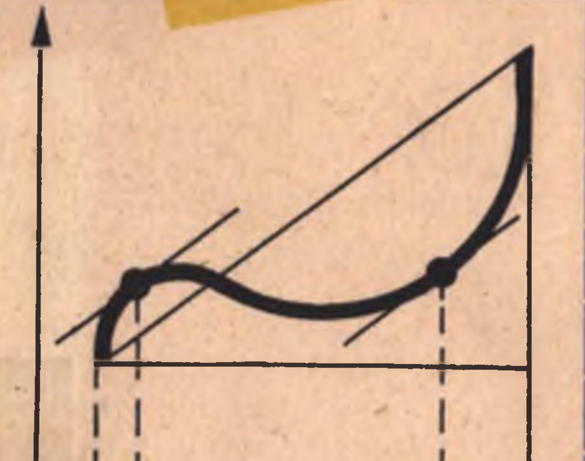
Т. Г. СТРИЖАК
Н. Р. КОНОВАЛОВА

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ



3

Т. Г. СТРИЖАК
Н. Р. КОНОВАЛОВА

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Затверджено
Міністерством освіти України
як навчальний посібник
для студентів технічних вищих закладів

КИЇВ
«ЛИБІДЬ»
1995

ББК 22.161я73
С85
УДК 517

Рецензенти: доктори фіз.-мат. наук, професори Н.О.Вірченко, А.Ф.Турбін

Головна редакція літератури з природничих та технічних наук

Головний редактор Е.О.Вавілова

Редактор М.А.Васильківська

Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р.
С85 Математичний аналіз: приклади і задачі: Навч. посібник. — К. : Либідь, 1995. — 240 с.
ISBN 5-325-00656-8.

У навчальному посібнику вміщено близько п'яти тисяч задач, тематика яких охоплює основний розділ курсу вищої математики, що вивчається у технічних вузах — диференціальне числення. Викладено методи розв'язання задач та основні теоретичні відомості з тем: вступ до математичного аналізу та інтегральне числення функції однієї змінної. Для самостійної роботи наведено комплекс характерних вправ, які мають відповіді. Запропоновано набір типових завдань — розрахункові роботи.

Для студентів технічних вузів, які вивчають дисципліну «Вища математика».

$С\,\dfrac{1602070000-069}{224-95}$ Без оголошення

ББК 22.161я73

ISBN 5-325-00656-8

Передмова

Вища математика як навчальна дисципліна є однією з основних при підготовці висококваліфікованих кадрів у вищих технічних та інших навчальних закладах.

Диференціальне числення є основним розділом курсу вищої математики в цілому. Подібно до того як без знання арифметики не можна обійтися при розв'язанні задач з алгебри, геометрії, так і без засвоєння основних положень, на яких базується диференціальне числення, не можна на належному якісному рівні застосовувати теорію та методи вищої математики.

Цей посібник підготовлено з метою надання допомоги студентам вузів зробити перші кроки в оволодінні практичними навичками використання методів вищої математики при розв'язанні ряду задач з різних галузей знань (при вивченні фізики, електротехніки тощо).

Матеріал посібника поділено на дві глави: 1) вступ до математичного аналізу; 2)диференціальне числення функції однієї змінної. Кожна глава складається з параграфів, які містять короткі теоретичні відомості, а також приклади розв'язання типових задач. Для самостійної роботи наводиться комплекс характерних вправ, які мають відповіді. Наприкінці кожної глави запропоновано добірки типових завдань (розрахункові роботи) для закріплення викладеного матеріалу.

Глава I. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Ця глава містить теми, які відносяться до основних при вивченні положень математичного аналізу. Це — границя числової послідовності, границя та неперервність функції.

§ 1. ГРАНИЦЯ ЧИСЛОВОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Границя числової послідовності. *Границею числової послідовності* $\{x_n\}$ є число a, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, якщо для кожного як завгодно малого додатного числа ε існує таке натуральне число N, яке залежить від ε, що для всіх $n>N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (1.\,1)$$

З геометричної точки зору це означає, що в довільному ε-околі точки a міститься нескінченна кількість елементів послідовності $\{x_n\}$, а поза цього околу або немає жодного елемента, або лише скінченна кількість.

Послідовність, для якої існує границя, називають *збіжною*, в протилежному випадку — *розбіжною*.

Властивості збіжних послідовностей:

1) збіжна послідовність має лише одну границю;

2) якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, тоді для довільного дійсного числа α існує $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha x_n) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

3) якщо існують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, тоді існує:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) якщо $y_n \neq 0$ та $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, тоді існує:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};$$

4) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, та для всіх n, починаючи з деякого, виконується нерівність $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, тоді $a \geq b$ $(a \leq b)$;

5) якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, та, починаючи з деякого n, виконуються нерівності $x_n \leq z_n \leq y_n$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ (теорема про три послідовності).

Границі деяких важливих послідовностей. Пригадаємо границі таких числових послідовностей:

а)
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e = 2{,}718281828\ \ldots; \qquad (1.2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^n = e^k, \ k \in \mathrm{N}, \ k \geq 2; \qquad (1.3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e, \qquad (1.4)$$

де $\{p_n\}$ — послідовність натуральних чисел, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ a > 1;$

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1;$

г) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad |q| < 1; \\ \infty & \text{при} \quad |q| > 1. \end{cases}$

Тепер перейдемо до розв'язання деяких прикладів з розглянутої теми.

Приклад 1. Користуючись означенням границі послідовності, доведемо, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n} = 1.$$

Задамо довільне мале число $\varepsilon > 0$. Для того щоб довести, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n} = 1$, треба вказати номер N такий, що для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$, тобто

$$\frac{2}{n} < \varepsilon. \qquad (1.5)$$

Розв'язуючи дану нерівність відносно n, отримаємо

$$n > \frac{2}{\varepsilon}. \qquad (1.6)$$

За N візьмемо цілу частину $\frac{2}{\varepsilon}$ $\left(N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]\right)$. Тоді для $n > N$, маємо $n \geq \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{2}{\varepsilon}$, тобто виконується нерівність (1.6), а це означає, що для будь-якого $n > N$ має місце нерівність (1.5). Таким чином, для довільного $n > N$ $\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$. З цього випливає згідно з означенням границі послідовності, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+2}{n} = 1$.

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n^3}{n^3 - 2} = 2$.

Для цього, як і в прикладі 1, розглянемо модуль різниці

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n^3}{n^3 - 2} - 2\right| = \frac{4}{n^3 - 2}, \; n > 1.$$

Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. Нерівність $|x_n - 2| < \varepsilon$ буде виконуватись, якщо $\frac{4}{n^3 - 2} < \varepsilon$, тобто при $n > \sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon} + 2}$, тоді $N = \left[\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon} + 2}\right]$. Звідси випливає, що для всіх $n > N$ мають місце нерівності:

$$|x_n - 2| = \frac{4}{n^3 - 2} \leq \frac{4}{N^3 - 2} < \varepsilon.$$

Це означає, що 2 є границею послідовності $\left\{\frac{2n^3}{n^3 - 2}\right\}$.

Приклад 3. Доведемо, що границя послідовності $x_n = -3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ $(n = 1,2,3\ldots)$ дорівнює (-3). Знайдемо номер, починаючи з якого виконується нерівність $|x_n - (-3)| < 0{,}01$.

Дана послідовність набуває значення $-4, -2\frac{3}{4}, -3\frac{1}{9}, -2\frac{15}{16}, \ldots$.

Нехай дано довільне число $\varepsilon > 0$. Тоді

$$|x_n - (-3)| = \left|-3 + \frac{(-1)^n}{n^2} - (-3)\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

Далі $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$, коли $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. За N беремо цілу частину $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ $\left(N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]\right)$. Отже, для всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - (-3)| < \varepsilon$, що означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -3$.

При $\varepsilon = 0{,}01$ $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{100}}} = 10$, тому $N = 10$. Таким чином, при $n > 10$ $|x_n - (-3)| < 0{,}01$.

Приклад 4. Знайдемо границю послідовності $\{x_n\} = \left\{\frac{3n^3 - n + 5}{n^3 + 1}\right\}$.

При $n \to \infty$ чисельник та знаменник даного дробу прямують до нескінченності, тому застосувати наведену вище теорему про границю частки не можна. Для знаходження границі заданої послідовності поділимо чисельник та знаменник дробу на n^3 (3 — максимальний степінь n чисельника та знаменника):

$$x_n = \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}}.$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^3} = 0$, та використовуючи властивості границі послідовності, дістанемо:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty}\left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Приклад 5. Знайдемо

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1}.$$

Перетворимо формулу загального члена x_n:

$$x_n = \frac{(2n+1)^2 - (n+1)^2}{n^2 + n + 1} = \frac{(2n + 1 - n - 1)(2n + 1 + n + 1)}{n^2 + n + 1} =$$

$$= \frac{n\,(3n + 2)}{n^2 + n + 1}.$$

Максимальний степінь n в чисельнику та знаменнику дорівнює 2, тому ділимо чисельник та знаменник на n^2. В результаті маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n + 1)^2 - (n + 1)^2}{n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

Приклад 6. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n}\,)\sqrt[3]{n^3 - 1}}.$$

Максимальний степінь n в чисельнику 2, в знаменнику також 2, тому ділимо чисельник та знаменник на n^2. Знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[6]{n} + \sqrt[5]{32n^{10} + 1}}{(n + \sqrt[4]{n}\,)\sqrt[3]{n^3 - 1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{7/6}} + \sqrt[5]{32 + \frac{1}{n^{10}}}}{\left(1 + \frac{1}{n^{3/4}}\right)\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^3}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{32}}{1} = 2.$$

Приклад 7. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n - 3}{n^3 + n - 5}$.

Максимальний степінь n в чисельнику 1, в знаменнику — 3. Ділимо чисельник та знаменник на n^3. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n - 3}{n^3 + n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Приклад 8. Знайдемо границю

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n^2 + 2n - 1} - 2n).$$

Перетворимо формулу загального члена:

$$\sqrt{4n^2 + 2n - 1} - 2n =$$

$$= \frac{(\sqrt{4n^2+2n-1}-2n)(\sqrt{4n^2+2n-1}+2n)}{\sqrt{4n^2+2n-1}+2n} =$$

$$= \frac{4n^2+2n-1-(2n)^2}{\sqrt{4n^2+2n-1}+2n} = \frac{2n-1}{\sqrt{4n^2+2n-1}+2n} =$$

$$= \frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$, отже:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+2n-1}-2n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 9. Обчислимо границю числової послідовності

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}.$$

Перетворимо формулу загального члена x_n:

$$x_n = \frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n} =$$

$$= \frac{(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5})(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})}{n(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})} =$$

$$= \frac{(n^2+5)(n^4+2)-n^6+3n^3-5}{n\,(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})} =$$

$$= \frac{5n^4+3n^3+2n^2+5}{n\,(\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}+\sqrt{n^6-3n^3+5})} =$$

$$= \frac{5+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^4}}{\sqrt{\left(1+\frac{5}{n^2}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n^4}\right)}+\sqrt{1-\frac{3}{n^3}+\frac{5}{n^6}}}.$$

А тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Приклад 10. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}\right)\left(\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-n+1)}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[3]{n^2}+\sqrt[3]{n(n-1)}+\sqrt[3]{(n-1)^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{n}}+\sqrt[3]{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^{1/2}}-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^2}}=+\infty.$$

Приклад 11. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^n-5^{n+3}}$.

Ділимо чисельник та знаменник на 5^n. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^n-5^{n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n-5^3}.$$

Але $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{5}\right)^n=0$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^n}{3^n-5^{n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{-5^3}=-\dfrac{1}{125}$.

Приклад 12. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+1)!}{n!(n^3-2n)}$.

Оскільки $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$, $(n+1)!=n!(n+1)$, а $(n+3)!=$ $=n!(n+1)(n+2)(n+3)$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+1)!}{n!(n^3-2n)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\left[(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)\right]}{n!(n^3-2n)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)}{n^3-2n}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n^2}} = 1.$$

Приклад 13. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right)$.

Чисельник дробу є сумою n членів арифметичної прогресії, яку знаходимо за відомою формулою:

$$S_n = 2+4+\ldots+2n = \frac{2+2n}{2}n = n(n+1).$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+4+\ldots+2n}{n+3}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(n+1)}{n+3}-n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2-3n}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{-2}{1+\frac{3}{n}} = -2.$$

Приклад 14. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{13}{25}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{5^n}\right)$.

Перетворимо формулу загального члена x_n:

$$x_n = 1+\frac{13}{25}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{4}{25}+\frac{9}{25}\right)+$$

$$+\ldots+\left(\frac{2^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}\right) = \left(\frac{2}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)+$$

$$+\left(\frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{3}{5}\right)^n\right).$$

У дужках маємо суму n членів відповідної геометричної прогресії. Знаходячи ці суми за відомими формулами, дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{13}{25}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{5^n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{13}{6}-\left(\frac{2}{5}\right)^n\cdot\frac{2}{3}-\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{3}{2}\right].$$

Враховуючи, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{13}{25} + \ldots + \frac{2^n + 3^n}{5^n}\right) = \frac{13}{6}.$$

Приклад 15. Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right).$$

Зобразимо загальний член x_n у вигляді:

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}$.

Приклад 16. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n$.

За формулою (1. 3) $\left(k = \frac{1}{3}\right)$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^n = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}.$$

Приклад 17. Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n$.

Перетворимо формулу загального члена x_n:

$$x_n = \left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n = \left(\frac{1 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n}}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}.$$

Тому, використовуючи формулу (1. 3), дістанемо:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e^3}{e^{-2}}=e^5.$$

Приклад 18. Обчислимо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}$.

Маємо:

$$x_n=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}=\left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}.$$

Використовуючи формулу (1. 4), знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n+1}{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{(n^2-1)\frac{(n+1)}{(n^2-1)(n-1)}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{(n^2-1)\cdot\frac{1}{(n-1)^2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n-1)^2}}=e^0=1.$$

Приклад 19. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+2n+3+(2n-4)}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{1-2n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\right)^{\frac{4n^2+2n+3}{2n-4}\cdot\frac{2n-4}{4n^2+2n+3}\cdot(1-2n)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n^2+10n-4}{4n^2+2n+3}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Пропонуємо розв'язати самостійно вправи, що наведено нижче.

1. Користуючись означенням границі послідовності, довести:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{4^n}\right)=2;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^4}=0;$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)}{n^3}=0;$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n}{n+3}=-1;$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{\sqrt{5n-1}}=0;$

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(7+\dfrac{(-1)^n}{6^n}\right)=7;$

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(-0{,}5)^n=0;$

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos(n^2/2)}{\sqrt[3]{2n-5}}=0.$

2. Довести, що границя послідовності $\{x_n\}$ дорівнює a. При яких значеннях $n>N$ виконується нерівність $|x_n-a|<\varepsilon$ для заданих $\{x_n\}$, a,ε :

1) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n^2-1}\right\},\quad a=0,\quad \varepsilon=0{,}001;$

2) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n-1}{n+2}\right\},\quad a=1,\quad \varepsilon=0{,}01;$

3) $\{x_n\}=\left\{\dfrac{n}{\sqrt{n^2+2}}\right\},\quad a=1,\quad \varepsilon=0{,}1.$

Знайти границі числових послідовностей:

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2-1}{2n^2+n}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+3n+1}{2n^2-1}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n}+\dfrac{n+1}{3n+4}\right).$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n-1}{n^2+2n-3}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(4n+5)}{(n-3)(7n+2)}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n-2)}{(n+1)(n-4)}.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)(n+3)(n+5)}{2n^3}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{3n}-\dfrac{5}{n^2}\right).$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{2n+1}-\dfrac{6n^3}{4n^2-1}\right).$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{3}-\dfrac{n^2}{3n+1}\right).$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^3+(4-n)^3}{n^2-2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)^3-(n+2)^3}{(3n-1)(n-5)}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n+1}-\dfrac{n^3}{n^2+1}\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^4-2n^2+1}}{3n^4-5n^3}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt{n^2+2}+2n)^2}{\sqrt[4]{n^8-2}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^5-1}-\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[6]{n-1}-\sqrt[5]{n^5+3}}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^3+2n^2-2}+\sqrt[3]{n^4+4}}{\sqrt[4]{n^6-3n^3+2}-\sqrt[5]{n^7+3n^3-1}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{16n^2-3}+5}{2n+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{5+2^{n+1}}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+3}+3^{n+3}}{2^n+3^n\cdot 5}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\cdot 2^n-3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n+3\cdot 5^n}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n \operatorname{arctg} 5n}{n^3+3}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^{-n}}{2^{-n}-3^n}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2-4})\, n$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+8}-\sqrt[3]{n-8})$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n+3)(n-1)}-\sqrt{n(n+1)})$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n(\sqrt{n^2-1}-n)}$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{n^2+3}-n}$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^3+1}-n\sqrt{n}}$.

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+n}-n-1}$.

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!+(n+1)!}{n!\,(2n-3)}$.

35. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)\,n!-(n-1)!}{(n+2)!-n^3(n-1)!}$.

37. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$.

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)$.

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$.

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{n}{3}\right]$.

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)}{2n^3+1}$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right)$.

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot7}+\frac{1}{7\cdot12}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}\right)$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\cdot5\cdot8}+\frac{1}{5\cdot8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)(3n+5)}\right)$.

49. $\sqrt{3}, \sqrt{3\sqrt{3}}, \ldots, \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} \ldots .$

50. 0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; … .

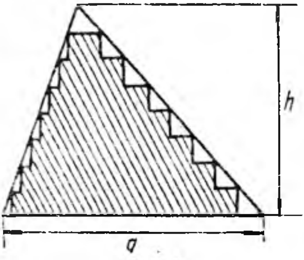


Рис.1

51. До трикутника вписано прямокутники однакової висоти (рис. 1). Збільшуючи необмежено кількість прямокутників та зменшуючи їх висоти, довести, що границя суми площ прямокутників дорівнює площі трикутника [13].

Вказівка. Поділимо висоту трикутника на n однакових частин. Тоді висота кожного з прямокутників буде $\frac{h}{n}$, а довжини паралельних до основи відрізків будуть: $\frac{1}{n}g, \frac{2}{n}g, \ldots, \frac{n-1}{n}g$.

Отже, сума площ усіх прямокутників S

$$S = gh\left(\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}\right).$$

Обчислити границі послідовностей:

52. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{n}$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-3}\right)^{n}$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-5}\right)^{n^2}$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$.

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+1}{2^n}\right)^{2^n}$.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)^{n}$.

61. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+2n+2}\right)^{n}$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3n]{8}$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3}-6}{4+\sqrt[n]{0,2}}$.

64. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\frac{1}{n}}$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3}$.

66. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n+3}$.

67. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}+\sqrt[n]{5}}{2\sqrt[n]{n^3}-\sqrt[n]{4n}}$.

Крім наведених задач, пропонуємо також розв'язати й інші задачі з даної теми [1, 6, 9].

§ 2. ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ

При розв'язанні задач з даної теми важливо чітко уявляти такі поняття: границя функції в точці, одностороння границя, нескінченно велика функція, нескінченно мала функція, її властивості, порівняння нескінченно малих функцій, а також основні теореми про границі функцій.

Границя функції в точці. Границею функції $f(x)$ в точці x_0 (x прямує до x_0) є число a, тобто

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a,$$

якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Нескінченно велика функція. Функцію $f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x\to x_0$, якщо для довільного як завгодно великого $M > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x, для яких $0 < |x - x_0| < \delta$, має місце нерівність $|f(x)| > M$. Це позначають умовно таким чином

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Нескінченно мала функція. Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою* при $x\to x_0$, якщо границя її, коли x прямує до x_0, дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Нескінченно малі функції володіють такими властивостями:

алгебраїчна сума та добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція;

добуток обмеженої функції на нескінченно малу є функція нескінченно мала;

функція, обернена до нескінченно малої функції, є нескінченно великою і, навпаки, функція, обернена до нескінченно великої, є нескінченно малою [19].

Односторонні границі. Якщо маємо $x < x_0$ та $x\to x_0$ (x прямує до x_0 зліва), тоді умовно пишуть $x\to x_0 - 0$; аналогічно, якщо $x > x_0$ та $x\to x_0$ (x прямує до x_0 справа), це позначають так: $x\to x_0 + 0$. Границі

$$\lim_{x\to x_0 - 0} f(x) \quad \text{та} \quad \lim_{x\to x_0 + 0} f(x)$$

називають відповідно *границею зліва* функції $f(x)$ в точці x_0 та *раницею справа* функції $f(x)$ в точці x_0 (ці границі існують).

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a\right)$ еобхідно та достатньо, щоб мала місце рівність

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a.$$

Якщо односторонні границі різні, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

бо хоча б одна з них не існує, тоді не існує й границя функції при $\to x_0$.

Теореми про границі функцій. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають скінченні границі при $x \to x_0$, тоді мають місце такі співвідношення:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \to x_0} (cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x) \quad (c = \text{const});$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = (\lim_{x \to x_0} f(x))^n \quad (n \in N);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0;$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} f(x)};$$

$$\lim_{x \to x_0} c = c \quad (c = \text{const}).$$

При знаходженні границі функції у випадку, якщо c — стала личина, виконуються такі правила:

$$\lim_{x \to 0} \frac{c}{x} = \infty; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{x}{c} = \infty;$$

$$\lim_{x \to \infty} cx = \infty; \quad \lim_{x \to \infty} \frac{c}{x} = 0; \tag{1.7}$$

$$\lim_{x\to+\infty} c^x = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 0 < c < 1; \\ +\infty, & \text{якщо } c > 1; \end{cases}$$

(1. 8

$$\lim_{x\to-\infty} c^x = \begin{cases} +\infty, & \text{якщо } 0 < c < 1; \\ 0, & \text{якщо } c > 1; \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0} \log_c f(x) = \log_c \lim_{x\to x_0} f(x); \\ &\lim_{x\to 0} \log_c x = -\infty; \\ &\lim_{x\to+\infty} \log_c x = +\infty. \end{aligned}\right\} c > 1. \qquad (1.9$$

Наведені вище співвідношення застосовуються для обчис ления границі функції в точці.

Розглянемо це докладніше [3, 5, 6].

1. Для того щоб обчислити границю многочлена n-го степен

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

при $x \to x_0$, достатньо знайти значення його при $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0).$$

2. Границя раціональної функції $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$, $Q($ — многочлени та $P(x_0) \neq 0$ або $Q(x_0) \neq 0$, знаходиться безпосе редньо, а саме:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \quad Q(x_0) \neq 0; \qquad (1.10$$

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \infty, \quad P(x_0) \neq 0, \quad Q(x_0) = 0. \qquad (1.11$$

Якщо $P(x_0) = Q(x_0) = 0$, теорему про границю частки дво функцій застосувати не можна. В таких випадках кажуть, ш має місце невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для розкриття такої невизна ченості треба чисельник та знаменник дробу поділити на $(x - x$ один або декілька разів залежно від конкретного прикладу.

3. При знаходженні границі функції

$R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$ при $x \to \infty$ (невизначеність типу $\frac{\infty}{\infty}$) чисельник та знаменник даного дробу ділять на x^k, де k — найбільше з показників m і n.

В загальному випадку

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & n > m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m, \\ 0, & n < m. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Аналогічний метод застосовується і для знаходження границі дробів (при $x \to \infty$), які містять ірраціональність.

4. Для того щоб розкрити невизначеність $\frac{0}{0}$, в якій чисельник та знаменник містять ірраціональність, позбуваються ірраціональності шляхом переведення її з чисельника в знаменник або навпаки. Іноді ірраціональний вираз зводиться до раціонального вигляду шляхом введення нової змінної.

5. При знаходженні границь зустрічаються невизначеності типу $\infty - \infty$ та $0 \cdot \infty$. Певним перетворенням функції ці випадки зводяться до невизначеності типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

Про деякі важливі границі. Обчислення границі в багатьох випадках відбувається за допомогою двох важливих формул:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad (1.13)$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (1.14)$$

Перша формула розкриває невизначеність типу $\frac{0}{0}$, а друга — 1^∞.

Часто використовуються також формули, які є наслідками перших двох:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \qquad (1.15)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad (1.16)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \qquad (1.17)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \qquad (1.18$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a},\ a>0,\ a\neq 1, \qquad (1.19$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0, \qquad (1.20$$

зокрема, при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1, \qquad (1.21$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \qquad (1.22$$

Про обчислення границі показниково-степеневої функці При знаходженні границі виду

$$\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)]^{\psi(x)},$$

де функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ визначені в деякому околі точки x_0 причому $\varphi(x) > 0$, треба мати на увазі [5, 6]:

1) якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=b$

тоді

$$\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=a^b, \qquad (1.23$$

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a\neq 1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\infty$, тоді границю обчислюють безпосередньо за допомогою формул (1.8);

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=1$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=\infty$, тоді границю функції обчислюють за формулою

$$\lim_{x\to x_0}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)-1]\psi(x)}; \qquad (1.24$$

4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$ або $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, тод

$\lim\limits_{x\to x_0}[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ є невизначеністю типу 0^0 або ∞^0. Подавши функцію $[\varphi(x)]^{\psi(x)}$ у вигляді $e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$, отримаємо невизначеність тип $0\cdot\infty$ для функції $\psi(x)\ln\varphi(x)$.

Порівняння нескінченно малих функцій. Якщо існує грани- відношення двох нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ ри $x \to x_0$, тоді можливе їх порівняння.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, тоді $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно ма- ими функціями одного порядку; якщо $c = 0$, тоді $\alpha(x)$ є нескін- нно малою функцією вищого порядку, ніж $\beta(x)$ (позначають $= o(\beta)$); при $c = 1$ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ — еквівалентні (позначають $(x) \sim \beta(x)$).

Використовуючи наведені вище границі (1. 13) — (1. 22), ожна записати при $x \to 0$:

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim$$

$$\sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1 + x) \sim e^x - 1 \sim \frac{a^x - 1}{\ln a}. \qquad (1.25)$$

Звідси випливають більш загальні співвідношення, а саме, що $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$, тоді при $x \to x_0$

$$u(x) \sim \sin u(x) \sim \operatorname{tg} u(x) \sim \arcsin u(x) \sim \operatorname{arctg} u(x) \sim$$

$$\sim \ln(1 + u(x)) \sim e^{u(x)} - 1 \sim \frac{a^{u(x)} - 1}{\ln a}. \qquad (1.26)$$

Функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою порядку n порівняно з ункцією $\beta(x)$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n} = c, \; 0 < |c| < +\infty.$$

При обчисленні границі відношення двох нескінченно малих ункцій треба мати на увазі, що:

різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є скінченно мала функція вищого порядку порівняно з кожною з х;

нескінченно малу функцію можна замінити на еквівалентну, то якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) = \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, тоді

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \qquad (1.27)$$

Розглянувши ряд основних положень стосовно границі функ- , розв'яжемо деякі приклади.

Приклад 1. Користуючись означенням границі функції в то
ці, доведемо, що

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} = 8.$$

Для того щоб це довести, треба для довільного $\varepsilon > 0$ вказа
таке $\delta(\varepsilon)$, що, як тільки виконується умова $0 < \left|x-\frac{1}{3}\right| <$
тоді має місце нерівність $|f(x) - 8| < \varepsilon$. Для цього розглянем
модуль різниці

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right| = \left|\frac{15\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)}{x-\frac{1}{3}}-8\right| =$$

$$= 15\left|x-\frac{1}{3}\right|,\ x \neq \frac{1}{3}.$$

Покладаючи $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$, матимемо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ іс
$\delta = \frac{\varepsilon}{15}$, що для всіх x таких, що $0 < \left|x-\frac{1}{3}\right| < \delta$, виконуєт
нерівність

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right| = 15\left|x-\frac{1}{3}\right| < 15\cdot\frac{\varepsilon}{15} = \varepsilon.$$

Це означає, що число 8 є границею функції

$$f(x) = \frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}} \text{ при } x\to\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Доведемо, що $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-5x} = 2.$

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-5x}$ в деякому околі точк
наприклад, в інтервалі (3,6).

Задамо довільне $\varepsilon > 0$ та перетворимо при $x \neq 5$ моду
різниці

$$|f(x) - a| = \left|\frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2\right| = \left|\frac{x + 5}{x} - 2\right| = \frac{|x - 5|}{x}.$$

Враховуючи, що $x \in (3; 6)$, маємо

$$\left|\frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2\right| < \frac{|x - 5|}{3}.$$

Покладемо $\delta = 3\varepsilon$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = 3\varepsilon$, що для всіх $x \in (3; 6)$, які задовольняють умову $0 < |x - 5| < \delta$, виконується нерівність

$$\left|\frac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} - 2\right| < \frac{\delta}{3} = \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

що і треба було довести.

Приклад 3. Знайдемо границю функції $y = 5x^3 + 3x^2 - 10$ при $x \to 1$.

Границю функції обчислюємо безпосередньо, а саме:

$$\lim_{x \to 1} (5x^3 + 3x^2 - 10) = 5 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 10 = -2.$$

Приклад 4. Знайдемо $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

Застосовуючи теореми про границю суми та добутку функцій, знаходимо границю знаменника $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4x + 3) = 4 - 8 + 3 = -1$. Границя знаменника відмінна від нуля, тому згідно з формулою (1. 10) отримаємо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2 \cdot 4 - 1}{-1} = -7.$$

Приклад 5. Знайдемо $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x + 2}{x^2 - x}$.

Знаходимо окремо границю чисельника ($\lim\limits_{x \to 1} (x + 2) = 3$) та знаменника ($\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - x) = 0$). На основі формули (1. 11) матимемо:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x^2 - x} = \infty.$$

Приклад 6. Знайдемо $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$.

При $x = -3$ чисельник та знаменник даної функції перетв
рюються в нуль, тобто маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, яку треба роз
рити. Для цього розкладемо на множники чисельник та знаме
ник: $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$, $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3$
Скорочуючи чисельник та знаменник на $x + 3 \neq 0$ $(x \to -3)$
переходячи до границі, маємо

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{(x + 3)(x - 1)}{(x + 3)(x - 3)} = \lim_{x \to -3} \frac{x - 1}{x - 3} =$$

$$= \frac{-3 - 1}{-3 - 3} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 7. Знайдемо $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$.

Тут чисельник та знаменник прямують до нуля:

$$\lim_{x \to 3} (x^3 - 4x^2 - 3x + 18) = 0, \quad \lim_{x \to 3} (x^3 - 5x^2 + 3x + 9) = 0.$$

Для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$ поділимо чисельник та зна
менник на $(x - 3)$. При $x \neq 3$ матимемо:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3}.$$

Обчислюючи границю чисельника та знаменника, знов
приходимо до невизначеності $\frac{0}{0}$, оскільки $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - x - 6) = 0$
$\lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 2x - 3) = 0$.

Ще раз ділимо чисельник та знаменник на $(x - 3)$. Тоді

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{x + 2}{x + 1} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = 1\frac{1}{4}$.

Приклад 8. Знайдемо $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 7x + 1}{3x^2 + 5}$.

При $x\to\infty$ чисельник та знаменник є нескінченно великими функціями (маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$). Старший степінь x в чисельнику та знаменнику дорівнює двом, тому поділимо чисельник та знаменник на x^2. Користуючись властивостями границі функції, маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-7x+1}{3x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(6-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{5}{x^2}\right)}=2.$$

Отриману границю можна обчислити, використовуючи формули (1. 12). В даному випадку степінь x у чисельнику дорівнює степеню x у знаменнику, тому границя знаходиться як відношення коефіцієнтів, які стоять при $x^2(6:3=2)$.

Приклад 9. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}$.

Маємо при $x\to\infty$ невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Ділимо чисельник та знаменник на x^2 (2 —максимальний степінь x в чисельнику та знаменнику). В результаті знаходимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x}{\sqrt[4]{x^8-5x+3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-1/x}{\sqrt[4]{1-5/(x^7)+3/(x^8)}}=4.$$

Приклад 10. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-x+1}+\sqrt{x-2}}{3x+4\cos x}$.

При $x\to\infty$ чисельник та знаменник необмежено зростають (невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$). Найстарший степінь x в чисельнику та знаменнику дорівнює 1 (функція $\cos x$ обмежена та при $x\to\infty$ не впливає на швидкість зростання знаменника). Отже, ділимо чисельник та знаменник на x. Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8x^3-x+1}+\sqrt{x-2}}{3x+4\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{8-1/(x^2)+1/(x^3)}+\sqrt{1/x-2/(x^2)}}{3+4\cdot(\cos x)/x}=\frac{\sqrt[3]{8}}{3}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 11. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}$.

При $x = 4$ чисельник та знаменник дробу перетворюються нуль. Знаменник містить ірраціональний вираз $\sqrt{x+5}$. Домножимо чисельник та знаменник на $(\sqrt{x+5}+3)$ — вираз, спряжений до виразу, який стоїть в знаменнику. Тоді при $x \neq 4$ отримаємо

$$\frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3} = \frac{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)} =$$

$$= \frac{(x^2-16)(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5-9)} = \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)} =$$

$$= (x+4)(\sqrt{x+5}+3).$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3} = \lim\limits_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x+5}+3) =$ $= 8 \cdot 6 = 48.$

Приклад 12. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Покладемо $x = t^6$ (показник степеня вибрано так, щоб можн було добути корінь і другого і третього степенів), причому, коли $x\to 64$, $t\to 2$. Тоді маємо:

$$\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{t\to 2}\frac{\sqrt{t^6}-8}{\sqrt[3]{t^6}-4} = \lim_{t\to 2}\frac{t^3-8}{t^2-4} =$$

$$= \lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{(t-2)(t+2)} = \lim_{t\to 2}\frac{t^2+2t+4}{t+2} = 3,\ t \neq 2.$$

Приклад 13. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}}$.

При $x\to 3$ маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для уникнення цьог перетворимо функцію:

$$\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \frac{(\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}{\sqrt[3]{(x-3)(x+3)}\,(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{x+13-4(x+1)}{\sqrt[3]{x-3}\,\sqrt[3]{x+3}\,(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{-3(x-3)}{\sqrt[3]{x-3}\,\sqrt[3]{x+3}(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{-3\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+3}(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}.$$

В результаті маємо:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{x\to 3} \frac{-3\sqrt[3]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{x+3}(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} =$$

$$= \frac{0}{8\sqrt[3]{6}} = 0.$$

Приклад 14. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-x)$.

При $x\to\infty$ дана функція є різницею двох нескінченно великих функцій (випадок $\infty - \infty$). Помножимо та поділимо функцію на $(\sqrt[3]{(x^3-2x^2+1)^2} + x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2+1} + x^2)$. Застосовуючи формулу для різниці кубів та формулу (1. 12), дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}-x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2+1-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2+1}+x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2+1}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2+1)^2}+x\sqrt[3]{x^3-2x^2+1+x^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 15. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$, $k \neq 0$ [5].

Покладемо $k\,x = y$, звідки $x = \frac{y}{k}$. Коли $x\to 0$, то $y\to 0$, тому:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{\frac{y}{k}} = k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}.$$

Використовуючи формулу (1. 13), знаходимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = k\cdot 1 = k. \qquad (1.28)$$

Зокрема, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x} = 4$, а при $k = \frac{1}{2}$ маємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x/2)}{x} = \frac{1}{2}$.

Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\frac{x}{\sin\beta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Отже, $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}\,. \qquad (1.2$$

Приклад 16. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Оскільки $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, тоді, використовуючи теорем про границю добутку функцій та результати прикладу 15, ма мо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{2\sin^2(x/2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x/2)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin(x/2)}=$$

$$=2\cdot 2=4.$$

Приклад 17. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4\sin^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 2x}\right)$ [5].

Тут маємо невизначеність типу $\infty-\infty$ при $x\to 0$. Знаходяч різницю двох дробів та переходячи до границі, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2 x\cos^2 x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{4\sin^2 x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x}=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}=-\frac{1}{4}\,.$$

Приклад 18. Обчислимо $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

При $x\to\pi$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Для обчислення границ функції перейдемо до нової змінної $t=x-\pi$ ($t\to 0$, коли $x\to\pi$):

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos(3t+3\pi)-\cos(t+\pi)}{\mathrm{tg}^2(2t+2\pi)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-\cos 3t+\cos t}{\mathrm{tg}^2 2t}\,.$$

Оскільки $\cos t-\cos 3t=2\sin 2t\sin t$, тому, застосовуючи фор мулу (1.29), знаходимо:

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{\mathrm{tg}^2 2x}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t\sin t}{\dfrac{\sin^2 2t}{\cos^2 2t}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t\cos^2 2t}{\sin 2t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{\sin 2t}\lim_{t\to 0}\cos^2 2t=1\cdot 1=1.$$

Приклад 19. Знайдемо $\lim\limits_{x\to4}(4-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}x$.

Дана функція є добутком нескінченно малої при $x\to4$ функції $(4-x)$ на нескінченно велику функцію $\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}x$, тобто маємо невизначеність $0\cdot\infty$. Покладемо $x-4=t$. Тоді

$$\lim_{x\to4}(4-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}x=\lim_{t\to0}(-t)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{8}(t+4)=$$

$$=\lim_{t\to0}(-t)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{8}t+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{t\to0}t\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8}t=\lim_{t\to0}\frac{t\cos((\pi/8)\,t)}{\sin((\pi/8)\,t)}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin((\pi/8)\,t)}\lim_{t\to0}\cos\frac{\pi}{8}t=\frac{8}{\pi}\,.$$

Приклад 20. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}$.

Чисельник та знаменник даного дробу при $x\to\pi$ прямують до 0. Робимо заміну $x-\pi=t$ $(t\to0)$. Тоді

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\left[(t+\pi)^2/\pi\right]}{2^{\sqrt{\sin(t+\pi)+1}}-2}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{-\sin\left[(t+2\pi)\,t/\pi\right]}{2^{\sqrt{1-\sin t}}-2}=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\dfrac{t\,(t+2\pi)}{\pi}}{2\left(2^{\sqrt{1-\sin t}-1}-1\right)}=$$

$$=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\dfrac{t\,(t+2\pi)}{\pi}}{2\left(2^{\frac{1-\sin t-1}{\sqrt{1-\sin t}+1}}-1\right)}=-\lim_{t\to0}\frac{\sin\dfrac{t\,(t+2\pi)}{\pi}}{2\left(2^{\frac{-\sin t}{\sqrt{1-\sin t}+1}}-1\right)}\,.$$

При $t\to0$ (згідно з формулами (1. 25), (1. 26)) маємо:

$$\sin t\sim t,\ \sin\frac{t\,(t+2\pi)}{\pi}\sim\frac{t\,(t+2\pi)}{\pi},\ 2^{\frac{-\sin t}{\sqrt{1-\sin t}+1}}-1\sim$$

$$\sim-\frac{t}{\sqrt{1-t}+1}\ln2.$$

Отже, за формулою (1. 27) дістанемо:

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin\dfrac{t\,(t+2\pi)}{\pi}}{2\left(2^{\frac{-\sin t}{\sqrt{1-\sin t}+1}}-1\right)}=\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{t\,(t+2\pi)}{\pi}}{2\left(-\dfrac{t}{\sqrt{1-t}+1}\right)\ln2}=$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{(t+2\pi)(\sqrt{1-t}+1)}{\pi\cdot2\cdot(-1)\cdot\ln2}=-\frac{2\pi\cdot2}{2\pi\ln2}=-\frac{2}{\ln2}=-\frac{1}{\ln\sqrt2}\,.$$

Остаточно $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin(x^2/\pi)}{2^{\sqrt{\sin x+1}}-2} = \dfrac{1}{\ln\sqrt{2}}$.

Приклад 21. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$. Тут при $x\to 0$ маєм

невизначеність $\dfrac{0}{0}$. В чисельнику додамо та віднімемо 1; весь дрі

поділимо та помножимо на x ($x\neq 0$). Тоді з урахуванням (1. 20)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(2^{3x}-1)-(3^{5x}-1)}{\sin 7x-2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{(2^{3x}-1)}{x}-\dfrac{(3^{5x}-1)}{x}}{\dfrac{\sin 7x}{x}-\dfrac{2x}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\dfrac{2^{3x}-1}{3x}-5\dfrac{3^{5x}-1}{5x}}{7\dfrac{\sin 7x}{7x}-\dfrac{2x}{x}} =$$

$$= \frac{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{3x}-5\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-1}{5x}}{7\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{7x}-2} = \frac{3\ln 2-5\ln 3}{7-2} = \frac{1}{5}\ln\frac{2^3}{3^5} =$$

$$= \ln\frac{\sqrt[5]{8}}{3}.$$

Приклад 22. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$.

При $x\to 1$ чисельник та знаменник даного дробу є нескінченн малими функціями. Робимо заміну $x-1=t$ ($t\to 0$). Таким чином, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x-e}{\sin(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e(e^{x-1}-1)}{\sin[(x-1)(x+1)]} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e(e^t-1)}{\sin[t(t+2)]}$.

Приймаючи до уваги, що при $t\to 0$ $e^t-1\sim t$, $\sin[t(t+2)]\sim t(t+2)$, отримаємо

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)} = \lim_{t\to 0} \frac{e\,t}{t(t+2)} = \lim_{t\to 0} \frac{e}{t+2} = \frac{e}{2}.$$

Приклад 23. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3x+3)}{x-2}$.

При $x\to 2$ отримаємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, оскільки $x^2 -$ $- 3x+3\to 1$ та $\ln(x^2-3x+3)\to 0$. Представимо вираз x^2-3x+

з у вигляді $x^2 - 3x + 3 = 1 + (x^2 - 3x + 2) = 1 + t$, де $t = x^2 - 3x + 2 \to 0$ при $x \to 2$.

Але $\ln(1 + t) \sim t$ при $t \to 0$ (згідно з формулою (1. 25)), отже:

$$\ln(x^2 - 3x + 3) \sim x^2 - 3x + 2, \;\; x \to 2.$$

Застосовуючи (1. 27), дістанемо:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2 - 3x + 3)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x - 1) = 1.$$

Приклад 24. Доведемо, що

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \; [5]. \qquad (1.30)$$

При $x \to 0$ функція $(1 + x)^\alpha - 1$ є нескінченно малою. Покладемо $(1 + x)^\alpha - 1 = t$.

Оскільки $t \sim \ln(1 + t)$, $t \to 0$, тому $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \ln[1 + (1 + x)^\alpha - 1] = \ln(1 + x)^\alpha = \alpha \ln(1 + x)$.

Таким чином,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha \ln(1 + x)}{x} = \alpha.$$

Приклад 25. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{\sqrt[20]{1 + x} - 1}$.

За формулою (1. 30) при $x \neq 0$ маємо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{\sqrt[20]{1 + x} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{x}}{\dfrac{\sqrt[20]{1 + x} - 1}{x}} = \frac{\dfrac{1}{5}}{\dfrac{1}{20}} = 4.$$

Приклад 26. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3 + 4}{x^3 + 9}\right)^{1/(x+2)}$.

За правилами обчислення границі показниково-степеневої функції знаходимо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + 4}{x^3 + 9} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^3 + 4)}{\lim\limits_{x\to 0}(x^3 + 9)} = \frac{4}{9}, \;\; \lim_{x\to 0} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}(x + 2)} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, використовуючи формулу (1. 23), дістанемо:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^3 + 4}{x^3 + 9}\right)^{1/(x+2)} = \left(\frac{4}{9}\right)^{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 27. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

В даному прикладі $\varphi(x)=\frac{2x-1}{x}$, $\psi(x)=\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}$,

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1}\psi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}=\infty.$$

Отже, маємо невизначеність 1^{∞}. Застосуємо формулу (1. 24), введемо нову змінну $t=x-1$ ($t\to 0$, коли $x\to 1$), тобто матимемо у цьому випадку:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}-1\right)\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{t+1}\frac{\ln(5+2t)}{\ln(1-t)}}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\ln[1+(-1)\cdot t]}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(5+2t)}{t+1}}=$$

$$=e^{(-1)\ln 5}=e^{\ln(1/5)}=\frac{1}{5}.$$

При обчисленні даної границі користувалися умовою $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1-t)}{t}=-1$. Це легко отримати, поклавши $-t=z$ та використовуючи формулу (1. 21).

Приклад 28. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}\right)^{x+1}$.

Знаходимо при $x\to 1$ границі функцій $\varphi(x)=\frac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}$ та $\psi(x)=x+1$ (із застосуванням (1. 22)):

$$\lim_{x\to 1}\varphi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{e^{2}\left(e^{2(x-1)}-1\right)}{x-1}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\ x\to 1\Longrightarrow\\ t\to 0\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{2}\left(e^{2t}-1\right)}{t}=e^{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{t}=2e^{2}\lim_{t\to 0}\frac{e^{2t}-1}{2t}=$$

$$=2e^{2}\cdot 1=2e^{2};$$

$$\lim_{x\to 1}\psi(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{e^{2x}-e^{2}}{x-1}\right)^{x+1}=(2e^{2})^{2}=4\,e^{4}.$

Приклад 29. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$ [9].

Маємо при $x\to\infty$ невизначеність типу 1^{∞}. Покладемо $\dfrac{k}{x}=t$, тоді $x=\dfrac{k}{t}$, причому, коли $x\to\infty$, $t\to0$. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to0}(1+t)^{k/t}=(\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t})^{k}=e^{k}.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}. \tag{1. 31}$$

Приклад 30. Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-4}\right)^{x}$.

При $x\to\infty$ маємо невизначеність 1^{∞}. Ділимо чисельник та знаменник дробу на x, застосовуємо формулу (1. 31) при $k=8$ та $k=-4$. Отже,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-4}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+8/x}{1-4/x}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1+8/x)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1-4/x)^{x}}=\frac{e^{8}}{e^{-4}}=e^{12}.$$

Приклад 31. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]$.

Перетворимо функцію таким чином:

$$\ln(2x+1)-\ln(x+2)=\ln\frac{2x+1}{x+2}.$$

Використовуючи першу з формул (1. 9) та формулу (1. 12), дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{2x+1}{x+2}=\ln\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+2}=\ln2.$$

Приклад 32. Знайдемо $\lim\limits_{x\to0}\ln(3-\sqrt{\operatorname{arctg}x\sin(2/x)})$.

Оскільки при $x\to0$ $\operatorname{arctg}x$ є нескінченно малою функцією, а $\sin(2/x)$ — обмеженою, тому, за властивістю нескінченно малих функцій, $\lim\limits_{x\to0}(\operatorname{arctg}x\sin(2/x))=0$. Отже,

$$\lim_{x\to0}\ln(3-\sqrt{\operatorname{arctg}x\sin(2/x)})=\ln\lim_{x\to0}(3-\sqrt{\operatorname{arctg}x\sin(2/x)})=$$

$$= \ln [\lim_{x\to 0} 3 - \lim_{x\to 0}\sqrt{\operatorname{arctg} x \sin (2/x)}\,] =$$

$$= \ln [3 - \sqrt{\lim_{x\to 0} (\operatorname{arctg} x \sin (2/x))}\,] = \ln (3 - 0) = \ln 3.$$

Приклад 33. Знайдемо односторонні границі функції $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$ при $x \to 1$.

Задача зводиться до знаходження двох границь — границі зліва та границі справа, тобто $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{2}{x-1}$ та $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{2}{x-1}$.

Якщо $x \to 1-0$, тобто x прямує до 1, весь час залишаючись менше 1, тоді різниця $x-1$ є нескінченно малою функцією, яка набуває від'ємних значень. Обернена до неї функція буде нескінченно великою:

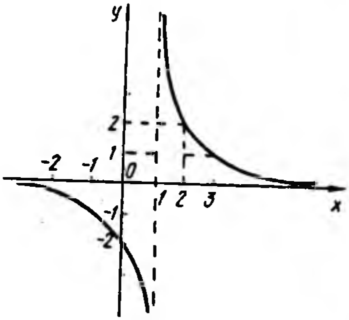


Рис.2

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{2}{x-1} = -\infty.$$

Якщо $x \to 1+0$ (x прямує до 1 справа), тоді $x-1$ є додатною нескінченно малою функцією, а тому $\dfrac{2}{x-1}$ буде додатною нескінченно великою функцією, тобто $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{2}{x-1} = +\infty$.

Графік функції $\dfrac{2}{x-1}$ зображено на рис. 2.

Приклад 34. Порівняємо при $x \to 0$ нескінченно малі функції $\alpha(x) = x \sin 3x$ та $\beta(x) = (\operatorname{arctg} 4x)^2$. Для цього знайдемо границю відношення $\alpha(x)$ до $\beta(x)$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin 3x}{(\operatorname{arctg} 4x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 3x}{(4x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{16x^2} = \frac{3}{16},$$

тобто $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — нескінченно малі одного порядку.

Приклад 35. Порівняємо при $x \to 0$ дві нескінченно малі функції $\alpha(x) = x \sin (1/x)$ та $\beta(x) = x$.

Знаходимо границю відношення заданих функцій при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin (1/x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin (1/x).$$

Оскільки дана границя не існує, то функції x та $x \sin(1/x)$ при $x \to 0$ не можна порівняти.

Приклад 36. Знайдемо порядок малості нескінченно малої $\alpha(x) = \ln\cos 2x$ відносно $\beta(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \to 0$.

Для того щоб знайти порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$, треба встановити, при якому n границя $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n}$ буде дорівнювати скінченному числу, відмінному від нуля. Таким чином, обчислюємо границю:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos 2x}{(\sqrt{\operatorname{tg} x}\,)^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 2x - 1 + 1)}{x^{n/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2\sin^2 x)}{x^{n/2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - 2x^2)}{x^{n/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2}{x^{n/2}} = -2$$

$$\text{при} \quad n = 4 \left(2 = \frac{n}{2} \to n = 4\right).$$

Тобто $\alpha(x) = \ln\cos 2x$ є нескінченно малою функцією четвертого порядку відносно $\beta(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ при $x \to 0$.

Пропонуємо розв'язати самостійно вправи, що наведено нижче.

Довести (знайти $(\delta(\varepsilon))$):

68. $\lim\limits_{x\to 2} (3x - 5) = 1.$

69. $\lim\limits_{x\to -1} (x + 3) = 2.$

70. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = -4.$

71. $\lim\limits_{x\to -1/2} \dfrac{4x^2 + 4x + 1}{x + 1/2} = 0.$

Обчислити границі раціональних функцій:

72. $\lim\limits_{x\to 4} (3x^2 + 2x - 5).$

73. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 9).$

74. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 5x + 2}{3x^2 - 6x + 4}.$

75. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 7x + 6}.$

76. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2 + 1}{x + 3}.$

77. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 1}{4x^2 + 5x - 4}.$

78. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x + 1}{2x + 2}.$

79. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 1}.$

80. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^3 - 8}{x - 4} + 2\right).$

81. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x}.$

82. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

83. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$.

84. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^4 - 3x^2 - x}{2x}$.

85. $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{(y^2 - 3y + 2)\,y}{y^2 - 1}$.

86. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$.

87. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$.

88. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{12}{8 - x^3}\right)$.

89. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$.

90. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

91. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

92. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{2x - x^2} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$.

93. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2 - 4x + 6}{x^2 - 5x + 4} + \dfrac{x - 4}{3x^2 - 9x + 6}\right)$.

94. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$.

95. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2 - (a + 1)\,x + a}{x^2 - a^2}$.

96. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 9}{(x - 3)(x + 4)}$.

97. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 5}{x^3 - 3x^2 - 1}$.

98. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{8x^3 - 4x^2 + 3x + 1}{5 - 2x + x^2 - 4x^3}$.

99. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$

100. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3}{x^3 + 6}$.

101. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x + 1)^{20}(2x - 3)^{40}}{(4x^2 + 19)^{30}}$.

102. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(3x^3 + 2x^2 - 1)^4}{(2x^4 - x^3 + 5)^3}$.

103. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - \dfrac{x^2}{x - 1}\right)$.

104. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + x}{x - 2} - \dfrac{x^2}{x + 1}\right)$.

105. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x-4} + \dfrac{x^2+4x+16}{2-x} \right).$

Знайти границі функцій, які містять ірраціональність:

106. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+4}}{x-3}.$

107. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x-2}{1+\sqrt{16x^2+3}}.$

108. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt{4x-3}}{\sqrt{9x+1}}.$

109. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-5}{x+\sqrt[3]{27x^4+1}}.$

110. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - 3\sqrt{2x}}{\sqrt[3]{x^2-1} - x}.$

111. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{16x^2+\sqrt{x+81x^4}}}{\sqrt{x^2+9}}.$

112. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x+\sqrt[3]{8x}}}}{\sqrt[3]{x+8}}.$

113. $\lim\limits_{y \to 3} \dfrac{9y-y^3}{\sqrt{y+1}}.$

114. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}.$

115. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt{5+x}-2}.$

116. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}.$

117. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}.$

118. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2-\sqrt{a^3x}}{\sqrt{ax}-a}.$

119. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$

120. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$

121. $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{y}-1}{\sqrt[3]{y}-1}.$

122. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}.$

123. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}.$

124. У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює x, а другий — $\sqrt{2x}$. Знайти границю різниці між гіпотенузою та катетом x, якщо $x \to \infty$ [13].

Знайти границі функцій:

125. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x-3} - \sqrt{x}).$

126. $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x(x+1)} - x].$

127. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x}).$

128. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+9x^2+2}-\sqrt{x^4-9x^2-2})$.

129. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^4+12x^2-7}-3x^2)$.

130. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^3+8}-\sqrt{x^3-8})$. **131.** $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+\sqrt[3]{3-8x^3})$.

132. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

Використовуючи формули (1. 13), (1. 15) — (1. 17), обчислити границі функцій:

133. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x/3)}{x}$. **134.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin(x/2)}$.

135. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\mathrm{tg}\,4x}$. **136.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\sin 3x}$.

137. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\mathrm{tg}(x/7)}$. **138.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,27x}{9x}$.

139. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\arcsin 2x}{x}$. **140.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3(x/4)}{x^3}$.

141. $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{ctg}\,3x\cdot\mathrm{ctg}(x-\pi/2)$. **142.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x}{\sin 8x-\sin 4x}$.

143. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{\mathrm{tg}\,6x^2}$. **144.** $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{cosec}x-\mathrm{ctg}x)$.

145. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin x\cos 10x}{\arcsin 5x^3}$. **146.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

147. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\mathrm{tg}^2x}{x\sin x}$. **148.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x-\sin 2x}{4x\,\mathrm{arctg}^2x}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{\arcsin x^3}$. **150.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x-5\mathrm{arctg}3x}{5\arcsin x-3\sin 6x}$

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin 3x}{\mathrm{arctg}\,5x-x}$. **152.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 6\pi x}{\sin 3\pi x}$.

153. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^3-1}$. **154.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

155. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a}$.

156. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.

157. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{\sin (x - \pi/3)}{1 - 2\cos x}$.

158. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{2}\cos x - 1}$.

159. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

160. $\lim\limits_{y \to 1} \dfrac{\operatorname{ctg} (\pi y/2)}{1 - y}$.

161. $\lim\limits_{\alpha \to \pi/2} \left(2\alpha \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{\pi}{\cos \alpha}\right)$.

162. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\cos (x - 2\pi/3)}{\cos x - \sqrt{3}/2}$.

163. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x + 9} - 3}$.

164. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sqrt{\operatorname{tg} 4x + 1} - 1}$.

165. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + \sin x} - \sqrt{9 - \sin x}}{\arcsin 3x}$.

166. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{\sin x}}$.

167. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{(1 - \cos x)^2}}$.

168. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{1 - \cos^4 x}$.

169. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg}^2 x}$.

170. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3\cos (\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}$.

171. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{arctg} x^2}$.

172. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 - \operatorname{arctg} x} - \sqrt[3]{1 + \arcsin 3x}}{\sqrt{1 + \arcsin 4x} - \sqrt{1 + \operatorname{arctg} 2x}}$.

173. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos (a + 2h) - 2\cos (a + h) + \cos a}{h^2}$.

174. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{ctg} (a + 2h) - 2\operatorname{ctg} (a + h) + \operatorname{ctg} a}{h^2}$.

Знайти границі показниково-степеневих функцій:

175. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{5 - x}{4 + 3x}\right)^{x}$.

176. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x^2 - 1}{4x^2 + x - 2}\right)^{x^2 + 1}$.

177. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2 - 4}{x - 2}\right)^{1/x}$.

178. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x}{x^2 - 9}\right)^{3x/(x - 1)}$.

179. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x^2 + x + 6}{x^2 - 2x + 3}\right)^{\sin(2x)/x}$.

180. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{x}$.

181. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{x}$.

182. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^{x}$.

183. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{(x^2 + 2)/x}$.

184. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 3}\right)^{(1 - x)/2}$.

185. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3}{x^2 - 6}\right)^{x^2}$.

186. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3x)^{1/x}$.

187. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 2x^3)^{1/\sin^2 x}$.

188. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin x)^{1/\operatorname{tg} 3x}$.

189. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x}$.

190. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$.

191. $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

192. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 2x}\right)^{1/x}$.

Застосовуючи формули (1. 18) — (1. 21) та (1. 9), обчислити границі функцій:

193. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\lg(1 + 10x)}{x}$.

194. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^{3x} - 1}{4x}$.

195. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{-x} - 1}{3x}$.

196. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(3 + x) - \ln 3}{x}$.

197. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{2^x - 1}$.

198. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$.

199. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{\sin 3x} - e^{x}}{\ln(1 - 4x)}$.

200. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x^2} - 1}{e^{3x^2} - 1}$.

201. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{3x^2}$.

202. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\sin x^2}$.

203. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{8x} - \cos 8x}{\sin 2x}$.

204. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{6x^2} - \cos 2x}{\ln(1 + x\sin x)}$.

205. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin x \cos 4x}{e^{5x^3} - 1}$.

206. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos 4x}{\ln \cos 2x}$.

207. $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{x - e}{\ln x - 1}$.

208. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln (x^2 + 7x + 7)}{x + 1}$.

209. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\ln (2x^2 - 3x - 8)}{x - 3}$.

210. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1 + 2x + x^2) + \ln (1 - 2x + 3x^2)}{2x^2}$.

211. $\lim\limits_{x\to \infty} [\ln (2x + 4) - \ln (x + 3)]$.

212. $\lim\limits_{x\to \infty} x (\ln (x + 2) - \ln x)$.

213. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} \ln \sqrt[3]{\dfrac{1 + x}{1 - x}}\right)$.

214. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{x}$ $\left(\operatorname{sh} ax = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right)$.

215. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$ $\left(\operatorname{ch} bx = \dfrac{e^{bx} + e^{-bx}}{2}\right)$.

216. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} 4x - 1}{\cos 2x - 1}$.

217. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2}$ $(a > 0)$.

Знайти границі функцій:

218. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[3]{x}\, [\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2}]$.

219. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin x}{x}$.

220. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sin 2x}{x}$.

221. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin (2\pi/x)$.

222. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x + 3 \cos x}{x - \sin x}$.

223. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2x}$.

224. $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 (1 - \cos (4/x))$.

225. $\lim\limits_{x\to \infty} (\sin\sqrt{x^2 + 4} - \sin\sqrt{x^2 - 4})$.

226. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (\cos (4/x) - \cos (2/x))$.

227. $\lim\limits_{x \to \infty} x \left(\operatorname{arctg} \dfrac{x+1}{x+2} - \operatorname{arctg} \dfrac{x}{x+2} \right)$.

228. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{\operatorname{tg}^2 4x}$.

229. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 2\sin 3x)^{1/2x}$.

230. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 (5^{1/x} - 5^{1/(x+2)})$.

231. $\lim\limits_{x \to 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$.

232. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{4\cos x - x\sin (2/x)}$

233. $\lim\limits_{x \to \infty} \ln (4 - \sqrt{\operatorname{arctg} x \sin (3/x^2}\ )$.

Порівняння нескінченно малих функцій

234. При $x \to 0$ функції $5x$, x^3, $\sqrt[4]{x}$, $\dfrac{x^2}{4}$, $\dfrac{x}{7}$ є нескінченно малими. Які з них є величинами одного порядку з x, а які — вищого порядку порівняно з x?

235. Дана функція $y = x^2$. Показати, що функції $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ та Δx при умові, що $\Delta x \to 0$ та $x \neq 0$, є нескінченно малими функціями одного порядку. Перевірити, що при $x = 0$ величина Δy є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx.При якому значенні x прирости Δx та Δy будуть еквівалентними?

236. Переконатись, що при $x \to 0$ нескінченно малі функції $\ln (1 + \sin x \operatorname{tg}^3 x)$ та x^4 будуть еквівалентними.

237.Показати,що при $x \to \infty$ нескінченно малі функції $\alpha (x) = \dfrac{2x - 1}{ax^2 - 7}$ та $\beta (x) = \dfrac{4}{x}$, де $a \neq 0$, будуть одного порядку малості. При якому значенні a функції будуть еквівалентними?

238. Визначити порядок малості $\alpha (x)$ відносно $\beta (x)$ при $x \to 0$:

1) $\alpha (x) = \cos x - \sqrt[3]{\cos x}$, $\beta (x) = \ln (1 + \sqrt[3]{x})$;

2) $\alpha (x) = e^{x^5} - \cos x^3$, $\beta (x) = \sin x$;

3) $\alpha (x) = \ln \cos 6x$, $\beta (x) = e^{\sqrt{x}} - 1$;

4) $\alpha (x) \sin^2 x (1 - \cos 2x)$, $\beta (x) = e^x - 1$;

5) $\alpha(x) = \ln\sqrt{1 + x^4\sin^6 x}$, $\beta(x) = \operatorname{tg} x$;

6) $\alpha(x) = \sin(\sqrt{4 + x} - 2)$, $\beta(x) = x$;

7) $\alpha(x) = \ln(1 + x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$, $\beta(x) = x$.

Користуючись властивістю еквівалентних нескінченно малих функцій (1. 27), знайти границі функцій:

239. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x \sin 5x}{(2x - x^2)^2}$.

240. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + x} - 1}{\sqrt[9]{1 + x} - 1}$.

241. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[5]{1 + x} - 1}{\sqrt[20]{1 + x} - 1}$.

242. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2\sin^2 x} - 1}{\ln(1 + 4x^2)}$.

243. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos 8x}{\arcsin x^2}$.

244. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1 - x}$.

245. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\ln(1 - x)}$.

246. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(3x^2 + 5x - 21)}{x^2 - 6x + 8}$.

247. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\operatorname{arctg}(3 - x) + \sin(x - 3)^2}{x^2 - 9}$.

248. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - \sqrt[6]{1 + x^2} + 1}{\ln\cos x}$.

249. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x + 3\arcsin 2x + 2x^3}{\ln(1 + 2x + 3\sin^2 x) + 4xe^x}$.

Знайти односторонні границі функцій:

250. а) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{9x^2 - 4}}$, б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{9x^2 - 4}}$;

251. а) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{|\sin x|}{x}$, б) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{|\sin x|}{x}$;

252. а) $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{x - 3}{|x - 3|}$, б) $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{x - 3}{|x - 3|}$;

253. а) $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, б) $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$;

254. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$, б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

255. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+8x-4}-\sqrt{x^2-4x+2})$.

256. $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2-4x-1})$.

257. $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

258. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(3+4e^{2x})}{\ln(1+5e^{3x})}$.

259. Знайти а) $\lim\limits_{x\to2+0}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to2-0}f(x)$, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{6}{2-x}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$;

3) $f(x)=3^{\frac{1}{x-2}}$; 4) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$.

260. Встановити, чи існує $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, якщо:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x<0\\ \dfrac{x}{2x+x^2}, & x>0\end{cases}$, $x_0=0$;

б) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ \cos x, & x\ge0\end{cases}$, $x_0=0$.

Крім наведених вище задач, радимо також розв'язати й інші задачі з даної теми [1 — 4, 6, 9, 13, 16].

§ 3. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Задачі цієї частини вступу до математичного аналізу стосуються неперервності функції. Розглянемо деякі поняття з даної теми.

Неперервність функції в точці. Функцію $f(x)$, яка визначена в околі точки x_0, називають *неперервною в точці* x_0, якщо існує границя функції при $x\to x_0$ та має місце така рівність:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1.32)$$

Рівність (1.32) еквівалентна умовам:

$$\text{а) } \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0, \qquad (1.33)$$

де $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції $f(x)$ в точці x_0, який відповідає приросту аргументу $\Delta x = x - x_0$;

$$\text{б) } \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (1.34)$$

Точки розриву. *Точкою розриву функції* $f(x)$ називають точку x_0, в околі якої функція визначена, але в самій точці не задовольняє умову неперервності (1.32).

Подамо класифікацію точок розриву функції.

Точка x_0 є:

а) точкою *усувного розриву*, якщо існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, проте $f(x)$ не визначена в точці x_0, або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Даний розрив можна усунути, для цього довизначають певним чином функцію в точці x_0;

б) точкою *розриву першого роду*, якщо існують скінченні ліва $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ та права $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ границі функції, але $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq$ $\neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$; різницю $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ називають *стрибком функції $f(x)$ в точці x_0;*

в) точкою *розриву другого роду* функції $f(x)$, якщо в точці x_0 не існує принаймні одна з односторонніх границь функції.

Неперервність функції на відрізку. Функцію $f(x)$ називають неперервною на відрізку $[a;b]$, якщо вона неперервна в кожній точці відрізка, причому неперервність в точці a означає неперервність справа $(\lim\limits_{x \to a + 0} f(x) = f(a))$, а в точці b — неперервність зліва $(\lim\limits_{x \to b - 0} f(x) = f(b))$.

Неперервні функції володіють такими властивостями [7, 8]:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$;

2) сума та добуток скінченного числа неперервних функцій є неперервною функцією;

3) частка двох неперервних функцій є неперервною функцією для всіх значень аргументу, які не перетворюють в нуль дільник;

4) якщо $y = f(z)$ та $z = \varphi(x)$ — неперервні функції своїх аргументів, тоді складена функція $y = f[\varphi(x)]$ також неперервна;

5) функція, що є неперервною на відрізку $[a;b]$:

а) обмежена на $[a;b]$;

б) досягає максимального та мінімального значення на $[a;b]$;

в) приймає всі проміжні значення на $[a;b]$, тобто для будь-якого C $(f(a) < C < f(b))$ завжди знайдеться таке $c \in (a;b)$, що $f(c) = C$; зокрема, якщо $f(a)f(b) < 0$, тоді рівняння $f(x) = 0$ має в інтервалі $(a;b)$ принаймні один дійсний корінь.

Розглянувши деякі важливі означення, які стосуються неперервності функцій, перейдемо тепер до розв'язування вправ з даної теми.

Приклад 1. Доведемо, що функція $f(x) = 5x^2 + 5$ неперервна в точці $x_0 = 8$.

Для того щоб довести неперервність функції $f(x)$ в точці $x_0 = 8$, треба довести, що $\lim\limits_{x \to 8}(5x^2 + 5) = 325$ (згідно з формулою (1.32)), тобто треба довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x з проміжку $|x - 8| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - 325| < \varepsilon$.

Оцінимо модуль різниці $|f(x) - 325| = |5x^2 + 5 - 325| = |5x^2 - 320| = 5|x^2 - 64| = 5|x + 8| \cdot |x - 8|$.

Оскільки функція визначена в околі точки $x_0 = 8$ (наприклад, $(7{,}9)$), то $|f(x) - 325| < 85|x - 8|$. Покладемо $\delta = \frac{\varepsilon}{85}$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \frac{\varepsilon}{85}$, що для всіх x, для яких виконується умова $|x - 8| < \delta$, має місце нерівність $|f(x) - 325| < 85\delta = \varepsilon$. А це означає, що $\lim\limits_{x \to 8}(5x^2 + 5) = 325$, тобто функція $y = 5x^2 + 5$ неперервна в точці $x_0 = 8$.

Приклад 2. Доведемо, що функція $y = x^3$ неперервна на всій дійсній осі.

Функція $y = x^3$ визначена для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$. Покажемо, що малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції, тобто виконується рівність (1. 33). Фіксуємо довільну точку x, аргументу x надамо приріст Δx, тоді приріст функції матиме вигляд

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 +$$

$$+ \Delta x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2).$$

Переходячи до границі, дістанемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 0 \cdot 3x^2 = 0.$$

Таким чином, умова (1. 33) виконується для довільного $x\ (-\infty, +\infty)$, тобто функція $y = x^3$ неперервна для всіх x.

Приклад 3. Покажемо, що функція $f(x) = \dfrac{x-4}{|x-4|}$ в точці $x = 4$ має розрив першого роду.

В точці $x = 4$ функція не визначена. Знайдемо при $x \to 4$ границі даної функції зліва та справа:

$$\lim_{x \to 4-0} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \to 4-0} \frac{x-4}{-(x-4)} = -1,$$

$$\lim_{x \to 4+0} \frac{x-4}{|x-4|} = \lim_{x \to 4+0} \frac{x-4}{x-4} = 1.$$

Оскільки односторонні границі скінченні, але $\lim\limits_{x \to 4-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4+0} f(x)$, то $x = 4$ є точкою розриву першого роду. Стрибок в даному випадку в точці $x = 4$ дорівнює 2 (рис. 3).

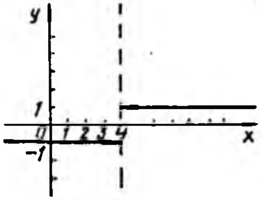


Рис.3

Приклад 4. Дослідимо на неперервність функцію $y = \dfrac{\sin x}{x}$ [5].

Дана функція визначена у всіх точках за винятком $x = 0$. Знайдемо односторонні границі функції в цій точці:

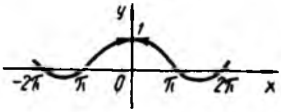


Рис.4

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рівність $\lim\limits_{x \to 0-0} y = \lim\limits_{x \to 0+0} y$ означає, що $x = 0$ є точкою усувного розриву (рис. 4). Довизначимо функцію y в нулі, а саме, покладемо $y = 0$, коли $x = 0$. Тоді функція

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$ є неперервною другого роду.

Приклад 5. Покажемо, що функція $f(x) = \frac{3}{(x-1)^3}$ має ро рив в точці $x = 1$.

Функція в точці $x = 1$ не визначена. При $x < 1$ має $f(x) < 0$, при $x > 1$ $f(x) > 0$. Отже, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} f(x)$ $= +\infty$. Тому точка $x = 1$ є точкою розриву другого роду (рис. 5)

Приклад 6. Доведемо, що рівняння $x \cdot 2^x - 1 = 0$ має додатний корінь, менший за одиницю.

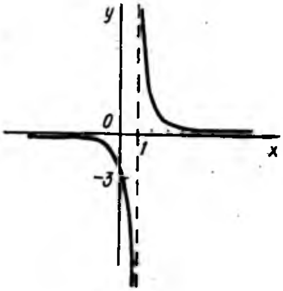


Рис.5

Розглянемо функцію $f(x) = x \cdot 2^x -$ Вона неперервна в усіх точках, зокрем на відрізку $[0;\ 1]$: $f(0) = -1$, $f(1) =$ Тому за властивістю (5в) функцій, які н перервні на відрізку $[a\ ;b\ ]$, знайдетьс така точка x_0, $0 < x_0 < 1$, що $f(x_0)$ $= x_0 \cdot 2^{x_0} - 1 = 0$, що й треба було довести.

Користуючись розібраними прикладами, пропонуємо розв'язати самостійно задачі, що наведено нижче.

261. Довести, що функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 (знайт $\delta(\varepsilon)$):

а) $f(x) = 4x^2 - 1,\ x_0 = 2;$

б) $f(x) = -2x^2 + 3,\ x_0 = 4.$

262. Довести, що функція $y = x^4$ неперервна на проміжку $(-\infty, +\infty)$.

263. Довести, що ціла раціональна функція

$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ неперервна для довільного значення x.

264. Довести, що раціональна функція

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

неперервна для всіх значень x, які не перетворюють в нуль знаменник.

265. Довести, що функція $\sqrt{x}$ неперервна для $x \geq 0$.

266. Довести, що функція $\sin x$ неперервна для довільного x.

267. Довести неперервність функцій в кожній точці област визначення:

1) $y = 2\cos 3x$;

2) $y = \cos^3 x$;

3) $y = x^2 + 3\sin 2x$;

4) $y = \sin x^2$;

5) $y = \dfrac{3x-2}{x^2+9}$.

268. Довести, що функція $f(x)$ має розрив в точці x_0; побудувати графік цієї функції, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 0, \\ x^2, & x \le 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^2}, & x \ne 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0;$

3) $f(x) = [x]$, $x_0 = 1$. (Функція $[x]$ є ціла частина x, тобто, якщо x — ціле число, то $[x] = x$. Якщо x — дробове число, то $[x]$ дорівнює найбільшому цілому числу, яке менше, ніж x, наприклад: $[1] = 1$; $[2,04] = 2$; $[-3,21] = -4$.)

269. Функція $\dfrac{x^2-16}{x-4}$ не визначена при $x = 4$. Як треба довизначити функцію в точці 4, щоб вона була неперервною?

270. Знайти точки розриву функції, встановити їх тип:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-|x|}{x}, & x \ne 0; \\ 2, & x = 0; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-5)}{x-5}, & x \ne 5; \\ 0, & x = 5; \end{cases}$

3) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$;

4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x^2}}{1-e^{1/x^2}}, & x \ne 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1/x}-e^{-1/x}}{e^{1/x}+e^{-1/x}}, & x \ne 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

271. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ в точці } x = 0.$$

272. Знайти точки розриву функції, побудувати граф
функції:

$$1)\ y = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)}, & x < 0; \\ (x+2)^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & x > 1; \end{cases}$$

$$2)\ y = \frac{|x + 4|}{x + 4}; \qquad 3)\ y = \frac{1}{x^2 - 9};$$

$$4)\ y = \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - x}; \qquad 5)\ y = \frac{|x - 1|}{x^2 - x^3}.$$

273. Функція $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}$ не визначена при $x = 1$. Ч
можна довизначити функцію в точці $x = 1$ так, щоб вона бу
неперервною?

274. При якому значенні a функція $f(x)$ буде неперервною

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0; \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ a(x - 4), & x > 0; \end{cases}$$

$$3)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0; \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

275. Підібрати числа a та b такі, щоб функція $f(x)$ була неп
рервною:

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 + bx, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$2)\ f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 0; \\ ax + b, & 0 < x < 1; \\ \sqrt{x}, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$3)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\sin x}, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right],\ x\neq 0,\ x\neq\pi;\\ a, & x=0:\\ b, & x=\pi;\end{cases}$$

$$4)\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0;\\ ax+b, & x=0.\end{cases}$$

Дослідити на неперервність функції:

276. $y=\dfrac{x+1}{(x-3)(x-1)}$.

277. $y=\dfrac{8-x^3}{x-2}$.

278. $y=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{(x^2-1)}$.

279. а) $y=\sin\dfrac{3\pi}{x}$; б) $y=x\sin\dfrac{3\pi}{x}$.

280. $y=\ln\dfrac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

281. $y=\dfrac{|x|}{\operatorname{arctg}x}$.

282. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

283. $y=\dfrac{x+1}{3+2^{1/x^2}}$.

284. $y=\dfrac{|x+1|}{x+1}x-1$.

285. $y=e^{-\frac{1}{x+2}}$.

286. $y=\ln(\cos x)$.

287. $y=\dfrac{4}{1-e^{\frac{x}{2-x}}}$.

288. $y=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}+2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}$.

289. $y=\dfrac{x}{\cos x}$.

290. $y=\begin{cases}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right), & |x|\leq 1.\\ |x-1|, & |x|>1.\end{cases}$

291. $y=\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

292. Довести, що рівняння $x^3-3x^2+6x-1=0$ має єдиний корінь; знайти його з точністю до 0,1.

293. Довести, що рівняння $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$ має два (і н більше) дійсних корені.

294. Довести, що рівняння $\frac{a_1}{x-\lambda_1} + \frac{a_2}{x-\lambda_2} + \frac{a_3}{x-\lambda_3} = 0$, д $a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0,\ \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ має два дійсних корені, як лежать в інтервалах (λ_1, λ_2), (λ_2, λ_3).

295. Довести, що рівняння $10^{x-1} = x$ має тільки оди розв'язок $x_0 \neq 1$.

296. Довести, що рівняння $x \sin x - 0{,}5 = 0$ має безліч розв'язків.

Крім наведених вище задач і вправ, пропонуємо також розглянути й інші з даної теми [1, 6, 9].

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА 1 [11]

Задача 1. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (вказати $N(\varepsilon)$):

1. $a_n = \frac{3n-2}{2n-1},\quad a = \frac{3}{2}.$ 2. $a_n = \frac{4n-1}{2n+1},\quad a = 2.$

3. $a_n = \frac{7n+4}{2n+1},\quad a = \frac{7}{2}.$ 4. $a_n = \frac{2n-5}{3n+1},\quad a = \frac{2}{3}.$

5. $a_n = \frac{7n-1}{n+1},\quad a = 7.$ 6. $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2},\quad a = \frac{4}{3}.$

7. $a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3},\quad a = -\frac{1}{2}.$ 8. $a_n = \frac{4n-3}{2n+1},\quad a = 2.$

9. $a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2},\quad a = -\frac{1}{2}.$ 10. $a_n = \frac{5n}{n+1},\quad a = -5.$

11. $a_n = \frac{n+1}{1-2n},\quad a = -\frac{1}{2}.$ 12. $a_n = \frac{2n+1}{3n-5},\quad a = \frac{2}{3}.$

13. $a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3},\quad a = -2.$14. $a_n = \frac{3n^2}{2-n^2},\quad a = -3.$

15. $a_n = \frac{n}{3n-1},\quad a = \frac{1}{3}.$16. $a_n = \frac{3n^3}{n^3-1},\quad a = 3.$

17. $a_n = \frac{4+2n}{1-3n},\quad a = -\frac{2}{3}.$ 18. $a_n = \frac{5n+15}{6-n},\quad a = -5.$

19. $a_n = \dfrac{3 - n^2}{1 + 2n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

20. $a_n = \dfrac{2n - 1}{2 - 3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$.

21. $a_n = \dfrac{3n - 1}{5n + 1}$, $a = \dfrac{3}{5}$.

22. $a_n = \dfrac{4n - 3}{2n + 1}$, $a = 2$.

23. $a_n = \dfrac{1 - 2n^2}{2 + 4n^2}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

24. $a_n = \dfrac{5n + 1}{10n - 3}$, $a = \dfrac{1}{2}$.

25. $a_n = \dfrac{2 - 2n}{3 + 4n}$, $a = -\dfrac{1}{2}$.

26. $a_n = \dfrac{23 - 4n}{2 - n}$, $a = 4$.

27. $a_n = \dfrac{1 + 3n}{6 - n}$, $a = -3$.

28. $a_n = \dfrac{2n + 3}{n + 5}$, $a = 2$.

29. $a_n = \dfrac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1}$, $a = \dfrac{3}{4}$.

30. $a_n = \dfrac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$.

Задача 2. Застосовуючи приклад 5, § 1, обчислити границі числових послідовностей:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3 - n)^2 + (3 + n)^2}{(3 - n)^2 - (3 + n)^2}$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3 - n)^4 - (2 - n)^4}{(1 - n)^4 - (1 + n)^4}$.

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3 - n)^4 - (2 - n)^4}{(1 - n)^3 - (1 + n)^3}$.

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(1 - n)^4 - (1 + n)^4}{(1 + n)^3 - (1 - n)^3}$.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(6 - n)^2 - (6 + n)^2}{(6 + n)^2 - (1 - n)^2}$.

6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 1)^3 - (n + 1)^2}{(n - 1)^3 - (n + 1)^3}$.

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(1 + 2n)^3 - 8n^3}{(1 + 2n)^2 + 4n^2}$.

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3 - 4n)^2}{(n - 3)^3 - (n + 3)^3}$.

9. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3 - n)^3}{(n + 1)^2 - (n + 1)^3}$.

10. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 1)^2 + (n - 1)^2 - (n + 2)^3}{(4 - n)^3}$.

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2(n + 1)^3 - (n - 2)^3}{n^2 + 2n - 3}$.

12. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 1)^3 + (n + 2)^3}{(n + 4)^3 + (n + 5)^3}$.

13. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$. 14. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$.

15. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$. 16. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$

17. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}$. 18. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$

19. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$. 20. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2}$

21. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$. 22. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$.

23. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$. 24. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$.

25. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$. 26. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$.

27. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$. 28. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$.

29. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}$. 30. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$.

Задача 3. Застосовуючи приклад 6, § 1, обчислити грани
числових послідовностей:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2} + \sqrt[4]{9n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n})\sqrt{7 - n + n^2}}$. 2. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n-1} - \sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3} + \sqrt[4]{n^5+1}}$

3. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n-1}}$. 4. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1} + 7n^3}{\sqrt[4]{n^{12} + n + 1} - n}$.

5. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$. 6. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^2}}{(n + \sqrt[4]{n})\sqrt{9 + n^2}}$

7. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1} - \sqrt[3]{n^4-1}}$. 8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2} + \sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2} + \sqrt{n-2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3 - \sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3} - n}$. 10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5n+2} - \sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7} - n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[4]{3n+1} + \sqrt{81n^4 - n^2 + 1}}{(n+\sqrt[3]{n})\sqrt{5-n+n^2}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4} - \sqrt[4]{n^4+1}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^5+3} - \sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3} + \sqrt{n-3}}$. 14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 9n^2}{3n - \sqrt[4]{9n^8+1}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n+1} - \sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n} - \sqrt[3]{n^5+n}}$. 16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[3]{7n} - \sqrt[4]{81n^8-1}}{(n+4\sqrt{n})\sqrt{n^2-5}}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3-7} + \sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5} + \sqrt{n}}$. 18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^6+4} + \sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+6} - \sqrt{n-6}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2 - \sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1} - 5n}$. 20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4} - \sqrt[5]{n^5+5}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt[4]{11n} + \sqrt{25n^4-81}}{(n-7\sqrt{n})\sqrt{n^2-n+1}}$. 22. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7} - \sqrt{n+1}}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^7+5} - \sqrt{n-5}}{\sqrt[7]{n^7+5} + \sqrt{n-5}}$. 24. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2} - 5n^2}{n - \sqrt{n^4-n+1}}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2} - \sqrt[5]{n^5+2}}$. 26. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{71n} - \sqrt[3]{64n^6+9}}{(n-\sqrt[3]{n})\sqrt{11+n^2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3} + \sqrt[4]{n^3+1}}$. 28. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^8+6} - \sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6} + \sqrt{n-6}}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - \sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2} - n}$. 30. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[5]{n^5+1}}$.

Задача 4. Обчислити границі числових послідовностей, застосовуючи приклади 8—10, § 1:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,[\sqrt{n(n-2)} - \sqrt{n^2-3}\,]$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})\,n\sqrt{n}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9}\,].$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)}}{\sqrt{n}}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n).$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^3}).$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\,].$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\,].$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}\,].$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n).$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}).$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\,].$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})\,.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}).$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n).$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\,(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}).$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)}\,].$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} [n - \sqrt{n(n-1)}\ ]$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3 [\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{(n^8-1)}\ ]$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} [n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)}\ ]$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}\ [\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)}\ ]$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}\,(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2})$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}\,(\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$.

Задача 5. Обчислити границі числових послідовностей, застосовуючи приклади 11—14, § 1:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \ldots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)!}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+2+3+\ldots+n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+3} - n\right)$.

8. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2)}{\sqrt{5n^4 + n + 1}}$.

9. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n + 4)! - (n + 2)!}{(n + 3)!}$.

10. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(3n - 1)! + (3n + 1)!}{(3n)!\,(n - 1)}$.

11. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2^n - 5^{n+1}}{2^{n+1} + 5^{n+2}}$.

12. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n}}$.

13. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - 3 + 5 - 7 + \ldots + (4n - 3) - (4n - 1)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + n + 1}}$.

14. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (2n - 1) - 2n}{n}$.

15. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3 + 5} - \sqrt{3n^4 + 2}}{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}$.

16. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}$.

17. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n + 2}{1 + 2 + 3 + \ldots + n} - \dfrac{2}{3}\right)$.

18. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{13}{36} + \ldots + \dfrac{3^n + 2^n}{6^n}\right)$.

19. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 - 5 + 4 - 7 + \ldots + 2n - (2n + 3)}{n + 3}$.

20. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(2n + 1)! + (2n + 2)!}{(2n + 3)! - (2n + 2)!}$.

21. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n - n^2 + 3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(5n-3)}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{9}{64}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{4^n}\right)$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+5+9+13+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\dfrac{4n+1}{2}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+7^n}{2^n-7^{n-1}}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{10}+\dfrac{29}{100}+\ldots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$.

Задача 6. Обчислити границі числових послідовностей, застосовуючи приклади 16—19, § 1:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^{n^4}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2-6n+7}{3n^2+20n-1}\right)^{-n+1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3n+6}{n^2+5n+1}\right)^{n/2}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-10}{n+1}\right)^{3n+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n-1}{3n^2+2n+7}\right)^{2n+5}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)^{-n^2}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n+7}{2n^2+5n+3}\right)^{n}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+3n-1}{5n^2+3n+3}\right)^{n^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n^2}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{n^2-5n+7}\right)^{n+1}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-6n+5}{n^2-5n+5}\right)^{3n+2}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{n}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{n+2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-7}\right)^{\frac{n}{6}+1}$.

Задача 7. Довести (знайти $\delta(\varepsilon)$):

1. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7.$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 - 4x - 1}{x - 1} = 6.$
3. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2} = -7.$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 14x + 6}{x - 3} = 10.$
5. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x + 1/2} = -5.$
6. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{6x^2 - x - 1}{x - 1/2} = 5.$
7. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{9x^2 - 1}{x + 1/3} = -6.$
8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7.$
9. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4.$
10. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6.$
11. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 3} = 2.$
12. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 1/2} = 5.$
13. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 - 5x + 1}{x - 1/3} = -1.$
14. $\lim\limits_{x \to -7/5} \dfrac{10x^2 + 9x - 7}{x + 7/5} = -19.$
15. $\lim\limits_{x \to -7/2} \dfrac{2x^2 + 13x + 21}{2x + 7} = -\dfrac{1}{2}.$
16. $\lim\limits_{x \to 5/2} \dfrac{2x^2 - 9x + 10}{2x - 5} = \dfrac{1}{2}.$
17. $\lim\limits_{x \to 1/3} \dfrac{6x^2 + x - 1}{x - 1/3} = 5.$
18. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{6x^2 - 75x - 39}{x + 1/2} = -81.$
19. $\lim\limits_{x \to 11} \dfrac{2x^2 - 21x - 11}{x - 11} = 23.$
20. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{5x^2 - 24x - 5}{x - 5} = 26.$
21. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{2x^2 + 15x + 7}{x + 7} = -13.$
22. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2 + 6x - 8}{x + 4} = -10.$
23. $\lim\limits_{x \to -1/3} \dfrac{6x^2 - x - 1}{3x + 1} = -\dfrac{5}{3}.$
24. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = -8.$
25. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{3x^2 - 40x + 128}{x - 8} = 8.$
26. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{5x^2 - 51x + 10}{x - 10} = 49.$

27. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-1/2}=-3.$ 28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x+6}=-19.$

29. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+17x-6}{x-1/3}=19.$ 30. $\lim\limits_{x\to -1/5}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+1/5}=-8.$

Задача 8. Довести, що функція $f(x)$ неперервна в точці x (знайти $\delta(\varepsilon)$):

1. $f(x)=5x^2-1,\ x_0=6.$ 2. $f(x)=4x^2-2,\ x_0=5.$

3. $f(x)=3x^2-3,\ x_0=4.$ 4. $f(x)=2x^2-4,\ x_0=3.$

5. $f(x)=-2x^2-5,\ x_0=2.$ 6. $f(x)=-3x^2-6,\ x_0=1.$

7. $f(x)=-4x^2-7,\ x_0=1.$ 8. $f(x)=-5x^2-8,\ x_0=2.$

9. $f(x)=-5x^2-9,\ x_0=3.$ 10. $f(x)=-4x^2+9,\ x_0=4.$

11. $f(x)=-3x^2+8,\ x_0=5.$ 12. $f(x)=-2x^2+7,\ x_0=6.$

13. $f(x)=2x^2+6,\ x_0=7.$ 14. $f(x)=3x^2+5,\ x_0=8.$

15. $f(x)=4x^2+4,\ x_0=9.$ 16. $f(x)=5x^2+3,\ x_0=8.$

17. $f(x)=5x^2+1,\ x_0=7.$ 18. $f(x)=4x^2-1,\ x_0=6.$

19. $f(x)=3x^2-2,\ x_0=5.$ 20. $f(x)=2x^2-3,\ x_0=4.$

21. $f(x)=-2x^2-4,\ x_0=3.$ 22. $f(x)=-3x^2-5,\ x_0=2.$

23. $f(x)=-4x^2-6,\ x_0=1.$ 24. $f(x)=-5x^2-7\ x_0=1.$

25. $f(x)=-4x^2-8,\ x_0=2.$ 26. $f(x)=-3x^2-9,\ x_0=3.$

27. $f(x)=-2x^2+9,\ x_0=4.$ 28. $f(x)=2x^2+8,\ x_0=5.$

29. $f(x)=3x^2+7,\ x_0=6.$ 30. $f(x)=4x^2+6,\ x_0=7.$

Задача 9. Обчислити границі раціональних функцій, застосовуючи приклади 6, 7, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}.$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-3x-2}{x+x^2}.$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$ 4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x^2-x-1)^2}{x^3+2x^2-x-2}.$

5. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x^2+2x-3)^2}{x^3+4x^2+3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x^3-2x-1)^2}{x^4+2x+1}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x+x^5}$.

8. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$.

9. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$.

10. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$.

11. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

12. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$.

13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$.

14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

16. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

17. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^3-3x^2+4}$.

18. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+7x^2+16x+12}$.

19. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$.

20. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$.

21. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+2x+1}$.

22. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x^2-x+1}$.

23. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x-2}$.

25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

27. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^3-91+3x)}{x^2+x^5}$.

29. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

30. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+7x^2+15x+9}{x^3+8x^2+21x+18}$.

Задача 10. На основі прикладів 11—13, § 2 обчислити грани функцій, які містять ірраціональність:

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.

2. $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 3}{3 + \sqrt[3]{x}}$.

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$.

4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$.

5. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x^3 + 8}$.

6. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$.

7. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1 + x)}{x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$.

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x}}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[3]{1 - x}}$.

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2 + x} - \sqrt{2x}}$.

14. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$.

15. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[3]{9x} - 3}{\sqrt{3 + x} - \sqrt{2x}}$.

16. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{x + 2}$.

17. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt[3]{16x} - 4}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{2x}}$.

18. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt{9 + 2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4}$.

19. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{4}} - \dfrac{1}{2}}{\sqrt{\dfrac{1}{2} + x} - \sqrt{2x}}$.

20. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{9}} - \dfrac{1}{3}}{\sqrt{\dfrac{1}{3} + x} - \sqrt{2x}}$.

21. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x}{16}} - \dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{4} + x} - \sqrt{2x}}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[7]{x}}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[5]{x}}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2 + x^3}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-2x+3x^2}-(x+1)}{\sqrt[3]{x}}$. 26. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

27. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}-4)^2}}$. 28. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt[3]{x^3+8}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x^2-16}}$. 30. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{10-x-6\sqrt{1-x}}{2+\sqrt[3]{x}}$.

Задача 11. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклади 15, 16, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\operatorname{tg}(\pi(2+x))}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{tg}[2\pi(x+1/2)]}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{4x^2}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln(1+2x)}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin[2\pi(x+10)]}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-7x)}{\sin(\pi(x+7))}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x+5\pi/2)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x^2}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1-2x)}{4\operatorname{arctg}3x}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{3x+1}}{\cos[\pi(x+1)/2]}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{3\operatorname{arctg}x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin[\pi(x+1)]}{\ln(1+2x)}$. 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos x}{1-\cos x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin[\pi(x+2)]}$. 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[5(x+\pi)]}{e^{-3x}-1}\ln 2$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$. 22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{2^{-3x}-1}\ln 2$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{4x} - 1}{\sin\,[\pi\,(x/2 + 1)\,]}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{(e^{3x} - 1)^2}$.

25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{x^4}$.

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\ln\,(e - x) - 1}$.

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x\,(1 - \cos 2x)}$.

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\,(x^2 + 1)}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$.

29. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg}\,(\pi\,(1 + x/2))}{\ln\,(x + 1)}$.

30. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\,(e^{\pi x} - 1)}{3\,(\sqrt[3]{1 + x} - 1)}$.

Задача 12. Обчислити границі функцій, застосовуючи пр клад 18, § 2:

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\ln x}$.

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}$.

3. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 3x}{\sin^2 7x}$.

4. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2}$.

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x}$.

6. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

7. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{(x - \pi)^4}$.

8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\operatorname{tg} \pi x}$.

9. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x}$.

10. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{e^{x^2} - e^{4\pi^2}}$.

11. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln\,(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}$.

13. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$.

14. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{x^2 - \pi^2}{\sin x}$.

15. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^{5x - 3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2^x - 16}{\sin \pi x}$.

17. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\ln 2x - \ln \pi}{\sin\,(5x/2)\,\cos x}$.

18. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

19. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{e^{\pi} - e^{x}}{\sin 5x - \sin 3x}$.   20. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x}$.

21. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - 2^{4 - x^2}}{2(\sqrt{2x} - \sqrt{3x^2 - 5x + 2})}$.   22. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

23. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\operatorname{tg} \pi x}{x + 2}$.   24. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 - \sin(x/2)}{\pi - x}$.

25. $\lim\limits_{x \to \pi/3} \dfrac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$.   26. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$.

27. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\sin \pi x}$.   28. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}$.

29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3 - \sqrt{10 - x}}{\sin 3\pi x}$.   30. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Задача 13. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 20, § 2:

1. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}$.   2. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{(2x - 1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}$.

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\ln(x - \sqrt[3]{2x - 3})}{\sin(\pi x/2) - \sin[(x - 1)\pi]}$. 4. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2}{\sin \ln(x - 1)}$.

5. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\operatorname{tg} 2x} - e^{-\sin 2x}}{\sin x - 1}$.   6. $\lim\limits_{x \to \pi/6} \dfrac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$.

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sin(\sqrt{2x^2 - 3x - 5} - \sqrt{1 + x})}{\ln(x - 1) - \ln(x + 1) + \ln 2}$.

8. $\lim\limits_{x \to 2\pi} \dfrac{(x - 2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}$.   9. $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{\ln(4x - 1)}{\sqrt{1 - \cos \pi x} - 1}$.

10. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\arcsin(x + 2)/2}{3^{\sqrt{2 + x + x^2}} - 9}$.   11. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2^{\sin \pi x} - 1}{\ln(x^3 - 6x - 8)}$.

12. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\ln \cos 2x}{(1 - \pi/x)^2}$.   13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{tg} \ln(3x - 5)}{e^{x + 3} - e^{x^2 + 1}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\ln\cos x}{3^{\sin 2x}-1}$.

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+\ln^2 x}-1}{1+\cos\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos(x/2)}{e^{\sin x}-e^{\sin 4x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-5)}{e^{\sin\pi x}-1}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/3}\dfrac{e^{\sin^2 6x}-e^{\sin^2 3x}}{\log_3\cos 6x}$.

19. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\mathrm{tg} 2x}}{\ln(2x/\pi)}$.

20. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\mathrm{tg}\,(e^{x+2}-e^{x^2-4})}{\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}2}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2^x+7}-\sqrt{2^{x+1}+5}}{x^3-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(2+\cos x)}{(3^{\sin x}-1)^2}$.

23. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{(x^3-\pi^3)\sin 5x}{e^{\sin^2 x}-1}$.

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\mathrm{tg}\,(x+1)}{e^{\sqrt[3]{x^3-4x^2+6}}-e}$.

25. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$.

26. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\ln(\sin x)}{(2x-\pi)^2}$.

27. $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{\alpha^{x^2-\alpha^2}-1}{\mathrm{tg}\ln(x/\alpha)}$.

28. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin\left(e^{\sqrt[3]{1-x^2}/2}-e^{\sqrt[3]{x+2}}\right)}{\mathrm{arctg}\,(x+3)}$.

29. $\lim\limits_{x\to \alpha\pi}\dfrac{\ln(\cos(x/\alpha)+2)}{\alpha^{\alpha^2\pi^2/x^2-\alpha\pi/x}-\alpha^{(\alpha\pi/x)-1}}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\mathrm{tg}\,(3^{\pi/x}-3)}{3^{\cos(3x/2)}-1}$.

Задача 14. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 21, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{2x}-5^{3x}}{2x-\mathrm{arctg}3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\arcsin x-\sin x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6^{2x}-7^{-2x}}{\sin 3x-2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{3x}}{\sin 2x-\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-5^{3x}}{\mathrm{arctg}x+x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\mathrm{arctg}x-x^2}$.

7\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{x}}{x-\sin 9x}$.

8\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-2x}}{2\operatorname{arctg}x-\sin x}$.

9\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12^{x}-5^{-3x}}{2\arcsin x-x}$.

10\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-2x}}{\sin x-2x}$.

11\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{7x}}{\arcsin 2x-x}$.

12\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-e^{x}}{\arcsin x+x^{3}}$.

13\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-2^{7x}}{\operatorname{tg}3x-x}$.

14\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\operatorname{tg}2x-\sin x}$.

15\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10^{2x}-7^{-x}}{2\operatorname{tg}x-\operatorname{arctg}x}$.

16\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 3x-\sin 5x}$.

17\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^{3x}-3^{2x}}{\operatorname{tg}x+x^{3}}$.

18\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{2x}}{2\operatorname{tg}x-\sin x}$.

19\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-7^{x}}{\arcsin 3x-5x}$.

20\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-5x}}{2\sin x-\operatorname{tg}x}$.

21\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{5x}-9^{-2x}}{\sin x-\operatorname{tg}x^{3}}$.

22\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

23\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-2^{3x}}{\sin x+\sin x^{2}}$.

24\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{3x}}{\sin 3x-\operatorname{tg}2x}$.

25\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^{x}-2^{3x}}{\operatorname{arctg}2x-7x}$.

26\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-2x}}{x+\sin x^{2}}$.

27\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{5x}-2^{-7x}}{2x-\operatorname{tg}x}$.

28\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{\sin 2x-\sin x}$.

29\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{x}}{x+\operatorname{tg}x^{2}}$.

30\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3^{2x}}{x+\arcsin x^{3}}$.

Задача 15. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 22, § 2:

1\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{\sin^{2}x}$.

2\. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^{2}x}$.

3. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

4. $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\alpha}{\ln x-\ln\alpha}$.

5. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3+1}-e}$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi/3} \dfrac{1-2\cos x}{\sin(\pi-3x)}$.

10. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

11. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg}x}$.

12. $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{a^x-a^b}{x-b}$.

13. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos2x+\operatorname{tg}^2x}{x\sin3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin2x-2\sin x}{x\ln\cos5x}$.

15. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\ln(x+h)+\ln(x-h)-2\ln x}{h^2}$, $x>0$.

16. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x}{\log_2 x}$.

17. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{\sin2x}-e^{\sin x}}{\operatorname{tg}x}$.

18. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2^x-2}{\ln x}$.

19. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{\sin(h+x)-\sin(x-h)}{h}$.

20. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin3x}$.

21. $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$.

22. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

23. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{\sqrt[3]{5+x}-2}{\sin\pi x}$.

24. $\lim\limits_{x\to\pi/6} \dfrac{2\sin^2x+\sin x-1}{2\sin^2x-3\sin x+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to10} \dfrac{\lg x-1}{\sqrt{x-9}-1}$.

26. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$.

27. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$.

28. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin bx-\sin ax}{\ln(\operatorname{tg}(\pi/4+ax))}$.

29. $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin^3x}{\cos^2x}$.

30. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\log_3 x - 1}{\mathrm{tg}\pi x}$.

Задача 16. Обчислити границі показниково-степеневих функцій:

1. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \ln(1 + x^3))^{3/(x^2 \arcsin x)}$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos\sqrt{x})^{1/x}$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + x2^x}{1 + x3^x}\right)^{1/x^2}$.

4. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - 3^{\mathrm{arctg}^2 \sqrt{x}})^{2/\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \sin x \cos\alpha x}{1 + \sin x \cos\beta x}\right)^{\mathrm{ctg}^3 x}$.

6. $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \dfrac{4}{\cos x}\right)^{1/\sin^2 3x}$.

7. $\lim\limits_{x \to 0} [1 - \ln(1 + \sqrt[3]{x})]^{x/\sin^4(\sqrt[3]{x})}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} [2 - e^{\arcsin^2 \sqrt{x}}]^{3/x}$.

9. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$.

10. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$.

11. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right)^{\mathrm{ctg} x}$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} (1 - x\sin^2 x)^{1/\ln(1 + \pi x^3)}$.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \left(2 - 5^{\arcsin x^3}\right)^{(\mathrm{cosec}^2 x)/x}$.

14. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - \cos 3x)^{1/\ln(1 + x^2)}$.

15. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - e^{\sin x})^{\mathrm{ctg}\pi x}$.

16. $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/\ln(1 + \sin^2 x)}$.

17. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - e^{x^2})^{1/\ln(1 + \mathrm{tg}^2(\pi x/3))}$.

18. $\lim\limits_{x \to 0} (3 - 2\cos x)^{-\mathrm{cosec}^2 x}$.

19. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - 3^{\sin^2 x})^{1/\ln\cos x}$.

20. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x^2]{2 - \cos x}$.

21. $\lim\limits_{x \to 0} \left(6 - \dfrac{5}{\cos x}\right)^{\mathrm{ctg}^2 x}$.

22. $\lim\limits_{x \to 0} \left(3 - \dfrac{2}{\cos x}\right)^{\mathrm{cosec}^2 x}$.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + \sin x \cos 2x}{1 + \sin x \cos 3x}\right)^{1/\sin x^3}$.

24. $\lim\limits_{x \to 0} (2 - e^{x^2})^{1/(1 - \cos\pi x)}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right)^{1/x^3}$. 26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\right)^{1/x^3}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x3^x}{1+x7^x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$. 28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{1/\ln(1+3x^2)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\ln\cos x\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin^2(x/2)\right)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$.

Задача 17. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 26, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2/(x+2)}$. 4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{x+3}$. 6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^{x^2+3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x)}{6x}\right)^{x/(x+2)}$. 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg}4x}{x}\right)^{2+x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^2}\right)^{(8x+3)/(1+x)}$. 10. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{\cos x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x}{2x}\right)^{2+x}$. 12. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{6/(1+x)}$.

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)^{x^2}$. 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)^{x+2}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+8}{3x^2+10}\right)^{x+2}$. 16. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\sin(x+2)\right]^{3/(3+x)}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2^{2x}-1}{x}\right)^{x+1}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^4+5}{x+10}\right)^{4/(x+2)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{11x+8}{12x+1}\right)^{\cos^2 x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3+1}{x^3+8}\right)^{2/(x+1)}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)^{3/(x+8)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos\frac{x}{\pi}\right)^{1+x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{2(x+5)}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{arctg} 3x}{x}\right)^{x+2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\cos x^4}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x^2}{\sin x}\right)^{1/(x+6)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{(e^x-1)/x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}(6-5/\cos x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+8x}{2+11x}\right)^{1/(x^2+1)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin^2 x}{\arcsin^2 4x}\right)^{2x+1}$.

Задача 18. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 27, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2}\right)^{1/(x-2)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\frac{2x-7}{x+1}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-2)}$.

6. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\mathrm{tg} x)^{1/\cos(3\pi/4-x)}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[5]{x}-1)}$.

8. $\lim\limits_{x\to a}(2-x/a)^{\mathrm{tg}(\pi x/2a)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{\mathrm{ctg} 2x/\sin 3x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 2\pi}(\cos x)^{1/\sin^2 2x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6-x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\operatorname{ctg}x/\sin 4x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.

14. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg}5x\,\sin 2x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{9-2x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$.

16. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{6\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}3x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{x/(x-1)}$.

18. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\operatorname{tg}(x/2))^{1/\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(2e^{x-1}-1)^{\frac{3x-1}{x-1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1+\cos 3x)^{\sec x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}(2e^{x-2}-1)^{\frac{3x+2}{x-2}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sin(x-1)}{x-1}\right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2-x}{x}\right)^{1/\ln(2-x)}$.

24. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{1/\cos x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{\sin(\pi x/2)}{\ln(2-x)}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\sin x}{\sin 3}\right)^{1/(x-3)}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(2-x)}}$.

28. $\lim\limits_{x\to \pi/2}(\sin x)^{\frac{18\sin x}{\operatorname{ctg}x}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{\ln(x+1)}{\ln(2-x)}}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{4}\right)\right)^{1/\cos(x/2)}$.

Задача 19. Обчислити границі функцій, застосовуючи приклад 28, § 2:

1. $\lim\limits_{x\to e}\left(\dfrac{\ln x-1}{x-e}\right)^{\sin\frac{\pi x}{2e}}$.

2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\left(\dfrac{\ln \operatorname{tg}x}{1-\operatorname{ctg}x}\right)^{1/(x+\pi/4)}$.

4. $\lim\limits_{x\to 2}(\sin x)^{3/(1+x)}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin 3\pi x}{\sin \pi x}\right)^{\sin^2(x-2)}$.

6. $\lim\limits_{x\to\pi/6}(\sin x)^{6x/\pi}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\left(2-\frac{x}{3}\right)^{\sin\pi x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{(1-x^2)/(1-x)}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}(1+e^x)^{\frac{\sin\pi x}{1-x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\mathrm{tg}9\pi x}{\sin 4\pi x}\right)^{x/(x+1)}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\arcsin(x-3)}{\sin 3\pi x}\right)^{x^2-8}$.

12. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{\frac{x^2-\pi^2/16}{x-\pi/4}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x-3/4}{(x-1)^2}\right)^{x+1}$.

14. $\lim\limits_{x\to\pi}\left(\mathrm{ctg}\left(\frac{x}{4}\right)\right)^{\sin(x-\pi)}$.

15. $\lim\limits_{x\to\alpha}\left(\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}\right)^{x^2/\alpha^2}$.

16. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}\right)^{1/x}$.

17. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin x+\cos x)^{1/\mathrm{tg}x}$.

18. $\lim\limits_{x\to\pi/8}(\mathrm{tg}2x)^{\sin\left(\frac{\pi}{8}+x\right)}$.

19. $\lim\limits_{x\to 1}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}\pi x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\pi}(x+\sin x)^{\sin x+x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln^2 ex)^{1/(x^2+1)}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)^{\pi/\mathrm{arctg}x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)^{1/x^2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e^{\sin\pi x}-1}{x-1}\right)^{x^2+1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}(\cos\pi x)^{\mathrm{tg}(x-2)}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1/2}(\arcsin x+\arccos x)^{1/x}$.

27. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\cos x+1)^{\sin x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt[3]{x}+x-1)^{\sin(\pi x/4)}$.

29. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right)^{1/(2-x)}$.

30. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1+\cos\pi x}{\mathrm{tg}^2\pi x}\right)^{x^2}$.

Задача 20. Обчислити границю функції або числової посл
довності:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4\cos 3x + x\operatorname{arctg}(1/x)}$.

2. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sqrt{3\sin x + (2x-\pi)\sin\dfrac{x}{2x-\pi}}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-\sin n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n^3-7}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x\cos(1/x)+\lg(2+x)}{\lg(4+x)}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1/n}+\sin(n/(n^2+1))\cos n}{1+\cos(1/n)}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{2+n^5}-\sqrt{2n^3+3}}{(n+\sin n)\sqrt{7n}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}+(4x-\pi)\cos(x/(4x-\pi))}{\lg(2+\operatorname{tg}x)}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\sqrt{n^2+1}\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n^2+1}\right)$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-\sqrt{3n^5-7}}{(n^2-n\cos n+1)\sqrt{n}}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3\sin n+\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n+1}}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-\cos n)\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2n+1}-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(2+\sqrt{\operatorname{arctg}x\sin(1/x)}\right)$.

13. $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{\dfrac{1+\cos\pi x}{4+(x+2)\sin(x/(x+2))}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[3]{n^4-3}+\sin n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+\cos n}+\sqrt{3n^2+2}}{\sqrt[5]{n^6+1}}$.

16. $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}\,\operatorname{arctg}(1/x)+3}{2-\lg(1+\sin x)}.$$

18. $$\lim_{x\to0}\sqrt{4\cos x+\sin(1/x)\ln(1+x)}.$$

19. $$\lim_{x\to0}\sqrt{2\cos^2x+(e^x-1)\sin(1/x)}.$$

20. $$\lim_{x\to0}\frac{2+\ln(e+x\sin(1/x))}{\cos x+\sin x}.$$

21. $$\lim_{x\to0}\ln\left[(e^{x^2}-\cos x)\cos(1/x)+\operatorname{tg}(x+\pi/3)\right].$$

22. $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x+\ln(1+x)\sqrt{2+\cos(1/x)}}{2+e^x}.$$

23. $$\lim_{x\to1}\frac{\cos2\pi x}{2+(e^{\sqrt{x-1}}-1)\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}.$$

24. $$\lim_{x\to0}\sqrt{(e^{\sin x}-1)\cos(1/x)+4\cos x}.$$

25. $$\lim_{x\to0}\frac{\cos(1+x)}{(2+\sin(1/x))\ln(1+x)+2}.$$

26. $$\lim_{x\to2}\sqrt[3]{\lg(x+2)+\sin\sqrt{4-x^2}\cos\frac{x+2}{x-2}}.$$

27. $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{2+\cos x\sin\dfrac{2}{2x-\pi}}{3+2x\sin x}.$$

28. $$\lim_{x\to1}\operatorname{tg}\left(\cos x+\sin\frac{x-1}{x+1}\cos\frac{x+1}{x-1}\right).$$

29. $$\lim_{x\to0}\sqrt{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\cos x}.$$

30. $$\lim_{x\to1}\frac{\sin x+\sin\pi x\cdot\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{1+\cos x}.$$

Глава 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

У главі, яка присвячена диференціальному численню фун ції однієї змінної, спочатку розглядається поняття похідної т диференціала, а після цього проводиться дослідження функції з допомогою похідних.

§ 1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідна функції в точці. *Похідною функції* $y = f(x)$ *в точ* x називається границя (якщо вона існує) відношення прирост функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту аргументу Δx, ко приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.\,1$$

Функція, яка має скінченну похідну в точці x, називаєть *диференційованою* в цій точці. Приріст диференційованої точці x функції має вигляд

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x, \qquad (2.$$

де $\alpha(\Delta x)$ — нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто диф ренційована функція неперервна.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \pm\,\infty$, тоді функція $f(x)$ в точ x має нескінченну похідну.

Обчислення похідної y' називають *диференціюванням.*

Основні правила диференціювання. Якщо функції $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ диференційовані в точці x, тоді в цій точці мают місце такі співвідношення:

1) $(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))' = c_1 f'_1(x) + c_2 f'_2(x) + {} + \ldots + c_n f'_n(x) \qquad (c_1, c_2, \ldots, c_n = \text{const}),$ (2. 3)

2) $(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x))' = f'_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + {} + f_1(x) \cdot f'_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + {} + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f'_n(x),$ (2. 4)

зокрема, $(f_1 \cdot f_2)' = f'_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot f'_2$;

$$3)\ \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f'_1(x)\,f_2(x) - f_1(x)f'_2(x)}{(f_2(x))^2},\quad f_2(x) \neq 0. \quad (2.5)$$

При розв'язуванні задач на обчислення похідної застосовується ряд формул для похідних основних елементарних функцій:

$$c\,' = 0,\quad c = \text{const}; \tag{2. 6}$$

$$(x^{\alpha})\,' = \alpha x^{\alpha-1}\quad (\alpha - \text{довільне число}); \tag{2. 7}$$

$$(a^x)\,' = a^x \ln a\quad (a > 0,\ a \neq 1); \tag{2. 8}$$

$$(e^x)\,' = e^x;$$

$$(\log_a x)\,' = \frac{1}{x\ln a}\quad (x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1);$$

$$(\log_a |x|)\,' = \frac{1}{x\ln a}\quad (x \neq 0,\ a > 0,\ a \neq 1); \tag{2. 9}$$

$$(\ln x)\,' = \frac{1}{x},\ x > 0;$$

$$(\ln|x|)\,' = \frac{1}{x},\ x \neq 0;$$

$$(\sin x)\,' = \cos x;$$

$$(\cos x)\,' = -\sin x;$$

$$(\mathrm{tg}x)\,' = \frac{1}{\cos^2 x}\quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z\right); \tag{2. 10}$$

$$(\mathrm{ctg}x)\,' = -\frac{1}{\sin^2 x}\quad (x \neq \pi n,\ n \in Z);$$

$$(\arcsin x)\,' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (|x| < 1);$$

$$(\arccos x)\,' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (|x| < 1); \tag{2. 11}$$

$$(\mathrm{arctg}x)\,' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{arcctg}x)\,' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x; \qquad (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x;$$

$$(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}; \qquad (\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}, \quad (x \neq 0). \qquad (2.12)$$

Обчислення похідної складеної функції. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x, а функція $z = \varphi(y)$ — в точці $y = f(x)$, тоді складена функція $z = \varphi(f(x))$ диференційована в точці x, причому

$$z'(x) = \varphi'(y) \cdot f'(x) \text{ або } \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}. \qquad (2.13)$$

Наведене правило обчислення похідної складеної функції застосовується і для композиції довільного скінченного числа функцій. Наприклад, для складеної функції виду $z(y(x(t)))$, де $x(t)$, $y(x)$, $z(y)$ — диференційовані у відповідних точках функції, має місце рівність $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$.

Диференціювання показниково-степеневої функції. Похідна показниково-степеневої функції $y = (u(x))^{v(x)}$, $u(x) > 0$ знаходиться за формулою

$$y' = (u(x))^{v(x)} \left(v'(x) \ln u(x) + \frac{u'(x)\, v(x)}{u(x)} \right).$$

Цю формулу можна отримати одним із трьох методів:

1) за допомогою попереднього логарифмування:

$\ln y = v(x) \ln u(x)$, тоді $\frac{1}{y} y' = v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}$

та $y' = y\left(v' \ln u + \frac{v \cdot u'}{u}\right)$;

2) зобразити функцію у вигляді $y = e^{v(x) \ln u(x)}$, а потім продиференціювати її;

3) продиференціювати функцію $y = u^v$ спочатку як степеневу функцію (вважати $v = \mathrm{const}$), а потім як показникову (вважаючи $u = \mathrm{const}$) та результати додати.

Обчислення похідної оберненої функції. Якщо неперервна та строго монотонна в деякому околі точки x функція $y = f(x)$ має похідну $\frac{df(x)}{dx} \neq 0$ в цій точці, тоді обернена функція $x = f^{-1}(y)$ в точці y має похідну, причому

$$x_y' = \frac{1}{y_x'} \text{ або } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \qquad (2.14)$$

Обчислення похідної функції, заданої параметрично. Похідна функції, яка задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, де $\varphi(t)$, $\psi(t)$ диференційовані в точці t функції, причому $\frac{d\varphi}{dt} \neq 0$, обчислюється за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (2.15)$$

Диференціювання неявної функції. Похідна диференційованої на деякому інтервалі функції $y = y(x)$, яка задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$, знаходиться з умови:

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0. \qquad (2.16)$$

При диференціюванні даного рівняння треба мати на увазі, що y є функція від x.

Користуючись розглянутими основними прийомами обчислення похідної функції, розв'яжемо ряд прикладів.

Приклад 1. Знайдемо похідну функції $y = \sqrt[3]{x+1}$ в точці $x_0 = 0$, користуючись означенням похідної.

За означенням (2. 1):

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}.$$

В даному випадку $y(x_0) = \sqrt[3]{0+1} = 1$, $y(x_0 + \Delta x) = \sqrt[3]{0 + \Delta x + 1} = \sqrt[3]{\Delta x + 1}$, $x_0 = 0$.

Тому $y'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x + 1} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{1}{3}\Delta x}{\Delta x} = \dfrac{1}{3}$ (згідно з формулою (1. 31)).

Таким чином, $y'(0) = \frac{1}{3}$.

Приклад 2. Знайдемо похідну функції $y = 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x^3}$.

Похідною алгебраїчної суми функцій є алгебраїчна сума похідних, тобто:

$$y' = (3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x^3})' = 3(\sqrt[3]{x})' - 4(\sqrt[4]{x^3})' =$$

$$= 3\,(x^{1/3})' - 4\,(x^{3/4})' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{1/3-1} - 4 \cdot \frac{3}{4}x^{3/4-1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt[4]{x}} \text{ (формули (2. 3), (2. 7))}.$$

Приклад 3. Знайдемо похідну функції $y = x\,\mathrm{tg}x$.

Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій (2. 4) та формули (2. 7), (2. 10), знаходимо:

$$y' = (x\,\mathrm{tg}x)' = x' \cdot \mathrm{tg}x + x \cdot (\mathrm{tg}x)' = 1 \cdot \mathrm{tg}x + x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= \mathrm{tg}x + \frac{x}{\cos^2 x}.$$

Приклад 4. Обчислимо похідну функції $f(x) = e^{x^2}/(1 + x^2)$.

За правилом диференціювання частки (2. 5) маємо:

$$f'(x) = \frac{(e^{x^2})' \cdot (1 + x^2) - e^{x^2} \cdot (1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2}.$$

Знайдемо похідну функції e^{x^2}, розглядаючи її як композицію двох диференційованих функцій $z = e^y$ та $y = x^2$. За правилом обчислення похідної складеної функції (2. 13) дістанемо:

$$z_x' = z_y' \cdot y_x' = (e^y)_y' \cdot (x^2)_x' = e^y \cdot 2x,\ y = x^2, \text{тобто } (e^{x^2})' = 2xe^{x^2}.$$

Таким чином,

$$f'(x) = \frac{2xe^{x^2}(1 + x^2) - e^{x^2} \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2x^3e^{x^2}}{(1 + x^2)^2}.$$

Приклад 5. Знайдемо похідну функції $f(x) = \ln\ln^2\ln^3 x$.

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції та формули (2. 7), (2. 9), маємо:

$$f'(x) = (\ln\ln^2\ln^3 x)' = \frac{1}{\ln^2\ln^3 x}\,(\ln^2\ln^3 x)' = \frac{1}{\ln^2\ln^3 x}\,2\ln\ln^3 x \times$$

$$\times (\ln\ln^3 x)' = \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2\ln^3 x}\,\frac{1}{\ln^3 x}\,(\ln^3 x)' = \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2\ln^3 x}\,\frac{3\ln^2 x}{\ln^3 x}\,(\ln x)' =$$

$$= \frac{2\ln\ln^3 x}{\ln^2\ln^3 x} \cdot 3\,\frac{\ln^2 x}{\ln^3 x}\,\frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln x\ln\ln^3 x},\ x \neq 1,\ e.$$

Іноді, перед тим як обчислювати похідну функції, доцільно функцію певним чином перетворити.

Приклад 6. Знайдемо похідну функції

$$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\operatorname{tg}x - \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}}, \ 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Перетворимо дану функцію:

$$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\operatorname{tg}x - \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}} = \sqrt{\frac{(\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1)^2}{(\operatorname{tg}x + 1)^2 - (\sqrt{2\operatorname{tg}x}\,)^2}} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2x + 1}} = \frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2x}}} =$$

$$= \cos x\,(\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1) = \sin x + \frac{\sqrt{2\sin x}\ \cos x}{\sqrt{\cos x}} + \cos x =$$

$$= \sin x + \sqrt{\sin 2x} + \cos x.$$

Таким чином,

$$f'(x) = (\sin x + \cos x + \sqrt{\sin 2x}\,)' = \cos x - \sin x +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\sin 2x}}\cos 2x \cdot 2 = \cos x - \sin x + \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}} = \cos x - \sin x +$$

$$+ \operatorname{ctg}2x\sqrt{\sin 2x}\,.$$

Приклад 7. Продиференціюємо функцію

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}.$$

Цю функцію можна диференціювати як частку двох функцій. Але це приведе до складних обчислень. Тому краще спочатку прологарифмувати функцію, а потім продиференціювати. Дійсно,

$$\ln y = \ln\frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} = \ln(x+1)^2 - \ln(x+2)^3 -$$

$$- \ln(x+3)^4 = 2\ln(x+1) - 3\ln(x+2) - 4\ln(x+3).$$

Диференціюючи (y розглядаємо як складену функцію), маємо:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}.$$

Тоді $y' = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4}\left(\dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x+3}\right) =$

$$= -\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5}.$$

Приклад 8. Знайдемо похідну функції $y = x^{e^x} x^9$.

Перепишемо функцію у вигляді $y = x^{e^x+9}$. За означенням п

казниково-степеневої функції $y = e^{(e^x+9)\ln x}$.

Диференціюючи y як складену функцію, отримаємо

$$y' = \left(e^{(e^x+9)\ln x}\right)' = e^{(e^x+9)\ln x}\,[(e^x+9)\ln x\,]' =$$

$$= e^{(e^x+9)\ln x}\,[e^x \ln x + (e^x+9)\frac{1}{x}\,] = x^{e^x+9}\left[e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) + \frac{9}{x}\right]$$

Приклад 9. Знайдемо похідну функції $y = (1 - \cos x)^x$.

Прологарифмуємо функцію y, а потім продиференціюєм
тобто $\ln y = \ln(1-\cos x)^x = x\ln(1-\cos x)$,

$$\frac{1}{y}\,y' = \ln(1-\cos x) + x\,\frac{\sin x}{1-\cos x}.$$

Таким чином, $y' = (1-\cos x)^x\left[\ln(1-\cos x) + \frac{x\sin x}{1-\cos x}\right]$.

Приклад 10. Переконаємось, що функція $y = -\sqrt{x^4 -}$
задовольняє рівняння $xyy' - y^2 = x^4$.

Знайдемо похідну y':

$$y' = (-\sqrt{x^4 - x^2}\,)' = -\frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2}} = -\frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2}}$$

та підставимо в задане рівняння:

$$x(-\sqrt{x^4 - x^2}\,)\left(-\frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2}}\right) - (-\sqrt{x^4 - x^2}\,)^2 = x^4,$$

$$x^2(2x^2 - 1) - (x^4 - x^2) = x^4,$$

$$2x^4 - x^2 - x^4 + x^2 = x^4,$$

$$x^4 = x^4.$$

Таким чином, функція y дійсно задовольняє дане рівняння.

Приклад 11. Знайдемо похідну функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\left(x\sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Використовуючи правила обчислення похідної функції, при 0 маємо: $f'(x) = \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x} + x\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) =$

$$= \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0.$$

Отриманий вираз невизначений в точці $x = 0$. Для знаходження $f'(0)$ скористаємось означенням похідної. Приріст функції в точці 0 дорівнює

$$\Delta f = f(0 + \Delta x) - f(0) = 1 - \cos\left(\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}\right).$$

Тому

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{1 - \cos(\Delta x\sin(1/\Delta x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{\Delta x\sin(1/\Delta x)}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin^2(1/\Delta x)}{2\Delta x} =$$

$= \frac{1}{2}\lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x\sin^2(1/\Delta x)) = 0$ як добуток нескінченно малої функції (Δx, $\Delta x \to 0$) на обмежену функцію ($\sin^2(1/\Delta x) < 1$).

Таким чином:

$$f'(x) = \begin{cases} \sin\left(x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Приклад 12. Знайдемо похідну функції, оберненої до $y = x + e^{2x}$, $x \in R$.

Дана функція скрізь неперервна та строго монотонна, її похідна $\frac{dy}{dx} = 1 + 2e^{2x}$ не перетворюється в нуль в жодній точці, тому, за правилом диференціювання оберненої функції (2. 14), маємо:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + 2e^{2x}} = \frac{1}{1 + 2(y - x)}.$$

Приклад 13. Знайдемо похідну функції $y = f(x)$, яка задана рівнянням $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $0 < \varphi < \frac{2}{3}\pi$, де r і φ — полярні координати точки (x, y).

Запишемо функцію в параметричному вигляді:

$x = r\cos\varphi = 2\,(1 - \cos\varphi)\cos\varphi,$

$y = r\sin\varphi = 2\,(1 - \cos\varphi)\sin\varphi.$

Застосовуючи формулу (2. 15), знаходимо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}} = \frac{2\sin^2\varphi + 2\,(1 - \cos\varphi)\cos\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi - 2\,(1 - \cos\varphi)\sin\varphi} =$$

$$= \frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi - \sin\varphi} = \frac{\sin\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{\varphi}{2}} = \mathrm{tg}\,\frac{3}{2}\varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 14. Продиференціюємо функцію $y = f(x)$, яка за на неявно рівнянням $y^3 - 3y + 2x = 2$.

Умова (2. 16) для даного випадку має вигляд

$$\frac{d}{dx}(y^3 - 3y + 2x - 2) = 0.$$

Диференціюючи, дістанемо $3y^2 y' - 3y' + 2 = 0$. З цьо рівняння знаходимо:

$$y' = -\frac{2}{3y^2 - 3} = \frac{2}{3\,(1 - y^2)}.$$

Для засвоєння техніки диференціювання пропонуємо сам стійно виконати наведені нижче вправи.

Знайти приріст $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ та відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, я що:

1. $y = \frac{1}{(x - 3)^2}$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}1$.

2. $y = \log_3 x$, $x = 3$, $\Delta x = 0{,}001$.

Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x_0)$.

3. $f(x) = \sqrt{x + 5}$, $x_0 = 0$.

4. $f(x) = 3^x$, $x_0 = 2$.

5. $f(x) = 2x + \mathrm{tg}\,x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Знайти y', обчислюючи $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Вказати область існування похідної:

6. $y = x^2 - 10.$

7. $y = \frac{1}{x^2}.$

8. $y = \sqrt[3]{x}.$

9. $y = 5^{x-3}.$

10. $y = \arccos x.$

11. $y = \cos 2x.$

Застосовуючи основні правила диференціювання та формули для похідних основних елементарних функцій, обчислити похідні функцій:

12. $y = 4 - x + 2\pi.$

13. $y = 2x^3 + 6x^2 - 7x + 8.$

14. $y = x^5 + 5x + 5.$

15. $z = y^2 + my + n$ $(m, n = \text{const}).$

16. $u = v^3 + 4v^{5/2} - 7v.$

17. $s = t^{0,4} - t^2.$

18. $y = \frac{3}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}.$

19. $y = \ln 3 + \frac{e^2}{\sqrt{x}}.$

20. $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}.$

21. $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^5}.$

22. $y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{2}.$

23. $y = \sqrt{3x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$

24. $y = \frac{2 - x^{-2/3}}{3}.$

25. $y = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{4}{x} + \frac{1}{3}x^{-3}.$

26. $y = \frac{3}{7}x^4\sqrt[3]{x^2} - 2x^2\sqrt{x^3}.$

27. $y = \frac{x+1}{x-1}.$

28. $y = \frac{x^2}{x^3 + 1}.$

29. $y = \frac{1 + x + x^2}{x}.$

30. $y = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{1 - x}.$

31. $s = (1 + t^2)(1 + 2t^2).$

32. $y = x(x - 1)(x - 2).$

33. $y = \sqrt[3]{x^4}(x + 1)(x^2 - 2).$

34. $y = x + \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x - 2.$

35. $y = \sin x - 4\cos x.$

36. $r = 3\varphi \sin\varphi.$

37. $y = (x^2 + 2)\,\mathrm{tg}x.$

38. $y = \sqrt[3]{x}/\cos x.$

39. $y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$

40. $y = \dfrac{\mathrm{ctg}x - \mathrm{tg}x + 1}{\sec x}.$

41. $y = \mathrm{arctg}x - 3x + \mathrm{arcctg}x.$

42. $y = (1 + x^2)\arccos x.$

43. $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}.$

44. $y = \sqrt{x^3}\,\mathrm{arctg}x.$

45. $y = \sin x \arcsin x.$

46. $y = \ln x^5 + \dfrac{50}{x} - \dfrac{125}{2x^2}.$

47. $y = (x - 1)\log_2 x^2.$

48. $y = \dfrac{x^2 - 1}{\lg x}.$

49. $y = \ln x \lg x - \ln 5 \log_5 x.$

50. $y = 3\ln x + \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x^2}.$

51. $y = x\cos x \ln x.$

52. $y = \dfrac{1}{4^{2x}}.$

53. $y = (\sqrt{3})^x - (\sqrt{2})^{-x}.$

54. $y = (x^2 + 2x + 5)\,e^x.$

55. $y = 4^{x+1}\ln|x|.$

56. $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}.$

57. $y = \ln(\sqrt{e^x}).$

58. $y = \dfrac{\ln x}{e^x}.$

59. $y = e^x(\mathrm{tg}x - x).$

60. $y = \dfrac{x\ln a - 1}{\ln^2 a}\,a^x.$

61. $y = e^x\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2x}\right).$

62. $y = e^{2x}\sin x.$

63. $y = \dfrac{e^x}{\cos x}.$

64. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2^x.$

65. $y = 2\log_x 5.$

66. $y = \log_x 3^x.$

67. $y = \dfrac{\arccos x}{e^x}.$

68. $y = \dfrac{\mathrm{sh}x}{e^x}.$

69. $y = \mathrm{ch}x\cos x.$

70. $y = \mathrm{th}x - 2x.$

71. $y = (\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x)\, e^x$.

72. $y = (5x + 2)\, \mathrm{sh} x$.

73. $y = \dfrac{2\, \mathrm{th} x}{\ln x}$.

74. $y = \dfrac{x^2}{\mathrm{ch} x} + \mathrm{sh}\, 2$.

75. $y = \dfrac{1}{x} \mathrm{ch} x + \sqrt{x}\, \mathrm{sh} x$.

Обчислити значення похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0:

76. $y = (x - 5)(x - 1)\, x\, (x + 1)(x + 5)$, $x_0 = 0$.

77. $y = x(x - 1)(x - 2) \ldots (x - 1994)(x - 1995)$,
$x_0 = 0$; $x_0 = 1995$.

78. $y = (x^3 - 6) \cos x - (4x^2 + 3) \sin x$, $x_0 = 0$.

79. $y = \mathrm{arcctg} x \arcsin x$, $x_0 = 0$.

80. $y = \dfrac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$, $x_0 = 2\pi$.

81. $y = \ln 10x \lg x$, $x_0 = 1$.

82. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$, $x_0 = 1$.

83. $y = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 2$.

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, найти похідні функцій:

84. $y = (5x - 2)^5$.

85. $y = \dfrac{(x - 2)^2}{x^{1/4}}$.

86. $y = \dfrac{1}{29} (1 - x)^{-29} - \dfrac{1}{14} (1 - x)^{-28} + \dfrac{1}{27} (1 - x)^{-27}$.

87. $y = (1 + x) \sqrt{1 - x}$.

88. $y = (x^2 - 1)^3$.

89. $y = \sqrt[4]{2 - x^2}$.

90. $y = (x^3 + x^2 + x + 1)^{3/2}$.

91. $y = (x + 1)(2 - 3x)^2 (2x - 3)^3$.

92. $y = (4 + x^2) \sqrt{4 - x^2}$.

93. $s = \dfrac{t^3}{(1 + t)^2}$.

94. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

95. $s = \dfrac{2t^2 - 1}{t \sqrt{1 + t^2}}$.

96. $y = \dfrac{2}{3} \dfrac{2x + 1}{x} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x}}$.

97. $y = \sqrt[9]{4 + 3\sqrt{2x}}$.

98. $y = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

99. $y = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$.

100. $u = \sqrt{\frac{1 + v^2}{1 - v^2}}$.

101. $y = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$.

102. $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})}$.

103. $y = \sin x^2$.

104. $y = \cos^3 x$.

105. $y = \sin(x + \sqrt{x})$.

106. $y = \cos\left(x + \ln x - \frac{\pi}{4}\right)$

107. $y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

108. $y = \frac{\cos 2x}{x}$.

109. $y = \sqrt[4]{\mathrm{tg}\,(x/4)}$.

110. $y = x^2 \sin^2 x^2$.

111. $y = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$.

112. $y = 4x + 4\,\mathrm{ctg} x - \mathrm{ctg}^4$

113. $y = \mathrm{tg}\sqrt{1 - x^2}$.

114. $y = \sin 2x \cos 3x$.

115. $y = \sin^2 \frac{1}{x^2}$.

116. $y = \mathrm{ctg}^3(3x + 2)$.

117. $s = \sin^2 t \cos t$.

118. $r = \sqrt{\cos 3\varphi}$.

119. $y = \sin(x + 2)\cos(x - 2)$.

120. $y = \cos(\sin x)$.

121. $y = \frac{1 - \cos(4x - \pi)}{\mathrm{tg} x - \mathrm{ctg} x}$.

122. $y = 3\sin x \cos^3 x + \sin^3 x$.

123. $y = \arccos\sqrt{x}$.

124. $y = \arcsin(x^2 + x + 1)$.

125. $y = \mathrm{arcctg}\,(3x - 4x^3)$.

126. $y = \arcsin\sqrt{1 - x}$.

127. $y = \mathrm{arctg}\,\frac{1 + x}{1 - x}$.

128. $y = \arcsin\frac{2x}{1 - x^2}$.

129. $y = \arccos\sqrt{1 - x^2}$.

130. $y = \mathrm{arctg}\,(\sin x + 1)$.

131. $y = \arcsin(\ln x)$.

132. $y = \arccos(e^x)$.

133. $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$.

134. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.

135. $y = \arccos(\sin x)$.

136. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

137. $y = \arccos\frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$.

138. $y = \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{3}{32}\right)\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}\left(\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{32}x\right)$.

139. $y = \frac{x\sqrt{1 - x^2}}{4(1 + x^2)} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x\sqrt{2}}$.

140. $y = \operatorname{tg}[2\operatorname{arctg}(2x - 1)]$.

141. $y = \sec(\ln x)$.

142. $y = \operatorname{cosec}(x^3 + e^x)$.

143. $y = \cos(\sin^2 x)\sin(\cos^2 x)$.

144. $y = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x)$.

145. $y = 3^{x^2}$.

146. $u = 5^{\sqrt{v} + \ln v}$.

147. $y = 2^{x\ln x}$.

148. $y = e^{\ln^2 x}$.

149. $s = e^{a + bt + ct^2}$.

150. $y = e^{\frac{x - 1}{x + 1}}$.

151. $y = e^{\cos 2x}$.

152. $u = e^{\operatorname{arctg}(v + 2)}$.

153. $y = 3^{\cos x + \operatorname{tg} 3x}$.

154. $y = 2^{\sin^2 x}$.

155. $y = e^{\sqrt{\ln(x^2 - x + 3)}}$.

156. $y = \frac{x}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x} - 1}$.

157. $y = \ln[(x + 5)/(x - 1)]$.

158. $y = \ln(x^2 + 1)^3$.

159. $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})$.

160. $y = \lg\sqrt{1 + x^2}$.

161. $y = \ln\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$.

162. $y = \ln(x^4 - x^2 + 5)$.

163. $y = \ln^2(3x + 1)$.

164. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

165. $y = \ln\dfrac{e^x}{1 + e^x}$.

166. $y = \ln(\ln x)$.

167. $y = \ln(\ln x + x)$.

168. $y = \ln^2(\ln x)$.

169. $y = \ln(\ln^2 x + e)$.

170. $s = (\ln t)^2 e^t$.

171. $y = \ln(\cos x)$.

172. $r = \ln \operatorname{tg}\varphi$.

173. $y = \ln\cos^2 x^2$.

174. $y = \ln^2 \sin x$.

175. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$.

176. $y = e^x \ln\cos 2x$.

177. $y = e^x \ln \operatorname{ctg} x$.

178. $y = \ln(\arcsin x)$.

179. $y = -\dfrac{1}{2}\ln(1 + x) + \dfrac{1}{6}\ln(1 + x^3) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x - 1}{\sqrt{3}}$.

180. $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1} + \dfrac{1}{6}\ln\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$.

181. $y = \dfrac{1}{2}\ln(x + 1) - \dfrac{1}{10}\ln(x^5 + 1) +$

$+ \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\dfrac{x^2 - (x/2)(\sqrt{5} + 1) + 1}{x^2 + (x/2)(\sqrt{5} - 1) + 1}$.

182. $y = \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})$.

183. $y = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\ln\dfrac{\operatorname{tg}(x/2) - 3 - \sqrt{6}}{\operatorname{tg}(x/2) - 3 + \sqrt{6}}$.

184. $y = \dfrac{2}{\sin^2 x\cos x} - \dfrac{3\cos x}{\sin^2 x} + 3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

185. $y = \ln\dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{\arcsin x}{x}$.

186. $y = \ln\dfrac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3(x^2 - 4)}}{x}$.

187. $y = \log_3\log_4\log_5 x^2$.

188. $y = \ln\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 - \frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$.

189. $y = x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + e^{-x}\operatorname{arctg}e^{x}$.

190. $y = \operatorname{sh}^2 x$.

191. $y = \operatorname{ch}^3 x^2$.

192. $y = \operatorname{sh}2x\operatorname{ch}x$.

193. $y = \ln(\operatorname{th}x)$.

194. $y = e^{\operatorname{ch}x}\operatorname{sh}x$.

195. $y = e^{\operatorname{sh}x}\operatorname{sh}x$.

196. $y = \operatorname{arctg}\operatorname{th}x$.

197. $y = \frac{\operatorname{ch}x^2}{\operatorname{sh}^2 x^2} - \ln\operatorname{cth}\frac{x^2}{2}$.

198. $y = \frac{1}{4}\operatorname{th}x + \frac{\sqrt{2}}{16}\ln\frac{1+\sqrt{2}\operatorname{th}x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th}x}$.

199. $y = (x^2-2)\,2^{4x}\operatorname{ch}3x$.

200. $y = e^{2x}\operatorname{sh}3x$.

Знайти похідні функцій, спочатку їх логарифмуючи:

201. $y = \frac{\sqrt{(x+a)^3}}{\sqrt{x-a}}$.

202. $y = \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}$.

203. $y = \frac{(2x^2-1)\sqrt{x^2+1}}{3x^3}$.

204. $y = x\sqrt{1-x}\,(1+x)$.

205. $y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

206. $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x-3}}$.

207. $y = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt[3]{(x+3)^2}\sqrt{(x+2)^3}}$.

208. $y = \frac{(x-1)^3}{(x+4)^3(x+3)^4}$.

Знайти похідну показниково-степеневої функції:

209. $y = x^{e^x}$.

210. $y = x^{1/\ln x}$.

211. $y = (x+1)^{e^x}$.

212. $y = \frac{e^x}{x^x}$.

213. $y = (\ln x)^{e^x}$.

214. $y = x^{x^x}$.

215. $u = v^v e^{e^v}$.

216. $y = x^{\sqrt{1-x}}$.

217. $y = (1/x)^x$. **218.** $y = (\sin x)^x$.

219. $y = x^{\operatorname{tg} x}$. **220.** $y = (\operatorname{tg} x)^x$.

221. $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **222.** $y = (x+1)^{\arccos x}$.

223. $y = (\operatorname{arctg}^2 x)^{\arcsin x}$. **224.** $y = (\operatorname{sh} x)^{e^x}$.

Розв'язати рівняння $y' = 0$, якщо:

225. $y = 2x^3 + 12x^2 - 126x + 17$. 226. $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x + 4}$.

227. $y = \dfrac{1}{4 + \cos^2 x}$.

228. Показати, що функція $y = \operatorname{tg}(x/2)(x-1)$ є розв'язком рівняння $y' - \dfrac{y}{\sin x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

229. Показати, що функція $y = xe^{1+2x}$ є розв'язком рівняння $xy' = y \ln(y/x)$.

230. Показати, що функція $y = e^{x/y}$ є розв'язком рівняння $(xye^{x/y} + y^2) - x^2 e^{x/y} y' = 0$.

231. Знайти $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(3/x^3), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} \arcsin^2 x \cos(5/x^2), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} (e^{7x} - 1)\sin(1/2x), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 - x^3 \sin(1/3x)), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

232. Відомо, що при $x \to 0$ існує границя функції $f(x)/x$ та $f(0) = 0$. Довести, що $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)/x$.

233. Довести, якщо $f(x)$ має похідну в точці x_0, тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

234. Довести, що похідна парної функції є непарною функцією, а похідна від непарної функції — парною функцією.

235. Довести, що похідною від періодичної функції є функція періодична.

236. Довести, що диференціювання функціонального визначника n-го порядку виконується згідно з правилом:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x)\ldots f_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{k1}(x)\ldots f_{kn}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x)\ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x)\ldots f_{1n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'_{k1}(x)\ldots f'_{kn}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(x)\ldots f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

237. Використовуючи результати задачі 236, знайти $\Delta'(x)$, якщо:

1) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ x & 0 & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$, 2) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 2 \\ 1/3 & x-3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & x-5 \end{vmatrix}$,

3) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 6x & 3x^2 & x^3 \\ 2 & 2x & x^2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$.

Знайти $\frac{dy}{dx}$, користуючись правилом диференціювання обернених функцій, якщо:

238. $x = y\sqrt{1+y}$.

239. $x = \sqrt{1-\sin y}$.

240. $x = \frac{y}{1+\ln y}$.

241. $x = e^{\sin y}$.

242. $x = \ln(\operatorname{tg} y)$.

243. $x = \arcsin\frac{y+1}{\sqrt{2}}$.

244. $x = \sin(y + e^y)$.

245. $x = e^{\operatorname{arctg} y}$.

246. Виразити $\frac{dy}{dx}$: через x; через y, якщо $x = 2\operatorname{arctg}(e^y)$.

247. $x = e^{\arcsin y}$. Знайти вираз для y': через x; через y.

Знайти похідні обернених функцій в заданих точках:

248. $y = x + \frac{1}{6}x^6$, $y = 0$.

249. $y = 2x - \frac{\cos x}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

250. $y = 3x^2 - x^4,\ y = 0,\ x > 0.$

251. $y = 3x^2 - x^4,\ y = 2,\ -1{,}2 < x < 0.$

252. Знайти похідні функцій, обернених до гіперболічних. (Функції, обернені до гіперболічних, позначають символами $\mathrm{arsh}x$, $\mathrm{arch}x$, $\mathrm{arth}x$.)

Для функцій, які задані параметрично, знайти $\dfrac{dy}{dx}$:

253. $\begin{cases} x = 3t + 1; \\ y = t^3 + 2t,\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$

254. $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = 3\sin t,\ 0 < t < \pi. \end{cases}$

255. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t-1}; \\ y = \left(\dfrac{t}{t-1}\right)^2,\ 1 < t < +\infty. \end{cases}$

256. $\begin{cases} x = \sin^2 t; \\ y = 4\cos^2 t,\ 0 < t < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t},\ 0 < t < +\infty. \end{cases}$

258. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}; \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ 0 < t\dfrac{\pi}{9}. \end{cases}$

259. $\begin{cases} x = 2\,(t - \sin t), \\ y = 2\,(1 - \cos t),\ -\infty < t < +\infty. \end{cases}$

260. $\begin{cases} x = \ln\cos t; \\ y = \ln\cos\dfrac{t}{2},\ 0 < t < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

Знайти $\dfrac{dx}{dy}$ для функції $x = x\,(y)$, яка задана параметрично:

261. $x = e^{-2t},\ y = e^{3t},\ -\infty < t < +\infty.$

262. $x = t^4 - 2t^3 + t^2,\ y = 5 + 3t - t^3,\ -1 < t < +\infty.$

Обчислити значення похідної $y'(x)$ в точці x_0 для функцій $y = f(x)$, які задані рівнянням $r = r(\varphi)$, де r та φ— полярні координати точки $(x;y)$:

263. $r = e^{\varphi}$, $x_0 = 1$; $-\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{6}$.

264. $r = 3\varphi$, $x_0 = 0$: а) $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$; б) $0 < \varphi < \frac{2}{3}\pi$.

265. Довести, що функція y, яка задана параметрично: $\begin{cases} x = 2t + 3t^2; \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$ задовольняє рівняння $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

266. Переконатись, що функція $x = \mathrm{ch}3t$, $y = \mathrm{sh}3t$ задовольняє рівняння $yy' - x = 0$.

Знайти похідну y' для диференційованих функцій, які задані неявно:

267. $y^2 = 2px$.

268. $x^2 + y^2 = r^2$.

269. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

270. $y^2 - 2xy + 4 = 0$.

271. $x^y = y^x$.

272. $y^2 = \cos 2x$.

273. $2^{x-y} - x^y = 0$.

274. $y^2 - 2ye^x + 2x\ln y = 0$.

275. $1 + xy = \ln(e^{xy} + e^{-xy})$.

276. $e^y + x^2e^{-y} - 2x = 0$.

277. $\arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b} - a = 0$.

278. $\mathrm{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

279. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \ln c = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$.

280. $x = \arcsin\sqrt{2y - y^2} - \sqrt{2y - y^2}$.

Для диференційованих функцій $y = f(x)$, які задані неявно, обчислити $y'(x_0)$:

281. $x^3 - 4x^2y^2 + 2x - y + 4 = 0$, $x_0 = 0$.

282. $e^y + xy = e$, $x_0 = 0$.

283. $\ln y + \frac{x}{y} = 2$, $x_0 = 0$.

284. $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$, $x_0 = 1$.

Інші приклади з даної теми знайдете також у [1, 3, 6, 9].

§ 2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ТА ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ПОХІДНОЇ

Похідна, її геометричний та фізичний зміст, широко застос вуються при розв'язанні цілого ряду задач в різних галуз діяльності.

Геометричний зміст похідної. Похідна функції $y = f(x)$ дл кожного значення x дорівнює *кутово коефіцієнту дотичної* до графіка дан функції у відповідній точці, тобто

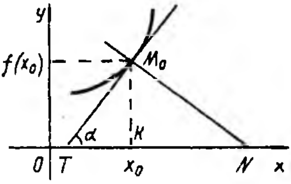


Рис.6

$$f'(x_0) = \text{tg}\alpha,$$

де α – кут, який утворює дотична до гр фіка функції в точці x_0 з додатним н прямком осі Ox (рис. 6).

На основі геометричного змісту п хідної рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ записуєть таким чином:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.\ 1$$

Якщо неперервна функція в точці x_0 має нескінченну п хідну, тоді дотичною до графіка функції в точці $M_0\ (x_0; y_0)$ бу пряма $x = x_0$.

Для нормалі, тобто прямої, що проходить через точку доти $M_0\ (x_0; y_0)$, перпендикулярно до дотичної (пряма M_0N), рі няння має вигляд $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),\ f'(x_0) \neq 0.$

У випадку $f'(x_0) = 0$ нормаллю буде пряма $x = x_0$; якщ функція в точці x_0 має нескінченну похідну, тоді нормаллю д кривої буде пряма $y = f(x_0)$.

Фізичний зміст похідної. Під фізичним змістом похідної р зуміють швидкість зміни функції в даній точці. Наприклад:

1) при русі тіла швидкість v в даний момент часу t є п хідною від шляху $s(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt};$$

2) при обертовому русі твердого тіла навколо осі Ox кутов швидкість ω в даний момент часу t є похідною від кута поворот $\varphi(t)$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

3) при охолодженні тіла швидкість охолодження в момен часу t є похідною від температури $\dfrac{dT}{dt}$;

4) теплоємність C для даної температури t є похідною від кількості тепла Q:

$$C = \frac{dQ}{dt};$$

5) при нагріванні стержня коефіцієнт лінійного розширення α при даному значенні температури t є похідною від довжини l:

$$\alpha = \frac{dl}{dt}.$$

Наведемо ряд вправ, у яких застосовується геометричний та фізичний зміст похідної.

Приклад 1. Знайдемо, під яким кутом функція $y = \cos x$ перетинає вісь абсцис.

Косинусоїда перетинає вісь абсцис в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Якщо $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, тоді $y'\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -1$, тобто кутовий коефіцієнт дотичної до косинусоїди дорівнює -1. Це означає, що в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ графік функції $y = \cos x$ перетинає вісь абсцис під кутом 135°. Якщо $x = \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, тоді $y'\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = 1$. Тому в цих точках косинусоїда перетинає вісь Ox під кутом $\frac{\pi}{4}$.

Приклад 2. Запишемо рівняння дотичної до кривої $y = 6\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[4]{x}/3$ в точці $x_0 = 1$.

Згідно з формулою (2. 17) для того щоб скласти рівняння дотичної, треба обчислити значення функції та похідної функції в точці $x_0 = 1$:

$$y(x_0) = \frac{2}{3};\quad y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[4]{x^3}};\quad y'(x_0) = \frac{2}{3}.$$

Отже, отримаємо рівняння дотичної:

$$y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(x - 1) \text{ або } y = \frac{2}{3}x.$$

Приклад 3. Знайдемо рівняння нормалі до кривої, яка задана параметрично: $x = 2e^t$, $y = e^{-t}$, в точці $t_0 = 0$.

Рівняння нормалі має вигляд:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Значення x_0 та $f(x_0)$ відповідають значенню $t_0 = 0$: $x_0 =$ $= x(t_0) = 2e^0 = 2$, $f(x_0) = y(t_0) = e^{-0} = 1$.

Похідну знаходимо за формулою (2. 15):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{2e^t} = -\frac{1}{2e^{2t}}.$$

В точці $x_0 = x(t_0)$ маємо $f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = -\frac{1}{2e^0} = -\frac{1}{2}.$

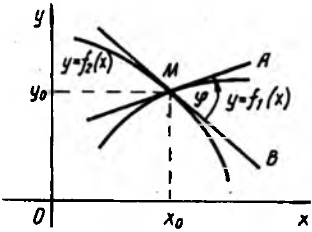


Рис.7

Таким чином, рівняння нормал записується у вигляді

$y - 1 = 2(x - 2)$, або $y = 2x - 3$.

У деяких задачах потрібно знайт кут між кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ в їх спільній точці $M(x_0;\ y_0)$ (рис. 7).

Кутом φ між кривими вважаєтьс величина кута φ між дотичними M та MB до даних кривих в точці M, $\text{tg}\varphi$ обчислюється за формулою:

$$\text{tg}\varphi = \left| \frac{f_1'(x_9) - f_2'(x_0)}{1 + f_1'(x_0)\, f_2'(x_0)} \right|, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}. \qquad (2.18)$$

Приклад 4. Визначимо, під якими кутами перетинаютьс лінії $f_1(x) = x^2 - 4x + 4$ та $f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$.

Спочатку знайдемо, в яких точках перетинаються дані лінії, для цього прирівняємо $f_1(x)$ та $f_2(x)$: $x^2 - 4x + 4 = -x^2 + 6x - 4$. Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, відповідно $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Тепер обчислимо кутові коефіцієнти дотичних до даних кривих у знайдених точках, а саме:

$f_1'(x) = 2x - 4$, $f_1'(1) = -2$, $f_1'(4) = 4$;

$f_2'(x) = -2x + 6$, $f_2'(1) = 4$, $f_2'(4) = -2$.

За формулою (2. 18) маємо:

$$\text{tg}\varphi_1 = \left| \frac{-2-4}{1 + (-2)\cdot 4} \right| = \frac{6}{7};$$

$$\text{tg}\varphi_2 = \left| \frac{4-(-2)}{1 + 4\cdot(-2)} \right| = \frac{6}{7}.$$

Таким чином, криві $f_1(x)$ та $f_2(x)$ перетинаються в точка (1;1) та (4; 4) під кутом $\text{arctg}\frac{6}{7}$.

В задачах на застосування геометричного змісту похідної часто зустрічаються також такі поняття, як відрізок дотичної, відрізок нормалі, піддотична, піднормаль, довжини яких визначаються за формулами:

а) відрізок дотичної TM_0 (рис. 6):

$$|TM_0| = \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \sqrt{1 + (f'(x_0))^2} \right| ;$$

б) відрізок нормалі NM_0: $|NM_0| = |f(x_0) \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}|$;

в) піддотична TK : $|TK| = \left| \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right|$;

г) піднормаль KN : $|KN| = |f(x_0) f'(x_0)|$.

Тепер наведемо два приклади на застосування фізичного змісту похідної.

Приклад 5. Знайдемо швидкість точки, рух якої описується рівнянням $s = \ln \frac{1}{1+t}$, наприкінці третьої та десятої секунд.

Швидкість визначається за формулою

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\ln \frac{1}{1+t}\right) = -\frac{1}{1+t}.$$

Коли $t = 3$, маємо $v_3 = -\frac{1}{4}$(м/с).

Коли $t = 10$, маємо $v_{10} = -\frac{1}{11}$(м/с).

Приклад 6. Знайдемо швидкість точки, яка рухається по колу радіуса R, оббігаючи коло за час T. Нехай точка починає рухатися з положення A (рис. 8) проти годинникової стрілки. Нехай за час t вона дійшла до положення P_t. Кут між її радіусом-вектором та віссю Ox дорівнює в цей час $\frac{2\pi t}{T}$, тому що точка проходить кут 2π за час T, кут $\frac{2\pi}{T}$ — за одиницю часу і кут $\frac{2\pi t}{T}$ — за час t. Отже, в будь-який момент t положення точки P_t можна визначити через її дві координати:

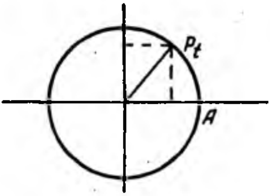


Рис.8

$$x = R\cos\frac{2\pi t}{T},\ y = R\sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Компоненти швидкості знаходимо з таких обчислень:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi R}{T}\sin\frac{2\pi t}{T},\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi R}{T}\cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Тоді швидкість точки буде:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2\pi R}{T}.$$

Пропонуємо розв'язати самостійно вправи, що наведено нижче.

285 Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = x^2$: а) в початку координат; б) в точці $x = 2$; в) в точці $x = -3$; г) в точках перетину її з прямою $y = 6x - 5$. Показати, що дотична в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ ділить абсцису цієї точки навпіл.

286. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кубічної параболи $y = x^3$: а) в точці $(x_0; y_0)$; б) в точці $x = 1$. Чи може кутовий коефіцієнт дотичної кубічної параболи бути від'ємним? Показати, що дотична в точці $M_0(x_0; y_0)$ ділить абсцису цієї точки у відношенні 2:1, відраховуючи від початку координат.

287. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої

$$\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8; \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases} \text{ в точці } M\,(2; -1).$$

288. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої

$x = \cos t,\ \ y = t + \sin t$ при $t = \frac{\pi}{3};\ \ t = \frac{\pi}{2}.$

289. Знайти кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої $y = \ln(x^2 + 1)$ в точці $x = 1$.

290. Знайти кут нахилу до осі абсцис дотичної до кривої

$y = \sin x + 2\cos x$ в точці $x = \frac{\pi}{2}$.

291. Визначити тангенс кута вигину стиснутого бруса, якщо рівняння його $y = \frac{P}{\cos\omega x}(1 - \cos\omega x)$.

292. Визначити тангенс кута вигину стиснутого бруса, якщо рівняння його $y = A\left(\frac{1}{\omega}\operatorname{tg}\omega x - x\right)$.

293. Знайти точку кривої $y = \ln x$, в якій кут нахилу до осі Ox дорівнює $\frac{\pi}{4}$.

294. Знайти кути, під якими графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь Ox:

1) $y = \sin 2x$;

2) $y = \mathrm{tg}x$;

3) $y = \ln |x|$;

4) $y = 1 - e^{\sqrt{3x}}$;

5) $x^2 = 2x - 3y, \quad x > 0$;

6) $y = x^3(x-1)^2(x-2)$;

7) $y = \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)}$;

8) $x = t^2(t-1), y = t^2(t-2), \quad 1 < t < +\infty$;

9) $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0, \quad y < 1$.

295. Під яким кутом крива $y = e^x$ перетинає вісь ординат?

296. Знайти точки, в яких дотичні до графіка функції $y = f(x)$ паралельні осі абсцис:

1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 4$;

2) $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5$;

3) $y = (x^2 - 15)e^x$;

4) $y = \cos x + \dfrac{1}{8}\cos 2x$;

5) $x = \dfrac{t^3}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{t^3 - 2t^2}{1+t^2}$.

297. Знайти абсциси точок кривої $y = x + \sin 2x$, в яких дотичні паралельні прямій $y = 2x + 3$.

298. В якій точці дотична до графіка функції $y = \ln x$ паралельна прямій $y = 2x - 3$?

299. На кривій $y = x^3 - 3x + 5$ знайти точки, в яких дотична до кривої перпендикулярна прямій $y = -\dfrac{x}{9}$.

300. В якій точці кривої $y^2 = 2x^3$ дотична до неї перпендикулярна до прямої $4x - 3y + 2 = 0$?

301. Знайти точки, в яких дотичні до кривих $f_1(x) = x^3 - x - 1$ та $f_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$ паралельні.

302. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0:

1) $y = \sqrt{x^2 - 7}, \quad x_0 = 4$;

2) $y = x^4 - 3, \quad x_0 = 1$;

3) $y = \sqrt{x-3}, \quad x_0 = 3$;

4) $y = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{2}, \quad x_0 = 0$;

5) $y = \ln\dfrac{x^3 - x^2 + 4}{x^3 - x + 4}, \quad x_0 = 0$;

6) $y = 4\,\mathrm{tg}x - \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, x_0 = 0$;

7) $x^2 + y^2 - 4x + 7y = 0, \quad y > -1, \quad x_0 = 0;$

8) $x = t\,e^t, \quad y = t\,e^{-t}, \quad x_0 = e;$

9) $x = t\cos t, \quad y = t\sin t, \quad x_0 = 0.$

303. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 + 3x^2 - 5$, як перпендикулярна до прямої $2x - 6y + 1 = 0$.

304. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ в точках перетину її з гіперболою $y = \dfrac{1}{x + 1}$.

305. Скласти рівняння нормалі до графіка функції в точці x_0:

1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, \quad x_0 = -2;$ 2) $y = \sqrt[3]{x - 2}, \quad x_0 = 2;$

3) $y = \operatorname{arcctg}(1/x), \quad x_0 = 1;$ 4) $y = \dfrac{x^2}{x - 1}, \quad x_0 = 2;$

5) $y = e^{1 - x^2}, \quad x_0 = -1.$

306. В якій точці нормаль до параболи $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $y = 4x + 1$?

307. Показати, що нормалі до кривої $y = x^2 - x + 1$, які проведені в точках $x_1 = 0, \; x_2 = -1, \; x_3 = \dfrac{5}{2}$, перетинаються в одній точці.

308. Скласти рівняння нормалі до кривої $y = x^3 + 2x^2 - 1$ в точках її перетину з параболою $y = 2x^2$.

309. Скласти рівняння нормалі до графіка функції $y = -\sqrt{x} + 2$ в точці перетину з бісектрисою першого координатного кута.

310. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярної до прямої, яка з'єднує початок координат з вершиною параболи.

311. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці M:

1) $x^2 + y^2 = 4, \quad M(0; -2);$ 2) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{18} = 1, \quad M(1; 3);$

3) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1, \quad M(3; 0);$ 4) $xy = 9, \quad M(-3; -3);$

5) $y^2 = 4x, \quad M(1; 2);$ 6) $y = ae^{bx}, \quad M(0; a);$

7) $y = \sin 2x, \quad M(\frac{\pi}{4}; 1);$ 8) $y^3 = x^2, \quad M(-1; 1);$

9) $y = 2\ln(x + 5), \quad M(-4; 0);$

10) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ (астроїда), $M(-1; 0);$

11) $x^5 + y^5 - 2xy = 0, M(1; 1);$ 12) $y^2(x - 3) = x^2, M(4; 4);$

13) $4x^4 + 6xy - y^4 = 0, \quad M(1; 2);$

14) $x^2(x + y) = a^2(x - y), \quad M(0; 0).$

312. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривих, які задані параметрично:

1) $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi); \\ y = a(1 - \cos\varphi), \text{ в точці } \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = a(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi); \\ y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi), \text{ в точці } \varphi = \pi, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t, \text{ в точці } t = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a(2\cos\varphi - \cos 2\varphi); \\ y = a(2\sin\varphi - \sin 2\varphi), \quad \text{в точці } \varphi = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = a(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u); \\ y = a\sin u, \text{ в точці } u = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

313. Знайти кути між кривими в точках перетину, застосовуючи формулу (2. 18):

1) $y^2 = x, \quad x^2 = y;$ 2) $x^2 + y^2 = 5, \quad y^2 = 4x;$

3) $x^2 + y^2 = 8, \quad x^2 - y^2 = 4;$ 4) $y = \sin x, \quad y = \cos x;$

5) $y = \lg x, \quad y = \ln x;$ 6) $y = e^x, \quad y = 2e^{2x};$

7) $y = e^x, \quad y = \ln x \cdot e^x;$ 8) $y = \operatorname{ch} x, \quad y = 2e^x;$

9) $x^2 - y^2 = a^2, \quad xy = b^2;$ 10) $y = \sqrt{2x}, \quad y = x^2/2;$

11) $y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x};$

12) $y = 4x^2 + 2x - 8, \quad y = x^3 - x + 10.$

314. Під яким кутом пряма $3y - 2x - 8 = 0$ перетинає параболу $y^2 = 8x$?

315. Обчислити в точці (1; 2) параболи $x = y^2/4$ довжини відрізків дотичної, піддотичної, нормалі, піднормалі.

316. Знайти довжину відрізка піддотичної графіка функції $y = 3^x$ в довільній його точці.

317. Знайти довжини піддотичної та піднормалі для кривих:
1) $y^2 = x^3$; 2) $xy^2 = 1$; 3) $x = 2(t - \sin t), \quad y = 2(1 - \cos t)$ в довільній точці $t = t_0$.

318. Довести, що довжина відрізка піднормалі гіперболи $x^2 - y^2 = 4$ в довільній її точці дорівнює абсцисі цієї точки.

319. Довести, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{|r'|}$ (рис. 9), якщо $r = r(\varphi)$ — рівняння кривої в полярній системі координат, α — кут між дотичною та полярним радіусом точки дотику.

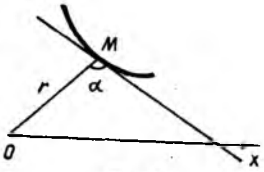


Рис.9

320. Знайти кут між дотичною та полярним радіусом точки дотику для таких кривих:

1) спіралі Архімеда $r = 2\varphi$;
2) гіперболічної спіралі $r = 4/\varphi$;
3) логарифмічної спіралі $r = e^{k\varphi}$;
4) дуги лемніскати Бернуллі $r^2 = \cos 2\varphi, \quad 0 \le \varphi < \frac{\pi}{4}$.

321. Записати в декартових та полярних координатах рівняння дотичної до кардіоїди $r = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$ в точці з полярним кутом $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

322. Матеріальна точка рухається за законом $x = \frac{1}{k}\ln \operatorname{ch} kt$. Знайти її швидкість.

323. Рух точки відбувається за законом $s = t^3 + 5$. Знайти швидкість руху точки в момент $t = 3$.

324. Рівняння руху точки $x = \ln(t + 2)$, $y = e^{t^2}$. Знайти швидкість точки в момент $t = 1$.

325. Шлях тіла в порожнині визначається за формулою $s = \frac{gt^2}{2}$. Знайти швидкість тіла наприкінці 5-ї секунди.

326. Шлях поїзда описується функцією $s = t^3 + 3t^2 + 3t$. Знайти його швидкість за годину після виходу зі станції.

327. З однієї станції у двох взаємно перпендикулярних напрямках вийшли два поїзди: один на північ зі швидкістю 30 км/год, другий на захід зі швидкістю 40 км/год. Як швидко вони віддаляються один від одного?

328. Ракету кинуто вертикально вгору зі швидкістю 360 км/год. Яка буде швидкість ракети за 5 секунд? До якої висоти долетить ракета?

329. Знайти швидкість руху тіла, зануреного у воду, якщо шлях його визначається з рівняння $s = \frac{g}{k} t + \frac{g}{k^2} (e^{-kt} - 1)$.

330. Тіло масою $m = 2$ кг рухається прямолінійно за законом $s = 1 + t^2$. Обчислити кінетичну енергію тіла через 3 секунди після початку руху.

331. Точка рухається по параболі $y = 8x - x^2$, причому її абсциса змінюється за законом $x = \sqrt{t}$. Знайти швидкість зміни ординати точки в момент $t = 4$ с.

332. Абсциса x точки, яка рухається по гіперболі $y = 4/x$, росте рівномірно з швидкістю 2 одиниці за секунду. Знайти швидкість зміни ординати, коли точка проходить положення (5;2).

333. Рух кинутого тіла описується рівняннями:

$$x = (v_0 \cos\varphi)\, t,$$

$$y = (v_0 \sin\varphi)\, t - \frac{g}{2} t^2,$$

де v_0 — початкова швидкість, φ — кут напрямку кидання з горизонтом, t — час. Знайти компоненти швидкості та саму швидкість наприкінці першої секунди, якщо $v_0 = 20$ м/с, $\varphi = 60°$. Опором повітря знехтувати.

334. В якій точці компоненти швидкості руху точки v_y та v_x, траєкторією якої є $y = 2x^2 - 4$, відносяться як 2 : 1?

335. Траєкторія руху точки задана співвідношенням $16x^2 + 9y^2 = 400$. В якій точці компоненти швидкості мають однакові величини, але протилежного знака?

336. Судно рухається зі швидкістю 8 км/год і кидає кітв Глибина води 1 км. Кітва дістає дна, а мотуз іде від неї до суд по прямій. Як швидко скочується мотуз тоді, коли його довжи під водою буде 2 км?

337. Кінець мотуза, перекинутого через блок радіуса a, рухається зі швидкістю v по прямій, що проходить через цен блока, перпендикулярно до його осі. Знайти кутову швидкіс обертання блока, якщо мотуз утворює з прямою кут φ.

338. Два вали обертаються так, що кут повороту першо задається формулою $\alpha_1 = \frac{t^3}{3} + 15t^2 - 4$ (у радіанах і секундах), другого $\alpha_2 = \frac{1}{4}t^2$ (у градусах і хвилинах). Який вал обертаєть швидше і на скільки наприкінці першої хвилини?

339. Знайти швидкість обертового руху, якщо його рівнянн описується системою: $x = r\cos(\omega t + \varphi)$,

$$y = r\sin(\omega t + \varphi),$$

де r, ω і φ — сталі величини.

340. Кут, на який повертається загальмоване колесо, задається формулою $\theta = a + bt - ct^2$, $a, b, c = \text{const}$. Величина тертя між колесом та гальмом є незмінною. Визначити кутову швидкість колеса в момент t та коли колесо зупиниться.

341. Точка рухається по спіралі Архімеда $r = 10\varphi$ так, що кутова швидкість обертання її полярного радіуса стала та дорівнює 6° за секунду. Визначити швидкість видовження радіус r.

342. Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с. Обчислити швидкість зміни об'єму та поверхні кулі в момент, коли його радіус дорівнює 50 см.

343. Одна сторона прямокутника має сталу величину $a = 5$ см, а друга b зростає зі сталою швидкістю 2 см/с. З якою швидкіст ростуть діагональ прямокутника та його площа в момент, кол $b = 24$ см?

344. Тягар причеплений на пружині в стані спокою в початку координат. Піднімемо тягар на висоту A, а потім відпустимо його. Тягар буде коливатись, і висота його в момент t дорівнюватиме $y = A\cos(2\pi n t)$, де A, n — сталі. Обчислити швидкість руху тягара, коли він переходить через початок координат.

345. За законом відбиття променів кути падіння та заломлення зв'язані між собою рівнянням: $\sin\alpha = n \sin\beta$, де n — показни заломлення середовища. Знайти $\frac{d\beta}{d\alpha}$.

346. Величина змінного струму є похідною від кількості електрики e по часу t. Знайти цю силу, якщо $e = A\cos\varphi t$, $A = \text{const}$.

347. Обчислити миттєвий спад напруги в провіднику, якщо магнітний потік обчислюється за формулою $\Phi = i_0 \sin \omega t \cdot k$, де i_0, ω, k — сталі.

348. Металевий стержень (густини d) має форму конуса, діаметр основи якого 1 см. Довжина стержня 50 см. Знайти лінійну густину в середині довжини стержня.

349. При нагріванні 1 кг води від 0 до $t°$ кількість тепла Q, яка поглинається, визначається за формулою $Q = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3$ ккал. Знайти теплоємність води при $t = 50°$.

350. Залежність між температурою води за Цельсієм та кількістю тепла, потрібного для нагрівання одиниці маси, задається формулою $Q = 1{,}003t + 0{,}006$. Знайти теплоємність води.

351. Об'ємна напруга газу $e = -v\dfrac{dp}{dv}$. Знайти e, якщо газ підлягає закону Бойля—Маріотта $pv = c$.

352. Вода виливається з конічної лійки (радіус основи r) зі швидкістю, пропорційною квадрату кореня з висоти h води в лійці. Знайти швидкість зменшення води, якщо твірна утворює з віссю y кут α.

353. У циліндричний бак, що має 6 дм в діаметрі, насос подає воду. Висота підняття води зростає на 1 дм за секунду. Знайти швидкість заповнення бака.

Пропонуємо розв'язати інші приклади з даної теми, які наведені у [1,2,6,9].

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Диференціал функції, як і похідна, застосовується при розв'язанні ряду практичних задач, зокрема в наближених обчисленнях.

Диференціал функції в точці. *Диференціалом* функції $y = f(x)$ в точці x називається головна (лінійна відносно Δx) частина приросту Δy (2. 2) диференційованої в точці x функції.

Диференціал дорівнює добутку похідної функції в точці x на приріст незалежної змінної, тобто

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (2.\ 19)$$

Зокрема, диференціалом dx незалежної змінної є її приріст:

$$dx = \Delta x.$$

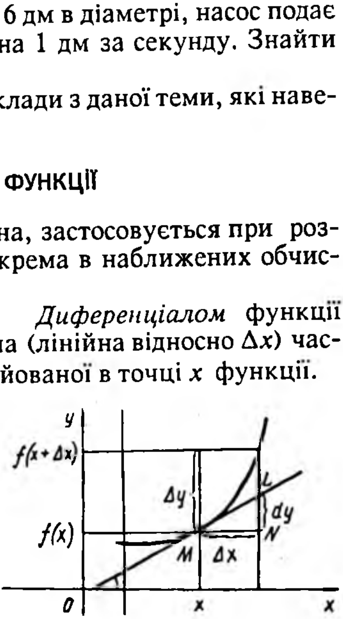


Рис.10

Геометричний зміст диференціала. Диференціал функції $y = f(x)$ дорівнює приросту LN ор-

ординати дотичної ML, яка проведена до графіка цієї функції в точці M, коли аргумент отримує приріст Δx (рис. 10).

Основні властивості диференціала. Для довільних дифере ційованих функцій $u(x)$ та $v(x)$ мають місце такі рівності:

1) $d\alpha=0 \quad (\alpha=\text{const});$

2) $d(\alpha_1 u+\alpha_2 v)=\alpha_1 du+\alpha_2 dv \quad (\alpha_1, \alpha_2$ – довільні сталі);

3) $d(uv)=udv+vdu\,;$

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}, \quad v\neq 0;$

5) $df(u)=f'(u)\,du, \quad u=u(x).$

Останню рівність називають *властивістю інваріантності форми диференціала першого порядку*, яка полягає в тому, що формула (2. 19) справедлива, коли x є не незалежною змінною, а деякою диференційованою функцією.

Застосування диференціала до наближених обчислень. При малих Δx справедлива формула

$$\Delta y\approx dy,$$

$$\text{тобто } f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (2.\,20)$$

Розглянувши основні положення з теми «Диференціал функції», розв'яжемо ряд прикладів.

Приклад 1. Знайдемо диференціал функції $y=x^2-4x$ в точці $x=3$.

Оскільки диференціал — це головна частина приросту функції в точці, знайдемо приріст даної функції в точці $x=3$, тобто

$$\Delta y=y(3+\Delta x)-y(3)=(3+\Delta x)^2-$$

$$-4(3+\Delta x)+3=2\,\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Лінійною частиною приросту є вираз $2\Delta x$. Таким чином, $dy\,|_{x=3}=2dx$. Даний вираз можна отримати, використовуючи формулу (2. 19). Обчислимо похідну функції в точці $x=3$: $y'=2x-4, \quad y'(3)=2$. Отже, $dy=2dx$.

Приклад 2. Знайдемо диференціал функції

$$y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Застосовуючи властивості диференціала функції, маємо:

$$dy=dx\sqrt{x^2-1}+xd(\sqrt{x^2-1})+d(\ln(x+\sqrt{x^2-1})).$$

За формулою (2. 19):

$$d(\sqrt{x^2-1})=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$$

$$d\ln(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx =$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Отже, $dy = \sqrt{x^2-1}\,dx + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$

$$= \frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx, \quad |x| > 1.$$

Приклад 3. Обчислимо наближено (за допомогою диференціала) значення функції $y = 1/\sqrt{2x+1}$ в точці $x = 1{,}58$.

У формулі (2. 20) покладемо $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}42$.

Тоді $y(x) \approx y(2) + y'(2)\cdot(-0{,}42)$,

але $y(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = -\frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$, $y'(2) = -\frac{1}{5\sqrt{5}}$.

Отже, $y(x) \approx \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\cdot 0{,}42 \approx 0{,}485.$

Приклад 4. Знайдемо, наскільки зміниться довжина ребра куба, якщо об'єм його зменшиться з 64 до 63,98 м^3.

Якщо x — об'єм куба, а y — його ребро, тоді $y = \sqrt[3]{x}$.

За умовою задачі $x_0 = 64$, $\Delta x = -0{,}02$. Приріст Δy сторони куба обчислюємо наближено:

$\Delta y \approx dy = \frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}\cdot(-0{,}02) \approx -0{,}0004166$, тобто ребро куба зменшиться на 0,004166 м.

Для кращого засвоєння техніки обчислення диференціала та його застосування в наближених обчисленнях пропонуємо розв'язати самостійно задачі, що наведені нижче.

354. Знайти приріст та диференціал функції $y = x^2 - 3x + 4$ при зміні аргумента від $x = 3$ до $x + \Delta x = 3{,}001$.

355. Обчислити приріст та диференціал функції $y = \frac{1}{x-3}$ при $x = 1$ та $x + \Delta x = 0{,}97$.

356. Знайти приріст та диференціал функції $y = x^4 + 4x$, якщо $x = 1$, $\Delta x = 0{,}001$. Порівняти їх.

357. Незалежна змінна функції $f(x)$ отримала приріст $\Delta x = 0{,}4$, відповідна головна частина приросту функції виявилася рівною 0,8. Знайти значення похідної в точці x.

358. Диференціал функції $y = x^2 + 4$ в деякій точці, який відповідає приросту незалежної змінної $\Delta x = 0{,}03$, дорівнює $-0{,}12$. Знайти початкове значення незалежної змінної.

359. Задана функція $y = x^4 - 4x$. Визначити порядок нескінченно малої $\Delta y - dy$ при $\Delta x \to 0$.

360. При якому значенні x диференціал функції $y = x^3 - 2$ не еквівалентний приросту цієї функції при $\Delta x \to 0$?

361. При яких значеннях x диференціал функції $y = \cos x$ при $\Delta x \to 0$ не є еквівалентним її приросту?

Знайти диференціали функцій, використовуючи формулу (2.19):

362. $y = 4x^3 + 2x^2 + x - 1.$

363. $y = x^5 + x^2 - \frac{1}{x}.$

364. $y = 2x^{4/3} - 3x^{3/2} + 4x - 1.$

365. $y = \sqrt[3]{1 + x^2}\,.$

366. $y = (1 - x^2)^3.$

367. $u = \frac{v}{\sqrt{1 + v^2}}\,.$

368. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}\,.$

369. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 2x - \operatorname{tg} 2x.$

370. $y = \ln x^2 + \ln\sqrt{x}.$

371. $y = e^{\sin 4x}\,.$

372. $s = e^t(\sin t - \cos t).$

373. $r = \varphi\cos\varphi - \sin\varphi.$

374. $y = \arcsin\frac{x + 1}{\sqrt{3}}.$

375. $y = \operatorname{arctg} e^{2x}.$

376. $y = x^{\cos x}\,.$

377. $y = x^{x^2}.$

Застосовуючи властивості диференціала, обчислити диференціали функцій:

378. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,.$

379. $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x + \sqrt{x}}\,.$

380. $y = 4\sqrt[4]{x}\,(1 - 2\ln x).$

381. $y = \ln(\sqrt{2\cos x - 1} + \sqrt{1 + 2\cos x}).$

382. $y = \left(\frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\right).$

383. $y = 2\operatorname{ch}^3\left(\frac{x}{6}\right) + 3\operatorname{ch}^2\left(\frac{x}{6}\right).$

384. $y = \frac{\sin x}{4 - x^2}\,.$

Обчислити диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0:

385. $y = \frac{1}{x^3} - \ln\frac{x-3}{x^3}$, $x_0 = 1$. 386. $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\ln x}$, $x_0 = e$.

387. $y = \frac{\sqrt[5]{2x-1}\sqrt{3+2x}}{(4x+5)^2\sqrt[3]{1-3x}}$, $x_0 = 0$. 388. $y = \frac{x^3 3^x}{x^x}$, $x_0 = 1$.

Знайти диференціали функцій, заданих неявно, в точці $M_0(x_0; y_0)$:

389. $(x+y)^2(2x+y)^3 = 1$, $M_0\,(2; -3)$.

390. $x^4 + y^4 + 6x^2 - 4y - 33 = 0$, $M_0\,(1; 2)$.

391. $2(1+xy) - \sqrt{xy^2+2} = 0$, $M_0\,(1/2; 2)$.

392. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $M_0\,(1; 0)$.

Знайти диференціали функцій, заданих параметрично, в точці $M_0\,(x_0; y_0)$:

393. $x = t^2\,(t-1)$, $y = t^2\,(t-2)$, $M_0\,(4; 0)$.

394. $x = \frac{e^t}{2t-1/3}$, $y = (t+1)^2\,e^t$, $M_0\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{e}};\ \frac{4}{9\sqrt[3]{e}}\right)$.

395. $x = \operatorname{arctg}t$, $y = \frac{1}{1+t^2}$, $M_0\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

396. Знайти в точці M_0 (0; 2) диференціал функції $y = f\,(x)$, заданої в полярній системі координат рівнянням $r = 2(1+\cos\varphi)$, $0 < \varphi < \pi$.

Обчислити наближено за допомогою диференціала значення функції $y = f\,(x)$ в точці x, якщо:

397. $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}07$.

398. $y = \cos x$, $x = 44°$.

399. $y = \operatorname{tg}x$, $x = 46°$.

400. $y = \arccos x$, $x = 0{,}02$.

401. $y = \operatorname{arctg}x$, $x = 0{,}96$.

402. $y = e^{1-x^2}$, $x = 1{,}03$.

403. Довести, що для всіх $|\Delta x|$, малих порівняно з x, має місце наближена формула: $\sqrt[n]{x+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}\Delta x$, $x > 0$.

За допомогою цієї формули наближено обчислити: 1) $\sqrt{17}$; 2) $\sqrt[3]{68}$; 3) $\sqrt[5]{37}$.

404. Знайти збільшення площі кола, якщо його радіус $r = 10$ см збільшити на 0,3 см.

405. Циліндрична труба заповнена водою. Зваживши воду, знайшли після того площу поперечного перерізу s, а отже, і радіус r. Обчислити похибку в знайденій довжині радіуса, коли $r = 0{,}5$ см, а похибка в площі перерізу 0,1 см^2.

406. При вимірюванні з точністю до 0,005 м знайдено, що сторона квадрата дорівнює 5,2 м. Знайти абсолютну та відносну похибки для площі квадрата.

407. При вимірюванні з точністю до 0,05 м знайдено ребро куба $a = 1{,}05$ м. Знайти абсолютну та відносну похибки для об'єму куба.

408. Період коливання маятника визначається формулою $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, де l – довжина маятника, g — прискорення сили тяжіння. Наскільки зміниться довжина маятника $l = 20$ см, якщо період коливання збільшити на 0,05 с?

Після розв'язання наведених прикладів розгляньте інші приклади з даної теми [6,9,16].

§ 4. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Уміння знаходити похідні вищих порядків, особливо другого, стає в пригоді при розв'язанні багатьох задач техніки. Наприклад, при знаходженні прискорення руху, найбільшого або найменшого значення функції, що важливо при виборі найоптимальніших процесів та конструкцій.

Похідні вищих порядків. Похідною другого порядку (другою похідною) функції $y = f(x)$ у точці x називається похідна від її похідної $y' = f'(x)$ при умові, що $f'(x)$ диференційована в точці x. Вона позначається такими символами: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$, f''_{xx}, f''_{x^2}. Аналогічно визначається похідна n-го порядку функції $y = f(x)$, яка має $(n - 1)$ похідну в точці x:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in \mathrm{N}.$$

Функцію, для якої існує n-а похідна в точці x, називають n разів диференційованою в цій точці.

При обчисленні похідних вищих порядків часто використовують такі основні формули:

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (a > 0, \ \ a \neq 1); \tag{2.21}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x;$$

$$(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right); \qquad (2.22)$$

$$(\cos \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$((ax + b)^{\alpha})^{(n)} = a^n \alpha (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1)(ax + b)^{\alpha - n}; \qquad (2.23)$$

зокрема,

$$\left(\frac{1}{x \pm a}\right)^{(n)} = (-1)^{(n)} \frac{n!}{(x \pm a)^{n+1}}; \qquad (2.24)$$

$$(\log_{\alpha} | x |)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n \ln \alpha};$$

$$(2.25)$$

$$(\ln | x |)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}.$$

Основні правила обчислення похідних. Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ n разів диференційовані, тоді мають місце такі рівності:

1) $(\alpha_1 u + \alpha_2 v)^{(n)} = \alpha_1 u^{(n)} + \alpha_2 v^{(n)}$ (α_1, α_2 — сталі);

2) $(uv)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$, (*формула Лейбніца*), (2.26)

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $0! = 1$.

Обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично. Якщо функція задана параметрично рівняннями $x = (t)$, $y = y(t)$, тоді похідні $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ обчислюються за формулами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_t'}{x_t'}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_t'}{x_t'} \text{ і т.д.} \qquad (2.27)$$

Для похідної другого порядку має місце формула:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{(x'(t))^2} = \frac{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}}{(x'(t))^2}.$$

Диференціали вищих порядків. Диференціалом другого п рядку двічі диференційованої функції $y = f(x)$ називають дифе ренціал від диференціала першого порядку функції $f(x)$, тобт $d^2y = d(dy)$. У випадку, коли x — незалежна змінна, диферен ціали обчислюються за формулами:

$$d^2y = y''(dx)^2,$$

$$d^3y = y'''(dx)^3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Якщо ж x — деяка функція від t, $x = x(t)$, тоді

$$d^2y = y''_{xx}(dx)^2 + y'_x d^2x,$$

$$d^3y = y'''(dx)^3 + 3y''_{xx} dx\, d^2x + y'd^3x \text{ і т.д.}$$

Якщо для функцій $u(x)$ та $v(x)$ x — незалежна змінна, існу ють диференціали d^nu та d^nv, тоді

$$d^n(\alpha_1u + \alpha_2v) = \alpha_1d^nu + \alpha_2d^nv \qquad (\alpha_1, \alpha_2 \text{ — сталі}),$$

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u\, d^kv.$$

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Знайдемо похідну другого порядку функції $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2+1})$.

Знаходимо спочатку першу похідну від складеної функції:

$$y' = \frac{1}{1 + (x + \sqrt{x^2+1})^2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{(2x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + 2)\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)(\sqrt{x^2+1} + x)} = \frac{1}{2(x^2+1)}.$$

Тоді друга похідна дорівнює:

$$y'' = (y')' = \left(\frac{1}{2(x^2+1)}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Приклад 2. Знайдемо диференціал другого порядку функці $y = x\sqrt{x-3}$ в точці $x_0 = 12$.

Згідно з формулою для обчислення диференціала другого порядку $d^2y = y''(dx)^2$ обчислимо y'':

$$y' = x'\sqrt{x-3} + x(\sqrt{x-3})' = \sqrt{x-3} + \frac{x}{2\sqrt{x-3}} = \frac{3(x-2)}{2\sqrt{x-3}};$$

$$y'' = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{x-2}{2\sqrt{(x-3)^3}}\right) = \frac{3(2(x-3)-x+2)}{4\sqrt{(x-3)^3}} =$$

$$= \frac{3(x-4)}{4\sqrt{(x-3)^3}}.$$

Тоді $y''(x_0) = y''(12) = \dfrac{3\cdot 8}{4\cdot 27} = \dfrac{2}{9}$.

Отже, $d^2y(x_0) = \dfrac{2}{9}(dx)^2$.

Приклад 3. Знайдемо похідну четвертого порядку $y^{(4)}$ функції $y = (x^3+2)e^{4x+3}$.

Функція y є добутком двох функцій. Застосуємо формулу Лейбніца для знаходження похідної четвертого порядку. У формулі (2.26) покладемо $u = e^{4x+3}$, $v = x^3+2$, тоді

$$y^{(4)} = (e^{4x+3})^{(4)}(x^3+2) + 4(e^{4x+3})'''(x^3+2)' +$$

$$+ 6(e^{4x+3})''(x^3+2)'' + 4(e^{4x+3})'(x^3+2)''' + e^{4x+3}(x^3+2)^{(4)}.$$

Оскільки

$(x^3+2)' = 3x^2$, $(x^3+2)'' = 6x$, $(x^3+2)''' = 6$, $(x^3+2)^{(4)} = 0$; $(e^{4x+3})^{(k)} = 4^k e^{4x+3}$; $k = 1, 2, 3, 4$,

тому

$$y^{(4)} = 256e^{4x+3}(x^3+2) + 256e^{4x+3}3x^2 + 6\cdot 16e^{4x+3}\cdot 6x +$$

$$+ 4\cdot 4e^{4x+3}\cdot 6 + 0 = 32e^{4x+3}(8x^3+24x^2+18x+19).$$

Приклад 4. Знайдемо похідну n-го порядку функції $y = \dfrac{1}{x^2+5x+6}$.

Перетворимо вираз: $y = \dfrac{1}{x^2+5x+6} = \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3}$. За формулою (2.24) маємо:

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+3}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^{(n)}n!}{(x+2)^{n+1}} - \frac{(-1)^{)n)}n!}{(x+3)^{n+1}} =$$

$$= (-1)^n \cdot n! \cdot \left(\frac{1}{(x+2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right).$$

Приклад 5. Знайдемо похідну n-го порядку функції $y(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+4}$ в точці $x = 0$.

Запишемо функцію у вигляді $y(x)(x^2 - x + 4) = 2x - 1$. Застосовуючи формулу Лейбніца, продиференціюємо дану тотожність n разів ($n \geq 2$):

$$y^{(n)}(x)(x^2 - x + 4) + ny^{(n-1)}(2x-1) + \frac{n(n-1)}{2}y^{(n-2)} \cdot 2 = 0,$$

звідки при $x = 0$ отримаємо рекурентне співвідношення:

$$4y^{(n)}(0) - ny^{(n-1)}(0) + n(n-1)y^{(n-2)}(0) = 0$$

або $y^{(n)}(0) = \dfrac{n}{4}(y^{(n-1)}(0) - (n-1)y^{(n-2)}(0)).$

За цією формулою знайдемо $y''(0)$ ($y(0), y'(0)$ знаходимо безпосередньо):

$$y(0) = -\frac{1}{4}, \quad y'(0) = -\left.\frac{2x^2 - 2x - 7}{(x^2 - x + 4)^2}\right|_{x=0} = \frac{7}{16};$$

$$y''(0) = \frac{2}{4}\left((y'(0) - (2-1)y(0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{16} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11}{32}.$$

При $n = 3,4,...$ обчислюємо значення похідних вищих порядків в точці $x = 0$.

Приклад 6. Знайдемо $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ у випадку, коли функція задана неявно рівнянням $y = x + \ln y$.

Диференціюємо ліву та праву частини рівняння, маючи на увазі, що y є функція від x: $y' = 1 + \dfrac{1}{y}y'$.

Звідси $y'\left(1 - \dfrac{1}{y}\right) = 1$, тобто $y' = \dfrac{y}{y-1}$.

Тому $y'' = \dfrac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = \dfrac{-y'}{(y-1)^2}$.

Підставляючи замість y' відповідне значення, знаходимо:

$$y'' = -\frac{y}{(y-1)^3} = \frac{y}{(1-y)^3}.$$

Приклад 7. Знайдемо $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції, яка задана параметрично рівняннями: $x = \ln t$, $y = \operatorname{arctg} t$.

За правилами диференціювання функції, заданої параметрично, маємо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t}{1+t^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1+t^2-2t^2}{(1+t^2)^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}.$$

Користуючись розібраними прикладами, пропонуємо розв'язати самостійно задачі, які наведено нижче.

Знайти похідні другого порядку функцій:

409. $y = (x^2 - 1)^2$.

410. $y = x^3 - 2x + \frac{1}{x^8}$.

411. $y = \frac{x^2}{x+1}$.

412. $y = \frac{(1 + 2\sqrt{1+x^2})\,x}{\sqrt{1+x^2}}$.

413. $y = e^x \sin x$.

414. $y = x^2\, 2^x$.

415. $y = e^x\, x$.

416. $y = \ln \sin x$.

417. $y = \sin^2 x$.

418. $y = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

419. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

420. $y = \ln \sqrt{1+x^3}$.

421. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

422. $y = x^x$.

Знайти похідну другого порядку в точці x_0:

423. $y = \frac{1-x}{1+x}$, $x_0 = -5$.

424. $y = \ln(x + \sqrt{4+x^2})$, $x_0 = \sqrt{5}$.

425. $y = (\arcsin x)^2$, $x_0 = 0$.

426. $y = e^{\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 27$.

Перевірити, чи задовольняє функція $y = y(x)$ задане рівняння:

427. $y = \frac{1}{12}(x-1)^3 + 3$, $y''^2 = y'$.

428. $y = \ln x - \frac{1}{4}x^2$, $xy'' + y' + x = 0$.

429. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x + 3\ln x$, $x^2 y'' + xy' = 1$.

430. $y = e^{-3x}\cos 2x + e^{-3x}\sin 2x$, $y'' + 6y' + 13 = 0$.

431. $y = 3e^{-x} - e^{3x}$, $y'' - 2y' - 3 = 0$.

432. $y = \left(1 + e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right)e^{4x}$, $y'' - 9y' + 20y = e^{6x}$.

433. $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$, $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$.

434 $y = e^{10\arccos x}$, $(1 - x^2)y'' - xy' - 100y = 0$.

435. $y = e^x + \cos e^x + 1$, $y'' - y' + e^{2x}y = 0$.

436. $y = \sin x - x\cos x$, $y'' + y = 2\sin x$.

Знайти диференціали другого порядку функцій:

437. $y = \frac{\ln x}{x}$.

438. $y = \cos x \ln x$.

439. $y = e^{-2x}(x^2 - 3x - 1)$.

440. $y = \mathrm{tg} 3x - 3x$.

441. $y = (\sin \ln x + \cos \ln x)\,x$.

442. $y = \frac{2\sin x}{1 + \cos x}$.

Знайти $y^{(n)}(x)$ для функцій:

443. $y = x^4 - 2x^3 + 3e^{2x}$.

444. $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$.

445. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

446. $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$.

447. $y = \ln(3x + 4)$.

448. $\cos^2 x$.

449. $y = \sin 2x \sin 3x$.

450. $y = \cos^2 x \cos 2x$.

451. $y = \cos^4 x + \sin^4 x$.

452. $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$.

453. $y = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$. 454. $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 5x - 14}$.

Застосовуючи формулу Лейбніца, обчислити похідні порядку для функцій:

455. $y = (x^2 + x + 4)\cos x$, $n = 10$.

456. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$, $n = 6$.

457. $y = x^2 \ln x$, $n = 10$.

458. $y = x \sin 2x \cos x$, $n = 10$.

459. $y = x \ln(x^2 - 4x + 3)$, $n = 6$.

460. $y = e^{-x}\cos x$, $n = 4$.

Знайти похідну четвертого порядку в точці $x = 0$ функцій:

461. $y = \dfrac{x + 1}{2x - 4}$. 462. $y = \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x + 7}$.

463. $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$. 464. $y = \operatorname{arcctg} x$.

Обчислити в заданій точці диференціал порядку n:

465. $y = (x - 6)^6$, $n = 4$, $x = 4$.

466. $y = (\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x - 2})^2$, $n = 8$, $x = 2$.

467. $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$, $n = 10$, $x = \dfrac{\pi}{2}$.

468. $y = \arccos x$, $n = 20$, $x = 0$.

Обчислити другі похідні функцій, які задані неявно:

469. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. 470. $y^2 - 2xy = 4$.

471. $\sec x \cos y = 2$. 472. $\ln(x + y) = x - y$.

473. $e^x + x = e^y + y$. 474. $s = 1 + t e^s$.

475. $y = \sin(x + y)$. 476. $e^{x+y} = xy$.

477. $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. 478. $e^x = (x - y)^2$.

Довести, що функція $y = f(x)$, яка задана неявно, задовольняє рівняння:

479. $y = x - \ln y$, $\quad yy'' = (y')^2(1 - y')$.

480. $2x - 1 = xe^{-\frac{y}{x}}$, $\quad x^2(xy'' - (y')^2) = y(y - 2xy')$.

Знайти похідні другого порядку $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функцій, заданих параметрично:

481. $x = 2t^3$, $\quad y = 3t^2$.

482. $x = \ln t$, $\quad y = t^2$.

483. $x = \ln(1 + t^2)$, $\quad y = \operatorname{arcctg} t$.

484. $x = 2\cos t$, $\quad y = 3\sin t$.

485. $x = \ln \sin t$, $\quad y = \ln \sin 2t$.

486. $x = \cos 2t$, $\quad y = \sin^2 t$.

487. $x = \operatorname{arcctg} t$, $\quad y = \frac{t^2}{2}$.

488. $x = e^{-2t}$, $\quad y = e^{2t}$.

489. $x = \frac{e^t}{1 + t}$, $\quad y = (t - 1)e^t$.

490. $x = 3^{\cos^2 t}$, $\quad y = 3^{\sin^2 t}$.

491. $x = \operatorname{ctg} t + t$, $\quad y = \frac{1}{\sin t}$.

Знайти $\frac{d^2x}{dy^2}$ в точці $M_0(x_0; y_0)$:

492. $x = t^2 e^{2t}$, $\quad y = e^t(t^2 + 1)$, $\quad M_0(0; 1)$.

493. $x = \frac{t^2}{t - 1}$, $\quad y = \frac{2t - t^2}{t - 1}$, $\quad M_0(4; 0)$.

494. $x = \operatorname{ch} t \cos t - \operatorname{sh} t \sin t$, $y = \operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t$, $M_0(1; 0)$.

Перевірити, чи задовольняє рівняння функція $y = y(x)$, яка задана параметрично:

495. $x = e^t \cos t$, $\quad y = e^t \sin t$, $\quad -\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{4}$,

$y''(x-y)^2 = 2(xy'-y)$.

496. $x = \sin t$, $y = 2\mathrm{sh}\sqrt{2}\,t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$,

$(1-x^2)y'' - xy' - 2y = 0$.

497. $x = 2t^2$, $y = \frac{t^3}{3} - t$, $t \neq 0$, $48y''\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + y\right) = 1 + \frac{x}{2}$.

Знайти $\frac{d^3y}{dx^3}$ для функцій, заданих параметрично:

498. $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$.

499. $x = t^{10} + 5$, $y = t^{20} - 3$.

500. $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$.

501. $x = \sin t$, $y = \sin 3t$.

502. $x = \ln \mathrm{tg}\frac{t}{2}$, $y = \cos t$.

Знайти $\frac{d^ny}{dx^n}$ для функцій, заданих параметрично рівняннями:

503. $x = 2\ln t$, $y = t^k - k$.

504. $x = 4\cos^2 t$, $y = 4\sin^2 t$.

505. $x = \frac{t}{t+3}$, $y = \frac{2t^2+3t}{(t+3)^2}$.

506. $x = e^n$, $y = e^m$.

507. $x = \cos t$, $y = \cos nt$.

508. $x = t^2 - t + 1$, $y = t^2 + t + 1$.

509. Знайти другу та третю похідні оберненої функції $x = f^{-1}(y)$ (при умові, що вона існує), якщо відомі перша $f'(x)$, друга $f''(x)$ та третя $f'''(x)$ похідні функції $y = f(x)$.

510. Знайти $f''(x)$, якщо

$$f(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \dots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

511. Закон руху точки описується рівнянням $x = \ln \mathrm{ch} t$. Знайти прискорення руху.

512. Рух ковзанця машини описується рівнянням $x = r\sin\omega t + \frac{r^2}{2l}\cos^2\omega t$. Знайти прискорення руху.

513. Рух підкинутого вгору тіла визначається рівнянням $x = (v_0\cos\varphi)t$, $y = (v_0\sin\varphi)t - \frac{gt^2}{2}$. Знайти компоненти прискорення на координатних осях та саме прискорення (опором повітря знехтувати).

514. Нехай рівняння шляху руху точки задається рівнянням $S = \sqrt{t}$. Довести, що його прискорення від'ємне та пропорційне кубу швидкості.

515. Шлях тіла, підкинутого вертикально вгору, описується рівнянням $S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Нехтуючи опором повітря, знайти його прискорення наприкінці 2-ої секунди.

516. Шлях поїзда, який вийшов від станції A, визначається рівнянням $S = t^3 + 3t^2 + 3t$. Обчислити прискорення руху наприкінці 15-ої хвилини.

517. Обчислити тангенціальне прискорення руху, яке описується рівняннями $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$.

518. Довести, що, при русі тіла за законом $S(t) = ae^t + e^{-t}$ його прискорення чисельно дорівнює шляху, який пройдений.

519. Рух однієї точки описується формулою $S_1(t) = t^3 + \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$, другої — $S_2(t) = \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$. Знайти прискорення точок в момент, коли вони мають однакову швидкість.

520. Певна хімічна реакція, наприклад гідролізу тростинного цукру, відбувається за формулою $x = A(1 - e^{-kt})$, де x — кількість отриманої речовини. Знайти прискорення реакції.

521. Кількість x молекул діоксиду вуглецю, яка утворюється за час t, описується рівнянням $x = \frac{1}{2}p\left(1 - e^{\frac{-2ct}{\gamma}}\right)$, де p, c, γ — деякі сталі, які характеризують властивості карбонату кальцію та соляної кислоти. Знайти прискорення цього процесу.

522. У паровій машині шлях ковзанця (рис.11) заданий формулою $S = \frac{3}{2}t^2 - 4,4t$. Обчислити силу, що діє на ковзанець в момент t, якщо сила дорівнює добутку маси ковзанця $m = 49{,}05$ кг на його прискорення.

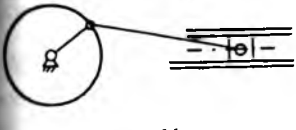


Рис.11

523. Згинальний момент тряма, що характеризує його міцність, визначається за формулою $M = EJ\frac{d^2y}{dx^2}$, де E — модуль Юнга, J — момент інерції перерізу тряма [13]. Визначити згинальний момент тряма довжиною L, закріпленого з одного боку, та навантаженого на другому кінці тягарем P, в точці закріплення, якщо рівняння тряма має вигляд:

$y = \frac{PL^3}{2EJ}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{L^3}\right)$, а $P = 100$ кг $L = 1$ м.

524. Визначити згинальний момент для середньої точки закріпленого тряма довжини L, якщо рівняння такого тряма має вигляд $y = \frac{PL^3}{24\ EJ}\left(\frac{x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right)$.

В доповнення до наведених прикладів пропонуємо також скористатись і вказаними в [3,4,9].

§ 5. ТЕОРЕМИ ПРО СЕРЕДНЄ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ

До теми «Диференціальне числення функції однієї змінної» відносяться такі важливі теореми, як теореми про середні значення Ролля, Лагранжа та Коші. Ці теореми мають велике значення для багатьох математичних питань та їх застосування до технічних задач.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умови:

1) неперервна на відрізку $[a, b]$;

2) диференційована в кожній точці інтервалу (a, b);

3) набуває однакового значення на кінцях відрізка $[a, b]$, тобто $f(a) = f(b)$.

Тоді існує хоча б одна точка $c \in (a, b)$ така, що $f'(c) = 0$.

Точку, в якій похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарною*.

Теорема Ролля рівносильна твердженню: якщо функція $f(x)$ неперервна на деякому відрізку, перетворюється в нуль на його кінцях та диференційована у всіх внутрішніх точках, тоді існує в цьому інтервалі стаціонарна точка, тобто між двома нулями диференційованої функції завжди існує нуль її похідної [8].

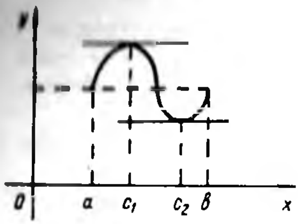


Рис.12

Геометрично умова $f'(c)$ означає, що в точці $(c, f(c))$ дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна осі Ox (рис.12).

Теорема Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційована в інтервалі (a, b), тоді існує принаймні одна точка $c \in (a, b)$ така, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \qquad (2.28)$$

Формулу (2.28) називають *формулою скінченних приростів Лагранжа.* Її записують ще в такому вигляді:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\,\Delta x\,,\ 0 < \theta < 1\,.$$

Теорема Лагранжа показує, що в інтервалі (a, b) знайдеться точка (може бути і не одна), в якій дотична до графіка функції $f(x)$ паралельна хорді AB (рис.13).

Деякі наслідки з теореми Лагранжа [8]:

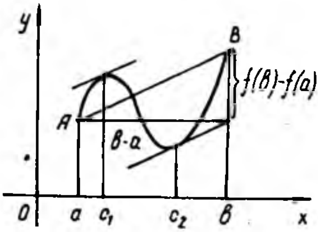


Рис.13

1) якщо функція $f(x)$ визначена на деякому проміжку, має похідну, яка дорівнює нулю у всіх внутрішніх точках, тоді функція $f(x)$ є сталою на $[a, b]$;

2) якщо функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$ диференційовані в інтервалі (a, b), $f'_1(x) = f'_2(x)$, в точках a та b функції неперервні, тоді ці функції відрізняються на сталу, тобто $f_1(x) - f_2(x) = \text{const}$.

Теорема Коші. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) неперервні на відрізку $[a, b]$;

2) диференційовані в інтервалі (a, b);

3) $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a, b)$.

Тоді існує така точка $c \in (a, b)$, що $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Геометричний зміст теореми Коші полягає в тому, що на кривій, заданій параметрично: $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, існує точка $(f(c), g(c))$, $c \in (a, b)$, в якій дотична паралельна орді, яка з'єднує початок $(f(a), g(a))$ та кінець $(f(b), g(b))$ ієї кривої [9].

Розглянемо ряд прикладів застосування наведених теорем.

Приклад 1. Перевіримо виконання теореми Ролля для функції $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$.

Функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[2, 4]$, диференційована інтервалі $(2,4)$ та перетворюється в нуль в точках $x = 2$, $x = 3$, $= 4$. Таким чином, на відрізках $[2, 3]$ та $[3, 4]$ для функції $f(x)$ иконані всі умови теореми Ролля. В інтервалі $(2, 4)$ існують ринаймні дві точки, в яких $f'(x) = 0$. Розв'язуючи рівняння $f'(x) = 3x^2 - 18x + 26 = 0$, знаходимо $x_1 = 3 - \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 3 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. чевидно, $2 \le x_1 \le 3$, $3 \le x_2 \le 4$.

Приклад 2. Доведемо, що $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$ для довільних x, y.

За формулою Лагранжа $\sin x - \sin y = \cos c\,(x - y)$, де c — де-а точка з інтервалу (x, y). Оскільки $|\cos c| \le 1$, тоді $|\sin x - \sin y| \le |x - y|$.

Приклад 3. Застосовуючи формулу Лагранжа, покажемо, що ють місце нерівності:

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \mathrm{arctg}\,y - \mathrm{arctg}\,x < \frac{y-x}{1+x^2}, \quad 0 < x < y \text{ та як наслідок}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \mathrm{arcig}\,\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

Покладемо $f(x) = \mathrm{arctg}\,x$, тоді $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Використовуючи теорему Лагранжа, маємо:

$$\frac{\mathrm{arctg}\,y - \mathrm{arctg}\,x}{y - x} = \frac{1}{1+c^2} \quad \text{для} \quad x < c < y.$$

Оскільки $c > x$ і $c < y$, тому

$$\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+x^2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+y^2}.$$

Це означає, що $\frac{1}{1+y^2} < \frac{\mathrm{arctg}\,y - \mathrm{arctg}\,x}{y - x} < \frac{1}{1+x^2}$ або

$$\frac{y-x}{1+y^2} < \mathrm{arctg}\,y - \mathrm{arctg}\,x < \frac{y-x}{1+x^2}.$$

Покладаючи $y = \frac{4}{3}$ і $x = 1$, маємо:

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{16}{9}} < \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \operatorname{arctg}1 < \frac{\frac{1}{3}}{1 + 1}$$

або $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \operatorname{arctg}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$ $\left(\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}\right)$.

Приклади, що наведено нижче, пропонується розв'язати с мостійно.

Перевірити виконання теореми Ролля для функцій:

525. $y = \sin x$.

526. $y = x^2 + 4x - 5$.

527. $y = (x - 1)(x + 2)$.

528. $y = \cos x$.

529. $y = x^2 - 5x + 6$.

530. $y = 1 - x^2$.

531. $y = x(x - 1)(x + 3)$.

532. $y = x(x + 1)(x + 2)$.

533. $y = \sin(ax + b)$.

534. Перевірити виконання умов теореми Ролля для функ $y = x^3 - 4x$ на $[-2,2]$.

535. Перевірити виконання умов теореми Ролля для функ $y = 1 - (x - 1)^{2/3}$ на $[0,2]$.

536. Перевірити правильність теореми Ролля для функ $y = |x|$ на $[-1,1]$.

537. Показати, що функція $f(x) = 4x - x^3$ на відрізках $[-2, 0]$ та $[0, 2]$ задовольняє теорему Ролля. Знайти відповідне значе ня c.

538. Показати, що функція $f(x) = x^2 - 1$ на $[-1, 1]$ задовольняє умови теореми Ролля. Знайти всі стаціонарні точки ці функції.

539. Функція $f(x) = \sqrt[3]{(x - 8)^2}$ на кінцях проміжку $[7, 9]$ набуває однакового значення $f(7) = f(9) = 1$. Чи справедлива дл даної функції теорема Ролля на відрізку $[7, 9]$?

540. Нехай $f(x) = (x - 2)(x - 1)x(x + 1)$. Показати, що рі няння $f'(x) = 0$ має три дійсних корені.

541. На інтервалах $(-1, 1)$ і $(1, 2)$ знайти точки, в яких дотична до графіка функції $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$ горизонтальна.

542. За час t точка пройшла вздовж прямої віддаль S. В початковий та кінцевий моменти часу швидкість точки дорівнює ну ю. Довести, що в деякий момент часу абсолютна величина прискорення точки була не менше $\frac{4S}{t^2}$.

543. Довести, що рівняння $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не може мати двох різних дійсних коренів на інтервалі $(0, 1)$.

544. Нехай функція $f(x)$ $(n-1)$ разів неперервно диференційована на $[x_0, x_n]$, має n-у похідну в (x_0, x_n) та $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$, де $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Довести, що існує точка $c \in (x_0, x_n)$ така, що $f^{(n)}(c) = 0$.

545. Застосовуючи теорему Ролля, показати, що похідні $F_n'(x)$, $F_n''(x)$, ..., $F_n^{(n-1)}(x)$ многочлена $F_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0, a_i$ — дійсні, $i = 0, 1, \ldots, n)$, всі корені якого дійсні, також мають лише дійсні корені.

546. Довести, що серед довільних двох дійсних коренів рівняння $e^x \sin x = 1$ існує принаймні один дійсний корінь рівняння $e^x \cos x + 1 = 0$.

Вказівка. Застосувати теорему Ролля до функції $e^{-x} - \sin x$.

547. Показати, якщо $f'(x)$ та $g'(x)$ неперервні та диференційовані на $[a, b]$, тоді для точки $c \in (a, b)$ має місце рівність

$$\frac{f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)}{g(b) - g(a) - (b-a)g'(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Вказівка. Застосувати теорему Ролля до функції

$\varphi(x) = f(x) + (b-x)f'(x) + A \cdot \{g(x) + (b-x)g'(x)\}$.

548. Довести, якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ та диференційовані в інтервалі (a, b), тоді існує значення $c: a < c < b$, для якого виконується рівність

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi'(c) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi'(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Вказівка. Застосувати теорему Ролля до функції

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(x) \\ \psi(a) & \psi(b) & \psi(x) \end{vmatrix}.$$

549. Нехай похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ існують для всіх $x \in [a, b]$, причому $g'(x) \neq 0$ на (a, b). Довести, що для деякого c, $c \in (a, b)$, має місце рівність:

$$\frac{f(c) - f(a)}{g(b) - g(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Вказівка. Застосувати теорему Ролля до функції $fg -$ $- gf(a) - fg(b)$.

Довести нерівності:

550. $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$.

551. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

552. $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$ при $x > 0$.

553. $x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ при $0 < x < 1$.

Проілюструйте ці нерівності геометрично.

554. Записавши формулу Лагранжа для функції $\sqrt{2}\, x^4 + 2x$ на відрізку $[0, 1]$, знайти на інтервалі $(0, 1)$ відповідне значення c.

555. Перевірити виконання умов теореми Лагранжа для функції $f(x) = x - x^3$ на $[-2, 1]$ та знайти відповідне проміжне значення c.

556. На дузі AB параболи $y = x^2$ знайти точку, дотична в якій паралельна хорді $AB(A(1, 1), B(3, 9))$.

557. Знайти точку c у формулі скінченних приростів Лагранжа (2.28) для функції

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

на проміжку $[0, 2]$.

558. Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені та диференційовані при $x \geq x_0$, причому $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x) > g'(x)$ при $x > x_0$. Довести, що $f(x) > g(x)$ при $x > x_0$.

559. Довести, що функція $f(x)$ монотонно зростає (монотонно спадає) на інтервалі (a, b), якщо $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на цьому інтервалі.

560. Довести, якщо функція $f(x)$ n разів диференційована при $x \geq 0$, $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, а $f^{(n)}(x) > 0$ при $x > 0$, тоді і $f(x) > 0$ при $x > 0$.

561. Нехай функція $f(x)$ двічі диференційована на $[a, b]$, $f'(a) = f'(b) = 0$. Довести, що існує така точка $c \in (a,b)$, для якої виконується нерівність $\frac{|f(b) - f(a)|}{4(b - a)^2} \leq |f''(c)|$.

562. Застосовуючи формулу Лагранжа, довести:

а) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ для довільних x, y;

б) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$ для довільних x, y;

в) $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$ при $0 < y < x$.

563. Довести нерівності, застосовуючи формулу Лагранжа:

$$\frac{x-y}{\cos^2 y} \leq \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \leq \frac{x-y}{\cos^2 x},\ 0 < y \leq x < \frac{\pi}{2}.$$

564. Довести, що всі корені многочлена Чебишева—Лагерра

$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$ додатні.

565. Довести, що всі корені многочленів Чебишева—Ерміта

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$ дійсні та лежать в інтервалі $(-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})$.

566. Довести, що всі корені многочлена Лежандра

$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$ дійсні та лежать в інтервалі $(-1, 1)$.

567. Записавши формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ і $g(x) = x^2 + 4$ на $[0, 2]$, знайти значення c.

568. Перевірити виконання умов теореми Коші на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ для функцій $f(x) = \sin x$ та $g(x) = \cos x$. Знайти відповідне проміжне значення c.

Задачі з розглянутої теми знайдете в [6,9,13].

§ 6. ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ–БЕРНУЛЛІ

Правило Лопіталя—Бернуллі є ефективним засобом знаходження границі функції при розкритті невизначеностей.

Правило Лопіталя—Бернуллі для розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$:

1) диференційовані в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;

2) функції $f(x)$ та $g(x)$ є одночасно або нескінченно малими, або нескінченно великими при $x \to x_0$;

3) існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

тоді $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ диференційовані в точці x_0 та $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$, тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Розкриття невизначеностей типу: $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

1. Невизначеність $0 \cdot \infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x)$, коли $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty)$ зводиться до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ таким чином:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}} \left(\frac{0}{0}\right) \text{ або } \frac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

2. Невизначеність $\infty - \infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$, коли $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty)$ зводиться до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Так, наприклад, зобразивши різницю функцій $f(x)$ та $g(x)$ у вигляді $f(x) - g(x) = \dfrac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$, маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

3. Невизначеності типу 1^∞, 0^0, ∞^0 зводяться до невизначеності $0 \cdot \infty$ за допомогою попереднього логарифмування та знаходження границі логарифма степеня $(f(x))^{g(x)}$ або зображуючи функцію $(f(x))^{g(x)}$ у вигляді $e^{g(x) \ln f(x)}$.

Розглянемо застосування правила Лопіталя—Бернуллі на прикладах.

Приклад 1. Обчислимо границю $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$.

Безпосередня підстановка $x = 1$ дає невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя—Бернуллі, маємо:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^5}{3x^2+2x-1}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 2. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\frac{1-1-0}{0-0}=\frac{0}{0}$, маємо невизначеність

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\frac{1+1-2}{1-1}=\frac{0}{0}$, знову невизначеність. Тому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\frac{0}{0}$, ще раз невизначеність, для уникнення якої застосовується $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$. В наведеному прикладі правило Лопіталя—Бернуллі застосовувалось тричі.

В деяких прикладах перш ніж застосовувати правило Лопіталя—Бернуллі, доцільно зробити певні перетворення.

Приклад 3. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{\arcsin^3 x}$. При $x=0$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. При використанні правила Лопіталя—Бернуллі в знаменнику отримаємо громіздкий вираз. Тому спочатку пригадаємо, що при $x\to 0$ $\arcsin x\sim x$, а, отже, $\arcsin^3 x\sim x^3$, коли $x\to 0$. Таким чином, за формулою (1.27) обчислюємо границю:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{\arcsin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}\ (x\neq 0).$$

Приклад 4. Знайдемо $\lim\limits_{x\to\pi/2}\sec 3x\cos x$.

При $x\to\pi/2$ маємо невизначеність $\infty\cdot 0$. Для розв'язання користуємося правилом Лопіталя—Бернуллі:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sec 3x\cdot\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos 3x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\sin x}{-3\sin 3x}\right)=-\frac{1}{3}.$$

Приклад 5. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

В даному випадку маємо невизначеність $\infty-\infty$. Зведемо до спільного знаменника. Маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}\right)=\frac{0}{0}.$$

Застосовуючи двічі правило Лопіталя—Бернуллі, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{xe^x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

Маємо невизначеність 0^0. Нехай $y=x^x$. Тоді $\ln y=x\ln x$. Далі маємо: $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=-0\cdot\infty$ або інакше:

$$\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=-\frac{\infty}{\infty}.$$

Застосовуючи до останнього виразу правило Лопіталя—Бернуллі, знайдемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x^x)=0$. А це означає, що $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

Приклад 7. Обчислимо $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

В даному випадку маємо невизначеність ∞^0. Запишемо функцію у вигляді $e^{\sin x\ln\frac{1}{x}}$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin x\ln\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}\frac{\sin^2 x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\cos x}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2}=e^{0\cdot 1}=1.$$

Приклад 8. Знайдемо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n}$, $a > 1$.

Для обчислення даної границі застосуємо n разів правило Лопіталя—Бернуллі. Тоді

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x(\ln a)^n}{n!} = \infty .$$

Таким чином, показникова функція a^x, $a > 1$ росте швидше довільного степеня x.

Приклад 9. Знайдемо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $x > 0$.

Застосовуючи правило Лопіталя—Бернуллі, дістанемо:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xnx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = 0 .$$

Отже, логарифмічна функція $\ln x$ росте повільніше будь-якого додатного степеня x.

Приклад 10. Обчислимо $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x}$.

При $x\to\infty$ маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Знайдемо границю відношення похідних чисельника та знаменника:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \cos x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} .$$

У правій частині отриманої рівності границя не існує, тому в даному випадку застосовувати правило Лопіталя—Бернуллі не можна.

Задану границю можна обчислити безпосередньо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \cos x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}\sin x}{1 - \frac{1}{x}\cos x} = 1 ,$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sin x = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cos x = 0$ як границі добутку нескінченно малої функції та обмеженої.

Наведені нижче приклади на застосування правила Лопіталя—Бернуллі розв'яжіть самостійно.

Знайти границі:

569. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

570. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^3 + 3x - 5}{x^3 - 6x^2 + 5}$.

571. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^5 - 3x^2 + 7x - 5}{x^4 - 5x + 4}$.

572. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x - 1}{x^n - 1}$.

573. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x^3 - x} - 2x}{\sqrt[5]{x^2} - 1}$.

574. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$.

575. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x e^x - 5x}{4x^2 + 7x}$.

576. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

577. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$.

578. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$.

579. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$.

580. $\lim\limits_{\varphi\to 0} \dfrac{\varphi - \arcsin\varphi}{\sin^3 \varphi}$.

581. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

582. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + \sin x - 1}{\ln (1 + x)}$.

583. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \operatorname{ch} x}{\sin x^2}$.

584. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{4\sin^2 x - 6\sin x + 2}{3\sin^2 x + 5\sin x - \frac{13}{4}}$.

585. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos (\sin x) - \cos x}{x^4}$.

586. $\lim\limits_{x\to \frac{3}{4}\pi} \dfrac{1 + \sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}{1 - 2\cos^2 x}$.

587. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin^2 x}{x\cos x - \sin x}$.

588. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{40} - 40x + 39}{x^{78} - 78x + 77}$.

589. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$.

590. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x\sin x}$.

591. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln \left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$.

592. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}\, \ln \ln x}{\sqrt[3]{2x + 5}\, \sqrt{\ln x}}$.

593. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}$.

594. $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{3 + \ln x}{2 - 3\ln \sin x}$.

595. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{x}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$. **596.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

597. $\lim\limits_{\varphi\to\frac{\pi}{2}}(\sec\varphi-\mathrm{tg}\varphi)$. **598.** $\lim\limits_{y\to 1}\left(\dfrac{y}{y-1}-\dfrac{1}{\ln y}\right)$.

599. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x\cos x}\right)$. **600.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$.

601. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$. **602.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right)$.

603. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$. **604.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\,\mathrm{arctg}x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

605. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$. **606.** $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\sin x}$.

607. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}x}$. **608.** $\lim\limits_{x\to +0}(\arcsin x)^{\mathrm{tg}x}$.

609. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x\right)^{\frac{1}{x}}$. **610.** $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

611. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$. **612.** $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

613. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **614.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{\sin 2x}$.

615. $\lim\limits_{x\to 1}(x)^{\frac{1}{x-x}}$. **616.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

617. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ch}x)^{\frac{1}{x}}$. **618.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$.

619. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$. **620.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\mathrm{arctg}x\right)^{x}$.

Показати, що при знаходженні границь, які наведено нижче, не можна застосовувати правило Лопіталя—Бернуллі. Знайти ці границі:

621. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$. **622.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

623. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\sin^2 x}$.

Крім наведених вище прикладів, пропонується ще розв'язати й інші [3, 4, 9, 16].

§ 7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Для дослідження функції (знаходження границі функції, значення функції тощо) в ряді випадків зручно також скористатись формулою Тейлора.

Формула Тейлора для функції $f(x)$, яка визначена в околі точки x_0, має неперервні похідні до $(n-1)$-го порядку виключно в цьому околі та похідну $f^{(n)}$, має вигляд:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+r_{n+1}(x),$$

або

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_{n+1}(x), \qquad (2.29)$$

де $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ називають многочленом Тейлора, $r_{n+1}(x)$— залишковим членом формули Тейлора.

Залишковий член записують у різних формах, наприклад:

а) форма Пеано

$$r_{n+1}(x)=o((x-x_0)^n;$$

б) форма Лагранжа

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ 0<\theta<1;$$

в) форма Коші

$$r_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},$$

$0<\theta<1$.

При $x_0=0$ формула (2.29) набуває вигляду

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^{k}+o(x^{n})\ \ (\textit{формула Маклорена}). \qquad (2.30)$$

Якщо функція $f(x)$ в околі точки $x_0=0$ нескінченно диференційована (має похідні всіх порядків), тоді формула Маклорена (2.30) набуває вигляду:

1) коли f — парна функція —

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}\,x^{2k}+o(x^{2k+1}) \quad \text{для всіх натуральних } n;$$

2) коли f — непарна функція

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}\,x^{2k+1}+o(x^{2n+2}) \ \text{для всіх } n\in\mathrm{N}.$$

При розв'язанні задач застосовують ряд формул розкладу основних елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+r_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k}}{k!}+r_{n+1}(x); \qquad (2.31)$$

$$\mathrm{sh}x=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+1}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r_{2n+1}(x); \qquad (2.32)$$

$$\mathrm{ch}x=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n+2}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r_{2n+2}(x); \qquad (2.33)$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r_{2n+1}(x)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r_{2n+1}(x); \qquad (2.34)$$

$$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r_{2n+2}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}x^{2k}}{(2k)!}+r_{2n+2}(x); \qquad (2.35)$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!}+$$

$$+ r_{n+1}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + r_{n+1}(x)\,; \qquad (2.36)$$

зокрема
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + r_{n+1}(x)\,, \qquad (2.37)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + r_{n+1}(x)\,, \qquad (2.38)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{2^k\, k!} x^k + r_{n+1}(x)\,, \qquad (2.39)$$

де $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_{n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + r_{n+1}(x)\,; \qquad (2.40)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + r_{n+1}(x) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + r_{n+1}(x)\,. \qquad (2.41)$$

Розглянемо ряд прикладів на застосування формули Тейлора.

Приклад 1. Розкладемо за формулою Маклорена до $o(x^n)$ функцію $f(x) = \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Оскільки
$f^{(k)}(x) = 3^k \cos\left(3x + \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)$ і $f^{(k)}(0) = 3^k \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right)$,
тоді за формулою (2.30) маємо

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} \cos\frac{\pi}{6}(3k+1)\; x^k + o(x^n)\,.$$

Приклад 2. Перед розв'язанням другого прикладу зауважимо: якщо відомо розклад функції $f(x)$ за формулою Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\,, \text{ тоді } f(bx) = \sum_{k=0}^{n} b^k a_k x^k + o(x^n)\,.$$

Використовуючи дану формулу, розкладемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{3x-5}$ за степенями x.

Зобразимо функцію $f(x)$ у вигляді $\dfrac{1}{3x-5} = -\dfrac{1}{5\left(1-\dfrac{3}{5}x\right)}$.

Тоді, застосовуючи формулу (2.38), дістанемо:

$$\frac{1}{3x-5} = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^{k} x^{k} + o\left(x^{n}\right).$$

Приклад 3. Розкладемо функцію $\ln\dfrac{2+3x}{4-9x}$ за степенями x.

З рівності

$$\ln\frac{2+3x}{4-9x} = \ln(2+3x) - \ln(4-9x) = \ln 2\left(1+\frac{3}{2}x\right) -$$

$$-\ln 4\left(1-\frac{9}{4}x\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{3}{2}x\right) - \ln 4 - \ln\left(1-\frac{9}{4}x\right)$$

та формул (2.40), (2.41) випливає:

$$\ln\frac{2+3x}{4-9x} = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{k} x^{k} - \ln 4 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{9}{4}\right)^{k} \times$$

$$\times\, x^{k} + o\left(x^{n}\right) = \ln\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^{k}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{k} + (-1)^{k-1}\right)\frac{x^{k}}{k} + o\left(x^{n}\right).$$

Приклад 4. Розкладемо за формулою Маклорена функцію $f(x) = \dfrac{4}{16+x^{2}}$.

Зобразивши функцію у вигляді

$$\frac{4}{16+x^{2}} = \frac{1}{4\left(1+\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2}\right)},$$

підставимо замість x у формулі (2.37) $\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2}$. Тоді

$$\frac{4}{16+x^{2}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\left(\frac{x}{4}\right)^{2k} + o\left(x^{n}\right).$$

Приклад 5. При розкладі за формулою Маклорена раціонального дробу цей дріб розкладають на суму многочлена та елементарних дробів.

Для прикладу розкладемо функцію $f(x) = \dfrac{x^2+6}{x^2-x-6}$ за формулою Маклорена.

Функція $f(x)$ є неправильним раціональним дробом. Виділимо цілу частину, тобто поділимо чисельник на знаменник, тоді $f(x) = 1 + \dfrac{x+12}{x^2-x-6}$.

Перетворимо отриманий дріб:

$$\frac{x+12}{x^2-x-6} = \frac{x+12}{(x-3)(x+2)} = \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+2}.$$

Тоді

$$f(x) = 1 + \frac{3}{x-3} - \frac{2}{x+2} = 1 + \frac{3}{(-3)\left(1-\frac{x}{3}\right)} - \frac{2}{2\left(1+\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-\frac{x}{3}} - \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{2^k} + o(x^n) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k} + \frac{(-1)^k}{2^k}\right)x^k + o(x^n) =$$

$$= \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3^k} + \frac{(-1)^k}{2^k}\right)x^k + o(x^n).$$

Приклад 6. При розкладі добутку тригонометричних функцій за формулою Маклорена цей добуток доцільно зобразити у вигляді суми тригонометричних функцій.

Наприклад, розкладемо функцію $\cos^2 x$ за формулою Маклорена.

З рівності $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ та розкладу (2.35) маємо:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right) + o(x^{2n+1}) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

Приклад 7. Якщо функція $f(x)$ є частка двох функцій $f_1(x)/f_2(x)$, розклади яких за формулою Маклорена легко знайти, наприклад:

$$f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n), \quad f_2(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n),$$

тоді розклад функції $f(x)$ шукаємо у вигляді:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n),$$

де коефіцієнти a_k — невідомі. Їх знаходять з системи алгебраїчних рівнянь, яка отримується в результаті прирівнювання коефіцієнтів при x^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, в лівій та правій частинах рівності:

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n)\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)\right).$$

Наприклад, розкладемо функцію tg$x$ до $o(x^5)$ за формулою Маклорена.

Оскільки tg$x$ — непарна функція, тому вона розкладається тільки за непарними степенями x, тобто

$$\operatorname{tg} x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5).$$

Використовуючи формулу $\sin x = \operatorname{tg} x \cos x$ та розклади (2.34) і (2.35), дістанемо:

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) =$$

$$= \left(a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + o(x^5)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^1 & 1 = a_1; \\
x^3 & -\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{2!} + a_3; \\
x^5 & \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{4!} - \dfrac{a_3}{2!} + a_5.
\end{array}$$

З отриманої системи знаходимо $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{2}{15}$.

Отже, $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^5)$.

Приклад 8. Якщо відомий розклад за формулою Маклорена похідної функції $f(x)$, тобто припустимо $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, тоді розклад самої функції $f(x)$ задається формулою:

$$f(x) = f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k+1} x^{k+1} + o(x^n). \qquad (2.42)$$

Як приклад розкладемо функцію $\mathrm{arctg} x$ за формулою Маклорена до $o(x^{n+1})$.

Відомо: $(\mathrm{arctg}\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$.Функцію $\frac{1}{1+x^2}$ розкладемо за формулою Маклорена, поклавши замість x в розкладі (2.37) x^2, тобто

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Отже, за формулою (2.42) знаходимо:

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Приклад 9. Розклад функції $f(x)$ за формулою Тейлора в околі x_0 заміною $x - x_0 = t$ зводиться до розкладу функції $g(t) = f(x_0 + t)$ за формулою Маклорена.

Для прикладу розкладемо функцію $\ln(2 + x - x^2)$ в околі точки $x_0 = 1$ за формулою Тейлора, тобто розкладемо функцію за степенями $(x-1)$.

Оскільки $2 + x - x^2 = (x+1)(2-x)$, то, поклавши $x - 1 = t$, дістанемо:

$$\ln(2+x-x^2) = \ln(x+1)(2-x) = \ln(t+2)(1-t) = \ln(t+2) + $$
$$+ \ln(1-t) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) + \ln(1-t).$$

За формулами (2.40), (2.41) маємо:

$$\ln(t+2)(1-t) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{2^k k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} + o(t^n).$$

Остаточно

$$\ln(2 + x - x^2) = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{2^k} - 1 \right) \frac{(x-1)^k}{k} + o((x-1)^n).$$

Приклад 10. Знайдемо, використовуючи формулу Маклорена,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x} - x}{\sin x}.$$

Розкладемо функцію $\ln \frac{1+x}{1-x}$ за формулою Маклорена:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} +$$

$$+ o(x^n) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k-1} + 1 \right) \frac{x^k}{k} + o(x^n) = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + o(x^{2k}),$$

оскільки $(-1)^{k-1} + 1 = \begin{cases} 0, & k \text{ — парне}, \\ 2, & k \text{ — непарне}. \end{cases}$

Враховуючи, що $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, обчислюємо границю:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x} - x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \right) - x}{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = 1.$$

Приклад 11. Знайдемо $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x} \right)$.

Перетворимо функцію:

$$x^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2\sqrt[3]{x} \right) =$$

$$= x^{\frac{5}{3}} x^{\frac{1}{3}} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right) =$$

$$= x^2 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} - 2 \right).$$

Покладемо $t = \frac{1}{x}$ та застосуємо формулу (2.36). Тоді

$$\lim_{x \to \infty} x^{\frac{5}{3}} \left(\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} - 2 \sqrt[3]{x} \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(1 + t)^{\frac{1}{3}} + (1 - t)^{\frac{1}{3}} - 2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1 + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2) + 1 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}t^2 + o(t^2) - 2}{t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{- \frac{2}{9}t^2 + o(t^2)}{t^2} = - \frac{2}{9}.$$

Приклад 12. Обчислимо наближено за допомогою формули Маклорена $\cos 18°$.

Згідно з формулою Маклорена із залишковим членом у формі Лагранжа, маємо:

$$\cos 18° = \cos \frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 + r_6,$$

$$|r_6| \le \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^6.$$

Отже,

$$\cos 18° \approx 1 - \frac{\pi^2}{200} + \frac{\pi^4}{24 \cdot 10^4} \approx 1 - \frac{9{,}869604}{200} +$$

$$+ \frac{(9{,}869604)^2}{24 \cdot 10^4} \approx 1 - 0{,}049348 + 0{,}000406 \approx 0{,}951058.$$

Пропонується самостійно розв'язати наведені нижче приклади.

Розкласти функції за формулою Маклорена до $o(x^n)$:

624. 1) e^{2x+5}; 2) $\sin \left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\cos \left(\frac{x}{3} + 3\right)$; 4) $\frac{1}{1 - 3x}$;

5) $\frac{1}{2x+3}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{1+9x}}$; 7) $\ln(3+ex)$; 8) 2^{5-2x}.

625. 1) $(x+2)e^{\frac{x}{3}}$; 2) $\frac{x^3+4e^x}{e^{3x}}$; 3) $(x-2)\sqrt{1-x}$; 4) $x\ln(3x+2)$; 5) $\ln\frac{1-3x}{1+x}$; 6) $\ln\frac{4-5x}{5+4x}$; 7) $\ln(x^2-3x+2)$; 8) $\ln(3-2x-x^2)$; 9) $\ln\frac{x+3}{x^2-5x+6}$; 10) $x^2\ln\sqrt{1+x}$.

626. Розкласти раціональні дроби за формулою Маклорена:

1) $\frac{1}{(x-1)(x+3)}$; 2) $\frac{3x-2}{x-1}$; 3) $\frac{x^2+1}{4x-3}$; 4) $\frac{x^3}{x-2}$; 5) $\frac{4x+7}{x^2-5x+4}$; 6) $\frac{3x-1}{x^2-x-6}$; 7) $\frac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$; 8) $\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$.

627. Розкласти трансцендентні функції за формулою Маклорена:

1) $\operatorname{ch}\frac{x}{3}$; 2) $x\operatorname{sh}4x$; 3) $\sin^2 4x$; 4) $x\cos^2 6x$; 5) $\sin x\cos 3x$; 6) $\operatorname{ch}x\operatorname{sh}2x$; 7) $\cos^3 x\sin x$; 8) $\cos 2x\cos 4x$.

628. Розкласти функції в околі точки x_0 за формулою Тейлора:

1) $\sin(3x-2)$, $x_0=1$; 2) xe^{-x}, $x_0=-1$; 3) $\ln(3x+1)$, $x_0=\frac{1}{3}$; 4) $\ln(x^2-7x+12)$, $x_0=1$; 5) $\frac{2x-1}{x-1}$, $x_0=2$; 6) $\frac{x^2+3x}{x+1}$, $x_0=1$.

629. Знайти $f^{(k)}(0)$, якщо

1) $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$, $k=6$;

2) $f(x)=\ln(1-x^2)$, $k=31$

3) $f(x)=\frac{1}{1-x^5}$; $k=60$.

630. За допомогою формули Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа наближено обчислити (з точністю до 10^{-3}):

1) $\sqrt[3]{9}$; 2) $\sqrt[4]{90}$; 3) $\sqrt[3]{e}$; 4) cos 85°; 5) sin 72°; 6) ln1,2; 7) arctg 0,4.

631. Оцінити за допомогою формули Тейлора із залишков членом у формі Лагранжа абсолютну похибку наближених фо мул [9]:

1) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, $|x| \leq 1$;

2) $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $|x| \leq 0{,}3$;

3) $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, $|x| \leq 0{,}2$;

4) $\sqrt{1 - x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $0 \leq x \leq 0{,}1$.

Знайти границі функцій:

632. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{ch} 3x + \cos 3x - 2}{x^4}$.

633. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-\operatorname{arctg} x + \arcsin x}{x^2}$.

634. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt[3]{1 + x} - 2\sqrt[4]{1 - x}}{x}$.

635. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 2x} - 1}{\sqrt[4]{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$.

636. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - \sqrt{1 + 2x}}{\ln \cos x}$.

637. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3\cos x + \arcsin x - 3\sqrt[3]{1 + x}}{\ln(1 - x^2)}$.

638. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x^3) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\operatorname{arctg} x^3}$.

639. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1 - x^2}}{\sin x - x}$.

640. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)\cos x - e^{\operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + 2x^2}}{x - \sin x}$.

641. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \sqrt{1 - 2x} - x}{x^2 \operatorname{tg} x - e^{-x^3} + 1}$.

642. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - \operatorname{ch} 3x - 3x}{\operatorname{tg} 3x - 3 \sin x}$.

643. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 e^{2x} + \ln(1 - x^2)}{x \cos x - \sin x}$.

644. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x\sqrt{1 + x} - 1}{\sin x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

645. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{e^x} \left(\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x - 1}\right)$.

646. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(1 - x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\right)$.

647. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x}\right)$.

648. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[5]{x^5 + x^4} - \sqrt[5]{x^5 - x^4}\right)$.

Після розв'язання наведених прикладів розгляньте інші приклади з даної теми [6,9].

§ 8. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Для дослідження функцій та побудови графіків розглянемо екстремуми функцій, опуклість та угнутість кривої, асимптоти кривої.

Екстремуми функції. Максимальне та мінімальне значення функції називають *екстремальними значеннями* цієї функції.

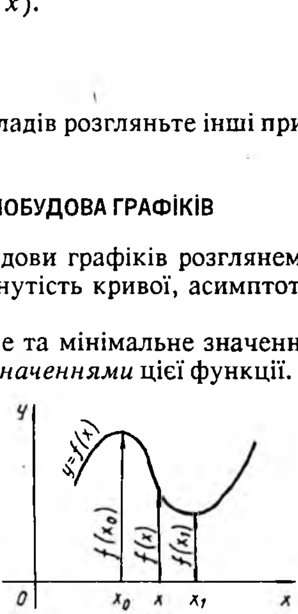


Рис. 14

Максимальним значенням функції $y=f(x)$ в точці x_0 називають таке значення функції, яке більше від усіх сусідніх значень (рис.14), тобто для всіх точок з околу точки x_0 має місце нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Мінімальним значенням функції $y=f(x)$ в точці x_1 називають таке значення функції, яке менше від усіх сусідніх значень (рис. 14), тобто для всіх точок з околу точки x_1 виконується нерівність $f(x) > f(x_1)$.

Точку, в якій функція набуває максимального або мінімал ного значення, називають *точкою локального екстремуму.*

Функція може мати екстремум лише в критичних точках, тобто у точках, в яких похідна функції дорівнює нулю або не існу (необхідна умова екстремуму).

Достатні умови екстремуму неперервної функції $f(x)$.

1. Коли в деякому околі критичної точки x_0 похідна функції змінює знак при переході через цю точку, тоді в точці x_0 функці набуває екстремального значення, причому:

а) функція має максимум в точці x_0, якщо знак похідної змінюється з плюса (при $x < x_0, f'(x) > 0$ — функція зростає) на мінус (при $x > x_0, f'(x) < 0$ — функція спадає);

б) функція має мінімум в точці x_0, якщо знак похідної змінюється з мінуса ($x < x_0, f'(x) < 0$ — функція спадає) на плю ($x > x_0, f'(x) > 0$ — функція зростає).

2. Коли в точці $x = x_0$: $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, тоді x_0 буд точкою екстремуму, причому:

а) x_0 — точка максимуму, якщо $f''(x_0) < 0$;

б) x_0 — точка мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$.

3. Коли в точці x_0: $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тоді функція $f(x)$ для парного n в точці x_0 набуває максимального значення, якщо $f^{(n)}(x_0) < 0$, або мінімального значення, якщо $f^{(n)}(x_0) > 0$; при непарному n в точці x_0 екстремуму немає.

Неперервна функція $y = f(x)$ на даному відрізку $[a, b]$ досягає найбільшого та найменшого значень або в критичних точках аргументу функції, або на кінцях відрізка $[a, b]$.

Опуклість та угнутість кривої. Точки перегину. Графік функції $y = f(x)$ може бути опуклим вгору або вниз. Графік функції $y = f(x)$ є *опуклим вгору* на проміжку (a, b), якщо відповідна дуга кривої лежить нижче дотичної, проведеної в довільній точці $M(x, f(x))$ (рис. 15).

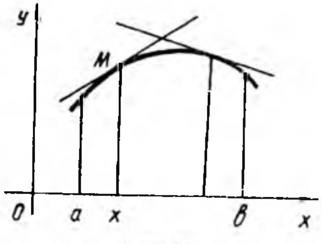


Рис. 15

Графік функції $y = f(x)$ є *опуклим вниз* на проміжку (a, b), якщо відповідна дуга кривої лежить вище дотичної, яка проведена в довільній точці $M(x, f(x))$ (рис.16).

Для дослідження графіка функції на опуклість застосовується друга похідна функції. Якщо друга похідна двічі диференційованої функції $y = f(x)$ від'ємна ($f''(x) < 0$) в інтервалі (a, b), тоді графік функції $y = f(x)$ опуклий вгору на даному проміжку, якщо друга похідна додатна ($f''(x) > 0$), тоді графік функцій опуклий вниз на (a, b).

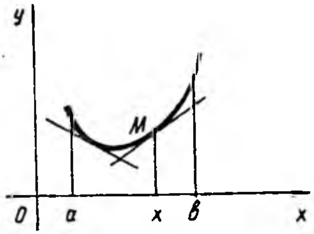


Рис. 16

Точку, при переході через яку крива змінює напрямок опуклості, називають *точкою перегину.*

Точками перегину функції $y = f(x)$ можуть бути лише точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує (необхідна умова). Такі точки називають критичними точками другого роду.

Достатні умови існування точки перегину.

1. Коли друга похідна $f''(x)$ двічі неперервно диференційованої на (a, b) функції $y = f(x)$ при переході через критичну точку другого роду x_0 змінює знак, тоді графік функції має перегин в точці $M_0(x_0, f(x_0))$.

2. Коли в точці $x_0 \in (a, b)$ тричі неперервно диференційована функція має $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, тоді точка x_0 є точкою перегину.

3. Коли в точці $x_0 \in (a, b)$: $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, тоді при непарному n точка x_0 є точкою перегину, при парному n в точці x_0 перегину немає.

Асимптота кривої. Асимптотою кривої називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Розрізняють вертикальні, похилі та горизонтальні асимптоти.

Вертикальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називають пряму $x = x_0$, коли $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ називають пряму $y = kx + b$, якщо функцію можна зобразити у вигляді $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to \pm\infty$.

Якщо існують границі

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1, \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k_1 x) = b_1;$$

або $$(2.43)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2, \quad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - k_2 x) = b_2,$$

тоді пряма $y = k_1 x + b_1$ є правою похилою асимптотою кривої $y = f(x)$, а пряма $y = k_2 x + b_2$ є лівою похилою асимптотою.

Горизонтальною асимптотою графіка функції $y=f(x)$ пр $x\to\pm\infty$ називають пряму $y=b$, коли $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b\right)$.

Якщо крива задана параметрично рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, тоді:

а) пряма $x=x_0$ буде вертикальною асимптотою, якщ $\lim\limits_{t\to t_0+0} x(t)=x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0+0} y(t)=\infty$ або $\lim\limits_{t\to t_0-0} x(t)=x_0$, $\lim\limits_{t\to t_0-0} y(t)=\infty$;

б) пряма $y=kx+b$, $k\neq 0$ буде похилою асимптотою, коли

$$\lim_{t\to t_0\pm 0} x(t)=\pm\infty,\ \lim_{t\to t_0\pm 0} y(t)=\infty,\ \text{причому}\ k=\lim_{t\to t_0\pm 0}\frac{y(t)}{x(t)},\ b=\lim_{t\to t_0\pm 0}(y(t)-kx(t));$$

в) пряма $y=b$ буде горизонтальною асимптотою, якщо $\lim\limits_{t\to t_0\pm 0} x(t)=\pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0\pm 0} y(t)=b$.

Побудова графіків. Побудову графіка функції $y=f(x)$ пропонується проводити за такою схемою.

1. Визначають область існування функції, області неперервності, точки розриву, точки перетину графіка функції з осями координат.

2. Якщо функція періодична, з періодом $T=2\omega$, тобто $f(x+2\omega)=f(x)$ для будь-якого x, тоді графік будують на відрізку $[-\omega, \omega]$, так званий базисний графік. Графік всієї функції будується на основі базисного.

3. Якщо функція парна $\left(f(-x)=f(x)\right)$ для будь-якого x або непарна $(f(-x)=-f(x))$, тоді базисний графік будують на $[0, +\infty])$, а для періодичної функції — на $[0, \omega]$. Для побудови повного графіка достатньо базисний графік симетрично відобразити відносно осі Oy у випадку парної функції або початку координат — у випадку непарної функції.

4. Знаходять асимптоти графіка функції.

5. Знаходять проміжки спадання та зростання функції, точки екстремуму.

6. Знаходять проміжки опуклості вгору та вниз, точки перегину.

7. Після виконання викладеного будують графік функції в цілому.

Розглянувши ряд основних положень стосовно дослідження функцій, розв'яжемо деякі приклади.

Приклад 1. Знайдемо проміжки зростання та спадання функції $f(x) = 16x^3 + 12x^2 - 5$.

Дана функція всюди диференційована, причому $f'(x) = 48x^2 + 24x = 24x(2x + 1)$.

Похідна $f'(x)$ перетворюється в нуль в точках $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$. Ці точки розбивають дійсну вісь на три інтервали: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $(0, +\infty)$.

Досліджуємо знак похідної на кожному інтервалі: $f'(x) > 0$, коли $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $f'(x) < 0$, коли $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $f'(x) > 0$, коли $x \in (0, +\infty)$ (рис. 17).

Таким чином, на інтервалах $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ та $(0, +\infty)$ функція зростає, а на інтервалі $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ функція спадає. Це означає, що точка $x_1 = -\frac{1}{2}$ є точкою максимуму, а точка $x_2 = 0$ — точкою мінімуму.

Зауваживши, що, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, побудуємо схематично графіік функції (рис.18).

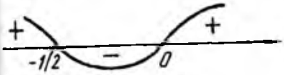


Рис. 17

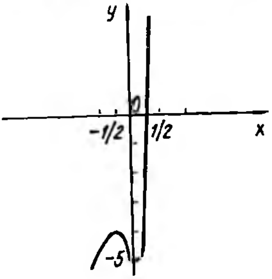


Рис. 18

Приклад 2. Дослідимо на екстремум функцію $f(x) = 3\sqrt[3]{(x + 4)^2} - 2x - 8$.

Функція $f(x)$ визначена та неперервна для всіх дійсних x.

Знаходимо першу похідну

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{(x + 4)}} - 2 = \frac{2\left(1 - \sqrt[3]{x + 4}\right)}{\sqrt[3]{(x + 4)}}.$$

Похідна перетворюється в нуль в точці $x_1 = -3$, в точці $x_2 = -4$ вона не існує. Таким чином, функція має дві критичні точки: $x_1 = -3$, $x_2 = -4$. Дослідимо характер критичних точок. Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < -4$ та $f'(x) > 0$ при $-4 < x < -3$, тому точка $x_2 = -4$ — точка мінімуму, причому $f(-4) = 0$. Дотична до графіка в точці $x_2 = -4$ збігається з прямою $x = -4$. А

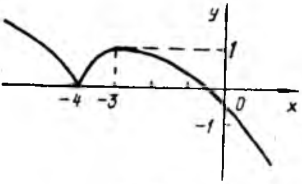


Рис. 19

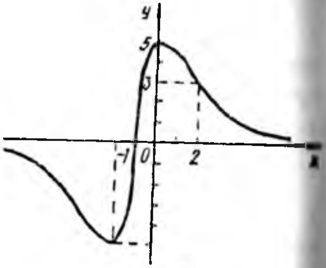


Рис. 20

при переході через точку $x_1 = -3$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тому $x_1 = -3$ — точка максимуму і $f(-3) = 1$. Будуємо графік функції (рис. 19).

Приклад 3. Знайдемо найбільше та найменше значення функції $f(x) = \dfrac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2}$ на відрізку $[-1, 2]$.

Знаходимо екстремуми функції. Для цього обчислюємо першу похідну функції

$$f'(x) = 10 \cdot \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)(x + 1)}{(x^2 + 2x + 2)^2} =$$

$$= -10 \cdot \frac{x(x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Функція має дві критичні точки $x = -2$, $x = 0$. Але точка $x = -2$ не належить відрізку $[-1, 2]$. В точці $x = 0$ функція має максимум, причому $f(0) = 5$. Обчислюємо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка: $f(-1) = 0$, $f(2) = 3$.

Таким чином, найбільше значення дана функція на відрізку $[-1, 2]$ набуває в точці $x = 0$, $f(0) = 5$, а найменше — в точці $x = -1$, $f(-1) = 0$ (рис.20).

Приклад 4. Знайдемо такі два числа, щоб їх добуток був найбільший, якщо сума цих чисел дорівнює 10.

Перед дослідженням найбільшого значення функції, в даній задачі треба ще скласти функцію. Нехай одне число x, тоді друге буде $(10 - x)$, а їх добуток $y = x(10 - x) = 10x - x^2$. Дослідимо отриману функцію на екстремум: $y' = 10 - 2x$, критичною точкою є $x = 5$. Знаходимо $y'' = -2 < 0$. Отже, точка $x = -5$ є точкою максимуму функції y. Це означає, що добуток буде максимальним, коли два числа рівні 5.

Приклад 5. Серед прямокутників з даним периметром $2p$ знайдемо той, площа якого найбільша.

Одну зі сторін шуканого прямокутника позначимо через x, тоді друга сторона дорівнює $p - x$; площа його виражається добутком $x(p - x)$. Треба визначити x так, щоб цей добуток набував найбільшого значення. Покладаючи $f(x) = x(p - x)$, знаходимо $f'(x) = p - 2x$. Похідна перетворюється в нуль при $x = \frac{p}{2}$. Оскільки $f''(x) = -2$, тобто від'ємна для всіх значень x, тому при $x = \frac{p}{2}$ функція досягає максимуму. Отже, шуканим прямокутником є квадрат◆

Приклад 6. Доведемо, що $e^x \geq 1 + x$.

Розглянемо функцію $y = e^x - 1 - x$. Досліджуємо її на екстремум. Рівняння $y' = e^x - 1 = 0$ має єдиний розв'язок $x = 0$. Оскільки $y'' = e^x > 0$, тому в точці $x = 0$ маємо мінімум, $y(0) = 0$. Таким чином, для всіх x $y(x) \geq y(0) = 0$, отже, $e^x - 1 - x \geq 0$, тобто $e^x \geq 1 + x$.

Приклад 7. Знайдемо точки перегину функції $f(x) = \frac{x}{4 + x^2}$.

Функція визначена на всій дійсній осі. Маємо $f'(x) = \frac{4 - x^2}{(4 + x^2)^2}$, $f''(x) = \frac{2x^3 - 24x}{(4 + x^2)^3}$.

З рівняння $f''(x) = 0$ матимемо три критичних точки другого порядку: $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$, $x = -2\sqrt{3}$, які ділять дійсну вісь на чотири інтервали (рис.21).

Рис. 21

При $x < -2\sqrt{3}$ $f''(x) < 0$, тобто функція на інтервалі $(-\infty, -2\sqrt{3})$ опукла вгору.

При $-2\sqrt{3} < x < 0$ $f''(x) > 0$, функція опукла вниз. При переході через точку $x = = -2\sqrt{3}$ функція змінює напрямок опуклості, тобто $x = -2\sqrt{3}$ є точкою перегину.

При $0 < x < 2\sqrt{3}$ $f''(x) < 0$, отже, функція опукла вгору, і при переході через точку $x = 0$ функція змінює напрямок опуклості. Таким чином, точка $x = 0$ є точкою перегину.

При $x > 2\sqrt{3}$ $f''(x) > 0$. Це означає, що і точка $x = 2\sqrt{3}$ є точкою перегину. Графік функції зображено на рис.22.

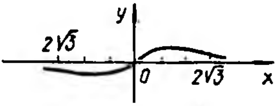


Рис. 22

Приклад 8. Дослідимо поведінку функції $y = x^2 - 2e^{x-1}$ в околі точки $x_0 = 1$ за допомогою похідних вищих порядків.

Оскільки $y' = 2x - 2e^{x-1}$, $y'(1) = 0$; $y'' = 2 - 2e^{x-1}$, $y''(1) = 0$; $y''' = -2e^{x-1}$, $y'''(1) = -2$, тому точка $x_0 = 1$ є точкою перегину ($n = 3$ — непарне число). При $x < 1$, $y'' > 0$ функція опукла вниз, коли $x > 1$, $y'' < 0$, функція опукла вгору.

Приклад 9. Знайдемо асимптоти функції $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Функція визначена і неперервна при $|x| > 1$. При $x = \pm 1$ знаменник перетворюється в нуль та $\lim\limits_{x \to +1} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, тому прямі $x = -1$, $x = 1$ є вертикальними асимптотами графіка функції.

Похилі асимптоти шукаємо за формулами (2.43). Маємо:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2 - 1}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1} \cdot (x^2 + x\sqrt{x^2 - 1})} = 0,$$

тобто $y = x$ є правою похилою асимптотою.

Аналогічно

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{y}{x} = -1, \quad b = \lim_{x \to -\infty} (y - kx) = 0,$$

тому пряма $y = -x$ також буде похилою асимптотою (лівою).

Оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} = +\infty$, тому горизонатальних асимптот немає. Графік функції схематично зображено на рис.23.

Приклад 10. Побудуємо графік функції $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.

Функція визначена та неперервна в інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(0, +\infty)$. Вісь Ox функція перетинає в точці $x = \sqrt[3]{4}$. З віссю Oy точок перетину немає. Знайдемо асимптоти графіка функції:

1) $\lim\limits_{x \to \pm 0} \frac{x^3 - 4}{x^2} = -\infty$, тобто $x = 0$ — вертикальна асимптота;

2) $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 4}{x \cdot x^2} = 1, \quad b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 4}{x^2} - x \right) =$
$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 4 - x^3}{x^2} = 0$, отже, $y = x$ — похила асимптота;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3 - 4}{x^2} = \infty$, таким чином, немає горизонтальної асимптоти.

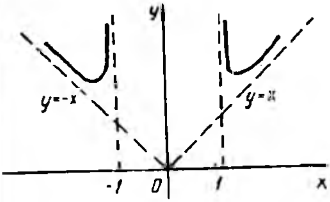


Рис. 23

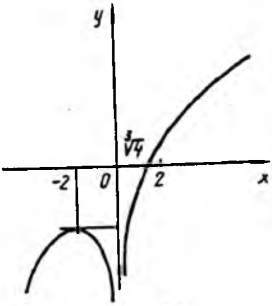


Рис. 24

Знайдемо проміжки зростання та спадання функції:
$y' = \frac{3x^4 - 2x(x^3 - 4)}{x^4} = \frac{x^3 + 8}{x^3} = 1 + \frac{8}{x^3}$; $y' = 0$ в точці $x = -2$.

Область існування розбивається на три інтервали: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$. При $x < -2$ $y' > 0$; коли $x \in (-2, 0)$ $y' < 0$; при $x > 0$ $y' > 0$. Отже, в інтервалах $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$ функція зростає, а в інтервалі $(-2, 0)$ функція спадає. При переході через точку $x = -2$ похідна змінює знак з плюса на мінус, тобто в точці $x = -2$ маємо локальний максимум, причому $y(-2) = -3$.

Визначимо напрямок опуклості графіка функції: $y'' = -\frac{24}{x^4}$, $y'' < 0$ для довільного x, тобто функція всюди опукла вгору. Точок перегину немає.

За результатами дослідження складемо таблицю, за якою будуємо графік функції (рис.24).

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y	—	-3	—	Не існує	
y'	+	0	—	Не існує	+
y''	—	—	—	Не існує	—
Висновок	Функція зростає, опукла вгору	Точка максимуму	Функція спадає, опукла вгору	Вертикальна асимптота	Функція зростає, опукла вгору

Приклад 11. Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Областю визначення функції є вся дійсна вісь. Функція періодична, $T = \pi$, тому графік функції достатньо побудувати на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Оскільки функція парна, обмежимось дослідженням її на проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Знайдемо нулі функції на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, маємо $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times$ $\times \cos 2x = 0$ при $x = k\pi$, відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ належить лише точка $x = 0$.

Розглянемо першу похідну: $y' = \sin 2x$. На проміжку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ похідна дорівнює нулю при $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{2}$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $y' > 0$, при $x < 0$ і $x > \frac{\pi}{2}$ $y' < 0$. Отже, в точці $x = 0$ функція має мінімум, $y(0) = 0$; а в точці $x = \frac{\pi}{2}$ — максимум, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Розглянемо другу похідну: $y'' = 2\cos 2x$, $y'' = 0$ при $x = \frac{\pi}{4}$. При переході через точку $x = \frac{\pi}{4}$ друга похідна змінює знак з плюса на мінус. Отже, точка $x = \frac{\pi}{4}$ є точкою перегину.

Будуємо базисний графік на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (рис.25).

Враховуючи періодичність та парність функції, будуємо графік на всій області визначення (рис.26).

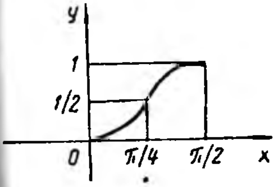


Рис. 25

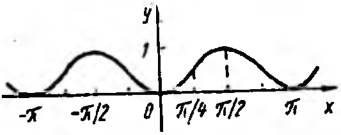


Рис. 26

Користуючись розібраними прикладами, радимо виконати самостійно вправи, що наведено нижче.

Знайти проміжки зростання та спадання функцій:

649. $y = x^2 - 4x + 4.$

650. $y = 6 - 3x^2 - x^3.$

651. $y = x^4 - 2x^2.$

652. $y = 3x^3 - 9x^2 - 27x + 30.$

653. $y = (x - 1)^2(x + 1)^3.$

654. $y = xe^x.$

655. $y = x^2e^{-x}.$

656. $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}\cdot$

657. $y = \dfrac{-5}{(x - 2)^2 + 1}\cdot$

658. $y = \sqrt{x - 1}\,(x - 2).$

659. $y = x \ln x.$

660. $y = \dfrac{x}{\ln x}\cdot$

661. $y = 3^{\frac{1}{x - 4}}.$

662. $y = \dfrac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}\cdot$

663. $y = x + \dfrac{1}{4x}\cdot$

664. $y = \arcsin (1 + x).$

665. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{4}{x^3}\cdot$

666. $y = (2^{2x} - 1)(2^x - 4)^2.$

Знайти інтервали зростання та спадання функції, заданої неявно:

667. $x^2y^2 + y = 1, \quad y > 0.$

668. $x^3y^3 = x - y, \quad x > 0.$

Знайти інтервали зростання та спадання функції, заданої параметрично:

669. $x = 2t - t^2, \quad y = 3t - t^3.$

670. $x = \dfrac{e^{-t}}{1 - t}, \quad y = \dfrac{e^t}{1 - t}, \quad t > 1.$

Знайти значення параметра a, при яких функція $f(x)$ зростає на всій числовій осі:

671. $f(x) = 3x^3 + ax + 3.$

672. $f(x) = \dfrac{a^2 - 1}{3} x^3 + (a - 1)x^2 + 2x + 4.$

673. $f(x) = 2x^3 - 3(a + 2)x^2 + 48ax + 6x - 5.$

674. $f(x) = ax + \cos x.$

675. $f(x) = ax + 4 \operatorname{arctg} 3x.$

Дослідити на екстремум раціональні функції :

676. $y = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20.$

677. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3.$

678. $y = x^4 - 2x^2 + 6.$

679. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$

680. $y = (x - 3)^2(x - 2).$

681. $y = (x - 1)^2(x - 2)^2.$

682. $y = (x - 4)^5(x + 2)^4.$

683. $y = x(x - 1)^2(x + 1)^3.$

684. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}.$

685. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$

686. $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

687. $y = 3x + \frac{1}{x^3}$.

688. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

689. $y = \frac{16}{x(4 - x^2)}$.

Знайти екстремальні значення функцій:

690. $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$. 691. $y = \sin x + \cos x$.

692. $y = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x$. 693. $y = x + \cos^2 x$.

694. $y = x - \operatorname{arctg} x$. 695. $y = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$.

696. $y = x + \operatorname{tg} x$. 697. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$.

Знайти максимальні та мінімальні значення функцій:

698. $y = xe^{-x}$. 699. $y = (x^2 - 8)e^{-x}$.

700. $y = e^x + 2\cos x + e^{-x}$. 701. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 4}{e^x}$.

702. $y = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$. 703. $y = x - \ln(1 + x)$.

704. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$. 705. $y = \ln(x^2 + 1) - 2\operatorname{arctg} x$.

Дослідити на екстремум функції:

706. $y = x^x$ $(x > 0)$. 707. $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x \geq 1)$.

708. $y = |x - 1|(x - 2)^2$. 709. $y = x\sqrt{1 + x^2}$.

710. $y = (x - 5)^2 \cdot \sqrt[3]{(x + 1)^2}$.

711. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$.

Дослідити на екстремум функції, які задані параметрично:

712. $x = \frac{1}{4}(t + 1)^2$, $y = \frac{1}{4}(t - 1)^2$.

713. $x = \dfrac{t^2}{1 - t^2}$, $y = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$.

714. $x = \ln \sin \left(\dfrac{t}{2}\right)$, $y = \ln \sin t$.

715. Брус, що вільно лежить на двох підпорах, навантажено тягарем у формі рівнораменного трикутника, вершина якого лежить на нормалі до середини бруса. Пружна лінія такого бруса має рівняння

$$y = A \frac{l^3}{180} \left(7 \frac{x}{l} - 10 \frac{x^3}{l^3} + 3 \frac{x^5}{l^5}\right),$$

де l — довжина бруса, A — стала величина. Обчислити, для якої точки прогин буде максимальним [13].

716. Пружна лінія бруса, один бік якого закріплений до стінки, а другий лежить на підпорі, має рівняння

$$y = \frac{Al^3}{48} \left(\frac{x}{l} - \frac{3x^3}{l^3} + \frac{2x^4}{l^4}\right).$$

Знайти найбільший прогин бруса.

717. Пружна лінія бруса, який навантажено рухомим зосередженим тягарем, має рівняння

$$y = A \frac{c_2^2 c_1^2}{6l} \left(2 \frac{x}{c_2} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c_1^2 c_1}\right),$$

де A, c_1, c_2 — певні сталі.

Для якого положення тягаря брус матиме максимальний прогин, якщо він вільно лежить на двох підпорах?

718. Обчислити найбільший прогин бруса, один бік якого закріплений, а до другого вільного кінця причеплено тягар P, якщо рівняння пружної сили такого бруса $y = \dfrac{A}{2} \left(lx^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)$, де l — довжина бруса.

719. Яким повинен бути кут φ похилої площини, по якій котиться кулька, щоб вона скотилась за найменший час, якщо $T = 2 \sqrt{\dfrac{a}{g \sin 2\varphi}}$?

720. Невідому величину x обчислюють декілька разів. Довести, що найімовірнішою величиною буде середнє арифметичне усіх спостережень. Найімовірнішим називають значення, сума квадратів похибок якого є найменша.

721. Обчислити максимальний згинальний момент бруса, який рівномірно навантажений в точці b (рис.27), якщо згинальний момент має рівняння $M = \frac{1}{2}\omega lx - \frac{1}{2}\omega x^2$, де l — довжина бруса, ω — навантаження на одиницю довжини. Обчислити максимум згинального моменту.

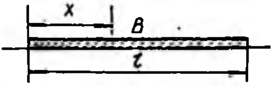


Рис. 27

722. Витрата електропровідника має рівняння $W = Ar + \frac{B}{r}$, де r — опір, A, B — сталі. Обчислити опір, при якому провідник буде найекономнішим.

723. Електричний елемент віддає енергію P, яка визначається формулою $P = \frac{E^2R}{(r + R)^2}$, де E — електрорушійна сила, r — сталий внутрішній опір, R — зовнішній опір. Обчислити максимальне значення P.

724. Сила, з якою коловий струм, що має радіус r, впливає на невеликий магніт, вісь якого збігається з віссю кола, пропорційна до $\frac{x}{\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$, де x — віддалення магніту від площі кола. Обчислити, коли сила буде максимальною.

725. Роботу динамомашини обчислюють за формулою $P = I^2R$, де величина струму $I = \frac{1}{S}\left(\frac{a}{R + r} - 1\right)$, R — зовнішній опір, r — внутрішній опір, a і S — сталі. Обчислити екстремальне значення R при $a = 1{,}2$, $r = 0{,}05$.

726. Кількість тепла Q, яке потрібне для нагрівання 1г діаманта до температури t, визначається з формули

$$Q = 0{,}0947t + 0{,}000497t^2 + 0{,}00000012t^3.$$

Обчислити температуру, при якій теплоємність Q буде максимальною.

727. Теплоємність води визначають із формули

$$C = 1 - 0{,}0006684t + 0{,}00001002t^2.$$

Обчислити мінімальну теплоємність води.

728. Газ (або пара) переходить із посудини з тиском p_0 до посудини з тиском p ($p < p_0$) через прохід S. Формула витрати

для газу пропорційна до величини $Q = S\sqrt{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{k+1}{k}}}$.

Тут k — певна стала величина (для повітря $k = 1{,}41$, для насиченої пари $k = 1{,}135$).

Визначити, для якого значення відношення $\frac{p}{p_0}$ витрата газу буде найбільшою.

729. В точках A і B розміщено два джерела тепла з напругами відповідно a і b (рис.28). Повна напруга тепла на віддалі x від A задається формулою $I = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(d - x)^2}$. Довести, що температура в точці P буде максимальною, коли $\frac{d - x}{x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$, тобто коли віддалі BP і AP відносяться як кубічні корені з відповідних напруг тепла. Віддаль P від A дорівнює $x = \frac{\sqrt[3]{a}\ d}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

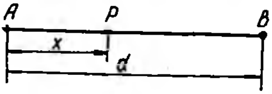


Рис. 28

Визначити найбільше та найменше значення функцій на вказаному проміжку:

730. $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 10, \quad [2, 6]$.

731. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1, \quad [0. 4]$.

732. $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3, \quad [-1, 3]$.

733. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, \quad [-5, -1]$.

734. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 16}}, \quad [-3, 3]$.

735. $y = x - 2\sqrt{x}, \quad [0, 5]$.

736. $y = \cos x + \sin x, \quad [0, 2\pi]$.

737. $y = \sin 2x - x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

738. $y = \sin x + \cos 2x, \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

739. $y = 2\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}^2 x, \quad \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$

740. $y = \mathrm{tg}\, x + \mathrm{ctg}\, 2x, \quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right].$

741. $y = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, \quad [0, \pi].$

742. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x, \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

743. $y = x + \frac{8}{x^4}, \quad [-2, -1].$

744. $y = (5 - x)2^{-x}, \quad [-1, 0].$

745. $y = 2x^2 - \ln x, \quad [1, e].$

746. При яких значеннях параметра a функція $y = ax + \frac{2}{x}$ досягає найбільше значення на правому кінці проміжку [1, 2]?

747. Для яких значень параметра b функція $y = 2x + \frac{b}{x}$ досягає мінімуму на лівому кінці проміжку [2, 3]?

748. З квадратного бляшаного аркуша (рис.29) зі стороною a, треба зробити відкритий ящик найбільшого об'єму, вирізаючи однакові квадрати на кутах, а потім загинаючи боки, як зазначено штрихом, щоб зробити боки ящика.

749. Треба виготовити циліндричний відкритий бак даної місткості. Підібрати виміри цього бака так, щоб витрати матеріалу були найменшими.

750. Брус випилюється з колового стовпа діаметром d. Міцність прямокутного бруса пропорційна до його товщини та квадрата висоти. Підібрати розміри бруса так, щоб міцність була найбільшою.

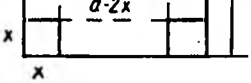


Рис. 29

751. Знайти висоту конуса максимального об'єму, який можна вписати до кулі радіуса r.

752. Знайти висоту циліндра максимального об'єму, який можна вписати до даного прямого конуса (рис.30), якщо радіус основи r, а висота h.

753. Поділити число 10 на такі дві частини, щоб сума квадрата першої з подвійною другою частиною була мінімальною.

754. Знайти таке число, щоб різниця між ним та його квадратом була максимальною.

755. Задано послідовність чисел 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, … . Яке з цих чисел найбільше?

756. Знайти висоту прямого циліндра найбільшого об'єму, який можна вписати до кулі радіуса r.

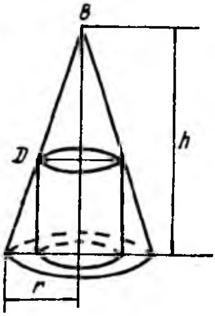


Рис. 30

757. Знайти висоту прямого циліндра з найбільшою бічною поверхнею, який можна вписати до кулі радіуса r.

758. Знайти висоту прямого конуса найменшого об'єму, який описаний навколо кулі радіуса r.

759. Через яку точку еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ треба провести дотичну, щоб площа трикутника, утвореного цією дотичною та додатними півосями $0x$ і $0y$, була найменшою?

760. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точку $A(1, 2)$ та відтинає від першого координатного кута трикутник найменшої площі.

761. Точки A і B лежать по один бік від прямої MN. Знайти на прямій MN таку точку P, щоб сума $AP + PB$ була найменшою.

762. Міцність прямокутного бруса пропорційна до його товщини та до куба висоти. Обчислити товщину бруса найбільшої міцності, який можна вирізати з колоди діаметром 16 см.

763. Знайти найекономніші розміри циліндричного парового казана об'єму V.

764. Бляхар виробляє відкритий похилий жолоб найбільшої місткості, причому ширину дна та боків бере по 10 см. Обчислити ширину жолоба вгорі, якщо боки його нахилені під однаковим кутом.

765. Енергія E, яка витрачається для переміщення пароплава, задається формулою $E = kv^3$, де k — коефіцієнт пропорційності, v — швидкість пароплава. Обчислити найоптимальнішу швидкість пароплава проти течії, якщо швидкість води c.

766. Обчислити розміри конічного шатра даної місткості, який потребує найменше матерії.

767. Вікно має форму прямокутника, замкненого півколом. Обчислити розміри цього вікна даного периметра, щоб площа його була найбільша.

768. Електричний ліхтар треба повісити прямо над центром колового майданчика радіуса R. Обчислити, на якій висоті треба повісити ліхтар, щоб він найкраще освітлював стежку на краю майданчика, якщо сила освітлення прямо пропорційна косинусу кута, під яким світло падає на освітлювальний майданчик, і обернено пропорційна квадрату віддалі від джерела світла.

769. Віддаль між двома джерелами світла інтенсивності i_1 та i_2 дорівнює l. Знайти на цій віддалі найменш освітлену точку, якщо сила освітлення обернено пропорційна квадрату віддалі від джерела світла.

770. На сторінці книги друкований текст повинен займати S см^2. Поля вгорі та внизу повинні бути по a см, а ліворуч і праворуч — по b см. Обчислити найекономніші розміри сторінки паперу.

771. Щоб зменшити тертя рідини об стінки каналу, площу, зрошувану водою, треба зробити найменшою. Знайти найкращу форму прямокутного каналу з заданим периметром профілю p.

772. Вантаж P кг тягнуть мотузом під кутом α до горизонтального напрямку. Визначити, при якому куті α зусилля для зрушення вантажу з місця буде найменшим, якщо коефіцієнт тертя вантажу з підлогою f.

773. На якій висоті $x = AB$ перпендикуляра до стола треба повісити електричну лампу, щоб найкраще освітити точку C ($BC = b$) на столі (рис.31)?

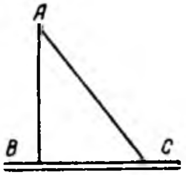


Рис. 31

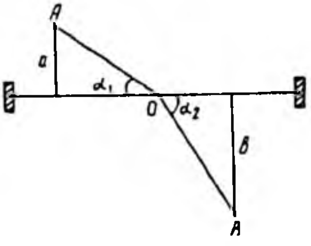


Рис. 32

774. З половини колоди, діаметр якої 40 см, треба вирізати прямокутний брус. Обчислити сторони прямокутного перерізу бруса, щоб опір на стиск був максимальним.

775. Під яким кутом треба нахилити дах, щоб дощова вода стікала якнайшвидше, починаючи рухатись від найвищого місця зі швидкістю v?

776. Два міста, відокремлені державним кордоном, треба сполучити залізницею. Поїзд їде від пункта A (рис.32) до кордону зі

швидкістю v_1, а від міста B до кордону — зі швидкістю v_2. Обчислити, де треба зробити пересадну станцію O, щоб час для проїзду від A до B був мінімальний.

777. Автомобіль виходить з A до B (рис.33) та їде зі швидкістю $v_1 = 80$ км/год. У цей же самий час поїзд виходить з B до C зі швидкістю $v_2 = 50$ км/год. Кут $ABC = \frac{\pi}{3}$, $AB = 200$ км. Знайти момент часу, в який віддаль між поїздом та автомобілем буде найменшою.

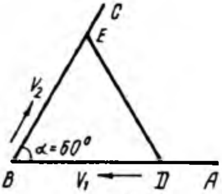


Рис. 33

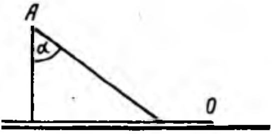


Рис. 34

778. Вантаж перевозять з A до O спочатку по шосе від A, потім залізницею (рис.34). Вартість перевезення одного тонно-кілометра по шосе дорівнює S_2, а залізницею — S_1. Яким треба вибрати кут α, щоб вартість була найменшою?

779. Підібрати найекономніші розміри відкритого циліндричного бака для води даного об'єму, якщо ціна квадратного метра матеріалу для стінки дорівнює двом третинам вартості квадратного метра матеріалу для дна.

780. Картон має форму кола радіуса 12 см. З цього картону треба зробити конічну лійку найбільшого об'єму. Обчислити радіус основи такої лійки.

781. Судно B, яке знаходиться на віддалі 75 км на схід від судна A, рухається на захід зі швидкістю 12 км/год. Судно A рухається на південь зі швидкістю 9 км/год. В який час віддаль між суднами буде найменшою?

782. В ЕОМ вводиться інформація об'ємом P біт (біт — одиниця об'єму інформації), яка обробляється за даною програмою, після чого результат виводиться на друкуючий пристрій. Визначити найменшу тривалість роботи ЕОМ на всіх трьох етапах — прийом, обробка, видача інформації, якщо відомо, що швидкість обробки інформації дорівнює C біт за секунду і в 3 рази менша сумарної швидкості введення та видачі інформації, при цьому об'єм інформації на вході та виході однаковий [14].

783. В ЕОМ вводиться певна інформація. Результати обробки її разом з інформацією, яка міститься в блоці пам'яті об'ємом C біт, надходять в обчислювальну машину з постійною швидкістю,

квадрат якої пропорційний об’єму введеної інформації. Визначити найменшу тривалість роботи обчислювальної машини по переробці інформації.

Знайти інтервали опуклості функції:

784. $y = x^2$.   785. $y = x^3$.

786. $y = x^4$.   787. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

788. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.

789. $(y - 2)^3 = x - 4$.   790. $y = \frac{1}{x - 4}$.

791. $y = \cos x$.   792. $y = \sin x - x$.

793. $y = e^{-x^2}$.   794. $y = (1 + x^2)e^x$.

795. $y = x^2 \ln x$.   796. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

Знайти точки перегину графіка функції:

797. $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.   798. $y = \sin x$.

799. $y = \operatorname{tg} x$.   800. $y = xe^x$.

801. $y = x^{\frac{8}{3}} - 4x^{\frac{5}{3}} + 3x - 1$. 802. $y = e^{\frac{1}{1 - x}}$.

803. $y = \ln x + 2x^2$.   804. $y = 5 + \sqrt[3]{(x - 5)^5}$.

805. Знайти точку перегину та визначити опуклість напівзакріпленого бруса, якщо рівняння його пружної лінії має вигляд:

$$y = A\left(\frac{x}{4l} + \frac{5x^2}{2l^2} - \frac{11x^3}{3l^3}\right),$$

де l — довжина бруса, A — стала величина.

806. Пружна лінія бруса задається рівнянням $y = \sqrt{A^2 - \left(\frac{1}{2}l - x\right)^2}$. Знайти точки перегину та напрямок опуклості бруса.

807. Знайти точки перегину рівномірно навантаженого по всій довжині бруса, якщо його вісь задається рівнянням:

$$y = A\left(\frac{x}{l} - 2\frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4}\right).$$

808. Знайти точки перегину бруса, якщо рівняння пружної лінії бруса є $y = A\,\dfrac{1 - \cos\omega x}{\cos\omega l} - Bx^2$.

809. Довести, що графік функції $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

810. Довести, що точки перегину графіка функції $y = x\sin x$ лежать на кривій $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

Знайти точки перегину графіка функції $y = f(x)$, яка задана параметрично рівняннями:

811. $x = te^t, \quad y = te^{-t}, \quad |t| < 1{,}2.$

812. $x = \dfrac{t^2}{t - 1}, \quad y = \dfrac{t^3}{t - 1}, \quad t < 1.$

Довести нерівності:

813. $\ln(1 + x) > \dfrac{x}{x + 1}, \quad x > 0.$

814. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}, \quad x > 1.$

815. $e^x > ex, \quad x \neq 1.$

816. $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}.$

817. $\operatorname{ch} x > 1 + \dfrac{x^2}{2}, \quad x \neq 0.$

818. $\operatorname{arctg} x < x, \quad x > 0.$

Знайти асимптоти графіка функції:

819. $y = \dfrac{1}{4 - x^2}.$

820. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x - 2}.$

821. $y = \dfrac{2x + 1}{16 + x^2}.$

822. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 9}.$

823. $y = \sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2}$. 824. $y = x - 3 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

825. $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$. 826. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$.

827. $y = x + \frac{x^2}{x^2 + 9}$. 828. $y = \sqrt{x^2 - 3}$.

829. $y = e^{-x^2} + 1$. 830. $y = \frac{1}{1 - e^x}$.

831. $y = e^{\frac{1}{x}}$. 832. $y = \frac{\sin x}{x}$.

Знайти асимптоти кривої, яка задана параметрично рівняннями:

833. $x = t, \quad y = t + 2 \operatorname{arctg} t$.

834. $x = \frac{t}{1 - t^2}, \quad y = \frac{t(1 - 2t^2)}{1 - t^2}$

835. $x = \frac{t^2}{1 - t^2}, \quad y = \frac{1}{1 + t^2}$.

836. $x = \frac{t^2}{t - 1}, \quad y = \frac{t}{t^2 - 1}$.

Побудувати графіки функцій:

837. $y = x^3 - 12x$. 838. $y = x^4 - 4x^2 + 5$.

839. $y = 2x^3 + 3x^2 - 6x - 4$. 840. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

841. $y = x(15 - x)^2$. 842. $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

843. $y = x(x - 2)^3$. 844. $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

845. $y = \frac{2x}{1 - x^2}$. 846. $y = 1 + \frac{4x + 1}{x^2}$.

847. $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$. 848. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

849. $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ·

850. $y = \frac{16}{x^2(x - 4)}$ ·

851. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

852. $y = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$.

853. $y = x\sqrt{x + 4}$.

854. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

855. $y = \sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x - 1}$.

856. $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$.

857. $y = \sqrt[3]{x(x - 1)^2}$.

858. $y = x\sqrt{\frac{x}{3 - x}}$ ·

859. $y = \sin x \sin 2x$.

860. $y = x + \sin x$.

861. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

862. $y = x \operatorname{arctg} x$.

863. $y = \frac{\ln x}{x}$ ·

864. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ·

865. $y = 2 \ln \frac{x - 1}{x} + 1$.

866. $y = xe^{-2x}$.

867. $y = x - \ln(x + 1)$.

868. $y = \ln \operatorname{sh} x$.

869. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ ·

870. $y = \ln \cos x$.

871. $y = \cos x - \cos^2 x$.

872. $y = \cos^3 x + \sin^3 x$.

873. $y = 8x^2 e^{-x^2}$.

874. $y = \arcsin(\sin x)$.

875. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$.

876. $y = e^{\operatorname{tg} x}$.

877. $y = x^2 - 4|x| + 3$.

878. $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$.

879. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

880. $y = \cos x - \ln \cos x$.

881. $y = 2|x| - x^2$.

882. $y = x - 2 \operatorname{arctg} x$.

883. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ ·

884. $y = \sin 2x - 2 \sin x$.

885. $y = x^x$.

886. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Побудувати графіки функцій, які задані параметрично:

887. $x = t^2 - 2t, \qquad y = t^2 + 2t$.

888. $x = 2\cos^3 t, \qquad y = 2\sin t.$

889. $x = te^t, \qquad y = te^{-t}.$

890. $x = t + e^{-t}, \qquad y = 2t + e^{-2t}.$

891. $x = \operatorname{sh} t - t, \qquad y = \operatorname{ch} t - 1.$

Побудувати криві, задані рівняннями:

892. $y^2 = x(x-3)^2.$ **893.** $y^2 = 8x^2 - x^4.$

894. $y^2 = \dfrac{x-1}{x+1}\cdot$ **895.** $y^2 = (x-1)(x-2)(x-3).$

Приклади на дослідження функцій та побудову їх графіків знайдете також у [1, 6, 9].

На закріплення даного розділу пропонуємо виконати розрахункову роботу.

РОЗРАХУНКОВА РОБОТА 2 [11]

Задача 1. За означенням похідної знайти $f'(0)$:

1. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}(x^3 + x^2 \sin(2/x)), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos\dfrac{1}{9x}\right) + \dfrac{2}{3}x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos\dfrac{1}{5x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 - \sin\left(x^3 \sin\dfrac{1}{x}\right)\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \sin\left(x \sin\dfrac{3}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln\left(1 + x^2 \sin\dfrac{1}{x}\right)^2} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

7. $$f(x) = \begin{cases} \sin\left(e^{x^2 \sin\frac{5}{x}} - 1\right) + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{4}{3x} + \frac{x^2}{2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^3 - x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

10. $$f(x) = \begin{cases} \sin x \cos\frac{5}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

11. $$f(x) = \begin{cases} x + \arcsin\left(x^2 \sin\frac{6}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

12. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(2^{x^2 \cos(1/8x)} - 1 + x\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

13. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \cdot \sin\frac{7}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

14. $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos\frac{1}{9x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

15. $$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2\frac{11}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

16. $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

17. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

18. $$f(x) = \begin{cases} 6x + x \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} e^{x \sin 5x} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

21. $f(x) = \begin{cases} 3^{x^2 \sin \frac{2}{x}} - 1 + 2x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

22. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 + \ln(1 + 3x^2 \cos(2/x))} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

23. $f(x) = \begin{cases} e^{x \sin(3/5x)} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

24. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\operatorname{tg} x} - 2^{\sin x}}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

25. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3x}{2} - x^2 \sin \dfrac{1}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

26. $f(x) = \begin{cases} e^{\sin\left(x^{3/2} \sin \frac{2}{x}\right)} - 1 + x^2, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

27. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1 - 2x^3 \sin \dfrac{5}{x}} - 1 + x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{|x|} \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

29. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1 + 2x^2 + x^3)}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Задача 2. Скласти рівняння нормалі (в варіантах 1—12) або рівняння дотичної (в варіантах 13—30) до даної кривої в точці з абсцисою x_0:

1. $y = (4x - x^2)/4, \quad x_0 = 2.$

2. $y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2.$

3. $y = x - x^3, \quad x_0 = -1.$

4. $y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32, \quad x_0 = 4.$

5. $y = x + \sqrt{x^3}, \quad x_0 = 1.$

6. $y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8.$

7. $y = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad x_0 = 4.$

8. $y = 8\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16.$

9. $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1.$

10. $y = (x^2 - 3x + 6)/x^2, \quad x_0 = 3.$

11. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64.$

12. $y = (x^3 + 2)/(x^3 - 2), \quad x_0 = 2.$

13. $y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1.$

14. $y = \dfrac{x^{20} + 6}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1.$

15. $y = 2x + 1/x, \quad x_0 = 1.$

16. $y = -2(x^8 + 2)/(3(x^4 + 1)), \quad x_0 = 1.$

17. $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1.$

18. $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, \quad x_0 = 1.$

19. $y = 3(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$

20. $y = 1/(3x + 2), \quad x_0 = 2.$

21. $y = x/(x^2 + 1), \quad x_0 = -2.$

22. $y = (x^2 - 3x + 3)/3, \quad x_0 = 3.$

23. $y = 2x/(x^2 + 1), \quad x_0 = 1.$

24. $y = -2(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$

25. $y = \dfrac{1 + 3x^2}{3 + x^2}, \quad x_0 = 1.$

26. $y = 14\sqrt{x} - 15\sqrt[3]{x} + 2, \quad x_0 = 1.$

27. $y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1.$

28. $y = (3x - 2x^3)/3, \quad x_0 = 1.$

29. $y = x^2/10 + 3, \quad x_0 = 2.$

30. $y = (x^2 - 2x - 3)/4, \quad x_0 = 4.$

Задача 3. Знайти диференціал dy функцій:

1. $y = x \arcsin (1/x) + \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|, \; x > 0.$

2. $y = \operatorname{tg} (2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2}), \; x > 0.$

3. $y = \sqrt{1 + 2x} - \ln (x + \sqrt{1 + 2x}).$

4. $y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}.$

5. $y = \arccos (1/\sqrt{1 + 2x^2}), \; x > 0.$

6. $y = x \ln |x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3}.$

7. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \ln \operatorname{ch} x.$

8. $y = \arccos ((x^2 - 1)/(x^2 \sqrt{2})).$

9. $y = \ln (\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}).$

10. $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x.$

11. $y = \dfrac{\ln |x|}{1 + x^2} - \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x^2}{1 + x^2}.$

12. $y = \ln (e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}.$

13. $y = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \arcsin (x/2).$

14. $y = \ln \operatorname{tg} (x/2) - x/\sin x.$

15. $y = 2x + \ln |\sin x + 2 \cos x|.$

16. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{3}.$

17. $y = \ln \left| \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|.$

18. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x + 2}{x - 2}}.$

19. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

20. $y = \ln |x^2 - 1| - \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

21. $y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 1\right)$.

22. $y = \ln |2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1|$.

23. $y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

24. $y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x)$.

25. $y = x(\sin \ln x - \cos \ln x)$.

26. $y = \left(\sqrt{x - 1} - \dfrac{1}{2}\right) e^{2\sqrt{x - 1}}$.

27. $y = \cos x \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

28. $y = \sqrt{3 + x^2} - x \ln |x + \sqrt{3 + x^2}|$.

29. $y = \sqrt{x} - (1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

30. $y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1 + x^2}$.

Задача 4. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

1. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7{,}76$.

2. $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1{,}012$.

3. $y = (x + \sqrt{5 - x^2})/2, \quad x = 0{,}98$.

4. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27{,}54$.

5. $y = \arcsin x, \quad x = 0{,}08$.

6. $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0{,}97$.

7. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 26{,}46$.

8. $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1{,}97$.

9. $y = x^{11}, \quad x = 1{,}021$.

10. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1{,}21.$

11. $y = x^{21}, \quad x = 0{,}998.$

12. $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1{,}03.$

13. $y = x^6, \quad x = 2{,}01.$

14. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}24.$

15. $y = x^7, \quad x = 1{,}996.$

16. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7{,}64.$

17. $y = \sqrt{4x - 1}, \quad x = 2{,}56.$

18. $y = 1/\sqrt{2x^2 + x + 1}, \quad x = 1{,}016.$

19. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}36.$

20. $y = 1/\sqrt{x}, \quad x = 4{,}16.$

21. $y = x^7, \quad x = 2{,}002.$

22. $y = \sqrt{4x - 3}, \quad x = 1{,}78.$

23. $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0{,}98.$

24. $y = x^5, \quad x = 2{,}997.$

25. $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1{,}03.$

26. $y = x^4, \quad x = 3{,}998.$

27. $y = \sqrt{1 + x + \sin x}, \quad x = 0{,}01.$

28. $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, \quad x = 0{,}01.$

29. $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x/2)}, \quad x = 1{,}02.$

30. $y = \sqrt{x^2 + 5}, \quad x = 1{,}97.$

Задача 5. Знайти похідні функцій, застосовуючи попереднє логарифмування:

1. $y = \dfrac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1 + x}}$. 2. $y = \dfrac{(2x^2 - 1)\sqrt{1 + x^2}}{3x^3}$.

3. $y=\frac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$.

4. $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

5. $y=\frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}}$.

6. $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$.

7. $y=\frac{(x^2-6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5}$.

8. $y=\frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3}$.

9. $y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.

10. $y=\sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}}$.

11. $y=\frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$.

12. $y=\frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$.

13. $y=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$.

14. $y=\frac{\sqrt{x-1}\,(3x+2)}{4x^2}$.

15. $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

16. $y=\frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$.

17. $y=\frac{\sqrt{2x+3}\,(x-2)}{x^2}$.

18. $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$.

19. $y=\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$.

20. $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$.

21. $y=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2}$.

22. $y=2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$.

23. $y=\frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}}$.

24. $y=3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$.

25. $y=3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2}$.

26. $y=(x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7})$.

27. $y=(x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1)$.

28. $y=(x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4})$.

29. $y = ((x + 3)\sqrt{2x - 1})/(2x + 7)$.

30. $y = (3x + \sqrt{x})/(\sqrt{x^2 + 2})$.

Задача 6. Знайти похідні, застосовуючи приклад 4, § 1:

1. $y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1})$.

2. $y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x)/8$.

3. $y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x - 3}{2}$.

4. $y = \frac{1}{\ln 4}\ln\frac{1 + 2^x}{1 - 2^x}$.

5. $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln\frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1}$.

6. $y = \frac{2}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3}$.

7. $y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + 1) - 2\operatorname{arctg} e^x$.

8. $y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3}$.

9. $y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg}\sqrt{2^x - 1})/\ln 2$.

10. $y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2\ln((\sqrt{1 + e^x} - 1)/(\sqrt{1 + e^x} + 1))$.

11. $y = e^{\alpha x}(\alpha \sin\beta x - \beta\cos\beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$.

12. $y = e^{\alpha x}(\beta\sin\beta x + \alpha\cos\beta x)/(\alpha^2 + \beta^2)$.

13. $y = e^{ax}\left[\frac{1}{2a} + \frac{a\cos 2bx + 2b\sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)}\right]$.

14. $y = x + 1/(1 + e^x) - \ln(1 + e^x)$.

15. $y = x - 3\ln\left[(1 + e^{x/6})\sqrt{1 + e^{x/3}}\right] - 3\operatorname{arctg} e^{x/6}$.

16. $y = x + \dfrac{8}{1 + e^{x/4}}$.

17. $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x}$.

18. $y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}})$.

19. $y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2$.

20. $y = \dfrac{e^{x^3}}{1 + x^3}$.

21. $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$.

22. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2)$.

23. $y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}} - e^x + 1}$.

24. $y = e^{\sin x}\left(x - \dfrac{1}{\cos x}\right)$.

25. $y = \dfrac{e^x}{2}\left[(x^2 - 1)\cos x + (x - 1)^2 \sin x\right]$.

26. $y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})$.

27. $y = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left[\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120\right]$.

28. $y = -e^{3x}/(3 \operatorname{sh}^3 x)$.

29. $y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}}$.

30. $y = -\dfrac{1}{2} e^{-x^2}(x^4 + 2x^2 + 2)$.

Задача 7. Знайти похідні, застосовуючи приклад 5, §1:

1. $y = \sqrt{x}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{x + a}) - \sqrt{x + a}$.

2. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$. 3. $y = 2\sqrt{x} - 4\ln(2 + \sqrt{x})$.

4. $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{1 - ax^4}}$.

5. $y = \ln (\sqrt{x} + \sqrt{x + 1})$.

6. $y = \ln \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2}$.

7. $y = \ln^2(x + \cos x)$.

8. $y = \ln^3(1 + \cos x)$.

9. $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$.

10. $y = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$.

11. $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1 + 2x}{1 - 2x}}$.

12. $y = x + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left(\frac{x - \sqrt{2}}{x + \sqrt{2}}\right) + a^{\pi^{\sqrt{2}}}$.

13. $y = \ln \sin \frac{2x + 4}{x + 1}$.

14. $y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x$.

15. $y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$.

16. $y = x (\cos \ln x + \sin \ln x)/2$.

17. $y = \ln \cos \frac{2x + 3}{2x + 1}$.

18. $y = \lg \ln \operatorname{ctg} x$.

19. $y = \log_a \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}}$.

20. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln (\sqrt{2} \operatorname{tg} x + \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x})$.

21. $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}}$.

22. $y = \ln \arccos \sqrt{1 - e^{4x}}$.

23. $y = \ln (bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2})$.

24. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - x\sqrt{2}}$.

25. $y = \ln \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

26. $y = \ln (e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

27. $y = \ln \frac{\sqrt{5} + \operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{5} - \operatorname{tg}(x/2)}$.

28. $y = \ln \frac{\ln x}{\sin (1/x)}$.

29. $y = \ln \ln \sin (1 + 1/x)$.

30. $y = \ln \ln^3 \ln^2 x$.

Задача 8. Продиференціювати тригонометричні функції:

1. $y = \sin\sqrt{3} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^2 3x}{\cos 6x}$.

2. $y = \cos\ln 2 - \dfrac{1}{3}\dfrac{\cos^2 3x}{\sin 6x}$.

3. $y = \operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$.

4. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{5} - \dfrac{1}{8}\dfrac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$.

5. $y = \dfrac{(\cos\sin 5)\sin^2 2x}{2\cos 4x}$.

6. $y = \dfrac{(\sin\cos 3)\cos^2 2x}{4\sin 4x}$.

7. $y = \dfrac{(\cos\ln 7)\sin^2 7x}{7\cos 14x}$.

8. $y = \cos\operatorname{ctg} 2 - \dfrac{1}{16}\dfrac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$.

9. $y = \operatorname{ctg}\cos 2 + \dfrac{1}{6}\dfrac{\sin^2 6x}{\cos 12x}$.

10. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} - \dfrac{1}{20}\dfrac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$.

11. $y = \dfrac{1}{3}\cos\operatorname{tg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 20x}$.

12. $y = \ln\sin\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{24}\dfrac{\cos^2 12x}{\sin 24x}$.

13. $y = 8\sin\operatorname{ctg} 3 + \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$.

14. $y = \dfrac{(\cos\operatorname{ctg} 3)\cos^2 14x}{28\sin 28x}$.

15. $y = \dfrac{\cos\operatorname{tg}(1/3)\sin^2 15x}{15\cos 30x}$.

16. $y = \dfrac{\sin\operatorname{tg}(1/7)\cos^2 16x}{32\sin 32x}$.

17. $y = \dfrac{\operatorname{ctg}\sin(1/3)\sin^2 17x}{17\cos 34x}$.

18. $y = \dfrac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg} 2}\cos^2 18x}{36\sin 36x}$.

19. $y = \dfrac{(\operatorname{tg}\ln 2)\sin^2 19x}{19\cos 38x}$.

20. $y = \operatorname{ctg}\cos 5 - \dfrac{1}{40}\dfrac{\cos^2 20x}{\sin 40x}$.

21. $y = \sqrt{\operatorname{tg} 4} + \dfrac{\sin^2 21x}{21\cos 42x}$.

22. $y = \cos\ln 13 - \dfrac{1}{44}\dfrac{\cos^2 22x}{\sin 44x}$.

23. $y = \ln\cos\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sin^2 23x}{23\cos 46x}$.

24. $y = \operatorname{ctg}\sin\dfrac{1}{13} - \dfrac{1}{48}\dfrac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$.

25. $y = \sin\ln\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$.

26. $y = \sqrt[3]{\cos\sqrt{2}} - \dfrac{\cos^2 26x}{52\sin 52x}$.

27. $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}\cos 2} + \dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x}$.

28. $y = \sin\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2} - \dfrac{\cos^2 28x}{56\sin 56x}$.

29. $y = \cos^2 \sin 3 + \dfrac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}$.   30. $y = \sin^3 \cos 2 - \dfrac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}$.

Задача 9. Знайти похідні обернених тригонометричних функцій:

1. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}$.

2. $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{5x}}$.

3. $y = \dfrac{2x - 1}{4} \sqrt{2 + x - x^2} + \dfrac{9}{8} \arcsin \dfrac{2x - 1}{3}$.

4. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$.

5. $y = \arccos \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^4 + 16}}$.

6. $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{6x}}$.

7. $y = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x - 1}{x + 1} - \dfrac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$

8. $y = (x - 4) \sqrt{8x - x^2 - 7}/2 - 9 \arccos \sqrt{(x - 1)/6}$.

9. $y = \dfrac{(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x^2} + \dfrac{1}{3x \sqrt{x}}$.

10. $y = \dfrac{x^3}{3} \arccos x - \dfrac{2 + x^2}{9} \sqrt{1 - x^2}$.

11. $y = \dfrac{1}{2 \sqrt{x}} + \dfrac{1 + x}{2x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

12. $y = \dfrac{3 + x}{2} \sqrt{x (2 - x)} + 3 \arccos \sqrt{\dfrac{x}{2}}$.

13. $y = \frac{4 + x^4}{x^3} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x}$.

14. $y = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x + 1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

15. $y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} - \frac{\arccos x}{2x^2}$.

16. $y = 6 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{6 + x}{2} \sqrt{x (4 - x)}$.

17. $y = \frac{x - 3}{2} \sqrt{6x - x^2 - 8} + \arcsin \sqrt{\frac{x}{2} - 1}$.

18. $y = \frac{(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{x}$.

19. $y = \frac{2 \sqrt{1 - x} \arcsin \sqrt{x}}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

20. $y = \frac{2x - 5}{4} \sqrt{5x - 4 - x^2} + \frac{9}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x - 1}{3}}$.

21. $y = \operatorname{arctg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}$.

22. $y = \arcsin \frac{x - 2}{(x - 1) \sqrt{2}}$.

23. $y = \sqrt{1 - x^2} - x \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

24. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x}}{2}$.

25. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x}}{1 - \sqrt{x}}$.

26. $y = (2x^2 + 6x + 5) \operatorname{arctg} \frac{x + 1}{x + 2} - x$.

27. $y = \frac{x}{2 \sqrt{1 - 4x^2}} \arcsin 2x + \frac{1}{8} \ln (1 - 4x^2)$.

28. $y = \left(2x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} - \frac{x^3}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, x$.

29. $y = (x + 2\sqrt{x} + 2) \operatorname{arctg} ((\sqrt{x}/(\sqrt{x} + 2)) - \sqrt{x}$.

30. $y = \sqrt{1 + 2x - x^2} \arcsin \frac{x\sqrt{2}}{1 + x} - \sqrt{2} \ln (1 + x)$.

Задача 10. Знайти похідні гіперболічних функцій:

1. $y = \frac{1}{4\sqrt{5}} \ln \frac{2 + \sqrt{5} \operatorname{th} x}{2 - \sqrt{5} \operatorname{th} x}$.

2. $y = \frac{\operatorname{sh} x}{4 \operatorname{ch}^4 x} + \frac{3 \operatorname{sh} x}{8 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} (\operatorname{sh} x)$.

3. $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\operatorname{th} x}}{1 - \sqrt{\operatorname{th} x}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} x}$.

4. $y = \left(-\frac{1}{2} \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x}\right)$.

5. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}$.

6. $y = \frac{3}{8\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x} - \frac{\operatorname{th} x}{4(2 - \operatorname{th}^2 x)}$.

7. $y = \frac{1}{2a\sqrt{1 + a^2}} \ln \frac{a + \sqrt{1 + a^2} \operatorname{th} x}{a - \sqrt{1 + a^2} \operatorname{th} x}$.

8. $y = \frac{1}{18\sqrt{2}} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{cth} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{cth} x}$.

9. $y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

10. $y = \frac{1}{6} \ln \frac{1 - \operatorname{sh} 2x}{1 + \operatorname{sh} 2x}$.

11. $y = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.

12. $y=\dfrac{\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$.

13. $y=\dfrac{1+8\operatorname{ch}^2 x\ln\operatorname{ch} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

14. $y=\dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$.

15. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

16. $y=-\dfrac{12\operatorname{sh}^2 x+1}{3\operatorname{sh}^3 x}$.

17. $y=-\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{3}{2}\arcsin(\operatorname{th} x)$.

18. $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\dfrac{3+\operatorname{ch} x}{1+3\operatorname{ch} x}$.

19. $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\ln\dfrac{4+\sqrt{8}\operatorname{th}(x/2)}{4-\sqrt{8}\operatorname{th}(x/2)}$.

20. $y=\left[\dfrac{1}{4}\ln\left|\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right|-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3+\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right]$.

21. $y=-\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5+3\operatorname{ch} x}{3+5\operatorname{ch} x}$.

22. $y=\dfrac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}$.

23. $y=\dfrac{2}{\operatorname{sh} x}-\dfrac{1}{3\operatorname{sh}^3 x}+\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\dfrac{5}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x$.

24. $y=\dfrac{8}{3}\operatorname{cth} 2x-\dfrac{1}{3\operatorname{ch} x\operatorname{sh}^3 x}$.

25. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)-\dfrac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

26. $y=\frac{3}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}+\operatorname{ch} x-\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}\cdot$

27. $y=-\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}-\frac{1}{\operatorname{sh} x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} x.$

28. $y=\frac{\operatorname{sh} x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x).$

29. $y=\frac{1}{2}\left[\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}+\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)\right].$

30. $y=-\frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh}^2 x}-\frac{1}{2}\ln \operatorname{th}\frac{x}{2}\cdot$

Задача 11. Знайти похідні показниково-степеневих функцій:

1. $y=(\operatorname{arctg} x)^{(1/2)\ln \operatorname{arctg} x}$.

2. $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln \sin\sqrt{x}}$.

3. $y=(\sin x)^{5e^x}$.

4. $y=(\arcsin x)^{e^x}$.

5. $y=(\ln x)^{3^x}$.

6. $y=x^{\arcsin x}$.

7. $y=(\operatorname{ctg} 3x)^{2e^x}$.

8. $y=x^{e^{\operatorname{tg} x}}$.

9. $y=(\operatorname{tg} x)^{4e^x}$.

10. $y=(\cos 5x)^{e^x}$.

11. $y=(x\sin x)^{8\ln(x\sin x)}$.

12. $y=(x-5)^{\operatorname{ch} x}$.

13. $y=(x^3+4)^{\operatorname{tg} x}$.

14. $y=x^{\sin x^3}$.

15. $y=(x^2-1)^{\operatorname{sh} x}$.

16. $y=(x^4+5)^{\operatorname{ctg} x}$.

17. $y=(\sin x)^{5^{x/2}}$.

18. $y=(x^2+1)^{\cos x}$.

19. $y=19^{x^{19}}x^{19}$.

20. $y=x^{3^x}2^x$.

21. $y=(\sin\sqrt{x})^{e^{1/x}}$.

22. $y=x^{e^{\operatorname{ctg} x}}$.

23. $y = x^{e^{\cos x}}$.

24. $y = x^{2^x}\, 5^x$.

25. $y = x^{e^{\sin x}}$.

26. $y = (\operatorname{tg} x)^{\ln \operatorname{tg} x/4}$.

27. $y = x^{e^{\operatorname{arctg} x}}$.

28. $y = (x^8 + 1)^{\operatorname{th} x}$.

29. $y = x^{29^x}\, 29^x$.

30. $y = (\cos 2x)^{\ln \cos 2x/4}$.

Задача 12. Знайти похідні складених функцій:

1. $y = \dfrac{1}{24}(x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \dfrac{x^4}{16} \arcsin \dfrac{2}{x}, \quad x > 0.$

2. $y = \dfrac{4x + 1}{16x^2 + 8x + 3} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{4x + 1}{\sqrt{2}}.$

3. $y = 2x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{4x}}) - e^{-2x} \arcsin(e^{2x}).$

4. $y = \sqrt{9x^2 - 12x + 5} \operatorname{arctg}(3x - 2) -$

$- \ln(3x - 2 + \sqrt{9x^2 - 12x + 5}).$

5. $y = \dfrac{2}{x - 1}\sqrt{2x - x^2} + \ln \dfrac{1 + \sqrt{2x - x^2}}{x - 1}.$

6. $y = \dfrac{x^4}{81} \arcsin \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{81}(x^2 + 18)\sqrt{x^2 - 9}, \quad x > 0.$

7. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \dfrac{3x - 1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3}\, \dfrac{3x - 1}{3x^2 - 2x + 1}.$

8. $y = 3x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{6x}}) - e^{-3x} \arcsin(e^{3x}).$

9. $y = \ln(4x - 1 + \sqrt{16x^2 - 8x + 2}) -$

$- \sqrt{16x^2 - 8x + 2} \operatorname{arctg}(4x - 1).$

10. $y = \ln \dfrac{1 + 2\sqrt{-x - x^2}}{2x + 1} + \dfrac{4}{2x + 1}\sqrt{-x - x^2}.$

11. $y = (2x + 3)^4 \arcsin \frac{1}{2x + 3} +$

$+ \frac{2}{3}(4x^2 + 12x + 11)\sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad 2x + 3 > 0.$

12. $y = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{\sqrt{2}}$.

13. $y = 5x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{10x}}) - e^{-5x} \arcsin(e^{5x})$.

14. $y = \sqrt{x^2 - 8x + 17} \operatorname{arctg}(x - 4) -$

$- \ln(x - 4 + \sqrt{x^2 - 8x + 17})$.

15. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 + 4x - x^2}}{2 - x} + \frac{2}{2 - x}\sqrt{-3 + 4x - x^2}$.

16. $y = (3x^2 - 4x + 2)\sqrt{9x^2 - 12x + 3} +$

$+ (3x - 2)^4 \arcsin \frac{1}{3x - 2}, \quad 3x - 2 > 0.$

17. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - 1}{\sqrt{2}} + \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 3}$.

18. $y = \ln(e^{5x} + \sqrt{e^{10x} - 1}) + \arcsin(e^{-5x})$.

19. $y = \ln(2x - 3 + \sqrt{4x^2 - 12x + 10}) -$

$- \sqrt{4x^2 - 12x + 10} \operatorname{arctg}(2x - 3)$.

20. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{-3 - 4x - x^2}}{-x - 2} - \frac{2}{x + 2}\sqrt{-3 - 4x - x^2}$.

21. $y = \frac{2}{3}(4x^2 - 4x + 3)\sqrt{x^2 - x} +$

$+ (2x - 1)^4 \arcsin \frac{1}{2x - 1}, \quad 2x - 1 > 0.$

22. $y = \frac{2x - 1}{4x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{2}}$.

23. $y = \arcsin (e^{-4x}) + \ln (e^{4x} + \sqrt{e^{8x} - 1})$.

24. $y = \ln (5x + \sqrt{25x^2 + 1}) - \sqrt{25x^2 + 1}\ \mathrm{arctg}\, 5x$.

25. $y = \dfrac{2}{3x - 2} \sqrt{- 3 + 12x - 9x^2} +$

$+ \ln \dfrac{1 + \sqrt{- 3 + 12x - 9x^2}}{3x - 2}$.

26. $y = (3x + 1)^4 \arcsin \dfrac{1}{3x + 1} +$

$+ (3x^2 + 2x + 1) \sqrt{9x^2 + 6x}\ ,\ 3x + 1 > 0$.

27. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\ \mathrm{arctg}\, \dfrac{2x + 1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2x + 1}{4x^2 + 4x + 3}$.

28. $y = \ln (e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1}) + \arcsin (e^{-3x})$.

29. $y = \sqrt{49x^2 + 1}\ \mathrm{arctg}\, 7x - \ln (7x + \sqrt{49x^2 + 1})$.

30. $y = \dfrac{1}{x} \sqrt{1 - 4x^2} + \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4x^2}}{2x}$.

Задача 13. Знайти похідні алгебраїчної суми складених функцій:

1. $y = \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} + \ln \sqrt{1 - x^2}$.

2. $y = 4 \ln \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - 4x^2}} - \dfrac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x^2}$.

3. $y = x (2x^2 + 5) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

4. $y = x^3 \arcsin x + \dfrac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2}$.

5. $y = 3\ \mathrm{acrsin}\, \dfrac{3}{4x + 1} + 2 \sqrt{4x^2 + 2x - 2}\ ,\quad 4x + 1 > 0$.

6. $y = \sqrt{1 + x^2}\ \mathrm{arctg}\, x - \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

7. $y = 2 \arcsin \frac{2}{3x + 4} + \sqrt{9x^2 + 24x + 12}, \quad 3x + 4 > 0.$

8. $y = x(2x^2 + 1) \sqrt{x^2 + 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 + 1}).$

9. $y = \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$

10. $y = \sqrt{1 - 3x - 2x^2} + \frac{3}{2\sqrt{2}} \arcsin \frac{4x + 3}{\sqrt{17}}.$

11. $y = \sqrt{(4 + x)(1 + x)} + 3 \ln (\sqrt{4 + x} + \sqrt{1 + x}).$

12. $y = \ln \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}.$

13. $y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$

14. $y = 4 \arcsin \frac{4}{2x + 3} + \sqrt{4x^2 + 12x - 7}, \quad 2x + 3 > 0.$

15. $y = 2 \arcsin \frac{2}{3x + 1} + \sqrt{9x^2 + 6x - 3}, \quad 3x + 1 > 0.$

16. $y = (2 + 3x) \sqrt{x - 1} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{x - 1}.$

17. $y = \frac{1}{3} (x - 2) \sqrt{x + 1} + \ln (\sqrt{x + 1} + 1).$

18. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}.$

19. $y = \ln \left(\sqrt[3]{\frac{x - 1}{x + 1}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x^2 - 1} \right) \operatorname{arctg} x.$

20. $y = x \ln (\sqrt{1 - x} + \sqrt{1 + x}) + \frac{1}{2} (\arcsin x - x).$

21. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$

22. $y = 3 \arcsin \dfrac{3}{x + 2} + \sqrt{x^2 + 4x - 5}$.

23. $y = \sqrt{(3 - x)(2 + x)} + 5 \arcsin \sqrt{(x + 2)/5}$.

24. $y = x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$.

25. $y = \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + \arcsin x$.

26. $y = x^3 \arccos x - \dfrac{x^2 + 2}{3} \sqrt{1 - x^2}$.

27. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{x^2 + 2}}{x}$.

28. $y = (x/4)(10 - x^2) \sqrt{4 - x^2} + 6 \arcsin (x/2)$.

29. $y = \arcsin \dfrac{1}{2x + 3} + 2 \sqrt{x^2 + 3x + 2}$, $2x + 3 > 0$.

30. $y = x \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x + 1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

Задача 14. Знайти похідні, застосовуючи приклад 6, §1:

1. $y = \dfrac{1}{\sin \alpha} \ln (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} \alpha)$.

2. $y = x \cos \alpha + \sin \alpha \ln \sin (x - \alpha)$.

3. $y = \dfrac{1}{2 \sqrt{2}} [\sin \ln x - (\sqrt{2} - 1) \cos \ln x]x^{\sqrt{2} + 1}$.

4. $y = \operatorname{arctg} (\cos x / \sqrt[4]{\cos 2x})$.

5. $y = 3 \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + 2 \dfrac{\sin x}{\cos^4 x}$.

6. $y = (a^2 + b^2)^{-1/2} \arcsin \left(\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} \sin x}{b}\right)$, $b > 0$.

7. $y = \dfrac{7^x(3\sin 3x + \cos 3x \ln 7)}{(9 + \ln^2 7)}$.

8. $y = \ln \dfrac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}}$.

9. $y = (1/(a(1 + a^2)))[\operatorname{arctg}(a\cos x) + a \ln \operatorname{tg}(x/2)]$.

10. $y = -\dfrac{1}{3\sin^3 x} - \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$.

11. $y = (1 + x^2)e^{\operatorname{arctg} x}$.

12. $y = \dfrac{\operatorname{ctg} x + x}{1 - x \operatorname{ctg} x}$.

13. $y = \dfrac{1}{2\sin(\alpha/2)} \operatorname{arctg}\dfrac{2x\sin(\alpha/2)}{1 - x^2}$.

14. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}}{x}$, $x > 0$.

15. $y = \dfrac{6^x(\sin 4x \ln 6 - 4\cos 4x)}{16 + \ln^2 6}$.

16. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

17. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2\sin x}{\sqrt{9\cos^2 x - 4}}$.

18. $y = \dfrac{5^x(2\sin 2x + \cos 2x \ln 5)}{4 + \ln^2 5}$.

19. $y = \ln\dfrac{\sqrt{2} + \operatorname{th} x}{\sqrt{2} - \operatorname{th} x}$.

20. $y = \dfrac{3^x(4\sin 4x + \ln 3 \cos 4x)}{16 + \ln^2 3}$.

21. $y = \dfrac{4^x((\ln 4)\sin 4x - 4\cos 4x)}{16 + \ln^2 4}$.

22. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - 2\cos x - 3\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot$

23. $y = \frac{5^x(\sin 3x \ln 5 - 3\cos 3x)}{9 + \ln^2 5}\cdot$

24. $y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}.$

25. $y = \frac{2^x(\sin x + \cos x \ln 2)}{1 + (\ln 2)^2}\cdot$

26. $y = \frac{\ln(\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\alpha)}{\sin\alpha}\cdot$

27. $y = 2\frac{\cos x}{\sin^4 x} + 3\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot$

28. $y = \frac{\cos x}{3(2 + \sin x)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{3}}\cdot$

29. $y = \frac{3^x((\ln 3)\sin 2x - 2\cos 2x)}{\ln^2 3 + 4}\cdot$

30. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} - \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{3\cos^3 x}\cdot$

Задача 15. Знайти похідну y_x' параметрично заданої функції:

1. $\begin{cases} x = \frac{3t^2 + 1}{3t^3}, \\ y = \sin(t^3/3 + t). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1 + t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = 1/\sqrt[3]{(t - 1)^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}), \\ y = t\sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{2t - t^2}, \\ y = \arcsin(t - 1). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln \operatorname{tg} e^t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{t/2}, \\ y = \sqrt{e^t + 1}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{\dfrac{1 - t}{1 + t}}, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \ln (1/\sqrt{1 - t^4}), \\ y = \arcsin ((1-t^2)/(1+t^2)). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = t/\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin (\sqrt{1 - t^2}), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = t/\sqrt{1 - t^2}, \\ y = \ln ((1 + \sqrt{1 - t^2})/t). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = (1 + \cos^2 t)^2, \\ y = \cos t/\sin^2 t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \ln ((1 - t)/(1 + t)), \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \arccos (1/t), \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin (1/t). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = 1/\ln t, \\ y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - t^2}}{t}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = t/\sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2 + 1}, \\ y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 + t^2}}{t}. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + t^2}}{t + 1}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = \ln (1 - t^2), \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} ((t + 1)/(t - 1)), \\ y = \arcsin \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \ln \sqrt{(1 - \sin t)/(1 + \sin t)}, \\ y = (1/2) \operatorname{tg}^2 t + \ln \cos t. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \sqrt{t - t^2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{1 - t}{t}}, \\ y = \sqrt{t} - \sqrt{1 - t} \arcsin \sqrt{t}. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin^2 t. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \dfrac{t^2 \ln t}{1 - t^2} + \ln \sqrt{1 - t^2}\,, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}\,. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^{\sec^2 t}, \\ y = \operatorname{tg} t \ln \cos t + \operatorname{tg} t - t. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \arcsin t + \ln \sqrt{1 - t^2}\,, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\,. \end{cases}$

Задача 16. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці, яка відповідає значенню параметра $t = t_0$:

1. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \ t_0 = \pi/3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \ t_0 = \pi/3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t), \ t_0 = \pi/3. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \ t_0 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = (2t + t^2)/(1 + t^3), \\ y = (2t - t^2)/(1 + t^3), \ t_0 = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \arcsin (t/\sqrt{1 + t^2}), \\ y = \arccos (1/\sqrt{1 + t^2}), \\ \qquad t_0 = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t), \\ \qquad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = 3at/(1 + t^2), \\ y = 3at^2/(1 + t^2), \ t_0 = 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \ t_0 = \pi/4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = (1/2)t^2 - (1/4)t^4, \\ y = (1/2)t^2 + (1/3)t^3, \\ \qquad t_0 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \ t_0 = \pi/2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \ t_0 = \pi/6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \arcsin (t/\sqrt{1 + t^2}), \\ y = \arccos (1/\sqrt{1 + t^2})\,, \\ \qquad t_0 = 1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + 2 \ln t)/t, \\ \qquad t_0 = 1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = (1 + t)/t^2, \\ y = 3/(2t^2) + 2/t, \ \ t_0 = 2. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \ \ t_0 = \pi/6. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = a\,(t \sin t + \cos t), \\ y = a\,(\sin t - t \cos t), \\ \qquad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = (t + 1)/t, \\ y = (t - 1)/t, \ \ t_0 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3, \ \ t_0 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \ln (1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \ \ t_0 = 1. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = t(1 - \sin t), \\ y = t \cos t, \ \ t_0 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = (1 + t^3)/(t^2 - 1), \\ y = t/(t^2 - 1), \ \ t_0 = 2. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \ \ t_0 = \pi/4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = t - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \ \ t_0 = 1. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2 + t + 1, \ \ t_0 = 1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t, \ \ t_0 = -\pi/3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t, \\ y = 2 \sin^2 t + \sin 2t, \\ \qquad t_0 = \pi/4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \ \ t_0 = -2. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = a^t, \ \ t_0 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos 2t, \ \ t_0 = \pi/6. \end{cases}$

Задача 17. Знайти похідну n-го порядку:

1. $y = xe^{\alpha x}$.

2. $y = \sin 2x + \cos (x + 1)$.

3. $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$.

4. $y = (4x + 7)/(2x + 3)$.

5. $y = \lg (5x + 2)$.

6. $y = a^{3x}$.

7. $y = x/(2(3x + 2))$.

8. $y = \lg (x + 4)$.

9. $y = \sqrt{x}$.

10. $y = (2x + 5)/(13(3x + 1))$.

11. $y = 2^{3x+5}$.

12. $y = \sin (x + 1) + \cos 2x$.

13. $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$.

14. $y = (4 + 15x)/(5x + 1)$.

15. $y = \lg(3x + 1)$.

16. $y = 7^{5x}$.

17. $y = x/(9(4x + 9))$.

18. $y = \lg(1 + x)$.

19. $y = 4/x$.

20. $y = (5x + 1)/(13(2x + 3))$.

21. $y = a^{2x+3}$.

22. $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$.

23. $y = \sqrt{e^{3x+1}}$.

24. $y = (11 + 12x)/(6x + 5)$.

25. $y = \lg(2x + 7)$.

26. $y = 2^{kx}$.

27. $y = x/(x + 1)$.

28. $y = \log_3(x + 5)$.

29. $y = (1 + x)/(1 - x)$.

30. $y = (7x + 1)/(17(4x + 3))$.

Задача 18. Знайти похідну вказаного порядку:

1. $y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1),\ \ y^{\mathrm{V}} = ?$

2. $y = (3 - x^2)\ln^2 x,\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

3. $y = x\cos x^2,\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

4. $y = \dfrac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x - 1}},\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

5. $y = \dfrac{\log_2 x}{x^3},\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

6. $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1},\ \ y^{\mathrm{V}} = ?$

7. $y = x^2\sin(5x - 3),\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

8. $y = (\ln x)/x^2,\ \ y^{\mathrm{IV}} = ?$

9. $y = (2x + 3)\ln^2 x,\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

10. $y = (1 + x^2)\,\mathrm{arctg}\,x,\ \ y^{\mathrm{III}} = ?$

11. $y = (\ln x)/x^3,\ \ y^{\mathrm{IV}} = ?$

12. $y = (4x + 3)2^{-x},\ \ y^{\mathrm{V}} = ?$

13. $y = e^{1-2x}\sin(2 + 3x),\ \ y^{\mathrm{IV}} = ?$

14. $y = \dfrac{\ln(3 + x)}{3 + x}$, $y^{\text{III}} = ?$

15. $y = (2x^3 + 1)\cos x$, $y^{\text{V}} = ?$

16. $y = (x^2 + 3)\ln(x - 3)$, $y^{\text{IV}} = ?$

17. $y = (1 - x - x^2)e^{(x-1)/2}$, $y^{\text{IV}} = ?$

18. $y = (1/x)\sin 2x$, $y^{\text{III}} = ?$

19. $y = (x + 7)\ln(x + 4)$, $y^{\text{V}} = ?$

20. $y = (3x - 7)3^{-x}$, $y^{\text{IV}} = ?$

21. $y = \dfrac{\ln(2x + 5)}{2x + 5}$, $y^{\text{III}} = ?$

22. $y = e^{x/2}\sin 2x$, $y^{\text{IV}} = ?$

23. $y = (\ln x)/x^5$, $y^{\text{III}} = ?$

24. $y = x\ln(1 - 3x)$, $y^{\text{IV}} = ?$

25. $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$, $y^{\text{V}} = ?$

26. $y = (5x - 8)2^{-x}$, $y^{\text{IV}} = ?$

27. $y = \dfrac{\ln(x - 2)}{x - 2}$, $y^{\text{V}} = ?$

28. $y = e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x)$, $y^{\text{IV}} = ?$

29. $y = (5x - 1)\ln^2 x$, $y^{\text{III}} = ?$

30. $y = \dfrac{\log_3 x}{x^2}$, $y^{\text{IV}} = ?$

Задача 19. Знайти похідну другого порядку y_{xx}'' функції, заданої параметрично:

1. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2\sec^2 t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{1 - t^2}, \\ y = 1/t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = 1/\operatorname{ch}^2 t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 1/t, \\ y = 1/(1 + t^2). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \sqrt{t}\ , \\ y = 1/\sqrt{1 - t}\ . \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin 2t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}\ , \\ y = t/\sqrt{t - 1}\ . \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \sqrt{t}\ , \\ y = \sqrt[3]{t - 1}\ . \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \cos t/(1 + 2\cos t), \\ y = \sin t/(1 + 2\cos t). \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = \sqrt{t^3 - 1}\ , \\ y = \ln t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{th}^2 t. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 1}\ , \\ y = 1/\sqrt{t}\ . \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = \sqrt{t - 3}\ , \\ y = \ln (t - 2). \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln \cos t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 + \cos t. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 (t/2). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch} t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}\ . \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t^2/2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = 1/t^2, \\ y = 1/(t^2 + 1). \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

Задача 20. Довести, що функція y задовольняє відповідне диференціальне рівняння:

1. $y = xe^{-x^2/2}$,

2. $y = \dfrac{\sin x}{x}$,

$xy' = (1 - x^2)y.$

$xy' + y = \cos x.$

3. $y = 5e^{-2x} + e^x/3,$

$y' + 2y = e^x.$

4. $y = 2 + c\sqrt{1 - x^2},$

$(1 - x^2)y' + xy = 2x.$

5. $y = x\sqrt{1 - x^2},$

$yy' = x - 2x^3.$

6. $y = \dfrac{c}{\cos x},$

$y' - y \operatorname{tg} x = 0.$

7. $y = - 1/(3x + c),$

$y' = 3y^2.$

8. $y = \ln(c + e^x),$

$y' = e^{x-y}.$

9. $y = \sqrt{x^2 - cx},$

$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0.$

10. $y = x(c - \ln x),$

$(x - y)dx + xdy = 0.$

11. $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)},$

$y' \sin x = y \ln y.$

12. $y = (1 + x)/(1 - x),$

$y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}.$

13. $y = (b + x)/(1 + bx),$

$y - xy' = b(1 + x^2y').$

14. $y = \sqrt[3]{2 + 3x - 3x^2},$

$yy' = (1 - 2x)/y.$

15. $y = \sqrt{\ln\left(\dfrac{1 + e^x}{2}\right)^2 + 1},$

$(1 + e^x)yy' = e^x.$

16. $y = \operatorname{tg} \ln 3x,$

$(1 + y^2)dx = xdy.$

17. $y = -\sqrt{\dfrac{2}{x^2} - 1},$

$1 + y^2 + xyy' = 0.$

18. $y = \sqrt[3]{x - \ln x - 1},$

$\ln x + y^2 - 3xy^2y' = 0.$

19. $y = a + 7x/(ax + 1),$

$y - xy' = a(1 + x^2y').$

20. $y = a \operatorname{tg}\sqrt{\dfrac{a}{x} - 1},$

$a^2 + y^2 + 2x\sqrt{ax - x^2}\,y' = 0.$

21. $y = \sqrt[4]{\sqrt{x} + \sqrt{x + 1}},$

22. $y = (x^2 + 1)e^{x^2},$

$8xy' - y = \frac{-1}{y^3\sqrt{x+1}}$.

$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

23. $y = \frac{2x}{x^3+1} + \frac{1}{x}$,

$x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \frac{x^3-2}{x}$.

24. $y = e^{x+x^2} + 2e^x$,

$y' - y = 2xe^{x+x^2}$.

25. $y = -x\cos x + 3x$,

$xy' = y + x^2\sin x$.

26. $y = 1/\sqrt{\sin x + x}$,

$2(\sin x)y' + y\cos x = y^3(x\cos x - \sin x)$.

27. $y = x/(x-1) + x^2$,

$x(x-1)y' + y = x^2(2x-1)$.

28. $y = x/\cos x$,

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$.

29. $y = (x+1)^n(e^x-1)$,

$y' - \frac{ny}{x+1} = e^x(1+x)^n$.

30. $y = 2\frac{\sin x}{x} + \cos x$,

$x(\sin x)y' + (\sin x - x\cos x)y = \sin x\cos x - x$.

Задача 21. Розкласти функцію за формулою Маклорена:

1. $9/(20 - x - x^2)$.
2. $x^2/\sqrt{4-5x}$.
3. $\ln(1 - x - 6x^2)$.
4. $2x\cos^2(x/2) - x$.
5. $(\mathrm{sh}\,2x)/x - 2$.
6. $7/(12 + x - x^2)$.
7. $x/\sqrt[3]{27-2x}$.
8. $\ln(1 + x - 6x^2)$.
9. $(x-1)\sin 5x$.
10. $(\mathrm{ch}\,3x - 1)/x^2$.
11. $6/(8 + 2x - x^2)$.
12. $1/(\sqrt[4]{16-3x})$.
13. $\ln(1 - x - 12x^2)$.
14. $(3 + e^{-x})^2$.
15. $(\arcsin x)/x - 1$.
16. $7/(12 - x - x^2)$.

17. $x^2\sqrt{4-3x}$.

18. $\ln(1+2x-8x^2)$.

19. $2x\sin^2(x/2)-x$.

20. $(x-1)\,\mathrm{sh}\,x$.

21. $5/(6+x-x^2)$.

22. $x\sqrt[3]{27-2x}$.

23. $\ln(1+x-12x^2)$.

24. $(\sin 3x)/x-\cos 3x$.

25. $(\mathrm{arctg}\,x)/x$.

26. $5/(6-x-x^2)$.

27. $\sqrt[4]{16-5x}$.

28. $\ln(1-x-20x^2)$.

29. $(2-e^x)^2$.

30. $(x-1)\,\mathrm{ch}\,x$.

Задача 22. Побудувати графіки раціональних функцій за допомогою похідної першого порядку:

1. $y=2x^3-9x^2+12x-9$.

2. $y=3x-x^3$.

3. $y=x^2(x-2)^2$.

4. $y=(x^3-9x^2)/4+6x-9$.

5. $y=2-3x^2-x^3$.

6. $y=(x+1)^2(x-1)^2$.

7. $y=2x^3-3x^2-4$.

8. $y=3x^2-2-x^3$.

9. $y=(x-1)^2(x-3)^2$.

10. $y=(x^3+3x^2)/4-5$.

11. $y=6x-8x^3$.

12. $y=16x^2(x-1)^2$.

13. $y=2x^3+3x^2-5$.

14. $y=2-12x^2-8x^3$.

15. $y=(2x+1)^2(2x-1)^2$.

16. $y=2x^3+9x^2+12x$.

17. $y=12x^2-8x^3-2$.

18. $y=(2x-1)^2(2x-3)^2$.

19. $y=27(x^3-x^2)/4-4$.

20. $y=x(12-x^2)/8$.

21. $y=x^2(x-4)^2/16$.

22. $y=27(x^3+x^2)/4-5$.

23. $y=(16-6x^2-x^3)/8$.

24. $y=-(x^2-4)^2/16$.

25. $y=16x^3-36x^2+24x-9$.

26. $y=(6x^2-x^3-16)/8$.

27. $y=-(x-2)^2(x-6)^2/16$.

28. $y=16x^3-12x^2-4$.

29. $y=(11+9x-3x^2-x^3)/8$.

30. $y=-(x+1)^2(x-3)^2/16$.

Задача 23. Побудувати графіки функцій, які містять ірраціональність, за допомогою похідної першого порядку:

1. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 2x}$.
2. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.
3. $y = 12\sqrt[3]{6(x-2)^2}/(x^2 + 8)$.
4. $y = -12\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(x^2 + 2x + 9)$.
5. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 2x}$.
6. $y = 2x + 6 - 3\sqrt[3]{(x+3)^2}$.
7. $y = 6\sqrt[3]{6(x-3)^2}/(x^2 - 2x + 9)$.
8. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$.
9. $y = 3\sqrt[3]{(x-3)^2} - 2x + 6$.
10. $y = -6\sqrt[3]{6x^2}/(x^2 + 4x + 12)$.
11. $y = 4x + 8 - 6\sqrt[3]{(x+2)^2}$.
12. $y = 3\sqrt[3]{6(x-4)^2}/(x^2 - 4x + 12)$.
13. $y = \sqrt[3]{x(x+2)}$.
14. $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x + 3}$.
15. $y = -3\sqrt[3]{6(x+1)^2}/(x^2 + 6x + 17)$.
16. $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 8$.
17. $y = 3\sqrt[3]{6(x-5)^2}/(x^2 - 6x + 17)$.
18. $y = 2 + \sqrt[3]{8x(x+2)}$.
19. $y = 6x - 6 - 9\sqrt[3]{(x-1)^2}$.
20. $y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}$.
21. $y = \sqrt[3]{4x(x-1)}$.
22. $y = -3\sqrt[3]{6(x+2)^2}/(x^2 + 8x + 24)$.

23. $y = \sqrt[3]{x(x-2)}$.

24. $y = 1 - \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$.

25. $y = 9\sqrt[3]{(x+1)^2} - 6x - 6.$

26. $y = 6\sqrt[3]{6(x+3)^2}/(x^2 + 10x + 33).$

27. $y = 8x - 16 - 12\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

28. $y = -6\sqrt[3]{6(x-6)^2}/(x^2 - 8x + 24).$

29. $y = 12\sqrt[3]{(x+2)^2} - 8x - 16.$

30. $y = 3\sqrt[3]{6(x-1)^2}/(2(x^2 + 2x + 9)).$

Задача 24. Знайти найбільше та найменше значення функції на заданих відрізках:

1. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$, [1, 4].

2. $y = 4 - x - \dfrac{4}{x^2}$, [1, 4].

3. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$, [0, 6].

4. $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}$, [-3, 3].

5. $y = 2\sqrt{x} - x$, [0, 4].

6. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$, [-1, 5].

7. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$, [1, 9].

8. $y = 10x/(1 + x^2)$, [0, 3].

9. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$, [-3, 3].

10. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59$, [2, 4].

11. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$, [-1, 2].

12. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$, $[-1, 6]$.

13. $y = 2(-x^2 + 7x - 7)/(x^2 - 2x + 2)$, $[1, 4]$.

14. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$, $[-1, 7]$.

15. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$, $[1, 5]$.

16. $y = 4x/(4 + x^2)$, $[-4, 2]$.

17. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$, $[-4, -1]$.

18. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$, $[-2, 4]$.

19. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2 + 4x + 5}$, $[-2, 1]$.

20. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2 + 2x + 5}$, $[-5, 1]$.

21. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$, $[0, 4]$.

22. $y = x^2 - 2x + 16/(x-1) - 13$, $[2, 5]$.

23. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$, $[1, 5]$.

24. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$, $[-3, 4]$.

25. $y = -x^2/2 + 2x + 8/(x-2) + 5$, $[-2, 1]$.

26. $y = 8x + 4/x^2 - 15$, $[1/2, 2]$.

27. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)} + 3$, $[-4, 2]$.

28. $y = x^2 + 4x + \dfrac{16}{x+2} - 9$, $[-1, 2]$.

29. $y = 4/x^2 - 8x - 15$, $[-2, -1/2]$.

30. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)}$, $[-2, 5]$.

Задача 25.

а) Рибалці треба переправитись з острова A на острів B (рис. 35). Щоб поповнити свої запаси, він повинен попасти на ділянку берега MN. Знайти найкоротший шлях рибалки $S = S_1 + S_2$ при заданих умовах:

1. $a = 200$, $b = 300$, $H = 400$, $h = 300$, $L = 700$.

2. $a = 400$, $b = 600$, $H = 800$, $h = 600$, $L = 1\,400$.

3. $a = 600$, $b = 900$, $H = 1\,200$, $h = 900$, $L = 2\,100$.

4. $a = 800$, $b = 1\,200$, $H = 1\,600$, $h = 1\,200$, $L = 2\,800$.

5. $a = 1\,000$, $b = 1\,500$, $H = 2\,000$, $h = 1\,500$, $L = 3\,500$.

6. $a = 400$, $b = 500$, $H = 300$, $h = 400$, $L = 700$.

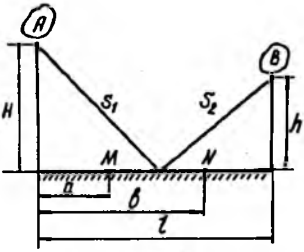


Рис. 35

7. $a = 800$, $b = 1\,000$, $H = 600$, $h = 800$, $L = 1\,400$.

8. $a = 1\,200$, $b = 1\,500$, $H = 900$, $h = 1\,200$, $L = 2\,100$.

9. $a = 1\,600$, $b = 2\,000$, $H = 1\,200$, $h = 1\,600$, $L = 2\,800$.

10. $a = 2\,000$, $b = 2\,500$, $H = 1\,500$, $h = 2\,000$, $L = 3\,500$.

б) Під час підготовки до іспиту студент за t днів вивчає $\frac{t}{t+k}$ -у частину курсу, а забуває αt -у частину. За скільки днів студент вивчить максимальну частину курсу?

11. $k = 1/2$, $\alpha = 2/49$.
12. $k = 1/2$, $\alpha = 2/81$.
13. $k = 1/2$, $\alpha = 2/121$.
14. $k = 1/2$, $\alpha = 2/169$.
15. $k = 1$, $\alpha = 1/25$.
16. $k = 1$, $\alpha = 1/16$.
17. $k = 1$, $\alpha = 1/36$.
18. $k = 1$, $\alpha = 1/49$.
19. $k = 2$, $\alpha = 1/18$.
20. $k = 2$, $\alpha = 2/49$.

в) Тіло масою $m_0 = 3000$ кг падає з висоти H м і втрачає масу пропорційно часу падіння. Коефіцієнт пропорційності $k = 100$ кг/с. Враховуючи, що початкова швидкість $v_0 = 0$, прискорення $g = 10$ м/с^2, та нехтуючи опором повітря, знайти найбільшу кінетичну енергію тіла, якщо H набуває значення:

21. 500; 22. 605; 23. 720; 24. 845; 25. 980;
26. 1125; 27. 1280; 28. 1445; 29. 1620; 30. 1805.

Задача 26. Дослідити поведінку функції в околі заданих точок за допомогою похідних вищих порядків:

1. $y = x^2 - 4x - (x - 2)\ln(x - 1)$, $x_0 = 2$.

2. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x - 2)$, $x_0 = 2$.

3. $y = 6e^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.

4. $y = 2\ln(x + 1) - 2x + x^2 + 1$, $x_0 = 0$.

5. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x - 1)$, $x_0 = 1$.

6. $y = \cos^2(x + 1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.

7. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.

8. $y = 1 - 2x - x^2 - 2\cos(x + 1)$, $x_0 = -1$.

9. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$, $x_0 = -2$.

10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.

11. $y = (x + 1)\sin(x + 1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.

12. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = 1$.

13. $y = 2x + x^2 - (x + 1)\ln(2 + x)$, $x_0 = -1$.

14. $y = \sin^2(x + 1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.

15. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x + 2)$, $x_0 = -2$.

16. $y = x^2 + 2\ln(x + 2)$, $x_0 = -1$.

17. $y = 4x - x^2 + (x - 2)\sin(x - 2)$, $x_0 = 2$.

18. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$.

19. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$, $x_0 = 2$.

20. $y = \sin^2(x + 2) - x^2 - 4x - 4$, $x_0 = -2$.

21. $y = \cos^2(x - 1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.

22. $y = x^2 - 2x - (x - 1)\ln x$, $x_0 = 1$.

23. $y = (x - 1)\sin(x - 1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.

24. $y = x^2 - 4x + \cos^2(x - 2),\ x_0 = 2.$

25. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x),\ x_0 = 0.$

26. $y = \sin^2(x - 2) - x^2 + 4x - 4,\ x_0 = 2.$

27. $y = 6e^{x+1} - x^3 - 6x^2 - 15x - 16,\ x_0 = -1.$

28. $y = \sin x + \operatorname{sh} x - 2x,\ x_0 = 0.$

29. $y = \sin^2(x - 1) - x^2 + 2x,\ x_0 = 1.$

30. $y = \cos x + \operatorname{ch} x,\ x_0 = 0.$

Задача 27. Знайти асимптоти та побудувати графіки функцій:

1. $y = (17 - x^2)/(4x - 5).$

2. $y = (x^2 + 1)/\sqrt{4x^2 - 3}\ .$

3. $y = (x^3 - 4x)/(3x^2 - 4).$

4. $y = (4x^2 + 9)/(4x + 8).$

5. $y = (4x^3 + 3x^2 - 8x - 2)/(2 - 3x^2).$

6. $y = (x^2 - 3)/\sqrt{3x^2 - 2}\ .$

7. $y = (2x^2 - 6)/(x - 2).$

8. $y = (2x^3 + 2x^2 - 3x - 1)/(2 - 4x^2).$

9. $y = (x^3 - 5x)/(5 - 3x^2).$

10. $y = (x^2 - 6x + 4)/(3x - 2).$

11. $y = (2 - x^2)/\sqrt{9x^2 - 4}\ .$

12. $y = (4x^3 - 3x)/(4x^2 - 1).$

13. $y = (3x^2 - 7)/(2x + 1).$

14. $y = (x^2 + 16)/\sqrt{9x^2 - 8}\ .$

15. $y = (x^3 + 3x^2 - 2x - 2)/(2 - 3x^2).$

16. $y = (21 - x^2)/(7x + 9).$

17. $y = (2x^2 - 1)/\sqrt{x^2 - 2}\ .$

18. $y = (2x^3 - 3x^2 - 2x + 1)/(1 - 3x^2)$.

19. $y = (x^2 - 11)/(4x - 3)$.

20. $y = (2x^2 - 9)/\sqrt{x^2 - 1}$.

21. $y = (x^3 - 2x^2 - 3x + 2)/(1 - x^2)$.

22. $y = (x^2 + 2x - 1)/(2x + 1)$.

23. $y = (x^3 + x^2 - 3x - 1)/(2x^2 - 2)$.

24. $y = (x^2 + 6x + 9)/(x + 4)$.

25. $y = (3x^2 - 10)/\sqrt{4x^2 - 1}$.

26. $y = (x^2 - 2x + 2)/(x + 3)$.

27. $y = (2x^3 + 2x^2 - 9x - 3)/(2x^2 - 3)$.

28. $y = (3x^2 - 10)/(3 - 2x)$.

29. $y = (- x^2 - 4x + 13)/(4x + 3)$.

30. $y = (- 8 - x^2)/\sqrt{x^2 - 4}$.

Задача 28. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки, застосовуючи приклад 10, § 8:

1. $y = (x^3 + 4)/x^2$.

2. $y = (x^2 - x + 1)/(x - 1)$.

3. $y = 2/(x^2 + 2x)$.

4. $y = 4x^2/(3 + x^2)$.

5. $y = 12x/(9 + x^2)$.

6. $y = (x^2 - 3x + 3)/(x - 1)$.

7. $y = (4 - x^3)/x^2$.

8. $y = (x^2 - 4x + 1)/(x - 4)$.

9. $y = (2x^3 + 1)/x^2$.

10. $y = (x - 1)^2/x^2$.

11. $y = x^2/(x - 1)^2$.

12. $y = (1 + 1/x)^2$.

13. $y = (12 - 3x^2)/(x^2 + 12)$.

14. $y =(9 + 6x - 3x^2)/(x^2 - 2x + 13)$.

15. $y = - 8x/(x^2 + 4)$.

16. $y = ((x - 1)/(x + 1))^2$.

17. $y = (3x^4 + 1)/x^3$.

18. $y = 4x/(x + 1)^2$.

19. $y = 8(x - 1)/(x + 1)^2$.

20. $y = (1 - 2x^3)/x^2$.

21. $y = 4/(x^2 + 2x - 3)$.

22. $y = 4/(3 + 2x - x^2)$.

23. $y = (x^2+2x-7)/(x^2+ 2x - 3)$.

24. $y = 1/(x^4 - 1)$.

25. $y = -(x/(x + 2))^2$.

26. $y = (x^3 - 32)/x^2$.

27. $y = 4(x + 1)^2/(x^2 + 2x + 4)$.

28. $y = (3x - 2)/x^3$.

29. $y = (x^2- 6x + 9)/(x - 1)^2$.

30. $y = (x^3 - 27x + 54)/x^3$.

Задача 29. Побудувати графіки функцій:

1. $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$.

2. $y = \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x + 1)}$ ·

3. $y = 3 \ln \dfrac{x}{x - 3} - 1$.

4. $y = (3 - x)\, e^{x-2}$.

5. $y = \dfrac{e^{2-x}}{2 - x}$ ·

6. $y = \ln \dfrac{x}{x + 2} + 1$.

7. $y = (x - 2)\, e^{3-x}$.

8. $y = \dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x - 1)}$ ·

9. $y = 3 - 3 \ln \dfrac{x}{x + 4}$ ·

10. $y = -(2x + 1)e^{2(x+1)}$.

11. $y = \dfrac{e^{2(x+2)}}{2(x + 2)}$ ·

12. $y = \ln \dfrac{x}{x - 2} - 2$.

13. $y = (2x + 5)e^{-2(x+2)}$.

14. $y = \dfrac{e^{3-x}}{3 - x}$ ·

15. $y = 2 \ln \dfrac{x}{x + 1} - 1$.

16. $y = (4 - x)e^{x-3}$.

17. $y = -\dfrac{e^{-2(x+2)}}{2(x + 2)}$ ·

18. $y = 2 \ln \dfrac{x + 3}{x} - 3$.

19. $y = (2x - 1)e^{2(1-x)}$.

20. $y = -\dfrac{e^{-(x+2)}}{x + 2}$ ·

21. $y = 2 \ln \dfrac{x}{x - 4} - 3$.

22. $y = -(x + 1)e^{(x+2)}$.

23. $y = \dfrac{e^{x+3}}{x+3}$.

24. $y = \ln \dfrac{x}{x+5} - 1$.

25. $y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$.

26. $y = -\dfrac{e^{-2(x-1)}}{2(x-1)}$.

27. $y = \ln \dfrac{x-5}{x} + 2$.

28. $y = (x+4)e^{-(x+3)}$.

29. $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

30. $y = \ln \dfrac{x+6}{x} - 1$.

Задача 30. Побудувати графіки ірраціональних функцій:

1. $y = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-4x+1)}$.
2. $y = -\sqrt[3]{(x+3)(x^2+6x+6)}$.
3. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x^2+4x+1)}$.
4. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x-2)}$.
5. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x-2)}$.
6. $y = \sqrt[3]{(x-3)(x^2-6x+6)}$.
7. $y = \sqrt[3]{(x^2-4x+3)^2}$.
8. $y = \sqrt[3]{x^2(x+2)^2}$.
9. $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)^2}$.
10. $y = \sqrt[3]{(x^2-2x-3)^2}$.
11. $y = \sqrt[3]{x^2(x+4)^2}$.
12. $y = \sqrt[3]{x^2(x-4)^2}$.
13. $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.
14. $y = \sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}$.
15. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x^2}$.
16. $y = \sqrt[3]{(x+6)x^2}$.

17. $y = \sqrt[3]{(x-4)(x+2)^2}$.

18. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

19. $y = \sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$.

20. $y = \sqrt[3]{(x-3)x^2}$.

21. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2}$.

22. $y = \sqrt[3]{(x+2)(x-4)^2}$.

23. $y = \sqrt[3]{(x-6)x^2}$.

24. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

25. $y = \sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

26. $y = \sqrt[3]{x(x+3)^2}$.

27. $y = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x+3)^2}$.

28. $y = \sqrt[3]{x(x-6)^2}$.

29. $y = \sqrt[3]{x(x+6)^2}$.

30. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}$.

Задача 31. Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графіки, застосовуючи приклад 11, § 8:

1. $y = e^{\sin x + \cos x}$.

2. $y = \operatorname{arctg}\left[(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}\right]$.

3. $y = \ln(\cos x + \sin x)$.

4. $y = 1/(\sin x + \cos x)$.

5. $y = e^{\sqrt{2}\sin x}$.

6. $y = \operatorname{arctg}\sin x$.

7. $y = \ln(\sqrt{2}\sin x)$.

8. $y = 1/(\sin x - \cos x)$.

9. $y = e^{\sin x - \cos x}$.

10. $y = \operatorname{arctg}[(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}]$.

11. $y = \ln(\sin x - \cos x)$.

12. $y = 1/(\sin x + \cos x)^2$.

13. $y = e^{-\sqrt{2}\cos x}$.

14. $y = -\operatorname{arctg}\cos x$.

15. $y = \ln(-\sqrt{2}\cos x)$.

16. $y = 1/(\sin x - \cos x)^2$.

17. $y = e^{-\sin x - \cos x}$.

18. $y = \sqrt[3]{\sin x}$.

19. $y = \ln(-\sin x - \cos x)$.

20. $y = \sqrt{(\sin x - \cos x)/\sqrt{2}}$.

21. $y = e^{-\sqrt{2}\sin x}$.

22. $y = \sqrt[3]{\cos x}$.

23. $y = \ln(-\sqrt{2}\sin x)$.

24. $y = \sqrt{\cos x}$.

25. $y = e^{\cos x - \sin x}$.

26. $y = \sqrt[3]{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$.

27. $y = \ln(\cos x - \sin x)$.

28. $y = \sqrt{\sin x}$.

29. $y = e^{\sqrt{2}\cos x}$.

30. $y = \sqrt{(\sin x + \cos x)/\sqrt{2}}$.

ВІДПОВІДІ

До глави 1

3. 3,5. 4. 2. 5. $\frac{1}{3}$ · 6. 0. 7. $1\frac{1}{7}$. 8. 1. 9. 0,5. 10. $\frac{2}{3}$. 11.– $\frac{3}{4}$. 12. $\frac{4}{9}$. 13.18. 14. – 3. 15. – 1 . 16. 1. 17. 0. 18. 9. 19. + ∞. 20. 2. 21. 2. 22. 0,5. 23. $\frac{27}{5}$ · 24. – 5 . 25. 0. 26. 0. 27. 4. 28. 0. 29. 0,5. 30. – 4 . 31. $\frac{1}{6}$ · 32. + ∞. 33. 0. 34. 0,5. 35. 1. 36. $\frac{1}{3}$.37. 0,5. 38. 0,5. 39. $\frac{1}{3}$. 40.$\frac{3}{4}$. 41.– 1. 42.– 0,5.43. $\frac{1}{6}$. 44. 0,5. 45.$\frac{1}{3}$. 46. 0,1.47.$\frac{1}{4}$. 48.$\frac{1}{60}$. 49. 3. 50. $\frac{7}{30}$. 51. $\frac{gh}{2}$ · 52. e^3. 53. $\sqrt[4]{e}$ .54. $\frac{1}{e^6}$. 55. e^4. 56.e^4. 57.0.58.e.59. 1. 60. $\frac{1}{e^2}$. 61.$\frac{1}{e}$. 62. 1. 63. – 1. 64. 1. 65. 1. 66.1. 67.2. 72. 51. 73.– 5. 74. 2. 75. 0. 76. 5. 77. $\frac{1}{4}$. 78.∞ . 79. 0. 80.4. 81. – 2.82.4.83.4. 84.– $\frac{1}{2}$. 85. – $\frac{1}{2}$.86. 0. 87. – 1. 88. $\frac{1}{2}$. 89. $\frac{2}{3}$ · 90. $\frac{1}{2}$ · 91. 2. 92.– $\frac{1}{2}$. 93.1. 94.$3x^2$. 95. $\frac{a-1}{2a}$ · 96. 1. 97. 0. 98.– 2. 99. ∞.100.3.101. $\frac{1}{4^{10}}$. 102.$\frac{81}{8}$. 103. – 1.104.4.105. – 2. 106.3. 107. 1.108. $\frac{2}{3}$. 109.0. 110.– 1. 111.5.112.2.113.0.114.$\frac{1}{4}$. 115.4.116.– 1. 117.$\frac{1}{2}$· 118.3a. 119.3.120.3. 121. $\frac{3}{4}$. 122. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 123. 9. 124. 1. 125. 0. 126. $\frac{1}{2}$. 127. 1.

128. 9. 129.2.130.0.131.0.132.2.133. $\frac{1}{3}$. 134.18.135.$\frac{1}{2}$. 136.2. 137.7. 138. 3. 139. 8. 140. $\frac{1}{64}$. 141. $-\frac{1}{3}$. 142. 0,5. 143. 2. 144.0.145. 10. 146. 0,5. 147. – 0,5. 148.1.149.1.150.1.151. $-\frac{1}{4}$.152. – 2. 153. $\frac{1}{3}$. 154.$-\sin a$. 155.$\sec^2 a$. 156.0.157. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 158.4.159.$-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 160. $\frac{\pi}{2}$. 161. – 2 . 162.– 2 . 163. 6. 164. 1. 165. $\frac{1}{9}$. 166.0.167. ∞. 168. $-\frac{1}{4}$. 169. $\frac{1}{12}$. 170. 3π. 171.1,5. 172.$-\frac{4}{3}$.173.$-\cos a$. 174.$2\cos a \operatorname{cosec}^3 a$, $a\neq k\pi$.175.1.176.0.177.2.178.0. 179.4.180.e^{-3}. 181.$\sqrt{e}$. 182.e^3.183.e^{-2}. 184.e. 185. e^3 . 186. e^3. 187. 1. 188. $\sqrt[3]{e}$. 189. 1 .190. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 191. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 192.1.193. $\frac{10}{\ln 10}$. 194. $\frac{3}{4}\ln 2$. 195. $-\frac{1}{3}$. 196. $\frac{1}{3}$. 197. $\log_2 5$. 198. 2. 199. – 0,5. 200. $\frac{1}{6}$. 201. $-\frac{1}{3}$. 202. – 0,5. 203. 4. 204. 8. 205. 1,6. 206. 4. 207. e. 208. 5. 209. 9. 210. 2. 211.ln2. 212. 2. 213. $\frac{2}{3}$. 214. 2.215. 0,5.216.– 4. 217.$a^x \ln^2 a$. 218.$\frac{4}{3}$. 219. $\frac{\sin 3}{3}$. 220. 0. 221. 0. 222. 2. 223. 0. 224. 8. 225. 0. 226.– 6. 227. 0,5. 228. $\frac{7}{16}$ · 229. $\frac{1}{e^3}$ · 230. ln25. 231.$\frac{1}{\sqrt{e}}$. 232. 2. 233. ln4. 235. 0,5. 237. 0,5. 238. 1) 6; 2) 5; 3) 4; 4) 4; 5) 10; 6) 1; 7) $\frac{2}{3}$. 239. 2,5. 240. 3. 241. 4. 242.$\frac{1}{4}$. 243. 33. 244.– 1. 245.– 1. 246.– 8,5. 247.$-\frac{1}{6}$. 248.$\frac{1}{3}$. 249 .$\frac{7}{6}$. 250. а) –1; б)1. 251. а) –1; б) 1.

252. а) -1; б) 1. 253. а) 1; б) 0. 254. а) 0; б) 1. 255. -6. 256. $\frac{2}{3}$. 257. $\frac{1}{2}$. 258. $\frac{2}{3}$. 259. 1) а) $-\infty$, б) $+\infty$; 2) а) $+\infty$, б) $+\infty$; 3) а) $+\infty$, б) 0; 4) а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$. 260. а) так, $\frac{1}{2}$; б) так, 1. 269. $y(4)=8$. 270. 1) $x=0$, першого роду; 2) $x=5$, усувного розриву; 3) $x=2$, усувного розриву; $x=-2$, другого роду; 4) $x=0$, усувного розриву; 5) $x=0$, першого роду. 272. 1) $x=0$, $x=1$, першого роду; 2) $x=-4$, першого роду; 3) $x=\pm 3$, другого роду; 4) $x=0$, усувного розриву; $x=1$, другого роду; 5) $x=0$, другого роду; $x=1$, першого роду. 274. 1) 0; 2) $-\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$. 275. 1) $a=0$, $b=-1$; 2) $a=2, b=-1$; 3) $a=1, b=\frac{\pi}{2}$; 4) $a=0, b=2$. 276. $x=1$; 3 другого роду. 277. $x=2$, усувного розриву. 278. $x=1$, усувного розриву; $x=-1$, другого роду. 279. а) $x=0$, другого роду; б) $x=0$, усувного розриву. 280. $x=-1$; 3, другого роду. 281. $x=0$, першого роду. 282. $x=1$, першого роду. 283. $x=0$, усувного розриву. 284. $x=-1$, першого роду. 285. $x=-2$, другого роду. 286. $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$, другого роду. 287. $x=0$, другого роду, $x=2$, першого роду. 288. $x=0$, першого роду. 289. $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$, другого роду. 290. $x=-1$, першого роду, в точці $x=1$ — неперервна. 291. $x=0$, усувного розриву.

До глави 2

1.$\Delta y \approx 0{,}23457$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 2{,}34568$. 2. $\Delta y \approx 0{,}000303$; $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 0{,}303359$.

3.$\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. 4. $9\ln 3 = \ln 19683$. 5.4. 6.$2x$, $x \in \mathrm{R}$. 7. $-\dfrac{2}{x^3}$, $x \neq 0$.

8.$\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $x \neq 0$. 9.$5^{x-3}\ln 5$, $x \in \mathrm{R}$. 10.$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x| < 1$.

11.$-2\sin 2x$, $x \in \mathrm{R}$. 12. -1. 13. $6x^2 + 12x - 7$. 14.$5(x^4 + 1)$.

15. $2y + m$.16.$3v^2 + 10v\sqrt{v} - 7$. 17. $0{,}4t^{-0{,}6} - 2t$.

18.$-\dfrac{x^2 + 4x + 9}{x^4}$. 19.$-\dfrac{e^2}{2x\sqrt{x}}$. 20.$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$.

21.$\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 5\sqrt[3]{x^2}$. 22.$\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2}$. 23. $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

24. $\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}$. 25. $x^2\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}$. 26. $2x^3\sqrt[3]{x^2} - 7x^2\sqrt{x}$.

27.$-\dfrac{2}{(x-1)^2}$. 28.$\dfrac{x(2 - x^3)}{(x^3 + 1)^2}$. 29. $1 - \dfrac{1}{x^2}$.

30.$\dfrac{4x\sqrt{x} - 2x^2\sqrt{x} - x - 1}{2\sqrt{x}(1 - x)^2}$. 31.$2t(4t^2 + 3)$. 32. $3x^2 - 6x + 2$.

33.$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}(13x^3 + 10x^2 - 14x - 8)$. 34.1. 35.$\cos x + 4\sin x$.

36.$3(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$. 37. $2x\,\mathrm{tg}x + \dfrac{x^2 + 2}{\cos^2 x}$. 38. $\dfrac{\cos x + 3x\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}\cos^2 x}$.

39.$-\dfrac{2}{(\cos x + \sin x)^2}$. 40. $-\left(2\cos x + \sin x + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$.

41.-3.42.$2x\arccos x - \dfrac{1 + x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$. 43. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1 - x^2}(\arccos x)^2}$.

44.$\frac{3}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{arctg}x + \frac{\sqrt{x^3}}{1 + x^2}$.45.$\cos x \arcsin x + \frac{\sin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

46.$\frac{5(x - 5)^2}{x^3}$. 47. $\log_2 x^2 + \frac{2(x - 1)}{x \ln 2}$ · 48. $\frac{x^2 (\ln 10 \lg x^2 - 1) + 1}{x \ln 10 (\lg x)^2}$.

49. $\frac{1}{x} \lg \frac{x^2}{10}$ · 50. $\frac{3x^2 - x \ln \frac{x}{e} + 2}{x^3}$. 51. $\cos x \ln (xe) - x \sin x \ln x$.

52. $\frac{1}{4^{2x}} \ln \frac{1}{16}$. 53.$(\sqrt{3})^x \ln\sqrt{3} + (\sqrt{2})^{-x} \ln\sqrt{2}$. 54. $e^x (x^2 + 4x + 7)$.

55. $4^{x+1}\left(\ln 4 \cdot \ln |x| + \frac{1}{x}\right)$. 56. $-\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$. 57.0,5. 58.$\frac{1 - x \ln x}{x e^x}$.

59. $e^x (\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg} x - x)$ .60. $\frac{a^x}{\ln a}(1 - x - x \cdot a^x \cdot \ln a)$.

61. $\frac{e^x}{2x^4}(x^3 - 6)$. 62. $e^{2x} (2\sin x + \cos x)$. 63. $e^x \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x}$.

64. $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2^x \cdot \ln 2$. 65.$\frac{\ln \frac{1}{25}}{x \ln^2 x}$ · 66. $\log_x 3 \left(1 - \frac{1}{\ln x}\right)$.

67.$-\frac{\arccos x + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{e^x}$ · 68.$\frac{1}{e^{2x}}$. 69. $\mathrm{sh}\, x \cos x - \mathrm{ch}\, x \sin x$.

70.$-\frac{\mathrm{ch}\, 2x}{\mathrm{ch}^2 x}$ · 71. $-e^x$. 72.5 $\mathrm{sh} x + (5x + 2)\, \mathrm{ch} x$.

73. $\frac{x \ln x^2 - \mathrm{sh}\, 2x}{x\, \mathrm{ch}^2 x \ln^2 x}$. 74.$\frac{x (2\, \mathrm{ch}\, x - x\, \mathrm{sh}\, x)}{\mathrm{ch}^2 x}$.

75.$\frac{2 + \sqrt{x}}{2x} \mathrm{sh}\, x - \frac{1 - x^2 \sqrt{x}}{x^2} \mathrm{ch}\, x$. 76.25. 77.$y'(0) = -1995!$;

$y'(1995) = 1995!$. 78. -3. 79. $\frac{\pi}{2}$ · 80.1. 81.1. 82.1. 83. 0.

84. $25\,(5x-2)^4$. 85. $\dfrac{(x-2)\,(7x+2)}{4x\,\sqrt[4]{x}}$. 86. $\dfrac{x^2}{(1-x)^{30}}$.

87. $\dfrac{1-3x}{2\sqrt{1-x}}$. 88. $6x\,(x^2-1)^2$.

89. $-\dfrac{x}{2\,\sqrt[4]{(2-x^2)^3}}$. 90. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x^3+x^2+x+1}\,(3x^2+2x+1)$.

91. $(2-3x)\,(2x-3)^2(24+13x-36x^2)$. 92. $\dfrac{4x-3x^3}{\sqrt{4-x^2}}$.

93. $\dfrac{t^2(t+3)}{(t+1)^3}$. 94. $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. 95. $\dfrac{4t^2+1}{t^2\sqrt{(1+t^2)^3}}$. 96. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{x\,(x-1)}}$.

97. $\dfrac{1}{3\sqrt{2x}\,\sqrt[9]{(4+3\sqrt{2x})^8}}$. 98. $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$.

99. $\dfrac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}}{3\sqrt[3]{(x+\sqrt[4]{x})^2}}}{2\sqrt{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}}$. 100. $\dfrac{2v}{\sqrt{1+v^2}\,(1-v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

101. $\dfrac{2\,(\sqrt[3]{x^2}-1)\,(\sqrt[3]{x^2}+1)^5}{x^3}$. 102. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\,(1+x^2)}$.

103. $2x\cos x^2$. 104. $-3\sin x\cos^2 x$. 105. $\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos\,(x+\sqrt{x})$.

106. $-\dfrac{(x+1)\sin\left(x+\ln x-\dfrac{\pi}{2}\right)}{x}$. 107. $-\dfrac{\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$.

108. $-\dfrac{\cos 2x+2x\sin 2x}{x^2}$. 109. $\dfrac{1}{16\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right)\sqrt[4]{\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4}\right)^3}}$.

110. $2x\sin x^2\,(\sin x^2+2x^2\cos x^2)$. 111. $-\operatorname{ctg} x\operatorname{cosec} x\,(1+\sin^2 x)$.

112. $4\operatorname{ctg}^2 x\left(\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x}-1\right)$. 113. $-\dfrac{x\sec^2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. 114. $\dfrac{5\cos 5x-\cos x}{2}$.

115. $-\dfrac{2\sin\dfrac{2}{x^2}}{x^3}$. 116. $-\dfrac{9\mathrm{ctg}^2(3x+2)}{\sin^2(3x+2)}$. 117. $\dfrac{\sin t\,(1+3\cos 2t)}{2}$.

118. $-\dfrac{3\sin 3\varphi}{2\sqrt{\cos 3\varphi}}$. 119. $\cos 2x$. 120. $-\sin(\sin x)\cos x$. 121. $-2\cos 4x$.

122. $3\cos^2 2x - 6\cos^2\dfrac{x}{2}\sin^2 x$. 123. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$.

124. $\dfrac{2x+1}{\sqrt{1-(x^2+x+1)^2}}$. 125. $\dfrac{3(4x^2-1)}{1+x^2(3-4x^2)^2}$.

126. $-\dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$. 127. $\dfrac{1}{1+x^2}$.

128. $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)\sqrt{x^4-6x^2+1}}$. 129. $\dfrac{\mathrm{sgn}\,x}{\sqrt{1-x^2}}$. 130. $\dfrac{\cos x}{1+(1+\sin x)^2}$.

131. $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. 132. $-\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. 133. $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x\,(1-\sin x)}}$.

134. $\dfrac{1}{2}$. 135. -1. 136. 1. 137. $-\dfrac{2nx^{n-1}\sqrt{2}}{x^{2n}+1}$.

138. $x^3\arcsin x + \dfrac{9}{128\sqrt{1-x^2}}$.

140. $\dfrac{2}{(1+2x(x-1))\cos^2(2\mathrm{arctg}\,(2x-1))}$. 141. $\dfrac{\mathrm{tg}\,(\ln x)\sec(\ln x)}{x}$.

142. $-(3x^2+e^x)\,\mathrm{ctg}\,(x^3+e^x)\,\mathrm{cosec}\,(x^3+e^x)$.

143. $\sin 2x\cos(\cos 2x)$. 144. $\cos\ln x$. 145. $3^{x^2}x\ln 9$. 146. $5^{\sqrt{v}+\ln v}$.

147. $2^{x\ln x}(\ln x+1)\ln 2$.

148. $2e^{\ln^2 x}\dfrac{\ln x}{x}$. 149. $e^{a+bt+ct^2}(2ct+b)$. 150. $e^{\frac{x-1}{x+1}}\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

151. $-2e^{\cos 2x}\sin 2x$. 152. $\dfrac{e^{\mathrm{arctg}\,(v+2)}}{1+(v+2)^2}$.

153. $3^{\cos x+\mathrm{tg}3x}\left(\frac{3}{\cos^2 3x}-\sin x\right)\ln 3$. 154. $2^{\sin^2 x}\sin 2x\ln 2$.

155. $\frac{2x-1}{2(x^2-x+3)\sqrt{\ln(x^2-x+3)}}e^{\sqrt{\ln(x^2-x+3)}}$.

156. $\frac{-xe^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}\,(e^{2x}-1)}$. 157. $\frac{-6}{x^2+4x-5}$. 158. $\frac{6x}{x^2+1}$.

159. $\frac{3\sqrt[6]{x}+2}{6x(\sqrt[6]{x}+1)}$. 160. $\frac{x}{(1+x^2)\ln 10}$. 161. $\frac{4x}{1-x^4}$.

162. $\frac{2x(2x^2-1)}{x^4-x^2+5}$. 163. $\frac{6\ln(3x+1)}{3x+1}$. 164. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 165. $\frac{1}{1+e^x}$.

166. $\frac{1}{x\ln x}$. 167. $\frac{1+x}{x(\ln x+x)}$. 168. $\frac{2\ln(\ln x)}{x\ln x}$. 169. $\frac{2\ln x}{x(\ln^2 x+e)}$.

170. $\frac{e^t\ln t}{t}(2+t\ln t)$. 171. $-\mathrm{tg}\,x$. 172. $\frac{2}{\sin 2\varphi}$. 173. $-4x\,\mathrm{tg}\,x^2$.

174. $2\ln(\sin x)\,\mathrm{ctg}x$. 175. $\frac{1}{\cos x}$. 176. $e^x(\ln\cos 2x-2\,\mathrm{tg}\,2x)$.

177. $e^x\left(\ln\mathrm{ctg}\,x-\frac{2}{\sin 2x}\right)$. 178. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$. 179. $\frac{x}{x^3+1}$.

180. $-\frac{x^4+4x^2+1}{3(1-x^6)}$. 181. $\frac{x(x-1)}{x^5+1}$. 182. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

183. $\frac{1}{2+\cos x-3\sin x}$. 184. $\frac{2}{\sin^3 x\cos^2 x}$. 185. $\frac{\arcsin x}{x^2}$.

186. $\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3}$. 187. $\frac{2}{x\ln 3\ln 4\ln 5(\log_4\log_5 x^2)\log_5 x^2}$.

188. $\frac{2x^2+10x+11}{(x+2)(x+3)}$. 189. $\frac{2}{1+e^{2x}}-\frac{\mathrm{arctg}\,e^x}{e^x}$. 190. $\mathrm{sh}2\,x$.

191. $3x\,\mathrm{sh}\,2x^2\,\mathrm{ch}\,x^2$. 192. $\frac{3}{2}\mathrm{ch}\,3x+\frac{1}{2}\mathrm{ch}\,x$. 193. $\frac{2}{\mathrm{sh}\,2x}$.

194.$e^{\operatorname{ch} x}(\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch} x)$. 195.$e^{\operatorname{sh} x} \operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x + 1)$.

196.$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x (1 + \operatorname{th}^2 x)}$. 197.$-\dfrac{4x}{\operatorname{sh}^3 x^2}$. 198.$\dfrac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x (1 - \operatorname{sh}^2 x)}$.

199.$2^{4x}(2x \operatorname{ch} 3x + (x^2 - 2) \ln 16 \operatorname{ch} 3x + 3(x^2 - 2) \operatorname{sh} 3x)$.

200.$e^{2x}(2 \operatorname{sh} 3x + 3 \operatorname{ch} 3x)$. 201.$\dfrac{(x - 2a)\sqrt{x + a}}{\sqrt{(x - a)^3}}$.

202.$\dfrac{3x^2}{\sqrt{(x^3 - 1)(x^3 + 1)^3}}$. 203. $\dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2 + 1}}$. 204. $\dfrac{2 + x - 5x^2}{2\sqrt{1 - x}}$.

205. $\dfrac{1 + 3x^2 - 2x^4}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$. 206.$\dfrac{x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{(x - 1)(x - 2)(x - 3)^3}}$.

207.$\dfrac{-5x^2 + 16x + 79}{3\sqrt{x - 4}\ \sqrt[3]{(x + 3)^5}\ \sqrt{(x + 2)^5}}$.

208.$\dfrac{(71 + 3x - 4x^2)(x - 1)^2}{(x + 4)^4 (x + 5)^5}$. 209.$e^x x^{e^x - 1}(1 + x \ln x)$.

210.0.211.$e^x (x + 1)^{e^x}\left(\ln(x + 1) + \dfrac{1}{x + 1}\right)$. 212.$-\dfrac{e^x}{x^x} \ln x$.

213.$e^x (\ln x)^{e^x}\left(\dfrac{1}{x \ln x} + \ln(\ln x)\right)$. 214.$x^{x^x} x^x \left(\ln x + \ln^2 x + \dfrac{1}{x}\right)$.

215. $e^{e^v} v^v (e^v + \ln v + 1)$. 216. $x^{\sqrt{1 - x}}\left(\dfrac{\sqrt{1 - x}}{x} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{1 - x}}\right)$.

217.$-\left(\dfrac{1}{x}\right)^x (\ln x + 1)$. 218.$(\sin x)^{x - 1}(\ln(\sin x) \sin x + x \cos x)$.

219. $\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} + \ln x \sec^2 x\right) x^{\operatorname{tg} x}$. 220. $(2x \operatorname{cosec} 2x + \ln \operatorname{tg} x)(\operatorname{tg} x)^x$.

221.$(\sin x)^{\operatorname{tg} x}(1 + \sec^2 x \ln \sin x)$. 222.$(x + 1)^{\arccos x}\left(\dfrac{\arccos x}{x + 1} - \right.$

$\left. - \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$.223. $2(\operatorname{arctg}^2 x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\ln \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x (1 + x^2)}\right)$.

224. $e^x (\operatorname{sh} x)^{e^x}(\operatorname{cth} x + \ln(\operatorname{sh} x))$. 225.$-7; 3$.

226. 5. 227. $\frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. 231. 1) $\begin{cases} \frac{3}{x}\left(x^3 \sin\frac{3}{x^3} - 3\cos\frac{3}{x^3}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2\arcsin x \left(\frac{\cos\frac{5}{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{5\arcsin x \sin\frac{5}{x^2}}{x^3}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0: \end{cases}$

3) не існує в точці $x = 0$; 4) $\begin{cases} \frac{2x - 3x^2 \sin\frac{1}{3x} + \frac{x}{3}\cos\frac{1}{3x}}{1 + x^4\left(1 - x\sin\frac{1}{3x}\right)^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

237. 1) $4x$; 2) $3x^2 - 18x + 20$; 3) $6x^2$. 238. $\frac{2\sqrt{1+y}}{2+3y}$. 239. $-\frac{2x}{\cos y}$.

240. $\frac{y^2}{xy - x^2}$. 241. $\frac{1}{x\cos y}$. 242. $\frac{\sin 2y}{2}$. 243. $\sqrt{1 - 2y - y^2}$.

244. $\frac{1}{\cos(y + e^y)(1 + e^y)}$. 245. $\frac{1 + y^2}{x}$. 246. $\frac{1}{\sin x}$; ch$y$.

247. $\frac{\cos \ln x}{x}$; $\frac{\sqrt{1-y^2}}{e^{\arcsin y}}$. 248. 1. 249. 0,5. 250. $-\frac{1}{6\sqrt{3}}$. 251. $-0{,}5$.

252. $(\operatorname{arcsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{arcch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\operatorname{arcth} x)' =$

$= \frac{1}{1-x^2}$. 253. $\frac{3t^2+2}{3}$. 254. $-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t$. 255. $\frac{2t}{t-1}$. 256. -4.

257. $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. 258. $-\operatorname{tg} 3t$. 259. $\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$. 260. $-\frac{\cos t}{2(1+\cos t)}$.

261. $-\frac{2}{3e^{5t}}$. 262. $\frac{2t(1-2t)}{3(t+1)}$. 263. 1. 264. а) 0; б) $-\frac{2}{\pi}$. 267. $\frac{p}{y}$.

268. $-\frac{x}{y}$. 269. $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 270. $\frac{y}{y-x}$. 271. $\frac{y^2 - xy\ln y}{x^2 - xy\ln x}$. 272. $-\frac{\sin 2x}{y}$.

273. $\frac{x\ln 2 - y}{x\ln 2x}$. 274. $\frac{(ye^x - \ln y)y}{y^2 - ye^x + x}$. 275. $-\frac{y}{x}$. 276. $e^{\frac{2}{y+x}}$.

277. $-\sqrt{\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2}}$. 278. $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. 279. $\frac{x + y}{x - y}$. 280. $\sqrt{\frac{2 - y}{y}}$. 281. 2.

282. $-\frac{1}{e}$. 283. -1. 284. 0. 285. а) 0; б) 4; в) -6; г) 2 і 10.

286. а) $3x_0^2$; б) 3. 287. $\frac{6}{7}$. 288. $-\sqrt{3}$; -1. 289. $\frac{\pi}{4}$. 290. $-\operatorname{arctg} 2$.

291. $P\omega \operatorname{tg}\omega x \sec\omega x$. 292. $A\operatorname{tg}^2\omega x$. 293. (1; 0). 294. 1) arctg 2;

2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $x = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; $x = -1$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{2}{3}\pi$; 5) $x = 0$,

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; $x = 2$, $\varphi = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; 6) $x = 0, \varphi = 0$; $x = 1, \varphi = 0$; $x =$

$= 2$, $\varphi = \operatorname{arctg} 8$; 7) $x = -2, \varphi = \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$; $x = 3$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{5}{6}$;

8) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; 9) $x = 2, \varphi = \operatorname{arctg} 2$; $x = -2, \varphi = \pi - \operatorname{arctg} 2$. 295. $\frac{\pi}{4}$.

296. 1) $(1; -4)$; $\left(\frac{1}{3}; -\frac{104}{27}\right)$; 2) $(0; -5)$; $(1; -4)$ $(2; -5)$;

3) $\left(-5; \frac{10}{e^5}\right)$; $(3; -6e^3)$; 4) $(\pi k; (-1)^k)$, $k \in Z$; 5) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

297. $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in Z$. 298. $\left(\frac{1}{2}; \ln\frac{1}{2}\right)$. 299. $(-2; 3)$; $(2; 7)$.

300. $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$. 302. 1) $3y - 4x + 7 = 0$; 2) $y = 4x - 6$;

3) $x = 3$; 4) $y = \frac{x}{2}$; 5) $y = \frac{x}{4}$; 6) $y = 3x$; 7) $y = \frac{4}{7}x$; 8) $y = \frac{1}{e}$;

9) $y = 0$. 303. $y + 3x + 6 = 0$. 304. $y = 1$; $2y + x - 2 = 0$.

305. 1) $x + 2 = 0$; 2) $y = 0$; 3) $4y + 8x - \pi - 8 = 0$;

4) $x - 2 = 0$; 5) $2y + x - 1 = 0$. 306. (2; 4). 309. $y - 2x + 1 = 0$.

311. 1) $y + 2 = 0$; $x = 0$; 2) $y + 3x - 6 = 0$; $3y - x - 8 = 0$; 3) $x = 3$; $y = 0$; 4) $y + x + 6 = 0$; $y = x$; 5) $y - x - 1 = 0$; $y + x - 3 = 0$; 6) $y = a(bx + 1)$; $y = a - \frac{x}{ab}$; 7) $y = 1$; $x = \frac{\pi}{4}$; 8) $3y + 2x - 1 = 0$; $2y - 3x - 5 = 0$; 11) $y + x - 2 = 0$; $y = x$; 12) $y + x - 8 = 0$; $y = x$; 13) $13y - 14x - 12 = 0$; $14y + 13x - 41 = 0$; 14) $y = x$; $y = -x$.

312. 1) $x - y + 2a - \frac{a\pi}{2} = 0$; $x + y - \frac{a\pi}{2} = 0$; 2) $y = a\pi$; $x + a = 0$; 3) $x + y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$; $x - y = 0$; 4) $x + y - 3a = 0$; $x - y + a = 0$; 5) $x = 0$; $y - a = 0$. **313.** 1) $(0; 0)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $(1; 1)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 2) $(1; \pm 2)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$; 4) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{(-1)^k}{\sqrt{2}}\right)$, $\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$; 6) $\left(\ln\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$; 10) $(0; 0)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $(2; 2)$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; 11) $(1; 1)$, $\varphi = \operatorname{arctg} 3$. **315.** $2\sqrt{2}$; 2; $2\sqrt{2}$; 2.

316. $\frac{1}{\ln 3}$. **320.** 1) $\operatorname{arctg}\varphi$; 2) $\operatorname{arctg}\varphi$; 3) $\operatorname{arctg}\frac{1}{k}$; 4) $\frac{\pi}{2} - 2\varphi$.

322. $\operatorname{th} kt$. **323.** 27. **325.** $5g$. **326.** 12. **329.** $\frac{g}{k}(1 - e^{-kt})$. **331.** 1 м/с. **332.** Зменшується з швидкістю 0,32. **333.** $v_x = 10$ м/с; $v_y = (10\sqrt{3} - 9{,}8)$ м/с; $v \approx \sqrt{496 - 196\sqrt{3}}$. **334.** $\left(\frac{1}{8}; -3\frac{31}{32}\right)$. **335.** $\left(3; \frac{16}{3}\right)$. **336.** $4\sqrt{3}$ км/год. **339.** $r\omega$. **340.** $b - 2ct$; $t = \frac{b}{2c}$.

341. $\frac{\pi}{3}$. **342.** $0{,}05\pi$; $0{,}2\pi$. **343.** Діагональ зростає з швидкістю $\approx 1{,}96$ см/с; а площа — з швидкістю 10 м/с. **345.** $\frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}$.

346. $-A\varphi \sin \varphi t$. 347. $i_0\omega k \cos \omega t$. 350. 1,003. 353. 9π.

354. $\Delta y \approx 0{,}003001$; $dy = 0{,}003$. 355. $\Delta y \approx 0{,}00739$; $dy = 0{,}0075$.

356. $\Delta y \approx 0{,}008006$; $dy = 0{,}008$. 357. 2. 358. -2. 361. $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 362. $(12x^2 + 4x + 1)dx$. 363. $\left(5x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}\right)dx$.

364. $\left(\frac{8}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{9}{2}\sqrt{x} + 4\right)dx$. 365. $\frac{2x\,dx}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. 367. $\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

368. $-\frac{2dx}{(\sin x - \cos x)^2}$. 370. $\frac{5}{2x}dx$. 371. $4e^{\sin 4x}\cos 4x\,dx$.

372. $2e^t \sin t\,dt$. 373. $-\varphi \sin \varphi\,d\varphi$. 375. $\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$.

376. $x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x\right)dx$. 377. $x^{x^2+1}(\ln x^2 + 1)dx$.

378. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}\right)dx$. 379. $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right)dx$.

381. $-\frac{\sin x}{\sqrt{4\cos^2 x - 1}}dx$. 382. $\frac{x \arccos x}{\sqrt{1-x^2}\,(1-x^2)}dx$. 390. $-\frac{4}{7}dx$.

391. $-6dx$. 396. dx. 397. 2,0058. 400. 1,5507. 401. 0,765.

402. 0,940. 403. 1) 4,125; 2) 4,083; 3) 2,062. 404. Збільшиться на 18,8 см^2. 405. $\approx 0{,}03$. 408. Збільшиться на 2,23 см.

409. $4(3x^2 - 1)$. 410. $\frac{6(x^{11} + 12)}{x^{10}}$. 411. $\frac{2}{(x+1)^3}$. 412. $-\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$.

413. $2e^x \cos x$. 414. $2^x(x^2 \ln^2 2 + x \ln 16 + 2)$. 415. $e^x(x+2)$.

416. $-\frac{1}{\sin^2 x}$. 418. $4\,\mathrm{ch}\,2x$. 421. $\frac{3x\sqrt{1-x^2} + (1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

422. $x^{x-1}\,[x(\ln x + 1)^2 + 1]$. 423. $-\frac{1}{16}$. 425. 2. 437. $\frac{\ln x^2 - 3}{x^3}dx^2$.

439. $2e^{-2x}(2x^2 - 10x + 5)dx^2$. 441. $-\frac{2\sin(\ln x)}{x}dx^2$. 444. $a_0 n!$

445. $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$. 447. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,3^n}{(3x+4)^n}$.

448. $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$. 451. $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

453. $(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x+1)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right)$.

454. $\frac{(-1)^n n!}{3}\left(\frac{2}{(x-7)^{n+1}}+\frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$. 456. $\frac{720}{(x-1)^7}$.

457. $-\frac{10080}{x^8}$. 458. $5(3^9\cos 3x+\cos x) - \frac{x}{2}(3^{10}\sin 3x + \sin x)$.

460. $-4e^{-x}\cos x$. 465. $2\cdot 6!\,dx^4 = 1440dx^4$. 469. $-\frac{81}{4y^3}$.

472. $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. 473. $\frac{(1-e^{x+y})(e^x-e^y)}{(e^y+1)^3}$.

475. $\frac{-y}{(1-\cos(x+y))^3}$. 477. $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. 481. $-\frac{1}{6t^4}$. 483. $\frac{1+t^2}{4t^3}$.

484. $-\frac{3}{4\sin^3 t}$. 486. 0. 487. $(1+t^2)(1+3t^2)$. 488. $2e^{6t}$.

489. $\frac{2(1+t)^3}{te^t}$. 491. $-\mathrm{tg}^3\, t\sec t$. 492. 2. 494. −0,5.

498. $-\frac{3\cos t}{16\sin^5 t}$. 500. $\frac{4e^{2t}(2\cos t+\sin t)}{(\sin t-\cos t)^5}$. 503. $k^n t^k$. 504. 0. 505. 0.

509. $x'' = -\frac{f''}{(f')^3}$; $x''' = \frac{(3(f'')^2 - f'\cdot f''')}{(f')^5}$. 511. $\frac{1}{\mathrm{ch}^2\, t}$.

513. $a_x = 0$, $a_y = -g$, $a = -g$. 515. $-g$. 516. 7,5 км/год.

519. $t = 2$ с : $13\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $14\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$; $t = 3$ с : $19\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $18\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. 520. $-Ak^2e^{-kt}$.

524. $\frac{PL}{24}$. 541. $\frac{(2 \pm \sqrt{7})}{3}$. 556. (2; 4). 557. 0,5 або $\sqrt{2}$. 568. $\frac{\pi}{4}$.

569. 1,5. 570. -1. 572. $\frac{1}{n}$. 573. $3\frac{3}{4}$. 574. 0,5. 575. $-\frac{4}{7}$. 576. 1.

578. $-\frac{1}{8}$. 579. $\ln\frac{a}{b}$. 580. $-\frac{1}{6}$. 581. $\cos a$. 582. 2. 583. -1. 584. $-\frac{1}{4}$.

585. $\frac{1}{6}$. 586. $-\frac{1}{3}$. 587. -2. 588. $\frac{20}{77}$. 590. 2. 591. 0. 592. 0. 593. 2.

594. $-\frac{1}{3}$. 595. $\frac{1}{12}$. 596. -1. 597. 0. 598. 0,5. 599. 0. 602. $-0{,}5$.

603. $-0{,}5$. 605. 1. 606. 1. 607. 1. 608. 1. 610. 1. 611. 1. 612. 1.

613. e. 614. 1. 615. $\frac{1}{e}$. 616. 1. 617. 1. 618. e^2. 619. $e^{-\frac{1}{3}}$. 620. $e^{-\frac{2}{\pi}}$.

621. 1. 622.1. 623. 0. 624. 1) $e^5\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{2^kx^k}{k\,!} + o(x^n)$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{\cos\left(3+\frac{k\pi}{2}\right)}{3^k k\,!}x^k + o(x^n)$; 4) $\sum\limits_{k=0}^{n} 3^k x^k + o(x^n)$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{3^{k+1}}x^k + o(x^n)$; 7) $\ln 3 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{3}\right)^k x^k + o(x^n)$;

8) $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^{k+5}(\ln 2)^k}{k\,!}x^k + o(x^n)$.

625. 1) $2 + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3k+2}{3^k k\,!}x^k + o(x^n)$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k x^k}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{3^k x^k}{k} + o(x^n)$;

6) $\ln\frac{4}{5} - \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{5^k x^k}{4^k k} + \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 4^k x^k}{5^k k} + o(x^n)$;

7) $\ln 2 - \sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\frac{x^k}{k} + o(x^n)$;

10) $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{k+2}}{k}+o(x^n)$.

626. 1) $-\frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k+\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^{k+1}}\right)+o(x^n)$; 2) $3-\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$;

3) $-\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{3^k}x^{k+2}+\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{3^k}x^k\right)+o(x^n)$;

6) $\frac{7}{5}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}x^k-\frac{8}{5}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{3^{k+1}}+o(x^n)$;

7) $1+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kx^k}{3^{k+1}}-\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$. 627. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{3^{2k}(2k)\,!}+o(x^{2n})$;

2) $\sum_{k=0}^{n}\frac{4^{2k+1}x^{2k+2}}{(2k+1)\,!}+o(x^{2n})$;

5) $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(4^{2k+1}-2^{2k+1})\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}+o(x^{2n+1})$;

7) $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2^{2k}+4^{2k})\,x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}+o(x^{2n+1})$;

8) $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(2^{2k}+6^{2k})\frac{x^{2k}}{(2k)\,!}+o(x^{2n})$.

628. 1) $\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k\sin\left(1+\frac{k\pi}{2}\right)(x-1)^k}{k\,!}+o((x-1)^n)$;

2) $-e-e\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k\,!}(k+1)(x+1)^k+o((x+1)^n)$. 629. 1) -15;

2) 0; 3) 60 ! 632. $\frac{27}{4}$. 633. 0. 634. $\frac{4}{3}$. 635. $\frac{8}{15}$. 636. -2. 637. $\frac{7}{6}$.

638. $\frac{4}{3}$. 639. 0. 640. -4. 641. $\frac{1}{4}$. 643. -6. 644. $\frac{7}{4}$. 646. 0,5. 648. 0,4.

649. В інтервалі $(-\infty; 2)$ — спадає, $(2; +\infty)$ — зростає.

650. $(-\infty; -2)$ і $(0; +\infty)$ — спадає; $(-2; 0)$ — зростає.

651. $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ — спадає, $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$ — зростає. **652.** $(-1; 3)$ — спадає, $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$ — зростає. **653.** $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$, $(1; +\infty)$ — зростає, $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$ — спадає. **654.** $(-\infty; -1)$ — спадає, $(-1; +\infty)$ — зростає.

655. $(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$ — спадає, $(0; 2)$ — зростає.

656. $(-\infty; 1-\sqrt{3})$; $(1+\sqrt{3}; +\infty)$ — зростає, $(1-\sqrt{3}; 1)$, $(1; 1+\sqrt{3})$ — спадає. **657.** $(-\infty; 2)$ — спадає, $(2; +\infty)$ — зростає. **658.** $\left(1; \frac{4}{3}\right)$ — спадає, $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$ — зростає.

660. $(0; 1)$, $(1; e)$ — спадає, $(e; +\infty)$ — зростає. **661.** $(-\infty; 4)$, $(4; +\infty)$ — спадає. **662.** $(-\infty; 4)$, $(16; +\infty)$ — зростає, $(4; 10)$, $(10; 16)$ — спадає. **664.** $(-2; 0)$ — зростає. **667.** $(-\infty; 0)$ — зростає, $(0; +\infty)$ — спадає. **669.** $(-\infty; -3)$ — спадає, $(-3; +\infty)$ — зростає. **670.** $(-\infty; -e^{-2})$ — зростає, $(-e^{-2}; 0)$ — спадає. **671.** $a \geq 0$. **672.** $a \leq -3$, $a \geq 1$.

673. $0 \leq a \leq 28$. **674.** $a \geq 1$. **675.** $a \geq 0$. **676.** $x = 1$ — максимум, $x = 6$ — мінімум. **677.** $x = 1$ — максимум, $x = 5$ — мінімум.

678. $x = 0$ — максимум, $x = \pm 1$ — мінімум. **679.** $x = 1$ — максимум, $x = 3$ — мінімум, $x = 0$ — екстремума немає.

680. $x = \frac{7}{3}$ — максимум, $x = 3$ — мінімум. **681.** $x = \frac{3}{2}$ — максимум, $x = 1$, $x = 2$ — мінімуми. **682.** $x = -2$ — максимум, $x = \frac{2}{3}$ — мінімум, $x = 4$ — екстремума немає. **684.** $x = \frac{1}{2}$ — мінімум, $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ — екстремума немає. **687.** $x = 1$ —

мінімум, $x = -1$ — максимум, $x = 0$ — екстремума немає. **688.** $x = 1$ —максимум, $x = -1$ — мінімум. **694.** Екстремумів немає. **695.** $\left(\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — максимуми, $\left(2\pi k - \frac{2}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — мінімуми, $k \in \mathbf{Z}$. **696.** Екстремумів немає. **697.** $\left(\pi k - \frac{\pi}{6}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ — мінімуми, $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ — максимуми. **698.** $\left(1; \frac{1}{e}\right)$ — максимум. **699.** $(-2; -4e^{2})$ — мінімум, $(4; 8e^{-4})$ — максимум. **700.** $(0; 4)$ — мінімум. **701.** $\left(1; \frac{11}{e}\right)$ — максимум. **703.** $(0; 0)$ — мінімум. **704.** $(1; 0)$ — мінімум, $(e^{2}; 4e^{-2})$ — максимум. **705.** $\left(1; \ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)$ — мінімум. **706.** $\left(\frac{1}{e}; e^{-\frac{1}{e}}\right)$ — мінімум. **707.** $\left(e; e^{\frac{1}{e}}\right)$ — максимум. **709.** Екстремумів немає. **712.** $(1; 0)$ — мінімум. **713.** Екстремумів немає. **714.** $\left(-\frac{\ln 2}{2}; 0\right)$ — максимум.

724. $x = \frac{r}{2}$. **725.** $R = 0{,}03$. **726.** $t = 1380°$. **730.** $y_{\min} = 18$ при $x = 2$, $y_{\max} = 154$ при $x = 6$. **732.** $y_{\min} = -31$ при $x = -1$, $y_{\max} = 513$ при $x = 3$. **734.** $y_{\min} = \frac{4}{5}$ при $x = \pm 3$, $y_{\max} = 1$ при $x = 0$. **736.** $y_{\min} = -\sqrt{2}$ при $x = \frac{5}{4}\pi$, $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$. **737.** $y_{\min} = -\frac{\pi}{2}$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $y_{\max} = \frac{\pi}{2}$ при $x = -\frac{\pi}{2}$. **739.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, $y_{\max} = 1$ при $x = \frac{\pi}{4}$. **745.** $y_{\min} = 2$

при $x = 1$, $y_{\max} = 2e^2 - 1$ при $x = e$. **749.** $r = h$. **751.** $\frac{4}{3}r$. **752.** $\frac{h}{3}$. **754.** 0,5. **755.** $\sqrt[3]{3}$. **756.** $\frac{2}{\sqrt{3}}r$. **757.** $r\sqrt{2}$. **758.** $4r$. **759.** $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. **760.** – 2. **762.** 8 см. **764.** 20 см. **766.** $h = r\sqrt{2}$, r — радіус основи. **767.** Радіус кола дорівнює висоті прямокутника. **768.** На висоті 15 м. **772.** $\operatorname{tg} \alpha = f$. **773.** $\frac{b}{\sqrt{2}}$. **776.** $\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$. **777.** 1,92 год. **778.** $\sin \alpha = \frac{S_1}{S_2}$. **781.** $t = 4$. **784.** Всюди опукла вниз. **785.** $(-\infty; 0)$ — опукла вгору, $(0; +\infty)$ — опукла вниз. **786.** Всюди опукла вниз. **787.** $(-\infty; 1)$ — опукла вгору, $(1; +\infty)$ — опукла вниз. **788.** $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$ — опукла вниз, $(2; 4)$ — опукла вгору. **790.** $(-\infty; 4)$ — опукла вгору, $(4; +\infty)$ — опукла вниз. **791.** $\left(\frac{\pi(4k+1)}{2}; \frac{\pi(4k+3)}{2}\right)$ — опукла вниз, $\left(\frac{\pi(4k+3)}{2}; \frac{\pi(4k+5)}{2}\right)$ — опукла вгору. **792.** $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ — опукла вгору, $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ — опукла вниз. **794.** $(-\infty; -3)$, $(-1; +\infty)$ — опукла вниз, $(-3; -1)$ — опукла вгору. **795.** $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ — опукла вгору, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}; +\infty\right)$ — опукла вниз. **796.** $(-\infty; 0)$ — опукла вгору, $(0; +\infty)$ — опукла вниз. **797.** $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$. **798.** $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **799.** $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. **802.** $\left(\frac{3}{2}; e^{-2}\right)$. **803.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2\right)$. **804.** $(5; 5)$. **811.** $\left(-\frac{1}{e}; -e\right)$. **812.** $(0; 0)$. **819.** $x = 2$, $x = -2$, $y = 0$. **820.** $x = 0$,

$x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. 821. $y = 0$. 822. $y = 1$. 823. $y = 0$. 825. $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$. 826. $y = \pm 1$. 827. $y = x + 1$. 828. $y = \pm x$. 829. $y = 1$.

830. $x = 0$, $y = 1$ — ліва, $y = 0$ — права. 831. $x = 0$, $y = 1$. 832. $y = 0$.

833. $y = x - \pi$, $y = x + \pi$. 834. $x = 0$, $y = -x + \frac{3}{2}$, $y = -x - \frac{3}{2}$.

835. $y = 0{,}5$. 836. $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{2x - 3}{4}$.

Список рекомендованої літератури

1. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М., 1977.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика: Задачник. М., 1982.
3. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М., 1984.
4. *Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О.* Сборник задач по высшей математике. М. Т.1. 1958; Т.2. 1959.
5. *Гусак А.А.* Пособие к решению задач по высшей математике. Минск, 1968.
6. *Демидович Б.П.* Задачи и упражнения по математическому анализу (для втузов). М., 1959.
7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. М., 1982. Ч.1.
8. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. М., 1981. Т.1.
9. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М., 1984.
10. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. М., 1986.
11. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. М., 1983.
12. *Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П.* Справочное пособие по математическому анализу. К., 1984.
13. *Орлов М.* Інженерна математика. Х.; К., 1931. Ч.1.
14. *Осипов В.Ф.* Конкурсные задачи по математике. Задачи на наибольшее и наименьшее значение. Л., 1991. Вып. 2.
15. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М., 1981.
16. *Сборник* задач по математике для втузов/ Под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича. М. Т.1. 1981.
17. *Сборник* задач по математике для поступающих во втузы/ Под ред. М.И. Сканави. Минск, 1990.
18. *Стрижак Т.Г., Туз Ю.М., Барановська Г.Г., Веклич І.В.* Математика. Числові системи. Многочлени. Визначники. К., 1991.
19. *Шипачев В.С.* Высшая математика. М., 1990.

ЗМІСТ

Навчальний посібник

Стрижак Тамара Григорівна
Коновалова Наталія Романівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ:
приклади і задачі

Художник обкладинки *Г.Т.Задніпряний.* Художній редактор *Т.О.Щур.*
Технічний редактор *Л.І.Швець.* Коректор *К.С.Коваленко*

Здано до набору 28.10.94. Підп. до друку. 11.08.95. Формат 84х108/32. Папір друк. № 2.
Гарн. Тип Таймс. Офсет. друк. Ум. друк. арк. 12,6. Ум. фарбовідб. 12,9. Обл.-вид. арк. 13,53.
Вид. №3609. Зам. 133

Оригінал-макет виготовлено у в ВМ АТ за допомогою програми
Xepox Ventura Publisher 2.0 інжен
та старшими операторами Зимінс

Видавництво «Либідь» при Киї :рещатик, 10

Білоцерківська книжкова фабрі Курбаса, 4