{1}{3}\ln|x^2-x+1|$. **346.** $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}+$ $+\frac{3}{16}\ln\left|\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}\right|$. **347.** $-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x^4$. **348.** $\ln|x|-$ $-\frac{1}{4}\ln|1+x^4|+\frac{1}{4(1+x^4)}$. **349.** $\frac{x(1+3x^2)}{4(1+x^2)^2}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x$. **350.** $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{x^4-1}$. **351.** $x\ln\left|-x+\right.$ $\left.+\sqrt{1+x^2}\right|-\sqrt{1+x^2}$. **352.** $\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x-e^x\sin x+$ $+e^x\cos x$. **353.** $x\arccos^2 x-2\sqrt{1-x^2}\arccos x-2x$. **354.** $\frac{e^x}{x-1}$. **355.** $-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x$. **356.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(\operatorname{tg}x-1)^2}{\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x+1}-$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x+1}{\sqrt{3}}$. **357.** $-\frac{1}{3(\operatorname{tg}^3x+1)}$. **358.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sin 2x-1}{\sin 2x+1}\right|-$ $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\sin 2x-2}{\sin 2x+2}\right|$. **359.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\cos x-2}{2\cos x+1}\right|$. **360.** $\frac{x}{2}-$ $-\frac{1}{2}\ln|3\sin x+\cos x+1|-\frac{5}{6}\ln\left|3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|$. **361.** $\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{\pi}{8}\right)\right|-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. **362.** $\frac{5}{13}\sin x-\frac{1}{13}\cos x+\frac{15}{13\sqrt{13}}\times$ $\times\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{3}}\right|$. **363.** $-\left(\frac{1}{9}u^2+\frac{5}{27}u+\frac{8}{27}\right)\sqrt{3u^2-4u+1}-$ $-\frac{11}{27\sqrt{3}}\ln\left|u-\frac{2}{3}+\sqrt{u^2-\frac{4}{3}u+\frac{1}{3}}\right|$, $u=\frac{1}{x+1}$. **364.** $\left(\frac{1}{3}x^2+\right.$ $\left.+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-2\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}\right|$. **365.** $\sqrt{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\right.$ $\left.+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}\right|$. **366.** $\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}x+5\right)\sqrt{x^2+4x}-$ $-10\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x}\right|$. **367.** $\frac{64}{27}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2}{3}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^3+\right.$

$+\frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\right)^5\Big)$. **368.** $2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$. **369.** $-(\sqrt{x}-1)^2-$ $-6\sqrt{x}-4\ln|1-\sqrt{x}|$. **370.** $6\sqrt[6]{x}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-$ $-2\ln(1+\sqrt[6]{x})+\ln(1+\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x})-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}$

371. $4\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$. **372.** $\frac{2t^5}{(t^3-1)^2}+\frac{10t^2}{3(t^3-1)}+\frac{10}{9}\ln|t^2+t-1|-$ $-\frac{20}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}-\frac{20}{9}\ln|t-1|$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **373.** $\frac{2}{7}(x+1)^{7/2}-$ $-\frac{6}{5}(x+1)^{5/2}+2(x+1)^{3/2}-2(x+1)^{1/2}$. **374.** $-\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+$ $+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln|1+\sqrt[3]{x}|-$ $-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$. **375.** $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **376.** $-\frac{t}{t^4-1}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-$ $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t$, $t=\sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}$. **377.** $3\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt[3]{x}-x+6\ln|1+\sqrt[3]{x}|$.

378. $-\frac{2}{5}(x+2)^{5/2}+\frac{4}{3}(x+2)^{3/2}+\frac{2}{5}(x+3)^{5/2}-2(x+3)^{3/2}$.

379. $-4\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-3\arcsin x-\sqrt{1-x^2}$. **380.** $6\Big(\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+$ $+\ln|1-t|\Big)$, $t=\sqrt[6]{x}$. **381.** $-\frac{2}{27}\left(3t^2+4t-\ln|3t-1|+\frac{7}{3(3t-1)}\right)$, $t=\sqrt{x}$. **382.** $\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

383. $-\frac{4}{3}\ln\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2}-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}$, $t=\sqrt{x}$. **384.** $\frac{12}{7}(1-$ $-t)^{7/3}-3(1-t)^{4/3}$, $t=\sqrt[4]{x}$. **385.** $\ln|x|-\frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{(x+1)^2}+$ $+\sqrt[3]{x+1}+1)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{3}}$. **386.** $\frac{2}{3}\sqrt{x+1}-$ $-\frac{14}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{3x+3}$. **387.** $\ln\left(\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\times$ $\times\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{3}}$. **388.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+1}}$. **389.** $\arcsin\frac{1}{1+\sin 2x}$.

390. $\frac{\sqrt{2}}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}(\sin x-\cos x)$. **391.** $2\sqrt{\operatorname{tg}x}-$ $-2\ln|1+\sqrt{\operatorname{tg}x}|$. **392.** $x\left(\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\operatorname{tg}x\right)+\frac{2}{3}\ln|\cos x|-\frac{1}{6\cos^2 x}$.

393. $\dfrac{e^x}{x+3}$. **394.** $-\dfrac{\cos x}{x}$.

395. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}, & x \geqslant 1; \\ -\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3}, & x<1. \end{cases}$

396. $\begin{cases} -x+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{2}{3}, & x>\dfrac{1}{2}; \\ x-\dfrac{4}{3}x^3, & |x| \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ -x+\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{2}{3}, & x<\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

397. $\begin{cases} \dfrac{2}{3}x^{3/2}, & 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 2x-\dfrac{8}{3}, & x>4. \end{cases}$ **398.** $\begin{cases} 4x, & |x| \leqslant 4; \\ \dfrac{x^2}{2}+8, & x>4; \\ -\dfrac{x^2}{2}-8, & x<-4. \end{cases}$

399. $\begin{cases} 4x-\dfrac{x^3}{3}, & |x| \leqslant \sqrt{2}; \\ 2x+\dfrac{4\sqrt{2}}{3}, & x>\sqrt{2}; \\ 2x-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}; & x<-\sqrt{2}. \end{cases}$

400. $\begin{cases} 5x-\dfrac{x^3}{3}+6, & x<-2; \\ x+\dfrac{2}{3}, & -2 \leqslant x<-1: \\ \dfrac{x^3}{3}, & |x| \leqslant 1; \\ x-\dfrac{2}{3}, & 1<x \leqslant 2; \\ 5x-\dfrac{x^3}{3}-6, & x>2. \end{cases}$

Глава II
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА. ПОНЯТИЕ НЕСОБСТВЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Конечную совокупность точек $\{x_k\}_{k=0}^{n}$

$$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$$

назовем *разбиением отрезка* и обозначим через T. Положим

$$M_k=\sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x),\quad m_k=\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x),\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Тогда

$$S(f, T)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1})\text{ — \textit{верхняя сумма Дарбу}},$$

$$s(f, T)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})\text{ — \textit{нижняя сумма Дарбу}},$$

$$\underline{I}(f, [a, b])=\inf_T S(f, T);\quad \bar{I}(f, [a, b])=\sup_T s(f, T).$$

Для любой ограниченной функции f на отрезке $[a, b]$ имеем

$$\bar{I}(f, [a, b])\leqslant\underline{I}(f, [a, b]).$$

Определение. Если $\bar{I}=\underline{I}=I$, то функция f называется интегрируемой в смысле Римана на $[a, b]$ и число I называется *определенным интегралом* от f по $[a, b]$. Обозначение: $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Это определение эквивалентно такому: пусть T — разбиение $[a, b]$ и $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ — совокупность точек таких, что $x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, тогда f интегрируема на $[a, b]$, если

$$\lim_{\max(x_k-x_{k-1})\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{1}$$

существует и не зависит от выбора точек $\{\xi_k\}_{k=1}^{n}$ и разбиения T.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$.

Пример 1. Вычислим $\int\limits_{-1}^{1}\sqrt[3]{x^2}\sin^5 x\,dx$.

Решение. Так как функция $\sqrt[3]{x^2}\sin^5 x$ непрерывна на $[-1, 1]$, то она интегрируема, т. е. можно найти величину предела (1), выбирая некоторую удобную последовательность разбиений T_m и точек ξ_i, соответствующих данному разбиению T_m. Пусть T_m — совокупность точек $x_i = \frac{i-m}{m}$, $0 \leqslant i \leqslant 2m$, $m \in N$. Выберем точки ξ_i, являющиеся серединами отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant 2m$, тогда

$$S_m = \sum_{i=1}^{2m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_k = -\xi_{m-k+1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

и $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{m}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Следовательно, в силу нечетности функции f имеем, что

$$S_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (f(\xi_k) + f(\xi_{m-k+1})) = 0.$$

Условие $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$ эквивалентно условию $m \to \infty$. Итак,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^2} \sin^5 x dx = \lim_{m \to \infty} S_m = 0.$$

Если функция f интегрируема на $[a, b]$, то по определению

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Для вычисления определенного интеграла основной является *теорема Ньютона — Лейбница:* если f непрерывна на $[a, b]$ и F первообразная для f на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Пример 2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

Если функция f и g отличаются друг от друга только в конечном числе точек, то они одновременно интегрируемы или нет в смысле Римана на $[a, b]$, и если интегрируемы, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Поэтому формула Ньютона — Лейбница применима и тогда, когда функция f совпадает с непрерывной функцией во всех точках отрезка $[a, b]$, кроме, быть может, конечного числа точек.

Конечная аддитивность определенного интеграла: если f интегрируема в смысле Римана на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, то f интегрируема на $[a, c]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Критерий интегрируемости Лебега: функция f интегрируема в смысле Римана на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда f ограничена на $[a, b]$, и множество E точек разрыва f на $[a, b]$ есть множество меры нуль, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такая счетная (конечная) система интервалов $\{(a_i, b_i)\}$ таких, что

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i),$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Из критерия Лебега, в частности, следует, что ограниченная функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода на $[a, b]$, интегрируема на $[a, b]$. Для вычисления определенного интеграла такой функции отрезок $[a, b]$ разбивается на конечное число отрезков $[a_k, b_k]$ так, что f для $x\in(a_k, b_k)$ совпадает с функцией, непрерывной на отрезке $[a_k, b_k]$.

Пример 3.

$$\int_0^{4\pi} x\,\mathrm{sign}(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi} x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} x dx - \int_{3\pi}^{4\pi} x dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{x^2}{2}\Big|_{2\pi}^{3\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{3\pi}^{4\pi} = -2\pi^2.$$

Из формулы Ньютона — Лейбница выводятся следующие формулы.

1) Если функции u и v непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$, то

$$\int_a^b u dv = u(x)\,v(x)\,\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

(интегрирование по частям определенного интеграла).

Пример 4.

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx = -x\cos x\,\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx = -2\pi + \sin x\,\Big|_0^{2\pi} = -2\pi.$$

2) Пусть x — непрерывно дифференцируемая функция на $[\alpha, \beta]$ и f — непрерывна на отрезке $[c, d]=x([a, b])$ ($[c, d]$ — образ отрезка $[a, b]$). Тогда

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

(замена переменного в определенном интеграле). Заметим, что в этом утверждении не предполагается монотонности функции x, более того, не предполагается, что $[x(\alpha), x(\beta)]=x([\alpha, \beta])$.

Пример 5.

$$\int_{-1}^{2} x(3x^4-4x^2+1)\,dx=\left(\frac{3x^6}{6}-x^4+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{2}=18.$$

С другой стороны,

$$\int_{-1}^{2} x(3x^4-4x^2+1)\,dx=\int_{-1}^{2}(x^3-x)(3x^2-1)\,dx=\int_{0}^{6} z\,dz=18.$$

Обратите внимание, что замена произведена в интеграле $\int_0^6 z\,dz$ и функция $z=x^3-x$ непрерывно дифференцируема, но не монотонна на $[-1, 2]$.

При замене переменного в определенном интеграле в отличие от вычисления первообразной не нужно возвращаться к исходному аргументу, так как преобразованный интеграл берется по тому отрезку, по которому изменяется новый аргумент.

При вычислении неопределенного интеграла иногда делались преобразования подынтегральной функции, тождественные не для всех возможных значений аргумента. В этих случаях для простоты подразумевалось, что первообразная находится на тех промежутках, на которых необходимое тождество имеет место.

При вычислении определенного интеграла первообразная ищется на заданном отрезке, поэтому здесь необходимо следить за тем, чтобы не произвести преобразование, не являющееся тождественным.

Пример 6. Вычислим $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}}$.

Решение. Делаем замену $\dfrac{1}{x-2}=z$, тогда

$$\frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}}=-\frac{dz}{\sqrt{\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{6}{z}-3}}=\frac{-|z|\,dz}{\sqrt{1-6z-3z^2}}.$$

Так как $x<2$, то $z<0$, следовательно, $|z|=-z$ и

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)^2\sqrt{x^2-10x+13}} = \int_{-1/3}^{-1} \frac{zdz}{\sqrt{1-6z-3z^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{-1/3} \frac{(z+1)\,dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_{-1}^{-1/3} \frac{dz}{\sqrt{\frac{4}{3}-(z+1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{3}-2z-z^2}\,\Bigg|_{-1}^{-1/3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{(z+1)\sqrt{3}}{2}\Bigg|_{-1}^{-1/3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

Отметим некоторые *частные случаи замены переменного в определенном интеграле*, позволяющие упростить вычисление.

а. Если f — четная и непрерывная на $[-a, a]$ функция, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

б. Если f — нечетная функция, непрерывная на $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

В частности, для любого натурального нечетного k

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^k x dx = 0.$$

в. Если f — периодическая функция с периодом T, непрерывная на $[0, T]$, то f интегрируема на любом отрезке $[a, b]$ и

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx.$$

В частности, если k — нечетное натуральное число, p — натуральное число и a — любое действительное число, то

$$\int_{a}^{a+2p\pi} \sin^k x dx = \int_{a}^{a+2p\pi} \cos^k x dx = 0.$$

Большая часть употребляемых при вычислении неопределенных интегралов подстановок являются непрерывно дифференцируемыми функциями. Однако, например, универсальная подстановка $\operatorname{tg}(x/2)=t$ уже представляет функцию разрывную, если отрезок интегрирования включает точки вида $\pi(2k+1)$, $k\in Z$.

Пример 7. Рассмотрим $\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}$.

Найдем неопределенный интеграл, полагая $t=\operatorname{tg}(x/2)$.

$$\int\frac{dx}{3+\cos x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{2+t^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}+C.$$

Если формально сделать универсальную подстановку $\operatorname{tg}(x/2)=t$ в определенном интеграле, то, так как $\operatorname{tg}0=\operatorname{tg}\pi=0$, получим

$$\int\limits_0^0\frac{dt}{2+t^2}=0,$$

с другой стороны, $1/(3+\cos x)\geqslant 1/2$,
и, следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{3+\cos x}\geqslant 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi.$$

Такая замена сделана неправильно, так как нарушено условие непрерывности функции $t=\operatorname{tg}(x/2)$ на $[0, 2\pi]$. Функция $F(x)=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}$ не является первообразной для $f=\frac{1}{3+\cos x}$ на $[0, 2\pi]$, так как F разрывна в точке $x=\pi$. Чтобы получить первообразную для f на $[0, 2\pi]$, заметим, что функция

$$G(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}\right), & 0\leqslant x<\pi;\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}\right)+C, & \pi<x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

имеет производную, равную f для всех $x\in[0, \pi)\cup(\pi, 2\pi]$. Функция $G(x)$ — первообразная для f на $[0, 2\pi]$, если она непрерывна в точке $x=\pi$. Для этого постоянная C должна удовлетворять соотношению

$$\lim_{x\to\pi-}F(x)=\lim_{x\to\pi+}F(x)+C;\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C,$$

откуда $C=\pi/\sqrt{2}$. Теперь, применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = G(2\pi) - G(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} -$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} 0}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Более простым и общим является следующий метод вычисления этого интеграла.

Функция

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & 0 \leqslant x < \pi; \\ \lim\limits_{x \to \pi-} F(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi \end{cases}$$

есть первообразная для $1/(3+\cos x)$ на отрезке $[0, \pi]$. Функция

$$F_2(x) = \begin{cases} F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{2}}, & \pi < x \leqslant 2\pi; \\ \lim\limits_{x \to \pi+} F(x) = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \pi \end{cases}$$

есть первообразная для $1/(3+\cos x)$ на отрезке $[\pi, 2\pi]$. Используя свойство аддитивности и формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} = \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+\cos x} + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{3+\cos x} =$$

$$= F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) =$$

$$= \lim_{x \to \pi-} F(x) - F(0) + F(2\pi) - \lim_{x \to \pi+} F(x) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Этот метод вычисления является примером применения *общего утверждения:* пусть f непрерывна на $[a, b]$ и выражение $f(x)dx$ можно представить в виде $g(t(x))dt(x)$, где функция t непрерывно дифференцируема на $[a, b)$,

$$t(a) = \alpha \text{ и } \lim_{x \to b-} t(x) = +\infty, \text{ тогда}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{q \to +\infty} \int_\alpha^q g(t)\,dt = \lim_{q \to +\infty} (G(q) - G(\alpha)),$$

где G — первообразная для g на луче $t \geqslant \inf f(x)$, $x \in [a, b]$.

Определение. Пусть f непрерывна на луче $x \geqslant p$ и $F(x)$ — первообразная для f на луче $x \geqslant p$. Если существует

$$\lim_{q \to +\infty} \int_p^q f(x)\,dx = \lim_{q \to +\infty} (F(q) - F(p)),$$

то этот предел обозначается $\int\limits_p^{+\infty} f(x)\,dx$ и называется *сходящимся несобственным интегралом.*

Полное рассмотрение свойств несобственных интегралов сделано позже, здесь ограничимся только теми вопросами, которые возникают при замене переменного в интеграле Римана. Будем считать, что первообразную функции f можно найти, поэтому вычисление предела производится непосредственно. Несобственный интеграл вида $\int\limits_p^{+\infty} g(t)\,dt$ и аналогичный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{p} g(t)\,dt$ получаются при замене в интеграле Римана с помощью функции $t = t(x)$, непрерывно дифференцируемой на полуинтервале $[a, b)$ (или $(a, b]$) и являющейся бесконечно большой определенного знака при $x \to b-$ (или $x \to a+$). Здесь существенно, что особой точкой функции t является именно конец (левый или правый) отрезка $[a, b]$. Если особой точкой $t(x)$ (как в разобранном выше примере) является внутренняя точка c интервала (a, b), то $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ разбивается в сумму $\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ и переход к аргументу t делается раздельно в каждом из слагаемых.

Пример 8. Вычислим

$$\int_{-1/32}^{1} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^3}}\right)^2}.$$

Решение. Применяя метод интегрирования дифференциального бинома, сделаем замену $t = \sqrt[3]{1 + x^{-3/5}}$. Функция $t(x)$ непрерывно дифференцируема на полуинтервалах $[-1/32, 0)$ и $(0, 1]$, точка 0 является особой точкой $t(x)$, причем

$$\lim_{x \to 0-} t(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+} t(x) = +\infty.$$

Поэтому в соответствии с изложенным выше интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int_{-1/32}^{1} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^3}}\right)^2} = \int_{-1/32}^{0} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^3}}\right)^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x^3}}\right)^2} =$$

$$= -5 \int\limits_{-\sqrt[3]{7}}^{-\infty} \frac{dt}{(1-t^3)^2} - 5 \int\limits_{+\infty}^{\sqrt[3]{2}} \frac{dt}{(1-t^3)^2} = 5 \int\limits_{-\infty}^{-\sqrt[3]{7}} \frac{dt}{(1-t^3)^2} +$$

$$+ 5 \int\limits_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty} \frac{dt}{(1-t^3)^2} = 5 \left[\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right] \Bigg|_{-\infty}^{-\sqrt[3]{7}} + 5 \left[\frac{t}{t^3-1} + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{(t-1)^3}{t^3-1} \right| - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right] \Bigg|_{\sqrt[3]{2}}^{+\infty} = \frac{5}{8} \sqrt[3]{7} - 5 \sqrt[3]{2} + 5 \ln \frac{1+\sqrt[3]{7}}{2} -$$

$$- 5 \ln(\sqrt[3]{2} - 1) - \frac{10\pi}{3} + \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{2}+1}{\sqrt{3}} + \frac{10}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{7}-1}{\sqrt{3}}.$$

Другим видом несобственного интеграла является интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если функция f не ограничена на $[a, b]$, но непрерывна на $[a+\varepsilon, b]$ при любом ε, $0<\varepsilon<b-a$ (или на $[a, b-\varepsilon]$), т. е. не ограничена в окрестности точки a (точки b). Этот интеграл существует (сходится), если существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - \lim_{b_1 \to a+} F(b_1)$$

$$\left(\lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \right).$$

Такого вида интеграл также может получиться при замене переменного в интеграле Римана.

Пример 9. Вычислим

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx, \text{ если } f(x) = \begin{cases} x/\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}, & x \neq 0; \\ \sqrt{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна на $[0, 1]$. После замены $t=\sqrt{1-x^2}$ получаем

$$-\int\limits_1^0 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}} = \int\limits_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}}.$$

В последнем интеграле подынтегральная функция $t/\sqrt{1-t}$ не ограничена на [0, 1). Так как первообразная функции $t/\sqrt{1-t}$ на отрезке $[0, 1-\varepsilon]$ при любом ε, $0<\varepsilon<1$ равна

$$\frac{2}{3}(1-t)^{3/2}-2\sqrt{1-t},$$

то

$$\int_0^1 \frac{tdt}{\sqrt{1-t}}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{tdt}{\sqrt{1-t}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}-2\varepsilon^{1/2}+2-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}.$$

Несобственный интеграл может появиться и при интегрировании по частям.

Пример 10. Вычислим $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Решение. Функция $\arcsin x$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$, но не является такой на отрезке $[0, 1]$. Поэтому интегрирование по частям допустимо только на отрезках вида $[0, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon>0$. Но так как интеграл $\int_0^1 \arcsin x dx$ существует, то

$$\int_0^1 \arcsin x dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\arcsin x dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(x\arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon}-\int_0^{1-\varepsilon}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left((1-\varepsilon)\arcsin(1-\varepsilon)+\sqrt{1-x^2}\Big|_0^{1-\varepsilon}\right)=\frac{\pi}{2}-1,$$

т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^{1-\varepsilon}\arcsin x dx=\lim_{\varepsilon\to 0+}(F(1-\varepsilon)-F(0))=F(1)-F(0),$$

где непрерывная функция $F(x)=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$ — первообразная для $\arcsin x$ на отрезке $[0, 1]$.

На практике такого рода интегралы можно вычислять без введения символа предела, так как в нашем случае можно писать

$$\int_0^1 \arcsin x dx=(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1,$$

или (поскольку первое слагаемое — непрерывная функция)

$$\int_0^1 \arcsin x dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

§ 2. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ

Пусть XOY — декартова система координат на плоскости. *Стандартной относительно оси OX областью D* называется множество точек $M(x, y)$, для которых $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции на $[a, b]$. Геометрически это означает, что слева и справа область ограничена отрезками прямых $x=a$, $x=b$ соответственно (может быть вырождающимися в точку); график функции $y=y_1(x)$ является верхней, а график функции $y=y_2(x)$ — нижней границей области D (см. рис. 40).

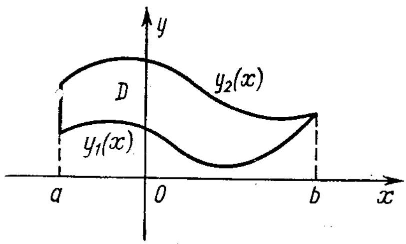

Рис. 40

Аналогично *стандартная относительно оси OY область D* есть множество точек $M(x, y)$, для которых $c \leqslant y \leqslant d$, $x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)$, где $x_1(y)$ и $x_2(y)$ — непрерывные функции на $[c, d]$. В этом случае область D сверху и снизу ограничена отрезками прямых $y=c$ и $y=d$, слева и справа — графиками функций $x=x_1(y)$ и $x=x_2(y)$ соответственно.

Рассмотрим частный случай стандартной относительно оси OX области D, когда $y_1(x) \equiv 0$, а $y=f(x)$ — верхняя граница. Такую область назовем *криволинейной трапецией* (см. рис. 41, a).

Пусть $T: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b$ — разбиение отрезка $[a, b]$.

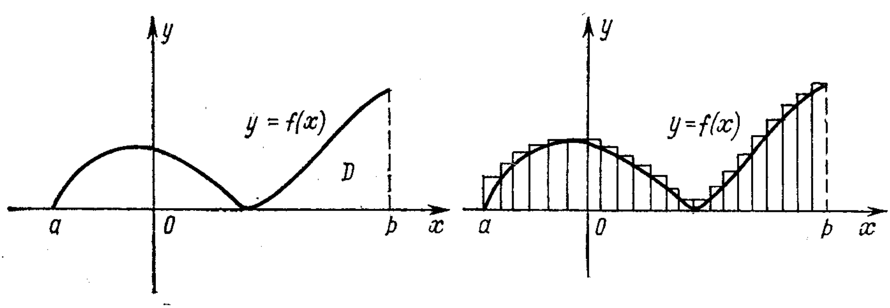

Рис. 41

a b

Обозначим

$$m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \qquad M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$s_T = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \qquad S_T = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}).$$

Тогда s_T и S_T представляют собой площади фигур, составленных из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, а высотами — соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на этом отрезке. Первая из этих фигур содержит внутри себя рассматриваемую криволинейную трапецию D, вторая содержится внутри нее (см. рис. 41, *б*). Естественно требовать, чтобы площадь S_D криволинейной трапеции D удовлетворяла соотношению $s_T \leqslant S_D \leqslant S_T$ при любом разбиении T. Так как функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то

$$\sup_T s_T = \inf_T S_T = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Определение. *Площадью S_D криволинейной трапеции D* называется величина

$$S_D = \sup_T s_T = \inf_T S_T.$$

Из определения следует, что

$$S_D = \int_a^b y_2(x)\, dx.$$

Площадь S_D стандартной относительно оси OX области D: $(D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\})$ вычисляется по формуле

$$S_D = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]\, dx.$$

Площадь S_D стандартной относительно оси OY области D: $(D = \{(x, y) : c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\})$ вычисляется по формуле

$$S_D = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)]\, dy.$$

Если область D можно разбить на конечное число областей D_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, $D = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$ без общих внутренних точек, то S_D — площадь D равна сумме площадей $D_i : S_D = \sum_{i=1}^{k} S_{D_i}$.

Пример 1. Найдем площадь области, ограниченной линиями $y=x-1$ и $y^2=x+1$.

Решение. Данная область является стандартной как относительно оси OX, а именно

$$D=\{(x, y): -1\leqslant x\leqslant 3,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant \sqrt{x+1}\},$$

где

$$y_1(x)=\begin{cases} -\sqrt{x+1}, & -1\leqslant x\leqslant 0; \\ x-1, & 0< x\leqslant 3, \end{cases}$$

так и относительно оси OY:

$D=\{(x, y): -1\leqslant y\leqslant 2,\ y^2-1\leqslant x\leqslant y+1\}$ (см. рис. 42). Площадь S_D данной области можно вычислить одним из двух способов:

$$\text{I. } S_D=\int_{-1}^{3}(\sqrt{x+1}-y_1(x))\,dx=\int_{-1}^{0}2\sqrt{x+1}\,dx+$$

$$+\int_{0}^{3}(\sqrt{x+1}-x+1)\,dx=\frac{4}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{0}+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot(x+1)^{3/2}\Big|_0^3-\frac{(x-1)^2}{2}\Big|_0^3=\frac{9}{2}.$$

$$\text{II. } S_D=\int_{-1}^{2}(y+1-y^2+1)\,dy=\left(-\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}+2y\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Пример 2. Найдем площадь области, ограниченной кривыми $x^2+2ax-y^2=0$ и $ax-y^2+2a^2=0$, $a>0$.

Решение. Данная область (см. рис. 43) не является стандартной относительно оси OX. Ее можно разбить на три стандартные относительно оси OX области:

$$D_1=\{(x, y): -2a\leqslant x\leqslant 0,\ -\sqrt{2a^2+ax}\leqslant y\leqslant \sqrt{2a^2+ax}\},$$

$$D_2=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant a,\ \sqrt{x^2+2ax}\leqslant y\leqslant \sqrt{2a^2+ax}\},$$

$$D_3=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant a,\ -\sqrt{2a^2+ax}\leqslant y\leqslant -\sqrt{x^2+2ax}\}.$$

Из симметрии области D относительно оси OX видно, что ее площадь S_D есть удвоенная площадь области, являющейся объединением двух стандартных относительно оси OX областей

$$\widetilde{D}_1=\{(x, y): -2a\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant \sqrt{2a^2+ax}\}$$

и D_2.

Отсюда

$$S_D=2\left[\int_{-2a}^{0}\sqrt{2a^2+ax}\,dx+\int_{0}^{a}(\sqrt{2a^2+ax}-\sqrt{x^2+2ax})\,dx\right]=$$

$$=2\left[\frac{2}{3a}(ax+2a^2)^{3/2}\Big|_{-2a}^{a}-\left(\frac{x+a}{2}\right)\sqrt{x^2+2ax}\Big|_0^a+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+a+\sqrt{x^2+2ax}\right)\Big|_0^a\right]=2a^2\sqrt{3}+a^2\ln(2+\sqrt{3}).$$

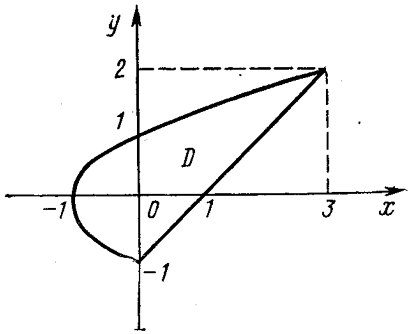

Рис. 42

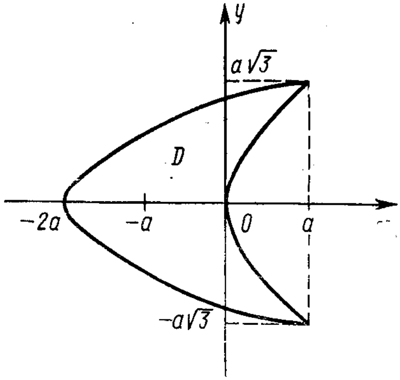

Рис. 43

Относительно оси OY данная область является стандартной:

$$D=\left\{(x,\ y):\ -a\sqrt{3}\leqslant y\leqslant a\sqrt{3},\ \frac{y^2-2a^2}{a}\leqslant x\leqslant -a+\sqrt{y^2+a^2}\right\}.$$

Снова, используя симметрию области, получаем

$$S_D=2\int_0^{a\sqrt{3}}\left(\sqrt{y^2+a^2}-a-\frac{y^2}{a}+2a\right)dy=$$

$$=2a^2\sqrt{3}+\left(y\sqrt{y^2+a^2}+a^2\ln|y+\sqrt{y^2+a^2}|-\frac{2y^3}{3a}\right)\Big|_0^{a\sqrt{3}}=$$

$$=2a^2\sqrt{3}+a^2\ln(2+\sqrt{3}).$$

(Заметим, что при этом способе решения вычисления проще.)

Перейдем к вычислению площади области, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Пусть область D ограничена непрерывной замкнутой кривой

$$\Gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[T_0,\ T_1],\ x(T_0)=x(T_1),\ y(T_0)=y(T_1).$$

Рассмотрим подробно простейший случай: отрезок $[T_0, T_1]$ делится точкой $\tau\in(T_0, T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0, \tau]$ и $[\tau, T_1]$ функция x строго монотонна и непрерывно дифференцируема. Тогда кривая Γ состоит из двух ветвей, каждая из которых есть график однозначной непрерывной функции $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$. Предположим еще, что для любого x выполнено соотношение $y_1(x)\leqslant y_2(x)$, тогда кривая $y=y_2(x)$ есть верхняя, а кривая $y=y_1(x)$ — нижняя граница области D. Если при возрастании t

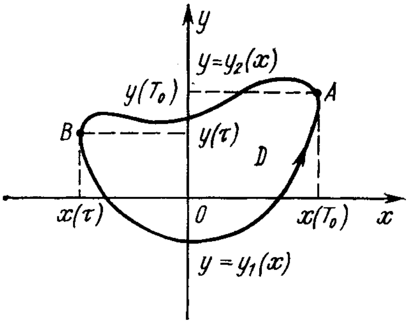

Рис. 44

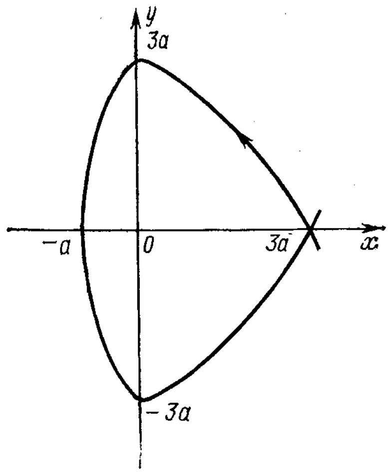

Рис. 45

кривая Γ проходится так, что область D остается слева (положительное направление обхода), то верхняя граница области D проходится справа налево (значение x убывает), а нижняя граница области D проходится слева направо (значение x возрастает), рис. 44. Если S_D — площадь области D, то имеем

$$S_D=\int_a^b (y_2(x)-y_1(x))\,dx=\int_a^b y_2(x)\,dx-\int_a^b y_1(x)\,dx.$$

Сделав в первом интеграле замену $x=x(t)$, $t\in[T_0, \tau)$, а во втором $x=x(t)$, $t\in[\tau, T_1)$, получаем, что так как $y_2(x(t))=y(t)$, $t\in[T_0, \tau)$ и $y_1(x(t))=y(t)$, $t\in[\tau, T_1)$, то

$$S_D=-\int_{T_0}^{\tau} y(t)\,x'_t\,dt-\int_{\tau}^{T_1} y(t)\,x'_t dt=-\int_{T_0}^{T_1} y(t)\,x'(t)\,dt.$$

Таким же образом получаем, что если отрезок $[T_0, T_1]$ делится точкой $\tau\in(T_0, T_1)$ так, что на каждом из отрезков $[T_0, \tau]$ и $[\tau, T_1]$ функция y строго монотонна и непрерывно дифференцируема, то $S_D=\int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)\,y'(t)\,dt$. Объединяя эти две формулы, получаем следующую формулу:

$$S_D=\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t))\,dt.$$

Можно доказать, что все эти три формулы справедливы и в более общем случае, когда непрерывная замкнутая кривая $\Gamma: x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[T_0;\ T_1]$, проходится при изменении t от T_0 до T_1 таким образом, что ограничиваемая этой кривой область D остается слева. Какую из них удобнее применять, зависит от конкретного вида функций $x=x(t)$ и $y=y(t)$.

Пример 3. Найдем площадь области, ограниченной петлей кривой

$$x=a(t^2-2t),\quad y=a(t^2-1)(t-3),\quad a>0.$$

Решение. Петля кривой проходится в положительном направлении при изменении t от -1 до 3 (см. рис. 45). Для вычисления площади можно применить любую из трех формул, соответственно имеем

$$S=-\int\limits_{T_0}^{T_1} y(t)\,x'(t)\,dt=-\int\limits_{-1}^{3} a^2(t^2-1)(t-3)(2t-2)\,dt=$$

$$=-2a^2\int\limits_{-1}^{3}(t^4-4t^3+2t^2+4t-3)\,dt=$$

$$=-2a^2\left(\frac{t^5}{5}-t^4+\frac{2}{3}t^3+2t^2-3t\right)\Big|_{-1}^{3}=17\frac{1}{15}a^2,$$

$$S=\int\limits_{T_0}^{T_1} x(t)\,y'(t)\,dt=\int\limits_{-1}^{3} a^2(t^2-2t)(3t^2-6t-1)\,dt=$$

$$=a^2\left(\frac{3}{5}t^5-3t^4+\frac{11}{3}t^3+t^2\right)\Big|_{-1}^{3}=17\frac{1}{15}a^2;$$

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}(x(t)\,y'(t)-y(t)\,x'(t))\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{3} a^2(t^4-4t^3+7t^2-6t+6)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{5}t^5-t^4+\frac{7}{3}t^3-3t^2+6t\right)\Big|_{-1}^{3}=17\frac{1}{15}a^2.$$

Пример 4. Найдем площадь области, ограниченной кривой $x = at^2/(1+t^4)$, $y = at^3/(1+t^4)$, $a > 0$.

Решение. Кривая образует две симметричные петли (см. рис. 46). Верхняя из них проходится в положительном направле-

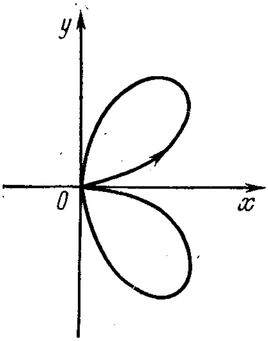

Рис. 46

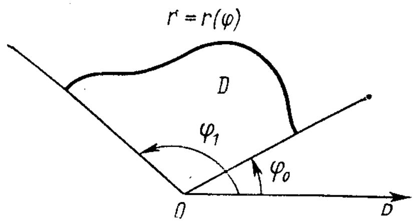

Рис. 47

нии при изменении t от 0 до $+\infty$. Найдем площадь области, ею ограниченной. В данном случае удобно применить для вычисления симметричную формулу

$$S_D = \frac{1}{2} \int_{T_0}^{T_1} [x(t)\, y'(t) - y(t)\, x'(t)]\, dt.$$

Так как $y = tx$, то $xy' - yx' = x(x + tx') - tx \cdot x' = x^2$, откуда

$$S_D = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{a^2 t^4}{(1+t^4)^2}\, dt = \left. \frac{-a^2 t}{8(1+t^4)} \right|_0^{+\infty} + \frac{a^2}{8} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{a^2 \pi}{16\sqrt{2}}.$$

Следовательно, площадь всей области равна $\pi a^2/8\sqrt{2}$. Отметим, что рассматриваемая часть кривой есть образ луча $t \geqslant 0$, поэтому площадь можно вычислить с помощью несобственного интеграла: $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\, dt$. Об интегралах такого вида см. стр. 246.

Рассмотрим на плоскости полярную систему координат. В этом случае аналогом криволинейной трапеции будет *криволинейный сектор*: множество точек

$$M(r, \varphi): \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1, \ (\varphi_1 - \varphi_0 \leqslant 2\pi), \ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),$$

где $r(\varphi)$ — непрерывная функция на $[\varphi_0, \varphi_1]$ (см. рис. 47).

Площадь S_D криволинейного сектора $D=\{(r,\ \varphi):\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1,\ 0\leqslant r\leqslant r(\varphi)\}$ вычисляется по формуле

$$S_D=\frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 5. Найдем площадь области, ограниченной кривой $r=a\sin 3\varphi,\quad a>0.$

Решение. Кривая образует три симметричные петли, каждая из которых ограничивает криволинейный сектор (см. рис. 48).

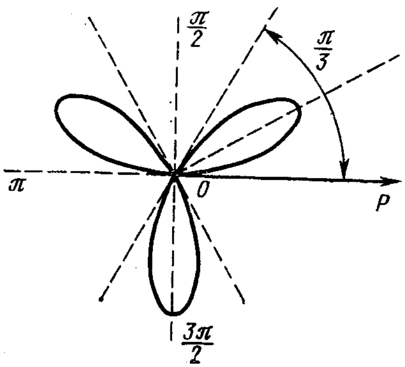

Рис. 48

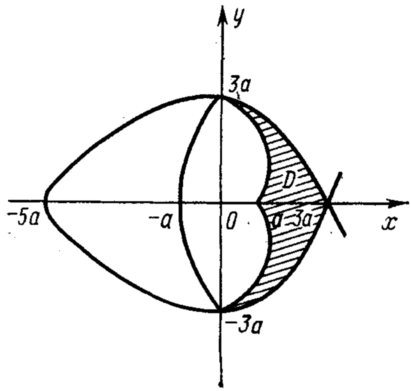

Рис. 49

Рассмотрим первый из них:

$$D_1=\{(r,\ \varphi):0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3,\ 0\leqslant r\leqslant a\sin 3\varphi\}.$$

Площадь его равна 1/3 площади всей области, ограниченной данной кривой. Следовательно,

$$S_D=3S_{D_1}=\frac{3}{2}\int\limits_0^{\pi/3} a^2\sin^2 3\varphi d\varphi=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример 6. Найдем площадь области, лежащей внутри петли кривой $x=a(t^2-2t)$, $y=a(t^2-1)(t-3)$ и вне кривой $r=a(3-$ $-2\cos\varphi)$, $a>0$ (системы координат совмещены).

Решение. Чтобы выяснить взаимное расположение этих кривых, сравним их с окружностью

$$S=\{(x,\ y):x^2+2ax+y^2-9a^2=0\}.$$

Для точек первой кривой имеем

$$x^2+2ax+y^2-9a^2=a^2t\cdot(t-2)\left[(t^2-2t-2)^2+1\right]=$$
$$=a^2x\left[(t^2-2t-2)^2+1\right].$$

Следовательно, часть этой кривой, находящаяся слева от оси OY $(x<0)$, лежит внутри окружности S, а часть кривой, находящаяся справа от оси OY $(x>0)$, — вне этой окружности. Для точек второй кривой, лежащих слева от оси OY, имеем $\pi/2<\varphi<3\pi/2$, следовательно, $r>3a$ и $r^2=3ar-2ar\cos\varphi>9a^2-2ar\cos\varphi$. Переходя к декартовой системе координат, получим, что для всех точек второй кривой, лежащих слева от оси OY, имеем $x^2+y^2+2ax-9a^2>0$, т. е. слева от оси OY часть этой кривой лежит вне окружности S. Если же $-\pi/2<\varphi<\pi/2$, то $r<3a$ и $r^2=3ar-2ar\cos\varphi<9a^2-2ar\cos\varphi$, т. е. $x^2+y^2+2ax-9a^2<0$, значит, справа от оси OY часть этой кривой лежит внутри окружности. Итак, данная область лежит справа от оси OY (см. рис. 49). Так как она симметрична относительно оси OX, то ее площадь S_D равна удвоенной разности площади криволинейной трапеции $D_1=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 3a, 0\leqslant y\leqslant y(t(x)), -1\leqslant t\leqslant 0\}$ и площади криволинейного сектора

$$D_2=\{(r, \varphi): 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2,\ 0\leqslant r\leqslant a(3-2\cos\varphi)\}.$$

Следовательно,

$$S_D=2\left[\int_{-1}^{0}a^2(3t^4-12t^3+11t^2+2t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}a^2(3-2\cos\varphi)^2\,d\varphi\right]=2a^2\left(\frac{3}{5}t^5-3t^4+\frac{11}{3}t^3+t^2\right)\Big|_{-1}^{0}-$$

$$-a^2\int_0^{\pi/2}(9-12\cos\varphi+4\cos^2\varphi)\,d\varphi=a^2\left(24\frac{8}{15}-\frac{11}{2}\pi\right).$$

§ 3. ОБЪЕМ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть D — криволинейная трапеция:

$$D=\{(x, y): 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant y(x),\ y\in C[a, b]\};$$

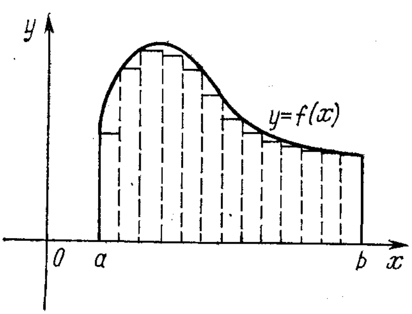

Рис. 50

V^{OX} — тело, полученное вращением D вокруг оси OX. Для разбиения $T: a=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n=b$ отрезка $[a, b]$ обозначим через D_T фигуру, составленную из прямоугольников, основаниями которых являются отрезки $[x_k, x_{k+1}]$, а высотами — наименьшие значения y на $[x_k, x_{k+1}]$. Фигура D_T содержится в криволинейной трапеции D (см. рис. 50).

При вращении D_T вокруг оси OX получим тело V_T^{OX}, содержащееся внутри тела V^{OX}. Тело V_T^{OX} составлено из прямых круговых цилиндров, образованных вращением прямоугольников, составляющих фигуру D_T. Высота каждого такого цилиндра есть $(x_{k+1}-x_k)$, радиус основания — $m_k=\min\limits_{[x_k, x_{k+1}]} y(x)$, поэтому $|V_T^{OX}|$ — объем тела V_T^{OX} — равен $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2 (x_{k+1}-x_k)$. Объемом $|V^{OX}|$ тела V^{OX} назовем $\sup\limits_T |V_T^{OX}|$. Так как $|V_T^{OX}|$ есть нижняя сумма Дарбу непрерывной функции $\pi y^2(x)$, то

$$|V^{OX}|=\sup_T |V_T^{OX}|=\pi\int_a^b y^2(x)\,dx. \tag{1}$$

При вращении D_T вокруг оси OY каждый из прямоугольников, составляющих D_T, образует цилиндрическое кольцо, высота которого есть m_k, а основанием является кольцо с внешним радиусом x_{k+1} и внутренним x_k. Объем такого цилиндрического кольца равен $\pi m_k(x_{k+1}^2-x_k^2)$.

Тело V_T^{OY}, полученное вращением D_T вокруг оси OY, есть объединение этих цилиндрических колец, поэтому его объем $|V_T^{OY}|$ равен

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2-x_k^2).$$

Представим разность $x_{k+1}^2-x_k^2$ в виде

$$2x_k(x_{k+1}-x_k)+(x_{k+1}-x_k)^2.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}^2-x_k^2)=\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k x_k (x_{k+1}-x_k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k (x_{k+1}-x_k)^2=\sum_{k=0}^{n-1} 2\pi m_k x_k\,\Delta x_k+\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k\,\Delta x_k^2.$$

Первая сумма есть нижняя сумма Дарбу для непрерывной функции $2\pi x y(x)$.

Если параметр разбиения T есть $\lambda(T)$, то для второй суммы имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k\,\Delta x_k^2<\lambda(T)\sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k\,\Delta x_k.$$

Следовательно, при $\lambda(T)\to 0$ первая сумма стремится к $2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,dx$, а вторая стремится к нулю, так как

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\pi m_k\,\Delta x_k=\int\limits_a^b \pi y(x)\,dx.$$

Объемом $|V^{OY}|$ тела V^{Oy} будем называть $\sup\limits_T|V_T^{OY}|$. Из предыдущего следует, что

$$|V^{OY}|=2\pi\int\limits_a^b xy(x)\,dx.$$

Пусть функция $y(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим области

$$D_1=\{(x, y):\ a\leqslant x\leqslant b\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant y(x)\};$$
$$D_2=\{(x, y):\ 0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,\ y(x)\leqslant y\leqslant 0\};$$
$$D_3=\{(x, y):\ a\leqslant x\leqslant b\leqslant 0,\ y(x)\leqslant y\leqslant 0\}$$

и тела V_1^{OX}, V_2^{OX}, V_3^{OX}, V_1^{OY}, V_2^{OY}, V_3^{OY}, полученные вращением областей D_1, D_2, D_3 вокруг осей OX и OY соответственно. Повторяя вышеприведенные рассуждения, получаем, что объемы этих тел соответственно равны:

$$|V_i^{OX}|=\pi\int\limits_a^b y^2(x)\,dx,\quad i=1,\ 2,\ 3;$$

$$|V_i^{OY}|=2\pi\int\limits_a^b |xy(x)|\,dx,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

Пусть D — стандартная относительно оси OX область:

$$D=\{(x, y):\ a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x),\ y_1(x)\in C[a, b],$$
$$y_2(x)\in C[a, b]\}.$$

Если ось OX не пересекает D, то через V^{OX} обозначим тело, образованное вращением D вокруг оси OX; если ось OY не пересекает D, то через V^{OY} обозначим тело, образованное вращением D вокруг оси OY. Объемы этих тел вычисляются как разность или сумма объемов тел, полученных при вращении соответствующих областей вида D_1, D_2 и D_3, рассмотренных выше, в зависимости от знаков чисел a, b и знаков функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Например, если $a<b\leqslant 0$, $y_1(x)\leqslant 0$ и $y_2(x)\geqslant 0$ для $x\in[a, b]$, то $|V^{OY}|$ есть сумма

объемов $|V_1^{OY}|$ и $|V_3^{OY}|$ тел V_1^{OY} и V_3^{OY}, полученных от вращения областей $D_1=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant y_2(x)\}$ и $D_3=\{(x, y): : a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant 0\}$ вокруг оси OY.

Из этих соображений получаем, что

$$|V^{OX}| = \pi\int_a^b |y_2^2(x) - y_1^2(x)|\,dx, \tag{1}$$

$$|V^{OY}| = 2\pi\int_a^b |x|\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx.$$

Пусть теперь D — область, ограниченная непрерывной замкнутой кривой

$$\Gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[T_0, T_1],\ x(T_0)=x(T_1),\ y(T_0)=y(T_1),$$

причем при изменении t от T_0 до T_1 кривая Γ проходится так, что область D остается слева. Так же, как и при вычислении площадей, выводится, что если D не пересекается с соответствующей осью координат и функции x и y непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$, то

$$|V^{OX}| = -\pi\int_{T_0}^{T_1} y^2(t)\,x'(t)\,dt = 2\pi\int_{T_0}^{T_1} |x(t)\,y(t)|\,y'(t)\,dt,$$

$$|V^{OY}| = -2\pi\int_{T_0}^{T_1} |x(t)\,y(t)|\,x'(t)\,dt = \pi\int_{T_0}^{T_1} x^2(t)\,y'(t)\,dt.$$

Если кривая $\Gamma: x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[T_0, T_1]$, не замкнута, но

$$y(t)\geqslant 0,\ t\in[T_0, T_1],\ y(T_0)=y(T_1)=0,$$

$$x(T_0)=b,\ x(T_1)=a,\ b>a,$$

и область D ограничена кривой Γ и отрезком $[a, b]$ оси OX, то D можно рассматривать как область, ограниченную непрерывной замкнутой кривой $\Gamma_1: x=x_1(t),\ y=y_1(t),\ t\in[T_0, T_2],\ T_2>T_1$, где

$$x_1(t)=\begin{cases} x(t), & t\in[T_0, T_1],\\ a+\dfrac{b-a}{T_2-T_1}(t-T_1), & t\in(T_1, T_2],\end{cases} \quad\text{и}\quad y_1(t)=\begin{cases} y(t), & t\in[T_0, T_1],\\ 0, & t\in(T_1, T_2].\end{cases}$$

Тогда при изменении t от T_0 до T_1 кривая Γ_1 проходится так, что область D остается слева.

Следовательно, объем $|V^{OX}|$ тела V^{OX}, полученного при вращении такой области вокруг оси OX, вычисляется по формуле

$$|V^{OX}| = -\pi\int_{T_0}^{T_2} y_1^2(t)\,x_1'(t)\,dt = -\pi\int_{T_0}^{T_1} y^2(t)\,x'(t)\,dt$$

или по формуле

$$|V^{OX}| = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)\, y(t)|\, y'_t(t)\, dt.$$

Если область D не пересекается с осью OY, то объем $|V^{OY}|$ тела V^{OY}, полученного при вращении D вокруг оси OY, вычисляется по формуле

$$|V^{OY}| = -2\pi \int_{T_0}^{T_2} |x_1(t)\, y_1(t)|\, x'(t)\, dt = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)\, y(t)|\, x'(t)\, dt$$

или по формуле

$$|V^{OY}| = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t)\, y'_t(t)\, dt.$$

Точно так же для области D, ограниченной кривой

$\Gamma: x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [T_0, T_1],\ x(t) \geqslant 0,\ t \in [T_0, T_1],\ x(T_0) = x(T_1) = 0,\ y(T_0) = c,\ y(T_1) = d,\ d > c$, и отрезком $[c, d]$ оси OY, объемы $|V^{OX}|$ и $|V^{OY}|$ тел, полученных при вращении D относительно осей OX и OY соответственно, вычисляются по формулам

$$|V^{OX}| = -\pi \int_{T_0}^{T_1} y^2(t)\, x'(t)\, dt = 2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)\, y(t)|\, y'(t)\, dt,$$

$$|V^{OY}| = -2\pi \int_{T_0}^{T_1} |x(t)\, y(t)|\, x'(t)\, dt = \pi \int_{T_0}^{T_1} x^2(t)\, y'(t)\, dt.$$

Обращаем внимание, что приведенные формулы справедливы и для областей, не являющихся стандартными относительно любой из осей координат.

Если тело образовано вращением области D вокруг оси, не пересекающей область D и не являющейся одной из осей координат, то для вычисления объема полученного тела делают замену системы координат так, чтобы в новой системе одна из координатных осей совпала с осью вращения.

В частности:

а) если осью вращения является прямая $y = l$, не пересекающая область

$$D: \{a \leqslant x \leqslant b,\ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\},$$

то объем $|V^l|$ тела V^l, полученного вращением D вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l| = \pi \int_a^b |(y_2 - l)^2 - (y_1 - l)^2|\, dx,$$

б) если осью вращения является прямая $x=l$, не пересекающая область

$$D:\{a\leqslant x\leqslant b,\ y_1(x)\leqslant y\leqslant y_2(x)\},$$

то объем $|V^l|$ тела V^l, полученного вращением D вокруг этой оси, вычисляется по формуле

$$|V^l|=2\pi\int\limits_a^b(y_2-y_1)|x-l|\,dx.$$

Обе эти формулы получаются переносом осей координат так, чтобы в первом случае ось l стала новой осью OX_1, а во втором — ось l стала новой осью OY_1.

Пример 1. Область D расположена в правой полуплоскости ($x\geqslant 0$) и ограничена линиями $y=x$ и $y=2x-x^3$. Найдем объемы тел, полученных при вращении области D (см. рис. 51) вокруг:

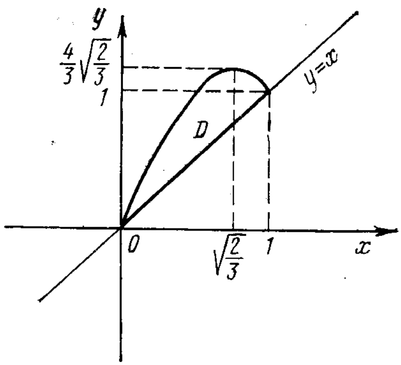

Рис. 51

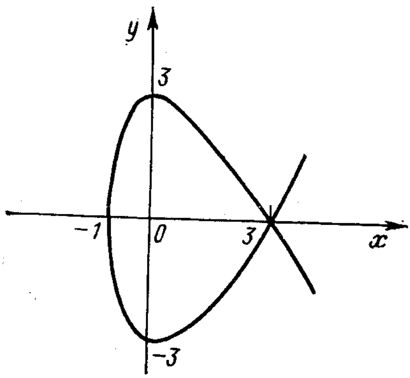

Рис. 52

а) оси OX; б) оси OY; в) горизонтальной касательной к верхней границе D; г) прямой $y=x$.

Решение. Область D является стандартной относительно оси OX:

$$D=\{(x,\ y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 2x-x^3\},$$

следовательно,

$$\text{а)}\ |V^{OX}|=\pi\int\limits_0^1((2x-x^3)^2-x^2)\,dx=\pi\int\limits_0^1(x^6-4x^4+3x^2)\,dx=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{7}-\frac{4}{5}+1\right]=\frac{12\pi}{35},$$

б) $|V^{OY}|=2\pi\int\limits_0^1 x(2x-x^3-x)\,dx=2\pi\int\limits_0^1 (x^2-x^4)\,dx=$

$=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4\pi}{15}$,

в) для функции $y=2x-x^3$ горизонтальная касательная к ее графику проходит через точку $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, т. е. в этом случае осью вращения является прямая $y=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. Сделаем перенос осей координат, т. е. перейдем к координатам u, v так, что $u=x$, $v=y-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, тогда ось OU будет осью вращения, и в новой системе координат область D будет стандартной относительно оси OU:

$$D=\left\{(u,\ v):0\leqslant u\leqslant 1,\ u-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\leqslant v\leqslant 2u-u^3-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}.$$

Следовательно, объем $|V^{OU}|$ искомого тела вычисляется по формуле

$$|V^{OU}|=\pi\int\limits_0^1\left[\left(u-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2-\left(2u-u^3-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\right]du=$$

$$=\pi\int\limits_0^1\left(-u^6+4u^4-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u^3-3u^2+\frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}u\right)du=$$

$$=\pi\left(-\frac{1}{7}+\frac{4}{5}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-1+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{12}{35}\right);$$

г) сделаем поворот осей координат на $\pi/4$, т. е. перейдем от переменных x, y к переменным u, v по формулам

$$\begin{aligned} u&=x\cos\pi/4+y\sin\pi/4,\\ v&=-x\sin\pi/4+y\cos\pi/4. \end{aligned}\qquad(2)$$

Тогда $u=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$, $v=-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}$, осью вращения станет ось OU.

Еще раз обратим внимание, что формула (1) имеет место для криволинейной трапеции. Поэтому если мы хотим ее использовать, то необходимо показать, что область D и в новой системе координат является криволинейной трапецией. Покажем это для нашего случая.

Действительно, отрезок $AB: A=(0,\ 0),\ B=(1,\ 1)$ прямой $y=x$ перешел в отрезок $[0,\ \sqrt{2}]$ оси OU.

Покажем теперь, что кривая Γ: $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=2x-x^3$ является в новой системе координат графиком некоторой функции $v=v(u)$ для $0\leqslant u\leqslant\sqrt{2}$, т. е. что каждой точке $M_0=(u_0,\ 0)$, $0\leqslant u_0\leqslant\sqrt{2}$, соответствует единственная точка $M(u_0,\ v(u_0))$ на Γ, проекция которой на ось OU есть M_0. Действительно, в противном случае на кривой Γ нашлась бы по крайней мере одна пара точек $M_1(x_1,\ y(x_1))$, $M_2(x_2,\ y(x_2))$ такая, что прямая M_1M_2 была бы перпендикулярна к прямой $y=x$ и, следовательно, выполнялось бы равенство

$$\frac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=-1,\quad 0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1.$$

Но в силу теоремы Лагранжа имеем $\dfrac{y(x_2)-y(x_1)}{x_2-x_1}=y'(c)$, где $x_1<c<x_2$, и так как $y'(x)=2-3x^2>-1$ для $0<x<1$, то такое равенство невозможно.

Поскольку

$$D=\{(u,\ v):0\leqslant u\leqslant\sqrt{2},\ 0\leqslant v\leqslant v(u)\},$$

то объем $|V^{OU}|$ тела, полученного при вращении области D относительно оси OU, равен

$$|V^{OU}|=\pi\int_0^{\sqrt{2}}v^2(u)\,du.$$

В данном примере для аналитического выражения функции v от u необходимо из соотношения (2) найти $x(u,\ v)$, $y(u,\ v)$, подставить их в соотношение $y=2x-x^3$ и из полученного соотношения между u и v найти $v(u)$. Все это приводит к громоздким выкладкам, поэтому преобразуем этот интеграл к виду $\int_a^b\varphi(x)\,dx$.

Величина $v(u)$ есть расстояние точки $M(x,\ y)$ на кривой

$$\Gamma:\{(x,\ y),\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=2x-x^3\}$$

от прямой $y=x$, таким образом,

$$|v(u)|=\left|\frac{-x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right|=\frac{|x-x^3|}{\sqrt{2}}.$$

Далее, на оси OU, т. е. на прямой $y=x$, имеем $dy=dx$, поэтому

$$du=\frac{1}{\sqrt{2}}(dx+dy)=\sqrt{2}\,dx.$$

Итак,

$$|V^{OU}|=\pi\int_0^{\sqrt{2}} v^2(u)\,du=\pi\int_0^1 \frac{(x-x^3)^2}{2}\sqrt{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (x^6-2x^4+x^2)\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{4\pi\sqrt{2}}{105}.$$

Пример 2. Найдем объем тела, полученного при вращении области D, ограниченной петлей кривой

$\Gamma: x=t^2-2t,\ y=(t^2-1)(t-3)$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг вертикальной касательной к Γ.

Решение. Петля кривой Γ проходится при изменении t от $T_0=-1$ до $T_1=3$ так, что область D остается слева и состоит из двух частей, симметричных относительно оси OX, соответствующих изменению t от T_0 до $T_2=1$ и от T_2 до T_1 (см. рис. 52).

Ранее специально оговаривалось, что ось вращения не пересекает область D, иначе не ясно, какое тело вращения рассматривается. Единственным исключением является тот случай, когда ось вращения есть ось симметрии области D. Тогда геометрически наглядно, что речь идет о теле, полученном при вращении вокруг оси симметрии области D одной из тех частей, на которые эта ось делит D.

а. Итак, надо вычислить объем $|V^{OX}|$ тела V^{OX}, полученного при вращении вокруг оси OX области D, ограниченной кривой $\Gamma_1: x=t^2-2t,\ y=(t^2-1)(t-3),\ t\in[-1, 1]$, и отрезком $[-1, 3]$ оси OX. Имеем

$$|V^{OX}|=-\pi\int_{-1}^{1}(t^2-1)^2(t-3)^2(2t-2)\,dt=$$

$$=-2\pi\int_{-1}^{1}(t^7-7t^6+13t^5+5t^4-29t^3+11t^2+15t-9)\,dt=\frac{64\pi}{3}.$$

б. Так как на кривой Γ имеем $x'_y=\frac{2(t-1)}{3t^2-6t-1}$, то $x_y'=0$ при $t=1$. Следовательно, вертикальной касательной к Γ является прямая $x=x(1)$, т. е. $x=-1$. Поэтому

$$|V|=-2\pi\int_{-1}^{3} y(t)\,(x(t)+1)\,x'(t)\,dt=$$

$$=-2\pi\int_{-1}^{3}(t-1)^2(t^2-1)(t-3)\,2(t-1)\,dt=$$

$$= -4\pi \int_{-1}^{3} (t-1)^4 (t^2-2t-3)\, dt = -4\pi \int_{-1}^{3} [(t-1)^6 - 4(t-1)^4]\, dt =$$

$$= \frac{16}{5} \pi (t-1)^5 \Big|_{-1}^{3} - \frac{4\pi}{7} (t-1)^7 \Big|_{-1}^{3} = \frac{\pi \cdot 2^{10}}{35} = \frac{2048}{35} \pi.$$

Пример 3. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ делится прямой $Ax = By$ ($AB \neq 0$) на две симметричные части. Найдем объем тела, полученного при вращении одной из этих частей вокруг прямой $Ax = By$ (см. рис. 53).

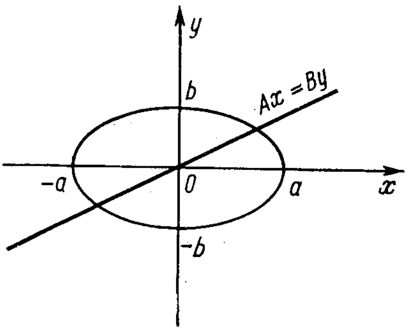

Рис. 53

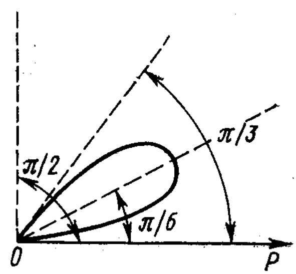

Рис. 54

Решение. Сделаем поворот осей координат, т. е. перейдем к координатам u, v так, чтобы ось OU стала осью вращения. Угол поворота равен $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A}{B}$, следовательно,

$$u = \frac{Bx}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{Ay}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$v = \frac{-Ax}{\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Рассматриваемая область D не является стандартной относительно оси OU, поэтому удобно рассматривать эллипс в параметрическом задании, поскольку тогда формула вычисления объема тела вращения не зависит от того, стандартна или нет область D относительно оси вращения.

Положим $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Тогда область D ограничена кривой Γ:

$$u = \frac{aB \cos t + bA \sin t}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$v = \frac{-aA \cos t + bB \sin t}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad T_0 \leqslant t \leqslant T_1,$$

и отрезком оси OU. Значения T_0 и T_1 находятся из условия $v(T_0) = v(T_1) = 0$, откуда $T_0 = \operatorname{arctg}\frac{aA}{bB}$, $T_1 = T_0 + \pi$. Следовательно,

$$|V^{OU}| = -\pi\int_{T_0}^{T_1} v^2(t)\,u'(t)\,dt = -\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}}\int_{T_0}^{T_1}(a^2A^2\cos^2 t +$$

$$+ b^2B^2\sin^2 t - 2abAB\cos t\sin t)(bA\cos t - aB\sin t)\,dt =$$

$$= -\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}}\int_{T_0}^{T_1}[a^2bA^3\cos t - ab^2B^3\sin t + \sin^2 t\cos t\times$$

$$\times(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2b\,AB^2) - \cos^2 t\sin t\cdot(a^3A^2B - ab^2B^3 +$$

$$+ 2ab^2A^2B)]\,dt = \frac{2\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}}\Big[a^2bA^3\sin T_0 + ab^2B^3\cos T_0 +$$

$$+ \frac{\sin^3 T_0}{3}(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2bAB^2) +$$

$$+ \frac{\cos^3 T_0}{3}(a^3A^2B - ab^2B^3 + 2ab^2A^2B)\Big] =$$

$$= \frac{2\pi}{(A^2+B^2)^{3/2}\cdot 3\,(A^2a^2+B^2b^2)^{3/2}}[(3a^3bA^4 + 3ab^3B^4)(A^2a^2 + B^2b^2) +$$

$$+ a^3A^3(b^3AB^2 - a^2bA^3 + 2a^2bAB^2) + b^3B^3(a^3A^2B - ab^2B^3 + 2ab^2A^2B)] =$$

$$= \frac{4\ \pi}{3\,(A^2+B^2)^{3/2}}\,\frac{ab}{(A^2a^2+B^2b^2)^{3/2}}\cdot[A^2a^2 + B^2b^2]^2\,[A^2 + B^2] =$$

$$= \frac{4\pi ab\sqrt{A^2a^2+B^2b^2}}{3\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пример 4. Найдем объем тела, полученного при вращении области D, ограниченной кривой $\Gamma: r = a\sin 3\varphi$, $a > 0$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3$ вокруг:

а) полярной оси; б) оси $\varphi = \pi/2$ (см. рис. 54).

Решение. Перейдем к декартовой системе координат, совмещенной с полярной. Кривая Γ в этой системе записывается в параметрическом виде: $x = a\sin 3\varphi\cos\varphi$, $y = a\sin 3\varphi\sin\varphi$, и при изменении φ от 0 до $\pi/3$ проходится так, что область D остается слева. Осями вращения являются соответственно оси OX и OY. Следовательно,

$$а)\ |V^{OX}| = -\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} y^2(\varphi)\,x'(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -\frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\pi/3} (\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)^2 (2\cos 4\varphi + \cos 2\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{2}\cos 2\varphi - 3\cos 4\varphi + \frac{3}{2}\cos 6\varphi + \frac{3}{2}\cos 10\varphi -\right.$$

$$\left. - \cos 12\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}\left[\frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{3}{4}\sin 4\varphi + \frac{3}{20}\sin 10\varphi\right]\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{27\pi a^3\sqrt{3}}{320};$$

б) $$|V^{OY}| = \pi\int\limits_0^{\pi/3} x^2(\varphi)\, y'(\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi a^3}{4}\int\limits_0^{\pi/3} (\sin 2\varphi + \sin 4\varphi)^2 \times$$

$$\times (2\sin 4\varphi - \sin 2\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}\int\limits_0^{\pi/3} \left(\frac{3}{2}\sin 2\varphi + 3\sin 4\varphi +\right.$$

$$\left. + 2\sin 6\varphi - \frac{3}{2}\sin 10\varphi - \sin 12\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\pi a^3}{8}\left[-\frac{3}{4}\cos 2\varphi - \frac{3}{4}\cos 4\varphi + \frac{3}{20}\cos 10\varphi\right]\Bigg|_0^{\pi/3} = \frac{\pi a^3\, 81}{40}.$$

З а м е ч а н и е. Есть формула, выражающая объем тела, полученного вращением криволинейного сектора $D: \{(r, \varphi),\ 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)\}$ относительно полярной оси без перехода к декартовой системе координат. Эту формулу предлагаем вывести самостоятельно (задача № 90 этой главы).

§ 4. ДЛИНА ДУГИ КРИВОЙ

О п р е д е л е н и е. *Дугой кривой* Г назовем образ отрезка $[T_0, T_1]$ при непрерывном биективном отображении $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [T_0, T_1]$ и обозначим $\Gamma: \{x(t), y(t), z(t), t \in [T_0, T_1]\}$.

Пусть $\tau: T_0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T_1$ — разбиение отрезка $[T_0, T_1]$. Каждой точке разбиения τ соответствует точка $M_k = (x(t_k), y(t_k), z(t_k))$, $0 \leqslant k \leqslant n$, на кривой Г. Через Γ_τ обозначим ломаную с вершинами $M_0, M_1, \ldots, M_n$, а ее длину обозначим через $|\Gamma_\tau|$.

О п р е д е л е н и е. *Длиной дуги* Г называется число

$$|\Gamma| = \sup_\tau |\Gamma_\tau|.$$

Заметим, что одна и та же линия может быть образом разных отрезков при разных биективных отображениях, т. е. может быть разными способами параметризована. Так, например, возьмем на декартовой плоскости XOY полуокружность с центром в начале координат радиусом 1, лежащую в верхней полуплоскости. Эту линию можно представить как отображение $y=\sqrt{1-x^2}$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, или как отображение $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, или как отображение $x=1-t$, $y=\sqrt{2t-t^2}$, $0\leqslant t\leqslant 2$, и т. д. Вопрос о том, когда разные параметрические задания кривой определяют одну и ту же линию, здесь не рассматривается. Ограничиваясь наглядными соображениями, отметим только, что длина дуги кривой есть ее внутренняя геометрическая характеристика, не зависящая от способа ее параметризации.

Пусть задана дуга кривой $\Gamma:\{x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\in[T_0,\ T_1]\}$ и функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0,\ T_1]$, тогда длина Γ вычисляется по формуле

$$|\Gamma|=\int_{T_0}^{T_1}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt. \tag{3}$$

Если хотя бы одна из функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ не является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[T_0,\ T_1]$, но все функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[T_0,\ T_1-\varepsilon]$ при любом ε, $0<\varepsilon<T_1-T_0$, функция $\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}$ имеет непрерывную первообразную на отрезке $[T_0,\ T_1]$, тогда как и при рассмотрении определенного интеграла можно воспользоваться формулой (3) для вычисления длины дуги кривой Γ, понимая интеграл в этой формуле как

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{T_0}^{T_1-\varepsilon}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt.$$

Пример 1. Рассмотрим полуокружность $\Gamma: x^2+y^2=1$, $y\geqslant 0$. Введем ее параметризацию следующим образом: $x=x$, $y=\sqrt{1-x^2}$. Тогда Γ есть биективный образ отрезка $[-1,\ 1]$. Функция $y=\sqrt{1-x^2}$ не является дифференцируемой в точках $x=1$ и $x=-1$, но на отрезке $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$ эта функция непрерывно дифференцируема для любого ε, $0<\varepsilon<1$. Так как $y_x'=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1+\varepsilon,\ 1-\varepsilon]$,

$$(x_x')^2+(y_x')^2=1+(y_x')^2,\quad \sqrt{1+(y')^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

и первообразная функции $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ — функция $\arcsin x$ — непрерывна на $[-1,\ 1]$, то длина данной кривой Γ вычисляется следующим образом:

$$|\Gamma|=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\,\Big|_{-1}^{1}=\pi.$$

Заметим, что можно рассмотреть такую параметризацию этой полуокружности $\Gamma: x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\in[t_0, t_1]$, что функции $x(t)$ и $y(t)$ будут непрерывно дифференцируемы на $[t_0, t_1]$, например $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0, \pi]$.

Приведем некоторые частные случаи формулы (3).

1. Если кривая Г лежит в плоскости XOY, т. е. $z(t)\equiv 0$, то

$$|\Gamma| = \int_{T_0}^{T_1} \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

2. Если кривая Г лежит в плоскости XOY и является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=y(x),\ x\in[a, b]$, то

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1+(y_x')^2}\,dx.$$

3. Если плоская кривая Г задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции

$$r=r(\varphi),\ \varphi\in[\varphi_0, \varphi_1],\ \text{то}\ |\Gamma| = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}\,d\varphi.$$

Если кривая Г замкнута, т. е. $x(T_0)=x(T_1),\ y(T_0)=y(T_1),\ z(T_0)=z(T_1)$, то Г есть биективный образ не отрезка $[T_0, T_1]$, а промежутка (T_0, T_1). Все рассуждения и формулы для вычисления длины данной этой замкнутой кривой остаются без изменения.

Пусть задана дуга кривой $\Gamma: x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\in[T_0, T_1]$, и функции $x(t),\ y(t),\ z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$. Рассмотрим функцию

$$s(t) = \int_{T_0}^{t} \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt \ —$$

длину части кривой Г от начальной точки $M_0=(x(T_0),\ y(T_0),\ z(T_0))$ до точки $M=(x(t),\ y(t),\ z(t))$. Дифференциал функции $s(t)$ называется *дифференциалом дуги кривой* Г и обозначается ds.

Если задана дуга кривой

$$\Gamma: x(t),\ y(t),\ z(t),\ t\in[T_0, T_1],$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[T_0, T_1]$, то

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt,\quad t\in[T_0, T_1].$$

Если кривая Г лежит в плоскости XOY, т. е. $z(t)\equiv 0$, то

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt.$$

Если кривая Г лежит в плоскости XOY и является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y=y(x)$, $x\in[a, b]$, то

$$ds=\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx,\ x\in[a, b].$$

Если плоская кривая Г задана в полярной системе координат как график непрерывно дифференцируемой функции $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\varphi_0, \varphi_1]$, то

$$ds=[r^2+(r_\varphi')^2]\,d\varphi.$$

Пример 2. Найдем длину дуги кривой $\Gamma: y=\operatorname{ch}x$ от точки $A(0, 1)$ до точки $B(b, \operatorname{ch}b)$.

Решение. Так как $y_x'=\operatorname{sh}x$, $1+(y_x')^2=1+\operatorname{sh}^2x$ и дуга Г является биективным отображением отрезка $[a, b]$, то

$$|\Gamma|=\int_0^b(1+\operatorname{sh}^2x)^{1/2}\,dx=\int_0^b\operatorname{ch}x\,dx=\operatorname{sh}x\Big|_0^b=\operatorname{sh}b.$$

Пример 3. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma: x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y,\quad 1\leqslant y\leqslant e.$$

Решение. Возьмем в качестве параметра переменную y. Тогда

$$x_y'=\frac{y}{2}-\frac{1}{2y};\ 1+(x_y')^2=1+\frac{1}{4}\left(y^2-2+\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)^2.$$

Так как для $y>1$ имеем $x_y'>0$, то отображение $y=y$, $x=x(y)$, $1\leqslant y\leqslant e$, биективно, поэтому

$$|\Gamma|=\frac{1}{2}\int_1^e\left(y+\frac{1}{y}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+\ln y\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

Пример 4. Найдем длину дуги кривой $\Gamma: x=a\cos^4t$, $y=a\sin^4t$, $a>0$.

Решение. Дуга Г является биективным отображением отрезка $[0, \pi/2]$. Так как

$$x'=-4a\cos^3t\sin t,\qquad y'=4a\sin^3t\cos t,$$

$$(x')^2+(y')^2=16a^2\cos^6t\sin^2t+16a^2\sin^6t\cos^2t=$$

$$=2a^2\sin^22t(1+\cos^22t),$$

то

$$|\Gamma| = a\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 2t}\,\sin 2t\,dt = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1+z^2}\,dz =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(z\sqrt{1+z^2}\right) + \ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\Big|_0^1 = a + \frac{a\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

Пример 5. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma: x = t\sin t, \quad y = t\cos t, \quad z = \frac{2t\cdot\sqrt{2t}}{3}$$

от точки $A(0, 0, 0)$ до точки $B(0, 2\pi, 8\pi\sqrt{\pi}/3)$.

Решение. Так как

$$x' = \sin t + t\cos t, \quad y' = \cos t - t\sin t, \quad z' = \sqrt{2t},$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (t+1)^2$$

и дуга Γ является биективным образом отрезка $[0, 2\pi]$, то

$$|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi}(t+1)\,dt = 2\pi^2 + 2\pi.$$

Пример 6. Найдем длину дуги кривой $\Gamma: r = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$.

Решение. Поскольку Γ — замкнутая кривая, она является биективным образом полуинтервала $[0, 2\pi)$. Так как

$$r'_\varphi = -a\sin\varphi, \quad r^2 + (r')^2 = a^2(2+2\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

то

$$|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi = 4a\int\limits_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Пример 7. Найдем длину дуги кривой

$$\Gamma: \varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right), \quad 1 \leqslant r \leqslant 5.$$

Решение. Здесь можно явно выразить зависимость $r = r(\varphi)$, однако в этом примере это приводит к громоздким вычислениям. Проще (в некоторых случаях единственно возможно) преобразовать подынтегральное выражение для вычисления $|\Gamma|$ так, чтобы оно непосредственно выражалось через функцию $\varphi(r)$, т. е. сделать замену $\varphi=\varphi(r)$. Тогда

$$\sqrt{r^2(\varphi)+(r'_\varphi)^2}\,d\varphi=\sqrt{r^2+\frac{1}{(\varphi'_r)^2}}\,\varphi'_r dr=\sqrt{r^2\cdot(\varphi')^2+1}\,(\operatorname{sign}\varphi')\,dr.$$

Для данной дуги кривой имеем

$$\varphi'_r=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\geqslant 0,\quad r^2(\varphi')^2+1=\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2.$$

Следовательно,

$$|\Gamma|=\int_1^5\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)dr=\left(\frac{r^2}{4}+\frac{1}{2}\ln r\right)\Bigg|_1^5=6+\frac{1}{2}\ln 5.$$

Пример 8. Найдем длину дуги кривой

$\Gamma: r=ue^{2u},\quad \varphi=u^2+2u,\quad 0\leqslant u\leqslant 2.$

Решение. В этом примере связь между полярными координатами r и φ точки M кривой Γ задана посредством параметра u. Преобразуем выражение $\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$ так, чтобы оно непосредственно выражалось через функции $r(u)$ и $\varphi(u)$, т. е. делаем замену $\varphi=\varphi(u)$. Тогда

$$\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi=\sqrt{r^2+\left(\frac{r'_u}{\varphi'_u}\right)^2}\cdot\varphi'_u\,du=$$

$$=\sqrt{r^2\cdot(\varphi'_u)^2+(r')^2}\,(\operatorname{sign}\varphi'_u)\,du.$$

Для данной кривой имеем

$$r'_u=e^{2u}(1+2u),\quad \varphi'_u=2u+2,$$

$$r^2\cdot(\varphi')^2+(r')^2=e^{4u}\cdot[4u^2(u^2+2u+1)+(1+4u+4u^2)]=$$

$$=e^{4u}(2u^2+2u+1)^2.$$

Следовательно,

$$|\Gamma|=\int_0^2 e^{2u}(2u^2+2u+1)\,du=\frac{1}{2}[e^{2u}(2u^2+1)]\,|_0^2=\frac{9e^4-1}{2};$$

§ 5. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Поверхности вращения составляют один из простейших классов поверхностей. Для таких поверхностей общее, весьма сложное, определение площади поверхности можно заменить более простым.

Пусть даны кривая $\Gamma: x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t);\ T_0\leqslant t\leqslant T_1$, $x\in C^1[T_0, T_1],\quad y\in C^1[T_0, T_1],\quad z\in C^1[T_0, T_1]$, и прямая l, являющаяся осью вращения. Обозначим через S поверхность, полученную вращением Γ вокруг оси l. Пусть $\tau: T_0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_k<<t_{k+1}<\ldots<\ldots<t_n=T_1$ — разбиение отрезка $[T_0, T_1]$; Γ_τ — ломаная, вписанная в Γ, соответствующая разбиению τ, S_τ — поверхность, полученная вращением Γ_τ вокруг l.

Обозначим через $\rho=\rho(M)$ расстояние от точки M до оси l. Отрезок $\gamma_k=[M_{k-1}, M_k]$ ломаной Γ_τ при вращении вокруг оси l образует поверхность S_k. В зависимости от угла, образованного отрезком γ_k с осью l, S_k является либо частью конической поверхности, либо частью цилиндрической поверхности, либо кольцом.

Если $|\gamma_k|$ — длина γ_k, а $|S_k|$ — площадь S_k, то

$$|S_k|=2\pi|\gamma_k|\rho(\tilde{M}_k)=$$
$$=2\pi\sqrt{(x_k(t)-x_{k-1}(t))^2+(y_k(t)-y_{k-1}(t))^2+(z_k(t)-z_{k-1}(t))^2}\times$$
$$\times\rho(\tilde{M}_k),$$

где $\tilde{M}_k$ — некоторая точка, лежащая на γ_k. Можно показать, что

$$|S_k|=2\pi\sqrt{[x_t'(t_k)]^2+[y_t'(t_k)]^2+[z_t'(t_k)]^2}\cdot\rho(M_k)\cdot(t_k-t_{k-1})+$$
$$+o(t_k-t_{k-1}).$$

Тогда для площади поверхности S_τ имеем

$$|S_\tau|=\sum_{k=1}^{n}|S_k|=2\pi\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[x'(t_k)]^2+[y'(t_k)]^2+[z'(t_k)]^2}\times$$
$$\times\rho(M_k)\cdot(t_k-t_{k-1})+o(1).$$

Определение. Площадью поверхности S называется число

$$|S|=\sup_\tau|S_\tau|.$$

В наших предположениях о гладкости функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ имеем формулу

$$|S|=2\pi\int_{T_0}^{T_1}\rho(t)\,ds,$$

где $\rho(t)$ есть расстояние от точки $M(x(t), y(t), z(t))$, лежащей на Γ, до оси вращения l, а ds — дифференциал дуги Γ.

Пример 1. Найдем площадь поверхности, полученной вращением кривой $\Gamma: y=\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi$, вокруг оси OX.

Решение. Введем в качестве параметра переменную x. Тогда для точек кривой Г получаем

$$\rho(t)=\rho(x)=y(x)=\sin x,$$

$$ds=\sqrt{1+[y'_x]^2}\,dx=\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Следовательно,

$$|S|=2\pi\int_0^{\pi}\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=2\pi\left(-\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+\cos^2 x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\pi}=2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

Пример 2. Найдем площадь поверхности, полученной вращением ломаной ABC, где $A=(1;\ 5)$, $B=(1;\ 2)$, $C=(6;\ 2)$ вокруг оси OX.

Решение. Запишем отрезки AB и BC в параметрическом виде:

$$AB: x=1,\quad y=t,\quad 2\leqslant t\leqslant 5,$$

$$BC: x=t,\quad y=2,\quad 1\leqslant t\leqslant 6.$$

Для отрезка AB имеем $\rho(t)=y(t)=t$,

$$ds=\sqrt{0+1^2}\,dt=dt.$$

Для отрезка BC имеем $\rho(t)=y(t)=2$,

$$ds=\sqrt{1^2+0}\,dt=dt.$$

Поэтому

$$|S|=|S_1|+|S_2|=2\pi\int_2^5 t\,dt+2\pi\int_1^6 2dt=$$

$$=2\pi\left(\frac{25}{2}-2\right)+2\pi\cdot 2\cdot(6-1)=41\pi.$$

Пример 3. Хорда AB окружности Г радиусом a находится на расстоянии b $(b<a)$ от центра окружности. Найдем площадь поверхности, полученной вращением вокруг этой хорды каждой из частей Γ_1 и Γ_2, на которые хорда делит окружность.

Решение. Введем декартову систему координат так, что ее начало совпадает с центром окружности, ось OX параллельна хорде AB (см. рис. 55) и пусть хорда лежит в верхней полуплоскости. Запишем уравнение окружности в параметрическом виде:

$x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $0\leqslant t<2\pi$. Тогда точка B соответствует значению $T_0=\arcsin\frac{b}{a}$, точка A — значению $T_1=\pi-T_0$. Имеем

$$\Gamma_1: x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad t\in[T_0,\ T_1],$$

$$\Gamma_2: x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad t\in[T_1;\ 2\pi+T_0].$$

Для Γ_1 имеем

$$\rho(t)=y-b=a\sin t-b,$$

$$ds=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a\,dt.$$

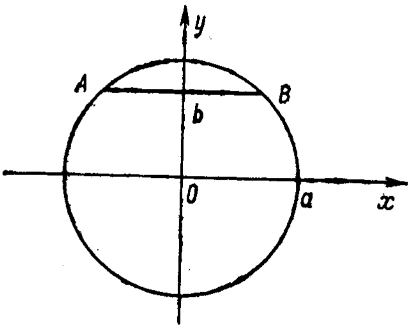

Рис. 55

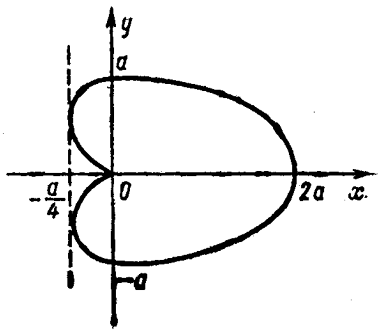

Рис. 56

Следовательно,

$$|S|=2\pi\int_{T_0}^{\pi-T_0}(a\sin t-b)\,a\,dt=-2\pi a^2\cos t\Big|_{T_0}^{\pi-T_0}-2ab\pi(\pi-2T_0)=$$

$$=4a^2\pi\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right)-2ab\pi^2+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}=$$

$$=4a\pi\sqrt{a^2-b^2}-2ab\pi^2+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}.$$

Для Γ_2 имеем $\rho(t)=b-y$; $ds=a\,dt$. Следовательно,

$$|S|=2\pi\int_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0}(b-a\sin t)\,a\,dt=2\pi ab(\pi+2T_0)+2a^2\pi\cos t\Big|_{\pi-T_0}^{2\pi+T_0}=$$

$$=2\pi^2 ab+4\pi ab\arcsin\frac{b}{a}+4\pi a\sqrt{a^2-b^2}.$$

Пример 4. Найдем площадь поверхности, полученной вращением кривой $\Gamma: r=a(1+\cos\varphi)$, $a>0$, относительно левой вертикальной касательной к этой кривой.

Решение. В декартовой системе координат, совмещенной с полярной, x и y запишутся как функции параметра φ:

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi,$$

т. е.

$$x(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, \quad y(\varphi) = a(1+\cos\varphi)\sin\varphi, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Для дифференциала дуги Г имеем выражение

$$ds = \sqrt{r^2(\varphi) + [r'_\varphi(\varphi)]^2}\, d\varphi = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi =$$
$$= 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi.$$

Левая вертикальная касательная к кривой Г проходит через точку $M(x(\varphi_0),\ y(\varphi_0))$, где $x(\varphi_0)$ — наименьшее из значений $x(\varphi_k)$ таких, что $x_\varphi'(\varphi_k) = 0$. Производная x_φ' равна $a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi)$, следовательно, x_φ' обращается в нуль в точках

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \ \varphi_3 = \pi, \ \varphi_4 = \frac{4\pi}{3}, \ \varphi_5 = 2\pi.$$

Наименьшее значение $x(\varphi_k)$ принимает при $k=2$ и $k=4$. Итак, левая вертикальная касательная имеет уравнение $x = -\frac{a}{4}$ (см. рис. 56). Расстояние $\rho(\varphi)$ от точки $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ до оси вращения $\left(\text{прямой } x = -\frac{a}{4}\right)$ равно $x(\varphi) + \frac{a}{4}$. Следовательно,

$$|S| = 2\pi\int_0^{2\pi}\left[a(1+\cos\varphi)\cos\varphi + \frac{a}{4}\right]2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi =$$
$$= 4\pi a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{5}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{5\varphi}{2}\right)d\varphi =$$
$$= 4\pi a^2\left(5\sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{84}{5}\pi a^2.$$

Пример 5. Пусть Г — часть кривой $y = 3x - x^3$, лежащая в правой полуплоскости ($x \geqslant 0$) выше прямой $y = x$. Найдем площадь поверхности, полученной вращением Г вокруг прямой $y = x$.

Решение. Из условия задачи следует, что

$$\Gamma: y = 3x - x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}.$$

Тогда

$$ds = \sqrt{1 + 9(1-x^2)^2}\, dx,$$
$$\rho(x) = \frac{|3x - x^3 - x|}{\sqrt{2}} = \frac{2x - x^3}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно,

$$|S|=\pi\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+9(1-x^2)^2}\,(2-x^2)\,x\,dx=$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+9t^2}\,(1-t)\,dt=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+9t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{6}\ln|3t+\sqrt{1+9t^2}|\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{6}\left(2\sqrt{10}+\ln(3+\sqrt{10})\right).$$

Пример 6. Область, ограниченная частью спирали $r=e^{\varphi}$, $\pi/6\leqslant\varphi\leqslant 7\pi/6$, и прямой, проходящей через концевые точки спирали, вращается вокруг этой прямой. Найти объем и площадь поверхности полученного тела (см. рис. 57).

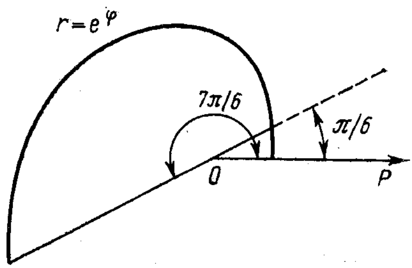

Рис. 57

Решение. Выберем декартову систему координат так, чтобы начало координат совпало с полюсом, положительная полуось OX с лучом $\varphi=\pi/6$. Тогда

$$x=r\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\cos(\varphi-\pi/6)=e^{\varphi-\pi/6}\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$y=r\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)\sin(\varphi-\pi/6)=e^{\varphi-\pi/6}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right).$$

Найдем ds по формуле

$$ds=\sqrt{r^2(\varphi)+(r'_{\varphi})^2}\,d\varphi=e^{\varphi}\cdot\sqrt{2}\,d\varphi.$$

Так как осью вращения является ось OX, то

$$\rho(\varphi)=|y(\varphi)|=e^{\varphi-\pi/6}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right),$$

следовательно,

$$|S|=2\pi\int_{\pi/6}^{7\pi/6}\sqrt{2}\,e^{2\varphi+\pi/6}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)d\varphi=2\pi\sqrt{2}\int_0^{\pi}e^{2t+\pi/6}\sin t\,dt=$$

$$=2\pi\sqrt{2}\,\frac{2\sin t-\cos t}{5}\,e^{2t}\Big|_0^{\pi}=e^{\pi/6}\cdot 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{1}{5}(e^{2\pi}+1).$$

Объем тела вычисляется по формуле

$$|V^{Ox}| = -\pi \int_{\pi/6}^{7\pi/6} y^2(\varphi)\, x'_\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\pi \int_{\pi/6}^{7\pi/6} e^{2\varphi - \pi/3} \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) e^{\varphi - \frac{\pi}{6}} \left(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right)\right) d\varphi =$$

$$= \pi \int_0^\pi e^{3t} (\sin^3 t - \sin^2 t \cos t)\, dt = \pi \int_0^\pi e^{3t} \left(\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\sin 3t + \frac{1}{4}\cos 3t\right) dt = \left(\pi e^{3t} \frac{\frac{9}{4}\sin t - \frac{3}{4}\cos t - \frac{1}{4}\cos t - \frac{3}{4}\sin t}{10} + \right.$$

$$\left. + \pi e^{3t} \frac{-\frac{3}{4}\sin 3t + \frac{3}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\sin 3t}{18}\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{10}(e^{3\pi} + 1) - \frac{1}{12}(e^{3\pi} + 1)\right).$$

Задачи

Вычислить:

1. $\int_0^{2\pi} \sin^4 x dx.$

2. $\int_{-2\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{(4+x^2)^2}.$

3. $\int_2^{8/3} \frac{xdx}{(x-3)^2 \sqrt{89 - 60x + 10x^2}}.$

4. $\int_2^{5/2} \frac{dx}{(x^2 - 8x + 15)\sqrt{6x - x^2 - 5}}.$

5. $\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx.$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$

7. $\int_{-2a}^{-a} \frac{dx}{x(\sqrt{3}\,a + \sqrt{x^2 + a^2})}.$

8. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x}.$

9. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}{\sin^{10} x + 6\cos^{10} x} dx.$

10. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + \cos^2 x}.$

11. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

12. $\int_0^3 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

13. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg}^2 x dx$.

14. $\int\limits_0^1 \cos^2 (\ln x)\, dx$.

15. $\int\limits_{-1}^1 \arcsin^2 x dx$.

16. $\int\limits_{-1}^1 \cos x \ln (x+\sqrt{1+x^2})\, dx$.

17. $\int\limits_{0,1}^{10} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$.

18. $\int\limits_{1/2}^{2} \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^8}}\, dx$.

Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в прямоугольных координатах *:

19. $y=x^2e^{-x}$, $y=0$, $x=2$.

20. $y=a\sin x$, $y=a\cos x$.

21. $y=x\ln^2 x$, $y=x\ln x$.

22. $y=\frac{2a}{3}\cos x$, $y=a\operatorname{tg} x$, $x=0$.

23. $y=x^4-4x^3+4x^2$, $y=\cos \pi x-1$.

24. $y=\frac{2a^3}{a^2+x^2}$, $y=\frac{4a}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\frac{x}{a}\right|$.

25. $y^2=x^3-x^4$.

26. $x^3=x^2-y^2$.

27. $a^2y^4=x^4(a^2-x^2)$.

28. $y=x$, $y=-x$, $-y^2+2x^2=1$.

29. $x^3=(x-y)^2\cdot a$, $y=0$.

30. $x^2+4y^2=8a^2$, $x^2-3y^2=a^2$ $(x\geqslant a)$.

31. $y^3-y=x$, $y=-(1+x)^2$, $y=0$.

32. $y^3-y=x$, $y=-(4+x)^2$, $y=0$, $y=-1$.

33. $x=\cos \pi y$, $4y^2=3(x+3)$.

34. Найти площадь каждой из частей, на которые парабола $y^2=a(a-x)$ разбивает круг $x^2+y^2=a^2$.

35. Найти площадь области, заключенной между параболой $y=x^2-2x+3$, касательной к ней в точке $M(2, 3)$, и осью OY.

Найти площадь области, ограниченной кривой, заданной параметрически **.

36. $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

37. $x=\frac{t}{3}(6-t)$, $y=\frac{t^2}{8}(6-t)$.

38. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ (эллипс).

39. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ (астроида).

---

* Замечание. Всюду в этом разделе значения буквенных параметров считаются положительными.

** Замечание. Если $y=tx$, то $y_t'x-x_t'y=x^2(t)$.

40. $x = a\sin t, \quad y = a\sin 2t$
41. $x = a\cos 3t, \quad y = a\sin t$ } (кривые Лиссажу).

42. $x = \dfrac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}, \quad y = \dfrac{t\sqrt{t}}{(1+t^2)^2}$.

43. $x = a\cos t, \quad y = \dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Привести уравнение к параметрическому виду и найти площадь области, ограниченной петлей кривой:

44. $x^3 + y^3 = axy$.

45. $(x+y)^3 = axy$.

46. $x^4 = axy^2 + ay^3$.

47. $x^5 + y^5 = ax^2y^2$.

Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными в полярных координатах:

48. $r = a\cos 5\varphi$.

49. $r = a\sin 4\varphi$.

50. $r = a(1 - \sin\varphi)$.

51. $r = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $\varphi = \pi/4$.

52. $r = a(2 - \cos\varphi)$.

53. $r^2 = a^2\cos 4\varphi$.

54. $r = 2\varphi$, $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, $\varphi = 0$.

55. $r = \dfrac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$.

56. $r = (1 + \sin^2 2\varphi)a$.

57. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ и находящейся внутри круга $r = a/\sqrt{2}$.

58. Найти площадь области, ограниченной кривой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и лежащей вне кривой $r = 3a\cos\varphi$.

59. Найти сумму площадей областей, ограниченных кривой $r = a = \cos 3\varphi$ и лежащих вне круга $r = a/2$.

Перейти к полярным координатам и найти площадь области, ограниченной кривой:

60. $x^4 + y^4 = a^2xy$.

61. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$, $M(a/2,\ a/2) \in S$,

62. $x^4 + y^4 = a^2x^2$.

63. $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = 2ay$, $M(0,\ 3a/2) \in S$.

64. $(x^2 + y^2)^3 = ax^4y$.

65. $(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2$.

66. $(x^6 + y^6) = a^2(x^4 + y^4)$.

67. $x^6 + y^6 = a^2x^4$.

68. Найти площадь области, являющейся пересечением областей, ограниченных кривыми $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и

$(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.

69. Найти площадь области, лежащей между кривыми

$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ и $(x^2+y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$.

70. Найти площадь области, расположенной в первом квадранте, ограниченной кривой $r^2 = \dfrac{8}{3}\sin^2 2\varphi$ и лежащей вне кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ (полярная и декартова системы совмещены).

71. Найти площадь области, лежащей между кривыми

$x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ и $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной линиями:

72. $y=\cos x$, $y=2\cos x$, $x=\pm\pi/2$

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

73. $y=e^x-1$, $y=2$, $x=0$.

а) вокруг оси OY; б) вокруг прямой $y=2$.

74. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=0$, $x=\pm 1$

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси симметрии; в) относительно прямой $y=1$.

75. $y=\sin x$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$

а) вокруг прямой $y=-1$; б) вокруг прямой $y=1$; в) вокруг прямой $x=-1$.

76. Найти объем тела, полученного при вращении круга радиусом a относительно прямой, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстоянии b $(b>a)$.

77. Дан круг радиусом a и прямая, лежащая в плоскости круга на расстоянии b от центра $(0<b<a)$. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг этой прямой каждой из частей круга, на которые его делит данная прямая.

78. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^3-y=x$, $x=0$ а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

79. Найти объем тела, полученного при вращении параболического сектора с основанием $2a$ и высотой H а) вокруг основания; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг касательной, проведенной через вершину сектора.

80. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y=x(3-x)$, $y=x$: а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY; в) вокруг прямой $y=x$.

81. Найти объем тела, полученного при вращении части эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, лежащего между прямыми $y=h$ и $y=-h$ $(0<h<b)$ вокруг вертикальной оси симметрии.

82. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $x^3=y^2$, $x=0$, $y=-1/27$, $y=8$ вокруг оси OY.

83. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, являющейся общей частью кругов $x^2+y^2=2ax$ и $x^2+y^2=2ay$:

а) вокруг оси OX, б) вокруг прямой $y=x$.

Найти объем тела, образованного при вращении области ограниченной линиями:

84. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$

а) вокруг оси OX; б) вокруг прямой $x=a$.

85. $x=a\sin t$, $y=a\sin 2t$

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY; в) вокруг прямой $x=a$; г) вокруг прямой $y=a$.

86. $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $y=0$
а) вокруг оси OX; б) вокруг оси симметрии; в) вокруг прямой, $y=2a$.

87. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой
$x=2a\sin 2t$, $y=2a\cos t$
а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

88. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной петлей кривой
$x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$
а) вокруг прямой $x=a$; б) вокруг оси OX;
в) вокруг прямой $x=-a$.

89. Найти объем тела, полученного при вращении области, ограниченной кривой $r=a(1+\cos\varphi)$ вокруг левой вертикальной касательной к этой кривой.

90. Доказать, что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси области $0\leqslant\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\leqslant\pi$, $0\leqslant r\leqslant r(\varphi)$ (φ и r — полярные координаты), равен

$$V=\frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Найти объем тела, образованного вращением области, ограниченной кривой, заданной в полярных координатах:

91. $r=a(1+\sin^2\varphi)$ вокруг полярной оси.

92. $r=a\cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

93. $r=a|\sin 2\varphi|$ вокруг полярной оси.

94. $r=ae^{2\varphi}$, $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ вокруг полярной оси.

Найти длины дуг следующих кривых:

95. $y=\ln x$, $3/4\leqslant x\leqslant 12/5$.

96. $y=1-\ln\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi/3$.

97. $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant 1/2$.

98. $y=\arccos e^{-x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$.

99. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, $0\leqslant x\leqslant 7/9$.

100. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x$, $0\leqslant x\leqslant 8/9$.

101. $y=\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

102. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$.

103. $\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

104. $x=\frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{a}}-\frac{1}{2}\sqrt{ay}$ от точки $A(0,0)$ до точки $B(a/6,a)$.

105. $x=\frac{1}{3}a+\frac{a^2}{2y}+\frac{y^3}{6a^2}$ от точки $A(a, a)$ до точки $B(5a, 3a)$.

106. Найти длину полукубической параболы $y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$, заключенной внутри параболы $y^2=\frac{x}{3}$.

107. Найти длину границы области, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=2\sqrt{x}$, $x=0$, $y=1$.

108. Найти длину границы области, ограниченной линиями $y=2\sqrt{x}$, $y=2\sqrt[3]{x^2}$.

109. Найти длину линии

$$y(x)=\int_1^x \sqrt{t^4-1}\,dt, \quad 1\leqslant x\leqslant 2.$$

110. Найти длину линии

$$y(x)=\int_0^x \sqrt{\cos 2t}\,dt, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi/4.$$

111. Найти длину линии

$$y(x)=\int_0^x \sqrt{\sin 2t}\,dt, \quad 0\leqslant x\leqslant \pi/4.$$

Найти длины дуг следующих кривых, заданных параметрически:

112. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

113. $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$, $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

114. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$.

115. $x=\ln(1+t^2)$, $y=2\operatorname{arctg} t-2t+8$ от точки $A(0, 8)$ до точки $B(\ln 2, \pi/2+6)$.

116. $x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t$, $y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

117. $x=6at^5$, $y=5at(1-t^8)$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(6a, 0)$.

118. $x=2a\operatorname{sh}^3 t$, $y=3a\operatorname{ch} t$ от точки $A(0, 3a)$ до точки $B(x_0, y_0)$.

119. $x=a\cos t$, $y=-2a\ln\sin t$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(x_0, y_0)$.

120. $x=\frac{a}{2}\sin t(1+2\cos^2 t)$, $y=a\cos^3 t$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(a/2, 0)$.

121. $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ от точки $A(0, a)$ до точки $B(x_0, y_0)$.

122. $x=2a\cos t$, $y=2a\sin t$, $z=at$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

123. $x=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $y=-\frac{4}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3+t^2$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

124. $x=e^t(\cos t+\sin t)$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$, $z=ht$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

125. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ z=a\cos 2t.$

126. $x=a(t\cos t-\sin t),\ y=a(t\sin t+\cos t),\ z=ht,\ 0\leqslant t\leqslant t_0.$

Найти длины дуг кривых, заданных в полярных координатах:

127. $r=\cos^3\dfrac{\varphi}{3},\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/2.$

128. $r=a\cos^4(\varphi/4).$

129. $r=\varphi^2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$

130. $\varphi=\dfrac{r}{2}\sqrt{r^2+2}+\ln\left|r+\sqrt{r^2+2}\right|,\ 0\leqslant r\leqslant 2.$

131. $\varphi=\ln r+r,\ 1\leqslant r\leqslant 5.$

132. Найти длину дуги спирали Архимеда $r=a\varphi$, находящейся внутри круга радиусом $2a\pi$.

133. Найти длину дуги гиперболической спирали $r=\dfrac{\pi a}{\varphi}$, $\varphi>0$, находящейся внутри кольца $a/4\leqslant r\leqslant 2a$.

134. Найти длину границы областей, ограниченных кривыми

$$r=\frac{a}{4\sin^2\dfrac{\varphi}{2}} \text{ и } r=a(1+\cos\varphi).$$

Найти длину дуги кривой, заданной в полярной системе координат:

135. $r=a\cos^2 u,\quad \varphi=2(u-\operatorname{tg} u)$ от точки $A(a,0)$ до точки $B(a/2,\ \pi/2-2)$.

136. $r=a(1+\operatorname{tg} u),\quad \varphi=\operatorname{tg} u-\ln(1+\operatorname{tg} u)$ от точки $A(a,0)$ до точки $B(r_0,\varphi_0)$.

Найти площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых:

137. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\quad (a\geqslant b)$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

138. $y=\dfrac{1}{x},\quad 0<a\leqslant x\leqslant b$ вокруг оси OX.

139. $y^2+4x=2\ln y,\ 1\leqslant y\leqslant 2$ вокруг оси OX.

140. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением окружности радиусом a относительно прямой, лежащей в ее плоскости и отстоящей от центра на расстояние b $(b>a)$.

141. Найти площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси OX петли кривой $3ay^2=x(a-x)^2$.

142. Найти полную площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси OX области, ограниченной линиями $y^2=2x$ и $2x=3$.

Найти площади поверхностей тел, образованных вращением кривой, заданной параметрически:

143. $x=e^t\sin t,\ y=e^t\cos t,\ 0\leqslant t\leqslant\pi/2,$
вокруг оси OX.

144. $x=a(t+\sin t)$, $y=a(1+\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY; в) вокруг оси симметрии; г) вокруг прямой $y=2a$.

145. $x=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$, $\pi/2\leqslant t\leqslant 3\pi/4$, вокруг оси OX.

146. $x=2a\sin^2 t$, $y=2a\cos t$ вокруг оси OX.

147. $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$ вокруг оси OX.

Найти площади поверхностей, образованных вращением дуги AB кривой:

148. $x=at^2$, $y=\frac{1}{3}at(3-t^2)$, $A(0,0)$, $B(3a,0)$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

149. $x=\frac{9}{5}at^4$, $y=\frac{6}{25}a(5t^3-3t^5)$, $A(0, 0)$, $B(5a, 0)$;

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

150. $x=2at^3$, $y=\frac{3}{4}a(2t^2-t^4)$,

$A(0,0)$, $B(4a\sqrt{2},0)$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

151. Найти площадь поверхности тела, полученного при вращении области, лежащей внутри окружности $r=2a\sin\varphi$ и вне окружности $r=a$, относительно осей координат.

152. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением области, ограниченной кривой

$r^2=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi$ $(a>b)$,

а) вокруг оси OX; б) вокруг оси OY.

Ответы

1. $\frac{3\pi}{4}$. **2.** $\frac{7}{192}\pi$. **3.** $6-\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$. **4.** $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{15}+4}-\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. **5.** $\frac{3}{8}\sqrt{2}+\frac{7}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{8}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}}{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}}$.

6. $\frac{14}{5}\sqrt{3}$. **7.** $-\frac{\pi}{12a}-\frac{\sqrt{3}}{4a}\ln 3$. **8.** $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. **9.** $\frac{\pi}{5\sqrt{6}}$. **10.** $\frac{\pi}{4\sqrt{5}}$.

11. 4π. **12.** $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **13.** $-\frac{\pi}{16}(4-\pi)+\frac{1}{2}\ln 2$. **14.** $\frac{3}{5}$.

15. $\frac{\pi^2}{2}-4$. **16.** 0. **17.** 0. **18.** 0. **19.** $2-\frac{10}{e^2}$. **20.** $2a\sqrt{2}$. **21.** 1.

22. $a\left(\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **23.** $\frac{46}{15}$. **24.** $a^2\left(\pi-2+\frac{4}{\pi}\ln 2\right)$. **25.** $\frac{\pi}{8}$.

26. $\frac{8}{15}$. 27. $\frac{8}{5}a^2$. 28. $\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$. 29. $\frac{a^2}{10}$. 30. $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right)$. 31. $\frac{7}{12}$. 32. $\frac{43}{12}$. 33. $6-\frac{2}{\pi}$. 34. $S_1=S_2=$ $=\frac{\pi a^2}{4}-\frac{2}{3}a^2$, $S_3=\frac{\pi a^2}{2}+\frac{4}{3}a^2$. 35. $\frac{8}{3}$. 36. $\frac{72}{5}\sqrt{3}$. 37. $\frac{27}{5}$.

38. πab. 39. $\frac{8}{3}\pi a^2$. 40. $\frac{8}{3}a^2$. 41. $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. 42. $\frac{1}{12}$. 43. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}(16-$ $-9\sqrt{3})$. 44. $\frac{a^2}{6}$. 45. $\frac{a^2}{60}$. 46. $\frac{a^2}{210}$. 47. $\frac{a^2}{10}$. 48. $\frac{\pi a^2}{4}$. 49. $\frac{\pi a^2}{4}$.

50. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 51. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. 52. $\frac{9\pi a^2}{2}$. 53. a^2. 54. $\frac{16}{3}\pi^3$. 55. $\frac{a^2}{2}(4-\pi)$.

56. $\frac{19}{8}\pi a^2$. 57. $\frac{a^2}{6}(\pi+6-3\sqrt{3})$. 58. $\frac{\pi a^2}{4}$. 59. $\frac{\pi a^2}{12}+\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 60. $\frac{\pi a^2}{2}$.

61. $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$. 62. $\frac{\pi a^2}{\sqrt{2}}$. 63. $\frac{\pi a^2}{3}+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. 64. $\frac{7\pi a^2}{512}$. 65. $\frac{a^2\pi}{8}$.

66. $\frac{2}{3}\pi a^2$. 67. $\frac{\pi a^2}{2}$. 68. $a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 69. $3a^2$. 70. $\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 71. $\pi a^2\left(\sqrt{2}-\frac{3}{8}\right)$. 72. а) $\frac{3\pi^2}{2}$; б) $\pi^2-2\pi$.

73. а) $\pi(3\ln^2 3-6\ln 3+4)$; б) $\pi(9\ln 3-8)$. 74. а) $\frac{\pi}{4}(2+\pi)$; б) $\pi\ln 2$; в) $\frac{3\pi^2}{4}-\frac{\pi}{2}$. 75. а) $\frac{\pi^2}{2}+4\pi$; б) $4\pi-\pi^2$; в) $2\pi^2+4\pi$. 76. $2\pi^2a^2b$.

77. $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2-b^2}\,(2a^2+b^2)-2\pi a^2b\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2-b^2}\,(2a^2+$ $+b^2)+\pi^2a^2b+2\pi a^2b\arcsin\frac{b}{a}$. 78. а) $\frac{8\pi}{15}$; б) $\frac{16\pi}{105}$. 79. а) $\frac{16}{15}\pi aH^2$; б) $\frac{\pi a^2H}{2}$; в) $\frac{8}{5}\pi aH^2$. 80. а) $\frac{56\pi}{15}$; б) $\frac{8\pi}{3}$; в) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{15}$. 81. $\frac{2\pi a^2h(3b^2-h^2)}{3b^2}$.

82. $\frac{3\pi}{7}\left(2^7-\frac{1}{3^7}\right)$. 83. а) $\frac{\pi a^3}{2}(\pi-2)$; б) $\pi a^3\sqrt{2}\left(\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$.

84. а) $\frac{32\pi a^3}{105}$; б) $\frac{3\pi^2a^3}{4}$. 85. а) $\frac{16}{15}\pi a^3$; б) $\frac{\pi^2a^3}{2}$; в) $\frac{16\pi a^3}{3}$; г) $\frac{16}{3}\pi a^3$.

86. а) π^2a^3; б) $2\pi a^3\left(\frac{\pi^2}{4}-\frac{4}{3}\right)$; в) $3\pi^2a^3$. 87. а) $4a^3\pi^2$; б) $\frac{128}{15}a^3\pi$.

88. $V_{Ox}=\frac{11\pi a^3}{32}$, $V_{x=a}=\frac{\pi a^3\sqrt{3}\cdot 118}{35}$, $V_{x=-a}=\frac{22\pi a^3\sqrt{3}}{7}$. 89. $\frac{13\pi^2a^3}{4}$. Указание. Левая вертикальная касательная имеет уравнение $x=\varphi(x_0)$, где $x(\varphi_0)=\min x(\varphi)$ на $[0,\pi]$. 91. $\frac{236}{35}\pi a^3$. 92. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 93. $\frac{64}{105}\pi a^3$.

94. $\frac{2}{111}\pi a^3(e^{6\pi}+1)$. 95. $\frac{27}{20}+\ln 2$. 96. $\ln(2+\sqrt{3})$. 97. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 98. $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. 99. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 100. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. 101. 2. 102. $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}+\frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{2/3}}+\ln\frac{b(\sqrt{a^2+b^2}+b)}{a(\sqrt{a^2+a^2}-a)}$. Указание. Перейти к параметрическому заданию кривой. 103. $\frac{28}{3}a$. Указание. Перейти к параметрическому заданию кривой. 104. $\frac{7a}{6}$. 105. $\frac{14}{3}a$. 106. $\frac{\sqrt{2}}{9}(5^{3/2}-2^{3/2})$. 107. $\sqrt{1+e^2}+e-2+2\ln(1+\sqrt{2})+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)$. 108. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})+\frac{2}{27}(10^{3/2}-1)$. 109. $\frac{7}{3}$. 110. 1. 111. 1. 112. $6a$. 113. $\frac{5}{8}a\left(2-\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)$. 114. $2a\sqrt{5}+a\ln(2+\sqrt{5})$. 115. $2\sqrt{2}-2$. 116. 1/3. 117. $10a$. 118. $2a\operatorname{ch}^3 t_0-3a\operatorname{ch}t_0+a$, $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$. 119. $a\cos t_0+a\ln\left|\frac{\cos t_0-1}{\cos t_0+1}\right|$, $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$.

122. $2a\sqrt{5}\pi$. 123. $\frac{1}{21}(27\sqrt{3}-2\sqrt{6})$. 124. $\sqrt{h^2+4e^{4\pi}}-\sqrt{h^2+4}+h\ln\left(\frac{\sqrt{4e^{4\pi}+h^2}-h}{\sqrt{4+h^2}-h}\right)-2\pi$. 125. $10a$. 126. $\frac{t_0}{2}\sqrt{a^2t_0^2+h^2}+\frac{h^2}{2a}\ln\left|at_0+\sqrt{a^2t^2+h^2}\right|-\frac{h^2}{2a}\ln h$. 127. $\frac{a}{8}(2\pi+3\sqrt{3})$. 128. $\frac{16a}{3}$. 129. $\frac{1}{3}\times[(\pi^2+4)^{3/2}-8]$. 130. $\frac{14}{3}$. 131. $3\sqrt{37}-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{6+\sqrt{37}}{2+\sqrt{5}}\right|$.

132. $a(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1})$. 133. $\pi a\times\ln\left(\frac{8\pi+2\sqrt{16\pi^2+1}}{\pi+\sqrt{\pi^2+4}}\right)+\frac{a}{4}(\sqrt{16\pi^2+64}-\sqrt{1+16\pi^2})$. 134. $L_1=2(l_2+l_3+l_4)$; $L_2=l_1+l_3$; $L_3=2(l_4+l_5)$, $l_1=4\sqrt{2}\,a\sin\frac{\pi}{8}$, $l_2=4a\sin\frac{\pi}{8}$, $l_3=\frac{a}{2}\left(-\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{2\sin^2\frac{3\pi}{8}}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right|+\frac{\cos\frac{\pi}{8}}{2\sin^2\pi/8}-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}\right|\right)$, $l_4=4a\left(1-\sin\frac{3\pi}{8}\right)$, $l_5=\frac{a}{2}\left(\frac{\cos\frac{3\pi}{8}}{2\sin^2\frac{3\pi}{8}}-\right.$

$-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right|\Bigg)$. **135.** $2a\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **136.** $a\left(\frac{\sin\varphi_0}{2\cos^2\varphi_0}+\frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)$. **137.** а) $2\pi b^2+2\pi ab\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$, б) $2\pi a^2+$ $+\frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\ln\left[\frac{a}{b}(1+\varepsilon)\right]$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. **138.** $2\pi\ln\left(\frac{b^2+\sqrt{1+b^2}}{a^2+\sqrt{1+a^2}}\right)+$ $+2\pi\left(\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{b^2}}\right)$. **139.** $\frac{3\pi}{16}[9-8\ln 2]$. **140.** $4\pi^2ab$.
141. $\frac{\pi a^2}{3}$. **142.** $3\pi+\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\left[\left(\frac{7}{2}\right)^{3/2}-2^{3/2}\right]$. **143.** $\frac{2\sqrt{2}\,\pi}{5}(e^\pi-2)$.
144. а) $\frac{32}{3}\pi a^2$; б) $16\pi a^2$; в) $\frac{32}{3}\pi a^2$; г) $\frac{32\pi a^2}{3}$. **145.** $2\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
146. $\frac{2\pi a^2}{3}(5^{3/2}-1)$. **147.** $\frac{128\pi a^2}{5}$. **148.** а) $3\pi a^2$; б) $\frac{28\pi a^2\sqrt{3}}{5}$.
149. а) $\frac{10}{3}\pi a^2$; б) $\frac{1240}{63}\sqrt{\frac{5}{3}}\cdot\pi a^2$. **150.** а) $6\pi a^2$; б) $\frac{816}{35}\sqrt{2}\,\pi a^2$.
151. а) $\pi a^2\left(\frac{8}{3}\pi+4\sqrt{3}\right)$; б) $4\pi a^2$. **152.** а) $2\pi\left(a^2+\frac{b^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\times\right.$ $\left.\times\ln\frac{\sqrt{a^4-b^4}+a^2}{b^2}\right)$; б) $2\pi\left(b^2+\frac{a^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\arcsin\frac{\sqrt{a^4-b^4}}{a^2}\right)$.

Глава III
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Точкой x в пространстве R^m называется упорядоченный набор чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Величина $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_i^2}$ называется *нормой* $x\in R^m$ и обозначается $\|x\|$; если нужно уточнить, в каком пространстве находится x, пишут $\|x\|_{R^m}$, но обычно индекс опускается, так как из контекста ясно, о каком пространстве идет речь. Так как

$$\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}x_i^2}\leqslant\sqrt{m}\max_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|,$$

то условие $\|x\|\to 0$ эквивалентно условию $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|x_i|\to 0$.

Норма в пространстве R^m играет ту же роль, что и абсолютная величина для точек числовой прямой. Расстояние от x до нуля — $d(x, 0)$ — равно норме $x : d(x, 0) = \|x\|$; расстояние между точками x и y равно норме $(x - y) : d(x, y) = \|x - y\|$. В дальнейшем расстояние между точками x и y записываем в виде $\|x - y\|$.

Отображение $f : E \to R^n$, $E \subset R^m$, записывается в координатной форме $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i : E \to R^1$, $i = 1, 2, \ldots, n$*. Отображение $f : E \to R$, $E \subset R^m$, назовем функцией (действительнозначной функцией) точки $x \in R^m$: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ или функцией m переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Исследование многих свойств отображения $f : E \to R^n$, $E \subset R^m$, сводится к исследованию этих свойств его координатных функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, $f_i : E \to R^1$. Поэтому в настоящей главе более подробно анализируются функции

$$f : E \to R, \ E \subset R^m.$$

Определение. Пусть $f : E \to R^n$, $E \subset R^m$, и M_0 — предельная точка E. Точка $A \in R^n$ называется *пределом* отображения $f(x)$ при $x \to M_0$: $\lim\limits_{x \to M_0} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in E$, удовлетворяющего условию $0 < \|x - M_0\|_{R^m} < \delta$, выполняется $\|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon$. Запишем это определение с использованием символики:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in E, \ 0 < \|x - M_0\|_{R^m} < \delta \Rightarrow \|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon.$$

В терминах покоординатной сходимости утверждение $\lim\limits_{x \to M_0} f(x) = A, M_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x^0_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$", записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), \quad x \in E,$$

$$0 < |x_i - x_i^0| < \delta \ (i = 1, 2, \ldots, m) \Rightarrow \|f(x) - A\|_{R^n} < \varepsilon.$$

Отображение $f : E \to R^n$, $E \subset R^m$, где в координатной записи $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_i : E \to R$ имеет точку $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пределом при $x \to M_0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to M_0} f_i(x) = a_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Критерий Коши. Пусть $f : E \to R^n$, $E \subset R^m$, и M_0 — предельная точка E. Предел $\lim\limits_{x \to M_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x_1 \in E$ и $x_2 \in E$ из неравенств $0 < \|M_0 - x_1\|_{R^m} < \delta$, $0 < \|M_0 - x_2\|_{R^m} < \delta$ следует неравенство

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

* В дальнейшем пространство R^1 будем обозначать просто R.

С использованием символов это записывается так:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1 \in E, \ \forall x_2 \in E, \ 0 < \|M_0 - x_1\| < \delta,$$

$$0 < \|M_0 - x_2\| < \delta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon.$$

Определение. Пусть $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, и множество $U \subset \subset R^m$. Тогда *колебанием отображения* f на множестве U называется $\sup\limits_{x_1, x_2 \in U \cap E} \|f(x_1) - f(x_2)\|$ и обозначается $\omega_U(f)$. Используя понятие колебания отображения $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, на множестве $U \subset R^m$, критерий Коши существования предела формулируется так: пусть $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, и M_0 — предельная точка E. Предел $\lim\limits_{x \to M_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > > 0$ существует окрестность $U = U(M_0)$ точки M_0 такая, что $\omega_{\mathring{U}}(f) < \varepsilon$, где $\mathring{U} = U \setminus \{M_0\}$.

Вычисление предела функции многих переменных часто сводится к вычислению предела функции одного переменного либо с помощью оценок, либо заменой переменных.

Пример 1. Найдем предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Решение. Условие $(x, y) \to (0, 0)$ эквивалентно условию $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$. Так как

$$|\sin xy| \leqslant |xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

то

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Пример 2. Найдем предел $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \dfrac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}}$.

Решение. Так как $z = x + y \to 1$, то $\ln z \sim z - 1 = (x + y - 1)$. Введем новые переменные r и t: $x = 1 + r\cos t$, $y = r \sin t$, тогда условие $(x, y) \to (1, 0)$ эквивалентно условию $r \to 0$ и

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{\ln^2(x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} \frac{(x + y - 1)^2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} =$$

$$= \lim_{r \to 0} \frac{r^2 (\cos t + \sin t)^2}{r} = 0.$$

Предел функции $f(x)=f(x_1,\dots,x_m)$ при условии $x_k\to\infty$ $(x_k\to+\infty;\ x_k\to-\infty)$ и $x_i\to x_i^0$, $i=1, 2, \dots, m$, $i\neq k$ рассматривается как предел функции $f\left(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \frac{1}{t}, x_{k+1}, \dots, x_m\right)$ при $t\to 0$ $(t\to 0+,\ t\to 0-)$ и $x_i\to x_i^0$, $i=1, 2,\dots,m$, $i\neq k$. Если бесконечно большой является не одна координата точки x, а несколько, то аналогично все эти координаты заменяются переменными $\frac{1}{t_1}$, $\frac{1}{t_2}$ и т. д.

Пример 3. Найдем предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

Решение. Обозначим $x=1/t$, тогда условие $x\to\infty$ $y\to 3$ эквивалентно условию $(t, y)\to(0, 3)$, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{(t,y)\to(0,3)}\frac{\ln(1+t)}{t(1+ty)}=\lim_{(t,y)\to(0,3)}\frac{1}{1+ty}=1$$

и

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\frac{x^2}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e.$$

Определение. Пусть M_0 предельная точка E и $M_0\in E$. Отображение $f:E\to R^n$, $E\subset R^m$, непрерывно в точке M_0, если

$$\lim_{x\to M_0}f(x)=f(M_0).$$

Отображение $f:E\to R^n$, $E\subset R^m$, где в координатной записи $f=(f_1, f_2,\dots,f_n)$, $f_i:E\to R$, непрерывно в точке $M_0\in E$ тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_i(x)$, $i=1, 2,\dots,n$, непрерывна в этой точке.

Непрерывность функции многих переменных f в точке x обычно устанавливается по теореме о композиции непрерывных функций. Если же в данной точке функция f не является композицией непрерывных функций, то вопрос требует индивидуального исследования.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 4. Непрерывность функции

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в любой точке $M=(x_0, y_0)$, кроме точки $M_0=(0, 0)$, следует из непрерывности многочлена, синуса, квадратного корня и условия $x_0^2+y_0^2\neq 0$; непрерывность f в точке M_0 следует из равенства

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0 \quad (\text{см. с. } 288).$$

Пример 5. Непрерывность функции

$$f(x, y, z)=\begin{cases} ax^2+\dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2+z^2\neq 0, \\ ax^2 & , y^2+z^2=0 \end{cases}$$

в любой точке $M_1(x_0, y_0, z_0)$, где $y_0^2+z_0^2\neq 0$, устанавливается так же, как и в предыдущем примере. Пусть $M_2=(x_0, 0, 0)$, $x_0\neq 0$. Рассмотрим, как ведут себя значения $f(M)$, если точка M приближается к точке M_2 по прямым $x=x_0$, $y=0$ и $x=x_0$, $y=z$. Для $M(x_0, 0, z)$ имеем $f(M)=ax_0^2$ и $\lim\limits_{M\to M_2} f(M)=ax_0^2=f(M_2)$; для $M(x_0, y, y)$, $y\neq 0$, имеем $f(M)=ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}$ и $\lim\limits_{M\to M_2} f(M)=ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}\neq f(M_0)$, так как $x_0\neq 0$. Итак, f разрывна в точке M_2, более того, так как в любой окрестности M_2 функция f принимает как значение ax_0^2, так и значение $ax_0^2+\dfrac{x_0}{2}$, то колебание f в этой окрестности не менее $\left|\dfrac{x_0}{2}\right|$. Следовательно, в силу критерия Коши, функция f не имеет предела при $M\to M_2$.

Исследуем непрерывность f в точке $M_0=(0, 0, 0)$. Так как $|yz|\leqslant \leqslant\dfrac{1}{2}(y^2+z^2)$, то $|f(x, y, z)|\leqslant|a|x^2+\dfrac{1}{2}|x|$ при $y^2+z^2\neq 0$; $|f(x, y, z)|=|a|x^2$ при $y^2+z^2=0$. Если $M(x, y, z)\to M_0(0, 0, 0)$, то $x\to 0$, следовательно, $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=0=f(M_0)$, т. е. f непрерывна в $M_0=(0, 0, 0)$.

Итак, множество M точек разрыва f является осью OX с выколотым началом координат.

Обратим внимание, что для доказательства того, что функция f разрывна в точке M_2, достаточно найти такие две линии, проходящие через точку M_2, что f имеет разные пределы, когда точка M стремится к точке M_2, оставаясь на одной из этих линий. Когда же проверяется непрерывность функции многих переменных в точке M_0, то необходимо рассматривать поведение этой функции не на отдельных линиях, проходящих через точку M_0, а во всех точках некоторой полной окрестности точки M_0, причем необходимо, чтобы при любом стремлении некоторой точки x к точке M_0 было выполнено $\lim\limits_{x\to M_0} f(x)=f(M_0)$.

Поскольку техника вычисления предела функции многих переменных аналогична технике вычисления предела функции одного переменного, то в этом разделе помещены только теоретические, а не вычислительные задачи, связанные с понятиями предела и непрерывности функций многих переменных.

§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ, ПЕРВЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Пусть $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, и $x_0 \in E$ — внутренняя точка E. Рассмотрим линейное пространство векторов h размерности m, имеющих начало («приложенных») в точке x_0. Такие векторы назовем векторами смещения. Каноническим базисом в таком пространстве будет базис из «приложенных» в точке x_0 ненулевых векторов, коллинеарных базисным векторам исходного пространства R^m. В этом базисе координаты вектора h обозначим $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_m$.

Определение. Отображение $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, *дифференцируемо* в точке $x_0 \in E$, внутренней для E, если

$$f(x_0+h) - f(x_0) = L(x_0)h + \alpha(x_0, h),$$

где h — вектор смещения, $L(x_0): R^m \to R^n$ — линейное отображение и $\|\alpha(x_0, h)\|_{R^n} = o(\|h\|_{R^m})$ при

$$\|h\|_{R^m} \to 0, \text{ где } \|h\|_{R^m} = \left(\sum_{i=1}^{m} \Delta x_i^2\right)^{1/2}.$$

Линейное отображение $L(x_0)$ называется производным отображением f или производной отображения f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Пример 1. Рассмотрим отображение $f: R^2(x, y) \to R^2(u, v)$, заданное формулами $u = x^2 + y^2$, $v = xy$. Возьмем точку $M_0 = (1, 1)$. Покажем, что данное отображение f дифференцируемо в этой точке. Вектор смещения обозначим h. Его координаты в каноническом базисе обозначим Δx, Δy (см. рис. 20). Имеем

$$f(M_0+h) = f(1+\Delta x, 1+\Delta y) = \{(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta y)^2;$$
$$(1+\Delta x)(1+\Delta y)\} = \{2 + 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2;\ 1 + \Delta x + \Delta y +$$
$$+ \Delta x \cdot \Delta y\}.$$

Разность $f(M_0+h) - f(M_0)$ представим в виде

$$\{2 + 2\Delta x + 2\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2;\ 1 + \Delta x + \Delta y + \Delta x \cdot \Delta y\} - \{2;\ 1\} =$$
$$= \{2\Delta x + 2\Delta y;\ \Delta x + \Delta y\} + \{\Delta x^2 + \Delta y^2,\ \Delta x \cdot \Delta y\}.$$

Отображение $L(1;\ 1)h: h = \{\Delta x, \Delta y\} \to \{2\Delta x + 2\Delta y, \Delta x + \Delta y\}$ линейное. Действительно, если $h_1 = (\Delta x_1, \Delta y_1)$, $h_2 = (\Delta x_2, \Delta y_2)$, то

$$L(1, 1)h_1 = \{2\Delta x_1 + 2\Delta y_1,\ \Delta x_1 + \Delta y_1\},$$
$$L(1, 1)h_2 = \{2\Delta x_2 + 2\Delta y_2,\ \Delta x_2 + \Delta y_2\}$$

и

$$L(1, 1)(h_1 + h_2) = L(1, 1)h_1 + L(1, 1)h_2,$$

$L(1,\ 1)(\alpha h_1) = \alpha L h_1$ (проверьте).

Норма вектора $\alpha(M_0,\ h) = \{\Delta x^2 + \Delta y^2,\ \Delta x \cdot \Delta y\}$ равна $\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2 + (\Delta x\, \Delta y)^2}$. Так как $(\Delta x\, \Delta y) \leqslant \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{2}$, то

$$\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^2 + (\Delta x \cdot \Delta y)^2} \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2) =$$

$$= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \sqrt{5/4\,(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) = o(\|h\|)$$

при $\|h\| \to 0$, т. е. $\|\alpha(M_0,\ h)\| = o(\|h\|)$ при $h \to 0$.

Следовательно, $L(1,\ 1)$ есть производное отображение отображения f. Всякое линейное отображение в определенном базисе характеризуется некоторой матрицей. Нашему отображению $L(1,\ 1)$ в каноническом базисе отвечает матрица $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Отображение $f: E \to R^n$, $E \subset R^m$, дифференцируемое в точке x_0, непрерывно в этой точке.

Основные правила дифференцирования

1. Линейность: если отображения $f_1: E \to R^n$, $f_2: E \to R^n$, $E \subset R^m$, дифференцируемы в точке $x_0 \in E$, то их линейная комбинация также дифференцируема в точке x_0 и

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)'(x_0) = \alpha f_1'(x_0) + \beta f_2'(x_0).$$

2. Дифференцирование композиции отображений: если отображение $f: X \to Y$, $X \subset R^m$, $Y \subset R^n$, дифференцируемо в точке $x_0 \in X$, а отображение $g: Y \to R^q$ дифференцируемо в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, то композиция $g \circ f: X \to R^q$ дифференцируема в точке x_0 и производная $(g \circ f)'(x_0)$ есть композиция производных $g'(y_0) \circ f'(x_0)$.

Отображение $f: E \to R^n$, $E \in R^m$, где в координатной записи $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, $f_i: E \to R$, дифференцируемо тогда и только тогда в точке $x_0 \in E$, когда каждое из отображений $f_i: E \to R$, $E \subset R^m$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (т. е. функций f_i), дифференцируемо в точке x_0.

Производной функции $f: E \to R$, $E \subset R^m$, в точке x_0 является линейное отображение в R, определенное на пространстве приложенных в точке x_0 векторов h. Такое линейное отображение вектора $h(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m)$ представляет собой линейную форму от $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_m$. Эта линейная форма коротко называется первым дифференциалом функции f в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$. Значение этой линейной формы называется значением первого дифференциала функции f в точке x_0 на векторе h и обозначается $df(x_0)h$.

По этому определению для функции одного переменного $f: (a,\ b) \to R$ ее производной в точке $x_0 \in (a,\ b)$ является линейное отображение одномерного вектора $h = \Delta x$ в R, т. е. умножение этого вектора на такое число α, что

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \alpha \Delta x + o(\Delta x).$$

Сравнивая это определение с ранее данным определением производной функции одного переменного, видим, что коэффициент α есть $f'(x_0)$ в прежнем смысле: $\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Другими словами, в прежнем определении не само линейное отображение вектора $h=\Delta x$ называлось производной, а коэффициент этого линейного отображения, т. е. его числовая характеристика. Так как прямая пропорциональная зависимость взаимно однозначно определяется своим коэффициентом, то для функции одного переменного производную можно считать как числом, так и линейным преобразованием векторов смещения, характеризующимся этим числом. Значение дифференциала $df(x_0)h=\alpha\cdot\Delta x$ функции f одного переменного на векторе $h=\Delta x$ полностью совпадает в обоих определениях.

Для аналогичной числовой характеристики производной функции $f: E\to R$, $E\subset R^m$, $m\geqslant 2$, вводится понятие частной производной f по одному из переменных.

Определение. Пусть $f: E\to R$, $E\subset R^m$, $m\geqslant 2$, и $x_0\in E$ — внутренняя точка E. *Частной производной функции* f *в точке* $x_0=(x_1{}^0, \ldots, x^0{}_m)$ по переменному x_i называется

$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0+\Delta x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)-}{\Delta x_i}$$

$$\frac{-f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)}{\Delta x_i},$$

если этот предел существует. В этом случае говорят, что f имеет частную производную по x_i в точке x_0 и эту производную обозначают $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ или $f'_{x_i}(x_0)$, или $f'_i(x_0)$.

Частная производная $f'_{x_i}(x_0)$, $x_0=(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_m^0)$, вычисляется обычными методами дифференцирования функции одного переменного, считая все координаты точки $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ (все аргументы функции) фиксированными, кроме той, по которой берется производная, т. е. $x_j=x_j{}^0$ $(j\neq i)$.

Если обозначить

$$f_i^*(x_i)=f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0),$$

то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=(f_i^*(x_i^0))'.$$

Пример 1. Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции $u(x, y, z)=\operatorname{arctg}\frac{xz+y}{1-xy}$ в точке $M_0=(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Дифференцируя функцию $u_1^*(x) = \operatorname{arctg} \frac{xz_0 + y_0}{1 - xy_0}$ по x, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = (u_1^*(x_0))' = \frac{z_0 + y_0^2}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2 z_0^2}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{1 + x_0^2 z_0}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2z_0^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = \frac{x_0 - x_0^2 y_0}{1 - 2x_0y_0 + x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0z_0 + y_0^2 + x_0^2z_0^2}.$$

Пример 2. Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ функции

$$u = x^y + y^z + z^x \quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1} + z^x \ln z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x + zy^{z-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = y^z \ln y + xz^{x-1}.$$

Как уже отмечалось в случае функции одного переменного, использовать формулы производных элементарных функций и правила дифференцирования можно только в тех точках, для которых значения функции в самой точке и в некоторой ее окрестности заданы одним и тем же аналитическим выражением. В противном случае приходится находить производную другим путем, например ее непосредственным вычислением через предел. Вычисление частных производных функции многих переменных в такой особой точке $x_0 = (x_1^0, \ldots, x^0_m)$ иногда упрощается тем, что для функции одного переменного

$$f_i^*(x_i) = f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_m^0)$$

точка x_i^0 не будет особой.

Пример 3. Найдем $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ для функции

$$u(x, y, z) = \begin{cases} ax^2 + \dfrac{xyz}{y^2 + z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0; \\ ax^2, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

в точке $M_0 = (1, 0, 0)$.

Решение. Так как $u_1^*(x) = u(x, 0, 0) = ax^2$, то $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = ((u_1^*)'(1)) = 2a$. Так как $u_2^*(y) = u(1, y, 0) = a$ при любом y, то $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)=((u_2^*)'(0))=0$ и аналогично $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)=((u_3^*)'(0))=0$, где $u_3^*(z)\equiv a$.

Итак, функция u имеет в точке M_0 все три частные производные, но, как было показано в примере 5 § 1, разрывна в этой точке.

Внимание! Для функции $f:E\to R$, $E\subset R^m$, $m\geqslant 2$, существование частных производных в точке M_0 не гарантирует непрерывности и тем более дифференцируемости f в точке M_0.

Если функция $f:E\to R$, $E\subset R^m$, $m\geqslant 2$, дифференцируема в точке $x_0\in E$, то f имеет в этой точке частные производные по всем переменным, и эти производные являются коэффициентами линейной формы $df(x_0)$, т. е.

$$df(x_0)\,h=f_1'(x_0)\,\Delta x_1+f_2'(x_0)\,\Delta x_2+\ldots+f_m'(x_0)\,\Delta x_m,$$

где $h=(\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \ldots,\ \Delta x_m)$.

Рассмотрим функцию $\pi_i(x)=x_i$, $x=(x_1,\ x_2,\ldots,x_m)\in R^m$, $i=1, 2,\ldots,m$. Ее приращение $\Delta\pi_i(x_0)=\pi_i(x_0+h)-\pi_i(x_0)=\Delta x_i$ есть линейное отображение L вектора $h=(\Delta x_1,\ldots,\Delta x_m)$: $L\mathrm{h}=\Delta x_i$, следовательно, $dx_i=d\pi_i(x_0)=\Delta\pi_i(x_0)=\Delta x_i$. В силу этого равенства первый дифференциал функции f в точке x_0 может быть записан в форме

$$df(x_0)=f_1'(x_0)\,dx_1+f_2'(x_0)\,dx_2+\ldots+f_m'(x_0)\,dx_m=\sum_{k=1}^{m} f_k'(x_0)\,dx_k.$$

Именно эта форма записи первого дифференциала функции наиболее употребительна. Удобство ее в том, что в силу теоремы о дифференцировании композиции эта форма сохраняется и тогда, когда $x_1,\ x_2,\ldots,x_m$ являются не только независимыми переменными, но и функциями некоторых других независимых аргументов: $x_i:E\to R^q$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. В этом случае символ dx_i уже есть не приращение Δx_i, а дифференциал функции x_i.

Как уже было показано в примере, существование в точке M_0 частных производных функции $f:E\to R$, $E\subset R^m$, $m\geqslant 2$, недостаточно для дифференцируемости f в точке M_0. Это только необходимое условие. Дифференцируемость функции многих переменных в точке x_0 обычно устанавливается с помощью следующего достаточного условия: если G — область в R^m и функция $f:G\to R$ имеет частные производные в некоторой окрестности точки $x_0\in G$ и эти производные непрерывны в точке x_0, то f дифференцируема в точке x_0.

Класс функций, имеющих непрерывные производные в некоторой области $G\subset R^m$, обозначается $C^1(G)$. Все функции $f:G\to R$ класса $C^1(G)$ непрерывны и дифференцируемы в каждой точке области G, но существуют непрерывные и даже дифференцируемые в каждой точке $M_0\in G$ функции, не входящие в класс $C^1(G)$ (за счет того, что частные производные будут разрывны).

Пример 4. (Функция, дифференцируемая всюду в области G, но не принадлежащая классу $C^1(G)$.)

Пусть

$$G \subset R^2,\ G=\{(x,\ y): x^2+y^2<1\}$$

и

$$z(x,\ y)=\begin{cases} y^{4/3}\ln(y^2+x^{4/3}), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0 & , x^2+y^2=0.\end{cases}$$

В каждой точке $M=(x,\ y)$, кроме начала координат

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^{4/3}\,\frac{4x^{1/3}}{3\,(y^2+x^{4/3})},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4}{3}\,y^{1/3}\ln(y^2+x^{4/3})+\frac{2y^{7/3}}{y^2+x^{4/3}},$$

откуда видно, что в этих точках частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны и, следовательно, функция z дифференцируема в этих точках.

Рассмотрим точку $M_0=(0,\ 0)$, имеем $\Delta z(0,\ 0)=z(x,\ y)-z(0,\ 0)=y^{4/3}\ln(y^2+x^{4/3})$. Так как для $|x|<1/2$, $|y|<1/2$, $y^2+x^{4/3}<1$, то

$$|\ln(y^2+x^{4/3})|\leqslant|\ln y^2|=2|\ln|y||,$$

откуда

$$|\Delta z(0,\ 0)|\leqslant|y|\cdot|y|^{1/3}\cdot 2|\ln|y||=o(|y|)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$
$$x^2+y^2\to 0.$$

Следовательно, если $L(0,\ 0)$ — линейное отображение, переводящее вектор $h=(x,\ y)$ в нуль, то

$$\Delta z(0,\ 0)=L(0,\ 0)\,h+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\ x^2+y^2\to 0,$$

т. е. функция $z(x,\ y)$ дифференцируема в начале координат и $dz(0,\ 0)=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y$. Отсюда следует, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,\ 0)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,\ 0)=0.$$

Покажем теперь, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ разрывна в начале координат. Действительно, если $y=x^{2/3}\neq 0$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,\ y)=x^{8/9}\,\frac{4x^{1/3}}{3\,(x^{4/3}+x^{4/3})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^{1/9}},$$

и если точка $M(x,\ y)$ приближается к точке $M_0=(0,\ 0)$, оставаясь на кривой $y=x^{2/3}$, то

$$\lim_{M\to M_0}\frac{\partial z}{\partial x}(M)=\infty.$$

Итак, $\frac{\partial z}{\partial x}$ разрывна в начале координат и даже не ограничена в любой окрестности начала координат.

Если в формулировке задачи, связанной с дифференцированием функции $f: E \to R$, $E \subset R^m$, специально не оговорено, что функция рассматривается в особой точке, где непрерывность самой функции или ее частных производных не следует непосредственно из непрерывности композиции простейших элементарных функций, то всегда предполагаем, что речь идет об исследовании функции f в точках области $G \subset R^m$ такой, что $f \in C^1(G)$. То, что такая область существует, можно усмотреть из самого задания функции f. Таким образом, дифференцируемость функции заранее предполагается.

Пример 5. Найдем первый дифференциал функции

$$f = \ln(4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2).$$

Решение. Функция определена в области

$$G = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2xz - 2yz + 2z^2 < 4\}.$$

Эта область представляет собой наклонный цилиндр, горизонтальным сечением которого на высоте $z = h$ является открытый круг $(x - h)^2 + (y - h)^2 < 4$.

Так как

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2z - 2x}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2z - 2y}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2x + 2y - 4z}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2},$$

то $f \in C^1(G)$.

Таким образом, в каждой точке $M_0 = (x, y_0, z_0) \in G$ функция f дифференцируема и

$$df = \frac{2(z - x)\,dx + 2(z - y)\,dy + 2(x + y - 2z)\,dz}{4 - x^2 - y^2 + 2xz + 2yz - 2z^2}.$$

Пусть $f \in C^1(G)$, тогда линейное отображение f' в каноническом базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется матрицей Якоби отображения f и обозначается (f').

Если специально не оговорено противное, то в задачах предполагается, что данное отображение f рассматривается в точках области G, для которой $f \in C^1(G)$.

Пример 6. Напишем матрицу Якоби отображения

$$f : (u, v) \to (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

$$x_1 = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}, \quad x_2 = \ln(u^2 + v^2), \quad x_3 = uv^2, \quad x_4 = u^2 v,$$

в области $G = \{(u, v), \ |u| < \infty, \ v > 0\}$.

Решение. Находя соответствующие производные функций x_1, x_2, x_3, x_4 по u и v, имеем

$$(f') = \begin{pmatrix} \frac{v}{u^2+v^2} & -\frac{u}{u^2+v^2} \\ \frac{2u}{u^2+v^2} & \frac{2v}{u^2+v^2} \\ v^2 & 2uv \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби отображения $f : E \to R^m$, $E \subset R^m$, является квадратной. Определитель такой матрицы называется якобианом отображения f и обозначается $|(f')|$.

Пример 7. Найдем якобиан отображения $f : (u, v, w) \to (x, y, z)$, $x = uv \cos w$, $y = uv \sin w$, $z = u + v + w$.

Решение. Находя соответствующие производные функций x, y, z по u, v и w, имеем

$$|(f')| = \begin{vmatrix} v\cos w & u\cos w & -uv\sin w \\ v\sin w & u\sin w & uv\cos w \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = uv(u - v).$$

Теорема об обратном отображении

Если область $G \subset R^m$ и отображение $f : G \to R^m$ удовлетворяют условиям:

1) $f \in C^1(G)$;

2) $f(x_0) = y_0$, $x_0 \in G$;

3) матрица $(f'(x_0))$ обратима,

то существует окрестность точки x_0 $U(x_0) \in G$ и окрестность точки $y_0 U(y_0)$ такие, что отображение $f : U(x_0) \to U(y_0)$ биективно (взаимно однозначно), $f^{-1} \in C^1(U(y_0))$; для любого $x_1 \in U(x_0)$ и $y_1 = y(x_1)$ выполняется соотношение $((f^{-1})'(y_1)) = (f'(x_1))^{-1}$.

Замечание. Условие 3 теоремы эквивалентно условию: якобиан отображения f в точке x_0 отличен от нуля.

Пример 8. Найдем якобиан отображения $f : (u, v) \to (x, y)$ $xu = x^2 + y^2$, $xv = y$ $(x \neq 0, \ y \neq 0)$.

Решение. Так как здесь легче записать обратное отображение

$$(x,\ y)\to(u,\ v):\quad u=\frac{x^2+y^2}{x},\quad v=\frac{y}{x},$$

то вычислим сначала его якобиан

$$|((f^{-1})')|=\begin{vmatrix}1-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Так как $\dfrac{y}{x}=v$ и $x=\dfrac{u}{1+v^2}$, то, используя соотношение между определителями взаимно обратных матриц, получаем

$$|(f')|=\frac{1}{|((f^{-1})')|}=\frac{x}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\frac{u}{(1+v^2)^2}.$$

Если отображение $y:X\to Y$, $X\subset R^m$, $Y\subset R^m$, удовлетворяет условиям теоремы об обратном отображении, то, разумеется, можно найти и матрицу Якоби обратного отображения $x:Y\to X$, а именно $(x')=(y')^{-1}$, и тем самым найти частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Но этот путь часто сложен. Другой метод нахождения частных производных обратного отображения будет разобран несколько позже.

Аналогично понятию частной производной функции $f:E\to R$, $E\subset R^m$, вводится понятие частной производной отображения $f:E\to R^n$, $E\subset R^m$, по подпространству. Пусть

$$x=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)\in R^m,\ 1\leqslant q\leqslant m,\quad u=(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_q)\in R^q,$$

$$V=(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{m-q})\in R^{m-q},\ \text{где } u_i=x_i,\ 1\leqslant i\leqslant q,\ \text{ и } v_j=x_{q+j},$$

$$1\leqslant j\leqslant m-q.$$

Возьмем $x_0=(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_m^0)\in E$ и обозначим:

$$f^*(u)=f^*(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_q)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_q,\ x_{q+1}^0,\ \ldots,\ x_m^0),$$

$$f^*(v)=f^*(v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{m-q})=f(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_q^0,\ x_{q+1},\ \ldots,\ x_m).$$

Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial U}(x_0)=((f^*)'(u_0))$ и $\dfrac{\partial f}{\partial V}(x_0)=((f^*)'(v_0))$. Аналогично определяются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial U}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial V}$, если координаты точки $x=(x_1,\ldots,x_m)\in R^m$ распределяются в координаты точек $u\in R^q$ и $v\in R^{m-q}$ более сложным способом, а также если пространство R^m представляется в виде декартова произведения не двух, а более подпространств.

П р и м е р 9. Напишем матрицы отображений $\frac{\partial f}{\partial X}$ и $\frac{\partial f}{\partial Y}$ в каноническом базисе, если

$$f: X\times Y \to (u,\ v),\ X=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\},\ Y=\{(y_1,\ y_2)\}$$

и

$$u=x_1y_1+x_2y_2-x_3(y_1+y_2),$$
$$v=x_1x_2x_3+x_2x_3y_1+x_3y_1y_2+y_1y_2x_1.$$

Р е ш е н и е. Находя соответствующие частные производные, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial X}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & -y_1-y_2 \\ x_2x_3+y_1y_2 & x_1x_3+y_1x_3 & x_1x_2+x_2y_1+y_1y_2 \end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y}=\begin{pmatrix} x_1-x_3 & x_2-x_3 \\ x_2x_3+x_3y_2+y_2x_1 & x_3y_1+y_1x_1 \end{pmatrix}.$$

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Если зависимость функции от аргументов задана через некоторые промежуточные переменные, т. е. мы имеем дело с композицией функций, то говорят, что *задана сложная функция.*

П р и м е р 1. Найдем первый дифференциал функции $f: G\to R$, область $G\subset E=\{(u,\ v): v>0\}$, в произвольной точке $(u,\ v)\in G$, если

$$f(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz \text{ и } x=uv,\ y=\frac{u}{v},\ z=u+v.$$

Р е ш е н и е. Разумеется, можно выписать зависимость

$$f^*(u,\ v)=f(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))=$$
$$=u^3v^3+\frac{u^3}{v^3}+(u+v)^3-3u^2(u+v)$$

и находить дифференциал $f^*(u,\ v)$. Но при более сложных связях между переменными проще использовать независимость формы первого дифференциала от того, независимыми или зависимыми переменными являются формальные аргументы. Тогда в нашем примере дифференцирование выполняется следующим образом:

$$d\overset{\bullet}{f}=(3x^2-3yz)\,dx+(3y^2-3xz)\,dy+(3z^2-3xy)\,dz=$$
$$=3\left[\left(u^2v^2-\frac{u^2}{v}-u\right)(v\,du+u\,dv)+\right.$$

$$+\left(\frac{u^2}{v^2}-u^2v-uv^2\right)\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}+((u+v)^2-u^2)(du+dv)\Bigg]=$$

$$=3\left[\left(u^2v^3-2u^2+v^2+\frac{u^2}{v^3}\right)du+\left(-\frac{u^3}{v^4}+u^3v^2+2uv+v^2\right)dv\right].$$

Пример 2. Найдем первый дифференциал функции $f:G\to R$, область $G\subset R^3$, $G\subset E=\{(x,\ y,\ z):x>0,\ y>0\}$, если

$$f(x,\ y,\ z)=\varphi(x^{yz},\ y^{xz}).$$

Решение. Имеем

$$df=\varphi_1'd(x^{yz})+\varphi_2'd(y^{xz})=\varphi_1'(yzx^{yz-1}\,dx+zx^{yz}\ln x\,dy+yx^{yz}\ln x\,dz)+$$

$$+\varphi_2'(zy^{xz}\ln y\,dx+xzy^{xz-1}\,dy+xy^{xz}\ln y\,dz)=(yzx^{yz-1}\varphi_1'+$$

$$+zy^{xz}\ln y\,\varphi_2')\,dx+(zx^{yz}\ln x\,\varphi_1'+xzy^{xz-1}\varphi_2')\,dy+$$

$$+(yx^{yz}\ln x\,\varphi_1'+xy^{xz}\ln y\,\varphi_2')\,dz.$$

Пример 3. Напишем матрицу Якоби отображения $f=h\circ g$, $f:(u,\ v)\to(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, если

$$g:x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=uv,$$

$$h:\xi=x^2-y^2,\quad \eta=xz,\quad \zeta=yz.$$

Решение. Находя соответствующие производные, имеем

$$(g')=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix};\quad (h')=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$((h\circ g)')=(h')\cdot(g')=\begin{pmatrix}2x & -2y & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ v & u\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2x\cos v-2y\sin v & -2xu\sin v-2yu\cos v\\ z\cos v+xv & -zu\sin v+xu\\ z\sin v+yv & zu\cos v+yu\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2u\cos(2v) & -2u^2\sin(2v)\\ 2uv\cos v & u^2\cos v-u^2v\sin v\\ 2uv\sin v & u^2\sin v+u^2v\cos v\end{pmatrix}.$$

Переформулируем общую теорему о дифференцировании композиции отображений на случай композиции функций.

Пусть $f: G \to R$, область $G \subset R^m$, $f = f(x_1, \ldots, x_m) \in C^1(G)$. Пусть далее $x_i: \Delta \to R$, область $\Delta \in R^k$, $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k) \in C^1(\Delta)$. Тогда сложная функция $f(t) = f(t_1, \ldots, t_k) = f(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ дифференцируема в каждой точке $t_0 \in \Delta$ и

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial t_j} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial t_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial t_j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

$$j = 1, 2, \ldots, k. \qquad (1)$$

Пример 4. Найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, если $u = f\left(x, \dfrac{x}{y}, \dfrac{xy}{z}\right)$.

Решение. Из формулы (1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + f_2' \cdot \frac{1}{y} + f_3' \cdot \frac{y}{z}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_2' \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + f_3' \cdot \frac{x}{z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_3' \cdot \left(-\frac{xy}{z^2}\right).$$

Можно найти эти частные производные также через выражение первого дифференциала функции

$$du = f_1' \, dx + f_2' \, d\left(\frac{x}{y}\right) + f_3' \, d\left(\frac{xy}{z}\right) = f_1' \, dx + f_2' \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} +$$

$$+ f_3' \cdot \frac{zy\,dx + zx\,dy - xy\,dz}{z^2} = \left(f_1' + \frac{1}{y} f_2' + \frac{y}{z} f_3'\right) dx +$$

$$+ \left(-\frac{x}{y^2} \cdot f_2' + \frac{x}{z} f_3'\right) dy - \frac{xy}{z^2} \cdot f_3' \, dz.$$

Так как частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ функции u есть соответствующие коэффициенты ее дифференциала, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1' + \frac{1}{y} \cdot f_2' + \frac{y}{z} \cdot f_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot f_2' + \frac{x}{z} \cdot f_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(-\frac{xy}{z^2}\right) \cdot f_3'.$$

На практике пользуются как одним, так и другим методами.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. ВТОРОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Если функция $f: G \to R$, определенная в некоторой области $G \subset R^m$, в каждой точке $x \in G$ имеет частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, то эта частная производная сама есть функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}: G \to R$, частные производные которой можно рассматривать.

Определение. Если функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}: G \to R$, $G \subset R^m$, имеет частную производную $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, то эта производная называется *второй частной производной от* f *по* x_i *и* x_j и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ или $f''_{x_j x_i}$, или f''_{ji}.

Теорема. Если функция $f: G \to R$, $G \subset R^m$, имеет в области G частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, то в каждой точке $x \in G$, в которой обе эти производные непрерывны, их значения совпадают.

Пример функции $f(x, y)$, для которой $f''_{xy} \neq f''_{yx}$, приведен в теоретических задачах (см. с. 406).

Если определена частная производная функции f порядка $k: f^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots i_k}$ по переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, то частная производная порядка $(k+1)$ по переменным $x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ определяется соотношением

$$f^{(k+1)}_{i, i_1, i_2 \ldots i_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f^{(k)}_{i_1, i_2, \ldots, i_k}\right).$$

Из вышеприведенной теоремы следует, что если все частные производные порядка k функции f непрерывны в области G, то значение всех производных f до порядка k включительно не зависит от порядка дифференцирования. Класс функций, непрерывных в G вместе со своими производными до порядка k включительно, обозначается $C^k(G)$. Если при формулировке задачи не оговорено, что функция исследуется в особой точке, то всегда подразумевается, что рассматриваются точки такой области G, что $f \in C^k(G)$. То, что такая область непуста или вытекает из условия или оговаривается в нем.

Функции класса $C^k(G)$ называют гладкими функциями *до порядка* k в G.

Если $f \in C^k(G)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$, то говорят, что $f \in C^\infty(G)$.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = x \ln(x+y^2)$. Тогда областью G, для которой $f \in C^\infty(G)$, является любая область, входящая в множество $D: \{(x, y): y^2 > -x\}$. Найдем $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ и $\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}$ для произвольной точки такой области. Пользуясь независимостью производных высшего порядка от порядка дифференцирования, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\ln(x+y^2)+\frac{x}{x+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{2y}{x+y^2}-\frac{2xy}{(x+y^2)^2}=\frac{2y^3}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=\frac{6y^2}{(x+y^2)^2}-\frac{8y^4}{(x+y^2)^3}=$$

$$=\frac{2y^2(3x-y^2)}{(x+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right)=\frac{-4y^3}{(x+y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)=\frac{12y^3}{(x+y^2)^4}.$$

Для вычисления производных высших порядков сложных функций пользуются формулой (1) вычисления первой производной сложной функции, учитывая, что все частные производные сами есть сложные функции данных аргументов.

Пример 2. Найдем $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, если $f=u\ln(u^2-v^2)$, $u=\operatorname{tg}(xy)$, $v=\sin(x-y)$.

Решение. Вычисляем частную производную первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x}=\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\frac{y}{\cos^2 xy}-$$

$$-\frac{2uv}{u^2-v^2}\cdot\cos(x-y).$$

Не подставляя выражение u и v через x и y в эту производную, вычисляем частную производную второго порядка

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\frac{y}{\cos^2 xy}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{2uv}{u^2-v^2}\cos(x-y)\right\}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\times$$

$$\times\frac{y}{\cos^2 xy}+\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\left(\frac{1}{\cos^2 xy}+\frac{2yx\sin xy}{\cos^3 xy}\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2uv}{u^2-v^2}\right)\cos(x-y)-\frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y)=$$

$$=\frac{y}{\cos^2 xy}\left[\left(\frac{2u}{u^2-v^2}+\frac{4u}{u^2-v^2}-\frac{4u^3}{(u^2-v^2)^2}\right)\frac{x}{\cos^2 xy}+\right.$$

$$+\left(-\frac{2v}{u^2-v^2}+\frac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\right)(-\cos(x-y))\Big]+$$

$$+\left[\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\right]\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 xy}+\frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\right)-$$

$$-\cos(x-y)\left[\left(\frac{2v}{u^2-v^2}-\frac{4u^2v}{(u^2-v^2)^2}\right)\frac{x}{\cos^2 xy}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{2u}{u^2-v^2}+\frac{4uv^2}{(u^2-v^2)^2}\right)\cdot(-\cos(x-y))\right]-\frac{2uv}{u^2-v^2}\sin(x-y).$$

Для наглядности ответы к задачам такого типа даются большей частью без подстановки в окончательный результат выражения u и v через x и y, а только указывается еще раз их зависимость. Ответ к предыдущему примеру:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{2xy}{\cos^4 xy}\cdot\frac{u^3-3uv^2}{(u^2-v^2)^2}+2\,\frac{u^2+v^2}{(u^2-v^2)^2}\times$$

$$\times\left(v\,\frac{(x-y)\cos(x-y)}{\cos^2 xy}+u\cos^2(x-y)\right)+\frac{\ln(u^2-v^2)}{\cos^2 xy}+$$

$$+\frac{2xy\sin xy}{\cos^3 xy}\ln(u^2-v^2)+\frac{2u^2}{u^2-v^2}\,\frac{1}{\cos^2 xy}+$$

$$+\frac{4xy\sin xy}{\cos^3 xy}\cdot\frac{u^2}{u^2-v^2}-\frac{2uv\sin(x-y)}{u^2-v^2},$$

где $u=\operatorname{tg} xy$, $v=\sin(x-y)$.

Пример 3. Найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial z^2}$, если $u=f\left(\frac{x}{y},\ \frac{y}{z}\right)$.

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{1}{y};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\cdot f_1'\right)=-\frac{1}{y^2}f_1'+$$

$$+\frac{1}{y}\left(f_{11}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)+f_{12}''\cdot\frac{1}{z}\right)=-\frac{1}{y^2}\cdot f_1'-\frac{x}{y^3}f_{11}''+\frac{1}{yz}f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{y}f_1'\right)=\frac{1}{y}f_{12}''\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{1}{z^2}\cdot f_{12}'',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x\,\partial z}\right)=\frac{2}{z^3}f_{12}''-\frac{1}{z^2}\left(f_{122}'''\left(-\frac{y}{z^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{z^3}f_{12}''+\frac{y}{z^4}f_{122}'''.$$

Определение. Если $f:G\to R$, область $G\subset R^m$, $f\in C^2(G)$, то *вторым дифференциалом функции* f (обозначаемым d^2f) называется квадратичная форма от приращений аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$:

$$d^2f=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\Delta x_i\,\Delta x_j.$$

В силу равенства $\Delta x_i=dx_i$ второй дифференциал функции обычно записывается в виде

$$d^2f=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j.$$

Пусть $G\subset R^m$, $f:G\to R^n$, $f\in C^2(G)$, $x_0\in G$. Значение первого дифференциала функции f в точке x_0 на векторе $h=(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)$ дает линейное приближение приращения функции с погрешностью $o(\|h\|)$ при $\|h\|\to 0$.

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=df(x_0)h+o(\|h\|)$$

при $\|h\|\to 0$.

Значение второго дифференциала функции f в точке x_0 на векторе h дает квадратичное приближение разности

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)h$$

с погрешностью $o(\|h\|^2)$ при $\|h\|\to 0$, т. е.

$$\Delta f(x_0)-df(x_0)h=d^2f(x_0)h+o(\|h\|^2)\quad(\|h\|\to 0).$$

В отличие от первого дифференциала форма второго дифференциала, вообще говоря, меняет вид при замене независимых аргументов x_i на функции $x_i:\Delta\to G$, $\Delta\subset R^q$, $i=1, 2, \dots, m$, а именно: пусть $G\subset R^m$, $f:G\to R$, $f\in C^2(G)$, $\Delta\subset R^q$, $x_i:\Delta\to G$, $x_i\in C^2(G)$, $i=1, 2, \dots, m$, $g:\Delta\to R$, $g(t_1, t_2, \dots, t_q)=f(x_1(t_1, t_2, \dots, t_q), \dots, x_m(t_1, \dots, t_q))$, тогда $g\in C^2(\Delta)$, но выражение

$$d^2g=\sum_{i,j=1}^{q}\frac{\partial^2 g}{\partial t_i\,\partial t_j}dt_i\,dt_j$$

не обязано совпадать с выражением

$$\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_1(t_1, \dots t_q), \dots x_m(t_1, \dots t_q))\,dx_i(t_1, \dots t_q)\times$$
$$\times dx_j(t_1, \dots t_m).$$

Пример 4. Пусть $f(x, y)=x\sin y+y\cos x$, где x и y — независимые переменные. Тогда

$$df=(\sin y-y\sin x)\,dx+(x\cos y+\cos x)\,dy$$

и

$$d^2f = -y\cos x dx^2 - x\sin y dy^2 + 2(\cos y - \sin x)\,dxdy.$$

Пусть теперь

$$g(u, v) = f(x(u, v),\ y(u, v)),$$

где $f(x, y)$ определена, как раньше, и $x = uv$, $y = u^2 - v^2$. Тогда

$$dx = udv + vdu,\quad dy = 2udu - 2vdv$$

и

$$dg = [\sin(u^2 - v^2) - (u^2 - v^2)\sin uv](udv + vdu) +$$
$$+ [uv\cos(u^2 - v^2) + \cos uv](2udu - 2vdv) =$$
$$= (v\sin(u^2 - v^2) + 2u^2v\cos(u^2 - v^2) + 2u\cos uv -$$
$$- (u^2v - v^3)\sin uv)\,du + (u\sin(u^2 - v^2) - 2uv^2\cdot\cos(u^2 - v^2) -$$
$$- 2v\cos uv - (u^3 - uv^2)\sin uv)\,dv,$$

т. е.

$$\frac{\partial g}{\partial u} = v\sin(u^2 - v^2) + 2u^2v\cos(u^2 - v^2) + 2u\cos uv - (u^2v - v^3)\sin uv;$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = u\sin(u^2 - v^2) - 2uv^2\cos(u^2 - v^2) - 2v\cos uv - (u^3 - uv^2)\sin uv.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 6uv\cos(u^2 - v^2) - 4u^3v\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 4uv\sin uv + (2 + v^4 - u^2v^2)\cos uv;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 2(u^2 - v^2)\cos(u^2 - v^2) + (4u^2v^2 + 1)\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 3(u^2 - v^2)\sin uv - uv(u^2 - v^2)\cos uv;$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = -6uv\cos(u^2 - v^2) - 4uv^3\sin(u^2 - v^2) +$$
$$+ 4uv\sin uv + (u^2v^2 - 2 - u^4)\cos uv.$$

Следовательно,

$$d^2g = [6uv\cos(u^2 - v^2) - 4u^3v\sin(u^2 - v^2) -$$
$$- 4uv\sin uv + (2 + v^4 - u^2v^2)\cos uv]\,du^2 +$$
$$+ [-6uv\cos(u^2 - v^2) - 4uv^3\sin(u^2 - v^2) + 4uv\sin uv +$$
$$+ (u^2v^2 - 2 - u^4)\cos uv]\,dv^2 + 2[2(u^2 - v^2)\cos(u^2 - v^2) +$$

$$+(4u^2v^2+1)\sin(u^2-v^2)-3(u^2-v^2)\sin uv-$$
$$-uv(u^2-v^2)\cos uv]\,dudv.$$

Если же формально заменить x, y, dx, dy в выражении

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

через u, v, du, dv, то получим

$$d^2f=-y\cos x dx^2-x\sin y dy^2+2(\cos y-\sin x)\,dxdy=$$
$$=(-(u^2-v^2)\cos uv)(vdu+udv)^2-uv\sin(u^2-v^2)(2udu-2vdv)^2+$$
$$+2(\cos(u^2-v^2)-\sin uv)(vdu+udv)(2udu-2vdv)=$$
$$=[4uv\cos(u^2-v^2)-4u^3v\sin(u^2-v^2)-4uv\sin uv+$$
$$+(v^4-u^2v^2)\cos uv]\,du^2+[-4uv\cos(u^2-v^2)-4uv^3\sin(u^2-v^2)+$$
$$+4uv\sin uv+(u^2v^2-u^4)\cos uv]\,dv^2+2[2(u^2-v^2)\cos(u^2-v^2)+$$
$$+4u^2v^2\sin(u^2-v^2)-2(u^2-v^2)\sin uv-2uv(u^2-v^2)\cos uv]\,dudv.$$

При $u=\pi/2$, $v=1$ и $dv=0$, $du\neq 0$ имеем

$$d^2g-d^2f=\pi\cos\left(\frac{\pi^2}{4}-1\right)du^2\neq 0,$$

т. е. $d^2g\neq d^2f$.

Пусть область $G\subset R^m$. Если функция $f: G\to R$, $f(x)=f(x_1,\ldots,x_m)$ линейно зависит от каждого x_i, $i=1, 2, \ldots, m$, то все ее вторые частные производные равны нулю, следовательно, в силу определения $d^2f\equiv 0$; в частности, для функции $\pi_i(x)=x_i$, имеем $d^2\pi_i=d^2x_i=0$.

Пользуясь теоремой о дифференцировании сложной функции, получаем следующую формулу. Если $f: G\to R$, $G\subset R^m$, $f\in C^2(G)$; $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m): \Delta\to G$, $x_i: \Delta\to R$, $\Delta\subset R^q$, $x_i\in C^2(\Delta)$, $i=1, 2, \ldots, m$; $g: \Delta\to R$, $g(t)=g(t_1, t_2, \ldots, t_q)=f(x_1(t_1, t_2, \ldots, t_q); x_2(t_1, t_2, \ldots, t_q), \ldots, x_m(t_1, t_2, \ldots, t_q))$, то

$$d^2g=\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$d^2g=\sum_{i=1}^{m}\left(dx_id\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial f}{\partial x_i}d^2x_i\right).$$

Коротко это соотношение можно записать формальным равенством:

$$d^2g=\sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)=d\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)=d\,(dg),$$

которое удобно использовать при вычислениях.

Пример 5. Найдем первый и второй дифференциалы функции $z(x, y)=f(u, v, w)$, если $u=x^2+y^2$, $v=x^2-y^2$, $w=2xy$, x и y — независимые переменные и $f\in C^2(G)$, $G\in R^3$.

Решение. Так как

$$du=2xdx+2ydy;\ dv=2xdx-2ydy;$$

$$dw=2ydx+2xdy;\ d^2u=2dx^2+2dy^2;$$

$$d^2v=2dx^2-2dy^2;\ d^2w=4dxdy,$$

то

$$dz=f_1'du+f_2'dv+f_3'dw=f_1'(2xdx+2ydy)+$$
$$+f_2'(2xdx-2ydy)+f_3'(2ydx+2xdy)=(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')dx+$$
$$+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')dy;$$

$$d^2z=f_{11}''(2xdx+2ydy)^2+f_{22}''(2xdx-2ydy)^2+f_{33}''(2ydx+2xdy)^2+$$
$$+2f_{12}''(2xdx+2ydy)(2xdx-2ydy)+2f_{13}''(2xdx+2ydy)\times$$
$$\times(2ydx+2xdy)+2f_{23}''(2xdx-2ydy)(2ydx+2xdy)+$$
$$+f_1'(2dx^2+2dy^2)+f_2'(2dx^2-2dy^2)+f_3'4dxdy=$$
$$=(4x^2f_{11}''+4x^2f_{22}''+4y^2f_{33}''+8x^2f_{12}''+8xyf_{13}''+8xyf_{23}''+2f_1'+2f_2')\,dx^2+$$
$$+(4y^2f_{11}''+4y^2f_{22}''+4x^2f_{33}''-8y^2f_{12}''+8xyf_{13}''-8xyf_{23}''+2f_1'-2f_2')\,dy^2+$$
$$+(8xyf_{11}''-8xyf_{22}''+8xyf_{33}''+8(x^2+y^2)f_{13}''+8(x^2-y^2)f_{23}''+4f_3')dxdy$$

или

$$d^2z=d\,[(2xf_1'+2xf_2'+2yf_3')\,dx+(2yf_1'-2yf_2'+2xf_3')\,dy]=$$
$$=[2f_1'dx+2xd\,(f_1')+2f_2'dx+2xd\,(f_2')+2f_3'dy+$$
$$+2ydf_3']\,dx+[2f_1'dy+2yd\,(f_1')-2f_2'dy-2yd\,(f_2')+$$
$$+2f_3'dx+2xd\,(f_3')]\,dy=2f_1'dx^2+2f_2'dx^2+4f_3'dxdy+$$
$$+(f_{11}''du+f_{12}''dv+f_{13}''dw)(2xdx+2ydy)+2f_1'dy^2-2f_2'dy^2+$$
$$+(f_{12}''du+f_{22}''dv+f_{23}''dw)(2xdx-2ydy)+$$

$$+ (f''_{13}du + f''_{23}dv + f''_{33}dw)(2ydx + 2xdy) =$$

$$= 2f'_1dx^2 + 2f'_2dx^2 + 4f'_3dxdy + (2xdx + 2ydy) \times$$

$$\times [f''_{11}(2xdx + 2ydy) + f''_{12}(2xdx - 2ydy) +$$

$$+ f''_{13}(2ydx + 2xdy)] + (2xdx - 2ydy) \cdot [f''_{12}(2xdx + 2ydy) +$$

$$+ f''_{22}(2xdx - 2ydy) + f''_{23}(2ydx + 2xdy)] +$$

$$+ (2ydx + 2xdy) \cdot [f''_{13}(2xdx + 2ydy) + f''_{23}(2xdx -$$

$$- 2ydy) + f''_{33}(2ydx + 2xdy)] + 2f'_1dy^2 - 2f'_2dy^2.$$

§ 5. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Теорема. Если отображение $F: U \to R^n$, определенное в окрестности U точки $(x_0, y_0) \in R^{m+n}$, $x_0 \in R^m$, $y_0 \in R^n$ таково, что

1) $F(x_0, y_0) = 0$;
2) $F \in C^k(U)$, $k \geqslant 1$;
3) $\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)}$ — обратимая матрица ($Y = \{y, (x_0, y) \in U\}$),

то существуют $(m+n)$-мерная область $V = V_X^m \times V_Y^n \subset U$, где

$$V_X^m: \{x, x \in R^m, \|x - x_0\| < \alpha\},$$

$$V_Y^n: \{y, y \in R^n, \|y - y_0\| < \beta\},$$

и такое отображение

$$f: V_X^m \to V_Y^n, \ f \in C^k(V_X^m),$$

что для любой точки $(x, y) \in V$ соотношение $F(x, y) = 0$ эквивалетно соотношению $y = f(x)$, т. е. $F(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in V_X{}^m$.

В координатной форме эта теорема выглядит так.

Пусть задана система уравнений

$$\begin{array}{l} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{array}$$

и выполнены условия:

1) существует точка

$$(x_0, y_0), \ x_0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0), \ y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)$$

такая, что $F_i(x_0, y_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) существует такая окрестность $U(x_0, y_0) \subset R^{m+n}$ точки (x_0, y_0), что

$$F_i \in C^k(U(x_0, y_0)), \ i = 1, 2, \ldots, n, \ k \geqslant 1;$$

3) якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

в точке (x_0, y_0) отличен от нуля.

Тогда существует окрестность $V(x_0) \subset R^m$ точки x_0 и функции

$y_i : V(x_0) \to R$, $y_i \in C^k(V(x_0))$, $i=1, 2, \dots, n$, такие, что

$F_j(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n(x_1, \dots, x_m)) \equiv 0,$

$j=1, 2, \dots, n,$

в области $V(x_0)$.

Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ называют *неявно заданными данной системой уравнений* или *неявно определенными данной системой уравнений.*

При дифференцировании неявно заданных функций существенно используется независимость формы первого дифференциала от того, независимые или зависимые переменные являются формальными аргументами. Действительно, пусть в некоторой области $G \subset R^m$ функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$, $x=(x_1, \dots, x_m)$, класса $C^1(G)$ обращают уравнения системы $F_j(x, y)=0$, $j=1, 2, \dots, n$, $x=(x_1, \dots, x_m)$, $y=(y_1, \dots, y_n)$, в тождество, тогда в этой области справедливы равенства $dF_j(x, y(x))=0$, $j=1, 2, \dots, n$. Таким образом, дифференциалы переменных $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ в области G связаны системой линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} dx_i + \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial y_q} dy_q = 0, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Если якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \dots & & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то из этой системы однозначно выражаются дифференциалы $dy_1, dy_2, \dots, dy_n$ как линейные формы относительно $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$. Коэффициенты полученных линейных форм являются соответствующими частными производными

$$\frac{\partial y_q}{\partial x_i}, \quad q=1, 2, \dots, n, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

Пример 1. Функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ определяются системой

$$xy - z\cos u \cos v = 0,$$

$$yz - x\cos u \cdot \sin v = 0.$$

Найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Решение. Дифференцируя данные уравнения, получаем

$$ydx + xdy - dz\cos u\cos v + z\sin u\cos v du + z\cos u\sin v dv = 0,$$

$$ydz + zdy - dx\cos u\sin v + x\sin u\sin v du - x\cos u\cos v dv = 0.$$

Откуда

$$du = \frac{-1}{xz\sin u}\left[(xy\cos v - z\cos u\sin^2 v)\,dx + \right.$$

$$\left. + (x^2\cos v + z^2\sin v)dy + (yz\sin v - x\cos u\cos^2 v)\,dz\right],$$

$$dv = \frac{-1}{xz\cos u}\left[(z\cos u\sin v\cos v + xy\sin v)\,dx + \right.$$

$$\left. + (x^2\sin v - z^2\cos v)\,dy - (yz\cos v + x\cos u\sin v\cos v)\,dz\right]$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z\cos u\sin^2 v - xy\cos v}{xz\sin u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-(x^2\cos v + z^2\sin v)}{xz\sin u},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x\cos u\cos^2 v - yz\sin v}{xz\sin u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-z\cos u\sin v\cos v - xy\sin v}{xz\cos u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{z^2\cos v - x^2\sin v}{xz\cos u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{yz\cos v + x\cos u\cos v\sin v}{xz\cos u}.$$

Данная система определяет функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0) такой, что $x_0 z_0 \cos u_0 \sin u_0 \neq \neq 0$, где u_0, v_0 удовлетворяют уравнениям

$$x_0 y_0 - z_0\cos u_0\cos v_0 = 0, \quad y_0 z_0 - x_0\cos u_0\sin v_0 = 0.$$

Точно так же можно было бы взять в качестве независимых аргументов любые три из переменных x, y, z, u, v, а оставшиеся два переменных считать их функциями, например, рассматривать z и u как функции $z(x, y, v)$ и $u(x, y, v)$. При этом система, связывающая дифференциалы dx, dy, dz, du, dv, остается той же, только разрешается уже относительно dz и du.

Если нужно найти производные $\frac{\partial y_q}{\partial x_i}$, $q = 1, 2, \ldots, n$, не для всех $i\,(i = 1, 2, \ldots, m)$, а только для некоторого i_0, то обычно рассматривают систему $\frac{\partial F_j}{\partial x_{i_0}}+\sum_{q=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial x_{i_0}}=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, полученную дифференцированием системы тождеств $F_j(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots \ldots, y_n)=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, по переменной x_{i_0}, считая y_l функциями от x_i.

Точно так же система уравнений для вторых производных $\frac{\partial^2 y_q}{\partial x_i \partial x_k}$, $1\leqslant q\leqslant n$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant m$, имеет вид

$$\frac{\partial^2 F_j(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1(x_1, \ldots, x_m), y_2(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)}{\partial x_i \partial x_k}=0,$$

$$j=1, 2, \ldots, n,$$

или в форме вторых дифференциалов $d^2F_j=0$, $j=1, 2, \ldots, n$. При этом уже необходимо заранее распределить, какие из переменных являются независимыми, а какие зависимыми, поскольку, как было показано выше, форма второго дифференциала существенно зависит от того, независимыми или зависимыми являются формальные аргументы соответствующей функции.

Вернемся к уравнениям предыдущего примера. Выберем за независимые переменные x, y, z, тогда, как отмечалось выше, $d^2x=0$, $d^2y=0$, $d^2z=0$. Пользуясь формулой $d^2F_j=d(dF_j)$, получаем систему уравнений, связывающих переменные x, y, z, u, v и их первые и вторые дифференциалы:

$$\begin{aligned}
&2dxdy+2dz\sin u\cos v du+2dz\cos u\sin v dv+\\
&+z\cos u\cos v du^2-2z\sin u\sin v du dv+z\sin u\cos v d^2u+\\
&+z\cos u\sin v d^2v+z\cos u\cos v dv^2=0,\\
&2dzdy+2dx\sin u\sin v du-2dx\cos u\cos v dv+x\cos u\sin v du^2+\\
&+2x\sin u\cos v du dv+x\sin u\sin v d^2u-x\cos u\cos v d^2v+\\
&+x\cos u\sin v dv^2.
\end{aligned}$$

Подставляя в полученные уравнения выражения du и dv в виде линейных форм от dx, dy, dz и разрешая систему относительно d^2u, d^2v, получим выражение этих дифференциалов в виде квадратичных форм от dx, dy, dz. Вторые производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и т. д. выражаются через соответствующие коэффициенты этих квадратичных форм. Эти вычисления в силу их громоздкости здесь полностью не приводятся. Покажем, как найти одну из частных производных, например $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$. Дифференцируя уравнения системы в предыдущем примере по y, получаем

$$x+z\sin u\cos v\frac{\partial u}{\partial y}+z\cos u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$z+x\sin u\sin v\frac{\partial u}{\partial y}-x\cos u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Дифференцируя эту систему по z, имеем

$$\sin u\cos v\frac{\partial u}{\partial y}+z\cos u\cos v\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}-$$
$$-z\sin u\sin v\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}+\cos u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}-$$
$$-z\sin u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+z\cos u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+$$
$$+z\sin u\cos v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+z\cos u\sin v\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=0,$$

$$1+x\sin v\cos u\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+x\sin u\cos v\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+$$
$$+x\sin u\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}+x\cos u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+$$
$$+x\sin u\sin v\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-x\cos u\cos v\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=0.$$

Подставляя в эти уравнения выражения для $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, получим систему, решая которую можно найти $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}$.

На практике удобнее для нахождения одной из вторых производных дифференцировать по соответствующей переменной соотношение, определяющее первую производную, учитывая, какие из переменных в этом соотношении независимы и какие зависимы. Так, в нашем случае

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{x^2\cos v+z^2\sin v}{xz\sin u}\right)=$$
$$=-\frac{\left(2z\sin v+z^2\cos v\frac{\partial v}{\partial z}-x^2\sin v\frac{\partial v}{\partial z}\right)xz\sin u}{x^2z^2\sin^2 u}+$$
$$+\frac{(x^2\cos v+z^2\sin v)\left(x\sin u+xz\cos u\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{x^2z^2\sin^2 u}.$$

Подставляя сюда выражения

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x\cos u\cos^2 v-yz\sin v}{xz\sin u}$$

и

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{yz\cos v+x\sin v\cos v\cos u}{xz\cos u},$$

получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{1}{x^3 z^3 \sin^3 u}[x^4 z \cos u \cos v\,(2\sin^2 u \sin^2 v +$$

$$+\cos^2 v) + x^3 y z^2 \cos v \sin v\,(\sin^2 u - \cos^2 u) +$$

$$+ x^2 z^3 (\cos^2 u \cos^2 v - \sin^2 u - \sin^2 u \cos^2 v) -$$

$$- xyz^4 (\sin^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v)].$$

Методом последовательного дифференцирования находятся производные высших порядков, но технические трудности при их нахождении все более возрастают.

Пример 2. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ независимых переменных x и y определены соотношениями

$$xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x.$$

Найдем du, dv, d^2u, d^2v в точке $x_0=1$, $y_0=2$ при $u_0=v_0=0$.

Решение. В тех точках, где выполнены условия теоремы о неявных функциях, переменные x, y, u, v, их первые и вторые дифференциалы связаны уравнениями

$$e^{u+v}\,dx + xe^{u+v}(du + dv) + 2(udv + vdu) = 0,$$

$$e^{u-v}\,dy + ye^{u-v}(du - dv) - \frac{1}{1+v}du + \frac{udv}{(1+v)^2} = 2dx,$$

$$2e^{u+v}\,dx\,(du + dv) + xe^{u+v}(du + dv)^2 +$$

$$+ xe^{u+v}(d^2u + d^2v) + 4dudv + 2udv^2 + 2vdu^2 = 0,$$

$$2dye^{u-v}(du - dv) + ye^{u-v}(du - dv)^2 +$$

$$+ ye^{u-v}(d^2u - d^2v) - \frac{d^2u}{1+v} + \frac{2dudv}{(1+v)^2} + \frac{ud^2v}{(1+v)^2} - \frac{2udv^2}{(1+v)^3} = 0.$$

Так как в точке (x_0, y_0, u_0, v_0) условия теоремы о неявных функциях выполнены, то $du(1, 2)$, $dv(1, 2)$, $d^2u(1, 2)$, $d^2v(1, 2)$ удовлетворяют уравнениям

$$dx + du + dv = 0, \quad dy + 2(du - dv) - du = 2dx,$$

$$2dxdu + 2dxdv + (du + dv)^2 + (d^2u + d^2v) + 4dudv = 0,$$

$$2dydu - 2dydv + 2(du - dv)^2 + 2(d^2u - d^2v) - d^2u + 2dudv = 0,$$

откуда

$$du(1, 2) = -\frac{dy}{3}; \quad dv(1, 2) = -dx + \frac{dy}{3};$$

$$d^2u(1,2)=\frac{14}{27}dy^2-\frac{8}{9}dxdy,\ d^2v(1,2)=$$

$$=dx^2-\frac{2}{27}dy^2-\frac{4}{9}dxdy.$$

В частном случае, когда определяется неявно одна функция $y: G\to R$, $G\subset R^m$, т. е. задано одно уравнение $F(x_1, x_2, \ldots, x_m, y)=0$, формулы для первых частных производных функции y выписываются в общем виде:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}},\ i=1,2,\ldots,m. \tag{2}$$

Пример 3. Найдем первые и вторые производные функции $z(x, y)$, если $z=\sqrt{x^2-y^2}\cdot\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Решение. Перепишем уравнение, неявно определяющее z, в виде

$$\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}-\operatorname{tg}\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=0.$$

Способ 1. По формуле (2) получим

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{yz}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}-\frac{yz}{(\sqrt{x^2-y^2})^3}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\frac{zx}{(x^2-y^2)^{3/2}}-\frac{xz}{(x^2-y^2)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}}.$$

Так как

$$\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}=1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}=1+\frac{z^2}{x^2-y^2},$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xz}{x^2-y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yz}{x^2-y^2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz}{x^2-y^2}\right)=\frac{z}{x^2-y^2}-\frac{2x^2z}{(x^2-y^2)^2}+$$

$$+\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-yz}{x^2-y^2}\right)=-\frac{z}{x^2-y^2}-\frac{2y^2z}{(x^2-y^2)^2}-$$

$$-\frac{y}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xz}{x^2-y^2}\right)=\frac{2xyz}{(x^2-y^2)^2}+\frac{x}{x^2-y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}$$

Способ 2. Имеем

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)-\frac{1}{\cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}}\,d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0,$$

следовательно,

$$d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0$$

$\left(\text{если } \cos^2\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=1, \text{ то также } d\left(\frac{z}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=0\right)$. Отсюда

$$\frac{dz}{\sqrt{x^2-y^2}}-\frac{(xdx-ydy)\,z}{(x^2-y^2)^{3/2}}=0$$

и

$$dz=\frac{z\,(xdx-ydy)}{x^2-y^2}.$$

Далее,

$$d^2z=dz\cdot\frac{xdx-ydy}{x^2-y^2}+z\,\frac{dx^2-dy^2}{x^2-y^2}-$$

$$-z\,(xdx-ydy)\,\frac{2xdx-2ydy}{(x^2-y^2)^2}=$$

$$=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2}\,dx^2-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2}\,dy^2+\frac{2xyz}{(x^2-y^2)^2}\,dxdy.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{y^2z}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x^2z}{(x^2-y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{xyz}{(x^2-y^2)^2}.$$

Пусть задано отображение $f: G\to R^m$, $G\subset R^m$, где в координатной записи $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)=y_1, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)=y_m$, $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)\in G$. Тогда переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$

связаны системой уравнений $y_i - f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Эта система при соответствующих условиях представляет неявное задание обратных функций $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_m)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Дифференцировать обратные функции по общему методу дифференцирования неявных функций проще, чем находить обратную матрицу к матрице Якоби отображения f.

Пример 4. Найдем условие существования обратных функций $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ и их дифференциалы, если

$$x = uv\cos w, \quad y = uv\sin w, \quad z = u + v + w.$$

Решение. Как было вычислено в примере 7, на с. 298 якобиан отображения $f: (u, v, w) \to (x, y, z)$ равен $uv(u - v)$, следовательно, обратные функции определены в окрестности каждой точки (x_0, y_0, z_0), если $x_0 = u_0v_0\cos w_0$, $y_0 = u_0v_0\sin w_0$, $z_0 = u_0 + v_0 + w_0$ и $u_0v_0(u_0 - v_0) \neq 0$. При этом условии переменные x, y, z, u, v, w и их дифференциалы связаны уравнениями

$$dx = v\cos w\,du + u\cos w\,dv - uv\sin w\,dw,$$

$$dy = v\sin w\,du + u\sin w\,dv + uv\cos w\,dw,$$

$$dz = du + dv + dw.$$

Разрешая эту систему относительно du, dv, dw, получим

$$du = \frac{1}{v(u - v)}\left[(\sin w - v\cos w)\,dx - (\cos w + v\sin w)\,dy + uv\,dz\right],$$

$$dv = \frac{1}{u(u - v)}\left[(u\cos w - \sin w)\,dx + (\cos w + u\sin w)\,dy - uv\,dz\right],$$

$$dw = \frac{1}{uv}\left[-\sin w\,dx + \cos w\,dy\right].$$

Остановимся еще на одном частном случае неявного задания функции, а именно на *параметрическом задании* функции двух переменных. Такое задание функции имеет вид

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{3}$$

$$x, y, z \in C^1(\Delta), \quad \Delta \subset R^2(u, v).$$

Для определенности считаем, что соотношения (3) определяют переменную z как функцию переменных x и y, тогда переменные $u(x, y)$ и $v(x, y)$ рассматриваются как промежуточные параметры в определении $z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$. Из общей теоремы о существовании обратных функций следует, что в окрестности точки (x_0, y_0), в которой

$$\begin{vmatrix} x'_u(u_0, v_0) & x'_v(u_0, v_0) \\ y'_u(u_0, v_0) & y'_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

определены функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — обратные к функциям

$x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, где x_0, y_0, u_0, v_0 связаны равенствами $x_0= =x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$. Следовательно, в этой окрестности определена функция $z(x, y)=z(u(x, y), v(x, y))$.

Разумеется, данные соотношения (3) можно рассматривать и как параметрическое задание функции $x=x(y, z)$ или функции $y=y(x, z)$ при выполнении условий существования соответствующих обратных функций.

Пример 5. Найдем первый и второй дифференциалы функции $z=z(x, y)$, если

$$x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=au+bv.$$

Решение. В данном примере кажется возможным аналитически выразить $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а именно $u=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ $v= =\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Но в таком представлении, во-первых, функция $v(x, y)$ не определена для $x=0$ и, во-вторых, функция v принимает значения только в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, в то время как в соотношениях $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ как u, так и v могут принимать любые значения на всей числовой оси и для $v=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, имеем $x=0$. Кроме того, часто функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ вообще не выписываются в аналитическом виде. Найдем дифференциалы обратных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из системы

$$\begin{cases} dx=\cos v du-u\sin v dv, \\ dy=\sin v du+u\cos v dv. \end{cases}$$

Имеем

$$du=\cos v dx+\sin v dy,\ dv=\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}dx.$$

Подставив выражения du и dv в dz, получаем

$$dz=adu+bdv=\left(a\cos v-\frac{b\sin v}{u}\right)dx+\left(a\sin v+\frac{b\cos v}{u}\right)dy.$$

Далее,

$$d^2z=\left(-a\sin v dv-\frac{b\cos v}{u}dv+\frac{b\sin v}{u^2}du\right)dx+$$

$$+\left(a\cos v dv-\frac{b\sin v}{u}dv-\frac{b\cos v}{u^2}du\right)dy=$$

$$=\left[\left(-a\sin v-\frac{b\cos v}{u}\right)\left(\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}dx\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{b\sin v}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)\right]dx+$$

$$+\left[\left(a\cos v-\frac{b\sin v}{u}\right)\left(\frac{\cos v}{u}dy-\frac{\sin v}{u}\right)dx-\right.$$

$$\left.-\frac{b\cos v}{u^2}(\cos v dx+\sin v dy)\right]dy=\left(\frac{a}{u}\sin^2 v+\frac{b}{u}\sin 2v\right)dx^2+$$

$$+\left(\frac{a}{u}\cos^2 u-\frac{b}{u^2}\sin 2v\right)dy^2-\left(\frac{a}{u}\sin 2v+\frac{2b}{u^2}\cos 2v\right)dxdy.$$

§ 6. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Методы дифференцирования сложных и неявно заданных функций используются для замены переменных в дифференциальных выражениях. Эта задача для функции одного переменного была рассмотрена в разделе «Дифференциальное исчисление функции одного переменного». Здесь будут рассматриваться функции многих переменных, и для простоты изложения ограничимся случаем функции двух переменных.

Постановка задачи. Пусть задано некоторое выражение A, в которое входят переменные x, y, функция z и ее частные производные по x и y до некоторого порядка k. Пусть далее переменные x и y выражаются через новые независимые аргументы $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$. Требуется преобразовать данное дифференциальное выражение A так, чтобы в него входили переменные u, v, функция z и частные производные соответствующих порядков функции z по переменным u и v. Предполагается, что все преобразования делаются в таких областях изменения x, y, u, v, что существуют обратные функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ и все рассматриваемые функции достаточно гладкие.

Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Чтобы выразить вторые производные функции z по x, y через производные z по u, v и производные u и v по x, y, дифференцируем выражения первых производных. Например,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

Аналогично находятся производные любого порядка.

Обратим внимание на то, что в приведенных формулах фигурируют не производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, а производные обратных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$. На практике связь между переменными x, y, u, v задается как соотношениями вида $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, так и соотношениями вида $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ или $\varphi_1(x, y, u, v)=0$, $\varphi_2(x, y, u, v)=0$. При любом задании этой связи удобнее пользоваться при замене переменных именно производными $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Пример 1. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

если $u=xy$, $v=\frac{x}{y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=y\left(y\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+$$

$$+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}y+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{1}{y}\right)=y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}x-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)-$$

$$-\frac{x}{y^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}x-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Подставляя выражения $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в исходное уравнение, получаем

$$4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\frac{2x}{y}\frac{\partial z}{\partial v}=0 \text{ или } 2u\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Пример 2. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2 z=0,$$

если

$$x=e^u\cos v,\qquad y=e^u\sin v.$$

Решение. Вначале необходимо найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Запишем соотношение между дифференциалами dx, dy, du, dv:

$$dx = e^u \cos v du - e^u \sin v dv,$$

$$dy = e^u \sin v du + e^u \cos v dv.$$

Следовательно,

$$du = e^{-u} \cos v dx + e^{-u} \sin v dy; \quad dv = -e^{-u} \sin v dx + e^{-u} \cos v dy$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-u} \cos v, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{-u} \sin v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-u} \sin v, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^{-u} \cos v.$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \cos v - \frac{\partial z}{\partial v} e^{-u} \sin v;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} e^{-u} \sin v + \frac{\partial z}{\partial v} e^{-u} \cos v,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-u} \cos v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-u} \cos v - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \sin v\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u} \left(-e^{-u} \cos v \frac{\partial u}{\partial x} - e^{-u} \sin v \frac{\partial v}{\partial x}\right) -$$

$$- e^{-u} \sin v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \cos v - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-u} \sin v\right) -$$

$$- \frac{\partial z}{\partial v} \left(-e^{-u} \sin v \frac{\partial u}{\partial x} + e^{-u} \cos v \frac{\partial v}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-2u} \cos^2 v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-2u} \sin^2 v - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-2u} \cos v \sin v +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u} (e^{-2u} \sin^2 v - e^{-2u} \cos^2 v) + 2 \frac{\partial z}{\partial v} e^{-2u} \cos v \sin v,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-u} \sin v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-u} \sin v + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \cos v\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u} \left(-e^{-u} \sin v \frac{\partial u}{\partial y} + e^{-u} \cos v \frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

$$+ e^{-u} \cos v \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-u} \sin v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-u} \cos v\right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(-e^{-u} \cos v \frac{\partial u}{\partial y} - e^{-u} \sin v \frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} e^{-2u} \sin^2 v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} e^{-2u} \cos^2 v + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} e^{-2u} \sin v \cos v +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial u} (e^{-2u} \cos^2 v - e^{-2u} \sin^2 v) - 2 \frac{\partial z}{\partial v} e^{-2u} \cos v \sin v,$$

и данное уравнение преобразуется в уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + e^{2u} m^2 z = 0.$$

Более общий случай замены представляет собой переход от функции $z(x, y)$ к функции $w = w(u, v)$ при условиях связи переменных x, y, z, u, v, w вида $f_1(x, y, z, u, v, w) = 0$, $f_2(x, y, z, u, v, w) = 0$, $f_3(x, y, z, u, v, w) = 0$. Кроме того, между переменными x, y, z есть зависимость $z - z(x, y) = 0$. Итак, имеем систему четырех уравнений с шестью неизвестными:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z, u, v, w) = 0, \\ f_2(x, y, z, u, v, w) = 0, \\ f_3(x, y, z, u, v, w) = 0, \\ z - z(x, y) = 0. \end{cases}$$

Предполагая опять, что преобразования делаются в соответствующей области, считаем эту систему определяющей четыре функции двух аргументов:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, y), \quad z = z(x, y).$$

Решая соответствующую линейную систему, связывающую дифференциалы dx, dy, dz, du, dv, dw, относительно du, dv, dw, dz, получаем выражения для частных производных функции u, v, w по x, y. Подставляя эти выражения в равенства

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

получаем уравнения, связывающие $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ с $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, из которых находим выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$. Чтобы выразить вторые производные функции z по x, y через u, v, w и производные w по u и v, либо дифференцируют выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ по переменным x и y, например,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

либо дифференцируют по x и y найденные выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в зависимости от конкретной ситуации (см. приведенные ниже примеры).

Пример 3. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуем уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z},$$

если

$$u=2x-z^2,\quad v=\frac{y}{z}.$$

Решение. В данном примере замена функции z не осуществляется, но, поскольку z входит формальным аргументом в выражения переменных u и v, применяем общий метод. Учитывая зависимость z от x и y, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2-2z\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2z\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{z-y\frac{\partial z}{\partial y}}{z^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(2-2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\left(-2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{1}{z}-\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\frac{\partial z}{\partial u}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}}{1+2z\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{y}{z^2}\frac{\partial z}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных и выражения

$$x=\frac{u+z^2}{2}\quad \text{и}\quad y=vz$$

в исходное уравнение, получаем

$$v\frac{\partial z}{\partial v}(z^2-u^2)=z(u^2+z^2).$$

Пример 4. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,$$

если

$$u=yz-x,\quad v=xz-y,\quad w=xy-z.$$

Решение. Дифференцируя w как непосредственно заданную функцию $w=w(x, y, z(x, y))$, получаем $\frac{\partial w}{\partial x}=y-\frac{\partial z}{\partial x}$. Запишем теперь выражение $\frac{\partial w}{\partial x}$, дифференцируя функцию w как композицию $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$: $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$. Подставляя сюда выражения производных $\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial x}-1$ и $\frac{\partial v}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x}$, получаем, что

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Приравнивая найденные выражения $\frac{\partial w}{\partial x}$, получаем уравнение

$$y-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}-1\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

из которого находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y+\frac{\partial w}{\partial u}-z\frac{\partial w}{\partial v}}{1+y\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Таким же методом получаем уравнение

$$x-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial w}{\partial v}\left(x\frac{\partial z}{\partial y}-1\right),$$

из которого находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-z\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}}{1+y\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial v}(-2xyz-z^2+1-y^2-x^2)=0,\text{ т. е. }\quad\frac{\partial w}{\partial v}=0.$$

Пример 5. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$x^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+y^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

если

$$x=ue^w,\quad y=ve^w,\quad z=we^w.$$

Решение. Выразим сначала du, dv и dw через dx и dy. Из системы

$$dx=e^w du+ue^w dw,$$

$$dy=e^w dv+ve^w dw,$$

$$dz=e^w dw+we^w dw$$

находим выражения du, dv и dw как функции dx, dy и dz. Заменяя в этих выражениях dz на

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

получаем

$$du=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[\left(1+w-u\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx-u\frac{\partial z}{\partial y}dy\right],$$

$$dv=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[-v\frac{\partial z}{\partial x}dx+\left(1+w-v\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy\right],$$

$$dw=\frac{1}{e^w(1+w)}\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right].$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1+w-u\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-u\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{v\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1+w-v\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},\quad \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)}.$$

Приравнивая выражения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$, получаем уравнения

$$\frac{1}{e^w(1+w)}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{1+w-u\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)}-\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{v\dfrac{\partial z}{\partial x}}{e^w(1+w)},$$

$$\frac{1}{e^w(1+w)}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{u\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{1+w-v\dfrac{\partial z}{\partial y}}{e^w(1+w)},$$

из которых находим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\dfrac{\partial w}{\partial u}(1+w)}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1+w)\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1+u\dfrac{\partial w}{\partial u}+v\dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

Подставляя эти выражения производных и выражения $x=ue^w$, $y=ve^w$, $z=we^w$ в исходное уравнение, получаем

$$u^2\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2=w^2\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Пример 6. Преобразуем уравнение $(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

Решение. Чтобы было удобно пользоваться общим методом, введем переменные u, v, w так: $w=x$, $u=y$, $v=z$. Приравнивая выражения $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$, получаем уравнения

$$1=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 0+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial w}{\partial u}\cdot 1+\frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}=\frac{1}{\dfrac{\partial x}{\partial z}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial v}}=-\frac{\dfrac{\partial x}{\partial y}}{\dfrac{\partial x}{\partial z}}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$y\frac{\partial x}{\partial y}=x-z.$$

Пример 7. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуем к новым переменным уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

если

$$u=x+y,\quad v=\frac{y}{x},\quad w=\frac{z}{x}.$$

Решение. Приравнивая выражения $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$, полученные дифференцированием функции w, заданной непосредственно как $w=w(x, y, z(x, y))$ и как композиция $w=w(u(x, y, z(x, y)), v(x, y, z(x, y)))$, получаем уравнения

$$-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\right)=\frac{\partial w}{\partial u}+x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+2\frac{\partial w}{\partial u};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)=x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{z}{x}\right)=x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}\right)-$$
$$-\frac{1}{x}\frac{\partial w}{\partial v}-\frac{y}{x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}=$$
$$=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial w}{\partial u}.$$

Подставляя эти выражения производных в исходное уравнение, получаем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\left(\frac{y^2}{x^3}+\frac{1}{x}+\frac{2y}{x^2}\right)=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0.$$

§ 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Определение. Пусть поверхность S задана в R^3 непрерывной функцией $z=f(x, y)$, т. е. $S:\{(x, y, f(x, y)), (x, y)\in D\}$ и точка $s_0=(x_0, y_0, z_0)\in S$. Плоскость $P: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, проходящая через точку s_0, называется *касательной плоскостью к S в точке s_0*, если

$$|f(x,y)-z|=o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right),\quad \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0,$$

где точка $(x, y, f(x, y))\in S$ и точка $(x, y, z)\in P$.

Аналогично определяется касательная плоскость, если поверхность задана непрерывной функцией $x=x(y, z)$ или $y=y(x, z)$.

Поверхность в данной точке может иметь только одну касательную плоскость.

Определение касательной плоскости, вообще говоря, не должно зависеть от выбора системы координат, так как существование в данной точке поверхности касательной плоскости к ней есть внутреннее свойство поверхности. Но поскольку мы занимаемся не внутренней геометрией поверхностей, а геометрическими приложениями методов анализа, то наши рассмотрения ограничиваются такими поверхностями, к которым эти методы применимы, т. е. поверхностями, аналитически представимыми в некоторой системе координат.

Если поверхность S задана функцией $z=f(x, y)$, $f\in C^1(D)$, область D принадлежит R^2, то касательная плоскость к S существует в каждой точке $S_0=(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ и имеет уравнение

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Если поверхность S задана уравнением $F(x, y, z)=0$, причем $F\in C^1(G)$, область G принадлежит R^3, $M_0=(x_0, y_0, z_0)\in G$, $F(x_0, y_0, z_0)=0$ и хотя бы одна из производных $F_x'(M_0)$, $F_y'(M_0)$, $F_z'(M_0)$ отлична от нуля, то касательная плоскость к S существует в точке M_0 и имеет уравнение

$$F_x'(M_0)(x-x_0)+F_y'(M_0)(y-y_0)+F_z'(M_0)(z-z_0)=0.$$

Если поверхность S задана соотношениями $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, причем $x, y, z\in C^1(\Delta)$, область Δ принадлежит $R^2(u, v)$, $M_0=(u_0, v_0)\in\Delta$, $x_0=x(u_0, v_0)$, $y_0=y(u_0, v_0)$, $z_0=z(u_0, v_0)$ и векторы

$$(x_u'(M_0), y_u'(M_0), z_u'(M_0)) \quad\text{и}\quad (x_v'(M_0), y_v'(M_0), z_v'(M_0))$$

неколлинеарны, то касательная плоскость к S в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$ существует и имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u'(M_0) & y_u'(M_0) & z_u'(M_0) \\ x_v'(M_0) & y_v'(M_0) & z_v'(M_0) \end{vmatrix}=0.$$

При выполнении сформулированных выше условий параметрического и неявного задания поверхности S в полученном уравнении касательной плоскости хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля, т. е. этому уравнению действительно отвечает некоторая плоскость в R^3. Равенство нулю коэффициента при какой-нибудь переменной в уравнении касательной плоскости в точке M_0 геометрически означает, что эта плоскость параллельна соответствующей оси координат. Аналитически это значит, что в окрестности точки M_0 не выполнены условия теоремы существования для этой координаты как функции остальных двух.

Пример 1. Напишем уравнение касательной плоскости к сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ в некоторой ее точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, $a\neq 0$.

Решение. Пусть сначала $z_0>0$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) сфера задается функцией $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Так как $x_0^2+y_0^2=a^2-z_0^2<a^2$, то можно считать эту окрестность такой, что производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

непрерывны в ней. Итак, условия существования касательной плоскости в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, $z_0>0$, выполнены и ее уравнение имеет вид

$$z-z_0=-\frac{x_0}{z_0}(x-x_0)-\frac{y_0}{z_0}(y-y_0).$$

Точно так же проводятся рассуждения для точки $s_0=(x_0, y_0, z_0)$, если $z_0<0$. Если же $z_0=0$, то z уже не является однозначной гладкой функцией переменных x и y ни в какой окрестности точки (x_0, y_0). Так как при $z_0=0$ $x_0^2+y_0^2=a^2$, то x_0 и y_0 одновременно в нуль не обращаются. Если $x_0\neq 0$, то в окрестности точки $(y_0, 0)$ x определяется как однозначная гладкая функция y и z; если $y_0\neq 0$, то в окрестности точки $(x_0, 0)$ y определяется как однозначная гладкая функция x и z. В каждом из этих случаев уравнение касательной находится тем же методом, как и в случае $z_0>0$, и имеет вид

$$x-x_0=-\frac{y_0}{x_0}(y-y_0)$$

при $x_0\neq 0$ и $y-y_0=-\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$ при $y_0\neq 0$.

Все эти случаи объединяются, если использовать формулу уравнения касательной плоскости для неявного задания поверхности.

Обозначим $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-a^2$, тогда $F_x'=2x$, $F_y'=2y$, $F_z'=2z$, и так как ни в какой точке сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ все три координаты одновременно не обращаются в нуль, то уравнение касательной к этой сфере в точке $s_0=(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

Очевидно, что при соответствующих условиях это уравнение касательной плоскости совпадает с найденным выше.

Определение. Если поверхность S имеет в точке $s_0 \in S$ касательную плоскость P, то прямая, проходящая через точку s_0 перпендикулярно P, называется *нормалью к* S в точке s_0, а вектор, перпендикулярный к P, называется *нормальным вектором к поверхности* S в точке s_0.

Заметим, что если N_1 — нормальный вектор к поверхности S в точке s_0, то и любой вектор $N=\lambda N_1$ $(\lambda\neq 0)$, будет тоже нормальным вектором к поверхности S в точке s_0.

Пример 2. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $2^{\frac{y}{z}}+2^{\frac{z}{x}}=6$ в точке $M_0=(1;\ 2;\ 2)$.

Решение. Если $F(x,y,z)=2^{\frac{y}{z}}+2^{\frac{z}{x}}-6$,

то $F'_x=-\frac{z}{x^2}\cdot 2^{\frac{z}{x}}\ln 2,$

$$F'_y=\frac{1}{z}\,2^{\frac{y}{z}}\ln 2,$$

$$F'_z=\frac{1}{x}\,2^{\frac{z}{x}}\ln 2-\frac{y}{z^2}\,2^{\frac{y}{z}}\ln 2.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости есть

$$-4\ln 2\cdot(x-1)+\frac{1}{2}\ln 2\,(y-2)+\frac{7}{2}\ln 2\,(z-2)=0,$$

или

$$8x-y-7z+8=0.$$

Уравнение нормали в параметрическом виде есть

$$x=1+8t,\quad y=2-t,\quad z=2-7t$$

или в каноническом

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-7}.$$

Пример 3. Напишем уравнение касательной плоскости и нормали к цилиндру $y^2=2px$ в произвольной точке $s_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ этого цилиндра.

Решение. Цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси OZ, не может быть задана функцией $z=z(x,\ y)$. В данном случае можно рассматривать эту поверхность как определенную функцией $x=\frac{y^2}{2p}$. Тогда $\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{p}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=0$ и уравнение касательной плоскости в точке s_0 имеет вид $x-x_0=\frac{y_0}{p}(y-y_0)$, или $p(x-x_0)-y_0(y-y_0)=0$. Можно было бы рассматривать цилиндр и как поверхность, определенную неявным соотношением $y^2-2px=0$.

Уравнение нормали к цилиндру в точке s_0 имеет вид

$$x=x_0+pt, \quad y=y_0-y_0t, \quad z=z_0.$$

В любой точке цилиндра касательная плоскость вертикальна (параллельна оси OZ), а нормаль горизонтальна (перпендикулярна оси OZ).

Пример 4. Напишем уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной соотношениями $x=u+v^2$, $y=u^2-v^3$, $z=2uv$ в точке $s_0=(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$, если $u_0=2$, $v_0=1$.

Решение. Имеем

$$x'_u=1, \ x'_v=2v; \qquad y'_u=2u, \ y'_v=-3v^2;$$
$$z'_u=2v, \ z'_v=2u; \qquad x_0=x(u_0, v_0)=3,$$
$$y_0=y(u_0, v_0)=3, \qquad z_0=z(u_0, v_0)=4;$$
$$x'_u(u_0, v_0)=1, \qquad x'_v(u_0, v_0)=2; \ y'_u(u_0, v_0)=4,$$
$$y'_v(u_0, v_0)=-3; \qquad z'_u(u_0, v_0)=2, \ z'_v(u_0, v_0)=4.$$

Следовательно, уравнение касательной плоскости в точке s_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z-4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. $2x-z-2=0$, а уравнение нормали в точке s_0 имеет вид

$$x=3+2t, \quad y=3, \quad z=4-t.$$

Определение. Пусть кривая Γ в пространстве R^3 задана соотношениями

$$x=x(\tau), \quad y=y(\tau), \quad z=z(\tau), \quad \tau\in[\alpha, \beta].$$

Возьмем $\tau_0\in(\alpha, \beta)$ и $\tau\in(\tau_0, \beta)$. Полупрямую

$$x=x(\tau_0)+t[x(\tau)-x(\tau_0)],$$
$$y=y(\tau_0)+t[y(\tau)-y(\tau_0)],$$
$$z=z(\tau_0)+t[z(\tau)-z(\tau_0)],$$
$$t\geqslant 0,$$

проходящую через точки $\gamma_0=(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ и $\gamma=(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$ кривой Γ, назовем правой секущей. Полупрямую, являющуюся предельным положением правой секущей при $\tau\to\tau_0$, если такая существует, назовем *правой полукасательной к кривой* Γ *в точке* γ_0. Аналогично определяется левая полукасательная к Γ в точке γ_0.

Определение. Если угол между правой и левой полукасательными к Г в точке γ_0 равен π, т. е. объединение этих полукасательных является прямой, то эта прямая называется *касательной к кривой* Г *в точке* γ_0.

Определение. Если кривая Г имеет в точке γ_0 касательную, то плоскость, проходящая через точку γ_0 перпендикулярно касательной, называется *нормальной плоскостью к кривой* Г *в точке* γ_0.

Если функции $x=x(\tau)$, $y=y(\tau)$, $z=z(\tau)$, определяющие кривую Г, дифференцируемы в точке $\tau_0\in(\alpha, \beta)$ и вектор $(x'(\tau_0), y'(\tau_0), z'(\tau_0))$ не нулевой, то касательная к Г в точке $\gamma_0=(x(\tau_0), y(\tau_0), z(\tau_0))$ существует и параллельна вектору $(x'(\tau_0), y'(\tau_0), z'(\tau_0))$, т. е. ее уравнение имеет вид

$$x=x(\tau_0)+tx'(\tau_0),\quad y=y(\tau_0)+ty'(\tau_0),\quad z=z(\tau_0)+tz'(\tau_0).$$

Пример 5. Напишем уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к кривой $\Gamma: x^2+y^2=2ax,\ x^2+y^2+z^2=4a^2$ в точке $M_0\left(\frac{3a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, a\right)$.

Решение. Кривая Г задана как пересечение двух поверхностей. Возьмем в качестве параметра кривой Г переменную z. Дифференциалы dx, dy и dz связаны уравнениями

$$2xdx+2ydy=2adx,$$

$$2xdx+2ydy+2zdz=0.$$

Разрешая эту систему относительно dx и dy, получим

$$dx=\frac{-z}{a}dz,\quad dy=\frac{-z(a-x)}{ay}dz.$$

Следовательно, $x_z'(M_0)=-1$, $y_z'(M_0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и уравнение касательной к Г в точке M_0 имеет вид

$$x=\frac{3a}{2}-t,\quad y=\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{t}{\sqrt{3}}\quad z=a+t,$$

а уравнение нормальной плоскости

$$\left(x-\frac{3a}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-(z-a)=0.$$

Определение. Если $f: G\to R$, область $G\subset R^m$, $f\in C^1(G)$, $x_0\in G$, то вектор с координатами $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0)\right)$ называется *градиентом функции* f *в точке* x_0 и обозначается $\operatorname{grad} f(x_0)$.

Градиент функции f в точке x_0 является нормальным вектором поверхности уровня функции f, проходящей через точку M_0, т. е. поверхности $f(x, y, z)=f(M_0)$ (если $\operatorname{grad} f$ не нулевой вектор).

Пример 6. Пусть

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_4 + x_4^3 x_1 - x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Найдем градиент функции f в точке $x_0 = (1; -1; 2; -3)$.

Решение. Найдем частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, $\frac{\partial f}{\partial x_4}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 x_2 + x_4^3 - x_2 x_3 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^3 + 3x_2^2 x_3 - x_1 x_3 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_2^3 + 3x_3^2 x_4 - x_1 x_2 x_4;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3^3 + 3x_4^2 x_1 - x_1 x_2 x_3.$$

Значения производных в точке $x_0 = (1, -1, 2, -3)$ являются координатами вектора $\operatorname{grad} f(x_0)$, т. е. $\operatorname{grad} f(x_0) = (-36, 13, -40, 32)$.

Определение. Пусть $f: G \to R$, область G принадлежит R^m, $x_0 \in G$ и вектор $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$. Если существует предел

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tl) - f(x_0)}{t \|l\|},$$

то его значение называется *производной функции f по направлению l в точке* x_0 и обозначается $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$.

Если $f: G \to R$, область G принадлежит R_m и f дифференцируема в точке $x_0 \in G$, то $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$ по любому направлению l существует и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \frac{l_i}{\|l\|} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cos \alpha_i,$$

где α_i — угол между l и осью OX_i. Так как вектор $l_0 = (\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \ldots, \cos \alpha_m) = \frac{l}{\|l\|}$ есть единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором l, то удобно направление, по которому вычисляется производная, обозначать сразу единичным вектором.

Если $f: G \to R$, область $G \subset R^m$ и $f \in C^1(G)$, то для $x_0 \in G$

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0) = \frac{(\operatorname{grad} f(x_0) \cdot l)}{\|l\|} = \operatorname{пр}_l \operatorname{grad} f(x_0),$$

следовательно, производная $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0)$, т. е. скорость изменения функции f по направлению l в точке x_0, достигает наибольшего значения, если направление l совпадает с направлением $\operatorname{grad} f(x_0)$, и этот максимум равен $\|\operatorname{grad} f(x_0)\|$.

Пример 7. Найдем производную функции

$$f = \operatorname{arctg}\frac{xz}{y} + \ln(x^2z^2 + y^2)$$

в точке $M_0 = (1,\ 1,\ -1)$ по направлению градиента функции $\varphi(x,\ y,\ z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$ в этой точке.

Решение. Имеем

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0) = (yz-2x,\ xz-2y,\ xy-2z)|_{M_0} = (-3,\ -3,\ 3),$$

$$l_0 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M_0) = \left.\frac{zy+2xz^2}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0} = \frac{1}{2};\quad \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) = \left.\frac{2y-xz}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(M_0) = \left.\frac{xy+2x^2z}{y^2+x^2z^2}\right|_{M_0} = -\frac{1}{2};\quad \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

Пример 8. Найдем производную функции $u(x,\ y,\ z) = xyz$ в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, лежащей на эллипсоиде $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, по направлению внутренней нормали к эллипсоиду в этой точке.

Решение. Один из нормальных векторов к поверхности $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ имеет координаты $\left(\frac{x_0}{a^2},\ \frac{y_0}{b^2},\ \frac{z_0}{c^2}\right)$. Геометрические соображения показывают, что единичный вектор внутренней нормали должен иметь координаты, противоположные по знаку координатам точки, в которой он определяется. Следовательно, обозначая этот вектор через n, имеем

$$n = -\frac{1}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\ \frac{y_0}{b^2},\ \frac{z_0}{c^2}\right)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{x_0y_0z_0\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}} = -\frac{x_0y_0z_0(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)}{\sqrt{x_0^2b^4c^4 + y_0^2a^4c^4 + z_0^2a^4b^4}}.$$

§ 8. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определение. Функция $f: E \to R$, $E \subset R^m$, имеет *локальный максимум* (*локальный минимум*) во внутренней точке x_0 множества E, если существует окрестность $U(x_0) \subset E$ точки x_0 такая, что $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) для всех $x \in U(x_0)$. Если при $x \in U(x_0) \setminus \setminus x_0$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то локальный максимум (минимум) называется строгим, в противном случае — нестрогим.

Определение. Локальные максимумы и минимумы функции называются ее *локальными экстремумами*.

Точки, в которых функция имеет локальный экстремум, называются экстремальными точками.

Определение. Пусть $f: G \to R$, область $G \subset R^m$. Точка $x_0 \in G$ называется *критической* точкой функции f, если каждая из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, в этой точке или не существует или равна нулю.

Обратим внимание на то, что критическая точка функции обязательно есть внутренняя точка множества ее определения.

Необходимое условие экстремума: если область G принадлежит R^m и в точке $x_0 \in G$ функция $f: G \to R$ имеет локальный экстремум, то x_0 — критическая точка функции.

Другими словами, всякая экстремальная точка функции есть ее критическая точка.

Достаточное условие экстремума: пусть область G принадлежит R^m, $f: G \to R$, $f \in C^2(G)$ и $x_0 \in G$ — критическая точка f:

а) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ положительно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ отрицательно определена, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный максимум;

в) если квадратичная форма $d^2 f(x_0)$ знакопеременная, то в точке x_0 функция f не имеет экстремума; точка x_0 в этом случае называется *седловой* точкой функции f.

Исследование определенности квадратичной формы $d^2 f(x_0)$ может быть проведено с помощью критерия Сильвестра: квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$ положительно определена тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

и отрицательно определена тогда и только тогда, когда $a_{11} < 0$ и при переходе от любого главного минора к главному минору следующего порядка знак минора меняется.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ критерий Сильвестра состоит в следующем. Пусть область G принадлежит R^2, f; $G \to R$, $f \in C^2(G)$ и $x_0 \in G$ — критическая точка функции f. Обозначим

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0), \quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0), \quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0).$$

Тогда:

а) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ и $A>0$, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

б) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$ и $A<0$, то в точке x_0 функция f имеет строгий локальный минимум;

в) если $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$, то точка x_0 — седловая точка функции f (т. е. не есть точка максимума или минимума).

Пример 1. Исследуем на экстремум функцию

$$u=2x^3yz-x^2-y^2-z^2.$$

Решение. Координаты x, y, z критической точки гладкой функции u должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 6x^2yz-2x=0, \\ 2x^3z-2y=0, \\ 2x^3y-2z=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3x^2yz=x, \\ x^3z=y, \\ x^3y=z. \end{cases}$$

Отсюда получаем пять критических точек:

$$M_0=(0, 0, 0), \; M_1=\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \; M_2=\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$M_3=\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \; M_4=\left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Так как $u \in C^2(G)$ для любой области $G \subset R^3$, то возможно дальнейшее исследование поведения функции u в стационарных точках с помощью достаточного условия экстремума:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12xyz-2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}=6x^2z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}=6x^2y; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}=2x^3.$$

Отсюда получаем $d^2u(M_0)=-2dx^2-2dy^2-2dz^2$. Так как $d^2u(M_0)$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то в точке M_0 функция u имеет строгий локальный максимум.

Для анализа квадратичной формы

$$d^2u(M_1)=2dx^2-2dy^2-2dz^2+4\sqrt{3}\,dx\,dy+4\sqrt{3}\,dx\,dz+$$
$$+4dy\,dz$$

применим критерий Сильвестра. Матрица этой формы есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ее главные миноры есть

$$2>0;\quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix}<0;\quad \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 & 2 \\ 2\sqrt{3} & 2 & -2 \end{vmatrix}>0.$$

Распределение знаков этих миноров показывает, что данная квадратичная форма знакопеременная, следовательно, в точке M_1 функция u не имеет экстремума: точка M_1 есть седловая точка функции u.

Точно так же устанавливается, что точки M_2, M_3 и M_4 также седловые точки функции u.

Пусть $f: G\to R$, область G принадлежит R^m и $x_0\in G$ — критическая точка функции f. Если f не принадлежит классу $C^2(u(x_0))$ или квадратичная форма $d^2f(x_0)$ полуопределена, т. е. неположительна или неотрицательна, то приходится непосредственно сравнивать значение $f(x_0)$ со значениями $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, ибо сформулированное достаточное условие неприменимо.

Пример 2. Исследуем на экстремум функцию

$$z=(1-x^2)\sqrt[3]{y^2}\,(1-y).$$

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x\sqrt[3]{y^2}\,(1-y);\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{(1-x^2)(2-5y)}{3\sqrt[3]{y}}\quad (y\neq 0).$$

Пусть $M_0=(x_0,0)$ и $M=(x_0,\Delta y)$, $|x_0|\neq 1$, тогда

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(M)-z(M_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(1-x_0^2)\sqrt[3]{\Delta y^2}\,(1-\Delta y)}{\Delta y}=\infty.$$

Если же $M_1=(1,0)$ и $M=(1,\Delta y)$, то $z(M)-z(M_1)=0$, следовательно, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_1)=0$. Точно так же $\frac{\partial z}{\partial y}(M_2)=0$, где $M_2=(-1,0)$.

Таким образом, все точки оси OX, кроме точек M_1 и M_2 являются такими критическими точками функции z, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. В точках M_1 и M_2 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$, т. е. эти точки также критические, но в любой окрестности как точки M_1, так и точки M_2 имеются точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Итак, для любой окрестности $U(M)$ произвольной точки M оси OX **функция z не является функцией класса $C^2(U(M))$.** Рассмотрим точку $M_0=(x_0, 0)$, $|x_0|<1$, и такую окрестность $U(M_0)$, что для всех $(x, y)\in U(M_0)$ имеем $|x|<1$, $|y|<1$, тогда для всех $(x, y)\in \in U(M_0)$ имеем $z(x, y)\geqslant 0=z(x_0, 0)$. Итак, в точке M_0 функция z имеет локальный минимум (нестрогий). Точно так же проверяется, что во всех точках $M_1=(x_1, 0)$, $|x_1|>1$, функция z имеет нестрогий локальный максимум.

Рассмотрим теперь произвольную окрестность $U(M_2)$ точки $M_2=(1, 0)$. Если $(x, y)\in U(M_2)$, $x>1$, $0<|y|<1$, то $z(x, y)<0= =z(1, 0)=z(M_2)$. Если же $(x, y)\in U(M_2)$, $0<x<1$, $0<|y|<1$, то $z(x, y)>0=z(1, 0)=z(M_2)$,
т. е. в точке $M_2=(1, 0)$ функция z не имеет экстремума: M_2 — седловая точка функции z. Точно так же проверяется, что $M_3= =(-1, 0)$ — седловая точка функции z.

Кроме точек оси OX критическими точками функции z являются точки $M_4=(1, 1)$, $M_5=(-1, 1)$, $M_6=(0, 2/5)$. Для анализа поведения функции z в этих точках можно применить достаточное условие:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2\sqrt[3]{y^2}(1-y),\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(1-x^2)\left(-\frac{2}{9}\right)y^{-\frac{4}{3}}(1+5y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2}{3}xy^{-\frac{1}{3}}(5y-2).$$

Отсюда

$$d^2z(M_6)=-\frac{6}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{4}{5}\right)^2}dx^2-\frac{5}{3}\sqrt[3]{\frac{5}{2}}dy^2.$$

Так как квадратичная форма $d^2z(M_6)$ отрицательно определенная, то в точке $M_6=(0, 2/5)$ функция z имеет строгий локальный максимум. Так как $d^2z(M_4)=4dxdy$ есть знакопеременная квадратичная форма, то в точке $M_4(1, 1)$ функция z не имеет экстремума: M_4 — седловая точка функции z. Так же проверяется, что M_5 — седловая точка функции z.

Пример 3. Исследуем на экстремум функцию $z=(1+x^2)\sqrt[3]{y}$.
Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sqrt[3]{y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1+x^2}{3\sqrt[3]{y^2}}\quad (y\neq 0),$$

следовательно, ни одна точка вне оси OX не будет критической.

Пусть $P_0=(x_0, 0)$ и $P=(x_0, \Delta y)$, тогда

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z(P)-z(P_0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(1+x_0^2)\sqrt[3]{\Delta y}}{\Delta y}=\infty.$$

Таким образом, все точки оси OX являются критическими точками функции z, в которых $\frac{\partial z}{\partial y}$ не существует. Из определения $z(x, y)$ получаем, что если $y>0$, то $z(x_0, y)>0=z(x_0, 0)$, если $y<0$, то $z(x_0, y)<0=z(x_0, 0)$ для любого x_0. Итак, каждая точка оси OX является критической точкой функции z, в которой нарушены условия гладкости и каждая такая точка есть седловая точка функции z.

Из рассмотренных двух предыдущих примеров видно, что если в критической точке функция z не имеет хотя бы одной частной производной, то эта точка может быть как точкой локального минимума, так и точкой локального максимума и седловой точкой.

Пример 4. Исследуем на экстремум функцию

$$z=(x-y)^2+(y^3-1)^4-1.$$

Решение. Так как функция z гладкая, то координаты x и y ее критической точки должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2(x-y)=0, \\ -2(x-y)+12y^2(y^3-1)^3=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки $M_0=(0, 0)$ и $M_1=(1, 1)$. Найдем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+24y(y^3-1)^3+108y^4(y^3-1)^2,\quad \frac{d^2 z}{\partial x\,\partial y}=-2.$$

Отсюда

$$d^2z(M_0)=d^2z(M_1)=2\,dx^2+2\,dy^2-4\,dx\,dy=2(dx-dy)^2,$$

откуда видно, что это полуопределенная квадратичная форма (неотрицательная). Так как $z(M_1)=-1$ и $z(M)>-1$ для любой точки $M\neq M_1$, то в точке $M_1=(1, 1)$ функция z имеет строгий локальный минимум (даже абсолютный).

Рассмотрим поведение функции z в произвольной окрестности $U(M_0)$ точки $M_0=(0, 0)$. Если $M=(x, 0)\in U(M_0)$, $x\neq 0$, то $z(M)=x^2>0=z(M_0)$; если же $M=(y, y)\in U(M_0)$, $0<y<1$, то $z(M)=(y^3-1)^4-1<0=z(M_0)$.

Следовательно, точка M_0 — седловая точка функции z.

Итак, если для некоторой окрестности $U(M_0)\subset R^m$ точки $M_0\in R^m$ функция $f\in C^2(U(M_0))$, точка M_0 — критическая точка функции f и $d^2f(M_0)$ — полуопределенная квадратичная форма, то точка M_0 может быть как точкой локального экстремума, так и седловой точкой функции f.

Заметим, что если для некоторой окрестности $U(M_0) \subset R^m$ точки $M_0 \in R^m$ функция $f \in C^2(U(M_0))$ и в точке M_0 функция f имеет нестрогий экстремум, то квадратичная форма $d^2f(M_0)$ обязательно будет полуопределенной.

Пример 5. Исследуем на экстремум функцию

$$z = \frac{xy}{1 + x^2y^2}.$$

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1 - x^2y^2}{(1 + x^2y^2)^2}$, то критическими точками функции z является точка $M_0 = (0, 0)$ и все точки $M = (x, y) : xy = \pm 1$. Из неравенства $|2xy| \leqslant 1 + x^2y^2$ получаем, что $|z| \leqslant 1/2$. В каждой точке линии $xy = 1$ имеем $z(x, y) = 1/2$; в каждой точке линии $xy = -1$ имеем $z(x, y) = -1/2$. Следовательно, в каждой точке линии $xy = 1$ функция z имеет нестрогий максимум, в каждой точке линии $xy = -1$ — нестрогий минимум. Найдем вторые частные производные функции z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2xy^3 \frac{x^2y^2 - 3}{(1 + x^2y^2)^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3y \frac{x^2y^2 - 3}{(1 + x^2y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \frac{1 - 6x^2y^2 + x^4y^4}{(1 + x^2y^2)^3}.$$

Если $M = (x, y)$, где $xy = 1$ или $xy = -1$, то квадратичная форма $d^2z(M) = -\frac{\operatorname{sign}(xy)}{2}(y^2\,dx^2 + x^2\,dy^2 + 2xy\,dx\,dy)$ полуопределена, как и должно быть в точках нестрогого экстремума.

Квадратичная форма $d^2z(M_0) = 2dxdy$ — знакопеременная, следовательно, $M_0 = (0, 0)$ — седловая точка функции z.

Определение. Пусть переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ связаны системой уравнений

$$F_1(x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F_k(x_1, \ldots, x_m) = 0, \qquad k < m,$$

$F_i \in C^1(G)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, область G принадлежит R^m и точка $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) \in G$ такова, что $F_i(x_0) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Функция $f: G \to R$ имеет *условный максимум* (*минимум*) в *точке* x_0, если существует окрестность $U(x_0) \in G$ точки x_0 такая, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ ($f(x_0) \leqslant f(x)$) для всех $x \in U(x_0)$, для которых $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k$.

(Другими словами, сравниваются между собой значения функции, которые она принимает на множестве тех точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи $F_i(x_1, \ldots, x_m) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$.)

В дальнейшем предполагаем, что функции f и F_i, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \frac{\partial F_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

в каждой точке $x_0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_m{}^0) \in G$ равен k. Для определенности положим, что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки $M_0 = (x^0{}_{k+1}, \dots, x^0{}_m)$ система уравнений $F_i(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, определяет k функций класса $C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов:

$$x_1 = x_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m),$$
$$x_2 = x_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k = x_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m).$$

Таким образом, в некоторой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 функция f с учетом условий связи $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, представляет функцию класса $C^2(U(M_0))$ от $(m-k)$ независимых аргументов: $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_1(x_{k+1}, \dots, x_m), \dots, x_k(x_{k+1}, \dots, x_m), x_{k+1}, \dots$ $\dots, x_m) = f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$. Если $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ есть точка локального условного экстремума функции f при условиях $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, то точка $(x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \dots, x_m^0)$ есть точка обычного локального экстремума функции $f^*(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m)$.

Итак, исследование условного локального экстремума функции f сводится к уже разобранному исследованию обычного локального экстремума некоторой функции меньшего числа переменных.

Дифференциал функции f^* имеет вид:

$$df^* = \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q = \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q + \sum_{q=k+1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q,$$

где $dx_1, dx_2, \dots, dx_k$ есть дифференциалы функций $x_1, x_2, \dots, x_k$, определенных системой уравнений $F_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. Выражение этих дифференциалов в виде линейных форм от дифференциалов независимых переменных dx_{k+1}, dx_{k+2}, $\ldots$, dx_m находятся из системы линейных уравнений: $dF_i=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$, т. е.

$$\sum_{q=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_q} dx_q = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k < m.$$

Подставив найденные из этой системы выражения $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ в $df^* = \sum_{i=q}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_q} dx_q$ получим выражение df^* в виде линейной формы дифференциалов dx_{k+1}, dx_{k+2}, $\ldots$, dx_m. Координатами $(x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \ldots \ldots, x^0_m)$ стационарной точки M_0 функции f^* будут такие значения $x^0_{k+1}, x^0_{k+2}, \ldots, x^0_m$, что в точке $x_0 = (x_1(x^0_{k+1}, \ldots, x^0_m), \ldots, x_k(x^0_{k+1}, \ldots \ldots, x^0_m)$ все коэффициенты этой линейной формы равны нулю.

Чтобы окончательно решить вопрос о поведении функции в окрестности точки M_0, нужно исследовать $d^2f^*(M_0)$. Второй дифференциал функции f^* имеет вид

$$d^2f^* = \sum_{q,p=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} dx_q dx_p + \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} d^2x_q,$$

где d^2x_1, $\ldots$, d^2x_k есть вторые дифференциалы функций x_1, x_2, $\ldots$ $\ldots$, x_k, определенных системой уравнений $F_i(x)=0$, $1\leqslant i\leqslant k<m$. (Обратите внимание, что $d^2x_{k+1}=\ldots=d^2x_m=0$, так как x_{k+1}, $\ldots$, x_m независимые переменные.) Выражение вторых дифференциалов d^2x_1, d^2x_2, $\ldots$, d^2x_k в виде квадратичных форм дифференциалов dx_{k+1}, $\ldots$, dx_m находятся из системы

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{m} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_q} dx_q = 0, \\ \sum\limits_{p,q=1}^{m} \dfrac{\partial^2 F_i}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q + \sum\limits_{q=1}^{k} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_q} d^2x_q = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k < m. \end{cases}$$

Подставляя в выражение

$$d^2f^* = \sum_{q,p=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} dx_p dx_q + \sum_{q=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_q} d^2x_q$$

dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_k в виде линейных форм и d^2x_1, d^2x_2, $\ldots$, d^2x_k в виде квадратичных форм от dx_{k+1}, dx_{k+2}, $\ldots$, dx_m, получим выражение d^2f^* в виде квадратичной формы от dx_{k+1}, dx_{k+2}, $\ldots$, dx_m. Если полученная форма знакоопределенная, то точка $M_0 = (x^0{}_{k+1}, \ldots, x^0{}_m)$ есть точка локального экстремума функции f^*

и, следовательно, точка $x_0=(x_1(x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0), \ldots, x_k(x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0), x_{k+1}^0, \ldots, x_m^0)$ есть точка локального условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$.

Пример 6. Найдем точки условного экстремума функции $z=4x-y$, если $x^2-y^2=15$.

Решение. В этом примере $F(x, y)=x^2-y^2-15$, матрица $\left(\frac{\partial F}{dx}; \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ есть $(2x; -2y)$. Из условия $x^2-y^2=15$ следует, что в множестве точек, координаты которых удовлетворяют этому условию, не содержится точек с нулевой координатой x, следовательно, всюду на этом множестве минор $2x$ матрицы $(2x; -2y)$ отличен от нуля. Поэтому условие связи определяет всюду на этом множестве функцию $x=x(y)$. Анализируем теперь функцию z как функцию одного аргумента $y: z^*(y)=z(x(y), y)=4x(y)-y$. Из уравнения $x^2-y^2=15$ получаем, что $xdx-ydy=0$, откуда $dx=\frac{y}{x}dy$ и, следовательно, $dz^*=4dx-dy=\left(\frac{4y}{x}-1\right)dy$. Итак, для координат критической точки функции $z^*(y)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{4y}{x}-1=0, \\ x^2-y^2=15. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что возможными точками локального условного экстремума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$ являются точки $M_1(4, 1)$ и $M_2(-4, -1)$.

Теперь надо рассмотреть $d^2z^*(y)$ в точках $x=4$, $y=1$ и $x=-4$, $y=-1$. Так как $z^*(y)=4x(y)-y$, то $d^2z^*(y)=4d^2x$, а из условия связи $x^2-y^2=15$ получаем, что $xdx-ydy=0$ и $xd^2x+dx^2-dy^2=0$. Следовательно, в точке $x=4$, $y=1$ имеем

$$\begin{cases} 4dx-dy=0, \\ 4d^2x+dx^2-dy^2=0, \end{cases}$$

откуда $d^2z^*(y)=4d^2x=\frac{15}{16}dy^2$ и точка $M_1(4, 1)$ является точкой локального условного минимума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$, причем $z(M_1)=15$.

Точно так же получим, что в точке $x=-4$, $y=-1$ $d^2z=-\frac{15}{16}dy^2$, т. е. точка $M_2(-4, -1)$ является точкой локального условного максимума функции $z=4x-y$ при условии $x^2-y^2=15$, причем $z(M_2)=-15$.

Замечание. В данном примере значение функции z в точке локального условного минимума больше, чем в точке локального условного максимума; это объясняется тем, что множество, на котором рассматриваются значения функции z, не является связным.

На практике нахождение точек условного экстремума функции $f=f(x_1, \dots, x_m)$ с условиями связи $F_i(x_1, \dots, x_m)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, методом дифференцирования сложных и неявных функций часто оказывается весьма громоздким. Более простые вычисления получаются, если применить следующий метод.

Метод множителей Лагранжа. Пусть область G принадлежит R^m, функции $f: G \to R$ и $F_i: G \to R$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, принадлежат классу $C^2(G)$ и ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

во всех точках $x_0 \in G$ равен k.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = L(x_1, x_2 \dots x_m, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x).$$

Точка $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ может быть точкой условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$, только тогда, когда существуют числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$ такие, что точка $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0)$ является критической точкой функции Лагранжа $L(x, \lambda)$. При этом числа $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$ называются множителями Лагранжа, соответствующими точке x_0. Дальнейшее исследование поведения функции f в выделенных точках возможного локального условного экстремума проводится анализом второго дифференциала функции $L(x, \lambda)$ с учетом условий связи. Если выражение $d^2L(x, \lambda)$ в точке M_0 есть знакоопределенная квадратичная форма, то и с учетом условий связи выражение для $d^2L(x, \lambda)$ останется таковым, т. е. экстремальной точке функции $L(x, \lambda)$ соответствует точка условного экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$. Обратим внимание, что если выражение $d^2L(x, \lambda)$ есть знакопеременная квадратичная форма, то с учетом условий связи выражение d^2L уже может быть знакоопределенной квадратичной формой; т. е. не всегда точка локального экстремума функции f при условиях $F_i(x)=0$, $1 \leqslant i \leqslant k < m$ соответствует экстремальной точке функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

Пример 7. Найдем экстремальные значения функции $z = x^2 - y^2$ на прямой $2x - y - 3 = 0$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(2x - y - 3).$$

Координаты критических точек функции $L(x, y, \lambda)$ находятся из системы

$$\begin{cases} 2x+2\lambda=0, \\ -2y-\lambda=0, \\ 2x-y-3=0, \end{cases}$$

отсюда получаем $x=2$, $y=1$, $\lambda=-2$. В точке $(2, 1, -2)$ выражение $d^2L(x, y, \lambda)$, равное $2dx^2-2dy^2+2dxd\lambda-dyd\lambda$, есть знакопеременная квадратичная форма, следовательно, точка $(2, 1, -2)$ не экстремальная точка функции $L(x, y, \lambda)$, но эта точка может быть экстремальной точкой функции $z=x^2-y^2$ при условии связи. В самом деле, из условия связи имеем $2dx=dy$. Учитывая это соотношение, для d^2L получаем выражение $2dx^2-8dx^2=-6dx^2$, которое есть отрицательно определенная квадратичная форма, и, следовательно, точка $(2, 1)$ является точкой локального максимума функции $z=x^2-y^2$ при условии связи $2x-y-3=0$.

Пример 8. Исследуем, имеет ли функция

$$u(x, y, z)=xy+xz+yz$$

условный экстремум в точке $M_0(1, 1, 1)$, если

$$2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0.$$

Решение. Напишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda)=xy+xz+yz+\lambda(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17).$$

Координаты x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} y+z+6\lambda x^2y^2z+8\lambda x=0, \\ x+z+4\lambda x^3yz+10\lambda y=0, \\ x+y+2\lambda x^3y^2+12\lambda z=0, \\ 2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0. \end{cases}$$

Проверка показывает, что $x=1$, $y=1$, $z=1$, $\lambda=-1/7$ есть решение этой системы. Следовательно, в точке $M_0=(1, 1, 1)$ возможен условный экстремум функции $u(x, y, z)$ с условием $2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$, причем соответствующий множитель Лагранжа λ равен $-1/7$. Находим второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2L(x, y, z, \lambda)=2dxdy+2dxdz+2dydz+d\lambda d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17).$$

В силу условий связи

$$d(2x^3y^2z+4x^2+5y^2+6z^2-17)=6x^2y^2zdx+4yx^3zdy+2x^3y^2dz+8xdx+10ydy+12zdz=0,$$

поэтому при $x=1$, $y=1$, $z=1$ имеем

$$6dx+4dy+2dz+8dz+10dy+12dz=0, \text{ откуда } dz=-dx-dy,$$

и, следовательно, в точке $(1,\ 1,\ 1,\ -1/7)$

$$d^2L=2dxdy-2dx^2-2dxdy+2dy^2-2dxdy=-2(dx^2+dxdy+dy^2).$$

Так как $d^2L(x,\ y,\ z,\ \lambda)$ в точке $(1;\ 1;\ 1;\ -1/7)$ является отрицательно определенной квадратичной формой, то функция $L(x,\ y,\ z,\ \lambda)$ имеет в точке $(1;\ 1;\ 1;\ -1/7)$ локальный максимум и, следовательно, точка $M_0(1,\ 1,\ 1)$ есть точка условного максимума функции $u=xy+yz+zx$ при условии $2x^3y^2+4x^2+5y^2+6z^2-17=0$.

Иногда можно выяснить характер точек, полученных методом Лагранжа, не прибегая к анализу второго дифференциала функции Лагранжа в этой точке.

Пример 9. Найдем точки условного экстремума функции

$$z=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y,$$

если $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

Решение. Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\ y,\ \lambda)=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y+\lambda(x^2+y^2-a^2).$$

Координаты x, y, λ критической точки функции $L(x,\ y,\ \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 6x^2+3a^2+2\lambda x=0, \\ 6y^2+3a^2+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2-a^2=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем две критические точки $(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2},\ -3\sqrt{2}a)$ и $(-a/\sqrt{2},\ -a/\sqrt{2},\ 3/\sqrt{2}a)$.

Множество $K\subset R^2$, $K=\{(x,\ y):x^2+y^2=a^2\}$ есть компактное связное множество. Следовательно, непрерывная функция z на этом множестве должна принимать максимальное и минимальное значения. Из предыдущего рассмотрения видно, что эти значения функция z принимает в одной из точек $(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2})$ и $(-a/\sqrt{2},\ -a/\sqrt{2})$, так как в других точках множества K функция z заведомо не имеет экстремума. Так как $z(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2})=4a\sqrt[3]{2}$, $z(-a/\sqrt{2},\ -a/\sqrt{2})=-4a\sqrt[3]{2}$ и K — связно, то точка $M_1=(a/\sqrt{2},\ a/\sqrt{2})$ — точка условного максимума, а точка $M_2=(-a/\sqrt{2},\ -a/\sqrt{2})$ — точка условного минимума функции $z=2x^3+3a^2x+2y^3+3a^2y$ при условии $x^2+y^2=a^2$.

Пример 10. На сфере $S=\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2+z^2=a^2\}$ расположены три материальные точки $P_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $P_3=(x_3,\ y_3,\ z_3)$ с массами m_1, m_2, m_3. При таком положении точки

$P=(x, y, z)$ на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$ сумма $\sum_{i=1}^{3} \|P-P_i\|^2 \cdot m_i$ — момент инерции данной системы точек относительно точки P — будет минимальной?

Решение. Необходимо найти условный минимум функции

$$u(x, y, z)=\sum_{i=1}^{3} m_i\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right],$$

если $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda)=\sum_{i=1}^{3} m_i\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]+$$
$$+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-a^2\right).$$

Координаты x, y, z, λ критической точки функции $L(x, y, z, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2m_1(x-x_1)+2m_2(x-x_2)+2m_3(x-x_3)+2\lambda x=0, \\ 2m_1(y-y_1)+2m_2(y-y_2)+2m_3(y-y_3)+2\lambda y=0, \\ 2m_1(z-z_1)+2m_2(z-z_2)+2m_3(z-z_3)+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=a^2. \end{cases}$$

Эта система имеет два решения:

$$\tilde{x}_{1,2}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}}, \quad \tilde{y}_{1,2}=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}}, \quad \tilde{z}_{1,2}=$$
$$=\frac{m_1z_1+m_2z_2+m_3z_3}{m_1+m_2+m_3+\lambda_{1,2}},$$

где

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{a^2\sum_{i=1}^{3} m_i^2+2\sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{3} m_im_j(x_ix_j+y_iy_j+z_iz_j)}\ -$$
$$-(m_1+m_2+m_3).$$

Следовательно, точкой P может быть одна из двух точек: $P_0=(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$ и $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$, а именно та, для которой значение функции $u(P)$ меньше, в зависимости от конкретных чисел x_i, y_i, z_i, m_i, $1\leqslant i\leqslant 3$. В общем виде это сравнение здесь не проводим из-за громоздкости выкладок.

Выделение точек условного экстремума входит составной частью в решение задачи нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f: E\to R$, $E\subset R^m$, на множестве $E_1\subset E$. Действительно, если эти значения функция f принимает во внутренней точке x_0 множества E_1, то точка x_0 есть точка обычного локального экстремума функции f; если наибольшее или наименьшее значение функция f принимает в граничной точке x_1 множества E_1, то точка x_1 есть точка условного локального экстремума функции f при условии, что рассматриваются только граничные точки множества E_1.

Пример 11. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az \quad (a > 0)$$

в полушаре

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2, \ z \geqslant 0\}.$$

Решение. Так как непрерывная функция u рассматривается на компакте, то существуют точки $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\widetilde{M}_0 = (\widetilde{x}_0, \widetilde{y}_0, \widetilde{z}_0)$ такие, что

$$u(M_0) = \max_{M \in D} u(M), \quad u(\widetilde{M}_0) = \min_{M \in D} u(M).$$

Если эти точки лежат внутри полушара, то их координаты должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 2a = 0, \\ 2y - 2a = 0, \\ 2z - 2a = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что внутри полушара есть только одна возможная экстремальная точка $M_1 = (a, a, a)$.

Возможную экстремальную точку на полусфере

$$S: \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \ z > 0\}.$$

Ищем как точку условного экстремума функции

$$u = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az$$

при условии

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2, \quad z > 0.$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 - 2ax + y^2 - 2ay + z^2 - 2az + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2).$$

Координаты критической точки функции $L(x, y, z, \lambda)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 2a + 2\lambda x = 0, \\ 2y - 2a + 2\lambda z = 0, \\ 2z - 2a + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем, что возможной экстремальной точкой на полусфере S является точка $M_2=(2a/\sqrt{3},\ 2a/\sqrt{3},\ 2a/\sqrt{3})$.

Далее ищем возможную экстремальную точку $M_3=(x,\ y,\ 0)$ на круге $x^2+y^2\leqslant 4a^2$, $z=0$. Так как в точках этого круга

$$u(x,\ y,\ z)=u(x,\ y,\ 0)=x^2-2ax+y^2-2ay,$$

то координаты экстремальной точки, лежащей внутри этого круга, должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x-2a=0, \\ 2y-2a=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Отсюда получаем $M_3=(a,\ a,\ 0)$.

Наконец, осталось найти возможную экстремальную точку $M_4=(x,\ y,\ 0)$ на окружности $x^2+y^2=4a^2$, $z=0$.

Запишем функцию Лагранжа

$$L(x,\ y,\ \lambda)=x^2-2ax+y^2-2ay+\lambda(x^2+y^2-4a^2).$$

Координаты критической точки этой функции должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x-2a+2\lambda x=0, \\ 2y-2a+2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=4a^2. \end{cases}$$

Отсюда получаем две возможные экстремальные точки на окружности:

$$x^2+y^2=4a^2,\ z=0:\ M_4=(\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,a,\ 0) \text{ и } M_5=(-\sqrt{2}\,a,\ -\sqrt{2},\ 0).$$

Итак, наибольшее и наименьшее значения в полушаре D функция u может достигать только в одной из пяти точек:

$$M_1=(a,\ a,\ a),\ M_2=\left(\frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{2a}{\sqrt{3}},\ \frac{2a}{\sqrt{3}}\right),\ M_3=(a,\ a,\ 0),\ M_4=(\sqrt{2}\,a,\ \sqrt{2}\,a,\ 0),\ M_5=(-\sqrt{2}\,a,\ -\sqrt{2},\ 0).$$

Так как

$$u(M_1)=-3a^2,\ u(M_2)=-4(\sqrt{3}-1)a^2,\ u(M_3)=-2a^2,\ u(M_4)=-4(\sqrt{2}-1)a^2,\ u(M_5)=4a^2(\sqrt{2}+1),$$

то

$$\max_{M\in D} u(M)=u(M_5)=4a^2(\sqrt{2}+1),$$

$$\min_{M\in D} u(M)=u(M_1)=-3a^2.$$

Задачи

Найти частные производные указанного порядка от следующих функций:

1. $u=\cos(x+y)$; $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.
2. $u=\frac{1}{ax+by}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
3. $u=\sin\frac{x}{y}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$.
4. $u=\ln(1+2x+3y)$; $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$.
5. $u=e^{x^2+y^2+z^2}$; $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.
6. $u=x^y+y^x$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Найти якобиан отображений $h: R^m \to R^m$, если:

7. $h: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$; $h:(r,\ \varphi)\to(x,\ y)$.
8. $h: u=\frac{z}{y^2},\ v=\frac{z}{x},\ w=z$; $h:(x,\ y,\ z)\to(u,\ v,\ w)$.
9. $h: u=\frac{z}{x^2+y^2},\ v=xy,\ w=\frac{y}{x}$; $h:(x,\ y,\ z)\to(u,\ v,\ w)$.
10. $h: x=\xi\eta\zeta,\ y=\xi\eta-\xi\eta\zeta,\ z=\eta-\xi\eta$; $h:(\xi,\ \eta,\ \zeta)\to(x,\ y,\ z)$.
11. $h: x=r\cos\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\varphi\cos\psi,\ y=r\sin\psi$; $h:(r,\ \varphi,\ \psi)\to$ $\to(x,\ y,\ z)$.
12. $h: u=xy,\ v=\frac{y}{x}$; $h:(u,\ v)\to(x,\ y)$.
13. $h: u=x^2+z^2,\ v=y^2+z^2,\ w=x^2+y^2$; $h:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y,\ z)$.
14. $h: u=x+y+z,\ uv=y+z,\ uvw=z$; $h:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y,\ z)$.
15. $h: x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=u^2$; $h:(x,\ y,\ z)\to(r,\ \varphi,\ u)$.

Написать матрицу производной отображения φ в каноническом базисе, если:

16. $\varphi:(u,\ v)\to(x,\ y,\ z)$; $x=uv,\ y=u^2+v^2,\ z=u^2-v^2$.
17. $\varphi:(u,\ v)\to(x,\ y)$; $x=u\cos v,\ y=u\sin v$.
18. $\varphi:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y)$; $x=u^2+v^2+w^2,\ y=u+v+w$.
19. $\varphi:(u,\ v)\to x$; $x=\frac{u}{v}$.
20. $\varphi: u\to(x,\ y)$; $x=u\operatorname{tg} u,\ y=u\sin u$.
21. $\varphi:(u,\ v,\ w)\to(x,\ y,\ z)$; $x=u\ln\frac{v}{w},\ y=v\ln\frac{w}{u},\ z=w\ln\frac{u}{v}$.

Написать матрицу производной отображения $\varphi=h\circ g$ в каноническом базисе, если:

22. $g: x = u^2 - w^2,\ y = u^2 - v^2;\quad h: \xi = xy,\ \eta = \dfrac{x}{y},\ \zeta = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}.$

23. $g: x = u^2 + v^2 + w^2;\quad h: \xi = x^2,\ \eta = x^4.$

24. $g: x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = w;\quad h: \xi = x^2 - yz,\ \eta = z^2 - xy.$

25. $g: x = \sin u,\ y = \cos u,\ z = e^u;\quad h: \zeta = \operatorname{arctg} xyz.$

26. $g: x = u^v;\quad h: \xi = \sin x,\ \eta = \cos x,\ \zeta = \operatorname{tg} x.$

27. $g: x = uv,\ y = u^2 - v^2;\quad h: \xi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\ \eta = \ln(x^2 + y^2),\ \zeta = x - y.$

Написать матрицу производной отображения $\varphi = h \circ g$ в каноническом базисе в точке M_0, если:

28. $g: u = \operatorname{arctg}(y^2 - 2x)$ [illegible] $=$ arc[illegible] $\dfrac{[illegible]}{x};$

$h: \xi = u^2 + v^2,\ \eta = u^2 -$ [illegible] $\quad M_0: x_0 = 1,\ y_0 = \sqrt{3}.$

29. $g: u = xyz,\ v = x^2 + y^2 + z^2;$

$h: \xi = uv,\ \eta = \dfrac{u}{v},\ \zeta = \dfrac{v}{u^2 + v^2};\quad M_0: x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 1.$

30. $g: u = x^2 + y^2 + z^2;$

$h: \xi = \arcsin\dfrac{1}{u};\quad M_0: x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 3.$

31. $g: u = \ln x, v = x^2,\ w = x + \ln x;$

$h: \xi = \dfrac{u}{v},\ \eta = w + u;\quad M_0: x_0 = 1.$

32. Написать матрицы отображений $\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}$ и $\dfrac{\partial\varphi}{\partial Y}$ в каноническом базисе, где

$\varphi: X \times Y \to (u, v),\ X = (x_1, x_2),\ Y = (y_1, y_2, y_3),$

если:

а) $u = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$
$v = x_1 + x_2 - y_1 y_2 y_3;$

б) $u = y_1 \sin x_1 + y_2 \sin x_2 + y_3 \cos(x_1 - x_2),$
$v = y_2 \cos(x_1 x_2) + y_1 \sin(x_1^2 - x_2^2) + y_3 \cos(x_1^2 + x_2^2);$

в) $u = y_1 \operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2} + (y_2 - y_3)\ln(x_1^2 + x_2^2),$

$v = y_2\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right) + y_1 y_3 \ln\dfrac{x_1}{x_2}.$

33. Проверить, что в точке $M(1, 1, 1, 1, 1)$ соотношения
$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 5 = 0,$
$x_1 - x_2 + y_1^3 - y_2^3 + y_3^3 - 1 = 0,$
$x_1^3 + 2x_2^3 + y_2 y_3 - 4 = 0.$

не удовлетворяют условиям теоремы существования отображения $\varphi: (y_3, y_2) \to (x_1, x_2, y_1)$, но удовлетворяют условиям существования отображения $\varphi: (x_1, x_2) \to (y_1, y_2, y_3)$.

34. Проверить, что данные соотношения однозначно определяют отображение $\varphi: X \to Y$ в окрестности точки M_0, если:

а) $x_1y_1 + x_2y_2 - y_3y_2 - 1 = 0,$
$(x_2 - x_1)(y_2 + y_1) - y_1y_2y_3 - 1 = 0,$
$(x_1^2 + x_2^2)(y_3^2 - y_1^2) + y_1y_2 = 0,$
$X: (x_1, x_2),\ Y: (y_1, y_2, y_3),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0),$
$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 2,\ y_1^0 = 1,\ y_2^0 = 0,\ y_3^0 = 1;$

б) $\sin(\pi x_1y_1) + \sin(\pi x_2y_2) + \sin(\pi x_3y_3) = 0,$
$\cos\frac{\pi}{2}(x_1 - y_2) + \cos\frac{\pi}{2}(x_2 - y_1) + \cos\frac{\pi}{2}(x_3 - y_1) - 2 = 0,$
$X: (x_1, x_2, x_3),\ Y: (y_1, y_2),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0),$
$x_1^0 = 0,\ x_2^0 = 1,\ x_3^0 = 0,\ y_1^0 = 1,\ y_2^0 = 0;$

в) $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1y_1}{x_2y_2} - x_1x_2y_1y_2 = 0,$
$x_2^2y_1^2 - x_1^2y_2^2 - \frac{1}{x_1y_1} - \frac{4}{x_2y_2} = 0,$
$X: (x_1, x_2),\ Y: (y_1, y_2),$
$M_0(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0),$

$x_1^0 = 1,\ x_2^0 = 3,\ y_1^0 = 1/2,\ y_2^0 = 1/16.$

Найти дифференциалы первого и второго порядков от следующих функций (x, y и z — независимые переменные):

35. $u = x^2y^2$.

36. $u = xy + yz + zx$.

37. $u = \cos(e^xy)$.

38. $u = x^y + y^x$.

39. $u = \ln xyz,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$.

40. $u = \operatorname{arctg}\frac{xy}{z}$.

41. Найти значение первого дифференциала функции u в точке M_0 на векторе смещения h, если:

а) $u = \arcsin xy,\ M_0(1/2, 1),\ h = (0,5;\ 0,1)$;

б) $u = x^3y - xy^3,\ M_0(1, 2),\ h = (-0,5;\ 0,8)$;

в) $u = x^{2y},\ M_0(4, 1),\ h = (0,1;\ 0,2)$;

г) $u = \sqrt[3]{4x^2 + y^2},\ M_0(1, 2),\ h = (-0,2;\ 0,3)$;

д) $u = x\sqrt{1+y^3}$, $M_0(2, 2)$, $h = (0;\ 0,5)$;

е) $u = \cos(x - y^2)$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$, $h = (0,1;\ 0)$.

Найти дифференциалы первух двух порядков сложной функции u, если φ — дважды дифференцируемая функция:

42. $u = \varphi(t)$, $t = x^2 - y^2$.

43. $u = \psi(t)$, $t = xyz$.

44. $u = \varphi(t)$, $t = xy + yz + zx$.

45. $u = \varphi(t)$, $t = x^2 + y^2 + z^2$.

46. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$.

47. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

48. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

49. $u = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = \frac{x}{y}$, $\eta = \frac{y}{x}$.

50. $u = \varphi(x + y, x^2 + y^2)$.

51. $u = \varphi(xy, yz)$.

52. $u = \varphi\left(\frac{x^2}{y}, \frac{y}{x^2}\right)$.

53. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = xy$, $\eta = x - y$, $\zeta = x + y$.

54. $u = \varphi(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$, $\zeta = z^2$.

55. $u = \varphi(2x, 3y, 4z)$.

56. $u = \varphi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$.

57. $u = \varphi(x + z^2, y + x^2, z + y^2)$.

58. $u = \varphi(\sin xz, \sin yz, \sin xy)$.

59. $u = \varphi(xe^z, ye^z, ze^{x-y})$.

60. $u = \varphi(x^2 + y^2, y^2 + z^2, x^2 + z^2)$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $y(x)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0)$:

61. $x^2 + yx + y^2 = 3$, $x_0 = y_0 = 1$.

62. $xy + \ln xy = 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1/2$.

63. $e^{x+y} + y - x = 0$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $y_0 = -1/2$.

Проверить, что данное уравнение однозначно определяет функцию $z(x, y)$ в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$:

64. $x + y + z = \sin xyz$, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

65. $x^2z^3 + y^3z^2 + z^2x^3 = 8$, $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = 2$.

66. $x^y + y^z + z^x = 3$, $x_0 = y_0 = z_0 = 1$.

Предполагая, что точка (x_0, y_0, z_0) такова, что в ее некоторой окрестности однозначно определена дважды непрерывно дифференцируемая функция $z(x, y)$, найти значения указанных производных в этой точке:

67. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^2+y^2+z^2=R^2$.

68. $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, если $\operatorname{arctg}\frac{z}{x}=z+x+y$.

69. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x+y+z=\ln xyz$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

70. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $\ln(xy+yz)=x^2+y^2+z^2-2$.

71. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x+y+z=\cos xyz$.

72. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x^y+y^z=3$.

73. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=u^2-v^2$, $y=uv$, $z=u+2v$,

74. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$, $y=\ln(u^2+v^2)$, $z=u-v$.

75. $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $x=e^u\sin v$, $y=e^u\cos v$, $z=uv$.

Найти частные производные первого порядка функции $z=z(x, y)$, заданной неявно, предварительно найдя ее первый дифференциал:

76. $z^4+zx^3+zy^3=a^4$.

77. $xyz=x^2+y^2+z^2$.

78. $\frac{z}{x^2+y^2}=\ln(x+y+z)$.

79. $z\cos x+y\cos z+x\cos y=3$.

80. $z(1+x^2)=y(1+z^4)$.

Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$, если:

81. $x^2=z^2+y^2$, $az+by+cz=1$.

82. $x^3+y^2-3z+a=0$, $z^2-2y^2-x+6=0$.

83. $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, $x+y+z=a$.

84. $\cos x+\cos y+\cos z=a$, $x^3+y^3+z^3=b$.

85. $\sin^2 y-\cos x\sin z=0$, $2x-y\operatorname{tg} z=0$.

86. Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx}$, если

$$u^2+x^2+y^2+z^2=a^2,$$
$$\ln xy+\frac{y}{x}=b^2,$$
$$\ln\frac{z}{x}+zx=c^2.$$

Найти первые и вторые производные функций $z(x, y)$ и $u(x, y)$, если:

87. $x+y+z+u=a,$
$x^3+y^3+z^3+u^3=b.$

88. $x+y+z+u=a,$
$xyzu=b.$

89. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, если
$x(u^2+v^2)-uy=2, \quad xv-y(u^2+v^2)=1.$

90. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ в точке $x=-1, \ y=1 \ (u=2, v=-2)$, если
$xuv+yxu+vxy+uvy=0,$
$x^2+y^2+u^2+v^2=10.$

91. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\frac{x+u}{y-u}$, а $u(x, y)$ находится из уравнения $ux-u^3+y^3=8$.

Найти первые и вторые производные функций $y(x)$ и $z(x)$ в точке x_0, если:

92. $x^2-y^2+z^2=1,$
$y^2-2x+z=0, \quad x_0=1 \ (y_0=1, \ z_0=1).$

93. $7x^2+2y-3z^2=-9,$
$4x+2y^2-2z^3+4=0, \quad x_0=1 \ (y_0=-2, \ z_0=2).$

94. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $z=x^2+y^2$, где $y=y(x)$ есть решение уравнения $1+x+y^2=e^{x+y}$.

Найти первый и второй дифференциалы функции $z=z(x, y)$, заданной неявно:

95. $x^2+zx+z^2+y=0.$

96. $x^3+y^3-3xyz-z^3=1.$

97. $2\ln(xyz)=x^2+y^2-z^2-1, \quad x>0, \ y>0, \ z>0.$

98. $x^4+y^4+z^4=4xyz.$

99. $x=u\cos v, \ y=u\sin v, \ z=uv.$

100. $x=u+\ln v, \ y=v-\ln u, \ z=2u+v.$

101. $x=ue^{u+v}, \ y=ue^{u-v}, \ z=u^2+v^2.$

102. Найти первые и вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, если $xu+yv=1, \ x+y+u+v=0$.

Найти второй дифференциал в точке $M_0(x_0, y_0)$, $z(M_0)=z_0$ функции $z(x, y)$, заданной неявно, если:

103. $xz^5+y^3z-x^3=0, \quad M_0=(1, 0), \ z_0=1.$

104. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2yz-2xz-72=0, \ M_0=(1, 1), \ z_0=4.$

105. $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, \quad M_0=(-2, 0), \ z_0=1.$

106. $2x^2+2y^2+z^2+4xz-z-8=0, \quad M_0=(0,2),\ z_0=1.$

107. $x=\cos u\sin v,\ y=\cos u\cos v,\ z=\sin u,$

$$M_0=(\sqrt{6}/4,\ 1/2\sqrt{2}),\ z_0=1/\sqrt{2},\ u_0=\pi/4,\ v_0=\pi/3.$$

Найти вторые дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если:

108. $xu+yv=0,\ uv-xy=5, \quad M_0=(-1,-1),\ u_0=2,\ v_0=2.$

109. $x\sin u+v\sin y=\dfrac{\pi}{4},\ u\cos x+y\cos v=\dfrac{\pi}{6}+x,$

$$M_0=(0,\pi/6), \quad u_0=\pi/6, \quad v_0=\pi/2.$$

Найти указанные производные функции $z(x, y)$, заданной неявно:

110. $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(xyz,\ x+y)=0.$

111. $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(xy, yz, zx)=0.$

112. $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(x^2-y^2,\ y^2-z^2,\ z^2-x^2)=0.$

113. $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$, если $F(y-zx,\ x-zy,\ z-xy)=0.$

Проверить, что функция $z(x, y)$, определяемая соотношением $F(u, v)=0$, является решением уравнения

114. $F\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{z},\ \dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{z}\right)=0,\ (x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0.$

115. $F(z^2-y^2,\ x^2+(y-z)^2)=0,\ (z-y)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy.$

116. $F\left(\dfrac{z}{x},\ 2x-4z-y^2\right)=0,\ xy\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

117. $F\left(x^2+y^2,\ \dfrac{z}{x}\right)=0, \quad xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=yz.$

118. $F((x-y)(z+1),\ (x+y)(z-1))=0,\ (xz+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+$

$$+(x+zy)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2.$$

Показать, что функция u удовлетворяет данному уравнению:

119. $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{z}{y}},\ x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0.$

120. $u=\ln(x^2+y^2), \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

121. $u=e^{-x}(x-y)^2,\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial y}=u.$

122. $u=e^{x+y}(x+y),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$

123. $u = x\cos\frac{y}{x}$, $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

124. $u = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial u}{\partial x}$.

Предполагая, что произвольные функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующее равенство:

125. $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$.

126. $\cos y\frac{\partial z}{\partial x} + \cos x\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x\cos y$, если $z = \sin y +$
$+ \varphi(\sin x - \sin y)$.

127. $xz\frac{\partial z}{\partial x} + yz\frac{\partial z}{\partial y} = x$, если $z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

128. $(y^2 + z^2 - x^2)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0$, если $x^2 + y^2 + z^2 =$
$= y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$.

129. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + x(1 + x^2) = 0$, если $4xyz = -x^4 - 2x^2 + \varphi(x, y)$.

130. $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

131. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x + y)$.

132. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = z$, если $z = e^{-x}\cdot\varphi(x - y)$.

133. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\varphi''$, если $z = \varphi(y - x) - x\varphi'(y - x)$.

134. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x - at) + \psi(x - at)$.

135. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

136. $(x - y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \frac{\varphi(x-y)+\psi(x+y)}{x}$.

137. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, если $z = \sqrt{\frac{x}{y}}\,\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

138. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$,
если $z = \varphi(xy)\ln y + \psi(xy)$.

139. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0$, если $z = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(\varphi(x) + \psi(y))$.

140. $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $z = \varphi(x + \sqrt{t}, y + \sqrt{t}) +$
$+ \psi(x - \sqrt{t}, y - \sqrt{t})$.

141. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, если $z=\dfrac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\dfrac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt$.

142. $\dfrac{\partial^2 z}{dt^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{2}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)$, если $z=\dfrac{\varphi(r-at)+\psi(r+at)}{r}$.

Приняв y за новое независимое переменное, а x за функцию от y, преобразовать следующие уравнения:

143. $y'y'''-3(y'')^2=0$.

144. $y''+(e^y-x)(y')^3=0$.

145. $[y'''+yy'](y')^2-(y'')^2[3y'+x^2]=0$.

146. $y''-y'-(y')^3x^3=0$.

Вводя новые переменные, преобразовать следующие обыкновенные уравнения:

147. $y^2+(x^2-xy)\,y'=0$, $\quad y=tx$, $y=y(t)$.

148. $y'+2xy=2x^3y^3$, $\quad u=\dfrac{1}{y^2}$, $\quad u=u(x)$.

149. $(xy+x^2y^3)^{-1}\,y'=1$, $\quad u=\dfrac{1}{y^2}$, $\quad u=u(x)$.

150. $xy''-y'+xy=0$, $\quad t=\dfrac{x^2}{4}$, $\quad y=y(t)$.

151. $x^2y''+3xy'+y=0$, $\quad x=e^t$, $y=y(t)$.

152. $x^3y'''+2x^2y''-xy'+y=0$, $\quad t=\ln x$, $y=y(t)$.

153. $xy''+2y'-xy=e^x$, $\quad y=\dfrac{u}{x}$, $\quad u=u(x)$.

154. $y''+\dfrac{2}{x}y'-a^2y=2$, $\quad y=\dfrac{u}{x}$, $\quad u=u(x)$.

155. $x^4y''-c^2y=0$, $\quad y=\dfrac{u}{t}$, $x=\dfrac{1}{t}$, $\quad u=u(t)$.

156. $y''=\dfrac{y}{(x-1)^2(x-2)^2}$, $\quad u=\dfrac{y}{x-2}$, $t=\ln\dfrac{x-1}{x+2}$, $u=u(t)$.

157. $(y''-1)(1-x^2)^2+y=0$, $\quad x=\operatorname{th}t$, $y=\dfrac{u}{\operatorname{ch}t}$, $\quad u=u(t)$.

158. $xyy''-x(y')^2+y\cdot y'=0$, $\quad u=\ln\dfrac{y}{x}$, $\quad u=u(y)$.

159. $2y''+(x+y)(1-y')^3=0$, $\quad x-y=u$, $x+y=v$, $v=v(u)$.

Приняв v за новую функцию $v(x, y)$, преобразовать следующие уравнения:

160. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)-x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\quad v=xu$.

161. $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, $\quad v=(x-y)\,u$.

162. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{x-y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{x-y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{3u}{(x-y)^2} = 0, \quad u = \frac{v}{x-y}.$

163. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u, \quad u = ve^{-x-y}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

164. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2, \quad u = xy, \; v = \frac{y}{x}.$

165. $2y \frac{\partial z}{\partial x} + e^x \frac{\partial z}{\partial y} = 4ye^x, \; u = y^2 + e^x, \; v = y^2 - e^x.$

166. $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} + xy = 0, \quad u = \frac{y}{x}, \; v = yx^3.$

167. $2y \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2y = 0, \quad y = v, \; x = \frac{4 + v^2}{2}.$

168. $y \frac{\partial z}{\partial y} + 4 \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{xy}, \quad x = v^2, \; y = (u - v)^2.$

169. $(x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \; v = \frac{y + z}{x + z}.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

170. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + x + y = 0,$

$u = y + x, \quad v = y - x, \quad w = xy - z.$

171. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 4x,$

$u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z.$

172. $x\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right) + z + x + y = 0,$

$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = zx.$

173. $y \frac{\partial z}{\partial y} + x \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$

$u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = yz - x.$

174. $\frac{\partial z}{\partial x} \sin^2 x + \operatorname{ctg} x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z,$

$u = 2y + \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{ctg} x, \quad v = \operatorname{ctg} x \, (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x), \quad w = \operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x.$

175. $yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z, \; u = x^2 + y^2, \; v = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \; w = (x^2 + y^2) e^{-z}.$

176. $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz, \; u = yz - x, \quad v = xz - y,$

$w = xy - z.$

Приняв ξ, η и τ за новые независимые переменные, а w за новую функцию от ξ, η и τ, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

177. $(y+z)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\dfrac{\partial u}{\partial z}=u,$

$x-y=\dfrac{\xi}{u},\quad y-z=\dfrac{\eta}{u},\quad x+y+z=\tau,\quad w=u^2.$

178. $2\cos z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u\sin z\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}-1\right),$

$u\cos z=\xi,\quad u\sin z=\eta,\quad x+y+u=\tau,\quad w=u^2.$

179. Преобразовать уравнение

$$(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв y за функцию, а x и z за независимые переменные.

180. Преобразовать уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

приняв x за функцию, а y и z за независимые переменные.

181. Преобразовать уравнение

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1,$$

приняв y за функцию, а $u=x+z$, $v=y-z$ за независимые переменные.

182. Преобразовать уравнение

$$z\left(y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}+z\right)=y\frac{\partial z}{\partial x},$$

приняв x за функцию, а $u=yz+x$, $v=xz+y$ за независимые переменные.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

183. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\quad u=x-y,\ v=x+y.$

184. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\quad (y>0),\ u=x,\ v=2\sqrt{y}.$

185. $(1+x^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,$

$u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\ v=\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right).$

186. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+5\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,$

$u=\dfrac{1}{3}(x-y),\ v=\dfrac{1}{3}(2x+y).$

187. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+6\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x+y,$
$v=3x-y.$

188. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+5\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=2x-y,\ v=x.$

189. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y=\frac{u+v}{2},\ x=\frac{u-v}{4}.$

190. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=xy,\ v=\frac{y}{x}.$

191. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=xe^y,\ v=y.$

192. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x},\ v=yx^3.$

193. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=\frac{y}{x},\ v=y.$

194. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+(2-\cos^2 x)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x,\ v=y-\cos x.$

195. $\mathrm{tg}^2 x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}\,x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\mathrm{tg}^3 x\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ u=y\sin x,$
$v=y.$

196. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\sqrt{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=\sqrt{x}+\sqrt{y},$
$v=\sqrt{x}.$

197. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y=v,\ x=\frac{u+v^2}{2}.$

198. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ y>0,\ x=\frac{u+v}{2},\ y=\frac{(v-u)^2}{16}.$

199. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+m^2z=0,\ 2x=u^2-v^2,\ y=uv.$

Приняв u, v и w за новые независимые переменные, преобразовать следующие уравнения:

200. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}+3\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0,$
$u=x+y+t,\ v=-y-t,\ w=-t.$

201. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}-2\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial t}=0,$
$x=2u-v-w,\ y=2v-u-w,\ t=u+v+w.$

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразовать к новым переменным следующие уравнения:

202. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x,\ v=x-y,\ w=x-y+z.$

203. $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0,\ u=xy,\ v=y,\ w=z-y.$

204. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ u=y+x,\ v=y-x,\ w=xy-z.$

205. $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}-x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=4,\ u=x+y,$
$v=x-y,\ w=zx.$

206. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},\ x=\cos u,\ y=\cos v,$
$z=e^w.$

207. $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{2}x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y},\ u=\frac{y}{x},\ v=y,\ w=yz-x.$

208. $(1-x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ u=\frac{y}{2}+\sqrt{1-x},$
$v=\frac{y}{2}-\sqrt{1-x},\ w=\sqrt{2}\,z\left(\sqrt[4]{1-x}\right).$

209. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x+y,\ v=\frac{y}{x},\ w=\frac{z}{x}.$

210. $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+4\frac{\partial z}{\partial x}+4\frac{\partial z}{\partial y}+z=0,\ u=2y-x,$
$v=x,\ z=we^{-x-y}.$

211. $(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{4}z=0,\ u=\frac{y+\alpha}{2},\ v=\frac{y-\alpha}{2},$
$z=\frac{w}{\sqrt{\sin\alpha}},\ x=\cos\alpha.$

Преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следующие выражения:

212. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}.$

213. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}.$

214. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$

215. $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

216. $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

217. $y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x}\right).$

218. Найти производную функции $f=x^3-x^2y+y^3-1$ в точке $A(2,\ 1)$ по направлению, образующему угол $\pi/6$ с осью OX.

219. Найти производную функции $f=x-x^2y+y^4$ в точке $A(1,\ 1)$ по направлению вектора AB, где $B(4,\ -2)$.

220. Найти производную функции $z=f(x,\ y)$ в точке $A(x_0,\ y_0)$:

а) по направлению касательной к кривой $\varphi(x,\ y)=C$ в точке $(x_1,\ y_1)$;

б) по направлению нормали к кривой $\varphi(x, y)=C$ в точке (x_1, y_1).

221. Найти производную функции $f=x^2-xy+y^2+2z$ в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\bar{a}(1, 1, 1)$.

222. Найти производную функции $f=x^2-xy+y^2+2$ в точке $M(1, 2, 3)$ по направлению вектора $\bar{a}(1, 1, 1)$.

223. Найти производную функции $z=\ln(x^2+y^2)$ в точке $M(a/8, a3\sqrt{3}/8)$ к кривой $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ по направлению внутренней нормали этой кривой.

224. Дана функция $z=z(x, y)$ из класса $C^1(D)$ и гладкая кривая $C: x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[T_0, T_1]$, лежащая в области D. Обозначим через $\bar{n}(t)$ непрерывно меняющийся вектор нормали к C на $[T_0, T_1]$. Найти $\frac{\partial z}{\partial n}$.

225. Найти производную функции $u=xy+\frac{z}{y}$ в точке $M(2, 1, 2)$ по направлению градиента функции $V=xyz$ в этой точке.

Написать уравнения касательных прямых и нормальных плоскостей к следующим кривым в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

226. $4x=t^4$, $3y=t^3$, $2z=t^2$, $M_0=\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

227. $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $z=4\sin\frac{t}{2}$, $M_0=(\pi/2-1, 1, 2\sqrt{2})$.

228. $x=\frac{3t^2}{1+t^3}$, $y=\frac{(1+t^3)^2-9t^4}{(1+t^3)^2}$, $z=\frac{3t}{1+t^3}$,
$M_0=\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

229. $y=e^x$, $z=x^2$, $M_0=(0, 1, 0)$.

230. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{z}{c}=\operatorname{arctg}\frac{bx}{ay}$, $M_0=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{c\pi}{4}\right)$.

231. $x^2+y^2+z^2=r^2$, $2x^2+y^2-z^2=0$, $M_0=\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2\sqrt{2}}, \frac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\right)$.

232. $2x^2+3y^2+z^2-47=0$, $x^2+2y^2-z=0$, $M_0=(-2, 1, 6)$.

233. $y^2+z^2=25$, $x^2+y^2=10$, $M_0=(1, 3, 4)$.

234. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$, $x^2+y^2=4ax$,
$M_0=\left(a, -a\sqrt{3}, \frac{2\pi a}{3}\right)$.

235. $x=u^2+v^2$, $y=2uv$, $z=u^2v$, $-v^2u$, $z^2=2x-y-2$,
$M_0=(5, 4, -2)$ $(u_0=1, v_0=2)$.

Написать уравнения касательных плоскостей и нормалей к следующим поверхностям в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

236. $z=xy$, $M_0=(5, 1, 5)$.

237. $x^2y^3-xy^2=z+\frac{3}{8}$, $M_0=(2; 1/2; -3/8)$.

238. $x^8+y^{13}+5z=7$, $M_0=(1,\ 1,\ 1)$.

239. $x^3+z^3-3xz=3$, $M_0=(1,\ 4,\ 2)$.

240. $xy+xz+yz=x^3+y^3+z^3$, $M_0=(1,\ 1,\ 1)$.

241. $x^3+y^3+z^3=-xyz$, $M_0=(1,\ -1,\ -1)$.

242. $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $z=u^3+v^3$,
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0))$, $u_0=1$, $v_0=2$.

243. $x=\sin u\sqrt{1-m^2\sin^2 v}$, $y=\cos u\cdot\cos v$,
$z=\sin v\cdot\sqrt{1-m^2\sin^2 v}$, $|m|\leqslant 1$,
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0))$, $u_0=\dfrac{\pi}{4}$, $v_0=\pi/4$.

244. $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=v$,
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0))$, $u_0=1$, $v_0=\pi/4$.

245. $x=e^u+u\sin v$, $y=e^u-u\cos v$, $z=uv$,
$M_0=(x(u_0,\ v_0),\ y(u_0,\ v_0),\ z(u_0,\ v_0))$, $u_0=1$, $v_0=\pi$.

Исследовать на экстремумы следующие функции:

246. $f=-x^2-xy-y^2+x+y$.

247. $f=(2ax-x^2)(2by-y^2)$.

248. $f=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

249. $f=x^3+y^3-3axy$.

250. $f=x^4+y^4-36xy$.

251. $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

252. $f=x^2-2xy^2+y^4-y^5$.

253. $f=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

254. $f=x^2+3xy-8\ln|x|-6\ln|y|$.

255. $f=3x^2y+y^3-18x-30y$.

256. $f=x^2-2xy+4y^2+6z^2+6yz-6z$.

257. $f=xy+yz+zx$.

258. $f=yx^3z^2(2-y-2z-3x)$.

259. $f=x+y+8\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0\leqslant y\leqslant 2\pi$.

260. $f=\ln xy-z(x-y)-x^2-y^2+2xy-y$.

261. $f=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

262. $f=z\ln z-z-z\ln xy+xy+x^2+2y^2-4x-2y$.

263. $f=4-(x^2+y^2)^{2/3}$.

264. $f=\dfrac{x^2-y^2}{1+x^4+y^4-2x^2y^2}$.

Исследовать на экстремумы в заданной точке следующие функции:

265. $f=x^3+y^3+z^2+3xy-2z-9x-9y$,
а) $M_1=(2,\ -1,\ 1)$; б) $M_2=(-1,\ 2,\ 1)$.

266. $f=x^5+3x^3y+3y^3x+y^5$, $M_0=(-12/5,\ -12/5)$.

267. $f=x\cos y+z\cos x$, а) $M_1=(\pi/2,\ 0,\ 1)$; б) $M_2=(\pi/2,\ \pi,\ -1)$.

Найти те точки кривой, в которых ордината или абсцисса имеют локальный экстремум:

268. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$, $a>0$.

269. $x^3+y^3=3axy$, $xy\neq 0$, $a>0$.

270. $x^4+y^4=8xy^2$, $xy\neq 0$.

271. $x^4+y^4+4x^2y-2y^3=0$ (исследовать только ординату).

272. $(x^2+y^2-4x)^2=16(x^2+y^2)$, $x^2+y^2\neq 0$.

273. $r=a\sqrt{\sin 2\varphi}$, $a>0$.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции y от переменной x:

274. $y^2-ay-\sin x=0$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

275. $(y-x)^3+x+6=0$.

276. $(y-x^2)^2=x^5$, $x^2+y^2\neq 0$.

277. $x^2+xy+y^2=27$.

Найти экстремальные значения заданной неявно функции z от переменных x и y:

278. $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$.

279. $5z^2+4zy+y^2-2y+3x^2-6x+4=0$.

280. $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$.

281. $x^4+y^4+z^4=2(x^2+y^2+z^2)$.

282. $z^2+xyz-xy^2-x^3=0$.

Проверить существование экстремума у функции $z(x,\ y)$ в точке M_0, если

283. $21\ln(x^2+y^2+z^2)=12x-18y-13z$, $M_0=(2/7,\ -3/7,\ 6/7)$.

284. $\pi x\sin\pi y-\pi^2y^2\sin\pi z+\pi^2 z\sin\pi x=\dfrac{\pi^2}{6}(7-9y)$,

$M_0=(1/2,\ 1,\ 1/6)$.

Найти точки условных экстремумов следующих функций:

285. $f=2x+y-z+1$, $x^2+y^2+2z^2=22$.

286. $f=x-y$, $\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}y=0$, $|x|<\pi/2$, $|y|<\pi/2$.

287. $f=xy$, $x^3+y^3-axy=0$, $a>0$.

288. $f=xyz$, $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

289. $f=xyz$, $xy+xz+yz=a^2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, $a>0$.

290. $f=xyz$, $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=8$.

291. $f=xy+yz$, $x^2+y^2=2$, $y+z=2$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

292. $f=xy^2z^3$, $x+my^2+nz^3=1$, $m>0$, $n>0$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

293. $f=x_1^m+x_2^m+\ldots+x_n^m, \quad (m>1), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i=a.$

294. $f=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2=k^2.$

Найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

295. $f=xy-x^2y-\frac{xy^2}{2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \ 0\leqslant y\leqslant 2.$

296. $f=x^2+3y^2-x+18y-4, \quad 0\leqslant x\leqslant 1, \ 0\leqslant y\leqslant 1.$

297. $f=x^3+3y^2-3xy, \quad 0\leqslant x\leqslant 2, \ 0\leqslant y\leqslant 1.$

298. $f=\frac{xy}{2}-\frac{x^2y}{6}-\frac{xy^2}{8}, \quad x\geqslant 0, \ y\geqslant 0, \ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}\leqslant 1.$

299. $f=x^6+y^6-3x^2+6xy-3y^2, \quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant 2.$

300. $f=\cos x\cos y\cos(x+y), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi, \ 0\leqslant y\leqslant \pi.$

301. $f=(x-y^2)\sqrt[3]{(1-x)^2}, \quad y^2\leqslant x\leqslant 2.$

302. $f=x^3+y^3-9xy+27, \quad 0\leqslant x\leqslant a, \ 0\leqslant y\leqslant a, \ 3<a<9.$

303. $f=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2, \quad 0\leqslant y\leqslant a, \ 0\leqslant y\leqslant a, \ a>1.$

304. $f=xy+yz+zx, \quad x^2+y^2+z^2\leqslant a^2.$

305. $f=x+y+z, \quad x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1.$

306. $f=2\sin x+2\sin y+\sin(x+y), \quad 0\leqslant x\leqslant \pi/2, \ 0\leqslant y\leqslant \pi/2.$

307. Представить положительное число a в виде суммы пяти положительных слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

308. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

309. Представить положительное число a в виде суммы n положительных слагаемых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы произведение $z=x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}$ (α_i — заданные положительные числа) было наибольшим.

310. Определить наибольшее значение корня n-й степени из произведения положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при условии, что их сумма равна заданному числу a. Используя эту задачу, доказать, что среднее геометрическое нескольких положительных чисел не больше их среднего арифметического.

311. Через точку $A(a, b, c)$, $a>0$, $b>0$, $c>0$, провести плоскость, отсекающую от первого октанта ($x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$) тетраэдр наименьшего объема.

312. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда с заданной суммой длин его ребер a, имеющего наибольший объем.

313. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда данного объема V, имеющего наименьшую площадь поверхности.

314. Определить размеры прямоугольного параллелепипеда, вписанного в эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, при которых параллелепипед имеет наибольшую полную поверхность.

315. Доказать, что из всех четырехугольников, описанных вокруг круга радиуса R, наименьшую площадь имеет квадрат.

316. Найти треугольник, периметр которого равен $2p$ и который при вращении относительно одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

317. Через точку M, лежащую внутри данного угла, провести прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади.

318. Внутри данного угла B поместить отрезок DE длины b, концы которого — точки D и E — находятся на сторонах угла, так чтобы площадь треугольника DBE была наибольшей.

319. В данный круг вписать треугольник так, чтобы сумма квадратов длин его сторон была наибольшей.

320. Определить положение точки относительно вершин остроугольного треугольника ABC, чтобы сумма расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

321. Определить положение точки относительно вершин треугольника, чтобы сумма квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника была наименьшей.

322. На плоскости XOY даны две различные точки $P_1(a_1, b_1)$ и $P_2(a_2, b_2)$, $a_1 \geqslant a_2 > 0$, $b_2 \geqslant b_1 > 0$. Найти точку Q_1 на оси OX и точку Q_2 на оси OY, чтобы длина ломаной $P_1Q_1Q_2P_2$ была наименьшей.

323. Из всех конусов с данной боковой поверхностью найти конус с наибольшим объемом.

324. Среди всех четырехугольников с заданными сторонами найти такой, площадь которого наибольшая.

325. В данный круг радиуса R вписать четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади, если величина угла BAD равна α.

326. Доказать, что в треугольнике радиус вписанной окружности не может быть больше половины радиуса описанной окружности.

327. Найти кратчайшее расстояние от точки $A(p, 4p)$ до точек параболы $y^2=2px$ $(p>0)$.

328. Найти длины осей эллипса, полученного в сечении цилиндра $x^2+2y^2=1$ плоскостью $x+y+z=0$.

329. Найти кратчайшее расстояние между прямыми

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}, \quad \frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}.$$

330. На плоскости заданы n точек $P_i(a_i, b_i)$. Найти координаты точки $P(x, y)$ такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\left[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2\right]$$

(m_i — заданные положительные числа) будет наименьшей. Дать механическое истолкование полученных формул.

Ответы

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x+y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sin(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\cos(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\cos(x+y)$. **2.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2a^2}{(ax+by)^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2b^2}{(ax+by)^3}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{2ab}{(ax+by)^3}$. **3.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -\dfrac{1}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\dfrac{x^2}{y^5}\cos\dfrac{x}{y} - \dfrac{4x}{y^4}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{2}{y^3}\cos\dfrac{x}{y}$. **4.** $-\dfrac{216}{(1+2x+3y)^4}$. **5.** $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 4ye^{x^2+y^2+z^2} + 8x^2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 8xyze^{x^2+y^2+z^2}$. **6.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2} + y^x \ln^2 y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x + x(x-1)y^{x-2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yx^{y-1}\ln x + x^{y-1} + y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y$. **7.** r. **8.** $-\dfrac{2z^2}{x^2y^3}$. **9.** $\dfrac{2y}{x(x^2+y^2)}$. **10.** $\eta^2\xi$. **11.** $r^2\cos\psi$. **12.** $\dfrac{1}{2v}$. **13.** $\dfrac{-1}{4\sqrt{2}\sqrt{(u+v-w)(u+w-v)(v+w-u)}}$.

14. u^2v. **15.** $\dfrac{1}{2\sqrt{z(x^2+y^2)}}$. **16.** $\begin{pmatrix} v & u \\ 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v \end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2w \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **19.** $\left(\dfrac{1}{v}, -\dfrac{u}{v^2}\right)$. **20.** $\begin{pmatrix} \operatorname{tg} u + \dfrac{u}{\cos^2 u} \\ \sin u + u\cos u \end{pmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} \ln\dfrac{v}{w} & \dfrac{u}{v} & -\dfrac{u}{w} \\ -\dfrac{v}{u} & \ln\dfrac{w}{u} & \dfrac{v}{w} \\ \dfrac{w}{u} & -\dfrac{w}{v} & \ln\dfrac{u}{v} \end{bmatrix}$. **22.** $\begin{bmatrix} 2u(x+y) & -2xv & -2wy \\ 2u\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right) & \dfrac{2xv}{y^2} & -\dfrac{2w}{y} \\ 2u\left(\dfrac{y-x}{x^2+y^2}\right) & \dfrac{2vx}{x^2+y^2} & -\dfrac{2wy}{x^2+y^2} \end{bmatrix}$.

23. $\begin{pmatrix} 4xu & 4xv & 4xw \\ 8x^3u & 8x^3v & 8x^3w \end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix} 2x\cos v - z\sin v & -2xu\sin v - zu\cos v & -y \\ -y\cos v - x\sin v & yu\sin v - xu\cos v & 2z \end{pmatrix}$.

25. $\dfrac{yz\cos u - xz\sin u + e^u xy}{1 + x^2y^2z^2}$. **26.** $\begin{pmatrix} vu^{v-1}\cos x & u^v \ln u \cos x \\ -vu^{v-1}\sin x & -u^v \ln u \sin x \\ \dfrac{vu^{v-1}}{\cos^2 x} & \dfrac{u^v \ln u}{\cos^2 x} \end{pmatrix}$.

27. $\begin{bmatrix} \dfrac{yv-2xu}{x^2+y^2} & \dfrac{yu+2xv}{x^2+y^2} \\ \dfrac{2xv+4uy}{x^2+y^2} & \dfrac{2xu-4yv}{x^2+y^2} \\ v-2u & u+2v \end{bmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\pi}{6} \\ -\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}} & \dfrac{\pi\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi}{6} \end{pmatrix}$.

29. $\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$. **30.** $\left(-\frac{1}{7\sqrt{195}},\ -\frac{2}{7\sqrt{195}},\ -\frac{3}{7\sqrt{195}}\right)$.

31. $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. **32.** а) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} 2y_1 & 2y_2 & -2y_3 \\ -y_2y_3 & -y_1y_3 & -y_1y_2 \end{pmatrix}$;

б) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, где $Y_{11} = y_1\cos x_1 - y_3\sin(x_1 - x_2)$, $Y_{12} = y_2\cos x_2 + y_3\sin(x_1 - x_2)$, $Y_{21} = -y_2x_2\sin(x_1x_2) - 2y_1x_1\cos(x_1^2 + x_2^2) - 2y_3x_1\sin(x_1^2 + x_2^2)$, $Y_{22} = -y_2x_1\sin(x_1x_2) - 2y_1y_2\cos(x_1^2 - x_2^2) - 2y_3x_2\sin(x_1^2 + x_2^2)$; $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \sin x_1 & \sin x_2 & \cos(x_1 - x_2) \\ \sin(x_1^2 - x_2^2) & \cos x_1x_2 & \cos(x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix}$;

в) $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \begin{Vmatrix} \frac{y_1x_2 + 2x_1y_2 - 2x_1y_3}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{2x_2y_2 - 2x_2y_3 - y_1x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{y_1y_3x_1 - y_2}{x_1^2} & \frac{y_2 - y_1y_3x_2}{x_2^2} \end{Vmatrix}$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} \operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_2} & \ln(x_1^2 + x_2^2) & -\ln(x_1^2 + x_2^2) \\ y_3\ln\frac{x_1}{x_2} & \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} & y_1\ln\frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$. **35.** $du = 2xy^2dx + 2yx^2dy$, $d^2u = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2$. **36.** $du = (y + z)\,dx + (x + z)\,dy + (y + x)\,dz$, $d^2u = 2\,(dxdy + dxdz + dzdy)$. **37.** $du = -\sin(e^xy)\,(ye^xdx + e^xdy)$, $d^2u = [-\cos(e^xy)\,e^{2x}y^2 - \sin(e^xy)\cdot e^xy]\,dx^2 + 2\,[-\cos(e^xy)\,e^{2x}y - \sin(e^xy)\,e^x]\,dxdy + [-\cos(e^xy)\,e^{2x}]\,dy^2$. **38.** $du = (yx^{y-1} + y^x\ln y)\,dx + (x^y\ln x + xy^{x-1})\,dy$, $d^2u = [y(y-1)\,x^{y-2} + y^x\ln^2 y]\,dx^2 + 2\,[x^{y-1} + x^{y-1}y\ln x + x\ln y\cdot y^{x-1} + y^{x-1}]\,dxdy + [x^y\ln^2 x + x(x-1)\,y^{x-2}]\,dy^2$. 39. $du = \frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz$, $d^2u = -\frac{1}{x^2}dx^2 - \frac{1}{y^2}dy^2 - \frac{1}{z^2}dz^2$. **40.** $du = \frac{z^2}{z^2 + x^2y^2}\left(\frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^2}dz\right)$, $d^2u = \frac{-2xzy^3}{(z^2 + x^2y^2)^2}dx^2 + 2\,\frac{z^3 - zy^2x^2}{(z^2 + x^2y^2)^2}dxdy + 2\cdot\frac{x^2y^3 - z^2y}{(z^2 + x^2y^2)^2}dxdz - \frac{2x^3zy}{(z^2 + x^2y^2)^2}dy^2 + 2\frac{x^3y^2 - xz^2}{(z^2 + x^2y^2)^2}dydz + \frac{2zxy}{(z^2 + x^2y^2)^2}dz^2$. **41.** а) $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}55$; б) $-12{,}6$; в) $0{,}8\,(1 + \ln 4)$; г) $-\frac{1}{30}$; д) 2; е) $-\frac{\sqrt{2}}{20}$. **42.** $du = 2\varphi'xdx - 2\varphi'ydy$, $d^2u = (2\varphi' + 4\varphi''x^2)\,dx^2 - 8xy\varphi''dxdy + (-2\varphi' +$

$+ 4\varphi'' y^2)\,dy^2$. **43.** $du = \varphi' yz\,dx + \varphi' xz\,dy + \varphi' xy\,dz$, $d^2u = (\varphi'' y^2z^2)\,dx^2 + \varphi'' x^2z^2dy^2 + \varphi'' x^2y^2dz^2 + (2\varphi' z + 2\varphi'' xyz^2)\,dxdy + (2\varphi' y + 2\varphi'' xzy^2)\,dxdz + (2\varphi' x + 2\varphi'' yzx^2)dydz$. **44.** $du = \varphi'(y+z)\,dx + \varphi'(x+z)\,dy + \varphi'(y+x)dz$, $d^2u = \varphi''(y+z)^2\,dx^2 + \varphi''(x+z)^2\,dy^2 + \varphi''(y+x)\,dz^2 + 2(\varphi' + \varphi''(y+z)\times(x+z))\,dxdy + 2(\varphi' + \varphi''(y+z)(y+x))\cdot dxdz + 2(\varphi' + \varphi''(x+z)(y+x))\times dydz$. **45.** $du = 2x\varphi' dx + 2y\varphi' dy + 2z\varphi' dz$, $d^2u = (2\varphi' + 4x^2\varphi'')\times dx^2 + (2\varphi' + 4y^2\varphi'')\,dy^2 + (2\varphi' + 4z^2\varphi'')\,dz^2 + 8xy\,\varphi''\,dxdy + 8xz\varphi' dxdz + 8zy\varphi' dydz$. **46.** $du = (\varphi_1' 2x + \varphi_2' 2x)\,dx + (\varphi_1' 2y - \varphi_2' 2y)\,dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' 4x^2 + 8\varphi_{12}'' x^2 + \varphi_{22}'' 4x^2 + 2\varphi_1' + 2\varphi_2')\,dx^2 + 2\,(\varphi_{11}''\,4xy - \varphi_{22}'' 4xy)\,dxdy + (\varphi_{11}'' 4y^2 - 8\varphi_{12}'' y^2 + \varphi_{22}'' 4y^2 + 2\varphi_1' - 2\varphi_2')\,dy^2$. **47.** $du = \left(\varphi_1' y + \varphi_2' \cdot \frac{1}{y}\right)dx + \left(\varphi_1' x - \varphi_2' \cdot \frac{x}{y^2}\right)dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' y^2 + 2\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'' \cdot \frac{1}{y^2}\right)dx^2 + 2\left(\varphi_{11}'' xy - \varphi_{22}'' \frac{x}{y^3} + \varphi_1' - \varphi_2' \cdot \frac{1}{y^2}\right)dxdy + \left(\varphi_{11}'' x^2 - 2\varphi_{12}'' \frac{x^2}{y^2} + \varphi_{22}'' \frac{x^2}{y^4} + \varphi_2' \frac{2x}{y^3}\right)dy^2$. **48.** $du = (\varphi_1' 2x + \varphi_2' y)\,dx + (\varphi_1' 2y + \varphi_2' x)\,dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' 4x^2 + 4\varphi_{12}'' xy + \varphi_{22}'' y^2 + 2\varphi_1')\,dx^2 + 2\,(\varphi_{11}'' 4xy + \varphi_{12}''(2x^2 + 2y^2) + \varphi_{22}'' xy)\,dxdy + (\varphi_{11}'' 4y^2 + 4xy\varphi_{12}'' + \varphi_{22}'' x^2)\,dy^2$. **49.** $du = \left(\varphi_1' \cdot \frac{1}{y} - \varphi_2' \cdot \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(-\varphi_1' \cdot \frac{x}{y^2} + \varphi_2' \cdot \frac{1}{x}\right)dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' \cdot \frac{1}{y^2} - 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{x^2} + \varphi_{22}'' \cdot \frac{y^2}{x^4} + \varphi_2' \cdot \frac{2y}{x^3}\right)dx^2 + 2\left(-\varphi_{11}'' \cdot \frac{x}{y^3} + 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{xy} - \varphi_{22}'' \cdot \frac{y}{x^3} - \varphi_1' \cdot \frac{1}{y^2} - \varphi_2' \cdot \frac{1}{x^2}\right)dxdy + \left(\varphi_{11}'' \frac{x^2}{y^4} - 2\varphi_{12}'' \cdot \frac{1}{y^2} + \varphi_{22}'' \cdot \frac{1}{x^2}\right)dy^2$. **50.** $du = (\varphi_1' + 2x\varphi_2')\,dx + (\varphi_1' + 2y\varphi_2')\,dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' + 4x\varphi_{12}'' + 4x^2\varphi_{22}'' + 2\varphi_2')\,dx^2 + 2\,(\varphi_{11}'' + 2y\varphi_{12}'' + 2x\varphi_{12}'' + 4xy\varphi_{22}'')\,dxdy + (\varphi_{11}'' + 4y\varphi_{12}'' + 4y^2\varphi_{22}'')\,dy^2$. **51.** $du = \varphi_1' y\,dx + (\varphi_1' x + \varphi_2' z)\,dy + \varphi_2' y\,dz$, $d^2u = \varphi_{11}'' y^2dx^2 + (\varphi_{11}'' x^2 + 2\varphi_{12}' xz + \varphi_{22}'' z^2)\,dy^2 + \varphi_{22}'' y^2dz^2 + 2\,(\varphi_{11}'' xy + \varphi_{12}'' yz + \varphi_1')\,dxdy + 2\varphi_{12}'' y^2dxdz + 2\,(\varphi_{12}'' xy + \varphi_{22}'' zy + \varphi_2')\,dydz$. **52.** $du = \left(\varphi_1' \frac{2x}{y} - \varphi_2' \frac{2y}{x^3}\right)dx + \left(-\varphi_1' \frac{x^2}{y^2} + \varphi_2' \cdot \frac{1}{x^2}\right)dy$, $d^2u = \left(\varphi_{11}'' \frac{4x^2}{y^2} - \varphi_{12}'' \cdot \frac{8}{x^2} + \varphi_{22}'' \frac{4y^2}{x^6}\right)dx^2 + 2\left(-\varphi_{11}'' \frac{2x^3}{y^3} + \varphi_{12}'' \frac{4}{xy} - \varphi_{22}'' \frac{2y}{x^5} - \varphi_1' \frac{2x}{y^2} - \varphi_2' \frac{2}{x^3}\right)dxdy + \left(\varphi_{11}'' \frac{x^4}{y^4} - 2\varphi_{12}'' \frac{1}{y^2} + \varphi_{22}'' \frac{1}{x^4}\right)dy^2$. **53.** $du = (\varphi_1' y + \varphi_2' + \varphi_3')\,dx + (\varphi_1' x - \varphi_2' + \varphi_3')\,dy$, $d^2u = (\varphi_{11}'' y^2 + 2\varphi_{12}'' y + 2\varphi_{13}'' y + \varphi_{22}'' + 2\varphi_{23}'' + \varphi_{33}'')\,dx^2 + 2\,(\varphi_{11}'' xy - \varphi_{12}'' y + \varphi_{13}'' y + \varphi_{12}'' x + \varphi_{13}'' x - \varphi_{22}'' + \varphi_1' + \varphi_{33}'')\,dxdy + (\varphi_{11}'' x^2 + 2\varphi_{13}'' x - 2\varphi_{12}'' x + \varphi_{22}'' - 2\varphi_{23}'' + \varphi_{33}'')\,dy^2$. **54.** $du = \varphi_1' 2x\,dx + \varphi_2' 2y\,dy + \varphi_3' 2z\,dz$, $d^2u = (\varphi_{11}'' \cdot 4x^2)\,dx^2 + \varphi_{22}'' 4y^2dy^2 + \varphi_{33}'' 4z^2dz^2 +$

$+\varphi''_{12}8xydxdy+\varphi''_{13}8xzdxdz+\varphi''_{32}\cdot 8zydzdy$. **55.** $du=2\varphi'_1dx+3\varphi'_2dy+$
$+4\varphi'_3dz$, $d^2u=4\varphi''_{11}dx^2+9\varphi''_{22}dy^2+16\varphi''_{33}dz^2+12\varphi''_{12}dxdy+16\varphi''_{13}dxdz+$
$+24\varphi''_{23}dydz$. **56.** $du=(\varphi'_1+2x\varphi'_2)\,dx+(\varphi'_1+2y\varphi'_2)\,dy+(\varphi'_1+2z\varphi'_2)\,dz$,
$d^2u=(\varphi''_{11}+4x\varphi''_{12}+4x^2\varphi''_{22}+2\varphi'_2)\,dx^2+(\varphi''_{12}+4y\varphi''_{12}+4y^2\varphi''_{22}+2\varphi'_2)\,dy^2+$
$+(\varphi''_{11}+4z\varphi''_{12}+4z^2\varphi''_{22}+2\varphi'_2)\,dz^2+2\,(\varphi''_{11}+\varphi''_{12}2y+2x\varphi''_{12}+4xy\varphi''_{22})\,dxdy+$
$+2\,(\varphi''_{11}+\varphi''_{12}2z+\varphi''_{12}2x+4xz\varphi''_{22})\,dxdz+2\,(\varphi''_{11}+\varphi''_{12}2z+2y\varphi''_{12}+$
$+4yz\varphi''_{22})\,dydz$. **57.** $du=(\varphi'_1+2x\varphi'_2)\,dx+(\varphi'_2+2y\varphi'_3)\,dy+(\varphi'_1 2z+\varphi'_3)\,dz$,
$d^2u=(\varphi''_{11}+\varphi''_{12}4x+\varphi''_{22}4x^2+2\varphi'_2)\,dx^2+(\varphi''_{22}+\varphi''_{23}4y+4y^2\varphi''_{33}+2\varphi'_3)\,dy^2+$
$+(\varphi''_{11}4z^2+\varphi''_{13}4z+\varphi''_{33}+2\varphi'_1)\,dz^2+2\,(\varphi''_{12}+\varphi''_{13}2y+2x\varphi''_{22}+4xy\varphi''_{23})\,dxdy+$
$+2\,(\varphi''_{11}2z+\varphi''_{13}+\varphi''_{12}4xz+\varphi''_{23}2x)\,dxdz+2\,(\varphi''_{12}2z+\varphi''_{23}+4yz\varphi''_{13}+$
$+2y\varphi''_{33})\,dydz$. **58.** $du=(\varphi'_1z\cos xz+\varphi'_3y\cos xy)\,dx+(\varphi'_2z\cos yz+$
$+\varphi'_3x\cos xy)\,dy+(\varphi'_1x\cos xz+\varphi'_2y\cos yz)\,dz$, $d^2u=(\varphi''_{11}z^2\cos^2 xz+$
$+2\varphi''_{13}zy\cos xz\cos xy+\varphi''_{33}y^2\cos^2 xy)dx^2+(\varphi''_{22}z^2\cos^2 yz+2\varphi''_{23}xz\cos xy\cos yz+$
$+\varphi''_{33}x^2\cos^2 xy)\,dy^2+(\varphi''_{11}x^2\cos^2 xz+2\varphi''_{12}xy\cos xz\cos yz+\varphi''_{22}y^2\cos^2 yz)\,dz^2+$
$+2\,(\varphi''_{12}z^2\cos xz\cos yz+\varphi''_{13}xz\cos xz\cos xy+\varphi''_{32}yz\cos xy\cos yz+$
$+\varphi''_{33}yx\cos^2 xy+\varphi'_3\cos xy-xy\varphi'_3\sin xy)\,dxdy+2\,(\varphi''_{11}xz\cos^2 xz+$
$+\varphi''_{12}zy\cos^2 xz+\varphi''_{13}xy\cos xz\cos xy+\varphi''_{23}y^2\cos yz\cos xy+\varphi'_1\cos xz-$
$-xz\varphi'_1\sin xz)dxdz+2(\varphi''_{12}xz\cos xz\cos yz+\varphi''_{22}yz\cos^2 yz+\varphi''_{13}x^2\cos xz\cos xy+$
$+\varphi''_{23}xy\cos xy\cos yz+\varphi'_2\cos yz-\varphi'_2zy\sin yz)\,dydz$. **59.** $du=(\varphi'_1e^z+$
$+\varphi'_3ze^{x-y})\,dx+(\varphi'_2e^z-\varphi'_3ze^{x-y})\,dy+(\varphi'_1xe^z+\varphi'_2ye^z+\varphi'_3e^{x-y})\,dz$; $d^2u=$
$=(\varphi''_{11}e^{2z}+2\varphi''_{13}ze^{z+x-y}+\varphi''_{33}z^2e^{2x-2y}+\varphi'_3ze^{x-y})\,dx^2+(\varphi''_{22}e^{2z}-2\varphi''_{23}ze^{z+x-y}+$
$+\varphi''_{33}z^2e^{2x-2y}+\varphi'_3ze^{x-y})\,dy^2+(\varphi''_{11}x^2e^{2z}+2\varphi''_{12}xye^{2z}+2\varphi''_{13}xe^{z+x-y}+$
$+\varphi''_{22}y^2e^{2z}+2\varphi''_{23}ye^{z+x-y}+\varphi''_{33}e^{2x-2y})\,dz^2+2\,(\varphi''_{12}e^{2z}-\varphi''_{13}ze^{z+x-y}+$
$+\varphi''_{23}ze^{z+x-y}-\varphi''_{33}z^2e^{2x-2y}-\varphi'_3ze^{x-y})\,dxdy+2\,(\varphi''_{11}xe^{2z}+\varphi''_{12}ye^{2z}+\varphi''_{13}e^{z+x-y}+$
$+\varphi''_{13}xze^{z+x-y}+\varphi''_{23}zye^{z+x-y}+\varphi''_{33}ze^{z+x-y}+\varphi'_1e^z+\varphi'_3e^{x-y})\,dxdz+2(\varphi''_{12}xe^{2z}+$
$+\varphi''_{22}ye^{2z}+\varphi''_{23}e^{z+x-y}-\varphi''_{13}zxe^{z+x-y}-\varphi''_{23}zye^{z+x-y}-\varphi''_{33}ze^{z+x-y}+\varphi'_1e^z+$
$+\varphi'_3e^{x-y})dxdz+2(\varphi''_{12}xe^{2z}+\varphi''_{22}ye^{2z}+\varphi''_{23}e^{z+x-y}-\varphi''_{13}zxe^{z+x-y}-\varphi''_{23}zye^{z+x-y}-$
$-\varphi''_{33}ze^{2x-2y}-\varphi'_3e^{x-y}+\varphi'_2e^z)dydz$. **60.** $du=2x\,(\varphi'_1+\varphi'_3)dx+2y\,(\varphi'_1+\varphi'_2)\,dy+$
$+2z\,(\varphi'_2+\varphi'_3)\,dz$, $d^2u=[(\varphi''_{11}+2\varphi''_{13}+\varphi''_{33})\,4x^2+2\,(\varphi'_1+\varphi'_3)]\,dx^2+[(\varphi''_{11}+$
$+2\varphi''_{12}+\varphi''_{22})\,4y^2+2\,(\varphi'_1+\varphi'_2)]\,dy^2+[(\varphi''_{22}+2\varphi''_{23}+\varphi''_{33})\,4z^2+2(\varphi'_2+\varphi'_3)]\,dz^2$.

67. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{x}{z}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{y}{z}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{xy}{z^3}$. **68.** $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^2+z^2}{x-x^2-z^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+z^2+z}{x-x^2-z^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2-z^2-z+2xz)+\dfrac{\partial z}{\partial x}(x-x^2+z^2+2zx)}{(x-x^2-z^2)^2}.$$ **69.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$

$$= \frac{z}{x}\cdot\frac{x-1}{1-z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}\cdot\frac{y-1}{1-z};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{z}{xy}\cdot\frac{(x-1)(y-1)}{(1-z)^3}.$$

70. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(1-2y^2)(x+z)}{y(2zx+2z^2-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-2x^2-2xz}{2zx+2z^2-1}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(2xz+2z^2-1)^2}\times$ $\times\left[4x-4z^3-4zx^2-8xz^2+\frac{\partial z}{\partial x}(4x^3-4z+4xz^2-8x^2z)\right]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$ $=\frac{4x^3+8x^2z+4xz^3-4z}{(2xz+2z^2-1)^2}$. **71.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1+yz\sin xyz}{1+xy\sin xyz}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1+xz\sin xyz}{1+xy\sin xyz}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$

$$= \frac{-\cos xyz\left(yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(xz+yx\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(z+y\frac{\partial z}{\partial y}+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)\sin xyz}{1+\sin(xyz)\cdot xy}.$$

72. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yx^{y-1}}{y^z\ln y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^y\ln x+zy^{z-1}}{y^z\ln y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} =$

$= \frac{x^{y-1}-x^{y-1}\ln y-x^{2y-1}y^{1-z}\ln x\ln y-x^{y-1}y\ln x\ln y}{y^z\ln^2 y}$. **73.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u-2v}{2(u^2+v^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{v+2u}{u^2+v^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{2\left(\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial v}{\partial y}\right)(u^2+v^2)-4(u-2v)\left(u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{4(u^2+v^2)^2},$$

где $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2+v^2}$. **74.** $\frac{\partial z}{\partial x} = u+v$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u-v}{2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{u+v}{2}$. **75.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u\cos v+v\sin v}{e^u}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-u\sin v+v\cos v}{e^u}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos v-u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\sin v+v\cos v\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{e^u}-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(u\cos v+v\sin v)}{e^u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos v-u\sin v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\sin v+v\cos v\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{e^u}-\frac{\frac{\partial u}{\partial y}(u\cos v+v\sin v)}{e^u},$$

где $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\cos v}{e^u}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v}{e^u}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sin v}{e^u}$.

76. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3zx^2}{4z^3+x^3+y^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3y^2z}{4z^3+x^3+y^3}$. **77.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x-yz}{xy-2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-xz}{xy-2z}$. **78.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)^2+2xz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$ $=\frac{(x^2+y^2)^2+2yz(x+y+z)}{(x^2+y^2)(x+y+z-x^2-y^2)}$. **79.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x-\cos y}{\cos x-y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} =$ $=\frac{x\sin y-\cos z}{\cos x-y\sin z}$. **80.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2xz}{1+x^2-4yz^3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1+z^4}{1+x^2-4yz^3}$.

81. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xb+yc}{zb-ay}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{-zc-xa}{zb-ay}$. **82.** $\frac{dz}{dx} = \frac{2y-12yx^2}{zy-3y}$, $\frac{dy}{dx} =$ $=\frac{3-6zx^2}{zy-3y}$. **83.** $\frac{dy}{dx} = \frac{xy-z^2-yz+x^2}{z^2-xy-y^2+xz}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{yz-x^2+y^2-xz}{z^2-xy-y^2+xz}$.

84. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-x^2\sin z+z^2\sin x}{y^2\sin z-z^2\sin y}$, $\dfrac{dz}{\partial x}=\dfrac{-x^2\sin x+x^2\sin y}{y^2\sin z-z^2\sin y}$. **85.** $\dfrac{dy}{dx}=$ $=\dfrac{-y\sin x\sin z+2\cos x\cos^3 z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z}$, $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2\sin 2y\cos^2 z+\sin^2 z\sin x\cos z}{y\sin 2y+\sin z\cos x\cos^2 z}$.

86. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y-x}{x+y}$; $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1-xz}{1+xz}\cdot\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\left[\dfrac{y^2}{x}\cdot\dfrac{x-y}{x+y}+\right.$ $\left.+\dfrac{z^2}{x}\cdot\dfrac{xz-1}{xz+1}-x\right]$. **87.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{u^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{u^2-y^2}{u^2-z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z^2-x^2}{u^2-z^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{z^2-y^2}{u^2-z^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\,\dfrac{u(x^2-z^2)^2+x(u^2-z^2)^2+z(u^2-x^2)^2}{(u^2-z^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2\,\dfrac{u(y^2-z^2)(x^2-z^2)}{(u^2-z^2)^3}+$ $+\dfrac{z(u^2-x^2)(u^2-y^2)}{(u^2-z^2)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\,\dfrac{y(u^2-z^2)^2+z(y^2-u^2)^2+u(z^2-y^2)^2}{(u^2-z^2)^3}$.

88. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{z(u-x)}{x(u-z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{z(u-y)}{y(u-z)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{u(z-x)}{u(z-u)}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ $=-\dfrac{u(z-y)}{y(z-u)}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=zu\,\dfrac{(u-z)^2+(u-x)^2+(z-x)^2}{x^2(u-z)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=zu\,\dfrac{(u-x)(u-y)+(z-x)(z-y)}{xy(u-z)^3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=$ $=zu\,\dfrac{(u-z)^2+(u-y)^2+(z-y)^2}{y^2(u-z)^3}$. **89.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2xv^2-(x-2vy)(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{u(x-2vy)-2xv(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yv-2xuv-2u^2y(u^2+v^2)}{2x^2u-xy+2vy^2}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=$ $=\dfrac{(u^2+v^2)(2xu-y)+2u^3y}{2x^2u-xy+2vy^2}$. **90.** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-7/4$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-9/4$; $\dfrac{\partial v}{\partial x}=$ $=-9/4$; $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-7/4$. **91.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\left(1+\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)(y-u)+(x+u)\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(y-u)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{(y-u)\dfrac{\partial u}{\partial y}-(x+u)\left(1-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{(y-u)^2}$, где $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-u}{x-3u^2}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y}=$ $=\dfrac{-3y^2}{x-3u^2}$. **92.** $y'=1$; $y''=-\dfrac{2}{3}$, $z'=0$, $z''=-\dfrac{2}{3}$. **93.** $y'=\dfrac{5}{2}$, $y''=-\dfrac{379}{125}$, $z'=\dfrac{6}{5}$, $z''=\dfrac{4}{5}$. **94.** $\dfrac{dz}{dx}=2xy^2+2x^2y\cdot\dfrac{1-e^{x+y}}{e^{x+y}-2y}$.

95. $dz=\dfrac{-(2x+z)}{x+2z}\,dx-\dfrac{1}{x+2z}\,dy$, $d^2z=\dfrac{-6x^2-6z^2-6xz}{(x+2z)^3}\,dx^2-$ $-\dfrac{6x}{(x+2z)^3}\,dxdy-\dfrac{2}{(x+2z)^3}\,dy^2$. **96.** $dz=\dfrac{x^2-y^2}{xy+z^2}\,dx+\dfrac{y^2-xz}{xy+z^2}\,dy$, $d^2z=\dfrac{6x^2z^2y+2xzy^3+2xz^4-2zx^4}{(xy+z^2)^3}\,dx^2+\dfrac{8xz^2y^2+4x^3zy+4yz^4}{(xy+z^2)^3}\,dxdy+$ $+\dfrac{6xz^2y^2+2yzx^3+2yz^4-2y^4z}{(xy+z^2)^3}\,dy^2$. **97.** $dz=\dfrac{x^2-1}{z^2+1}\cdot\dfrac{z}{x}dx+\dfrac{y^2-1}{z^2+1}\cdot\dfrac{z}{y}\,dy$,

$$d^2z=\frac{1}{\left(z+\frac{1}{z}\right)^3}\left\{\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right]dx^2-\right.$$

$$-2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right]dxdy+\left[\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\right.$$

$$\left.\left.-\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\right]dy^2\right\}.$$ **98.** $dz=\frac{x^3-zy}{xy-z^3}\,dx+\frac{y^3-zx}{xy-z^3}\,dy,$

$$d^2z=\frac{x^4y^2-10x^3z^3y+2zxy^3+3x^6z^2+z^4y^2+3z^6x^2}{(xy-z^3)^3}\,dx^2+2\,\frac{3z^4xy-xy^5-z^7}{(xy-z^3)^3}-$$

$$-\frac{2y^4z^3-2x^4z^3-x^5y+3z^2y^3x^3+x^2y^2z}{(xy-z^3)^3}\,dxdy+\frac{x^2y^4-10z^3y^3x+2zx^3y+z^4x^2}{(xy-z^3)^3}+$$

$$+\frac{3z^2y^6+3z^6y^2}{(xy-z^3)^3}\,dy^2.$$ **99.** $dz=(v\cos v-\sin v)\,dx+(\cos v+v\sin v)\,dy,$

$d^2z=\frac{v}{u}\sin^2 v dx^2-2\,\frac{v}{u}\sin v\cos v dxdy+\frac{v}{u}\cos^2 v dy^2.$ **100.** $dz=$

$=\frac{2uv+v}{1+uv}\,dx+\frac{uv-2u}{1+uv}\,dy,\quad d^2z=\frac{2uv+2uv^2-uv^3+v}{(1+uv)^3}\,dx^2+$

$+\frac{4u^2v-2uv+2uv^2}{(1+uv)^3}\,dxdy+\frac{u^2v+2u^3v-uv+2u}{(1+uv)^3}\,dy^2.$ **101.** $dz=\frac{2}{1+u}\times$

$\times\left[e^{-u-v}(1+u+v)\,dx+e^{v-u}(v-u-1)\,dy\right],\quad d^2z=\frac{2e^{-2u}}{u^2(1+u)^3}\left[e^{-2v}(1+\right.$

$+3u+3u^2-2u^3-2u^4-v-3uv-3u^2v-u^3v)\,dx^2-(u^2+3u+1)\,dxdy+$

$\left.+e^{2v}(1+3u+3u^2-2u^3-2u^4+v+3uv+3u^2v+u^3v)\,dy^2\right].$ **102.** $du=$

$=\frac{y-u}{x-y}\,dx+\frac{y-v}{x-y}\,dy,\quad dv=\frac{x-u}{y-x}\,dx+\frac{x-v}{y-x}\,dy,\quad -d^2u=d^2v=$

$=\frac{2(y-u)}{(x-y)^2}\,dx^2+\frac{2(y-v+u-x)}{(x-y)^2}\,dx\,dy+\frac{2(v-x)}{(x-y)^2}\,dy^2.$ **103.** $-\frac{6}{25}\,dx^2.$

104. $-\frac{5}{18}\,dx^2+\frac{1}{9}\,dx\,dy-\frac{5}{18}\,dy^2.$ **105.** $\frac{4}{15}\,dx^2+\frac{4}{15}\,dy^2.$ **106.** $-4dx^2-$

$-64dx\,dy-132dy^2.$ **107.** $-\sqrt{2}\,dx^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\,dx\,dy-\sqrt{2}\,dy^2.$ **108.** $d^2u=$

$=\frac{55}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy+\frac{25}{32}\,dy^2,\quad d^2v=-\frac{25}{32}\,dx^2+\frac{25}{16}\,dx\,dy+\frac{55}{32}\,dy^2.$

109. $d^2u=\left[\frac{\pi}{6}(\sqrt{3}-1)-\sqrt{3}\right]dx^2+\left(\sqrt{3}-\frac{\pi^2}{4}(2\sqrt{3}-1)\right)dx\,dy+$

$+(2\pi-\pi\sqrt{3})\,dy^2,\quad d^2v=\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)dx^2+\left(\frac{\pi^2}{4}+\sqrt{3}\right)dx\,dy+$

$+2\pi\,dy^2.$ **110.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_2'+zyF_1'}{xyF_1'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'+zxF_1'}{xyF_1'}.$ **111.** $\frac{\partial z}{\partial x}=$

$=-\frac{yF_1'+zF_3'}{yF_2'+xF_3'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xF_1'+zF_2'}{yF_2'+xF_3'}.$ **112.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2xF_1'-2xF_3'}{zF_2'-zF_3'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=$

$=\dfrac{yF_2'-yF_1'}{zF_2'-zF_3'}$. **113.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-zF_1'+F_2'-yF_3'}{xF_1'+yF_2'-F_3'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{F_1'-zF_2'-xF_3'}{xF_1'+yF_2'-F_3'}$.
143. $x'''=0$. **144.** $x''+x=e^y$. **145.** $x'''+x^2(x'')^2-y(x')^3=0$. **146.** $x''+(x')^2+x^3=0$. **147.** $y'=y$. **148.** $u'-4xu+4x^3=0$. **149.** $-u'=2x(u+x)$. **150.** $ty''+y=0$. **151.** $y''+2y'+y=0$. **152.** $y'''-y''-y'+y=0$. **153.** $u''-u=e^x$. **154.** $u''-a^2u=2x$. **155.** $u''-c^2u=0$. **156.** $u''-u'+u=0$. **157.** $u''\operatorname{ch}^3 t=1$. **158.** $yu''+u'=0$. **159.** $v''+v=0$. **160.** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. **161.** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0$. **162.** $(x-y)\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+2\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$. **163.** $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0$. **164.** $\dfrac{\partial z}{\partial v}=-1$. **165.** $\dfrac{\partial z}{\partial u}=1$.
166. $4\sqrt{\dfrac{v}{u}}\dfrac{\partial z}{\partial v}+1=0$. **167.** $\dfrac{\partial z}{\partial v}+2v=0$. **168.** $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2-\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2=v$.
169. $\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **170.** $\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$. **171.** $\dfrac{\partial w}{\partial u}=2u$. **172.** $2\dfrac{\partial w}{\partial u}+u=0$.
173. $\dfrac{\partial w}{\partial v}=\dfrac{w}{v}$. **174.** $\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$. **175.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}\ln\dfrac{w}{u}=u$. **176.** $\dfrac{\partial w}{\partial v}=0$.
177. $\dfrac{\partial w}{\partial \tau}\cdot\tau=w$. **178.** $\dfrac{\partial w}{\partial \eta}=2\eta$. **179.** $\dfrac{\partial y}{\partial x}=\dfrac{y-z}{y+z}$. **180.** $\dfrac{\partial x}{\partial y}=\dfrac{x}{y}$.
181. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{\partial w}{\partial v}\left(1+\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)$. **182.** $\dfrac{\partial x}{\partial u}=1$. **183.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$. **184.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. **185.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. **186.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{2}{3}\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$.
187. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **188.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$. **189.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=0$.
190. $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **191.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-u\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **192.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}-\dfrac{1}{4v}\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.
193. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$. **194.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\cos u\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$. **195.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{u}{v^2}\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$.
196. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\dfrac{1}{v}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **197.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}-2\dfrac{\partial z}{\partial u}=0$. **198.** $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{1}{u-v}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}-\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)=0$. **199.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+m^2(u^2+v^2)z=0$. **200.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial w^2}+2\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}=0$. **201.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\dfrac{1}{3}\dfrac{\partial z}{\partial w}$. **202.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. **203.** $v^2\cdot\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-2u\dfrac{\partial w}{\partial u}=0$. **204.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=\dfrac{1}{2}$. **205.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\dfrac{2}{u+v}\dfrac{\partial w}{\partial u}+\dfrac{2w}{(u+v)^2}=2$. **206.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\left(\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2=0$. **207.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}=0$. **208.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{w}{(u-v)^2}$. **209.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$.

210. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\dfrac{\partial w}{\partial u}-\dfrac{\partial w}{\partial v}-w=0$. **211.** $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v}+\dfrac{w}{4\sin^2\left(\dfrac{u-v}{2}\right)}=0$.

Указание. Вначале перейти к переменным α и y и функции $z(\alpha, y)$, а затем к переменным u и v и функции $w(u, v)$. **212.** $r\dfrac{\partial z}{\partial r}$.

213. $-\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$. **214.** $\left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2\cos 2\varphi-\dfrac{\cos 2\varphi}{r^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2-2\dfrac{\partial z}{\partial r}\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\sin 2\varphi}{r}$.

215. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}$. **216.** $r^2\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$. **217.** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$. **218.** $4\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$. **219.** $-\dfrac{4}{\sqrt{2}}$. **220.** а)

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\left(-\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)^2+\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)\right)^2}},$$

б) $$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)}{\pm\sqrt{\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_1, y_1)\right)^2+\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x_1, y_1)\right)^2}}.$$ **221.** $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$. **222.** $\sqrt{3}$.

223. $-\dfrac{8\sqrt{3}}{7a}$. **224.** $$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\,y'_t(t_0)-\dfrac{\partial z}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\,x'_t(t_0)}{\pm\sqrt{(x'_t(t_0))^2+(y'_t(t_0))^2}}.$$

225. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **226.** $x-\dfrac{1}{4}=y-\dfrac{1}{3}=z-\dfrac{1}{2}$, $x+y+z=\dfrac{13}{12}$. **227.** $x-\dfrac{\pi}{2}+1=y-1=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $x+y+\sqrt{2}\,z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$. **228.** $x-\dfrac{3}{2}=\dfrac{y+\dfrac{5}{4}}{-3}=\dfrac{z-3/2}{-1}$, $x-3y-z-\dfrac{15}{4}=0$. **229.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{0}$, $x+y-1=0$. **230.** $\dfrac{x-\dfrac{a}{\sqrt{2}}}{a}=\dfrac{y-\dfrac{b}{\sqrt{2}}}{-b}=\dfrac{z-\dfrac{c\pi}{4}}{c\sqrt{2}}$, $ax-by+\sqrt{2}\,cz-\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}+\dfrac{b^2}{\sqrt{2}}-\dfrac{c^2\pi\sqrt{2}}{4}=0$. **231.** $\dfrac{x-\dfrac{r}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{y-\dfrac{r}{2\sqrt{2}}}{-3\sqrt{5}}=\dfrac{z-\dfrac{r\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{1}$, $\sqrt{10}\,x-3\sqrt{5}\,y+z=0$. **232.** $\dfrac{x+2}{27}=\dfrac{y-1}{28}=\dfrac{z-6}{4}$, $27x+28y+4z+2=0$. **233.** $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{-3/4}$, $-3x+y-\dfrac{3}{4}z+3=0$. **234.** $\dfrac{x-a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{y+\sqrt{3}\,a}{-2}=\dfrac{z-\dfrac{2\pi}{3}a}{1}$, $2\sqrt{3}\,x-2y+z-4a\sqrt{3}-\dfrac{2\pi}{3}a=0$. **235.** $\dfrac{x-5}{1}=$

$=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{0}$, $x+2y-13=0$. **236.** $x+5y-z-5=0$, $\frac{x-5}{1}=$

$=\frac{y-1}{5}=\frac{z-5}{-1}$. **237.** $x+4y-4z-\frac{11}{2}=0$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{4}=\frac{z+\frac{3}{8}}{-4}$.

238. $8x+13y+5z-26=0$, $\frac{x-1}{8}=\frac{y-1}{13}=\frac{z-1}{5}$. **239.** $-x+3z-5=0$, $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-2}{3}$. **240.** $x+y+z-3=0$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

241. $2x+y+z=0$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{1}$. **242.** $12x-9y+2z-9=0$,

$\frac{x-3}{12}=\frac{y-5}{-9}=\frac{z-9}{2}$. **243.** $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}}}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{m^2-1}=\dfrac{z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}}{-\frac{1}{\sqrt{2-m^2}}}$,

$\left(x-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\cdot\frac{m^2-1}{\sqrt{2-m^2}}+\left(y-\frac{1}{2}\right)\cdot(m^2-1)-\left(z-\frac{\sqrt{2-m^2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2-m^2}}=$

$=0$. **244.** $x-y+\sqrt{2}z-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}=0$, $\dfrac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\dfrac{y-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\dfrac{z-\pi/4}{\sqrt{2}}$.

245. $(e+1)x-(e+\pi)y+(e+1)z=0$, $\frac{x-e}{e+1}=\frac{y-e-1}{-e-\pi}=\frac{z-\pi}{e+1}$.

246. $(1/3,\ 1/3)$—точка максимума. **247.** $(a,\ b)$—точка максимума; $(0,\ 2b)$, $(0,\ 0)$, $(2a,\ 0)$, $(2a,\ 2b)$—седловые точки. **248.** $(1/\sqrt[3]{3},\ 1/\sqrt[3]{3})$—точка минимума. **249.** $(a,\ a)$ при $a>0$—точка минимума, при $a<0$—точка максимума; $(0,\ 0)$—седловая точка. **250.** $(3,\ 3)$, $(-3,\ -3)$—точки минимума, $(0,\ 0)$—седловая точка. **251.** $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$—точки минимума, $(0,\ 0)$—седловая точка. **252.** $(0,\ 0)$—седловая точка. Указание. Рассмотреть $f(x,\ 0)$ и $f(y^2,\ y)$ в окрестности точки $(0,\ 0)$. **253.** $(1/2,\ -1)$—точка минимума. **254.** $(1,\ 2)$, $(-1,\ -2)$—точки минимума. **255.** $(1,\ 3)$—точка минимума; $(-1,\ -3)$—точка максимума; $(3,\ 1)$, $(-3,\ -1)$—седловые точки. **256.** $(-1,\ -1,\ 1)$—точка минимума. **257.** $(0,\ 0,\ 0)$—седловая точка. **258.** $(2/7,\ 2/7,\ 2/7)$—точка максимума; все точки плоскости $x=0$ и точки прямых $z=0$, $y+3x-2=0$ и $y=0$, $2-2z-3x=0$—седловые; при $z=0$, $y\neq 0$, $x\neq 0$ и $y+3x\neq 2$—нестрогий экстремум. **259.** $(\pi/6,\ \pi/6)$—точка максимума. $(5\pi/6,\ 5\pi/6)$ — седловая точка. **260.** $(0,\ 0)$ — точка минимума; все точки окружности $x^2+y^2=1$—точки нестрогого максимума. **262.** $(2,\ 1/2,\ 1)$—точка минимума. **263.** $(0,\ 0)$—точка максимума. **264.** $(0,\ 0)$—седловая точка; все точки гиперболы $x^2-y^2=1$—точки нестрогого максимума; все точки гиперболы $y^2-x^2=1$—точки нестрогого минимума. **265.** а) Седловая точка, б) седловая точка. **266.** Точка максимума. **267.** а) Седловая точка, б) седловая точка.

268. $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3},\ \frac{1}{2}a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{3},\ \frac{1}{2}a\right)$—точки максимума ординаты; $\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}a\right)$, $\left(-\frac{1}{2}a\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}a\right)$—точки минимума ординаты; $(a\sqrt{2},\ 0)$—точка максимума абсциссы; $(-a\sqrt{2},\ 0)$—точка минимума абсциссы. **269.** $(a\sqrt[3]{4},\ a\sqrt[3]{2})$—точка максимума абсциссы; $(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4})$—точка максимума ординаты. **270.** $(4,\ 4)$, $(4,\ -4)$—точки максимума абсциссы; $(2\sqrt{3},\ -2\sqrt[4]{27})$—точка минимума ординаты; $(2\sqrt{3},\ 2\sqrt[4]{27})$—точка максимума ординаты. **271.** $(0,\ 2)$—точка максимума ординаты, $(\sqrt{2(\sqrt{5}-1)},\ 1-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{2(\sqrt{5}-1)},\ 1-\sqrt{5})$—точки минимума ординаты. **272.** $(-1,\ \sqrt{3})$, $(-1,\ -\sqrt{3})$—точки минимума абсциссы; $(3,\ 3\sqrt{3})$—точка максимума ординаты; $(3,\ -3\sqrt{3})$—точка минимума ординаты; $(8,\ 0)$—точка максимума абсциссы. **273.** $(\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2},\ \sqrt[4]{27}/2\sqrt{2})$—точка максимума абсциссы; $(-\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2},\ -\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2})$—точка минимума абсциссы; $(\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2},\ \sqrt[4]{3}/2\sqrt{2})$—точка максимума ординаты; $(-\sqrt[4]{27}/2\sqrt{2},\ -\sqrt[4]{3}/2\sqrt{2})$—точка минимума ординаты. **274.** $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$—точка максимума; $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\right)$—точка минимума. **275.** $\left(-6-\frac{1}{3\sqrt{3}},\ -6+\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$—точка максимума; $\left(-6+\frac{1}{3\sqrt{3}},\ -6-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$—точка минимума. **276.** $\left(\frac{16}{25},\ \frac{256}{3125}\right)$—точка максимума. **277.** $(-3,\ 6)$—точка максимума; $(3,\ -6)$—точка минимума. **278.** $(0,\ -2)$—точка локального минимума, $z(0,\ -2)=1$, $(0,\ 16/7)$—точка локального максимума, $z(0,\ 16/7)=-8/7$. **279.** $z_{\max}=0$ при $x=y=1$; $z_{\min}=-4$ при $x=1$, $y=9$. **280.** $z_{\max}=4$ при $x=y=1$, $z_{\min}=-4$ при $x=y=-1$. **281.** $z_{\min}^{(1)}=-\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$; $z_{\max}^{(1)}=\sqrt{2}$ при $x=0$, $y=0$; $z_{\max}^{(2)}=\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$; $z_{\min}^{(2)}=-\sqrt{1+\sqrt{3}}$ при $x=1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$. **282.** $z_{\min}=-12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=-6\sqrt{3}$, $z_{\max}=12\sqrt{3}$ при $x=-6$, $y=6\sqrt{3}$. **285.** $(4,2,-1)$—точка максимума, $f_{\max}=12$; $(-4,\ -2,\ 1)$—точка минимума, $f_{\min}=-10$. **286.** $(\pi/3,\ \pi/6)$—точка максимума, $f_{\max}=\pi/3$; $(-\pi/3,\ -\pi/6)$—точка минимума, $f_{\min}=-\pi/3$. **287.** $(a/2,\ a/2)$—точка максимума, $f_{\max}=a^2/4$. **288.** $(a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$.

$(-a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$, $(-a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$ — точки максимума, $f_{max}=a^3/3\sqrt{3}$; $(-a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$, $(-a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$, $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ -a/\sqrt{3})$ — точки минимума, $f_{min}=-a^3/3\sqrt{3}$. **289.** $(a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3},\ a/\sqrt{3})$ — точка максимума, $f_{max}=a^3/3\sqrt{3}$. **290.** $(4/3,\ 4/3,\ 7/3)$, $(4/3,\ 7/3,\ 4/3)$, $(7/3,\ 4/3,\ 4/3)$ — точки максимума, $f_{max}=4\frac{4}{27}$; $(2,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 2)$ — точки минимума, $f_{min}=4$. **291.** $(1,\ 1,\ 1)$ — точка максимума, $f_{max}=2$. **292.** $f_{max}=1/27mn$ в точке $(1/3,\ 1/\sqrt{3m},\ 1/\sqrt[3]{3n})$. **293.** $f_{min}=\frac{ma^m}{n^m}$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=a/n$. Указание. Воспользоваться тем, что определитель матрицы квадратичной формы d^2f удовлетворяет соотношению $A_n=1+A_{n-1}$. **294.** $f_{max}=k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=\alpha_i k\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$, $f_{min}=-k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$ в точке $(x_1, x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где $x_i=-\alpha_i k\Big/\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2}$.

295. $f_{min}=-2$ при $x=1$, $y=2$; $f_{max}=2/27$ при $x=1/3$, $y=2/3$. **296.** $f_{max}=17$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=1$; $f_{min}=-17/4$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=0$. **297.** $f_{max}=8$ при $x=2$, $y=0$; $f_{min}=-1/16$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=1/4$. **298.** $f_{max}=2/9$ при $x=1$, $y=4/3$; $f_{min}=0$ на всей границе. **299.** $f_{max}=2^7$ при $x=2$, $y=2$; $f_{min}=-2$ при $x=1$, $y=0$. **300.** $f_{max}=1$ при $x=\pi$, $y=0$ и $x=0$, $y=\pi$; $x=0$, $y=0$ и $x=\pi$, $y=\pi$; $f_{min}=-1/8$ при $x=\pi/3$, $y=\pi/3$ и $x=2\pi/3$, $y=2\pi/3$. **301.** $f_{max}=2$ при $x=2$, $y=0$; $f_{min}=0$ во всех точках хорды $x=1$ и на параболе $y^2=x$, составляющей часть контура области. **302.** $f_{max}=a^3+27$ при $x=0$, $y=a$ и $x=a$, $y=0$; $f_{min}=0$ при $x=3$, $y=3$. **303.** $f_{max}=2a^4$ при $x=a$, $y=a$; $f_{min}=-1$ при $x=0$, $y=1$ и $x=1$, $y=0$. **304.** $f_{max}=a^2$ при $x=y=z=a/\sqrt{3}$, $f_{min}=-a^2/2$ на всей окружности $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$. **305.** $f_{max}=1+\sqrt{2}$ при $x=1/\sqrt{2}$, $y=1/\sqrt{2}$, $z=1$; $f_{min}=-1/2$ при $x=-1/2$, $y=-1/2$, $z=1/2$. **306.** $f_{min}=0$ при $x=0$, $y=0$; $f_{max}=2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\cdot\frac{\sqrt{5}+3}{4}$ при $x=y$, $\cos x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. **307.** $a/5$, $a/5$, $a/5$, $a/5$, $a/5$. **308.** $\frac{a}{n}$, $\frac{a}{n}$, $\ldots$ $\ldots$, $\frac{a}{n}$. **309.** $x_i=\frac{a\cdot\alpha_i}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Указание. Рассмотреть $\ln z$. **310.** a/n. **311.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$. **312.** Куб со стороной $a/12$. **313.** Куб со стороной $\sqrt[3]{V}$. **314.** Длины сторон равны $\frac{2}{3}a$, $\frac{2}{3}b$, $\frac{2}{3}c$. **316.** Стороны треугольника равны $\frac{3p}{4}$, $\frac{3p}{4}$ и $\frac{p}{2}$. **317.** Если B и C — точки пересечения прямой со сторонами угла, то $|BM|=|MC|$. **318.** DBE — равнобедренный треугольник. **319.** Правильный. **320.** Точка O должна удовлетворять условиям $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{AOC}=\frac{2\pi}{3}$. **321.** Центр тяжести треугольника. **322.** $|OO_1|=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1+b_2}$, $|OO_2|=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1+a_2}$. **323.** Квадраты радиуса основания, высоты и образующей конуса относятся, как $1:2:3$. **324.** Вписанный в окружность. **325.** AC — диаметр, точки B и D расположены на окружности по разные стороны диаметра $\widehat{CAB}=\widehat{CAD}=\frac{1}{2}\alpha$. **327.** $p\sqrt{5}$. **328.** $\sqrt{6+\sqrt{12}}$, $\sqrt{6-\sqrt{12}}$. **329.** $\frac{(a-a_1)L+(b-b_1)M+(e-e_1)N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$, $L=mn_1-nm_1$, $M=nl_1-ln_1$, $N=lm_1-ml_1$. **330.** $x=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$, $y=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_im_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}$.

Глава IV

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

1. Привести пример функции, определенной на $[a, b]$, непрерывной на (a, b), но не интегрируемой по Риману на $[a, b]$.

2. Привести пример дифференцируемой на всей прямой функции, производная которой не интегрируема по Риману $[-1, 1]$.

3. Привести пример функции, интегрируемой по Риману на $[-1, 1]$, но не имеющей на этом отрезке первообразной.

4. Доказать, что функция Римана

$$R(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррациональное;} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ где } m \text{ — целое, } m \neq 0, \ n \text{ — натуральное} \\ & \text{число, } \frac{m}{n} \text{ — несократимая дробь} \end{cases}$$

интегрируема на $[0, 1]$ и найти $F(\alpha, \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x)\,dx$, $(\alpha, \beta) \subset [0, 1]$.

5. Функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ — рациональное,} \\ 0, & x \text{ — иррациональное} \end{cases}$$

отличается от функции Римана только в рациональных точках. Функция Дирихле не интегрируема по Риману (почему?) на $[0, 1]$. Таким образом, изменение функции на счетном множестве точек может вывести ее из класса интегрируемых функций. Доказать, что изменение интегрируемой функции на конечном множестве точек не нарушает интегрируемости функции и не изменяет величины интеграла.

6. Привести пример неинтегрируемой по Риману на $[0, 1]$ функции, квадрат которой есть интегрируемая по Риману на $[0, 1]$ функция.

7. Функция $f(x)$ интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx > 0$. Доказать, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ такой, что $f(x) \geqslant 0$ для любого $x \in [\alpha, \beta]$.

8. Доказать, что для ограниченной и монотонной на $[0, 1]$ функции f существует постоянная C такая, что для любого $n \in N$

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{C}{n}.$$

9. Функция f имеет на $[0, 1]$ ограниченную производную. Доказать, что существует постоянная C такая, что для любого $n \in N$

$$\left| \int\limits_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{C}{n}.$$

10. Пусть функция f непрерывна на $[a, b]$ и для любых x_1 и x_2 из $[a, b]$ справедливо неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad \text{(свойство выпуклости).}$$

Доказать, что тогда

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

11. Пусть функции f и g непрерывны и монотонно возрастают на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx\geqslant\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx.$$

12. Модулем непрерывности функции f на отрезке $[a, b]$ называется функция

$$\omega(\delta)=\sup|f(x_1)-f(x_2)|.$$

$$x_1,\ x_2,\ |x_1-x_2|<\delta,\ x_1,\ x_2\in[a,\ b].$$

Доказать, что для разбиения T_δ отрезка $[a, b]$ с параметром δ справедлива оценка

$$S(f,\ T_\delta)-s(f,\ T_\delta)\leqslant(b-a)\,\omega(\delta).$$

13. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Доказать, что существует последовательность непрерывных на $[a, b]$ функций φ_n таких, что

$$\int_a^b |f(x)-\varphi_n(x)|\,dx\to 0,\quad n\to\infty.$$

14. Доказать, что интегрируемая по Риману на $[a, b]$ функция f обладает свойством интегральной непрерывности, т. е. для любого отрезка $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$

$$\lim_{h\to 0}\int_\alpha^\beta |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

15. Привести пример непрерывной на $[a, b]$ и не равной тождественно нулю функции f, для которой, $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

16. Доказать, что если непрерывная на $[a, b]$ функция f не равна тождественно нулю, то найдется отрезок $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$ такой, что $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\neq 0$ (ср. с задачей № 4).

17. Доказать, что для непрерывной на $[a, b]$ функции f из равенства $\int_a^b f^2(x)\,dx=0$ следует, что f есть тождественный нуль на $[a, b]$.

18. Функции f и g интегрируемы по Риману на $[a, b]$. Доказать неравенство

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

19. Функции f и g непрерывны на $[a, b]$. Найти необходимое и достаточное условие справедливости равенства

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx\right]^2 = \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

20. Доказать, что для непрерывной на всей числовой прямой функции f, периодической с периодом T, и любого числа a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

21. Функция f непрерывна на всей числовой прямой, и для любого числа a справедливо равенство

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Доказать, что f — периодическая функция.

22. Функция f определена на всей числовой прямой, непрерывна и периодическая с периодом T. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

была периодической с периодом T.

23. Функция f непрерывна на $[-l, l]$. Доказать, что если f четная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx,$$

а если f нечетная, то

$$\int_{-l}^{l} f(x) dx = 0.$$

24. Доказать, что любая первообразная нечетной функции является функцией четной, а среди первообразных четной функции есть, и притом только одна, нечетная функция.

25. Доказать, что для непрерывной на $[-1, 1]$ функции справедливо равенство:

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

26. Функция φ непрерывна на $[0, l]$, и для всех $x \in [0, l]$ имеем $\varphi(l-x) = \varphi(x)$. Функция f непрерывна на отрезке $\varphi([0, l])$. Доказать, что:

а) $\displaystyle\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx = 2\int_0^{l/2} f(\varphi(x))\,dx;$

б) $\displaystyle\int_0^{l} xf(\varphi(x))\,dx = \frac{l}{2}\int_0^{l} f(\varphi(x))\,dx.$

27. Функция

$$g(x) = \frac{-20(x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 8x - 64)}{16x^6 - 32x^5 + 169x^4 - 1056x^3 + 6784x^2 - 512x + 256}$$

всюду, кроме точки $x = 1$, равна $\dfrac{f'(x)}{1 + f^2(x)}$, где

$$f(x) = \frac{x(80 - 5x)}{4(1 - x)(x^2 + 4)}.$$

Найти:

а) $\displaystyle\int_{-4}^{0} g(x)\,dx$; б) $\displaystyle\int_0^{4} g(x)\,dx$.

28. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2; \\ D(x), & 1/2 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Указать, какое из следующих соотношений неверно и почему:

а) $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/6} f(\sin t)\cos t\,dt;$

б) $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{5\pi}{6}} f(\sin t)\cos t\,dt.$

29. Привести пример непрерывных на $[0, 1]$ функций f и g таких, что g монотонна на $[0, 1]$, $g[0, 1] = [0, 1]$ и функция $f(g(x)) \times g'(x)$ не интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

30. Найти:

а) $\frac{d}{da}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$; б) $\frac{d}{dx}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$;

в) $\frac{d}{db}\int\limits_a^b e^{-x^2}dx$; г) $\frac{d}{db}\int\limits_a^{b^2} \ln(1+x^2)\,dx$; д) $\frac{d}{da}\int\limits_{\sin a}^{\cos a} \ln(1+x^2)\,dx$.

31. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что f интегрируема на $[-1, 1]$ и $F(x)=\int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$ дифференцируема на $(-1, 1)$. Найти $F'(0)$.

32. Пусть интегрируемая на $[a, b]$ функция f имеет в точке $x_0\in(a, b)$ неустранимый разрыв первого рода и $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$. Доказать, что F не является дифференцируемой в точке x_0.

33. Пусть

$$g(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

Доказать, что существует постоянная C такая, что

$$\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right|\leqslant Cx^2, \quad |x|\leqslant 1.$$

34. Привести пример функции, имеющей неустранимый разрыв в точке $x=0$, интегрируемой по Риману на $[-1, 1]$, такой, что функция $F(x)=\int\limits_{-1}^{x} f(t)\,dt$ дифференцируема во всех точках интервала $(-1, 1)$.

35. Функция f непрерывна и неотрицательна на $[0, +\infty)$ и $\int\limits_0^x f(t)\,dt\neq 0$ для любого $x>0$. Доказать, что функция

$$\varphi(x)=\frac{\int\limits_0^x tf(t)\,dt}{\int\limits_0^x f(t)\,dt}$$

возрастает на $(0, +\infty)$.

36. Доказать, что для любого $T>\pi/2$ справедливо неравенство

$$\int_{\pi/2}^{T} \frac{\cos x}{x}\, dx < 0.$$

37. Функция f непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$. Найти

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt.$$

38. Функция f непрерывна и неотрицательна на $[a, b]$. Доказать, что

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\int_a^b f^n(x)\, dx\right]^{1/n} = M,$$

где

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

39. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n x\, dx = 0.$$

40. Сравнить числа $\int\limits_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\, dx$ и $3\pi/2$.

41. На отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ нет точки ξ такой, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x\, dx = \xi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx,$$

так как $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx = 0$, а $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin x\, dx \neq 0$ (проверить). Какое условие теоремы о среднем нарушено?

42. Пусть

$$g(x) = \operatorname{sign} x + \frac{1}{2}.$$

На отрезке $[-3, 1]$ нет точки ξ такой, что

$$\int_{-3}^{1} g(x)\, dx = g(\xi)(1-(-3)),$$

так как $\int\limits_{-3}^{1} g(x)\, dx = 0$, а функция $g(x)$ не принимает нулевого значения. Какое условие теоремы о среднем нарушено?

43. Функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Доказать равенство

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0+}\left(\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon_1} f(x)\,dx\right).$$

44. Функция g неотрицательна на $[a, b]$ и интегрируема по Риману на $[a, b]$, функция f непрерывна на (a, b) и произведение fg интегрируемо по Риману на $[a, b]$. Доказать, что в этих условиях справедлива теорема о среднем, т. е. найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$.

45. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx > 0.$$

46. Пусть φ — монотонно возрастающая, непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ функция, отображающая $[0, +\infty)$ в $[a, b)$. Доказать, что для любой непрерывной на $[a, b]$ функции f имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

47. Функция f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$. Доказать, что

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\,dx,\ \left|\int_0^1 f(x)\,dx\right|\right\}.$$

48. Функция f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$ и $f(1)-f(0)=1$. Доказать, что

$$\int_0^1 [f'(x)]^2\,dx \geqslant 1.$$

49. Найти дифференцируемую на $[0, +\infty)$ неотрицательную функцию f такую, что при замене независимого переменного $x = x(\xi)$, где $\xi = \int_0^x f(t)\,dt$, она переходит в функцию $e^{-\xi}$.

50. Функция f определена на $[0, 1]$ и убывает на нем. Доказать, что для любого $\alpha \in (0, 1)$ имеем

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\,dx.$$

51. Доказать, что

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2\,dx > 0.$$

52. Доказать, что для непрерывных функций $u(x)$ и $v(x)$ таких, что $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$u(t) \leqslant C + \int_a^t u(x)\,v(x)\,dx, \quad C > 0,\ t > a,$$

справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant C \exp\left(\int_a^t v(x)\,dx\right).$$

53. Доказать, что для непрерывных функций $u(x)$ и $v(x)$ таких, что $u(x) \geqslant 0$ и $v(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$u^m(t) \leqslant C + \int_a^t u(x)\,v(x)\,dx, \quad C > 0,\ m > 1,\ t > a,$$

справедливо

$$u(t) \leqslant C_1 \exp\left(\int_a^t v(x)\,dx\right).$$

54. Доказать, что если интегрируемая на $[a, b]$ функция f строго положительна, то $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

55. Для заданного отрезка $[a, b]$ и заданных чисел A, B, k_1 и k_2 обозначим через m и M соответственно числа

$$\min\left(k_1,\ k_2,\ \frac{B-A}{b-a}\right),\ \max\left(k_1,\ k_2,\ \frac{B-A}{b-a}\right).$$

Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in C^1(-\infty, +\infty)$ со следующими свойствами:

а) $f(a) = A$, $\quad f(b) = B$;

б) $f'(a) = k_1$, $\quad f'(b) = k_2$;

в) $m - \varepsilon < f'(x) < M + \varepsilon$, $\quad x \in [a, b]$.

Следующее построение используется в задачах 56 и 57. Обозначим через $u_{1,1}$ интервал с центром в точке $1/2$ и длиной $1/5$. Множество $[0, 1] \setminus u_{1,1}$ состоит из двух отрезков $\rho_{1,1}$ и $\rho_{1,2}$. Интервалы $u_{2,1}$, $u_{2,2}$ имеют центры в центрах отрезков $\rho_{1,1}$, $\rho_{1,2}$ соответственно и длину $1/5^2$. Интервалы $u_{1,1}$, $u_{2,1}$, $u_{2,2}$ взаимно не пересекаются и множество $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \bigcup_{j=1}^{2} u_{i,j}$ состоит из четырех отрезков $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,2}$, $\rho_{2,3}$, $\rho_{2,4}$. Пусть построены взаимно непересекающиеся интервалы $u_{i,j}$ для $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$. Множество $[0,1] \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$ состоит из 2^k отрезков $\rho_{k,1}$; $\rho_{k,2}$; ...; $\rho_{k,2^k}$. Тогда интервалы

$$u_{k+1,1},\ u_{k+1,2},\ \ldots,\ u_{k+1,2^k}$$

имеют центры в центрах отрезков $\rho_{k,1}$, $\rho_{k,2}$, ..., $\rho_{k,2^k}$ соответственно и длину $1/5^{k+1}$. Таким образом, по индукции определяется бесконечная система интервалов

$$u_{i,j},\ 1 \leqslant i < \infty,\ 1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}.$$

56. Доказать, что множество

$$P = [0,\ 1] \diagdown \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$$

есть замкнутое множество не меры нуль.

57. Обозначим через $\varphi(\lambda,\ (a,\ b),\ x)$ $(\lambda < 1)$ функцию, равную нулю на промежутках

$$\left(a,\ \frac{a+b}{2} - \lambda\,\frac{b-a}{2}\right),\quad \left(\frac{a+b}{2} + \lambda\,\frac{b-a}{2},\ b\right)$$

и равную $\lambda(b-a)\cos^2 \dfrac{\pi\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)}{\lambda(b-a)}$ на отрезках

$$\left[\frac{a+b}{2} - \lambda\,\frac{b-a}{2},\ \frac{a+b}{2} + \lambda\,\frac{b-a}{2}\right].$$

Положим

$$F(x) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{1}{i},\ u_{i,j},\ x\right), & x \in u_{i,j}; \\ 0, & x \in P \cup (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty), \end{cases}$$

где интервалы $u_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant \infty$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, определены перед задачей № 56 и $P = [0,\ 1] \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{2^{i-1}} u_{i,j}$. Пользуясь критерием Лебега, доказать, что функция F дифференцируема на всей прямой и функция F' ограничена, но не интегрируема по Риману на $[0,\ 1]$.

58. Привести пример функций $f:[0,\ 1] \to R$ и $G:[0,\ 1] \to R$ таких, что f непрерывно дифференцируема на $[0,\ 1]$, G строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0,\ 1]$ и равенство

$$\int_0^1 f'(x)\,G(x)\,dx = f(x)\,G(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,G'(x)\,dx$$

не имеет места из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует.

59. Привести пример функций $f:[0, 1]\to R$ и $\varphi:[0, 1]\to[0, 1]$ таких, что f непрерывно дифференцируема на $[0, 1]$, φ строго монотонна и всюду дифференцируема на $[0, 1]$, а равенство

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx$$

не имеет места из-за того, что интеграл в правой части этого равенства не существует.

Ответы и указания

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}, & x\in(a, b);\\ 0, & x=a,\ x=b.\end{cases}$

2. $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n}\operatorname{sign}x, & |x|\in\left(\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right], n\in N;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

Функция f интегрируема по Риману на $[-1, 1]$, так как она ограничена и монотонна на $[-1, 1]$. Предположим, что существует непрерывная на $[-1, 1]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in[-1, 1]\setminus K_p$, где K_p — конечное множество точек из $[-1, 1]$. Тогда найдется такое n_0, что на отрезке $[3/2^{n_0-2}, 1/2^{n_0-1}]$ нет точек из K_p, т. е. $F'=f$ всюду на этом отрезке. Тогда функция f должна на этом отрезке принимать все значения между $f\left(\dfrac{3}{2^{n-2}}\right)=\dfrac{1}{2^{n+1}}$ и $f\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=\dfrac{1}{2^n}$ (см. № 220 ч. I, гл. IV). Но других значений, кроме чисел вида $1/2^p$, функция $f(x)$ не принимает. Следовательно, предположение о существовании первообразной неверно. **4.** $F(\alpha, \beta)=0$ для любого $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$. **5.** Указание. Пусть $\varphi(x)=\begin{cases}1, & x=x_0;\\ 0, & x\neq x_0.\end{cases}$ Доказать, что $\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx=0$ для любых α и β. Если $f(x)=g(x)$ всюду, кроме точки $x=x_0$, то $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx=\int_a^b [f(x_0)-g(x_0)]\,dx=$

$=k\int\limits_a \varphi(x)\,dx=0$. **6.** $f(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ — рациональное};\\ -1, & x\text{ — иррациональное}.\end{cases}$ **7.** Указание. Предположим противное, т. е. что для любого отрезка $[\alpha, \beta]\subset[0, 1]$ существует $x_{\alpha\beta}\subset[\alpha, \beta]$ такое, что $f(x_{\alpha\beta})<0$. Следовательно, $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\leqslant 0$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[0, 1]$ имеем $s(f, T)\leqslant 0$ и $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\sup\limits_T s(f, T)\leqslant 0$, что противоречит условию $\int\limits_0^1 f(x)\,dx>0$. **8.** $\int\limits_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

Пусть $f(x)$ невозрастающая, тогда $f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right)$ для $x\in\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$. Следовательно, $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\leqslant\frac{1}{n}f\left(\frac{k-1}{n}\right)$, отсюда получаем, что $0\leqslant\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx-\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leqslant$

$\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=\frac{1}{n}[f(0)-f(1)]$. Аналогично рассматривается случай неубывающей функции $f(x)$. **9.** Указание. Для оценки $\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx$ применить теорему о среднем. **10.** Из непрерывности и выпуклости $f(x)$ следует, что $f(x)\leqslant\frac{f(a)(b-x)+f(b)(x-a)}{b-a}$ при $x\in[a, b]$. Отсюда следует правое неравенство. Для доказательства левого неравенства сделать замену переменного $x=\frac{a+b}{2}+t$. **11.** Обозначим $\int\limits_0^1 f(x)\,dx=A$.

В силу теоремы о среднем существует точка $c\in[0, 1]$ такая, что $f(c)=A$, а в силу возрастания f справедливы неравенства $A-f(x)\geqslant 0$ для $0\leqslant x\leqslant c$, $f(x)-A\geqslant 0$ для $c\leqslant x\leqslant 1$. Применяя теорему о среднем, получаем, что $\int\limits_0^c g(x)(A-f(x))\,dx = g(\xi_1)\int\limits_0^c (A-f(x))\,dx$, $\xi_1 \in [0, c]$, и $\int\limits_c^1 g(x)(f(x)-A)\,dx = g(\xi_2)\int\limits_c^1 (f(x)-A)\,dx$, $\xi_2 \in [c, 1]$. Так как $0 \leqslant \int\limits_0^c (A-f(x))\,dx = Ac - \int\limits_0^c f(x)\,dx = Ac - \left(A - \int\limits_c^1 f(x)\,dx\right) = \int\limits_c^1 (f(x)-A)\,dx$ и $g(\xi_1) \leqslant g(\xi_2)$, то $\int\limits_0^c g(x)(A-f(x))\,dx \leqslant \int\limits_c^1 g(x)(f(x)-A)\,dx$, откуда следует, что $A\int\limits_0^1 g(x)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx \times \int\limits_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^1 g(x) f(x)\,dx$. **13.** Так как f интегрируема на $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $I \leqslant S(f, T) < I + \varepsilon$, т. е. $I \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}) < I + \varepsilon$, где $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Пусть $\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} M_k, & x \in [x_k, x_{k-1}]; \\ M_n, & x = b. \end{cases}$ Тогда $\varphi_\varepsilon(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $\int\limits_a^b \varphi_\varepsilon(x)\,dx = S(f, T)$. Функция $\varphi_\varepsilon(x)$ разрывна в точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ из отрезка $[a, b]$ и $\inf\limits_{x\in[a,b]} f = m \leqslant \varphi_\varepsilon(x) \leqslant M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f$. Возьмем отрезки $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, где $\delta < \frac{1}{2}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k - x_{k-1}|$ и $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отрезки $[x_k - \delta, x_k + \delta]$ не пересекаются. Пусть $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_1$ для $x \in [a, x_1 - \delta]$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_n$ для $x \in [x_{n-1} + \delta, b)$, $\varphi_{\varepsilon,\delta} = M_k$ для $x \in [x_k + \delta, x_{k+1} - \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-2$, и линейна на отрезках $[x_k - \delta, x_k + \delta]$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $\varphi_{\varepsilon,\delta}$ определена однозначно, так как значения на концах отрезка уже определены. Тогда функция $\varphi_{\varepsilon,\delta}(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и $\left|\int\limits_a^b [f(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x)]\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_a^b (f(x) - \varphi_\varepsilon(x))\,dx\right| + \left|\int\limits_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx - S(f, T)\right| + \left|\int\limits_a^b (\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_{\varepsilon,\delta}(x))\,dx\right| \leqslant \varepsilon + (n-1)(|M| + |m|)\delta$. Отсюда следует утверждение. **14.** Указание. Если f непрерывна на $[a, b]$, то $\omega(\delta) \to 0$

при $\delta \to 0$ (см. задачу № 12). Если f не является непрерывной, то воспользоваться результатом задачи № 13. **15.** $f(x) = \sin\left(\dfrac{2\pi\left(x - \dfrac{b+a}{2}\right)}{b-a}\right)$.
18. Указание. Рассмотреть квадратный трехчлен относительно λ: $\int\limits_a^b (f(x) - \lambda g(x))^2\,dx$. **19.** Функции $f(x)$ и $g(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$. **21.** Пусть $\Phi(a) = \int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx - \int\limits_0^T f(x)\,dx$. Тогда по условию $\Phi(a) \equiv 0$ и, следовательно, $\Phi'(a) = f(a+T) - f(a) \equiv 0$. **22.** $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$.
25. Указание. В интеграле $\int\limits_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx$ сделать замену: а) $\pi - x = t$; б) $\dfrac{\pi}{2} - x = t$. **26.** Указание. В интегралах $\int\limits_0^{\frac{l}{2}} f(\varphi(x))\,dx$ и $\int\limits_0^{\frac{l}{2}} xf(\varphi(x))\,dx$ сделать замену $l - x = t$. **27.** а) $\pi/4$; б) $\dfrac{3\pi}{4}$. Обратить внимание на то, что функция $\operatorname{arctg} f(x)$ на отрезке $[0, 4]$ не является первообразной для $g(x)$. **28.** а) Верно; б) Неверно, так как образ отрезка $[0, 5\pi/6]$ при отображении $t = \sin x$ есть отрезок $[0, 1]$, на котором f не интегрируема. **29.** Рассмотрим функции $f(x) \equiv 1$ и

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{1}{3^{n+1}}, & x \in \left[\dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{(n+1)\,3^{n+1}}\right], \quad n = 0, 1, \ldots; \\ \dfrac{1}{3^{n+1}} + \dfrac{2}{3^{n+1}} \cos^2 \dfrac{\pi(n+1)\,3^{n+1}\left(x - \dfrac{1}{2^n}\right)}{2}, & \\ x \in \left(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{(n+1)\,3^n}, \dfrac{1}{2^n}\right); \quad n = 0, 1, \ldots & \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Покажем, что справедливы следующие утверждения: а) g непрерывна на $(0, 1]$; б) g дифференцируема на $(0, 1]$; $g'(x)$ неотрицательна и не ограничена на $(0, 1]$; в) $\lim\limits_{x \to 0+} g(x) = 0$; г) производная функции g в нуле существует и равна нулю. Действительно. а) Обозначим $x_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\tilde{x}_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{(n+1)\,3^n}$, $n = 0, 1, \ldots$. Из определения функции g

видно, что она непрерывна на каждом из интервалов $(x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $(\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots,$ и интервале $(1, \infty)$. Так как $\lim\limits_{x\to x_n-} g(x) = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n} = g(x_n) = \lim\limits_{x\to x_n+} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to\tilde{x}_n+} g(x) = \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+1}}\cos^2\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3^{n+1}} = g(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{x\to\tilde{x}_n-} g(x)$, то функция g непрерывна в каждой из точек $x_n, \tilde{x}_n$, $n=0, 1, \ldots$. Итак, g непрерывна на $(0, 1]$. б) Из определения функции g видно, что она дифференцируема на интервале $(1, \infty)$ и на каждом из интервалов $(x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $(\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots,$ причем $g'(x)=0$, $x\in(x_{n+1}, \tilde{x}_n)$, $n=0, 1, \ldots$; $g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1)\times \sin\pi(n+1)\,3^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^n}\right)$, $x\in(\tilde{x}_n, x_n)$, $n=0, 1, \ldots$; $g'(x)=0$, $x>1$. Остается проверить дифференцируемость g в каждой из точек x_n, x_n, $n=0, 1, \ldots$. Так как g непрерывна в этих точках, то достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to x_n+} g'(x) = \lim\limits_{x\to x_n-} g'(x)$ $\lim\limits_{x\to\tilde{x}_n+} g'(x) = \lim\limits_{x\to\tilde{x}_n-} g'(x)$.

Действительно, $\lim\limits_{x\to x_n+} g'(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to x_n-} g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1)\sin 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to\tilde{x}_n-} g'(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to\tilde{x}_n+} g'(x) = -\frac{\pi}{2}(n+1)\sin\frac{3^{n+1}(n+1)\pi}{3^{n+1}} = 0$. Если $x\in(\tilde{x}_n, x_n)$, то $\frac{-1}{3^{n+1}(n+1)} < x-\frac{1}{2^n} < 0$, поэтому $g'(x)>0$ для $x\in(\tilde{x}_n, x_n)$, следовательно, $g'(x)\geqslant 0$ для $x\in(0, 1]$. Наконец, если $x_0 = \frac{\tilde{x}_n + x_n}{2}$, то $g'(x_0) = \frac{\pi}{2}(n+1)$, т. е. g' не ограничена на $(0, 1]$.

в) Так как $g'(x)\geqslant 0$ для $x\in(0, 1]$, то функция g монотонна, следовательно, предел $g(x)$ при $x\to 0+$ существует, и так как $x_n\to 0+ + (n\to\infty)$, то $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0$. г) Если $x\in\left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}\right]$, $n=0, 1, \ldots,$ то в силу монотонности имеем, что $0\leqslant\frac{g(x)-g(0)}{x}\leqslant 2^{n+1}g\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{2^{n+1}}{3^n}$. Так как условие $x\to 0+$ эквивалентно условию $n\to+\infty$, то $g'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x} = 0$. Поскольку g непрерывна в нуле и $g'_-(0)=0$, то g дифференцируема в нуле и $g'(0)=0$. Из условий а) — г) следует, что функции $f(x)\equiv 1$ и $g(x)$ удовлетворяют требованиям задачи. 30. а) $-e^{-a^2}$; б) 0; в) e^{-b}, г) $2b\ln(1+b^2)$; д) $-\sin\alpha\ln(1+\cos^2\alpha)-\cos\alpha\ln(1+\sin^2\alpha)$.

31. $\widetilde{F}'(0)=1$. **33.** Так как $g(-x)=-g(x)$, то $\left|\int\limits_0^{-x} g(t)\,dt\right|=\left|\int\limits_0^{x} g(t)\,dt\right|$, т. е. при доказательстве можно считать, что $0<x\leqslant 1$. Так как $|g(t)|\leqslant 1$, то $\left|\int\limits_0^{x^2} g(t)\,dt\right|\leqslant x^2$ для любого $x\in[0,1]$. Далее, $\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt=\int\limits_{x^2}^{x} t^2 d\left(\cos\frac{1}{t}\right)=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{x^2}^{x}-2\int\limits_{x^2}^{x} t\cos\frac{1}{t}\,dt$. Итак, $\left|\int\limits_{x^2}^{x}\sin\frac{1}{t}\,dt\right|\leqslant 2x^2+2\int\limits_0^x t\,dt=3x^2$; $\left|\int\limits_0^x g(t)\,dt\right|\leqslant 4x^2$. **34.** $f(x)=$
$=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ **36.** Пусть $\Phi(T)=\int\limits_{\pi/2}^{T}\frac{\cos x}{x}\,dx$. Тогда $\Phi'(T)=$
$=\frac{\cos T}{T}$ и точками локального максимума $\Phi(T)$ на $[\pi/2,+\infty)$ будут точки T_k, в которых $\cos T$ меняет знак с + на —, т. е. точки

$$T_k=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in N,\ \Phi(T_k)=\sum_{n=0}^{k}\int\limits_{\frac{\pi}{2}+2\pi n}^{\frac{5\pi}{2}+2\pi n}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

Используя теорему о среднем, докажем, что для любого

$$k\in N\quad \int\limits_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{2}+2k\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx<0.$$

Следовательно, $\Phi(T)\leqslant\sup\limits_k\Phi(T_k)<0$. **37.** *А*. **38.** Пусть $f(x_0)=M$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h>0$, что на отрезке $\delta_n\subset[a,b]$ длины h, содержащем x_0, имеем $f(x)>M-\varepsilon$. Тогда

$$\{(b-a)M^n\}^{1/n}\geqslant\left[\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right]^{1/n}\geqslant\left\{\int\limits_{\delta_n} f^n(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{n}}\geqslant\{h(M-\varepsilon)^n\}^{1/n},$$

и в силу произвольности ε отсюда получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\int\limits_a^b f^n(x)\,dx\right\}^{1/n}=M$.

44. Указание. Применить теорему о среднем к интегралу $\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, g(x)\, dx$ и использовать результат задачи № 43. **45.** Указание. См. задачу № 44. **46.** Указание. Использовать результат задачи № 43. **48.** Указание. Воспользоваться неравенством $[f'(x)]^2 \geqslant 2f'(x) - 1$. **49.** По условию $\exp\left(-\int\limits_0^x f(t)\, dt\right) = f(x)$ или $\int\limits_0^x f(t)\, dt = -\ln f(x)$. Дифференцируя это равенство, находим $f'(x) = -(f(x))^2$; так как $f(0) = e^0 = 1$, то $f(x) = \frac{1}{x+1}$. **50.** Имеем $\frac{1}{1-\alpha}\int\limits_\alpha^1 f(x)\, dx \leqslant f(\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$, откуда $\alpha\int\limits_\alpha^1 f(x)\, dx \leqslant (1-\alpha)\int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$ и $\alpha\int\limits_0^1 f(x)\, dx \leqslant \int\limits_0^\alpha f(x)\, dx$. **51.** Указание. Сделать замену переменного $x^2 = y$ и полученный интеграл преобразовать к интегралу по промежутку $[0, \pi]$. **52.** Из неравенства $u(t) \leqslant C + \int\limits_a^t u(x)\, v(x)\, dx$ получаем $\frac{uv}{C + \int\limits_a^t uv dx} \leqslant v$. Проинтегрировав обе части этого неравенства от a до t, получим неравенство $\ln\left(C + \int\limits_a^t uv dx\right) - \ln C \leqslant \int\limits_a^t v dx$ или неравенство $u \leqslant C + \int\limits_a^t uv dx \leqslant C \exp\left(\int\limits_a^t v(x)\, dx\right)$.

53. Указание. Воспользоваться тем, что функция $g(u) = u - u^m$ ограничена сверху и задачей 52. **54.** Первое решение. Из неравенства $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$ следует, что $\int\limits_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$. Если $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$, то для любого отрезка $[a', b'] \subset [a, b]$ имеем $\int\limits_{a'}^{b'} f(x)\, dx = 0$ (почему?). Если $\int\limits_a^b f(x)\, dx = 0$, то существует такое разбиение T отрезка $[a, b]$, что $S(f, T) = \sum\limits_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) < b - a$, где $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f$, следовательно, хотя бы для одного отрезка разбиения $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ имеем $\sup\limits_{[x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f < 1$. Обозначим $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ через $[a_1, b_1]$. Тем же рассуждением получаем, что найдется отрезок $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ такой, что $\sup\limits_{[a_2, b_2]} f < \frac{1}{2}$. Продолжая это рассуждение, получим систему вложенных отрезков $[a_q, b_q]$, $q \in N$, таких, что $\sup\limits_{[a_q, b_q]} f < \frac{1}{q}$, следовательно, если $c \in \bigcap\limits_{q=1}^{\infty} [a_q, b_q]$, то $f(c) \leqslant 0$. Итак, предположение, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, противоречит условию: $f(x) > 0$ для любого $x \in [a, b]$.

Следовательно, $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Второе решение. Так как f интегрируема по Риману, то в силу критерия Лебега множество точек ее разрыва есть множество меры нуль. Тогда существует точка $x_0 \in (a, b)$, в которой функция непрерывна, следовательно, существует интервал $(c, d) \subset (a, b)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $x_0 \in (c, d)$ и $f(x) \geqslant \varepsilon$ для любого $x \in (c, d)$, откуда следует утверждение задачи. **55.** Ищем функцию f в виде $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt + A$. Чтобы функция f удовлетворяла условиям а), б), в), достаточно, чтобы функция φ удовлетворяла следующим условиям: 1) $\varphi \in C(-\infty, +\infty)$; 2) $\varphi(a) = k_1$, $\varphi(b) = k_2$; 3) $m - \varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant M + \varepsilon$, $x \in [a, b]$; 4) $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = B - A$. Обозначим $k = (B-A)/(b-a)$. Рассмотрим два случая: I. Пусть $k_1 < k < k_2$. Тогда точка c, удовлетворяющая соотношению $\frac{c-a}{b-c} = \frac{k_2 - k}{k - k_1}$, лежит строго внутри $[a, b]$. Пусть $\varphi(x) = k_1$ для $x \leqslant a$, $\varphi(c) = k$, $\varphi(x) = k_2$ для $x \geqslant b$ и $\varphi(x)$ линейна на $[a, c]$ и $[c, b]$. Условия 1), 2), 3) выполнены и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}(c-a)(k+k_1) + \frac{1}{2}(b-c)(k_2+k) = k(b - a) = B - A$, так что выполнено и условие 4). II. Пусть $k_1 \leqslant k_2 < k$. Возьмем число k', удовлетворяющее условиям а) $k < k' < k + \varepsilon$ и б) $k' < 2k - \frac{k_1 + k_2}{2}$. Так как $\frac{k_1 + k_2}{2} < k$, то $2k - \frac{k_1 + k_2}{2} > k$ и условия а) и б) непротиворечивы. Пусть $\varphi(x) = k_1$ для $x \leqslant a$, $\varphi(x) = k_2$ для $x \geqslant b$, $\varphi(x) = k'$ для $x \in [a + \alpha, b - \alpha]$, $\varphi(x)$ линейна на $[a, a + \alpha]$ и $[b - \alpha, b]$, где α — некоторое число, лежащее между нулем и $(b-a)/2$, которое точно определяется позже. Условия 1), 2) и 3) для φ выполнены. Покажем, что можно подобрать α так, чтобы выполнялось условие 4): $\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = k'(b-a) - \frac{1}{2}(k'-k_1)\alpha - \frac{1}{2}(k'-k_2)\alpha = J_\alpha$.

При $\alpha \to 0+$ $J_\alpha \to k'(b-a) > k(b-a) = B-A$, а при $\alpha \to \frac{b-a}{2}$ $J_\alpha \to \frac{b-a}{2}\left(k' + \frac{k_1+k_2}{2}\right) < (b-a)k = B-A$ в силу условий на k'. Следовательно, в силу непрерывной зависимости J_α от α найдется такое значение α, $0 < \alpha < \frac{b-a}{2}$, что $J_\alpha = B-A$, т. е. выполнено условие 4). Заметим также, что это построение φ проходит и тогда, когда $k_1 < k_2 = k$. Если же $k_1 = k_2 = k$, то $\varphi = k$, $f = kx + A$. Все остальные варианты соотношений между k_1, k_2 и k рассматриваются аналогично либо первому, либо второму случаю. **56.** Замкнутость P следует из того, что P есть дополнение до отрезка $[0, 1]$ открытого множества $G = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \bigcup\limits_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}$. Предположим, что P есть множество меры нуль. Тогда существует система интервалов $\{\delta_k\}$ таких, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k \subset P$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\delta_k| < \frac{1}{3}$. Система интервалов $\{\delta_k, u_{ij}\}$, $k = 1, 2, \ldots, 1 \leqslant j \leqslant 2$, $i = 1, 2, \ldots$, покрывает весь отрезок $[0, 1]$. Выберем из нее конечную подсистему, покрывающую $[0, 1]$, и разделим интервалы этой конечной подсистемы на две группы: в первую отнесем интервалы вида δ_k, во вторую — вида u_{ij}. Перенумеруем интервалы первой группы $\delta_1, \delta_2 \ldots, \delta_q, \ldots, \delta_Q$ и второй $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_P$. Так как конечное число интервалов $\delta_1, \ldots, \delta_Q$, $u_1, \ldots, u_P$ покрывает отрезок $[0, 1]$, то должно быть $\sum\limits_{q=1}^{Q} |\delta_g| + \sum\limits_{p=1}^{P} |u_p| > 1$. С другой стороны, $\sum\limits_{q=1}^{Q} |\delta_q| < \sum\limits_{q=1}^{\infty} |\delta_q| < \frac{1}{3}$,

$$\sum_{p=1}^{P} u_p < \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} \frac{1}{5^i} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{1}{3}; \quad \sum_{q=1}^{Q} |\delta_q| + \sum_{p=1}^{P} |u_p| < \frac{2}{3}.$$

Полученное противоречие показывает, что P не есть множество меры нуль. **57.** Из определения видно, что F непрерывно дифференцируема на каждом из интервалов $u_{i,j}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, $F(x) = 0$ на множестве P, вне отрезка $[0, 1]$ и в тех точках интервала u_{ij}, которые отстоят от его границы не более чем на $|u_{ij}|\left(1-\frac{1}{i}\right)$. Поэтому для $x_0 \in P$ разностное отношение $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ или равно нулю, или $x_0+h \in u_{ij}$, $h \geqslant |u_{ij}|\cdot\frac{i-1}{i}$, тогда $\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\right| = \left|\frac{F(x_0+h)}{h}\right| \leqslant \frac{|u_{ij}|}{i}\cdot\frac{i}{|u_{ij}|(i-1)} = \frac{1}{i-1}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, найдем I_0 так, чтобы $\frac{1}{i-1} < \varepsilon$, $i > I_0$ и положим $h_0 = \frac{1}{5^{I_0}}\cdot\frac{I_0}{I_0-1}$. Тогда для всех $x_0 \in P$ и всех $h: |h| < h_0$ $\frac{|F(x_0+h)-F(x_0)|}{h} < \varepsilon$. Следовательно, $F'(x)$ существует и равна нулю для всех $x \in P$. Вне $[0, 1]$ $F'(x)=0$. Итак, F дифференцируема на всей прямой. Для $x \in u_{ij}$ $|F'(x)| = \left|2\pi\cos\frac{\pi t}{i\,|u_{ij}|}\times\right.$ $\left.\times\sin\frac{\pi t}{i\,|u_{ij}|}\right| = \left|\pi\sin\frac{2\pi t}{i5^i}\right|$, где t — расстояние от x до середины u_{ij} при $t \leqslant \frac{|u_{i,j}|}{2i} = \frac{1}{2i5^i}$, а если x отстоит от середины u_{ij} больше, чем на $\frac{1}{2i5^i}$, то $F'(x)=0$. Следовательно, с одной стороны, $|F'(x)| \leqslant \pi$, $x \in u_{ij}$, с другой стороны, если $t = \frac{|u_{ij}|}{4i} = \frac{1}{4i5^i}$, то $|F'(x)| = \pi$. Итак, $|F'(x)| \leqslant \pi$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $M_k = [0, 1] \diagdown \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} u_{ij}$. Из построения системы интервалов u_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, следует, что M_k состоит из 2^k непересекающихся отрезков равной длины: $\rho_{k,1}, \rho_{k,2}, \ldots, \rho_{k,2^k}, \ldots$ и $|\rho_{k,j}| < \frac{1}{2^k}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^k$.

Интервал $u_{k+1,j}$ лежит строго внутри $\rho_{k,j}$, $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} M_k$, поэтому для любой точки $x_0 \in P$ и любой ее окрестности $U(x_0)$ найдется такой отрезок $\rho_{k_0,j}$, что $x_0 \in \rho_{k_0,j} \subset U(x_0)$ и, следовательно, найдется интервал $U_{k_0+1,j}$, лежащий внутри этой окрестности. Так как $F'(x_0)=0$, а $\max\limits_{x \in U_{k_0+1,j}} |F'(x)| = \pi$, то точка x_0 является точкой разрыва функции F'.

Итак, функция F' определена и ограничена на всей числовой прямой и множеством ее точек разрыва является множество P. Так как это множество не есть множество меры нуль (см. задачу 56), то в силу критерия Лебега F' не интегрируема по Риману на $[0, 1]$. **58.** Например, $f(x) = x$, $G(x) = F(x) + 2\pi x$, где $F(x)$ — функция из задачи 57.

59. Например, $f(x)=x$, $\varphi(x) = \lambda(F(x) + 2\pi x)$, где $F(x)$ — функция из задачи 57, а λ выбрано так, чтобы $\varphi(1)=1$, т. е. $\varphi(x)= = \frac{1}{2\pi}(F(x)+2\pi x)$.

§ 2. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Какие из следующих функций $\rho(x, y)$ являются метрикой на числовой прямой:

а) $\rho(x, y)=\operatorname{arctg}|y-x|$; б) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$;

в) $\rho(x, y)=\sin^2 xy$; г) $\rho(x, y)=|xy|$;

д) $\rho(x, y)=(x-y)^2$; е) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{x^2+2y^2+1}$;

ж) $\rho(x, y)=\sin|x-y|$. з) $\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

2. Пусть $R(X, \rho)$ есть числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)= =\operatorname{arctg}|y-x|$ и $R^1(X)$ — числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)= =|y-x|$. Доказать, что любое открытое множество в $R(X, \rho)$ является открытым в $R^1(X)$, а любое замкнутое множество в $R(X, \rho)$ является замкнутым в $R^1(X)$.

3. Пусть $R(X, \rho)$ есть числовая прямая с метрикой $\rho(x, y)= =\operatorname{arctg}|y-x|$. Доказать, что в пространстве $R(X, \rho)$ существует замкнутое ограниченное множество, не являющееся компактом.

4. Доказать, что любое открытое множество в R^n есть объединение не более чем счетного числа открытых кругов.

5. Доказать, что объединение двух связных множеств, имеющих общую точку, связно.

Множество $M\subset R^2$ называется *линейно связным*, если для любых его двух точек m_1 и m_2 существует непрерывная кривая, соединяющая эти точки и целиком лежащая в данном множестве (т. е. непрерывное отображение φ отрезка $[0, 1]\to R^n$ такое, что $\varphi(0)=m_1$, $\varphi(1)=m_2$ и для любого $x\in[0, 1]$ $\varphi(x)\in M$).

6. Доказать, что любое линейно связное множество связно.

7. Множество $M\subset R^2$ состоит из точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют соотношению $y=\sin 1/x$, и отрезка $[x= =0, -1\leqslant y\leqslant 1]$. Доказать, что M связно, но не линейно связно (определение линейно связного множества см. перед задачей № 6).

Расстоянием между двумя множествами $A\subset R^n$ и $B\subset R^n$ называется число

$$\rho(A, B)=\inf_{x\in A,\ y\in B}(\|x-y\|_{R^n}).$$

8. Доказать, что расстояние между двумя замкнутыми ограниченными непересекающимися множествами в R^n не равно нулю.

9. Привести пример двух замкнутых непересекающихся множеств в R^2, расстояние между которыми равно нулю.

10. Привести пример двух непересекающихся ограниченных множеств в R^2, расстояние между которыми равно нулю.

11. Пусть F — непустое замкнутое множество в R^n и $F=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}F_m$, где F_m — замкнутые множества. Доказать, что существует число m_0 и замкнутый шар $\bar{U}\subset R^n$ такие, что

$$F\cap\bar{U}=F_{m_0}\cap\bar{U}, \qquad F\cap U\neq\varnothing.$$

12. Пусть функция $f:R^n\to R$ определена в некоторой окрестности U_0 точки $x_0\in R^n$. Для произвольной окрестности $U\subset U_0$ точки x_0 через $\operatorname{diam} U$ будем обозначать $\sup\limits_{x_1,x_2\in U}\|x_1-x_2\|_{R^n}$ — диаметр области, а через $\omega(f,U)=\sup\limits_{A,B\in U}|f(A)-f(B)|$ — колебание функции на U.

Доказать, что для любой ограниченной функции существует число $\omega(f, x_0)$, равное пределу

$$\lim_{\operatorname{diam} U\to 0}\omega(f,U)$$

(число $\omega(f, x_0)$ называется колебанием функции f в точке x_0).

13. Доказать, что $\omega(f, x_0)$ (см. № 12) равно нулю тогда и только тогда, когда f непрерывна в точке x_0.

14. Пусть $E\subset R^n$, $f:E\to R$,

$$E_c^+=\{x,\ x\in E,\ f(x)>c\},$$

$$E_c^-=\{x:x\in E,\ f(x)<c\}.$$

Доказать, что для непрерывности f на E необходимо и достаточно, чтобы множества E_c^+ и E_c^- были открыты относительно E для любого действительного числа c (это значит, что E_c^+ и E_c^- есть пересечение E с некоторым открытым в R^n множеством).

15. Пусть U — некоторый открытый шар в R^k и $f_n:\bar{U}\to R$ — последовательность функций. Для натуральных чисел n, m и числа $\varepsilon>0$ рассмотрим множества

$$A_{n,m,\varepsilon}=\{x: x\in\bar{U},\ |f_n(x)-f_{n+m}(x)|\leqslant\varepsilon\}$$

и

$$B_{n,\varepsilon}=\bigcap_{m=1}^{\infty}A_{n,m,\varepsilon}.$$

Доказать, что условие «для любого $\varepsilon>0$ — $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_{n,\varepsilon}=\bar{U}$» необходимо и достаточно для сходимости последовательности $f_n(x)$ в каждой точке $x\in\bar{U}$.

16. Пусть U — некоторый открытый шар в R^k, $f_n:\bar{U}\to R$, $f_n\in C(\bar{U})$, и для любого $x\in\bar{U}$ $f_n(x)\to f(x)$. Доказать, что для любого замкнутого множества $F\subset U$ найдется точка $x_0\in F$, в которой $f(x)$ непрерывна относительно F, т. е.

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in F}f(x)=f(x_0).$$

17. Пусть на декартовой плоскости задано множество D ($D \neq \varnothing$). Каждой точке этого множества ставится в соответствие его ортогональная проекция на ось OX. Доказать, что полученное отображение $f: D \to R$ непрерывно.

Числовую функцию $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовем *линейно непрерывной*, если она непрерывна, как функция каждой из координат x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, при фиксированных остальных.

18. Привести пример функции $f: R^2 \to R$, линейно непрерывной в квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$, но разрывной в начале координат.

19. Доказать, что линейно непрерывная в некотором круге $U \subset R^2$ функция $f: U \to R$ имеет в этом круге точку непрерывности.

20. Привести пример функции $f(x, y)$, разрывной в каждой точке квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, но непрерывной как функция x при любом фиксированном $y \in [0, 1]$.

21. Пусть область $G \subset R^2$ и функция $f: G \to R$ непрерывна в G как функция переменной x при фиксированном y, таком, что $(x, y) \in G$, и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, т. е. существует постоянная L такая, что $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$ для любой пары точек (x, y_1), (x, y_2) из G. Доказать, что f непрерывна в G.

22. Пусть $G \subset R^2$ и функция $f: G \to R$ линейно непрерывна в G и монотонна по одной из переменных. Доказать, что f непрерывна в G.

23. Привести пример разрывной в квадрате $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ числовой функции f, строго монотонной по каждой переменной и непрерывной по одной из них на $[-1, 1]$ (при фиксированной другой).

24. Привести пример функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$, каждая из которых является разрывной в точке $(0, 0)$ и таких, что:

а) их сумма есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$;

б) их произведение есть функция, непрерывная в точке $(0, 0)$.

25. Пусть $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$. Показать, что

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)) \text{ и } \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y))$$

существуют и равны, но не существует $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$.

26. Пусть существуют

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y)) = B.$$

Доказать, что $A = B$.

27. Пусть

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin\frac{1}{x} \sin\frac{1}{y}.$$

Доказать, что существует $\lim\limits_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$, но не существует ни один из повторных пределов:

$$\lim_{x \to 0} (\lim_{y \to 0} f(x, y)), \qquad \lim_{y \to 0} (\lim_{x \to 0} f(x, y)).$$

28. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\lim_{y\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right)=\lim_{y\to\infty}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}\right),$$

но $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{1+(x-y)^4}$ не существует.

29. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty}\cos^m(n!\,2\pi x)\right).$$

30. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в любой окрестности точки $(0, 0)$ принимает любые значения из $(-1, 1)$.

31. Показать, что функция

$$f(x, y)=\begin{cases}e^{\frac{x}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

в любой окрестности точки $(0, 0)$ принимает любые положительные значения.

32. Пусть $f(x, y)=xye^{-(y-x^2)^2}$. Показать, что $f(x, y)\to 0$, когда точка (x, y) стремится к ∞, оставаясь на фиксированном луче $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha<2\pi$, $t\to+\infty$, но $f(x, y)$ не является бесконечно малой при $x\to\infty$, $y\to\infty$.

33. Доказать, что следующие функции непрерывны в начале координат:

а) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ б) $f=\sin(x^2+y^2)$;

в) $f=\begin{cases}x^2\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ г) $f=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0;\end{cases}$

д) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ е) $f=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

34. Доказать, что следующие функции не являются непрерывными в начале координат:

а) $f=\begin{cases}\sin\dfrac{y}{x}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ б) $f=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$

в) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^2}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$ г) $f=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}, & x^2+y\neq 0; \\ 0, & x^2+y=0; \end{cases}$

д) $f=\begin{cases} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0; \end{cases}$ е) $f=\begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

Обозначим

$D=\{(x,y):\ x^2+y^2<1\},\quad M_1=\{(u,v):\ u^2+v^2<4\},$

$M_2=\{(u,v):\ u^2+v^2<4\}\cup\{(u,v):\ (u-4)^2+v^2<1\},$

$M_3=\{(u,v):\ u^2+v^2\leqslant 4\},\quad M_4=\{(u,v):\ v^2<u\}.$

35. Существует ли непрерывное в D отображение $f:D\to R^2$ такое, что:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$?

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

36. Пусть $E=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное в E отображение $f:E\to R^2$, для которого:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$.

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

37. Пусть $E=\{(x,y):x^2+y^2<4\}$. Существует ли непрерывное и биективное отображение $f:E\to R^2$, для которого:

а) $f(D)=M_1$; б) $f(D)=M_2$; в) $f(D)=M_3$; г) $f(D)=M_4$.

Если существует, то привести пример, если не существует, то объяснить почему?

38. Показать, что функция $f=\sin\dfrac{\pi x}{y}$ непрерывна в своей области определения E и не является равномерно непрерывной на множестве $E\cap\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$. Какое условие теоремы Кантора нарушено?

39. Показать, что функция $f=x^2+y^2$ равномерно непрерывна на множестве $x^2+y^2<1$.

40. Функция $f=\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ непрерывна на множестве $0<x^2+y^2<2$. Будет ли она равномерно непрерывна на этом множестве? Будет ли она равномерно непрерывна на множестве $\dfrac{1}{2}<x^2+y^2<2$?

41. Пусть $f:R^2\to R$ равномерно непрерывна на открытом ограниченном множестве $D\subset R^2$ и A — предельная точка D, не принадлежащая D. Доказать, что существует $\lim\limits_{M\to A} f(M)$.

42. Пусть D — открытое множество в R^n и $f:D\to R$. Для того чтобы f была равномерно непрерывна на D, необходимо и достаточно, чтобы существовала функция g, непрерывная в $\bar{D}$, такая, что $f=g$ на D. Доказать.

43. Привести пример функции $f:R^2\to R$, равномерно непрерывной на множестве $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, непрерывной, но не равномерно непрерывной функцией на всей плоскости.

44. Пусть $f=\sqrt[3]{x^2y}$. Показать, что функция f непрерывна в квадрате $[-1, 1]\times[-1, 1]$, в начале координат имеет частные производные, но не дифференцируема.

45. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{xy}{|x|+|y|}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Проверить, что функция f в квадрате $A=[-1, 1]\times[-1, 1]$ всюду имеет частные производные, эти производные ограничены в A, но f не является дифференцируемой в начале координат.

46. Пусть $f=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{\pi}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ Показать, что f дифференцируема в точке $(0, 0)$, но ее частные производные — разрывные функции в точке $(0, 0)$.

47. Пусть область $G\subset R^2$, а функция $f: G\to R$ непрерывна по одной из переменных и имеет ограниченную производную по другой переменной в G. Доказать, что f непрерывна в G.

48. Пусть $G\subset R^2$ — выпуклая область, функция $f: G\to R$ имеет в G ограниченные частные производные по обеим переменным. Доказать, что f равномерно непрерывна в G.

49. Область $M\subset R^2$ состоит из тех точек m, полярные координаты которых φ_m, r_m удовлетворяют условию

$$\varphi_m>2\pi,\ \operatorname{arctg}\varphi_m-\alpha<r_m<\operatorname{arctg}\varphi_m+\alpha,$$

где

$$\alpha=\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(2\pi+\varphi_m)-\operatorname{arctg}\varphi_m).$$

Обозначим через O полюс и $\varphi=\varphi(x, y)$, то значение угла между полярной осью и отрезком Om, для которого

$$\operatorname{arctg}\varphi-\alpha<r_m<\operatorname{arctg}\varphi+\alpha,\quad \alpha=\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(2\pi+\varphi)-\operatorname{arctg}\varphi).$$

Показать, что функция $\varphi(x, y)$ однозначно определена на M, имеет непрерывные и ограниченные частные производные по переменным x и y в M, но не является равномерно непрерывной в M.

50. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Показать, что $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. Какое условие теоремы Шварца здесь нарушено?

51. Дано уравнение $y^2 - x^2(1-x) = 0$.

а. Каково множество $A \subset R$ тех значений x, для которых это уравнение определяет $y(x)$?

б. Сколько однозначных функций на множестве A определяет это уравнение?

в. Сколько однозначных непрерывных на A функций определяет это уравнение?

г. Сколько однозначных, дифференцируемых во всех внутренних точках A, функций определяет это уравнение?

д. Сколько однозначных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$ определяет это уравнение, если добавить условие:

$$\text{I. } y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{8}}. \qquad \text{II. } y(1) = 0.$$

52. Уравнение $(x^2+y^2)^2 = x^3 - 3xy^2$ определяет y как многозначную функцию x. Какое максимальное количество значений y может соответствовать данному x? Выделить однозначные гладкие ветви $y(x)$ и найти точки ветвления.

53. Показать, что уравнение $x = ky + \varphi(y)$, где $k \neq 0$ и $\varphi(y)$ — дифференцируемая, периодическая с периодом T функция, удовлетворяющая условию $|\varphi'(y)| < |k|$, однозначно определяет функцию $y(x) = \frac{x}{k} + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — периодическая функция с периодом $|k| \cdot T$. Проиллюстрировать результат графически.

54. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Показать, что:

а) $f(x, y)$ непрерывна в начале координат;

б) $f(x, y)$ не является дифференцируемой в начале координат;

в) для любых $x = x(t)$, $y = y(t) : x(0) = 0$, $y(0) = 0$;

$$x \in C^1[-1, 1],\ y \in C^1[-1, 1];$$

$$x^2(t) + y^2(t) > 0 \text{ при } t \neq 0$$

$f^*(t) = f(x(t), y(t))$ дифференцируема при любом $t \in [-1, 1]$ (в частности, при $t = 0$).

Найти выражение $f_t^{*\prime}|_{t=0}$ через $x_t'|_{t=0}$ и $y_t'|_{t=0}$.

55. Функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и удовлетворяет следующим условиям:

1) существуют производные $f_x'(x_0, y_0)$ и $f_y'(x_0, y_0)$;

2) для любого отображения $\varphi : R^2(u, v) \to R^2(x, y)$; $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$, непрерывно дифференцируемого в некоторой окрестности точки $(u_0, v\ )$, существуют производные $(f \circ \varphi)_u'(u_0, v_0) = A$ и $(f \circ \varphi)_v'(u_0, v_0) = B$;

3) справедливы равенства

$$A = f'_x(x_0,\ y_0)\,x'_u(u_0,\ v_0) + f'_y(x_0,\ y_0)\,y'_u(u_0,\ v_0),$$

$$B = f'_x(x_0,\ y_0)\,x'_v(u_0,\ v_0) + f'_y(x_0,\ y_0)\,y'_v(u_0,\ v_0).$$

Доказать, что f дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$.

Ответы и указания

1. а) да, б) нет, не выполнено неравенство треугольника: если взять, например, $x=10$, $y=11$, $z=0$; в) нет, не выполнено условие $\rho(x,\ y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; г) нет, так же, как и в пункте в); д) нет, не выполнено неравенство треугольника, если взять, например, $x=2$, $y=1$, $z=0$; е) нет, не выполнено условие симметрии; ж) нет, так же, как и в пункте в); з) да. **2.** Указание. Пусть $U_1(x_0,\ \varepsilon)$ есть ε-окрестность точки x_0 в $R^1(x)$ и $U_2(x_0,\ \varepsilon)$ — ε-окрестность в $R(x,\ \rho)$. Показать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta_1>0$ такое, что $U_1(x_0,\ \delta_1)\subset U_2(x_0,\ \varepsilon)$ и существует $\delta_2>0$ такое, что $U_2(x_0,\ \delta_2)\subset U_1(x_0,\ \varepsilon)$. **3.** Указание. Пользуясь результатом задачи 2, показать, что любой компакт в $R(x)$ есть компакт в $R^1(x,\ \rho)$. **4.** Указание. Представить открытое множество G в виде счетного объединения ограниченных открытых множеств G_α, а каждое из G_α в виде $G_\alpha = \bigcup G_{\alpha,n}$, где $G_{\alpha,n}$ — множество тех $x\in G_\alpha$, для которых расстояние до границы G_α больше $1/n$. **5.** Пусть M_1 и M_2 — связные множества и $x_0\in M_1\cap M_2$. Если $M=M_1\cup M_2$ несвязно, то существует два открытых непересекающих множества G_1 и G_2 такие, что $M\subset G_1\cup G_2$, $M\cap G_2\neq\varnothing$, $M\cap G_1\neq\varnothing$. Пусть $x_0\in G_1$. Так как M_1 связно и $x_0\in M_1\cap G_1$, то $M_1\subset G_1$. Точно так же и $M_2\subset G_1$. Следовательно, $M=M_1\cup M_2\subset G_1$, и так как $G_1\cap G_2=\varnothing$, то $M\cap G_2=\varnothing$, что противоречит условию несвязности M. **6.** Указание. Воспользоваться тем, что при непрерывном отображении отрезок переходит в связное множество. **8.** Указание. Показать, что для любых двух множеств $A\subset R^n$, $B\subset R^n$ функция $\varphi: A\to R^1$, $\varphi(x)=\inf\limits_{y\in B}\|x-y\|_{R^n}$ непрерывна. **9.** Например, гипербола $x^2-y^2=1$ и ее асимптота $y=x$. **10.** Например, два открытых круга $\{(x,\ y): x^2+y^2<1\}$ и $\{(x,\ y): (x-2)^2+y^2<1\}$. **11.** Предположим противное. Тогда в любом шаре u, таком, что $F\cap u\neq\varnothing$, найдется точка x_1 такая, что $x_1\in F\cap\bar u$, $x_1\overline{\in} F_1$. Так как F_1 замкнуто, то найдется шар $u_1\subset u$ с центром в точке x_1, $\bar u_1\cap F_1=\varnothing$, причем можно считать, что радиус δ_1 шара u_1 не превосходит 1. Продолжая так же рассуждать, получим последовательность вложенных и замкнутых шаров $\bar u\supset\bar u_1\supset\bar u_2\supset\ldots\supset\bar u_n\supset\ldots$ с центрами в точках x_n и радиусами $\delta_n<\dfrac{1}{n}$ соответственно таких, что

$\overline{u}_n \cap E \neq \varnothing$, $\overline{u}_n \cap F_n = \varnothing$, $n=1, 2, \ldots$. Пусть x_0 — общая точка всех множеств $\overline{u}_n \cap F$, тогда, с одной стороны, $x_0 \in F$, с другой стороны для любого n имеем $x_0 \overline{\in} F_n$, поэтому $x_0 \overline{\in} F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи. **12.** Указание. Проверить, что для последовательности $U_n(x_0)$ вложенных окрестностей точки x_0 последовательность $\omega(f, U_n)$ монотонна и ограниченна. Для произвольной последовательности $U_n(x_0)$ окрестностей точки x_0 при условии $\operatorname{diam} U_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ доказать существование последовательности $\widetilde{U}_m(x_0)$ вложенных окрестностей точки x_0 такой, что для любого $n \in N$ существуют $m_1(n) \in N$ и $m_2(n) \in N$ такие, что $\widetilde{U}_{m_1(n)}(x_0) \supset U_n(x_0) \supset \widetilde{U}_{m_2(n)}(x_0)$ и $\operatorname{diam} \widetilde{U}_m(x_0) \underset{m\to\infty}{\to} 0$. **14.** Необходимость условия следует из свойства сохранения знака непрерывной функции. Достаточность условия докажем от противного. Если f разрывна в точке $x_0 \in E$, то x_0 не является изолированной точкой E и по крайней мере две из трех точек расширенной числовой прямой $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$, $f(x_0)$, $\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x)$ различны. Для определенности положим, что $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) < f(x_0)$ (оста́льные случаи рассматриваются аналогично). Если $\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x) < c < f(x_0)$, то $x_0 \in E_c^+$, но в любой окрестности точки x_0 найдется точка $\tilde{x} \in E$, $\tilde{x} \overline{\in} E_c^+$, таким образом, E_c^+ не является открытым относительно множества $\vec{E}$. Полученное противоречие доказывает достаточность условия задачи. **15.** Указание. Показать, что условие задачи эквивалентно фундаментальности последовательности $f_n(x_0)$ для любого $x_0 \in U$. **16.** Указание. См. задачу № 186, ч. I, гл. IV. **18.** Например, $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0 & x=y=0. \end{cases}$

19. Указание. Показать, что такая функция есть предел последовательности непрерывных функций и применить результат задачи 16. **20.** Например, $f(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y \text{ рационально и } x \in [0, 1], \\ 0, \text{ если } y \text{ иррационально и } x \in [0, 1]. \end{cases}$ **21.** Указание. Представить приращение f в виде $f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x+\Delta x, y) + f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$. **22.** Пусть $(x_0, y_0) \in G$. Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$. Выберем $\widetilde{\Delta x} > 0$ и $\widetilde{\Delta y} > 0$ такие, что $\{(x, y) : x_0 - \widetilde{\Delta x} \leqslant x \leqslant x_0 + \widetilde{\Delta x},\ y_0 - \widetilde{\Delta y} \leqslant y \leqslant y_0 + \widetilde{\Delta y}\} \in G$. Для определенности предположим, что функция $f(x, y)$ не убывает по переменной y при фиксированном x. В силу линейной непрерывности $f_1'(x, y)$ существуют h и k: $0 < h < \widetilde{\Delta x}$, $0 < k < \widetilde{\Delta y}$ такие, что $|f(x_0, y_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0)| < \varepsilon$, $|f(x_0, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y)| < \varepsilon$,

$|f(x_0, y_0+k)-f(x_0+\Delta x, y_0+k)|<\varepsilon$, $|f(x_0, y_0-k)-f(x_0+\Delta x, y_0-k)|<\varepsilon$ для всех Δx и Δy : $|\Delta x|\leqslant h$, $|\Delta y|\leqslant k$. Тогда для $|\Delta x|<h$, $|\Delta y|<k$ имеем $|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)|\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+|f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)|\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+k)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+\varepsilon\leqslant|f(x_0+\Delta x, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)|+|f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)|+|f(x_0, y_0)-f(x_0+\Delta x, y_0)|+\varepsilon\leqslant 4\varepsilon$, т. е. функция $f(x, y)$ непрерывна в (x_0, y_0). **23.** Например, $f(x, y)=x+y+\operatorname{sign} y$. **24.** Например: а) $f=\operatorname{sign}(xy)$, $g=x-\operatorname{sign}(xy)$; б) $f=\operatorname{sign}(xy)$, $g=xy$. **25.** Указание. Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, -x)$. **28.** Указание. Рассмотреть $f(x, x)$ и $f(x, 0)$. **29.** $D(x)=\begin{cases}0, & x \text{ — иррациональное;}\\ 1, & x \text{ — рациональное.}\end{cases}$

32. Указание. Рассмотреть $f(x, x^2)$. **33.** Указание. а) $|f(x, y)|\leqslant\leqslant\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$; в) — е) перейти к полярной системе координат. **34.** Указание. а) Рассмотреть $f(x, x)$; б) рассмотреть $f(0, y)$; в) рассмотреть $f(x, 0)$; г) рассмотреть $f(x, x^3-x^2)$; д) рассмотреть $f(x, kx)$ либо перейти к полярным координатам; е) рассмотреть $f(x, x)$. **35.** Необходимые примеры отображений удобно записывать в виде $r_1=r_1(r, \varphi)$, $\varphi_1=\varphi_1(r, \varphi)$, где (r, φ) — полярные координаты точки $M(x, y)$, $x^2+y^2>0$, а (r_1, φ_1) — полярные координаты точек $P(u, v)$, $u^2+v^2>0$ (полярная и декартова система координат согласованы). Если при отображении f полюс переходит в полюс, r_1 и φ_1 — непрерывные функции от r и φ, $\lim\limits_{r\to 0} r_1(r, \varphi)=0$ для любого φ, $\lim\limits_{\varphi\to 2\pi}\varphi_1(r, \varphi)=\varphi_1(r, 0)+2\pi$ для любого $r>0$, то отображение f будет непрерывным. а. f_1: полюс переходит в полюс, $r_1=2r$, $\varphi_1=\varphi$. б. Непрерывного отображения D в M_2 не существует, так как D связно, а M_2 несвязно. в. f_2: полюс переходит в полюс, $r_1=8r(1-r)$, $\varphi_1=\varphi$. г. $f_3=g_1\circ g_2$, где $g_2:(x, y)\to(u, v)$ полюс переводит в полюс $\varphi_1=\varphi$, $r_1=\frac{2r}{(1-r\cos\varphi)}$ и $g_1:(u, v)\to(u, v)$ — сдвиг в плоскости UOV на единицу вправо по оси U ($g_2:(x, y)\to(u, v)$ переводит множество D во внутренность параболы $v^2=u+1$). **36.** а) Отображение f_1 из решения задачи 35; б) такого отображения нет, см. п. б) решения задачи 35; в) отображение f_2 из решения задачи 35; г) такого отображения не существует, так как по условию отображение f непрерывно на $\bar{D}=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant 1\}\subset E$, следовательно, $f(\bar{D})$ — ограниченное множество и в силу соотношения $f(D)\subset f(\bar{D})$ $f(D)$ также должно быть ограниченным множеством. **37.** а) Отображение f_1 из решения задачи 35; б) такого отображения не существует, см. п. б) решения задачи 35; в) такого отображения не существует. Действительно, из условия задачи следует, что $f^{-1}(M_2)=f^{-1}(f(D))=D$, т. е. прообраз замкнутого множества, есть множество открытое, что противоречит непрерывности отображения. г) такого отображения не существует, см. п. г) решения задачи 36. **38.** Указание. Рассмотреть значение функции на прямых $y=kx$. **39.** Указание. Использовать то, что функция $f(x, y)$ непрерывна на множестве $x^2+y^2\leqslant 1$. **40.** На множестве $0<x^2+y^2<2$ функция не является равномерно непрерывной (см. указание к задаче 38). На множестве $\frac{1}{2}<x^2+y^2<2$ функция равномерно непрерывна (см. указание к задаче 39). **41.** Указание. Использовать критерий Коши. **42.** Указание. Для доказательства необходимости надо доказать, что функция $f(A)=\lim\limits_{M\to A,\, M\in D} f(M)$ существует (см. задачу 41) и непрерывна на границе $\partial D=\overline{D}\diagdown D$. **43.** Например, $f(x, y)=x^2e^{-x}+y^2e^{-y}$; $f(x, y)=e^{-x-y}$. **44.** f непрерывна как композиция многочлена и кубического корня. Так как для любого $x\in\in[-1, 1]$, $f(x, 0)=0$ и для любого $y\in[-1, 1]$, $f(0, y)=0$, то $f'_x(0, 0)=0$, $f'_y(0, 0)=0$. Если f дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$, то $df=0$ и, следовательно, $\Delta f=f(x, y)-f(0, 0)=f(x, y)==o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ $(\Delta x^2+\Delta y^2\to 0)$. Но для $y=x$ имеем: $f(x, x)=x$, следовательно, $\frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{2}\operatorname{sign} x$, а функция $\sqrt{2}\operatorname{sign} x$ не является бесконечно малой при $x\to 0$. Полученное противоречие показывает, что f не дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$. **45.** Так же, как в предыдущей задаче, доказывается, что $f'_x(0, 0)=f'_y(0, 0)=0$ и f не дифференцируема в точке $M_0=(0, 0)$. Если $M=(x, y)$, $x>0$, $y>0$, то в некоторой окрестности точки M $f(x, y)=\frac{xy}{x+y}$, следовательно, $f'_x(M)=\frac{y^2}{(x+y)^2}$, $f'_y(M)=\frac{x^2}{(x+y)^2}$, т. е. в первом квадранте $|f'_x(M)|\leqslant 1$, $|f'_y(M)|\leqslant 1$, так как $f(-x, -y)=f(x, y)=-f(x; -y)==-f(-x, y)$, то $|f'_x(M)|\leqslant 1$, $|f'_y(M)|\leqslant 1$ для любой точки M, не лежащей на осях OX и OY. Непосредственным переходом к пределу получается, что для точек M, лежащих на осях OX и OY, $f'_x(M)=\operatorname{sign} y$, $f'_y(M)=\operatorname{sign} x$. **47.** Указание. Использовать теорему Лейбница и результат задачи 21 в δ-окрестности $U_\delta(M)$ произвольной точки $M\subset G$, где δ выбирается так, чтобы $U_\delta(M)\subset G$. **48.** Указание. Использовать теорему Лейбница. **49.** Пусть $M_p==\{m: 2\pi p<\varphi_m\leqslant 2\pi(p+1),\ \operatorname{arctg}\varphi_m-\alpha<r_m<\operatorname{arctg}\varphi_m+\alpha\}$, тогда $M=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} M_p$. Если точка $m=(x, y)\in M_p$, то $\varphi(x, y)=\varphi_0+2\pi p$, где φ_0 $(0<\varphi_0\leqslant 2\pi)$ — угол между вектором $\overrightarrow{Om}$ и полярной осью, совпадающей с положительной полуосью OX. Чтобы установить однозначную определенность функции $\varphi(x, y)$, достаточно показать, что множества M_p не пересекаются. Пусть l_0 есть луч, выходящий из полюса под углом φ_0, $0<\varphi_0\leqslant 2\pi$, к полярной оси. Этот луч пересекается с M_p по отрезку, концевые точки которого отстоят от полюса на $r_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)-\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi(p+1))-\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p))$ и $\tilde{r}_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)+\frac{1}{8}(\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi(p+1))-\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p))$. Так как $\tilde{r}_p<r_{p+1}$, то отрезки $l_0\cap M_p$ и $l_0\cap M_q$, $p\neq q$, не пересекаются. Следовательно, $M_p\cap M_q\neq\varnothing$, $p\neq q$. Возьмем последовательность точек m_p с полярными координатами $\varphi_p=\varphi_0+2\pi p$, $r_p=\operatorname{arctg}(\varphi_0+2\pi p)$. Тогда $m_p\in M_p\cap l_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} r_p=\pi/2$, следовательно, существует $\lim\limits_{p\to\infty} m_p=m_0$, и в силу критерия Коши для любого $\varepsilon>0$ существует P такое, что для любых $p_1>p_2>P$ $\|m_{p_1}-m_{p_2}\|<\varepsilon$. С другой стороны, из того, что $m_{p_1}\in M_{p_1}\cap l_0$, $m_{p_2}\in M_{p_2}\cap l_0$, следует $\varphi(m_{p_1})=\varphi_0+2\pi p_1$, $\varphi(m_{p_2})=$ $=\varphi_0+2\pi p_2$, т. е. $|\varphi(m_{p_1})-\varphi(m_{p_2})|=2\pi|p_1-p_2|\geqslant 2\pi$. Итак, в множестве M имеется пара сколь угодно близких точек, разность значений функции φ в которых не менее 2π, т. е. φ не является равномерно непрерывной на M. Пусть $m_0=(x_0,\ y_0)\in M$. Если $x_0\neq 0$, то найдется такая окрестность точки $m_0 U(m_0)\in M$, что $\varphi(m)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+$ $+2\pi k_1(m_0)$, $k_1\in N$ для любого $m\in U(m_0)$; если $y_0\neq 0$, то найдется такая окрестность точки m_0 $U(m_0)$, что $\varphi(m)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}+2\pi k_2(m_0)$, $k_2\in N$. Следовательно, для любой точки $m_0\in M$ имеем $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(m_0)=$ $=\frac{-y_0}{x_0^2+y_0^2}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(m_0)=\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$, т. е. $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(m)\right|\leqslant 1$, $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial y}(m)\right|\leqslant 1$ для любого $m\in M$. **50.** $(f'_y)'_x(0,\ 0)=1$, $(f'_x)'_y(0,\ 0)=-1$. **51.** а) $A=$ $=(-\infty,\ 1]$; б) бесконечно много; в) четыре: $y_1=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=$ $=-|x|\cdot\sqrt{1-x}$, $y_3=|x|\sqrt{1-x}$, $y_4=x\sqrt{1-x}$; г) две: $y_1=$ $=-x\sqrt{1-x}$, $y_2=x\sqrt{1-x}$; д) I) одну: $y=-x\sqrt{1-x}$; II) две: $y_1=-x\sqrt{1-x}$ и $y_2=x\sqrt{1-x}$. **52.** Указание. Для анализа многозначной функции $y(x)$ полезно нарисовать кривую, определяемую данным уравнением, перейдя к полярным координатам. Точки ветвления: $(-9/16,\ 3\sqrt{15}/16)$, $(-9/16,\ -3\sqrt{15}/16)$, $(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$. Гладкие ветви: $y_1=\frac{1}{2}\sqrt{-x\sqrt{16x+9}-3x-2x^2}$; $y_2=-y_1$ $(-9/16\leqslant x\leqslant 0)$; $y_3=\frac{1}{2}\sqrt{x\sqrt{16x+9}-3x-2x^2}$; $y_4=-y_3$ $(-9/16\leqslant x\leqslant 1)$. **53.** В силу периодичности φ, применяя теорему Лейбница, получаем $\max\limits_{y\in R}|\varphi(y)|=$ $=\max\limits_{0\leqslant y\leqslant T}|\varphi(y)|\leqslant|k|T+|\varphi(0)|$, следовательно, переменная $x=ky+$

$+\varphi(y)$ принимает все действительные значения. Так как $x'_y=k+\varphi'_y\neq 0$, то обратная функция $y=y(x)$ определена, непрерывна и дифференцируема на всей числовой оси. Функция $g(x)=y(x)-\frac{x}{k}$ также однозначно определяется из уравнения $kg+\varphi\left(g+\frac{x}{k}\right)=0$ при любом x. Если $x_1=x+|k|T$, то значение $g_1=g(x_1)$ должно удовлетворять уравнению $kg_1+\varphi\left(g_1+\frac{x}{k}+T\operatorname{sign}k\right)=0$, которое в силу периодичности φ равносильно уравнению $kg_1+\varphi\left(g_1+\frac{x}{k}\right)=0$. Таким образом, значения $g=g(x)$ и $g_1=g(x+|k|T)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, и в силу однозначности его решения $g=g_1(x)=$ $=g(x+|k|T)$, т. е. функция g периодическая с периодом $|k|\cdot T$.

54. Так как $|xy|\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, то $|f(x,\ y)|\leqslant\frac{1}{2}|x|$, откуда следует непрерывность f в начале координат. Так же, как в задаче 44, находится, что $f'_x(0,\ 0)=f'_y(0,\ 0)=0$. Если f дифференцируема в точке $M=(0,\ 0)$, то отсюда следует, что $df=0$ и $\Delta f=f(x,\ y)-f(0,\ 0)=$ $=f(x,\ y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$ $(x^2+y^2\to 0)$. Но для $y=x$ имеем $\frac{f(x,\ x)}{\sqrt{x^2+x^2}}=$ $=\frac{x^3}{x^2\sqrt{2}\,|x|}=\frac{1}{2}\operatorname{sign}x$, а функция $\frac{1}{2}\operatorname{sign}x$ не бесконечно малая при $x\to 0$. Следовательно, f не дифференцируема в точке $M_0=(0,\ 0)$. Пусть $x=x(t)$, $x(0)=0$, $y=y(t)$, $y(0)=0$, $x(t)$, $y(t)\in C^1[-1,\ 1]$, $x'_t(0)=A$, $y'_t(0)=B$, $A^2+B^2>0$. Тогда при $t\to 0$ $x(t)=At+o(t)$, $y(t)=Bt+o(t)$ и $f^*(t)=f(x(t),\ y(t))=\frac{A^2Bt^3+o(t^3)}{A^2t^2+B^2t^2+o(t^2)}=$ $=\frac{A^2Bt}{A^2+B^2}+o(t)$, т. е. $f^*(t)$ дифференцируема в нуле и $(f^*)'_t|_{t=0}=$ $=\frac{A^2B}{A^2+B^2}$. Если $A=0$ и $B=0$, то $x(t)=t\cdot\varepsilon_1(t)$, $y(t)=t\cdot\varepsilon_2(t)$, где $\varepsilon_1^2(t)+\varepsilon_2^2(t)\to 0$, при $t\to 0$; так как $x^2(t)+y^2(t)>0$ при $t\neq 0$, то $\varepsilon_1^2(t)+\varepsilon_2^2(t)>0$ при $t\neq 0$. Тогда $\frac{f^*(t)-f^*(0)}{t}=\frac{f^*(t)}{t}=\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}$ и, как было показано выше, $\lim\limits_{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\to 0}\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2}{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}=0$, т. е. $f^*(t)$ дифференцируема в нуле и $f_t^{*\prime}|_{t=0}=0$.

55. Пусть $f'_x(x_0,\ y_0)=A$ и $f'_y(x_0,\ y_0)=$ $=B$. Функция $g(x,\ y)=f(x_0+x,\ y_0+y)-Ax-By-f(x_0,\ y_0)$ дифференцируема в точке $M_0=(0,\ 0)$ тогда и только тогда, когда f дифференцируема в точке $(x_0,\ y_0)$. Так как $g'_x(M_0)=0$, $g'_y(M_0)=0$, то в силу условия задачи для любых $x(t)$, $y(t)$, $x(0)=0$, $y(0)=0$,

$x(t),\ y(t) \in C^1(-1,\ 1)$ имеем $g'_t(x(t),\ y(t))|_{t=0}=0$. Предположим, что g не дифференцируема в точке $M_0=(0,\ 0)$. Это значит, что существует последовательность точек $M_p=(x_p,\ y_p) \to M_0$ и число $\varepsilon_0>0$ такие, что для любого $p \in N$ имеем $g(x_p,\ y_p) \geqslant \varepsilon_0 \sqrt{x_p^2+y_p^2}$. Пусть k — конечная предельная точка множества $\left\{\frac{y_p}{x_p}\right\}$. (Если это множество не имеет конечных предельных точек, то аналогичное рассуждение проводится для множества $\left\{\frac{x_p}{y_p}\right\}$, для которого в этом случае нуль будет предельной точкой.) Выберем подпоследовательность M_{p_i} последовательности M_p такую, что x_{p_i} монотонно стремятся к нулю (для определенности $x_{p_i}>0$) и $\frac{y_{p_i}}{x_{p_i}} \to k$ $(i \to \infty)$. Положим $n_1=p_1$. Так как $y_{p_i} \to 0$, $x_{p_i} \to 0$ при $i \to \infty$, то найдется такой номер $n_2=p_l$, что $\frac{y_{n_1}}{x_{n_1}}-\frac{1}{2}<\frac{y_{n_1}-y_{n_2}}{x_{n_1}-x_{n_2}}<\frac{y_{n_1}}{x_{n_1}}+\frac{1}{2}$. Продолжая по индукции такой выбор, построим последовательность точек $M_q=(x_q,\ y_q)$ таких, что при $q \to \infty$, $x_q \downarrow 0$, $y_q \to 0$, $\frac{y_k}{x_k} \to k$ и при любом q $(q=1,\ 2\ \ldots)$ $\frac{y_q}{x_q}-\frac{1}{q}<\frac{y_q-y_{q+1}}{x_q-x_{q+1}}<\frac{y_q}{x_q}+\frac{1}{q}$. Используя результат задачи 55 § 1 гл. IV, для каждого q найдем функцию $\varphi_q: R^1 \to R^1$ такую, что $\varphi_q \in C^1(-\infty,\ +\infty)$ $\varphi_q(x_{q+1})=y_{q+1}$, $\varphi_q(x_q)=y_q$, $\varphi'_q(x_{q+1})=\frac{y_{q+1}}{x_{q+1}}$, $\varphi'_q(x_q)=\frac{y_q}{x_q}$, $\frac{y_q}{x_q}-\frac{2}{q}<\varphi'_q(x)<\frac{y_q}{x_q}+\frac{2}{q}$, $x \in [x_{q+1},\ x_q]$. Положим

$$x(t)=t \text{ и } y(t)=y(x)=\begin{cases} \varphi_q(x), & x \in (x_{q+1},\ x_q); \\ kx, & x \leqslant 0; \\ \frac{y_1}{x_1}x+y_1, & x>x_1. \end{cases}$$

Тогда $x(t),\ y(t) \in C^1(-\infty,\ \infty)$, $x(0)=y(0)=0$, но по построению последовательности $M_q=(x_q,\ y_q)$ $g(x_q,\ y(x_q))=g(x_q,\ y_q) \geqslant \varepsilon_0 \sqrt{x_q^2+y_q^2}$, следовательно, функция $g(x(t),\ y(t))$ не может иметь в точке $t=0$ производную, равную нулю. Полученное противоречие показывает, что g дифференцируема в точке $M_0=(0,\ 0)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ