В. І. ДІСКАНТ
Л. Р. БЕРЕЗА
О. П. ГРИЖУК
Л. М. ЗАХАРЕНКО

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

•ВИЩА ШКОЛА•

В. І. ДІСКАНТ
Л. Р. БЕРЕЗА
О. П. ГРИЖУК
Л. М. ЗАХАРЕНКО

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Київ
«ВИЩА ШКОЛА»
2001

УДК 512.64 + 514(075.8)
ББК 22.1я73
З-41

Гриф надано Міністерством освіти і науки України (лист від 22 вересня 2000 р. № 2/1496)

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України *О. А. Борисенко* (Харківський державний університет); д-р фіз.-мат. наук, проф. *Ю. А. Амінов* (Фізико-технічний інститут низьких температур)

Редакція літератури з економіки і фундаментальних наук
Редактор *О. Ф. Воробйова*

Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / В. І. Діскант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. — К.: Вища шк.., 2001. — 303 с.: іл.
З-41 ISBN 966-642-030-09

Викладено короткі теоретичні відомості з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, приклади теоретичного характеру. Наведено зразки розв'язування основних типів задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Для студентів вищих навчальних закладів.

УДК 512.64 + 514(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 966-642-030-9

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Збірник задач відповідає програмі курсу «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» для вищих технічних навчальних закладів.

У навчальному посібнику, що складається з дев'яти розділів, наведено короткі теоретичні відомості: означення, твердження (без доведень), приклади теоретичного характеру. Збірник містить зразки розв'язування основних типів задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, задачі для розв'язування в аудиторії і самостійного розв'язування, велику кількість зауважень, що роз'яснюють геометричний зміст теоретичних відомостей і розв'язків основних типів задач. Усе це дасть змогу студентові застосовувати теоретичний матеріал, відпрацьовувати техніку і з'ясовувати геометричний зміст розв'язування задачі без звернення до додаткової літератури.

Основними особливостями збірника задач є: введення n-вимірного лінійного простору L_n на базі узагальнення лінійних операцій над векторами звичайного простору (до розгляду добутків векторів у звичайному просторі); запис розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь у вигляді, зручному для застосування в лінійному програмуванні; розгляд векторної алгебри в n-вимірному евклідовому просторі E_n при $n \geq 2$ у випадку, коли в E_n уведена косокутна система координат; наявність задач на лінійні образи в E_n ($n > 3$), на з'ясування геометричного змісту матриці лінійного оператора, на різні методи зведення квадратичної форми до канонічного вигляду як в L_n, так і в E_n; введення поняття тензора довільного рангу в E_n на базі розгляду полілінійної функції.

Структура збірника задач дає можливість максимально використовувати та закріпляти методи й результати лінійної алгебри під час розв'язування задач з аналітичної геометрії.

Розв'язування запропонованих задач цього збірника з урахуванням його особливостей дасть можливість студентові підготуватися до більш доступного сприйняття таких розділів математики, як лінійне програмування, ріманова геометрія, тензорний аналіз.

Крім студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів цей навчальний посібник можна рекомендувати для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів і економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

1 МАТРИЦІ І ДЕТЕРМІНАНТИ

1.1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Означення 1.1. Матрицею називається прямокутна таблиця чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1.1)$$

що містить m рядків та n стовпців.

Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною*, а число m, що дорівнює n, — її *порядком*. У загальному випадку матриця називається *прямокутною* (розмірів $m \times n$). Числа a_{ij}, що утворюють матрицю, називаються її *елементами*.

У запису a_{ij} перший індекс i означає номер рядка, а другий індекс j — номер стовпця.

Поряд з позначенням (1.1) використовують ще й таке позначення матриці:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

або скорочено $\|a_{ij}\|$ $(i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n)$. Часто матрицю (1.1) позначають однією буквою $\mathcal{A}$.

Матриця, що складається з одного стовпця

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

називається *матрицею-стовпцем*.

Матриця, що складається з одного рядка $(a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n)$, називається *матрицею-рядком*.

Для квадратної матриці вводяться поняття головної та побічної діагоналей. *Головною* називається діагональ, яку утворюють елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$, *побічною* — діагональ, яку утворюють елементи $a_{n1}, a_{(n-1)2}, ..., a_{1n}$.

Квадратна матриця, всі елементи якої, за винятком елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, тобто матриця, що має вигляд

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

називається *діагональною*.

Діагональна матриця, у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою $\mathcal{E}$. Матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, називається нульовою і позначається буквою $\mathcal{O}$.

Рівність матриць. Дві матриці називаються рівними, якщо вони мають однакові розміри і всі їхні відповідні елементи збігаються.

Додавання матриць. Сумою $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{C}$ двох матриць $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, однакових розмірів $m \times n$, називається матриця $\mathcal{C}$ тих самих розмірів, елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів матриць $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$, тобто

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n).$$

Операція знаходження суми матриць називається *операцією додавання матриць*.

Властивості операції додавання матриць:

1. $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{B} + \mathcal{A}$ (*комутативна властивість*).
2. $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) + \mathcal{C} = \mathcal{A} + (\mathcal{B} + \mathcal{C})$ (*асоціативна властивість*).

Множення матриці на число. Добутком $\alpha\mathcal{A} = \mathcal{C}$ матриці $\mathcal{A} = \|a_{ij}\|$ розмірів $m \times n$ на число α називається матриця $\mathcal{C} = \|c_{ij}\|$ тих самих розмірів, елементи якої здобуваються із відповідних елементів матриці $\mathcal{A}$ множенням на число α, тобто

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij} \quad (i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n).$$

Операція знаходження добутку матриці на число називається *операцією множення матриці на число.*

Властивості множення матриці на число:

1. $\alpha(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \alpha\mathcal{A}+\alpha\mathcal{B}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми матриць*).

2. $(\alpha+\beta)\mathcal{A} = \alpha\mathcal{A}+\beta\mathcal{A}$ (*дистрибутивна властивість матричного множника відносно суми чисел*).

3. $(\alpha\beta)\mathcal{A} = \alpha(\beta\mathcal{A})$ (*асоціативна властивість*).

Різниця $\mathcal{A}-\mathcal{B}$ двох матриць однакових розмірів визначається рівністю $\mathcal{A}-\mathcal{B}=\mathcal{A}+(-1)\mathcal{B}$.

Множення матриць. Добутком $\mathcal{AB}=\mathcal{C}$ матриці $\mathcal{A}$ розмірів $m\times n$ і матриці $\mathcal{B}$ розмірів $n\times p$ називається матриця $\mathcal{C}$ розмірів $m\times p$, елемент c_{ij} якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці $\mathcal{A}$ та елементів j-го стовпця матриці $\mathcal{B}$, тобто

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p).$$

Операція знаходження добутку матриць $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ називається *операцією множення матриць* $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$.

Зауваження 1.1. Операція множення двох матриць можлива лише в тому випадку, коли число стовпців у першому співмножнику дорівнює числу рядків у другому.

Властивості операції множення матриць:

1. $(\mathcal{AB})\mathcal{C}=\mathcal{A}(\mathcal{BC})$ (*асоціативна властивість*).

2. $\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB}+\mathcal{AC}$ (*дистрибутивна властивість першого множника*).

3. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C}=\mathcal{AC}+\mathcal{BC}$ (*дистрибутивна властивість другого множника*).

Множення матриць у загальному випадку не підлягає комутативній властивості.

Якщо $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, то матриці називаються комутативними.

Транспонування. Нехай дана матриця

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця

$$\mathcal{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

здобута із $\mathcal{A}$ заміною рядків на стовпці зі збереженням порядку їх слідування, називається *транспонованою* до $\mathcal{A}$.

Операція заміни матриці $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$ називається *транспонуванням матриці* $\mathcal{A}$.

Властивості транспонування матриці:

1. $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\mathrm{T}}=\mathcal{A}^{\mathrm{T}}+\mathcal{B}^{\mathrm{T}}$.
2. $(\alpha\mathcal{A})^{\mathrm{T}}=\alpha\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$.
3. $(\mathcal{AB})^{\mathrm{T}}=\mathcal{B}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}^{\mathrm{T}}$.
4. $(\mathcal{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathcal{A}$.

Якщо квадратна матриця $\mathcal{S}$ збігається зі своєю транспонованою матрицею $\mathcal{S}^{\mathrm{T}}$, тобто $\mathcal{S}=\mathcal{S}^{\mathrm{T}}$, то така матриця називається *симетричною*. Якщо квадратна матриця $\mathcal{K}$ відрізняється знаком від своєї транспонованої матриці $\mathcal{K}^{\mathrm{T}}$, тобто $\mathcal{K}= -\mathcal{K}^{\mathrm{T}}$, то така матриця називається *кососиметричною*.

Означення 1.2. Цілим додатним степенем $\mathcal{A}^n$ квадратної матриці $\mathcal{A}$ є добуток n матриць, рівних $\mathcal{A}$.

Задача. Знайти $f(\mathcal{A})$, якщо $f(x)=x^2-x-1$,

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження 1.2. Якщо в многочлені $f(x)$ аргумент x покладають рівним квадратній матриці $\mathcal{A}$, то вільний член a цього многочлена замінюють на матрицю $a\mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — одинична матриця того самого порядку, що й $\mathcal{A}$.

Розв'язання.

$$f(\mathcal{A})=\mathcal{A}^2-\mathcal{A}-\mathcal{E}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4+3+1 & 2+1-1 & 2+2+0 \\ 6+3+2 & 3+1-2 & 3+2+0 \\ 2-3+0 & 1-1+0 & 1-2+0 \end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} 2+1 & 1 & 1 \\ 3 & 1+1 & 2 \\ 1 & -1 & 0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 \\ 11 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

У задачах 1–6 обчислити $\mathcal{A}+\mathcal{B}$:

1. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&-1&5\\3&0&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3&5&0\\2&-1&7\\4&3&2\end{pmatrix}$.

2. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&5&2\\4&6&2\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&3&7\\2&4&-3\\5&6&4\end{pmatrix}$.

3. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2&0&3\\3&0&5\\1&-1&17\\0&1&3\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\3&4&1\\4&6&2\\2&5&6\end{pmatrix}$.

4. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&3&0\\3&4&3\\1&5&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&3&2\\4&-1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.

5. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0&4&-1&0&-3\end{pmatrix}$.

6. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$.

У задачах 7–10 знайти лінійні комбінації матриць:

7. $2\mathcal{A}+5\mathcal{B}$, якщо $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\\-1&5\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&4\\3&6\\2&7\end{pmatrix}$.

8. $2\mathcal{A}-3\mathcal{B}$, якщо $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&2\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&-3\end{pmatrix}$.

9. $\mathcal{A}-\frac{1}{2}\mathcal{B}$, якщо $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-2&5\\3&4\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0&6\\-12&3\end{pmatrix}$.

10. $-\mathcal{A}+2\mathcal{B}$, якщо $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&-1&2\\3&4&2\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&4&-3\end{pmatrix}$.

У задачах 11 і 12 знайти x_1 і x_2 із рівнянь:

11. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$.

12. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

У задачах 13–21 транспонувати матриці:

13. $\begin{pmatrix}5&0&-7&6\\3&8&2&-1\end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix}1&3&4&-5\end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix}2&3&4&5\\6&7&8&9\\10&11&-1&3\end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&4&2\\2&5&3\end{pmatrix}$.

18. $\begin{pmatrix}3&0\\4&5\\7&8\end{pmatrix}$. **19.** $\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\0\end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix}2&3&4\\5&-1&0\\3&1&1\end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

У задачах 22 і 23 знайти добутки матриць $\mathcal{AB}$ і $\mathcal{BA}$:

22. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&-4\\-1&-2&-4\\1&2&4\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

23. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&3&3\\1&2&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&0\\3&2&-1\end{pmatrix}$.

У задачах 24 і 25 обчислити $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$:

24. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}4&1&1\\-4&2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

25. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&2\\-1&2&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\3&-2&4\\-3&5&-1\end{pmatrix}$.

У задачах 26–35 обчислити $\mathcal{AB}$.

26. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&3&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\\2&1\end{pmatrix}$.

27. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&1&-1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

28. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\2&3&4\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1&3\\0&4\\0&1\end{pmatrix}$.

29. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0&1&2\\3&2&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

30. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}4&-1&0\\2&-2&1\\0&4&5\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

31. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$.

32. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

33. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2\\4\\5\\6\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

34. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\5 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

35. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

У задачах 36 і 37 знайти добутки матриць:

36. $\begin{pmatrix}4 & 3\\7 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-28 & 93\\38 & -126\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 3\\2 & 1\end{pmatrix}$.

37. $\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\-2 & -1 & 2\\3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}70 & 34 & -107\\52 & 26 & -68\\101 & 50 & -140\end{pmatrix}\begin{pmatrix}27 & -18 & 10\\-46 & 31 & -17\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

У задачах 38–44 обчислити вирази:

38. $\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & -4\end{pmatrix}^3$. **39.** $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}^5$. **40.** $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & -2\end{pmatrix}^n$.

41. $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$. **42.** $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n$. **43.** $\begin{pmatrix}a & 1\\0 & a\end{pmatrix}^n$.

44. $\begin{pmatrix}b_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\0 & b_2 & 0 & \dots & 0\\0 & 0 & b_3 & \dots & 0\\\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\0 & 0 & 0 & \dots & b_n\end{pmatrix}^k$.

45. Довести, що $T^2=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}2\varphi & \operatorname{sh}2\varphi\\\operatorname{sh}2\varphi & \operatorname{ch}2\varphi\end{pmatrix}$, якщо $T=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi\\\operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi\end{pmatrix}$.

46. Знайти загальний вигляд матриці $\mathcal{A}$, для якої $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathcal{A}=\mathcal{O}$.

47. Дано матриці

$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 2 & -2\end{pmatrix}$; $\mathcal{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 3\\3 & 3 & 4\end{pmatrix}$; $\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\2 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$.

Знайти добутки $\mathcal{AC}$, $\mathcal{ACD}$, $\mathcal{BD}$, $\mathcal{BC}$, $\mathcal{BCDA}$.

У задачах 48–51 знайти всі матриці, комутативні з кожною із таких матриць:

48. $\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & -1\end{pmatrix}$. **49.** $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$. **50.** $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$. **51.** $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

52. Обчислити $\begin{pmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{pmatrix}^5$, використовуючи рівність

$$\begin{pmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7 & 3\\5 & -2\end{pmatrix}.$$

У задачах 53–56 знайти $f(\mathcal{A})$:

53. $f(x)=x^2-5x+3$, $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 3\end{pmatrix}$.

54. $f(x)=2x^2+3x+5$, $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 4 & 1\\3 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

55. $f(x)=x^2-2x+1$, $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 2\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

56. $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$, $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\1 & 3 & -1\\2 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

57. Довести, що матриця $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ задовольняє рівняння $x^2-(a+d)x+ad-bc=0$.

58. Знайти всі матриці 2-го порядку, квадрат яких дорівнює нульовій матриці.

59. Довести, що якщо для матриць $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ існують добутки $\mathcal{AB}$ і $\mathcal{BA}$, до того ж $\mathcal{AB}=\mathcal{BA}$, то матриці $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ — квадратні і мають однаковий порядок.

60. Довести, що якщо $\mathcal{A}$ — діагональна матриця і всі елементи її головної діагоналі різні, то довільна матриця, що комутативна з $\mathcal{A}$, також діагональна.

1.2. ДЕТЕРМІНАНТИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо квадратну матрицю 2-го порядку

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.3. *Детермінантом 2-го порядку,* складеним з елементів цієї матриці $\mathcal{A}$, називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, яке позначається

$$|\mathcal{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо квадратну матрицю 3-го порядку

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.4. *Детермінантом 3-го порядку,* складеним із елементів цієї матриці $\mathcal{A}$, називається число, що дорівнює

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-\\-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \qquad (1.2)$$

яке позначається

$$|\mathcal{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Вираз (1.2) складений за правилом трикутника (рис. 1.1): добуток елементів, розміщених уздовж головної діагоналі та два добутки елементів, що стоять у вершинах двох рівнобедрених трикутників із основами, паралельними головній діагоналі, і з вершинами в протилежному куті, беруться зі знаком плюс. Три добутки, що складені за тим самим правилом, але відносно побічної діагоналі, беруться зі знаком мінус.

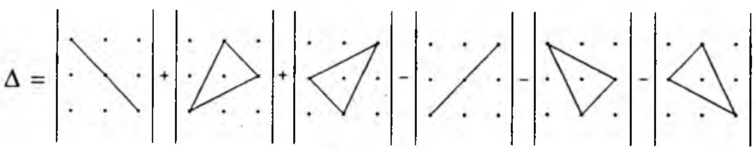

Рис. 1.1

Властивості детермінантів 2-го і 3-го порядку.

Властивість 1. Величина детермінанта не зміниться, якщо замінити кожний його рядок стовпцем із тим самим номером, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 2. Перестановка двох рядків (стовпців) детермінанта рівносильна множенню його на (-1).

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Властивість 3. Детермінант, який має два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця (рядка) детермінанта на довільне число k рівносильне множенню детермінанта на це число.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) рівні нулю, то й детермінант дорівнює нулю.

Наслідок 2. Детермінант, в якому відповідні елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

Властивість 5. Якщо кожний елемент i-го рядка (i-го стовпця, де $i = 1;\ 2;\ 3$) є сума двох доданків, то детермінант дорівнює сумі двох детермінантів, у першого з яких i-й рядок (i-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого — з других; інші елементи усіх трьох детермінантів однакові.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наслідок. Величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той самий множник.

Подальші властивості детермінантів пов'язані з поняттям мінора і алгебраїчного доповнення елементів детермінанта.

Означення 1.5. Мінором елемента a_{ij} називається детермінант, порядок якого на одиницю менший порядку даного детермінанта, утворений з даного детермінанта викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}. Мінор елемента a_{ij} позначається через Δ_{ij}.

Означення 1.6. *Алгебраїчним доповненням* $\mathcal{A}_{ij}$ *елемента* a_{ij} називається добуток мінора Δ_{ij} на величину $(-1)^{i+j}$, тобто

$$\mathcal{A}_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Властивість 6. Детермінант дорівнює сумі добутків елементів рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\mathcal{A}_{11}+a_{12}\mathcal{A}_{12}+a_{13}\mathcal{A}_{13}.$$

Властивість 7. Сума добутків елементів довільного рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Наприклад, в детермінанті 3-го порядку

$$a_{11}\mathcal{A}_{21}+a_{12}\mathcal{A}_{22}+a_{13}\mathcal{A}_{23}=0.$$

Зауваження 1.3. Розглянемо n цілих чисел 1; 2; 3; ...; n. Їх можна розмістити в різному порядку. Всілякі розміщення цих чисел називаються *перестановками*. Перестановка (1; 2; 3; ...; n), в якій числа розміщені в порядку зростання, називається *натуральною*.

Із n чисел 1; 2; ...; n можна скласти $n!$ перестановок.

Означення 1.7. Нехай є перестановка $(x_1, x_2, ..., x_n)$ чисел 1; 2; 3; ...; n. Два числа, що входять у цю перестановку, утворюють інверсію, якщо більше з цієї пари передує меншому. Число пар, що утворюють інверсію, називається *числом інверсій перестановки*.

Означення 1.8. Перестановка називається *парною*, якщо вона має парне число інверсій, і *непарною* в протилежному випадку.

Розглянемо квадратну матрицю n-го порядку

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 1.9. *Детермінантом n-го порядку*, складеним із елементів матриці $\mathcal{A}$, називається алгебраїчна сума $n!$ членів, кожний з яких є добутком n елементів a_{ik}, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця, при цьому член суми береться зі знаком плюс, якщо другі індекси його елементів утворюють парну перестановку, та із знаком мінус, якщо ця перестановка непарна, тоді як перші індекси утворюють натуральну перестановку. Детермінант n-го порядку позначають

$$|\mathcal{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для детермінантів n-го порядку залишаються в силі означення мінора і алгебраїчного доповнення елемента детермінанта. Детермінанти n-го порядку мають ті самі властивості, що й детермінанти 2-го і 3-го порядку. Зокрема, для детермінантів n-го порядку справедлива властивість 6, яку можна сформулювати так: детермінант n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто для будь-якого i = 1; 2; 3; ...; n має місце рівність

$$|\mathcal{A}|=a_{i1}\mathcal{A}_{i1}+a_{i2}\mathcal{A}_{i2}+\ldots+a_{in}\mathcal{A}_{in},$$

яка називається *розкладом детермінанта* $|\mathcal{A}|$ *за елементами i-го рядка*. Аналогічно для будь-якого k = 1; 2; 3; ...; n має місце розклад детермінанта $|\mathcal{A}|$ за елементами k-го стовпця:

$$|\mathcal{A}|=a_{1k}\mathcal{A}_{1k}+a_{2k}\mathcal{A}_{2k}+\ldots+a_{nk}\mathcal{A}_{nk}.$$

Властивість 6 дає змогу звести обчислення детермінанта n-го порядку до обчислення n детермінантів $(n-1)$-го порядку. Для спрощення обчислень доцільно спочатку перетворити детермінант так, щоб в одному з його рядків (стовпців) усі елементи, крім одного, перетворилися на нуль. Тоді обчислення даного детермінанта зведеться до обчислення одного детермінанта нижчого порядку. Таке перетворення детермінанта можна виконати, спираючись на його властивості, зокрема на наслідок властивості 5.

Задача 1. Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо його за елементами 2-го рядка:

$$\Delta = (-1)^{2+1} a \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} c \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} d \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9a + 12b - 9c + 3d.$$

Задача 2. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -x & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -x \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. В даному випадку для розкладу зручно вибрати 3-й стовпець, оскільки наявність нульових елементів дає можливість не обчислювати відповідних їм алгебраїчних доповнень (добуток нуля на відповідне число дорівнює нулю). Тобто

$$\Delta = 0\mathcal{A}_{13} + 0\mathcal{A}_{23} + 0\mathcal{A}_{33} + 3\mathcal{A}_{43} = 3\mathcal{A}_{43} = -3\Delta_{43};$$

$$\Delta = -3 \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} = 3x^3 + 9x.$$

Задача 3. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. За наслідком властивості 5 величина детермінанта не зміниться, якщо до елементів рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на один і той самий множник.

Помножимо елементи 1-го рядка на (-1) і додамо їх до відповідних елементів 2-го і 4-го рядків.

Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 7 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

У здобутому детермінанті елементи 1-го рядка помножимо на (-2) і додамо їх до відповідних елементів 3-го рядка.

Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо цей детермінант за елементами 1-го стовпця.

Дістанемо

$$\Delta = 1\mathcal{A}_{11} + 0\mathcal{A}_{21} + 0\mathcal{A}_{31} + 0\mathcal{A}_{41} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Перетворимо цей детермінант, додаючи до елементів 2-го рядка відповідні елементи 1-го рядка, помножені на (-1) і до елементів 3-го рядка відповідні елементи 1-го рядка, помножені на (-2).

Дістанемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & -5 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = -(-48) = 48.$$

Задачі для розв'язування

61. Визначити з яким знаком входить у детермінант 7-го порядку добуток $a_{33}a_{16}a_{72}a_{27}a_{55}a_{61}a_{44}$.

62. Підібрати значення i та j так, щоб добуток $a_{47}a_{63}a_{1j}a_{55}a_{7i}a_{24}a_{31}$ був членом детермінанта (якого порядку?) і входив до нього зі знаком плюс.

У задачах 63–65, використовуючи властивості детермінантів, показати, що такі детермінанти дорівнюють нулю:

63. $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \dfrac{b+c}{2} & \dfrac{c+a}{2} & \dfrac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}$. **64.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

65. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

У задачах 66–112 обчислити детермінанти:

66. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **68.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

69. $\begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}$. **70.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$. **71.** $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

72. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & \sin\alpha \\ \cos\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix}$. **73.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$. **74.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

75. $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$. **76.** $\begin{vmatrix} 2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin^2\varphi-1 \\ 2\cos^2\varphi-1 & 2\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix}$.

77. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$. **78.** $\begin{vmatrix} \alpha+\beta i & \gamma+\delta i \\ \gamma-\delta i & \alpha-\beta i \end{vmatrix}$.

79. $\begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{vmatrix}$, де $\varepsilon = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$. **80.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

81. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix}$. **82.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix}$. **83.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix}$.

84. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **85.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **86.** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$.

87. $\begin{vmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **88.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **89.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

90. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. **91.** $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. **92.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

93. $\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}$. **94.** $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 6 \end{vmatrix}$. **95.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$.

96. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **97.** $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$.

98. $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$.

99. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

100. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$. **101.** $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

102. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$. **103.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

104. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. **105.** $\begin{vmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 10 \end{vmatrix}$.

106. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$. **107.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

108. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -d & c \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & e & -f & 0 \end{vmatrix}$. **109.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ -1 & 0 & 3 & \ldots & n \\ -1 & -2 & 0 & \ldots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$.

110. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$. **111.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

112. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

У задачах 113–122 довести тотожності:

113. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

114. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

115. $$\begin{vmatrix} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} & \sin\frac{\alpha+\beta}{2} & \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\frac{\beta-\alpha}{2} & \sin\frac{\beta+\gamma}{2} & \cos\frac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\frac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{2}(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)).$$

116. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

117. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = 2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$

118. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3.$

119. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \sin\beta\cos\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \sin\gamma\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \sin(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta +$

$+\sin(\beta-\gamma)\cos\beta\cos\gamma+\sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma\cos\alpha.$

120. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$

121. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ac+2d.$

122. За якої умови справедлива рівність:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 0 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

1.3. ОБЕРНЕНА МАТРИЦЯ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $\mathcal{A}$ — квадратна матриця n-го порядку.

Означення 1.10. Квадратна матриця $\mathcal{C}$ порядку n називається *оберненою* до матриці $\mathcal{A}$, якщо $\mathcal{AC} = \mathcal{CA} = \mathcal{E}$, де $\mathcal{E}$ — одинична матриця n-го порядку .

Матриця, обернена до матриці $\mathcal{A}$, позначається через $\mathcal{A}^{-1}$.

Означення 1.11. Квадратна матриця $\mathcal{A}$ порядку n називається *особливою,* якщо її детермінант дорівнює нулю. Якщо $|\mathcal{A}| \neq 0$, то $\mathcal{A}$ називається *неособливою*.

ТЕОРЕМА 1.1. Особливі матриці обернених матриць не мають. Кожна неособлива матриця має єдину обернену матрицю.

Якщо $|\mathcal{A}| \neq 0$, то обернена матриця $\mathcal{A}^{-1}$ має вигляд

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathcal{A}|}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} & \cdots & \mathcal{A}_{n1} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \cdots & \mathcal{A}_{n2} \\ . & . & . & . \\ \mathcal{A}_{1n} & \mathcal{A}_{2n} & \cdots & \mathcal{A}_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\mathcal{A}_{ij}$ $(i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n;\ j = 1;\ 2;\ \ldots;\ n)$ — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} матриці $\mathcal{A}$

Розглянемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Якщо

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\ \mathcal{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathcal{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

то в матричній формі система має вигляд

$$\mathcal{A}\mathcal{X}=\mathcal{B}.$$

Якщо детермінант матриці $\mathcal{A}$ не дорівнює нулю, то розв'язок системи має вигляд

$$\mathcal{X}=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}.$$

Задача. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=13, \\ 9x_1+3x_2+4x_3=15, \\ 5x_1+\ \ x_2+3x_3=14. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо детермінант матриці

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$|\mathcal{A}|=\Delta=\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3.$$

Отже, матриця $\mathcal{A}$ неособлива.

Знаходимо матрицю $\mathcal{A}^{-1}$, обернену до $\mathcal{A}$. Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=5;\ \mathcal{A}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3;$$

$$\mathcal{A}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-1;$$

$$\mathcal{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=-7;\ \mathcal{A}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=6;$$

$$\mathcal{A}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}=-1;$$

$$\mathcal{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=-6;\ \mathcal{A}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=3;$$

$$\mathcal{A}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix}=3.$$

$$\mathcal{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathcal{A}|}\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{31} \\ \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{32} \\ \mathcal{A}_{13} & \mathcal{A}_{23} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи запишемо у вигляді:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\mathcal{X}=\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -7 & 6 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Звідси $x_1=2$; $x_2=-5$; $x_3=3$.

Задачі для розв'язування

У задачах 123–132 знайти матрицю, обернену до кожної з матриць:

123. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. **124.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$. **125.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

126. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **127.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **128.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

129. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **130.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

131. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **132.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

У задачах 133–136 знайти добуток матриць:

133. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **134.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

135. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **136.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 137–147 знайти невідому матрицю $\mathcal{X}$ із рівнянь:

137. $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}\mathcal{X} = \begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$. **138.** $\mathcal{X}\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$.

139. $\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\4 & 3 & 2\\1 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

140. $\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\3 & 2 & -4\\2 & -1 & 0\end{pmatrix}\mathcal{X} = \begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\10 & 2 & 7\\10 & 7 & 8\end{pmatrix}$.

141. $\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 7 & -8\\1 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\9 & -3 & 6\\3 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

142. $\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

143. $\mathcal{X}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\2 & -1 & 2\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\2 & 3 & 4\end{pmatrix}$.

144. $\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & 2 & 0\\3 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

145. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\-1 & 3 & 1\\4 & 1 & -1\end{pmatrix}\mathcal{X} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

146. $\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & -1\end{pmatrix}\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

147. $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}\mathcal{X}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & 3\\4 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 0 & 3\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

У задачах 148–152 обчислити $f(\mathcal{A})$, якщо ділення матриці на матрицю рівносильне множенню чисельника на матрицю, обернену до знаменника:

148. $f(x)=\dfrac{2+x}{1+x}$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$.

149. $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^2}$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\\-1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

150. $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x}$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}$.

151. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x+1}$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

152. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2-x}$, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & 4 & -1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

У задачах 153–161 розв'язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

153. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=3,\\2x_1+x_2+2x_3+3x_4=-2,\\3x_1+2x_2+x_3+2x_4=3,\\4x_1+3x_2+2x_3+x_4=2.\end{cases}$

154. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=36,\\x_1-x_2+x_3=13,\\-x_1+x_2+x_3=7.\end{cases}$

155. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=2,\\x_1+3x_2-4x_3=1,\\-5x_1+3x_2-3x_3=-1.\end{cases}$

156. $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=4,\\2x_1-5x_2+3x_3=-1,\\2x_1+7x_2-x_3=8.\end{cases}$

157. $\begin{cases}2x_1-4x_2+9x_3=28,\\7x_1+3x_2-6x_3=-1,\\7x_1+9x_2-9x_3=5.\end{cases}$

158. $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\x_1+3x_2+4x_3=6,\\2x_1-x_2-x_3=1.\end{cases}$

159. $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=4,\\2x_1-x_2+x_3=3,\\3x_1+2x_2+2x_3=2.\end{cases}$

160. $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-2,\\2x_1-x_2+2x_3=9,\\4x_1+4x_2-3x_3=-5.\end{cases}$

161. $\begin{cases}x_1-x_2+2x_3+x_4=3,\\2x_2+3x_3-x_4=4,\\2x_1-x_3+5x_4=6,\\x_1+x_2-x_3-x_4=0.\end{cases}$

2 ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

2.1. ВЕКТОРИ В ЗВИЧАЙНОМУ ПРОСТОРІ

2.1.1. Лінійні операції над векторами

Означення 2.1. Вектором називається напрямлений відрізок.

Довжина цього відрізка називається *довжиною* або *модулем вектора*.

Вектор називається *нульовим*, якщо його початок і кінець збігаються.

Довжина нульового вектора дорівнює нулю, за напрям нульового вектора можна взяти довільний наперед заданий напрямок.

Вектор називається *одиничним*, якщо його довжина дорівнює одиниці.

Вектори називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій, або на паралельних прямих.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові довжини та однакові напрями.

Два вектори називаються *протилежними*, якщо вони колінеарні, протилежно напрямлені і мають рівні модулі.

Вектори називаються *компланарними*, якщо вони лежать на одній площині або на паралельних площинах.

Ортом даного ненульового вектора називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці, а напрям збігається з напрямом даного вектора.

Зауваження 2.1. З означення рівності двох векторів випливає, що поняття вектора рівносильне поняттю паралельного перенесення.

Позначення. Вектори позначаються малими латинськими літерами зі стрілкою зверху.

Наприклад, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\dots,\vec{x},\vec{y},\vec{z}$. Якщо відомі початок вектора $\vec{a}$ — точка A, кінець вектора $\vec{a}$ — точка B, то пишуть $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

Довжина (модуль) вектора $\vec{a}$ позначається через $|\vec{a}|$.

Вектор, протилежний до $\vec{a}$, позначається через $-\vec{a}$, орт вектора $\vec{a}$ позначається через $\vec{a}_0$, нульовий вектор позначається через $\vec{0}$.

Зауваження 2.2. З означення нульового вектора випливає, що $|\vec{0}|=0$, а із означення орта вектора $\vec{a}$ — що $|\vec{a}_0|=1$.

Під *лінійними операціями* над векторами розуміють операцію додавання векторів і операцію множення вектора на дійсне число.

Додавання векторів. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$, за умови, що початок вектора $\vec{b}$ збігається з кінцем вектора $\vec{a}$ (рис. 2.1).

Поряд із «правилом трикутника», яке сформульоване вище, часто користуються рівносильним йому «правилом паралелограма». Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ зведені до спільного початку і на них побудований паралелограм, то сума $\vec{a}+\vec{b}$ є вектор, що збігається з діагоналлю цього паралелограма, яка виходить із спільного початку $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2.2).

Властивості операції додавання векторів:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (*комутативна властивість*).
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (*асоціативна властивість*).
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.
4. Для кожного вектора $\vec{a}$ існує протилежний вектор $-\vec{a}$, такий, що $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

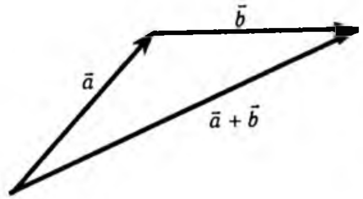

Рис. 2.1

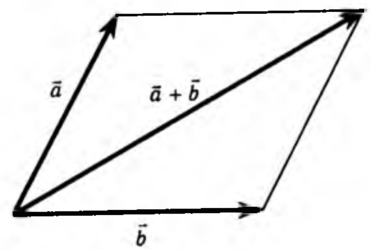

Рис. 2.2

Зауваження 2.3. Сума кількох векторів може бути знайдена за «правилом многокутника». Сумою кількох векторів є вектор, початок якого збігається з початком першого доданка, а кінець — з кінцем останнього за умови, що початок кожного наступного доданка збігається з кінцем попереднього (рис. 2.3).

Означення 2.2. Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, із яких перший називається *зменшуваним*, а другий *від' єм-*

ником, називається сума зменшуваного вектора і вектора, протилежного від'ємнику, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 2.4).

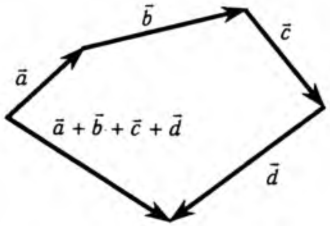

Рис. 2.3

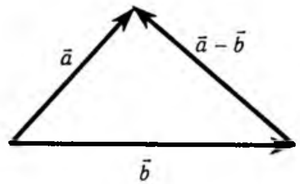

Рис. 2.4

Множення вектора на число. Добутком $\alpha\,\vec{a}=\vec{b}$ (або $\vec{a}\alpha$) вектора $\vec{a}$ на дійсне число α називається вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, який має:

1) модуль, рівний добутку модуля вектора $\vec{a}$ на модуль числа α, тобто $|\vec{a}\alpha|=|\alpha\,\vec{a}|=|\alpha||\vec{a}|$,

2) напрям, який збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha>0$, і протилежний напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\alpha<0$.

Властивості операції множення вектора на число:

1. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\,\vec{a}+\alpha\,\vec{b}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми векторів*).

2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{a}$ (*дистрибутивна властивість векторного множника відносно суми чисел*).

3. $\alpha(\beta\,\vec{a})=(\alpha\,\beta)\vec{a}$ (*асоціативна властивість*).

Означення 2.3. *Лінійною комбінацією* n векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ називається сума добутків цих векторів на довільні дійсні числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, тобто вираз, що має вигляд

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n\,.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Якщо вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$ і $|\vec{a}|\neq 0$, то існує дійсне число α таке, що $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$.

Задача. Вектори $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Розв'язання. Нехай O — точка перетину діагоналей (рис. 2.5).

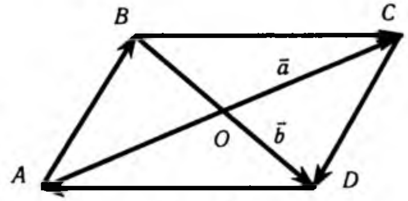

Рис. 2.5

Оскільки $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{BD}$ мають протилежні напрями, то $\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\vec{b}$. Аналогічно $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}$. Оскільки $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$ і вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають однакові напрями, то $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}$. Аналогічно $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{b}$. Із рівності $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$ випливає, що $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

Аналогічно

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$$
$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$$

Задачі для розв'язування

162. У паралелограмі $ABCD$ точка O — це точка перетину діагоналей, а точки M, N, P і Q — відповідно середини сторін AB, BC, CD і DA. Побудувати на рисунку такі вектори:

1) $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$; 2) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}$; 3) $\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OB}$; 4) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{PD}$;

5) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MQ}$; 6) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{NP}$; 7) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OC}$.

163. Дано паралелограм $ABCD$ і довільна точка O простору. Довести, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$. Довести обернене твердження: якщо для будь-якого чотирикутника $ABCD$ і будь-якої точки O у просторі має місце співвідношення $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$, то $ABCD$ — паралелограм.

164. Дано паралелограм $ABCD$. Точка M лежить на стороні CD. Знайти суму векторів:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; 2) $(-\overrightarrow{AM})+\overrightarrow{DM}$;

3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; 4) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BM}$.

2 1-93

165. У трикутнику ABC проведені медіани AD, BE і CP. Записати вектори $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ і $\overrightarrow{CP}$ в вигляді лінійної комбінації векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

166. Нехай ABC — довільний трикутник, а E і F — середини сторін AB і BC. Виразити вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ через $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$.

167. Точки E і F є серединами сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$ (на площині або в просторі). Довести, що $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Користуючись доведеним, довести теорему про середню лінію трапеції.

168. Дано трикутник ABC. На стороні BC розташована точка M так, що $\dfrac{|BM|}{|MC|} = \lambda$. Знайти $\overrightarrow{AM}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

169. Довести, що точка M належить прямій AB тоді і тільки тоді, коли при довільному виборі точки O справедлива рівність $\overrightarrow{OM} = \alpha\,\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$, де α — будь-яке число. Яким має бути α, щоб точка M була: 1) серединою відрізка B, 2) внутрішньою точкою відрізка AB, 3) зовнішньою точкою відрізка AB.

170. На стороні AD паралелограма $ABCD$ відкладений відрізок $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$, а на діагоналі $\overrightarrow{AC}$ — відрізок $\overrightarrow{AM} =$. $= \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ Довести, що вектори $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{MB}$ — колінеарні і знайти відношення $\dfrac{|KM|}{|MB|}$.

171. На площині трикутника ABC знайти таку точку, щоб сума векторів, які напрямлені із цієї точки до вершин трикутника, дорівнювала нулю.

172. У трикутнику ABC пряма AM є бісектрисою кута BAC, причому точка M лежить на стороні BC. Знайти AM, якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

173. Довести, що сума векторів, які напрямлені з центра правильного многокутника до його вершин, дорівнює $\vec{0}$.

174. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, початком якого є точка E — середина ребра OA, а кінцем точка F — середина ребра BC.

175. Дано: $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Обчислити $|\vec{a} - \vec{b}|$.

176. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^o$, причому $|\vec{a}| = 3$ і $|\vec{b}| = 5$.

Обчислити $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

177. Якій умові повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб мали місце такі співвідношення:

1) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$; 3) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

178. Три сили $\vec{M}$, $\vec{N}$ і $\vec{P}$, прикладені до однієї точки, мають взаємно перпендикулярні напрями. Знайти величину їх рівнодійної $\vec{R}$, якщо відомо, що $|\vec{M}| = 2$ кг, $|\vec{N}| = 10$ кг, $|\vec{P}| = 11$ кг.

2.1.2. Лінійна залежність векторів

Означення 2.4. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Означення 2.5. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можлива лише у випадку, коли всі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ дорівнюють нулю.

ТЕОРЕМА 2.2. Якщо один із векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ нульовий, то ці вектори є лінійно залежними.

ТЕОРЕМА 2.3. Якщо серед n векторів будь-які $n-1$ вектори — лінійно залежні, то і всі n векторів лінійно залежні.

ТЕОРЕМА 2.4. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією інших.

ТЕОРЕМА 2.5. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед двох неколінеарних векторів не може бути нульового вектора.

ТЕОРЕМА 2.6. Необхідною і достатньою умовою лінійної залежності трьох векторів є їх компланарність.

Наслідок 1. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то вони лінійно незалежні.

Наслідок 2. Серед трьох некомпланарних векторів не може бути двох колінеарних векторів і не може бути ні одного нульового вектора.

ТЕОРЕМА 2.7. Будь-які чотири вектори в звичайному просторі лінійно залежні.

Задача. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α вектори $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ будуть лінійно залежні.

Розв'язання. За теоремою 2.5 необхідною і достатньою умовою лінійної залежності двох векторів є їх колінеарність. Оскільки $\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$, то з колінеарності векторів $\alpha\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ випливає, що $\alpha\vec{a}+2\vec{b}=\beta(\vec{a}-\vec{b})$, або $\alpha\vec{a}+2\vec{b}-\beta(\vec{a}-\vec{b})=\vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$. За умовою задачі вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні. Тому з рівності

$$(\alpha-\beta)\vec{a}+(2+\beta)\vec{b}=\vec{0}$$

випливає, що

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0,\\ 2+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=\beta,\\ \beta=-2\end{cases} \Rightarrow \alpha=-2.$$

Задачі для розв'язування

179. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — лінійно незалежні. Визначити, при якому значенні α такі пари векторів лінійно залежні:

1) $(\alpha+1)\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{b}$; 2) $\alpha\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

180. Знайти α і β, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно незалежні та

1) $3\vec{a}+5\vec{b}=\alpha\vec{a}+(2\beta+1)\vec{b}$;

2) $(2\alpha-\beta-1)\vec{a}-(3\alpha-\beta+10)\vec{b}=\vec{0}$.

181. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — лінійно незалежні.

1) За якого значення α вектори $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}$, $\vec{y}=\alpha\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{z}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ лінійно залежні?

2) За якого значення α вектори $\vec{x}=\alpha\vec{a}+4\vec{b}+2\vec{c}$, $\vec{y}=\vec{a}+\alpha\vec{b}-\vec{c}$ лінійно залежні?

182. Довести, що для довільних векторів $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ вектори $\vec{a}=\vec{p}_1+\vec{p}_2$, $\vec{b}=\vec{p}_1-2\vec{p}_2$ і $\vec{c}=-\vec{p}_1-4\vec{p}_2$ лінійно залежні. Знайти коефіцієнти лінійної залежності.

183. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — некомпланарні вектори. Визначити, чи колінеарні такі пари векторів:

1) $\vec{p}_1=\vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}$ і $\vec{p}_2=\sqrt{3}\vec{a}-6\vec{b}$;

2) $\vec{p}_1=2\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{p}_2=\vec{a}+2\vec{b}$;

3) $\vec{p}_1=7\vec{a}$ і $\vec{p}_2=3\sqrt{5}\vec{a}$;

4) $\vec{p}_1=\vec{a}-2\sqrt{2}\vec{b}+\sqrt{6}\vec{c}$ і $\vec{p}_2=\sqrt{2}\vec{a}-4\vec{b}+2\sqrt{3}\vec{c}$.

184. Довести, що коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — лінійно незалежні, то і вектори $\vec{a}_1+\vec{a}_2$, $\vec{a}_2+\vec{a}_3$, $\vec{a}_3+\vec{a}_1$ лінійно незалежні.

185. Довести, що для будь-яких заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}+\vec{c}$ і $\vec{c}-\vec{a}$ компланарні.

186. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Довести, що вектори $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ компланарні.

187. Дано три некомпланарних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. При яких значеннях λ і μ вектори $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ колінеарні.

2.1.3. Поняття базису. Афінна система координат

Означення 2.6. Два лінійно незалежні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать на площині, утворюють базис у цій площині, якщо довільний вектор $\vec{c}$ цієї площини може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Три лінійно незалежних вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють в просторі базис, якщо будь-який вектор $\vec{d}$ може бути поданий у вигляді деякої лінійної комбінації векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливі такі твердження:

1) будь-яка пара неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які лежать в даній площині, утворюють базис у цій площині;

2) будь-яка трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворює базис у просторі.

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — довільний базис у просторі, тобто довільна трійка некомпланарних векторів. Тоді (за означенням базису) для будь-якого вектора $\vec{d}$ знайдуться такі дійсні числа α, β, γ, що буде справедлива рівність

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}. \tag{2.1}$$

Рівність (2.1) називається *розкладом вектора* $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, а числа α, β, γ *координатами вектора* $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Звичайно пишуть так $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$.

ТЕОРЕМА 2.8. Вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладеним за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, тобто координати кожного вектора $\vec{d}$ відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ визначаються однозначно.

ТЕОРЕМА 2.9. У разі додавання двох векторів їх координати (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$) додаються. При множенні вектора на будь-яке число α всі його координати помножаться на це число. У випадку площини мають місце аналогічні твердження.

Афінна система координат у просторі визначається заданням базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і деякої точки O, яка називається *початком координат*.

Афінними координатами будь-якої точки M називаються координати вектора $\overrightarrow{OM}$ (відносно базису $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$), тобто числа α, β, γ такі, що $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Запис $M(\alpha, \beta, \gamma)$ означає, що числа α, β, γ є координатами точки M. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіус-вектором* точки M.

Якщо дано точки $M_1(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ і $M_2(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$, то вектор $\overline{M_1M_2} = (\alpha_2 - \alpha_1; \beta_2 - \beta_1; \gamma_2 - \gamma_1)$.

Аналогічно визначається афінна система координат на площині.

Задача. В трапеції $ABCD$ відношення основи $\overrightarrow{BC}$ до основи $\overrightarrow{AD}$ дорівнює λ. Беручи за базис вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$, знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$.

Зауваження. Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два колінеарні вектори і $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то число λ називається відношенням вектора $\vec{b}$ до вектора $\vec{a}$.

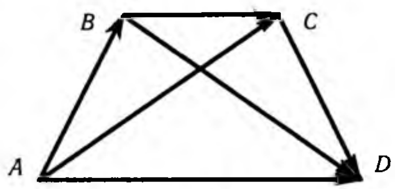

Рис. 2.6

Розв'язання. За умовою задачі $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$ (рис. 2.6).

Визначаємо координати векторів:

1) $\overrightarrow{AB} = 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AB} = (0; 1)$;

2) $\overrightarrow{AD} = 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AB} = (1; 0)$; $\overrightarrow{DA} = (-1; 0)$;

3) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (1; 0) - (0; 1) = (1; -1)$;

4) $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AB} = (\lambda; 0)$;

5) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = (-\lambda; 0) + (1; -1) = (1 - \lambda; -1)$;

6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (0; 1) + (\lambda; 0) = (\lambda; 1)$.

Задачі для розв'язування

188. Дано правильний шестикутник $ABCDEF$. Беручи за базисні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$.

189. Дано паралелепіпед $ABCDA'B'C'D'$. Беручи за базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ знайти в цьому базисі координати векторів, які збігаються з ребрами, діагоналлю паралелепіпеда і діагоналями його граней, для яких вершина A' є початком.

190. Дано рівнобічну трапецію $ABCD$, в якій нижня основа $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і кут між ними $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Розкласти за $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

191. У ромбі $ABCD$ вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$ брати за базисні. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$ у цьому базисі.

192. У трикутнику ABC проведена медіана BK і середня лінія MN паралельна AC. Прямі BK і MN перетинаються в точці O. Знайти: а) координати векторів $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AN}$, беручи вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OM}$ за базисні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; б) координати тих самих векторів $\overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AN}$, беручи вектори $\overrightarrow{KC}$ і $\overrightarrow{KN}$ за базисні вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$.

193. У трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $AD : DB = 2 : 7$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{CD}$, беручи за базисні вектори $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$.

194. У трикутнику ABC проведена бісектриса AD. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AD}$, беручи за базис вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

195. У трапеції $ABCD$ довжини основ AD і BC відносяться як 3:2. Беручи за базисні вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$, знайти в цьому базисі координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

196. У трапеції $ABCD$ відношення довжин основ AD і BC дорівнює 4. Беручи вершину A за початок координат, а вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$ за базисні, знайти координати вершин трапеції, точки M — перетину її діагоналей і точки S — перетину бічних сторін.

2.2. ЛІНІЙНИЙ ПРОСТІР

2.2.1. Означення і властивості лінійного простору

Означення 2.7. Множина L елементів $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \ldots$ довільної природи називається *дійсним лінійним простором*, якщо справджуються такі три умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ множини L ставиться у відповідність третій елемент $\vec{z}$ цієї множини, що називається *сумою елементів* $\vec{x}$ і $\vec{y}$ і позначається символом $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

II. Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу $\vec{x}$ множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент $\vec{u}$ цієї множини, що називається *добутком елемента* $\vec{x}$ на число λ і позначається символом $\vec{u} = \lambda\vec{x}$ або $\vec{u} = \vec{x}\lambda$.

III. Указані два правила підпорядковані таким восьми аксіомам:

1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (*комутативна властивість суми*).
2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$ (*асоціативна властивість суми*).
3. Існує нульовий елемент $\vec{0}$ такий, що $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль нульового елемента*).
4. Для кожного елемента $\vec{x}$ існує протилежний елемент $\vec{x}'$ такий, що $\vec{x} + \vec{x}' = \vec{0}$.
5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$ для будь-якого елемента $\vec{x}$ (*особлива роль числового множника 1*).
6. $\lambda(\mu\vec{x}) = (\lambda\mu)\vec{x}$ (*асоціативна властивість відносно числового співмножника*).
7. $(\lambda + \mu)\vec{x} = \lambda\vec{x} + \mu\vec{x}$ (*дистрибутивна властивість множника-елемента відносно суми чисел*).
8. $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\vec{x} + \lambda\vec{y}$ (*дистрибутивна властивість числового множника відносно суми елементів*).

Зауваження 2.4. Елементи лінійного простору часто називають векторами і позначають так само, як і вектори звичайного простору.

Приклад 1. Розглянемо множину впорядкованих наборів із n дійсних чисел. Цю множину називають *n-вимірним числовим простором* A_n, елемент цієї множини — впорядкований набір $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ називають *точкою* A_n, а числа a_1, a_2, ..., a_n — її *координатами*. Точка $O(0, 0, \ldots, 0)$ називається початком координат в A_n. Кожній парі точок $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $B(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ поставимо у відповідність вектор $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n)$. Числа $b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n$ назвемо координатами вектора $\overrightarrow{AB}$. При цьому два вектори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати. Вектор $\overrightarrow{OM}$ називається *радіусом-вектором* точки M. Його координати збігаються з координатами точки M. Отже, вектори також є впорядкованими наборами n чисел матрицями-рядками довжини n.

Уведемо лінійні операції над векторами за правилами: якщо дано вектори $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то $\vec{x} + \vec{y}$ має координати $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$, а $\lambda\vec{x}$ має координати $(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Можна показати, що множина векторів числового простору A_n з лінійними операціями, введеними вище, є лінійним простором, який позначається через L_n. У просторі L_n роль нульового вектора відіграє вектор $\vec{0} = (0; 0; \ldots; 0)$, а протилежним вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ є вектор $\vec{x}' = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Зауваження 2.5. Якщо точками дійсного числового простору є матриці-стовпці $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ висоти n, то, міркуючи аналогічно, прийдемо до лінійного простору L^n, в якому лінійні операції збігаються з операціями над матрицями-стовпцями висоти n — векторами L^n.

Зауваження 2.6. Надалі через L_n (L^n) позначатимемо і лінійний простір матриць-рядків (матриць-стовпців) довжини n (висоти n) з дійсними елементами і з лінійними операціями над ними, що збігаються з лінійними операціями над матрицями.

Приклад 2. Множина $C[a,b]$ усіх функцій $x = x(t)$, означених і неперервних на відрізку $a \le t \le b$, із звичайними операціями додавання двох функцій і множення функції на дійсне число, утворює лінійний простір.

Дійсно, можна переконатись у справедливості аксіом 1–8 для множини $C[a,b]$. Це дає змогу дійти висновку, що множина $C[a,b]$ є лінійним простором.

Властивості лінійного простору.

ТЕОРЕМА 2.10. У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент і для кожного елемента $\bar{x}$ існує єдиний протилежний елемент.

ТЕОРЕМА 2.11. У довільному лінійному просторі:

1) добуток довільного елемента $\bar{x}$ на дійсне число 0 дорівнює нульовому елементу $\bar{0}$;

2) для кожного елемента $\bar{x}$ протилежний елемент дорівнює добутку цього елемента $\bar{x}$ на дійсне число -1.

Задача. Нехай L_2 — множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел $\bar{x} = (x_1, x_2)$ з операціями:

1) Якщо $\bar{x} = (x_1, x_2)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2)$, то $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$;

2) Для будь-якого дійсного λ покладемо $\lambda\bar{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Переконатися, що L_2 є лінійним простором.

Розв'язання. Перевіримо виконання аксіом 1–8.

1. $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\bar{y} + \bar{x} = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, тобто $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$.

2. $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $\bar{y} + \bar{z} = (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$, $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$, $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (x_1 + y_1 + z_1, x_2 + y_2 + z_2)$.

Отже, $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = \bar{x} + (\bar{y} + \bar{z})$.

3. Нульовим вектором є $\bar{0} = (0;0)$. Дійсно, $\bar{x} + \bar{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = \bar{x}$.

4. Вектор $(-x_1, -x_2)$ є протилежним вектору (x_1, x_2), оскільки $(x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) - (0;0)$.

5. $1 \cdot \bar{x} = (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) = \bar{x}$.

6. $\lambda(\mu\bar{x}) = \lambda(\mu x_1, \mu x_2) = (\lambda\mu x_1, \lambda\mu x_2) = (\lambda\mu)\bar{x}$.

7. $(\lambda + \mu)\bar{x} = ((\lambda + \mu)x_1, (\lambda + \mu)x_2) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \lambda x_2 + \mu x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\mu x_1, \mu x_2) = \lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1, x_2) = \lambda\bar{x} + \mu\bar{x}$.

8. $\lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\lambda(x_1 + y_1), \lambda(x_2 + y_2)) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + (\lambda y_1, \lambda y_2) = \lambda(x_1, x_2) + \lambda(y_1, y_2) = \lambda\bar{x} + \lambda\bar{y}$.

Отже, множина L_2 є лінійним простором.

Задачі для розв'язування

197. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1. Множина матриць-рядків довжини n з операціями додавання і множення на число для матриць.

2. Множина квадратичних матриць n-го порядку з дійсними елементами, якщо за операції взяти додавання матриць і множення матриці на число.

3. Множина всіх многочленів степеня $\le n$ із звичайними діями додавання многочленів і множення многочлена на число.

4. Множина всіх многочленів степеня, що дорівнює n, із звичайними діями додавання многочленів і множення многочлена на число.

5. Множина V_0, яка складається з одного елемента θ. Операції в V_0 означені таким чином: $\theta + \theta = \theta$, $\lambda\theta = \theta$.

6. Множина R^+ додатних дійсних чисел, в якій операції додавання і множення на дійсне число означені так:

а) сума двох елементів $\bar{x} = x$ і $\bar{y} = y$ цієї множини дорівнює добутку цих дійсних чисел xy;

б) добуток елемента $\bar{x}$ на дійсне число λ визначимо як піднесення дійсного додатного числа x до степеня λ.

198. Визначити, чи є такі множини векторів на звичайній площині лінійними просторами відносно звичайних операцій додавання векторів і множення вектора на число (припускається, що початок кожного вектора міститься в початку координат).

1) Усі вектори, кінці яких лежать на даній прямій.

2) Усі вектори, кінці яких лежать:

а) у першій чверті системи координат;

б) у першій або в третій;

в) у першій або в другій.

3) Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 0$.

4) Усі вектори, координати яких задовольняють рівняння $x_1 + x_2 = 1$.

199. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1) Множина $C[a,b]$ усіх функцій $f(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.

2) Множина всіх збіжних послідовностей, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

3) Множина всіх розбіжних послідовностей відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

4) Множина всіх функцій інтегрованих на відрізку $[a,b]$, відносно звичайних операцій додавання і множення на число.

5) Множина тригонометричних многочленів порядку $\le n$, тобто множина функцій, що мають вигляд:

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

відносно звичайних операцій додавання і множення на число;

6) Множина функцій вигляду

$$f(t) = e^{\alpha t}(a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

де α — фіксоване дійсне число, з природно введеними операціями додавання функцій і множення їх на число.

200. Чи може лінійний простір складатись:

1) з одного вектора; 2) з двох різних векторів?

201. З лінійного простору виключено вектор $\bar{x}$. Чи може здобута після цього виключення множина векторів залишатись лінійним простором?

202. З лінійного простору виключено нескінченну множину векторів. Чи може здобута після цього виключення множина векторів залишатись лінійним простором?

2.2.2. Розмірність лінійного простору. Базис, координати вектора. Ізоморфізм лінійних просторів

Означення 2.8. Вектори $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ лінійного простору називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, з яких хоч би одне відмінне від нуля, і такі, що лінійна комбінація векторів $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто $\lambda_1 \bar{p}_1 + \lambda_2 \bar{p}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{p}_n = \bar{0}$.

Означення 2.9. Вектори $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність $\lambda_1 \bar{p}_1 + \lambda_2 \bar{p}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{p}_n = \bar{0}$ можлива лише у випадку, коли усі $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Означення 2.10. Лінійний простір L називається *n-вимірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних векторів, а будь-які $n+1$ векторів є лінійно залежними.

Число n називається *розмірністю простору*. Це записується так: $d(L) = n$.

Означення 2.11. Лінійний простір L називається *нескінченно вимірним*, якщо в ньому існує довільне число лінійно незалежних векторів.

Означення 2.12. Сукупність лінійно незалежних векторів $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ простору L називається *базисом* цього простору, якщо для кожного вектора $\bar{x}$ простору L можна знайти такі дійсні числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що справедлива рівність

$$\bar{x} = x_1 \bar{p}_1 + x_2 \bar{p}_2 + \ldots + x_n \bar{p}_n. \tag{2.2}$$

Рівність (2.2) називається *розкладанням вектора* $\bar{x}$ у базисі $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$, а числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координатами вектора $\bar{x}$ (відносно базису $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$).

ТЕОРЕМА 2.12. Якщо L — лінійний простір розмірності n, то будь-які n лінійно незалежних векторів цього простору утворюють його базис.

ТЕОРЕМА 2.13. Якщо лінійний простір L має базис, який складається з n векторів, то розмірність L дорівнює n.

Приклад 1. Розглянемо простір L^n. Покажемо, що n векторів цього простору

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

утворюють його базис.

Для цього покажемо, що вектори (2.3) лінійно незалежні і довільний вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією векторів (2.3).

Розглянемо лінійну комбінацію векторів у (2.3) з числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{e}_n = \alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ \alpha_2\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}.$$

Вектор $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ є нульовим лише за умови $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, а це і означає лінійну незалежність векторів (2.3).

Покажемо тепер, що довільний вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ простору L^n є лінійною комбінацією векторів у (2.3).

Дійсно, справедлива рівність

$$\vec{x} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + x_n\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.$$

Таким чином, у просторі L^n сукупність векторів (2.3) утворює базис цього простору, розмірність якого згідно з теоремою 2.13 дорівнює n. Аналогічно можна показати, що розмірність простору L_n дорівнює n.

Приклад 2. Лінійний простір $C[a,b]$ усіх функцій $x = x(t)$, визначених і неперервних на відрізку $[a,b]$, є нескінченно вимірним.

Дійсно, для будь-якого невід'ємного цілого числа n вектори цього простору $1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n$ лінійно незалежні, оскільки

в протилежному випадку деякий многочлен $c_0 + c_1t + c_2t^2 + \ldots + c_nt^n$, коефіцієнти якого $c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ не всі рівні нулю, виявився б тотожно рівним нулю на відрізку $[a,b]$.

ТЕОРЕМА 2.14. При додаванні двох будь-яких векторів лінійного простору L їх координати (відносно довільного базису простору L) додаються, при множенні довільного вектора на будь-яке число λ всі координати цього вектора множаться на λ.

Означення 2.13. Два довільних дійсних лінійних простори L і L' називаються *ізоморфними*, якщо між векторами цих просторів можна встановити взаємно однозначну відповідність так, що якщо векторам $\vec{x}$ і $\vec{y}$ простору L відповідають вектори $\vec{x}'$ і $\vec{y}'$ простору L', то вектору $\vec{x}+\vec{y}$ відповідає вектор $\vec{x}'+\vec{y}'$, а вектору $\lambda\vec{x}$ відповідає вектор $\lambda\vec{x}'$, $\lambda \in \Re$.

ТЕОРЕМА 2.15. Будь-які два n вимірних дійсних лінійних простори L і L' ізоморфні.

Наслідок. Лінійні простори L_n і L^n ізоморфні.

Зауваження 2.7. Надалі усі означення і твердження, що мають місце в L_n (L^n), з точністю до ізоморфізму справедливі і в довільному n-вимірному лінійному просторі L.

Задача. Нехай L_2 — лінійний простір векторів $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Довести, що вектори $\vec{p}_1 = (1;2)$ і $\vec{p}_2 = (3;4)$ утворюють базис даного лінійного простору L_2. Знайти координати вектора $\vec{x} = (7;10)$ у цьому базисі.

Розв'язання. Покажемо, що вектори $\vec{p}_1$ і $\vec{p}_2$ лінійно незалежні. Дійсно, рівність

$$\alpha\,\vec{p}_1 + \beta\,\vec{p}_2 = \bar{0} \Leftrightarrow \alpha(1;2) + \beta(3;4) = (0;0) \Leftrightarrow (\alpha+3\beta, 2\alpha+4\beta) = $$
$$= 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+3\beta=0,\\ 2\alpha+4\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0,\\ \beta=0.\end{cases}$$

Розглянемо будь-який вектор $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Покажемо, що для будь-яких y_1, y_2 можна визначити числа λ і μ так, щоб виконувалась рівність $\vec{y} = \lambda\vec{p}_1 + \mu\vec{p}_2$ або $(y_1, y_2) = (\lambda+3\mu, 2\lambda+4\mu)$. Існує єдина пара значень (λ, μ), для яких виконується ця рівність. Це випливає з того, що система рівнянь

$$\begin{cases}\lambda+3\mu=y_1,\\ 2\lambda+4\mu=y_2\end{cases}$$

має $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$ і тому має єдиний розв'язок при будь-яких y_1 і y_2. Отже, вектори $\bar{p}_1$ і $\bar{p}_2$ утворюють базис.

Визначимо координати вектора $\bar{x} = (7;10)$ у цьому базисі. Задача зводиться до визначення λ і μ із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Звідси знаходимо $\lambda = 1$, $\mu = 2$, тобто

$$\bar{x} = \bar{p}_1 + 2\bar{p}_2.$$

Задачі для розв'язування

203. Нехай P_2 — лінійний простір многочленів степеня не вище другого. Довести, що вектори $\bar{p}_1 = 1 + 2t + 3t^2$, $\bar{p}_2 = 2 + 3t + 4t^2$ і $\bar{p}_3 = 3 + 5t + 7t^2$ лінійно залежні.

204. Показати, що якщо серед векторів $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{z}$ є нуль-вектор, то розглядувані вектори лінійно залежні.

205. Показати, що розмірність простору P_n усіх многочленів степеня $\leq n$ однієї змінної дорівнює $n+1$.

206. Знайти розмірність і базис таких лінійних просторів:

1) множина парних многочленів степеня $\leq n$;

2) множина тригонометричних многочленів порядку не вище n виду

$$P(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt;$$

3) множина парних тригонометричних многочленів порядку не вище n;

4) множина непарних тригонометричних многочленів порядку не вище n.

207. Показати, що квадратні матриці порядку n, у яких будь-який елемент дорівнює 1, а решта дорівнюють 0, утворюють базис простору квадратних матриць порядку n. Знайти розмірність цього простору.

208. Довести, що многочлени $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \ldots, (t-\alpha)^n$ утворюють базис у просторі многочленів степеня $\leq n$ і знайти координати довільного многочлена $P_n(t)$ степеня $\leq n$ у цьому базисі.

209. Довести, що многочлени $2t + t^5$, $t^3 - t^5$, $t + t^3$ утворюють базис у просторі непарних многочленів степеня ≤ 5, знайти координати многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ у цьому базисі.

210. Знайти координати многочлена $t^5 - t^4 + t^3 - t^2 - t + 1$ у кожному із базисів:

1) $1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$;

2) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$;

3) $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3, t^4+t^3, t^5+t^3$.

211. Знайти координати полінома $P(t) = 5 - 2(t+1) + 3(t+1)^2 + (t+1)^3$ у базисі $1, t, t^2, t^3$.

212. Показати, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ утворюють базис L_3 і знайти координати вектора $\bar{x}$ у цьому базисі.

1) $\bar{e}_1 = (1;1;1)$, $\bar{e}_2 = (1;2;1)$, $\bar{e}_3 = (0;0;1)$, $\bar{x} = (1;0;4)$;

2) $\bar{e}_1 = (1;0;1)$, $\bar{e}_2 = (0;1;0)$, $\bar{e}_3 = (2;3;4)$, $\bar{x} = (1;-3;-3)$;

3) $\bar{e}_1 = (3;1;-3)$, $\bar{e}_2 = (-5;2;1)$, $\bar{e}_3 = (7;3;4)$, $\bar{x} = (11;10;-1)$;

4) $\bar{e}_1 = (1;2;1)$, $\bar{e}_2 = (2;3;3)$, $\bar{e}_3 = (3;1;7)$, $\bar{x} = (3;3;5)$.

213. Показати, що вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ утворюють базис і знайти координати вектора $\bar{x}$ у цьому базисі:

1) $\bar{e}_1 = (1;1;1;1)$, $\bar{e}_2 = (1;1;-1;-1)$, $\bar{e}_3 = (1;-1;1;-1)$, $\bar{e}_4 = (1;-1;-1;1)$, $\bar{x} = (1;2;1;1)$;

2) $\bar{e}_1 = (1;1;0;1)$, $\bar{e}_2 = (2;1;3;1)$, $\bar{e}_3 = (1;1;0;0)$, $\bar{e}_4 = (0;1;-1;-1)$, $\bar{x} = (0;0;0;1)$.

214. Довести, що вектори

$$\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \bar{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \; \bar{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

простору квадратних матриць 2-го порядку утворюють базис. Знайти координати векторів

$$\bar{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ і } \bar{x}_2 = \begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -1 & -29 \end{pmatrix}$$

у цьому базисі.

215. Нехай L і L' — ізоморфні лінійні простори. Між елементами цих просторів встановлено взаємно однозначну відповідність $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$, $\bar{y} \leftrightarrow \bar{y}'$, $\bar{z} \leftrightarrow \bar{z}'$. Довести, що $\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \gamma\bar{z} \leftrightarrow \alpha\bar{x}' + \beta\bar{y}' + \gamma\bar{z}'$ при будь-яких α, β, γ.

216. Нехай L і L' — ізоморфні лінійні простори, причому $\bar{x} \leftrightarrow \bar{x}'$. Довести, що $(-\bar{x}) \leftrightarrow (-\bar{x}')$.

217. Чи будуть ізоморфними лінійні простори L і L', якщо елементами L є вектори $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$, а елементами L' — вектори $2\bar{x}, 2\bar{y}, 2\bar{z}, \ldots$? Показати, що простори L і L' складаються з одних і тих самих елементів.

218. Дано довільні пари дійсних чисел (α, β). Побудовано два лінійних простори: простір L_2 і простір L', складений з векторів $\bar{x}' = \left(e^{-\alpha}, e^{-\beta}\right)$, в якому існуючі дії визначені рівностями

$$\bar{x}_1' + \bar{x}_2' = \left(e^{-\alpha_1-\alpha_2}, e^{-\beta_1-\beta_2}\right), \quad \lambda\bar{x}' = \left(e^{-\lambda\alpha}, e^{-\lambda\beta}\right).$$

Довести, що простори ізоморфні.

2.2.3. Перетворення координат вектора при переході до нового базису

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ і $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ — два довільних базиси n- вимірного лінійного простору L^n і нехай $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ виражаються через $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ за допомогою формул:

$$\bar{e}_1' = c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 + \ldots + c_{n1}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_2' = c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + \ldots + c_{n2}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix},$$

....

$$\bar{e}_n' = c_{1n}\bar{e}_1 + c_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + c_{nn}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2 \ldots \bar{e}_n)\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця, складена з коефіцієнтів цих формул

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ до базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$. За допомогою матриці C перехід від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ до базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ запишеться у вигляді

$$(\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n') = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)C.$$

Нехай у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ вектор $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n$, а в базисі $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ вектор $\bar{x} = x_1'\bar{e}_1' + x_2'\bar{e}_2' + \ldots + x_n'\bar{e}_n'$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

або

$$X = CX', \text{ де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Дано вектор $\bar{x} = 6\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \in L^3$. Розкласти цей вектор за новим базисом, пов'язаним із старим базисом за допомогою рівностей

$$\bar{e}_1' = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - \bar{e}_3, \ \bar{e}_2' = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3, \ \bar{e}_3' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3.$$

Розв'язання. Оскільки

$$\bar{e}_1' = (\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_2' = (\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{e}_3' = (\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то матриця переходу від старого базису до нового матиме вигляд

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі виражаються формулою

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\mathcal{C}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$\begin{pmatrix}6\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\\ x_3'\end{pmatrix}.$$

Розв'язавши це матричне рівняння, дістанемо $x_1'=1$, $x_2'=0$, $x_3'=2$. Розкладання вектора $\vec{x}$ у новому базисі має вигляд $\vec{x}=\vec{e}_1'+2\vec{e}_3'$.

Задача 2. У базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ простору L^2 многочлен має вигляд

$$x^2+2y^2-xy+x+3y+5.$$

Записати цей многочлен в новому базисі, пов'язаному зі старим базисом за допомогою рівностей

$$\vec{e}_1'=\vec{e}_1-2\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2.$$

Розв'язання. Оскільки $\vec{e}_1'=(\vec{e}_1\vec{e}_2)\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2'=(\vec{e}_1\vec{e}_2)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$, то матриця переходу від старого базису до нового матиме вигляд

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\mathcal{C}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

або

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'+y'\\ -2x'+y'\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$x=x'+y',$$
$$y=-2x'+y'.$$

Підставивши значення x і y в многочлен, дістанемо многочлен у новому базисі:

$$(x'+y')^2+2(-2x'+y')^2-(x'+y')(-2x'+y')+x'+y'+$$
$$+3(-2x'+y')+5=11x'^2+2y'^2-5x'y'-5x'+4y'+5.$$

Задача 3. У просторі многочленів степеня ≤ 3 написати матрицю переходу від базису $1,x,x^2,x^3$ до базису $1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3$.

Розв'язання. Вектори нового базису $1,x+1,(x+1)^2,(x+1)^3$ розкладемо за векторами старого базису.

Дістанемо

$$1=1\cdot 1+0x+0x^2+0x^3=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$x+1=1\cdot 1+1\cdot x+0x^2+0x^3=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$$(x+1)^2=x^2+2x+1=1\cdot 1+2\cdot x+1\cdot x^2+0x^3=\begin{pmatrix}1 & x & x^2 & x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},$$

$$(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1=1\cdot 1+3\cdot x+3\cdot x^2+1\cdot x^3=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & x x^2 x^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 3\\ 3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тоді матриця переходу матиме вигляд

$$\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

219. Дано вектор $\vec{x}$. Розкласти цей вектор за новим базисом, пов'язаним зі старим базисом виразами:

1) $\vec{x} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$,
$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$,
$\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$,
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

2) $\vec{x} = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - \vec{e}_3$,
$\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$,
$\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$,
$\vec{e}_3' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

3) $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$,
$\vec{e}_1' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$,
$\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$,
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$.

4) $\vec{x} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$,
$\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$,
$\vec{e}_2' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$,
$\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4$,
$\vec{e}_4' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

220. Дано вектор $\vec{x} = 2(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \ldots + \vec{e}_n)$. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n'$, якщо $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, ..., $\vec{e}_n' = \vec{e}_n + \vec{e}_1$.

221. Новий базис пов'язаний із старими виразами $\vec{e}_1' = \alpha\,\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \beta\,\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \gamma\,\vec{e}_4$, $\vec{e}_4' = \delta\,\vec{e}_5$, $\vec{e}_5' = \varepsilon\,\vec{e}_1$. Записати формули, що пов'язують старі координати $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ вектора $\vec{x}$ з його новими координатами $(x_1', x_2', x_3', x_4', x_5')$.

222. Довести, що кожна із двох систем векторів є базисом і знайти зв'язок координат одного і того самого вектора в цих двох базисах:

1) $\vec{e}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{e}_2 = (2; 3; 3)$, $\vec{e}_3 = (3; 1; 1)$,
$\vec{e}_1' = (3; 1; 4)$, $\vec{e}_2' = (5; 2; 1)$, $\vec{e}_3' = (1; 1; 6)$.

2) $\vec{e}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{e}_1' = (1; 0; 3; 3)$,
$\vec{e}_2 = (1; 2; 1; 1)$, $\vec{e}_2' = (-2; -3; -5; -4)$,
$\vec{e}_3 = (1; 1; 2; 1)$, $\vec{e}_3' = (2; 2; 5; 4)$,
$\vec{e}_4 = (1; 3; 2; 3)$, $\vec{e}_4' = (-2; -3; -4; -4)$.

223. Довести, що кожна з двох систем функцій $t - t^2$, t^3, $1 + 5t + t^3$, $(1+t)^3$ і $(1+t)^3$, $(1-t)^3$, $t - t^2 + t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ є базисом у просторі многочленів степеня ≤ 3. Знайти координати многочлена степеня ≤ 3 у першому базисі, якщо відомі його координати h_1', h_2', h_3', h_4' у другому базисі.

224. Знайти матрицю переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ і навпаки, якщо:

1) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,
$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

2) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$,
$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix}1\\1\\-6\end{pmatrix}$.

3) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_4 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\\3\end{pmatrix}$,
$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-5\\-4\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix}2\\2\\5\\4\end{pmatrix}$, $\vec{e}_4' = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-4\\-4\end{pmatrix}$.

225. Скласти формули перетворення координат при переході від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3', \vec{e}_4'$:

1) $\vec{e}_1 = (1; 0; 0; 0)$, $\vec{e}_1' = (1; 1; 0; 0)$,
$\vec{e}_2 = (0; 1; 0; 0)$, $\vec{e}_2' = (1; 0; 1; 0)$,
$\vec{e}_3 = (0; 0; 1; 0)$, $\vec{e}_3' = (1; 0; 0; 1)$,
$\vec{e}_4 = (0; 0; 0; 1)$, $\vec{e}_4' = (1; 1; 1; 1)$.

2) $\vec{e}_1 = (1; 2; -1; 0)$, $\vec{e}_1' = (2; 1; 0; 1)$,
$\vec{e}_2 = (1; -1; 1; 1)$, $\vec{e}_2' = (0; 1; 2; 2)$,
$\vec{e}_3 = (-1; 2; 1; 1)$, $\vec{e}_3' = (-2; 1; 1; 2)$,
$\vec{e}_4 = (-1; -1; 0; 1)$, $\vec{e}_4' = (1; 3; 1; 2)$.

226. У просторі многочленів степеня ≤ 2 написати матриці переходу від базису $1, x, x^2$ до базису $x^2 - x$, $3x^2 + 2x + 2$, $2x^2 + 5x + 4$.

227. У просторі многочленів степеня $\le n$ написати матриці переходу від базису $1, (x-2), (x-2)^2, \ldots, (x-2)^n$ до базису $1, (x-3)$, $(x-3)^2, \ldots, (x-3)^n$ і навпаки.

2.2.4. Підпростір лінійного простору

Припустимо, що деяка підмножина L' лінійного простору L задовольняє такі дві вимоги:

1. Якщо елементи $\bar{x}$ і $\bar{y}$ належать підмножині L', то і сума $\bar{x}+\bar{y}$ належить цій підмножині L'.

2. Якщо елемент $\bar{x}$ належить підмножині L', а λ — будь-яке дійсне число, то й елемент $\lambda\bar{x}$ належить підмножині L'.

Означення 2.14. Підмножина L' лінійного простору L, що задовольняє вимоги 1 і 2, називається *лінійним підпростором* (або просто підпростором) простору L.

Приклади лінійних підпросторів:

1. Підмножина лінійного простору L, яка складається з одного нульового елемента.
2. Весь простір L.
3. Підмножина B_2 усіх векторів, паралельних деякій площині, в звичайному просторі.
4. Нехай $\bar{x},\bar{y},...,\bar{z}$ — сукупність елементів деякого простору L. Сукупність усіх лінійних комбінацій цих елементів, тобто множина елементів, що має вигляд $\alpha\bar{x}+\beta\bar{y}+...+\gamma\bar{z}$, де $\alpha,\beta,...,\gamma$ — довільні дійсні числа, називається *лінійною оболонкою елементів* $\bar{x},\bar{y},...,\bar{z}$. Для лінійної оболонки довільних елементів $\bar{x},\bar{y},...,\bar{z}$ лінійного простору L виконуються вимоги 1 та 2. Тому усяка лінійна оболонка є підпростором лінійного простору L.

Нехай L' і L'' — два довільних підпростори лінійного простору L.

Означення 2.15. Множина усіх елементів $\bar{x}$ простору L, які належать одночасно L' і L'', називається *перерізом* підпросторів L' і L''.

Запис $L''' = L'\cap L''$ означає , що L''' є перерізом підпросторів L' і L''.

Означення 2.16. Множина усіх елементів простору L, що мають вигляд $\bar{y}+\bar{z}$, де $\bar{y}\in L'$, $\bar{z}\in L''$, називається *сумою* підпросторів L' і L''.

Запис $L^{IV} = L'+L''$ означає, що L^{IV} є сумою підпросторів L' і L''.

ТЕОРЕМА 2.16. Переріз L''' і сума L^{IV} є підпросторами простору L.

Приклад. Нехай B_3 — лінійний простір усіх векторів звичайного простору. L' — підпростір усіх векторів, паралельних площині xOy, L'' — підпростір усіх векторів, паралельних площині xOz. Тоді сумою підпросторів L' і L'' буде весь простір B_3, а перерізом підпросторів L' і L'' — множина усіх векторів, паралельних осі Ox.

ТЕОРЕМА 2.17. Якщо L' — підпростір лінійного простору L, то $d(L')\le d(L)$.

ТЕОРЕМА 2.18. Сума розмірностей довільних підпросторів L' і L'' скінченновимірного лінійного простору L дорівнює сумі розмірності перерізу цих підпросторів і розмірності суми цих підпросторів.

ТЕОРЕМА 2.19. Розмірність лінійної оболонки сукупності $\bar{x},\bar{y},...,\bar{z}$ елементів лінійного простору L дорівнює максимальному числу лінійно незалежних елементів цієї сукупності.

Означення 2.17. Простір L називається *прямою сумою* підпросторів L' і L'', якщо кожний вектор $\bar{x}$ простору L можна подати єдиним способом у вигляді $\bar{x}=\bar{x}_1+\bar{x}_2$, де $\bar{x}_1\in L'$, $\bar{x}_2\in L''$.

ТЕОРЕМА 2.20. Для того щоб простір L був прямою сумою підпросторів L' і L'', достатньо виконання умов

$$L'\cap L''=\bar{0},\;\; d(L)=d(L')+d(L'').$$

Задача. Дано лінійний простір L^n. Перевірити, чи є лінійним підпростором цього лінійного простору множина матриць

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n \end{pmatrix},$$

координати яких задовольняють рівності

$$x_1+x_2+...+x_n=0.$$

Розв'язання. Сукупність матриць, координати яких задовольняють рівності $x_1+x_2+...+x_n=0$, утворюють підмножину простору L^n. Позначимо цю підмножину через L'.

Покажемо, що для цієї підмножини L' виконуються вимоги 1– 2 підпростору.

Нехай

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \ \lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Якщо $\bar{x} \in L'$, $\bar{y} \in L'$, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ і $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 0$. Звідси $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n) = 0$ і $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \ldots + \lambda x_n = 0$. Із цих рівностей випливає, що $\bar{x} + \bar{y} \in L'$ і $\lambda\bar{x} \in L'$. Отже, для L' виконуються вимоги 1– 2 для підпростору 1, тому L' є підпростором L^n.

Задачі для розв'язування

228. Дано лінійний підпростір L_4. Довести, що множина елементів L': $\bar{x}_1 = (0, \ x_2, \ x_3, \ x_4)$, $\bar{y}_1 = (0, \ y_2, \ y_3, \ y_4)$, $\bar{z}_1 = (0, \ z_2, \ z_3, \ z_4)$ і множина елементів L'': $\bar{x}_2 = (x_1, \ 0, \ x_3, \ x_4)$, $\bar{y}_2 = (y_1, \ 0, \ y_3, \ y_4)$, $\bar{z}_2 = (z_1, 0, z_3, = z_4)$ є підпросторами лінійного простору L_4.

229. Для лінійного простору L_4, розглянутого в попередній задачі, знайти переріз L''' і суму L^{IV} підпросторів L' і L''.

230. Дано лінійний простір P_5 многочленів не вище п'ятого степеня. Довести, що множина L' многочленів, що мають вигляд $a_0 t + a_1$ і множина L'' многочленів $b_0 t^4 + b_1 t^2 + b_2$ є підпросторами простору P_5, якщо додавання елементів і множення елемента на число брати в звичайному розумінні.

231. Знайти підпростори $L''' = L' \cap L''$ і $L^{IV} = L' + L''$ з умови попередньої задачі.

232. Дано лінійний простір усіх геометричних векторів звичайної площини, чи буде лінійним підпростором множина таких векторів:

1) усі вектори, кінці яких лежать у першій чверті системи координат, а початки збігаються з початком координат;

2) усі вектори, що лежать на даній прямій.

233. Перелічити усі лінійні підпростори звичайного простору.

234. Довести, що такі множини елементів утворюють підпростори, знайти їх базис і розмірність:

1) множина елементів простору L_n, перша і остання координати яких рівні між собою ($n \geq 2$);

2) множина елементів простору L_n, в яких координати з парними номерами дорівнюють нулю ($n \geq 2$);

3) множина усіх векторів звичайного простору компланарних заданій площині;

4) множина усіх матриць A порядку n, що задовольняють умову $A^T = A$ (симетричні матриці);

5) множина усіх функцій $f(t)$, неперервних на відрізку $[a,b]$ і таких, що задовольняють умову $f(t_0) = 0$ для $t_0 \in [a, b]$.

235. Знайти розмірності суми і перерізу лінійних підпросторів L_4: L', натягнутого на вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, і L'', натягнутого на вектори $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_l$:

1) $\bar{a}_1 = (1; 2; 0; 1)$, $\bar{a}_2 = (1; 1; 1; 0)$, $\bar{b}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\bar{b}_2 = (1; 3; 0; 1)$.

2) $\bar{a}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\bar{a}_2 = (1; -1; 1; -1)$, $\bar{a}_3 = (1; 3; 1; 3)$. $\bar{b}_1 = (1; 2; 0; 2)$, $\bar{b}_2 = (1; 2; 1; 2)$, $\bar{b}_3 = (3; 1; 3; 1)$.

236. Знайти розмірність і базис суми та перерізу лінійних підпросторів простору многочленів степеня ≤ 3, натягнутих на системи многочленів $1 + 2t + t^3$, $1 + t + t^2$, $t - t^2 + t^3$ і $1 + t^2$, $1 + 3t + t^3$, $3t - t^2 + t^3$.

237. Описати лінійні оболонки таких систем векторів простору L^5:

$$1)\ \bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix};$$

$$2)\ \bar{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\ \bar{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \bar{x}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

238. Знайти лінійні оболонки таких систем многочленів:

1) $1, t, t^2$. 2) $1+t^2, t+t^2, 1+t+t^2$.

239. Знайти розмірність і базис лінійної оболонки заданої системи векторів:

1) $\bar{x}_1=(1;0;0;-1)$, $\bar{x}_2=(2;1;1;0)$, $\bar{x}_3=(1;1;1;1)$, $\bar{x}_4=(1;2;3;4)$, $\bar{x}_5=(0;1;2;3)$.

2) $\bar{x}_1=(1;1;1;1;0)$, $\bar{x}_2=(1;1;-1;-1;-1)$, $\bar{x}_3=(2;2;0;0;-1)$, $\bar{x}_4=(1;1;5;5;2)$, $\bar{x}_5=(1;-1;-1;0;0)$.

240. Показати, що звичайний простір є прямою сумою підпросторів L' і L'', де

1) L' — площина, що задана рівнянням $x_3=0$, L'' — пряма, що задана рівняннями $x_1=x_2=0$;

2) L' — площина, яка задана рівнянням $x_1+x_2+x_3=0$, L'' — пряма, яка задана рівняннями $x_1=x_2=x_3$;

3) L' — площина, яка задана рівнянням $x_1+x_2=0$, L'' — пряма, задана рівняннями $\begin{cases}x_1=x_2,\\x_3=0.\end{cases}$

3 СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

3.1. РАНГ МАТРИЦІ

Означення 3.1. *Мінором* r-го порядку матриці $\mathcal{A}$ розмірів $m\times n$ називається визначник r-го порядку, утворений з елементів матриці $\mathcal{A}$, що залишились після викреслення в ній $m-r$ рядків і $n-r$ стовпців ($r\le m$, $r\le n$).

Означення 3.2. Натуральне число r називається *рангом* матриці $\mathcal{A}$, якщо воно задовольняє такі вимоги:

1) матриця $\mathcal{A}$ має мінор r-го порядку, відмінний від нуля;

2) усякий мінор $(r+1)$-го і більш високого порядку (якщо такі існують) дорівнює нулю.

Ранг матриці $\mathcal{A}$, усі елементи якої є нулі, за означенням дорівнює нулю.

Означення 3.3. Мінор r-го порядку матриці рангу r, не рівний нулю, називається *базисним мінором* матриці $\mathcal{A}$ (матриця може мати кілька базисних мінорів).

Рядки і стовпці, на перетині яких стоїть базисний мінор, називаються відповідно *базисними рядками* і *базисними стовпцями*.

Елементарними перетвореннями матриці називаються такі операції:

1. Перестановка (транспозиція) двох рядків або стовпців.

2. Додавання до всіх елементів рядка (стовпця) відповідних елементів другого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Матриці, здобуті одна з іншої за допомогою скінченого числа елементарних перетворень, називаються *еквівалентними*.

ТЕОРЕМА 3.1. Ранги еквівалентних матриць рівні.

Означення 3.4. Матриця розмірів $m\times n$, рангу $r\ge 1$ називається *трапецієподібною*, якщо існує таке натуральне число l ($l\le m$, $l\le n$), що

1) елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{ll}$ не дорівнюють нулю;

2) якщо $l < m$, то елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{ll}, a_{ll+1}, \ldots, a_{ln}$, дорівнюють нулю;

3) якщо $l = m$, то дорівнюють нулю елементи стовпців, що стоять під елементами $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{l-1l-1}$.

Трапецієподібна матриця має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1l} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2l} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_{ll} & \ldots & a_{ln} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Твердження 3.1. Ранг трапецієподібної матриці дорівнює l.

Твердження 3.2. Для всякої ненульової матриці $\mathcal{A}$ існує еквівалентна їй трапецієподібна матриця $\mathcal{A}_{тр}$, яка може бути здобута з допомогою елементарних перетворень матриці $\mathcal{A}$.

Пояснимо хід здобуття трапецієподібної матриці $\mathcal{A}_{тр}$, еквівалентної даній матриці $\mathcal{A}$.

Перший крок. Якщо перший рядок матриці $\mathcal{A}$ складається з нулів, то ми переставляємо його на останнє місце. Отже, можна вважати, що матриця, еквівалентна $\mathcal{A}$, у 1-му рядку має елемент, відмінний від нуля. Тоді, переставляючи стовпці, можемо перейти до еквівалентної матриці, у якої цей елемент стоїть на перетині 1-го рядка і 1-го стовпця. Потім, додаючи до кожного рядка 1-й рядок, помножений на відповідний коефіцієнт, переходимо до матриці, в якій усі елементи 1-го стовпця, за винятком 1-го елемента a_{11}, дорівнюють нулю. Якщо $m \geq 2$ і матриця, складена із елементів 2-го і наступного рядків, ненульова, то виконуємо другий крок.

Другий крок. Якщо виявляється, що 2-й рядок складається з нулів, то ми переставляємо його на останнє місце. Тому можна вважати, що серед елементів 2-го рядка є елемент, відмінний від нуля. Можемо вважати, що цей елемент стоїть на перетині 2-го стовпця і 2-го рядка. Як і раніше перетворюємо в нулі усі елементи 2-го стовпця, що стоять під ним. Відзначимо, що операції 2-го кроку не зачіпають 1-го рядка і 1-го стовпця. Якщо $m \geq 3$ і матриця, складена з елементів 3-го і наступного рядків, ненульова, то виконують третій крок.

Через скінченне число аналогічних кроків прийдемо до трапецієподібної матриці.

ТЕОРЕМА 3.2. (теорема про базисний мінор). Базисні рядки (базисні стовпці) як елементи лінійних просторів L_n (L^m) лінійно незалежні. Будь-який рядок (будь-який стовпець) матриці $\mathcal{A}$ є лінійною комбінацією базисних рядків (базисних стовпців).

ТЕОРЕМА 3.3. Ранг матриці дорівнює максимальному числу її лінійно незалежних стовпців (рядків).

Розглянемо два методи обчислення рангу матриці.

Перший метод. Для даної матриці $\mathcal{A}$ знаходять еквівалентну їй трапецієподібну матрицю $\mathcal{A}_{тр}$. Тоді ранг матриці $\mathcal{A}$ дорівнюватиме рангу матриці $\mathcal{A}_{тр}$.

Другий метод. При обчисленні рангу матриці $\mathcal{A}$ переходять від мінорів менших порядків до мінорів більших порядків. Якщо уже знайдено мінор k-го порядку $|D|$, відмінний від нуля, то обчислюють лише ті мінори $(k+1)$-го порядку, які є окантованими відносно $|D|$. Якщо всі вони дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Задача. Обчислити ранг матриці

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. *Перший метод.* Виконуємо такі елементарні перетворення матриці $\mathcal{A}$. Переставивши місцями 1-й і 3-й стовпці матриці $\mathcal{A}$, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Додамо до елементів 2-го рядка елементи 1-го, а до третього елементи 1-го рядка, помножені на число (− 5), Тоді матимемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & -15 & -9 \end{pmatrix}.$$

Додаючи до 3-го рядка елементи 2-го, помножені на 3, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здобули трапецієподібну матрицю, для якої $l = 2$. Отже, $r(\mathcal{A}) = 2$.

Другий метод. Мінор 2-го порядку, що стоїть у лівому верхньому кутку, відмінний від нуля:

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мінори 3-го порядку, окантовані відносно $|D|$, дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $r(\mathcal{A}) = 2$.

Задачі для розв'язування

У задачах 241–250 знайти ранги матриць:

241. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$. **242.** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix}$.

243. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. **244.** $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 8 \end{pmatrix}$.

245. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **246.** $\begin{pmatrix} \lambda & 5\lambda & -\lambda \\ 2\lambda & \lambda & 10\lambda \\ -\lambda & -2\lambda & -3\lambda \end{pmatrix}$.

247. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. **248.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$.

249. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ 4 & 1 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

250. $\begin{pmatrix} 9 & \lambda+2 & \lambda+2 & 9 & -5 \\ 5 & \lambda+4 & \lambda+1 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & \lambda+1 & \lambda & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

У задачах 251–256 визначити ранги матриць і знайти їхні базисні мінори:

251. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **252.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

253. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. **254.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

255. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **256.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 8 & 11 \\ 3 & 8 & 3 & 13 & 18 \end{pmatrix}$.

У задачах 257 і 258 показати, що дані системи векторів лінійно залежні:

257. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

258. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

У задачах 259 і 260 показати, що дані системи векторів лінійно незалежні:

259. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

260. $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 261 і 262 дослідити лінійну залежність системи векторів (тобто вказати лінійно незалежну підсистему і подати через вектори підсистеми решту векторів даної системи):

261. $\vec{a}_1 = (0;\ 2;\ 1;\ -3)$, $\vec{a}_2 = (3;\ 1;\ -2;\ 1)$, $\vec{a}_3 = (3;\ -1;\ 3;\ 4)$.

262. $\vec{a}_1 = (2;\ -1;\ 0;\ 3;\ 4)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 3;\ -1;\ 0;\ 5)$, $\vec{a}_3 = (3;\ 2;\ -1;\ 3;\ 9)$, $\vec{a}_4 = (0;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1)$.

3 1-93

У задачах 263–265 знайти всі значення λ при яких вектор $\bar{x}$ лінійно виражається через вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$:

263. $\bar{a}_1 = (2;\ 3;\ 5)$, $\bar{a}_2 = (3;\ 7;\ 8)$, $\bar{a}_3 = (1;\ -6;\ 1)$, $\bar{x} = (7;\ -2;\ \lambda)$.

264. $\bar{a}_1 = (3;\ 2;\ 5)$, $\bar{a}_2 = (2;\ 4;\ 7)$, $\bar{a}_3 = (5;\ 6;\ \lambda)$, $\bar{x} = (1;\ 3;\ 5)$.

265. $\bar{a}_1 = (3;\ 2;\ 6)$, $\bar{a}_2 = (7;\ 3;\ 9)$, $\bar{a}_3 = (5;\ 1;\ 3)$, $\bar{x} = (\lambda;\ 2;\ 5)$.

3.2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛІ. ПРАВИЛО КРАМЕРА

Розглянемо систему m лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

відносно n невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Означення 3.5. Розв'язком системи (3.1) називається *впорядкований набір чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, підстановка яких замість невідомих перетворює всі рівняння системи на арифметичні тотожності. Розв'язок системи (3.1), записаний у вигляді матриці-стовпця $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, є елементом простору L^n.

Система рівнянь називається *сумісною,* якщо вона має хоч би один розв'язок. Якщо ж система не має жодного розв'язку, то вона називається *несумісною*.

Матриця

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається *основною матрицею* системи (3.1).

Числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ називаються *вільними членами* рівнянь.

Матриця

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

називається *розширеною матрицею* системи (3.1).

ТЕОРЕМА 3.4. (Кронекера-Капеллі). Для того щоб система (3.1) була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці, тобто

$$r(\mathcal{B}) = r(\mathcal{A}).$$

В окремому випадку, коли число рівнянь дорівнює числу невідомих і матриця $\mathcal{A}$ невироджена, тобто

$$|\mathcal{A}| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

де

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ 1 \le i \le n.$$

Правило розв'язування довільної системи лінійних рівнянь.

Нехай система (3.1) сумісна. Виберемо в $\mathcal{A}$ базисний мінор. Виділимо з системи (3.1) систему r рівнянь, серед коефіцієнтів яких містяться елементи базисного мінору. В лівих частинах рівнянь цієї системи залишимо такі r невідомих, коефіцієнти при яких є елементами базисного мінору. Ці невідомі назвемо базисними невідомими. Решту $n - r = k$ невідомих системи (3.1) перенесемо до правої частини і назвемо їх вільними невідомими. У випадку $r = n$ вільні невідомі відсутні. Розв'язуємо здобуту систему відносно базисних невідомих (наприклад, за правилом Крамера). Тоді, якщо, наприклад $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — базисні невідомі, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — вільні, то система (3.1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = d_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = d_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = d_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n, \end{cases}$$

який і називається *розв'язком системи* (3.1).

Зауваження 3.1. У випадку $r < n$ може існувати декілька базисних мінорів матриці $\mathcal{A}$. У зв'язку з цим існує кілька способів вибору r рівнянь, а також базисних невідомих.

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Записавши основну матрицю $\mathcal{A}$ системи і розширену матрицю $\bar{\mathcal{B}}$ системи, матимемо:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначимо ранги цих матриць одним із методів, наведених в п. 3.1. Для даної системи $r(\mathcal{A}) = 3$, $r(\bar{\mathcal{B}}) = 4$.

Система несумісна.

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання. В цій системі $r(\mathcal{A}) = 3$ і $r(\bar{\mathcal{B}}) = 3$. Система сумісна. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то із перших трьох рівнянь за формулами Крамера знаходимо

$$x_1=2,\ x_2=1,\ x_3=1.$$

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. В цій системі $r(\mathcal{A}) = 2$, $r(\bar{\mathcal{B}}) = 2$. Система сумісна. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то із перших двох рівнянь системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

знаходимо

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4,$$
$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4.$$

Задачі для розв'язування

У задачах 266–277 розв'язати системи рівнянь:

266. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

267. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

268. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

269. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$

270. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

271. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 20, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 4. \end{cases}$

272. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

273. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

274. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$

275. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

276. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2, \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

277. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$

3.3. МЕТОД ГАУССА

Означення 3.6. Під елементарними перетвореннями системи лінійних рівнянь розуміють такі операції:

1) зміна нумерації невідомих системи;
2) перестановка місцями рівнянь системи;
3) додавання до одного рівняння іншого, помноженого на довільне число.

Означення 3.7. Дві сумісні системи лінійних рівнянь називаються *рівносильними,* якщо всі розв'язки першої системи є також розв'язками другої і, навпаки, всі розв'язки другої системи є розв'язками першої. Якщо обидві системи не сумісні, вони також називаються рівносильними.

ТЕОРЕМА 3.5. Внаслідок елементарних перетворень система рівнянь переходить у рівносильну систему рівнянь (з урахуванням зміни нумерації невідомих).

Нехай дано систему лінійних рівнянь (3.1).

Метод Гаусса полягає в послідовному виключенні невідомих за допомогою елементарних перетворень системи.

Розглянемо *перше рівняння* системи. Якщо в ньому всі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то ми переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому розглянемо випадок, коли в першому рівнянні хоч би один із коефіцієнтів при невідомих не дорівнює нулю. Нехай ним буде коефіцієнт при x_1 (цього завжди можна досягнути, змінюючи нумерацію невідомих).

Перепишемо тепер початкову систему в такому вигляді: перше рівняння залишимо без зміни, а наступні рівняння дістанемо додаванням до них першого рівняння, помноженого на відповідний коефіцієнт так, щоб після додавання рівняння не містили x_1. Отже, нова система рівносильна початковій, містить невідоме x_1 тільки в першому рівнянні, з решти рівнянь невідоме x_1 виключене.

Розглянемо тепер *друге рівняння* нової системи. Якщо в ньому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член дорівнюють нулю, то переставляємо це рівняння на останнє місце. Якщо усі коефіцієнти при невідомих дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю, то система розв'язків немає. Тому розглянемо випадок, коли в другому рівнянні нової системи є хоч би один коефіцієнт при невідомих, відмінний від нуля. Можемо вважати, що це коефіцієнт при x_2. Перепишемо тепер нову систему в такому вигляді: перші два рівняння залишимо попередніми, в інших рівняннях виключимо x_2, додаючи до них друге рівняння, помножене на відповідний коефіцієнт.

Продовжуючи аналогічні дії у випадку, коли система сумісна, здобудемо систему, в якій матриця коефіцієнтів при невідомих буде трапецієподібною, тобто система матиме вигляд

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \quad \ldots \quad + c_{2n}x_n = d_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{ll}x_l + c_{ll+1}x_{l+1} + \ldots + c_{ln}x_n = d_l. \end{cases}$$

Тоді, якщо $l = n$, то $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$. Підставивши x_n в передостаннє рівняння системи, знайдемо x_{n-1}. Потім аналогічно знайдемо невідомі $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_1$. У цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Якщо $l < n$, то з останнього рівняння виражаємо x_l через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Підставляючи цей вираз в передостаннє рівняння, виражаємо x_{l-1} через невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$. Потім аналогічно виражаємо невідомі $x_{l-2}, x_{l-3}, \ldots, x_2, x_1$. У цьому випадку система має безліч розв'язків, причому базисними невідомими є невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_l$, вільними — невідомі $x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_n$.

Метод Гаусса рівносильний відшуканню матриці, еквівалентної розширеній матриці системи, в якій частина, що відповідає основній матриці системи, є трапецієподібною, зауважимо, що у разі елементарних перетворень розширеної матриці не допускається перестановка останнього стовпця, що відповідає стовпцю з вільних членів. Якщо після деякого елементарного перетворення розширеної матриці в ній з'явиться рядок, що складається з нулів, за винятком останнього елемента, то система рівнянь несумісна.

Задача 1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Виконуємо над даною системою такі елементарні перетворення.

Змінимо порядок рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 7x_1 + x_2 - 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на (-2) і додамо до другого рівняння, потім перше рівняння помножимо на (-7) і додамо до третього рівняння. Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \qquad 15x_2 - 16x_3 = 47. \end{cases}$$

Помноживши друге рівняння на (-3) і додавши його до третього рівняння, матимемо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \qquad\qquad -x_3 = 2. \end{cases}$$

Отже, $x_3 = -2$. Тоді

$$x_2 = 3 + x_3 = 3 - 2 = 1,$$
$$x_1 = -5 + 2x_2 - 2x_3 = 1.$$

Таким чином, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$, або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Практично зручно записати розширену матрицю системи так, щоб її частина, яка відповідає основній матриці системи, була трапецієподібною.

Розширена матриця системи має вигляд:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & -5 \\ 7 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right).$$

Уведемо ще й 5-й так званий контрольний стовпець, кожний елемент якого є сумою чотирьох елементів даного рядка. При лінійних перетвореннях елементів матриці такому самому перетворенню повинні підлягати елементи контрольного стовпця. Кожний елемент контрольного стовпця перетвореної матриці дорівнює сумі елементів відповідного рядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 7 & 1 & -2 & 12 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 7 \\ 7 & 1 & -2 & 12 & 18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 15 & 15 \\ 0 & 15 & -16 & 47 & 46 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -2 & 2 & -5 & -4 \\ 0 & 5 & -5 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad (3.2)$$

З матриці (3.2) видно, що $r(\mathcal{A}) = 3$, $r(\bar{\mathcal{B}}) = 3$. Система сумісна.

Оскільки ранг матриці $\mathcal{A}$ дорівнює числу невідомих, то система має єдиний розв'язок, який знайдемо, записавши перетворену систему за здобутою матрицею (3.2). Дістанемо

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ \qquad 5x_2 - 5x_3 = 15, \\ \qquad\qquad -x_3 = 2. \end{cases}$$

Звідси

$$x_3 = -2,$$
$$x_2 = 3 + x_3 = 1,$$
$$x_1 = -5 + 2x_2 - 2x_3 = 1,$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7, \\ -7x_1 + x_2 - 14x_3 = 37. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & -7 \\ -7 & 1 & -14 & 37 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & -5 & 7 & -31 \\ 0 & 15 & -21 & 93 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -9 & 27 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -22 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси $r(\mathcal{A}) = r(\bar{\mathcal{B}}) = 3$. Отже, система сумісна.

З даних чотирьох рівнянь перші три лінійно незалежні, оскільки мінор третього порядку основної матриці, який складається з елементів першого, другого і третього рядків, відмінний від нуля. Четверте рівняння системи є лінійною комбінацією інших, і його можна відкинути. Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ \quad -5x_2 + 4x_3 = -22, \\ \qquad\qquad 3x_3 = -9. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знайдемо єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

який задовольняє і четверте рівняння системи.

Задача 3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 5x_1 - 5x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 30 & -6 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -7 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

$r(\mathcal{A}) = 2$, $r(\bar{\mathcal{B}}) = 3$, тобто $r(\mathcal{A}) \neq r(\bar{\mathcal{B}})$.

Система рівнянь несумісна.

Задача 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \qquad + 7x_3 - 4x_4 = -10. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -3 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, $r(\mathcal{A}) = 2$, $r(\bar{\mathcal{B}}) = 2$. Система сумісна. Оскільки ранг менший числа невідомих, то система має безліч розв'язків.

З даних трьох рівнянь системи перші два лінійно незалежні, а третє рівняння є лінійною комбінацією перших двох.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 - x_3 + x_4, \\ \quad -x_2 = 7 + 6x_3 - 3x_4, \end{cases}$$

де x_1, x_2 базисні, а x_3, x_4 вільні невідомі.

Розв'язавши останню систему відносно x_1, x_2, дістанемо

$$x_1 = -10 - 7x_3 + 4x_4,$$
$$x_2 = -7 - 6x_3 + 3x_4,$$
$$x_3 = x_3,$$
$$x_4 = x_4.$$

Запишемо загальний розв'язок даної системи у вигляді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 .$$

Позначивши вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ через $\bar{x}$, $\begin{pmatrix} -10 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ через $\bar{a}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ через $\bar{b}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ через $\bar{c}$, матимемо

$$\bar{x} = \bar{a} + x_3\bar{b} + x_4\bar{c},$$

тобто загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Зауваження. Щоб із загального розв'язку системи дістати деякий частинний розв'язок, треба надати вільним невідомим будь-яких числових значень.

Наприклад, коли $x_3 = x_4 = 0$, маємо $\bar{x} = \bar{a}$, тобто вектор $\bar{a}$ (або $x_1 = -10$, $x_2 = -7$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$) є частинним розв'язком системи.

Задачі для розв'язування

У задачах 278–297 пов'язати системи рівнянь методом Гаусса:

278. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

279. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

280. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

281. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$

282. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$

283. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$

284. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 4x_3 = -14, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

285. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 2. \end{cases}$

286. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_5 = 18, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + x_5 = -7, \\ x_1 - x_4 + 2x_5 = 8, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

287. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

288. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 11, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases}$

289. $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 8x_2 - x_3 = 8, \\ 9x_1 + x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$

290. $\begin{cases} 3{,}21x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}34x_3 = 6{,}12, \\ 0{,}43x_1 + 4{,}11x_2 + 0{,}22x_3 = 5{,}71, \\ 0{,}17x_1 + 0{,}16x_2 + 4{,}73x_3 = 7{,}06. \end{cases}$

291. $\begin{cases} 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20, \\ 4x_1 - 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8, \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9. \end{cases}$

292. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 7x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$ **293.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3. \end{cases}$

294. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = -6, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = -4. \end{cases}$

295. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -18, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -5. \end{cases}$

296. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

297. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

У задачах 298–300 дослідити систему і знайти загальний розв'язок залежно від значення параметра λ:

298. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$ **299.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

300. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases}$

3.4. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ

Означення 3.8. Система рівнянь (3.1), в якій $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, називається *однорідною*. Ця система має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Нехай матриця $\mathcal{A}$, складена з коефіцієнтів системи (3.3), має ранг r. Ранг r матриці $\mathcal{A}$ у випадку однорідної системи називається *рангом системи*.

Однорідна система завжди сумісна, оскільки набір чисел $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ є її розв'язком. Розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ називається *нульовим*.

Якщо $n = r$, то нульовий розв'язок буде єдиним розв'язком системи (3.3); при $r < n$ система має розв'язки, відмінні від нульового.

Означення 3.9. Нехай $r < n$. Тоді будь-яка сукупність з $n - r$ лінійно незалежних розв'язків однорідної системи (3.3) називається *фундаментальною системою розв'язків* однорідної системи.

ТЕОРЕМА 3.5. Загальний розв'язок однорідної системи рангу r з n невідомими має вигляд

$$\bar{x} = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_{n-r}\bar{x}_{n-r},$$

де $c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ — деякі довільні сталі, а $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{n-r}$ — фундаментальна система розв'язків однорідної системи (3.3).

ТЕОРЕМА 3.6. Множина розв'язків $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ лінійної однорідної системи рангу r утворює в просторі L^n підпростір розмірності n-r, в якому фундаментальна система розв'язків утворює базис.

Фундаментальну систему розв'язків можна знайти так.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — базисні, а $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — вільні невідомі. Виразимо базисні через вільні і запишемо систему (3.3) у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = c_{1r+1}x_{r+1} + c_{1r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2 = c_{2r+1}x_{r+1} + c_{2r+2}x_{r+2} + \ldots + c_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = c_{rr+1}x_{r+1} + c_{rr+2}x_{r+2} + \ldots + c_{rn}x_n, \\ x_{r+1} = x_{r+1}, \\ x_{r+2} = x_{r+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = x_n, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ c_{2r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \begin{pmatrix} c_{1r+2} \\ c_{2r+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{rr+2} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+2} + \ldots + \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} x_n.$$

Тоді

$$\bar{x} = \bar{c}_1 x_{r+1} + \bar{c}_2 x_{r+2} + \ldots + \bar{c}_{n-r} x_n,$$

де

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_r \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{1r+1} \\ c_{2r+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{rr+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \bar{c}_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При цьому запису загального розв'язку числа $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ грають роль довільних сталих, а вектори $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_{n-r}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків однорідної системи (3.3).

Означення 3.10. Система лінійних однорідних рівнянь (3.3) називається *відповідною* до системи неоднорідних рівнянь (3.1), якщо вона здобута з (3.1) заміною в (3.1) вільних членів $b_1, \ldots, b_m$ на нульові значення.

ТЕОРЕМА 3.7. Загальний розв'язок неоднорідної системи лінійних рівнянь (3.1) дорівнює сумі будь-якого частинного розв'язку цієї системи і загального розв'язку системи лінійних однорідних рівнянь (3.3), відповідної до (3.1).

Тобто, якщо $\bar{x}_0$ — частинний розв'язок системи (3.1), а $\bar{x}^* = c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_{n-r}\bar{x}_{n-r}$ — загальний розв'язок відповідної їй однорідної системи лінійних рівнянь (3.3), то згідно з теоремою 3.7 загальний розв'язок системи лінійних неоднорідних рівнянь (3.1) має вигляд

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{x}^* = \bar{x}_0 + c_1\bar{x}_1 + c_2\bar{x}_2 + \ldots + c_{n-r}\bar{x}_{n-r}.$$

Задача 1. Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathcal{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(\mathcal{A})=3$.

Розмірність підпростору розв'язків $k = n - r = 5 - 3 = 2$. Отже, нам досить знайти будь-які два лінійно незалежних розв'язки.

Оскільки $r = 3$, то з чотирьох рівнянь візьмемо три, коефіцієнти яких входять до базисного мінору матриці $\mathcal{A}$.

Перетворена система матиме вигляд:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 + 3x_3 + 4x_5 = 0, \\ \qquad x_2 + x_4 + 2x_3 + 3x_5 = 0, \\ \qquad -2x_4 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = -3x_3 - 4x_5, \\ \qquad x_2 + x_4 = -2x_3 - 3x_5, \\ \qquad x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 + 5x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 3x_5, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_5, \\ x_5 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_5, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5.$$

Вектори $\bar{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\bar{c}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків і базис підпростору розв'язків.

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь можна записати у вигляді

$$x = \bar{c}_1 x_4 + \bar{c}_2 x_5,$$

де x_4, x_5 — довільні сталі.

Задача 2. Знайти загальний розв'язок системи лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \qquad + 7x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо матрицю системи

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Маємо

$$\mathcal{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $r(\mathcal{A})=2$.

Розмірність підпростору розв'язків $k = n - r = 4 - 2 = 2$, тобто нам досить знайти довільні два лінійно незалежних розв'язки.

Перетворена система матиме вигляд

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -x_3 + x_4, \\ \quad - x_2 = 6x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Розв'язавши її відносно x_1, x_2, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 3x_4, \\ x_3 = 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4, \\ x_4 = 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4, \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_4.$$

Вектори $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ і $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь можна записати у вигляді

$$\bar{x} = \bar{a}_1 x_3 + \bar{a}_2 x_4,$$

де x_3, x_4 — довільні сталі.

Зауважимо, що однорідна система рівнянь цієї задачі є відповідною до неоднорідної системи рівнянь задачі 4 п. 3.3. Таким чином, загальний розв'язок $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}x_3 + \vec{c}x_4$ задачі 4 п. 3.3 має вигляд $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{x}^*$, де $\vec{x}_0 = \vec{a}$ — частинний розв'язок відповідної неоднорідної системи, $\vec{x}^* = \vec{b}x_3 + \vec{c}x_4$, $\vec{b} = \vec{a}_1$, $\vec{c} = \vec{a}_2$ — загальний розв'язок відповідної однорідної системи рівнянь.

Задачі для розв'язування

У задачах 301–310 знайти всі розв'язки систем:

301. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **302.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

303. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ **304.** $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

305. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$ **306.** $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

307. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

308. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

309. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

310. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

311. Знайти розмірність і базис підпростору розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

7) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

10) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 - x_5 + x_6 = 0. \end{cases}$

11) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

12) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

312. Знайти системи однорідних рівнянь, множини розв'язків яких збігаються з лінійними оболонками, натягнутими на вектори

1) $\vec{b}_1 = (1;\ 2;\ -1;\ 1)$, $\vec{b}_2 = (1;\ 1;\ -3;\ 2)$.

2) $\vec{b}_1 = (1;\ 2;\ -1;\ 1)$, $\vec{b}_2 = (1;\ 4;\ 5;\ -1)$,
$\vec{b}_3 = (2;\ 5;\ 1;\ 1)$, $\vec{b}_4 = (1;\ 1;\ -4;\ 2)$.

3) $\vec{b}_1 = (2;\ 3;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}_2 = (2;\ 4;\ -1;\ 1)$,
$\vec{b}_3 = (2;\ 5;\ -3;\ 4)$.

313. З'ясувати, чи утворюють рядки кожної з матриць

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

4 ДІЙСНИЙ ЕВКЛІДІВ ПРОСТІР

4.1. ДОБУТОК ВЕКТОРІВ У ЗВИЧАЙНОМУ ПРОСТОРІ

4.1.1. Прямокутні складова й проекція вектора на вісь

Означення 4.1. *Віссю* $\bar{S}$ називається пряма, на якій вибрано додатний напрям і одиницю довжини. Вісь $\bar{S}$ визначається вектором $\bar{S}_0$ (ортом осі).

Означення 4.2. *Проекцією точки* M на дану вісь $\bar{S}$ називається основа перпендикуляра, опущеного з даної точки M на дану вісь.

Означення 4.3. *Складовою вектора* $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\bar{S}$ називається вектор $\overline{A'B'}$, де точка A' — проекція точки A, а точка B' — проекція точки B на вісь $\bar{S}$.

Означення 4.4. *Проекцією вектора* $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\bar{S}$ називається довжина складової цього вектора, взята з додатним знаком, якщо напрями складової та осі збігаються, і з від'ємним знаком, якщо складова та вісь мають протилежні напрями. Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь $\bar{S}$ позначають $\text{пр}_{\bar{S}}\overrightarrow{AB}$.

ТЕОРЕМА 4.1. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь $\bar{S}$ дорівнює добутку довжини цього вектора на косинус кута α між вектором та віссю, тобто

$$\text{пр}_{\bar{S}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha. \qquad (4.1)$$

Властивості проекції вектора на вісь:

1. Проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$\text{пр}_{\bar{S}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \text{пр}_{\bar{S}}\vec{a}_1 + \text{пр}_{\bar{S}}\vec{a}_2 + \ldots + \text{пр}_{\bar{S}}\vec{a}_n.$$

2. Проекція добутку скаляра на вектор дорівнює добутку цього скаляра на проекцію вектора, тобто

$$\text{пр}_{\bar{S}}\lambda\vec{a} = \lambda\ \text{пр}_{\bar{S}}\vec{a}.$$

Задача. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють з віссю $\vec{S}$ кути 60° і 120°. Знайти проекцію суми $\vec{a}+3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$.

Розв'язання. Оскільки проекція суми векторів дорівнює сумі проекцій доданків, тобто

$$\text{пр}_{\vec{S}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}+\text{пр}_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right),$$

то досить знайти проекції на вісь $\vec{S}$ кожного з векторів $\vec{a}$ і $3\vec{b}$. Відповідно до формули (4.1) дістаємо:

$$\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}=|\vec{a}|\cos 60^o=6\frac{1}{2}=3;$$

$$\text{пр}_{\vec{S}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cos 120^o=4\left(-\frac{1}{2}\right)=-2.$$

За властивістю 2 знаходимо проекцію вектора $3\vec{b}$ на вісь $\vec{S}$:

$$\text{пр}_{\vec{S}}\left(3\vec{b}\right)=3\text{пр}_{\vec{S}}\vec{b}=3(-2)=-6.$$

Отже,

$$\text{пр}_{\vec{S}}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)=3+(-6)=-3.$$

Задачі для розв'язування

314. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — одиничні вектори, що утворюють з даною віссю $\vec{S}$ відповідно кути $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π. Знайти проекцію на вісь $\vec{S}$ вектора $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.

315. Знайти проекцію суми векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ на вісь $\vec{S}$, якщо $|\vec{a}|=5$, $\left|\vec{b}\right|=6$, $|\vec{c}|=8$, $\left|\vec{d}\right|=12$, а кути, що утворюють ці вектори з віссю $\vec{S}$, відповідно дорівнюють 0, $\frac{2}{3}\pi$, π, $\frac{\pi}{3}$.

316. Довести, що $\text{пр}_{\vec{S}}(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n)=\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}_1+\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}_2+$ $+\ldots+\text{пр}_{\vec{S}}\vec{a}_n$ для будь-якого скінченного числа доданків.

317. Розглядаючи проекції деякої ламаної лінії, довести формули:

1) $\sin\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin(2n-1)\varphi=\dfrac{1-\cos 2n\varphi}{2\sin\varphi}$;

2) $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi=\dfrac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$.

4.1.2. Декартова прямокутна система координат

Якщо базисні вектори афінної системи координат є одиничними і взаємно ортогональними, то така система координат називається *декартовою прямокутною системою координат.*

У випадку декартової прямокутної системи координат базисні вектори позначають через $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є відповідно ортами осей Ox, Oy, Oz. Кожний вектор $\vec{d}$ може бути єдиним способом розкладений за декартовим прямокутним базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, тобто для кожного вектора $\vec{d}$ знайдеться єдина трійка чисел x, y, z така, що справедлива рівність:

$$\vec{d}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,\,y,\,z).$$

Числа x, y, z називаються *декартовими прямокутними координатами вектора* $\vec{d}$.

Якщо точка M — точка простору, то декартові прямокутні координати цієї точки збігаються з декартовими координатами її радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, тобто запис $M(x,\,y,\,z)$ рівносильний запису $\overrightarrow{OM}=(x,\,y,\,z)$. Якщо дані $M_1(x_1,\,y_1,\,z_1)$ і $M_2(x_2,\,y_2,$ $z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,\,y_2-y_1,\,z_2-z_1).$$

ТЕОРЕМА 4.2. Декартові прямокутні координати x, y, z вектора $\vec{d}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz відповідно, а вектори $\overrightarrow{x\vec{i}}$, $\overrightarrow{y\vec{j}}$, $\overrightarrow{z\vec{k}}$ є складовими вектора $\vec{d}$ на осі Ox, Oy, Oz.

Зауваження 4.1. Нехай вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ мають спільний початок O. Система координат $Oxyz$ називається *правою* (*лівою*), якщо поворот на найменший кут від $\vec{i}$ до $\vec{j}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{k}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). Аналогічно визначається права (ліва) система координат на площині. Далі завжди розглядатимуться тільки праві системи координат.

Позначимо буквами α, β, γ кути нахилу вектора $\vec{d}$ відповідно до осей Ox, Oy, Oz. Три числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються *напрямними косинусами вектора* $\vec{d}$.

Справедливі співвідношення.

Для проекцій вектора $\vec{d}$ на осі маємо:

$$x = |\vec{d}|\cos\alpha, \quad y = |\vec{d}|\cos\beta, \quad z = |\vec{d}|\cos\gamma .$$

Довжина вектора $\vec{d}$ виражається через його координати формулою

$$|\vec{d}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \quad (4.2)$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{d}$ виражаються через координати цього вектора за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \qquad (4.3)$$

Сума квадратів напрямних косинусів будь-якого вектора дорівнює одиниці, тобто

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2); \\ \vec{a} - \vec{b} &= (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2). \end{aligned} \qquad (4.4)$$

Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то для будь-якого числа α

$$\alpha\,\vec{a} = (\alpha\, x, \alpha\, y, \alpha\, z).$$

Задача 1. Визначити модулі суми та різниці векторів $\vec{a} = (3; -5; 8)$, $\vec{b} = (-1; 1; -4)$.

Розв'язання. Знаходимо за формулою (4.4) координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2; -4; 4); \qquad \vec{a} - \vec{b} = (4; -6; 12).$$

За формулою (4.2) дістанемо

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6;$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = 14.$$

Задача 2. Дано координати вершин піраміди $A_1(-1; 0; 1)$, $A_2(4; 3; 2)$, $A_3(1; 2; 4)$, $A_4(0; 4; -1)$. Знайти довжини ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 піраміди.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Маємо $\overline{A_1A_2} = (5; 3; 1)$, $\overline{A_1A_3} = (2; 2; 3)$, $\overline{A_1A_4} = (1; 4; -2)$. Оскільки $|A_1A_2| = |\overline{A_1A_2}|$, то $|A_1A_2| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{35}$.

Аналогічно

$$|A_1A_3| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17};$$

$$|A_1A_4| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

Задачі для розв'язування

318. Знайти модуль вектора $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - \frac{1}{5}\left(4\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}\right)$ і його напрямні косинуси.

319. Дано вектори $\vec{a} = (1; -2)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $\vec{c} = (2; 0)$. Знайти координати векторів:

1) $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \frac{1}{2}\vec{c}$; 2) $\frac{3\vec{a} - 5\vec{b}}{2}$; 3) $\frac{\vec{c} - 2\vec{b}}{3}$.

320. При яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ колінеарні?

321. Переконатися, що чотири точки $A(3; -1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-1; 1; -3)$, $D(3; -5; 3)$ є вершинами трапеції.

322. Дано вершини паралелограма $ABCD$: $A(2; 2; 2)$, $B(6; 5; 0)$, $C(0; 3; 8)$. Знайти координати вершини D.

323. Знайти точку M, яка розташована від точки $A(-4; 0; 1)$ на відстані 9, знаючи напрямні косинуси вектора $\overline{OM}$: $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$.

324. Вершини трикутника містяться в точках $A(2; -1; 3)$, $B(4; 0; 1)$, $C(-10; 5; 3)$. Знайти косинус кута ABC.

325. У трикутнику з вершинами $A(5; 4)$, $B(-1; 2)$, $C(5; 1)$ проведена медіана AD. Знайти її довжину.

326. Дано трикутник з вершинами $A(4; 1)$, $B(7; 5)$, $C(-4; 7)$. Знайти довжину бісектриси AD кута BAC.

327. На площині дано два вектори $\vec{p} = (2; -3)$ та $\vec{q} = (1; 2)$. Розкласти вектор $\vec{a} = (9; 4)$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$.

328. Дано три вектори $\vec{a} = (3; -1)$, $\vec{b} = (1; -2)$, $\vec{c} = (-1; 7)$. Розкласти вектор $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$.

329. На площині дано чотири точки $A(1; -2)$, $B(2; 1)$, $C(3; 2)$, $D(-2; 3)$. Розкласти вектори $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ та $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \ + \overrightarrow{CD}$ за базисом $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

330. Дано три вектори $\vec{p} = (3; -2; 1)$, $\vec{q} = (-1; 1; 2)$, $\vec{r} = (2; 1; -3)$. Розкласти вектор $\vec{c} = (11; -6; -7)$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

331. У деякому базисі дано чотири вектори $\vec{a} = (2; 2; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; 3)$, $\vec{c} = (1; 1; 1)$, $\vec{d} = (3; 0; -2)$. Переконатись, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис. Знайти координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі.

4.1.3. Скалярний добуток векторів

Означення 4.5. *Скалярним добутком* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, позначене символом $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (або $\vec{a}\,\vec{b}$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними, тобто $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)$.

Наслідок 4.1. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного з цих векторів на проекцію другого вектора на вісь, що визначається першим з указаних векторів, тобто

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \text{ пр}_{\vec{a}}\vec{b}, \text{ або } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{b}| \text{ пр}_{\vec{b}}\vec{a} .$$

Геометричні властивості скалярного добутку.

ТЕОРЕМА 4.3. Необхідною і достатньою умовою ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку.

ТЕОРЕМА 4.4. Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють гострий (тупий) кут тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток додатний (від'ємний).

Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1. $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ (*комутативна властивість*).
2. $\langle \alpha\vec{a}, \vec{b} \rangle = \alpha\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ (*асоціативна властивість*).
3. $\langle (\vec{a} + \vec{b})\vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ (*дистрибутивна властивість*).
4. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle > 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{a}\vec{a} = 0$, якщо $\vec{a} = \vec{0}$.
5. $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$. Добуток $\langle \vec{a}\vec{a} \rangle$ позначається через $\vec{a}^2$ і називається *скалярним квадратом*. Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату довжини вектора.

Зауваження 4.2. Справедливі рівності

$$\vec{i}^2 = 1; \quad \vec{j}^2 = 1; \quad \vec{k}^2 = 1; \quad \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = 0 .$$

ТЕОРЕМА 4.5. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то скалярний добуток цих векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат, тобто

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Наслідок 4.2. Необхідною і достатньою умовою ортогональності векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є рівність

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 .$$

Наслідок 4.3. Кут між векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ визначається за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

Наслідок 4.4. Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ визначається за формулою

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

Наслідок 4.5.

$$|\vec{a}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 .$$

Задача 1. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4.

Розв'язання. Оскільки $\overline{A_1A_2} = (5; 3; 1)$ та $\overline{A_1A_4} = (1; 4; -2)$, то косинус кута між векторами $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_4}$ має вигляд

$$\cos\left(\overline{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overline{A_1A_4}\right) = \frac{\left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\left|\overline{A_1A_4}\right|} = \frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 1(-2)}{\sqrt{25+9+1}\sqrt{1+16+4}} =$$

$$= \frac{15}{\sqrt{35}\sqrt{21}} = \frac{15}{7\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Тоді

$$\left(\overline{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overline{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Величина кута між векторами $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_4}$ дорівнює величині кута між ребрами A_1A_2 та A_1A_4. Тому

$$\left(A_1A_2\,\widehat{\ }\,A_1A_4\right) = \left(\overline{A_1A_2}\,\widehat{\ }\,\overline{A_1A_4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{15}}{7}.$$

Задача 2. Дано $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначити, за яких значень α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ перпендикулярні.

Розв'язання. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку (див. теорему 4.3). Звідси для α маємо співвідношення:

$$\left\langle \left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \alpha\vec{b}\right) \right\rangle = 0.$$

Використовуючи алгебраїчні властивості скалярного добутку, розпишемо ліву частину останньої рівності:

$$\left\langle \left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right)\left(\vec{a} - \alpha\vec{b}\right) \right\rangle = \vec{a}^2 - \alpha\left\langle \vec{a}\vec{b} \right\rangle + \alpha\left\langle \vec{b}\vec{a} \right\rangle - \alpha^2\vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 - \alpha\left\langle \vec{a}\vec{b} \right\rangle + \alpha\left\langle \vec{a}\vec{b} \right\rangle - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 - \alpha^2\left|\vec{b}\right|^2.$$

Оскільки $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, т о $9 - 25\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Задача 3. Знайти довжину вектора $\vec{a} = \vec{x} - 2\vec{y}$, якщо $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{y}| = 2$, кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ дорівнює $\frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Маємо $\langle \vec{a}\vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$. Звідси $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$. Тому

$$|\vec{a}| = |\vec{x} - 2\vec{y}| = \sqrt{(\vec{x} - 2\vec{y})^2} = \sqrt{\vec{x}^2 - 4\vec{x}\vec{y} + 4\vec{y}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{x}|^2 - 4|\vec{x}||\vec{y}|\cos\frac{\pi}{3} + 4|\vec{y}|^2} = \sqrt{1 - 4 \cdot 2\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{13}.$$

Задачі для розв'язування

332. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 120°, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Знайти:

1) $\langle \vec{a}\vec{b} \rangle$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)^2$; 4) $\left\langle \left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)\left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \right\rangle$.

333. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, знайти довжину вектора $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

334. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, а вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути, що дорівнюють $\frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, знайти:

1) $\left\langle \left(2\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \right\rangle$; 2) $\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2$.

335. Дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, що задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 4$, знайти $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{ca}$.

336. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 6$, визначити модуль вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

337. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{a} - \vec{b}$?

338. Дано три вектори $\vec{a} = (4; -2; -4)$, $\vec{b} = (-2; 4; -3)$, $\vec{c} = (0; 2; -1)$. Обчислити:

а) $\langle \overrightarrow{ab} \rangle$; б) $\langle \overrightarrow{ac} \rangle$; в) $\sqrt{\vec{a}^2}$; г) $\left\langle \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \right\rangle$.

339. Дано чотири вектори $\vec{a} = (4; -8; -4)$, $\vec{b} = (2; 4; 3)$, $\vec{c} = (1; 2; 5)$, $\vec{d} = (0; 1; 2)$. Обчислити:

а) $\left\langle \vec{a}\vec{b} \right\rangle$; б) $\left\langle \vec{a}\vec{d} \right\rangle + \left\langle \vec{b}\vec{d} \right\rangle$; в) $\left\langle \left(3\vec{a} + \vec{d}\right)\left(2\vec{b} - 2\vec{c}\right) \right\rangle$.

340. Дано вектори $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$. При якому значенні m ці вектори взаємно перпендикулярні?

341. Дано точки $A(-3; 0; 2)$, $B(5; -2; 1)$, $C(2; 6; -1)$, $D(1; 3; -3)$. Довести, що прямі AB та CD взаємно перпендикулярні.

342. При якому значенні m вектори $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ взаємно перпендикулярні?

343. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.

344. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, що виходять із спільної вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

345. Визначити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

346. Дано вершини трикутника $A(3; 2; -3)$, $B(5; 1; -1)$, $C(1; -2; 1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.

347. Обчислити внутрішні кути трикутника $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$; переконатися, що цей трикутник рівнобедрений.

348. У прямокутному рівнобедреному трикутнику проведені медіани з вершин гострих кутів. Знайти кут між ними.

349. Дано вершини трикутника $A(0; 0; 5)$, $B(5; -2; 1)$, $C(2; 6; 1)$. Знайти кути трикутника.

350. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

351. Знайти проекцію вектора $\vec{a} = (5; 2; 5)$ на вісь вектора $\vec{b} = (2; -1; 2)$.

352. Дано три вектори $\vec{a} = (1; -3; 4)$, $\vec{b} = (3; -4; 2)$, $\vec{c} = (-1; 1; 4)$. Знайти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

353. Дано вектори $\vec{a} = (3; 0; 4)$, $\vec{b} = (2; -1; -2)$. Знайти:

1) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$; 2) $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$; 3) $\text{пр}_{\vec{a}}\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right)$.

354. Дано точки $A(3; 1; 0)$, $B(0; -2; 6)$, $C(3; -2; 0)$, $D(1; -2; 4)$. Знайти $\text{пр}_{\overrightarrow{CD}}\overrightarrow{AB}$.

355. Дано дві точки $A(2; -4; 0)$, $B(6; 8; 4)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні кути.

356. Дано вершини трикутника $A(4; 1; 0)$, $B(2; 2; 1)$, $C(6; 3; 1)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$.

357. Знайти вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = \vec{i} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{j} - \vec{k}$, якщо відомо, що його проекція на вектор $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ дорівнює 1.

4.1.4. Векторний добуток векторів

Означення 4.6. Три вектори утворюють впорядковану трійку векторів, якщо вказано, який із цих векторів є першим, який — другим, а який — третім.

Означення 4.7. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається *правою* (*лівою*), якщо після зведення до спільного початку найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$, що спостерігається з кінця вектора $\vec{c}$, відбувається проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).

Зауваження 4.3. Праву (ліву) трійку утворюють великий незігнутий вказівний та середній пальці правої (лівої) руки.

Означення 4.8. *Векторним добутком* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що позначається символом $\vec{c} = \left[\vec{a}\vec{b}\right]$ (або $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$) і задовольняє три вимоги:

1) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута φ між ними, тобто

$$|\vec{c}| = \left|\left[\vec{a}\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi;$$

2) вектор $\vec{c}$ ортогональний кожному із векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$, якщо $\vec{c} \neq \vec{0}$, напрямлений так, що трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є правою.

Геометричні властивості векторного добутку.

ТЕОРЕМА 4.6. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їх векторного добутку.

ТЕОРЕМА 4.7. Довжина (модуль) векторного добутку $[\vec a\vec b]$ дорівнює площі S паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\vec a$ та $\vec b$, тобто $\left|[\vec a\vec b]\right| = S$.

Наслідок 4.6. Якщо $\vec e$ — орт векторного добутку $[\vec a\vec b]$, а S — площа паралелограма, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\vec a$ та $\vec b$, то $[\vec a\vec b] = S\,\vec e$.

Алгебраїчні властивості векторного добутку.

1. $[\vec a\vec b] = -[\vec b\vec a]$ (*антикомутативна властивість*).
2. $[(\alpha\vec a)\vec b] = \alpha[\vec a\vec b]$ (*асоціативна властивість*).
3. $[(\vec a+\vec b)\vec c] = [\vec a\vec c]+[\vec b\vec c]$ (*дистрибутивна властивість*).
4. $[\vec a\vec a] = 0$ для будь-якого вектора $\vec a$.

Зауваження 4.4. Справедливі рівності:
$[\vec i\vec i] = [\vec j\vec j] = [\vec k\vec k] = 0;\ [\vec i\vec j] = \vec k;\ [\vec i\vec k] = -\vec j;\ [\vec j\vec k] = \vec i$.

ТЕОРЕМА 4.8. Якщо два вектори $\vec a$ і $\vec b$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами

$$\vec a = (x_1;y_1;z_1),\quad \vec b = (x_2;y_2;z_2),$$

то векторний добуток цих векторів має вигляд

$$[\vec a\vec b] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Наслідок 4.7. Два вектори $\vec a = (x_1;y_1;z_1)$ і $\vec b = (x_2;y_2;z_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Задача. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

Розв'язання. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює площі трикутника $A_1A_2A_3$. Площа трикутника $A_1A_2A_3$ дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$, тобто половині модуля векторного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$.

Оскільки $\overline{A_1A_2} = (5;3;1)$, $\overline{A_1A_3} = (2;2;3)$, то

$$\left[\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (7;-13;4).$$

Отже,

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\right]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2+(-13)^2+4^2} = 3\sqrt{26}.$$

Задачі для розв'язування

358. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec a| = 6$, $|\vec b| = 5$, знайти $\left|[\vec a\vec b]\right|$.

359. Дано $|\vec a| = 10$, $|\vec b| = 2$, $\vec a\vec b = 16$. Знайти $\left|[\vec a\vec b]\right|$.

360. Довести, що $[(\vec a+\vec b)(\vec a-\vec b)] = 2[\vec b\vec a]$ і дати геометричне тлумачення формули.

361. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec a| = 3$, $|\vec b| = 4$, знайти:

1) $\left|[(\vec a+\vec b)(\vec a-\vec b)]\right|$; 2) $\left|[(3\vec a-\vec b)(\vec a-2\vec b)]\right|$.

362. Вектори $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ задовольняють умову: $\vec a+\vec b+\vec c = 0$. Довести, що $[\vec a\vec b] = [\vec b\vec c] = [\vec c\vec a]$.

363. Вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ і $\vec d$ пов'язані співвідношеннями $[\vec a\vec b] = [\vec c\vec d]$, $[\vec a\vec c] = [\vec b\vec d]$. Довести колінеарність векторів $\vec a+\vec d$ та $\vec b+\vec c$.

364. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec a$ і $\vec b$, щоб вектори $\vec a+\vec b$ та $\vec a-\vec b$ були колінеарними?

365. Дано вектори $\vec a = (3;-1;-2)$ і $\vec b = (1;2;-1)$. Знайти:

1) $[\vec a\vec b]$; 2) $[(2\vec a+\vec b)\vec b]$.

366. Дано точки $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$. Знайти координати векторних добутків:

1) $\left[\overrightarrow{AB}\overrightarrow{BC}\right]$; 2) $\left[\left(\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CB}\right]$.

367. Дано вектори $\vec{a}=(1;0;-2)$, $\vec{b}=(2;1;0)$, $\vec{c}=(-1;1;1)$. Знайти $\left[\left[\vec{a}\vec{b}\right]\vec{c}\right]$, $\left[\vec{a}\left[\vec{b}\vec{c}\right]\right]$.

368. Дано трикутник з вершинами $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$. Знайти його площу.

369. Знайти площу трикутника, вершинами якого є $A(1;0;6)$, $B(4;5;-2)$, $C(7;3;4)$.

370. Дано вершини трикутника $A(5;-6;2)$, $B(1;3;-1)$, $C(1;-1;2)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини A на сторону BC.

371. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$.

372. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{a}+\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right)=\frac{\pi}{6}$.

373. Сила $\vec{F}=(3;2;-4)$ прикладена до точки $A(2;-1;1)$. Визначити момент цієї сили відносно початку координат.

374. Сила $\vec{P}=(2;-4;5)$ прикладена до точки $M(4;-2;3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $A(3;2;1)$.

375. Сила $\vec{P}=(2;2;2)$ прикладена до $M(4;2;-3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $C(2;4;0)$.

376. Дано три сили $\vec{M}=(2;-1;-3)$, $\vec{N}=(3;2;-1)$ і $\vec{P}=$ $=(-4;1;3)$, прикладені до точки $C(-1;4;2)$. Визначити величину та напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $A(2;3;-1)$.

377. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(4;-2;$ $-3)$ і $\vec{b}=(0;1;3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}|=26$, знайти його координати.

378. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$ і $\vec{b}=(1;-2;3)$ та задовольняє умову $\vec{x}\left(\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}\right)=10$.

4.1.5. Мішаний добуток векторів

Нехай дано три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Означення 4.9. Якщо вектор $\vec{a}$ векторно помножити на вектор $\vec{b}$, а потім здобутий вектор $[\overrightarrow{ab}]$ скалярно помножити на вектор $\vec{c}$, то матимемо число $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$, яке називається ***мішаним добутком векторів*** $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

ТЕОРЕМА 4.9. Мішаний добуток $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, взятому із знаком плюс, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — права, і зі знаком мінус, якщо трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — ліва. Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарні, то $[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}$ дорівнює нулю.

Наслідок 4.8. Справедлива рівність

$$[\vec{a}\,\vec{b}]\vec{c}=\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}].$$

Тому мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ звичайно позначають $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, не вказуючи, які два з цих векторів перемножуються векторно.

Наслідок 4.9. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Наслідок 4.10. Мішаний добуток трьох векторів, два з яких колінеарні, дорівнює нулю.

ТЕОРЕМА 4.10. Якщо три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами:

$$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1);\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2);\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3),$$

то мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ дорівнює визначнику, елементи рядків якого відповідно дорівнюють координатам векторів, що перемножаються, тобто

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Наслідок 4.11. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ є рівність нулю визначника, рядками якого є координати цих векторів, тобто рівність

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$$

Задача. В умовах задачі 2 п. 4.1.2 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. Об'єм піраміди дорівнює $1/6$ модуля мішаного добутку векторів $\overline{A_1A_2} = (5;3;1)$, $\overline{A_1A_3} = (2;2;3)$, $\overline{A_1A_4} = (1;4;-2)$.

Знайдемо їх мішаний добуток $\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4}$.

Маємо

$$\overline{A_1A_2}\,\overline{A_1A_3}\,\overline{A_1A_4} = \begin{vmatrix}5 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{vmatrix} = -53.$$

Отже,

$$V = \frac{1}{6}|-53| = \frac{53}{6} = 8\frac{5}{6}.$$

Задачі для розв'язування

379. Чи будуть компланарними вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, якщо:

1) $\vec a = (2;5;7)$, $\vec b = (1;1;-1)$, $\vec c = (1;2;2)$;

2) $\vec a = (2;3;-1)$, $\vec b = (1;-1;3)$, $\vec c = (1;9;-1)$;

3) $\vec a = (2;-1;2)$, $\vec b = (1;2;-3)$, $\vec c = (3;-4;7)$.

380. Довести, що чотири точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$ і $D(2;1;3)$ лежать в одній площині.

381. Вектор $\vec c$ перпендикулярний до векторів $\vec a$ і $\vec b$, кут між $\vec a$ і $\vec b$ дорівнює 30°. Знаючи, що $|\vec a| = 6$, $|\vec b| = 3$, $|\vec c| = 3$, знайти $|\vec a\ \vec b\ \vec c|$.

382. Дано три вектори $\vec a = (1;-1;3)$, $\vec b = (-2;2;1)$, $\vec c = (3;-2;5)$. Знайти $\vec a\ \vec b\ \vec c$.

383. Знайти об'єм тетраедра, вершини якого містяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

384. Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

385. Довести, що вектори $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, які задовольняють умову $[\vec a\vec b] + [\vec b\vec c] + [\vec c\vec a] = 0$, компланарні.

386. Об'єм тетраедра $V = 5$, три його вершини містяться в точках $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

4.1.6. Подвійний векторний добуток трьох векторів

Означення 4.10. Подвійним векторним добутком трьох векторів $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ називається вектор $\vec d$, що дорівнює векторному добутку вектора $[\vec a\ \vec b]$ на вектор $\vec c$.

За означенням $\vec d = [[\vec a\vec b]\vec c]$.

Вектор $\vec d$ перпендикулярний до вектора $[\vec a\ \vec b]$ і вектора $\vec c$. Із перпендикулярності вектора $\vec d$ до векторного добутку $[\vec a\ \vec b]$ випливає, що $\vec d$ лежить у площині векторів $\vec a$ і $\vec b$, оскільки вектори $\vec a$ і $\vec b$ також перпендикулярні до векторного добутку $[\vec a\ \vec b]$.

ТЕОРЕМА 4.11. Подвійний векторний добуток трьох векторів дорівнює різниці добутків середнього вектора на скалярний добуток крайніх мінус добуток того крайнього вектора, який міститься у внутрішніх дужках, на скалярний добуток інших векторів, тобто

$$[[\vec a\vec b]\vec c] = \vec b\langle\vec a\vec c\rangle - \vec a\langle\vec c\vec b\rangle.$$

Зауваження 4.5. У загальному випадку

$$[[\vec a\vec b]\vec c] = -[\vec c[\vec a\vec b]], \text{ але } [[\vec a\vec b]\vec c] \neq [\vec a[\vec b\vec c]].$$

Задача. Довести тотожність

$$[\vec a[\vec b\vec c]] = \vec b\langle\vec a\vec c\rangle - \vec c\langle\vec a\vec b\rangle,$$

не використовуючи твердження теореми 4.11.

Розв'язання. Введемо декартову прямокутну систему координат таким чином. Вісь Ox напрямлемо вздовж вектора $\vec a$, а вісь Oy помістимо в площині $\vec a$ і $\vec b$ (вважаючи, що вектори $\vec a$ і $\vec b$ зведені до спільного початку). В такому випадку матимемо:

$$\vec a = (x_1;0;0),\ \vec b = (x_2;y_2;0),\ \vec c = (x_3;y_3;z_3).$$

Знайдемо $\vec d$. Маємо

$$[\vec b\vec c] = \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ x_2 & y_2 & 0\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix} = y_2z_3\vec i - x_2z_3\vec j + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec k.$$

Отже,

$$\vec d = \left[\vec a\left[\vec b\vec c\right]\right] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x_1 & 0 & 0 \\ y_2z_3 & -x_2z_3 & x_2y_3 - x_3y_2 \end{vmatrix} = -(x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2)\vec j -$$

$$-x_1x_2z_3\vec k = \left(0;\ -(x_1x_2y_3 - x_1x_3y_2);\ -x_1x_2z_3\right) =$$
$$= \left(0;\ (x_1x_3y_2 - x_1x_2y_3);\ -x_1x_2z_3\right).$$

Знайдемо $\vec b\langle\vec a,\vec c\rangle - \vec c\langle\vec a,\vec b\rangle$. Маємо

$$\langle\vec a,\vec c\rangle = x_1x_3;\ \vec b\langle\vec a\vec c\rangle = (x_1x_2x_3;\, x_1x_3y_2;\, 0),$$
$$\langle\vec a,\vec b\rangle = x_1x_2;\ \vec c\langle\vec a,\vec b\rangle = (x_1x_2x_3;\, x_1x_2y_3;\, x_1x_2z_3).$$

Звідси

$$\vec b\langle\vec a,\vec c\rangle - \vec c\langle\vec a,\vec b\rangle = \left(0;\ (x_1x_3y_2 - x_1x_2y_3);\ -x_1x_2z_3\right),$$

що збігається з виразом для $\vec d$.

Задачі для розв'язування

387. Дано вектори $\vec a = (2; -3; 1)$, $\vec b = (-3; 1; 2)$, і $\vec c = (1; 2; 3)$. Знайти $\left[\left[\vec a\vec b\right]\vec c\right]$ і $\left[\vec a\left[\vec b\vec c\right]\right]$.

388. Дано вектори $\vec a = (3; 0; 1)$, $\vec b = (2; 4; 3)$, $\vec c = (-1; 3; 2)$, $\vec d = (2; 0; 1)$. Знайти $\left[\left[\vec a\vec b\right]\vec c\right]$, $\left\langle\left[\vec a\vec b\right],\left[\vec b\vec d\right]\right\rangle$.

389. Довести тотожності:

1) $\left[\vec a\left[\vec b\vec c\right]\right] + \left[\vec b\left[\vec c\vec a\right]\right] + \left[\vec c\left[\vec a\vec b\right]\right] = 0$;

2) $\left\langle\left[\vec a\vec b\right],\left[\vec c\vec d\right]\right\rangle = \langle\vec a,\vec c\rangle\langle\vec b,\vec d\rangle - \langle\vec a,\vec d\rangle\langle\vec b,\vec c\rangle$;

3) $\left[\left[\vec a\vec b\right]\left[\vec c\vec d\right]\right] = \vec c\left(\vec a\vec b\vec d\right) - \vec d\left(\vec a\vec b\vec c\right)$;

4) $\left[\vec a\vec b\right]\left[\vec b\vec c\right]\left[\vec c\vec a\right] = \left(\vec a\vec b\vec c\right)^2$.

4.2. ОЗНАЧЕННЯ ДІЙСНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Дійсний лінійний простір L називається *дійсним евклідовим простором E* (або просто евклідовим простором), якщо справджуються такі умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам (векторам) цього простору $\vec x$ і $\vec y$ ставиться у відповідність дійсне число, що називається *скалярним добутком* цих елементів і позначається символом $\langle\vec x,\vec y\rangle$.

II. Вказане правило підпорядковане таким чотирьом аксіомам:

1) $\langle\vec x,\vec y\rangle = \langle\vec y,\vec x\rangle$.

2) $\langle\vec x_1 + \vec x_2,\vec y\rangle = \langle\vec x_1,\vec y\rangle + \langle\vec x_2,\vec y\rangle$.

3) $\langle\lambda\,\vec x,\vec y\rangle = \lambda\langle\vec x,\vec y\rangle$.

4) $\langle\vec x,\vec x\rangle > 0$, якщо $\vec x \neq 0$, $\langle\vec x,\vec x\rangle = 0$, якщо $\vec x = 0$.

Означення 4.11. *Розмірністю евклідового простору E* називається розмірність лінійного простору L, що бере участь в означенні E.

Приклад 1. У n-вимірному лінійному просторі L_n матриць-рядків довжини n скалярний добуток двох будь-яких векторів $\vec x = (x_1,\dots,x_n)$ і $\vec y = (y_1,\dots,y_n)$ може бути означеним, наприклад з допомогою рівності

$$\langle\vec x,\vec y\rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n. \tag{4.5}$$

Зауваження 4.6. n-вимірний евклідів простір, який здобувається з L_n введенням у L_n за деяким правилом скалярного добутку векторів, позначається через E_n. З прикладу 1 випливає, що E_3 є звичайним простором, а E_2 — площиною простору E_3. n-вимірний евклідів простір E^n дістається з L^n введенням у L^n скалярного добутку.

Приклад 2. Розглянемо нескінченновимірний лінійний простір $C[a,b]$ усіх функцій $x(t)$, визначених та неперервних на відрізку $[a,b]$. Скалярний добуток двох таких функцій $x(t)$ і $y(t)$ означимо як інтеграл від їх добутку:

$$\langle\vec x,\vec y\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt. \tag{4.6}$$

Простір $C[a,b]$ з так означеним скалярним добутком є нескінченновимірним евклідовим простором.

Задача. Нехай $\vec x = (\alpha_1,\alpha_2)$ і $\vec y = (\beta_1,\beta_2)$ довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що лінійний простір L_2 з означеним такою рівністю скалярним добутком $\langle\vec x,\vec y\rangle = \alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$ є евклідовим простором.

Розв'язання. Переконаємось, що так означений скалярний добуток підпорядкований чотирьом аксіомам евклідового простору:

1. $\langle\vec y,\vec x\rangle = \beta_1\alpha_1 + 3\beta_2\alpha_2 = \alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2$, тобто $\langle\vec x,\vec y\rangle = \langle\vec y,\vec x\rangle$.

2. Нехай $\vec x = (\alpha_1,\alpha_2)$, $\vec y = (\beta_1,\beta_2)$ і $\vec z = (\gamma_1,\gamma_2)$ — довільні елементи простору L_2, тоді $\vec x + \vec y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$ і

$\langle \bar{x}+\bar{y},\bar{z}\rangle = (\alpha_1+\beta_1)\gamma_1 + 3(\alpha_2+\beta_2)\gamma_2 = \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_1 + 3\alpha_2\gamma_2 +$
$+3\beta_2\gamma_2 = (\alpha_1\gamma_1 + 3\alpha_2\gamma_2) + (\beta_1\gamma_1 + 3\beta_2\gamma_2) = \langle \bar{x},\bar{z}\rangle + \langle \bar{y},\bar{z}\rangle$.

3. $\lambda\,\bar{x} = (\lambda\,\alpha_1, \lambda\,\alpha_2)$;

$\langle \lambda\,\bar{x},\bar{y}\rangle = \lambda\,\alpha_1\beta_1 + 3\lambda\,\alpha_2\beta_2 = \lambda(\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2) = \lambda\langle \bar{x},\bar{y}\rangle$.

4. $\langle \bar{x},\bar{x}\rangle = \alpha_1^2 + 3\alpha_2^2 \geq 0$ і $\langle \bar{x},\bar{x}\rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$.

Отже, лінійний простір L_2 з так означеним скалярним добутком є евклідовим простором.

Задачі для розв'язування

390. Довести, що з аксіом скалярного добутку випливають такі властивості:

а) $\langle \bar{x},\alpha\,\bar{y}\rangle = \alpha\langle \bar{x},\bar{y}\rangle$; б) $\langle \bar{x},\bar{y}_1 - \bar{y}_2\rangle = \langle \bar{x},\bar{y}_1\rangle - \langle \bar{x},\bar{y}_2\rangle$;

в) $\langle \bar{x}+\bar{y},\bar{x}+\bar{y}\rangle = \langle \bar{x},\bar{x}\rangle + 2\langle \bar{x},\bar{y}\rangle + \langle \bar{y},\bar{y}\rangle$; г) $\langle \bar{x},\bar{0}\rangle = 0$.

391. Перевірити, чи є скалярними добутками в просторі E:
а) добуток довжин векторів;
б) подвоєний звичайний скалярний добуток?

392. Нехай $\bar{x} = (\alpha_1,\alpha_2)$ і $\bar{y} = (\beta_1,\beta_2)$ — довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що лінійний простір L_2 з означеним скалярним добутком одним із цих способів:

а) $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$; б) $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = 2\alpha_1\beta_1 + 5\alpha_2\beta_2$

є евклідовим простором. Обчислити скалярний добуток векторів $\bar{x} = (1; 1)$ і $\bar{y} = (-3; 2)$ кожним із цих способів.

393. Нехай $\bar{x} = (\alpha_1,\alpha_2)$ і $\bar{y} = (\beta_1,\beta_2)$ — довільні вектори лінійного простору L_2. Довести, що скалярний добуток у L_2 можна ввести формулою $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1\beta_2 + b\alpha_2\beta_1 + c\alpha_2\beta_2$ у тому і тільки в тому випадку, якщо одночасно $a > 0$ і $ac > b^2$.

394. Довести, що в просторі P_2 многочленів степеня не вище другого скалярний добуток многочленів $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ і $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ можна означити формулою:

а) $\langle f,g\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$;

б) $\langle f,g\rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$.

395. Довести, що в просторі $C[a,b]$ скалярний добуток функцій $x(t)$ і $y(t)$ можна означити формулою $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \int_a^b x(t)y(t)dt$.

4.3. ДОВЖИНА ВЕКТОРА. НЕРІВНІСТЬ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО. ОЗНАЧЕННЯ КУТА МІЖ ВЕКТОРАМИ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ. ОРТОГОНАЛЬНІСТЬ

Означення 4.12. Довжиною вектора $\bar{x} \in E_n$ називається величина $|\bar{x}| = \sqrt{\langle \bar{x},\bar{x}\rangle}$.

Приклад 1. В E_n із скалярним добутком (4.5)

$$|\bar{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{4.7}$$

а вектори $\bar{e}_1 = (1; 0; 0; \ldots; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; 0; \ldots; 0)$, ..., $\bar{e}_n = (0; 0; \ldots; 0; 1)$, які утворюють базис у E_n, мають довжини, що дорівнюють одиниці.

Зауваження 4.7. З аксіоми 4 для скалярного добутку евклідового простору випливає, що $|\bar{x}|$ існує для будь-якого $\bar{x} \in E_n$.

ТЕОРЕМА 4.12. Для будь-яких двох векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ довільного евклідового простору справедлива рівність

$$\langle \bar{x},\bar{y}\rangle^2 \leq \langle \bar{x},\bar{x}\rangle\langle \bar{y},\bar{y}\rangle = |\bar{x}|^2|\bar{y}|^2, \tag{4.8}$$

яка називається нерівністю Коші-Буняковського.

Приклад 2. В евклідовому просторі E_n із скалярним добутком (4.5) нерівність Коші-Буняковського має вигляд

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2).$$

Приклад 3. В евклідовому просторі $C[a,b]$ усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $x(t)$ із скалярним добутком (4.6) нерівність Коші-Буняковського має вигляд

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt\int_a^b y^2(t)dt.$$

Означення 4.13. Кутом φ між двома ненульовими векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$ евклідового простору E називається той кут (що змінюється в межах від 0 до π), косинус якого означається співвідношенням

$$\cos\varphi = \frac{\langle \bar{x},\bar{y}\rangle}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{\langle \bar{x},\bar{y}\rangle}{\sqrt{\langle \bar{x},\bar{x}\rangle\langle \bar{y},\bar{y}\rangle}}.$$

Наведене означення кута коректне, оскільки в силу нерівності Коші-Буняковського (4.8) дріб, що стоїть у правій частині останньої нерівності, за модулем не перевищує одиниці.

Означення 4.14. Два довільних вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ евклідового простору E називаються ***ортогональними***, якщо скалярний добуток цих векторів $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ дорівнює нулю.

Приклад 4. В евклідовому просторі E_n (E^n) із скалярним добутком (4.5) косинус кута між двома ненульовими векторами $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ виражається формулою

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}, \qquad (4.9)$$

а умова ортогональності векторів $\bar{x}$ і $\bar{y}$ запишеться у вигляді

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = 0.$$

Вектори $\bar{e}_1 = (1; 0; 0; \ldots; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; 0; \ldots; 0)$, ..., $\bar{e}_n = (0; 0; \ldots; 0; 1)$ попарно ортогональні.

Приклад 5. В евклідовому просторі $C[a,b]$ усіх неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $x = x(t)$ із скалярним добутком (4.6) косинус кута між двома ненульовими векторами $x = x(t)$ і $y = y(t)$ виражається формулою

$$\cos\varphi = \frac{\int_a^b x(t)y(t)dt}{\sqrt{\int_a^b x^2(t)dt} \cdot \sqrt{\int_a^b y^2(t)dt}},$$

а умова ортогональності векторів $x = x(t)$ і $y = y(t)$ простору $C[a,b]$ запишеться у вигляді

$$\int_a^b x(t)y(t)dt = 0.$$

Задача. У трикутнику, натягнутому на вектори $\bar{x} = (-3; 15; 1; -5)$ і $\bar{y} = (1; -5; -2; 10)$ простору E_4 із скалярним добутком (4.5), визначити кути між сторонами трикутника — векторами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$.

Розв'язання. Маємо $\bar{x} - \bar{y} = (-4; 20; 3; -15)$.

За формулою (4.9) дістаємо

$$\cos\left(\widehat{\bar{x}, \bar{y}}\right) = \frac{\langle \bar{x} \cdot \bar{y} \rangle}{|\bar{x}||\bar{y}|} = \frac{-3 - 75 - 2 - 50}{\sqrt{9 + 225 + 1 + 25} \cdot \sqrt{1 + 25 + 4 + 100}} =$$

$$= -\frac{130}{\sqrt{260}\sqrt{130}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{x}, \bar{x} - \bar{y}}\right) = \frac{\langle \bar{x}, \bar{x} - \bar{y} \rangle}{|\bar{x}||\bar{x} - \bar{y}|} = \frac{12 + 300 + 3 + 75}{\sqrt{260}\sqrt{16 + 400 + 9 + 225}} =$$

$$= \frac{390}{\sqrt{260}\sqrt{650}} = \frac{3}{\sqrt{10}};$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{y}, \bar{x} - \bar{y}}\right) = \frac{\langle \bar{y}, \bar{x} - \bar{y} \rangle}{|\bar{y}||\bar{x} - \bar{y}|} = \frac{-4 - 100 - 6 - 150}{\sqrt{130}\sqrt{650}} =$$

$$= -\frac{260}{\sqrt{130}\sqrt{650}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Задачі для розв'язування

У задачах 396 і 397 визначити кут між векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$ простору E_4 зі скалярним добутком (4.5).

396. $\bar{x} = (2; 1; 3; 2)$, $\bar{y} = (1; 2; -2; 1)$. **397.** $\bar{x} = (1; 2; 2; 3)$, $\bar{y} = (3; 1; 5; 1)$.

398. Знайти довжини сторін трикутника, натягнутого на вектори $\bar{x} = (2; -1; 3; -2)$ і $\bar{y} = (3; 1; 5; 1)$, простору E_4 із скалярним добутком (4.5). Визначити кути між сторонами трикутника — векторами $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$. Які з цих кутів слід вважати внутрішніми кутами трикутника, а які — зовнішніми?

399. Як зміниться кут між ненульовими векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$, якщо помножити:

а) вектор $\bar{x}$ на додатне число;

б) вектор $\bar{x}$ на від'ємне число;

в) обидва вектори $\bar{x}$ і $\bar{y}$ на від'ємне число?

400. Довести, якщо вектори $\bar{x}, \bar{y}, \ldots, \bar{z}$ — попарно ортогональні, то для будь-яких чисел λ, μ, ..., ν вектори $\lambda\bar{x}$, $\mu\bar{y}$, ..., $\nu\bar{z}$ також будуть попарно ортогональні.

401. Довести, якщо вектор $\bar{x}$ ортогональний до кожного із векторів $\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_l$, то він ортогональний і до будь-якої лінійної комбінації цих векторів.

402. Довести, що квадрат діагоналі прямокутного n-вимірного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер, що виходять з однієї вершини.

4.4. ОРТОНОРМОВАНИЙ БАЗИС. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ БАЗИСУ. ОРТОГОНАЛЬНА МАТРИЦЯ

Означення 4.15. Вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють ортонормований базис цього простору, якщо ці вектори попарно ортогональні і модуль кожного із них дорівнює одиниці, тобто, якщо

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{4.10}$$

Приклад. В евклідовому просторі E_n із скалярним добутком (4.5) вектори

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= (1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0), \\ \bar{e}_2 &= (0,\ 1,\ 0,\ ...,\ 0), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \bar{e}_n &= (0,\ 0,\ 0,\ ...,\ 1) \end{aligned}$$

утворюють ортонормований базис цього простору.

ТЕОРЕМА 4.13. В усякому n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.

Алгоритм побудови за даною системою n лінійно незалежних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ системи попарно ортогональних векторів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$, довжина кожного з яких дорівнює одиниці, має вигляд:

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|};$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{b}_2}{|\bar{b}_2|}, \text{ де } \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \langle \bar{a}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1;$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{b}_3}{|\bar{b}_3|}, \text{ де } \bar{b}_3 = \bar{a}_3 - \langle \bar{a}_3, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 - \langle \bar{a}_3, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{e}_n = \frac{\bar{b}_n}{|\bar{b}_n|}, \text{ де } \bar{b}_n = \bar{a}_n - \langle \bar{a}_n, \bar{e}_{n-1} \rangle \bar{e}_{n-1} - ... - \langle \bar{a}_n, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1.$$

Наведений алгоритм називається *процесом ортогоналізації* лінійно незалежних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$.

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ і $\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n'$ — два ортонормованих базиси в E_n (або E^n) і нехай

$$\bar{e}_1' = p_{11}\bar{e}_1 + p_{21}\bar{e}_2 + ... + p_{n1}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2...\bar{e}_n)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ ... \\ p_{n1} \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_2' = p_{12}\bar{e}_1 + p_{22}\bar{e}_2 + ... + p_{n2}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2...\bar{e}_n)\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ ... \\ p_{n2} \end{pmatrix};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\bar{e}_n' = p_{1n}\bar{e}_1 + p_{2n}\bar{e}_2 + ... + p_{nn}\bar{e}_n = (\bar{e}_1\bar{e}_2...\bar{e}_n)\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ ... \\ p_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто перехід від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ до базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2', ..., \bar{e}_n'$ задається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 4.16. Перехід від одного ортонормованого базису до іншого називається *ортогональним перетворенням* базису.

Означення 4.17. Квадратна матриця $\mathcal{A}$ називається *ортогональною*, якщо вона невироджена і $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$.

ТЕОРЕМА 4.14. Квадратна матриця P порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли вона є матрицею ортогонального перетворення базису в E_n (або E^n).

ТЕОРЕМА 4.15. Для елементів ортогональної матриці справедливі співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{i\,j} p_{k\,j} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_{i\,j} p_{i\,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Задача 1. Нехай $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ортонормована система векторів тривимірного евклідового простору зі скалярним добутком (4.5). Показати, що система векторів

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3),$$

$$\vec{a}_2 = \frac{1}{3}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3),$$

$$\vec{a}_3 = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3)$$

буде також ортонормованою.

Розв'язання. Для розв'язування задачі необхідно довести, що норма кожного з векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ дорівнює одиниці і скалярний добуток кожних двох векторів дорівнює нулю.

З умови ортонормованості даної системи векторів маємо:

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1;$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0;$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1.$$

Використавши ці рівності при обчисленні скалярних добутків $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle, \langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \rangle, \langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle$, дістанемо:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle = \frac{1}{9}\big(4\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle - 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + 4\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + 4\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle - 2\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle +$$

$$+ 4\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle - 2\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle + \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle - 2\langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle\big) = \frac{1}{9}(4 - 2 - 2) = 0;$$

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_3 \rangle = \frac{1}{9}(2 - 4 + 2) = 0;$$

$$\langle \vec{a}_2, \vec{a}_3 \rangle = \frac{1}{9}(2 + 2 - 4) = 0.$$

Знаходимо довжину кожного з векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

$$|\vec{a}_1| = \frac{1}{3}\sqrt{4 + 4 + 1} = 1; \quad |\vec{a}_2| = 1; \quad |\vec{a}_3| = 1.$$

Отже, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ підпорядковані умовам (4.10) і утворюють ортонормований базис.

Задача 2. У просторі E_3 із скалярним добутком (4.5) дано два лінійно незалежних вектори $\vec{a}_1 = (1; 2; 0)$ і $\vec{a}_2 = (0; -3; 1)$. Побудувати ортонормований базис у лінійній оболонці цих векторів.

Розв'язання. Застосовуючи процес ортогоналізації, дістаємо:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \frac{(1; 2; 0)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right);$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \qquad \text{де} \qquad \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2 \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1.$$

Знайдемо $\vec{b}_2$. Маємо

$$\langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle = (0; -3; 1)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right) = -\frac{6}{\sqrt{5}};$$

$$\langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = -\frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right);$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \langle \vec{a}_2, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 = (0; -3; 1) + \frac{6}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}; 0\right) = \left(\frac{6}{5}; -\frac{3}{5}; 1\right).$$

Звідси

$$\vec{e}_2 = \frac{\frac{1}{5}(6; -3; 5)}{\frac{1}{5}\sqrt{36 + 9 + 25}} = \frac{1}{\sqrt{70}}(6; -3; 5) = \left(\frac{6}{\sqrt{70}}; -\frac{3}{\sqrt{70}}; \frac{5}{\sqrt{70}}\right).$$

Задачі для розв'язування

403. Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — ортонормований базис тривимірного евклідового простору. Показати, що система векторів $\vec{e}_1' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3$; $\vec{e}_2' = \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{2}{3}\vec{e}_3$; $\vec{e}_3' = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3$ також буде ортонормованою.

404. Вектори 1, t, t^2 утворюють базис у просторі P_2 многочленів від t степеня, не вище другого, простору $C[-1; 1]$.

Показати, що система векторів 1, t, $t^2-\frac{1}{3}$ утворює ортогональний базис цього простору.

405. Многочлени 1, t, t^2 утворюють базис у просторі P_2 многочленів від t степеня, не вище другого, простору $C[0;1]$. Показати, що многочлени 1, $\sqrt{3}(2t-1)$, $5(6t^2-6t+1)$ утворюють ортогональний базис цього простору.

У задачах 406 і 407 дано лінійно незалежну систему векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$. Побудувати ортонормований базис в лінійній оболонці цих векторів, використовуючи процес ортогоналізації.

406. $\bar{a}_1=(0;-1;2)$, $\bar{a}_2=(-1;3;4)$, $\bar{a}_3=(2;1;3)$.

407. $\bar{a}_1=(1;0;1)$, $\bar{a}_2=(2;1;2)$, $\bar{a}_3=(0;1;1)$.

У задачах 408 і 409 дано лінійно незалежну систему векторів $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$. Знайти ортонормований базис у лінійній оболонці цих векторів.

408. $\bar{a}_1=(-1;0;2)$, $\bar{a}_2=(4;-1;3)$.

409. $\bar{a}_1=(-1;1;1)$, $\bar{a}_2=(2;-1;0)$.

410. Знайти ортогональний базис підпростору, натягнутого на систему векторів $\bar{a}_1=(1;2;2;-1)$, $\bar{a}_2=(1;1;-5;3)$, $\bar{a}_3=(3;2;8;-7)$.

411. Знайти ортогональний базис підпростору, натягнутого на вектори $\bar{a}_1=(1;0;2;1)$, $\bar{a}_2=(2;1;2;3)$, $\bar{a}_3=(0;1;-2;1)$.

4.5. ВЗАЄМНІ БАЗИСИ В E_n. КОНТРАВАРІАНТНІ ТА КОВАРІАНТНІ КООРДИНАТИ ВЕКТОРА І ЗВ'ЯЗОК МІЖ НИМИ. ЗМІНА КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ПЕРЕХОДІ ДО НОВОГО БАЗИСУ

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ — довільний базис у E_n (не обов'язково ортонормований).

Твердження 4.1. Сукупність векторів $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$, означених рівностями

$$\left\langle \bar{e}_i \bar{e}^j \right\rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i\neq j, \end{cases} \quad (i,j=\overline{1,n}) \qquad (4.11)$$

утворюють у E_n базис.

Означення 4.18. Базис $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$ називається *взаємним* до базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Твердження 4.2. Для вибраного в E_n базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ взаємний базис $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$ визначається однозначно.

Твердження 4.3. Взаємним до взаємного базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$ є початковий базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Означення 4.19. Базиси $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ і $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$ називаються *взаємними*.

Зауваження 4.8. Для ортонормованого базису $\bar{e}_i=\bar{e}^i$, $i=\overline{1,n}$. В цьому випадку взаємні базиси збігаються.

Зауваження 4.9. Взаємні базиси в E_2 визначаються за допомогою рівностей (4.11) при $i, j=1, 2$. На рис. 4.1 наведений приклад взаємних базисів у E_2.

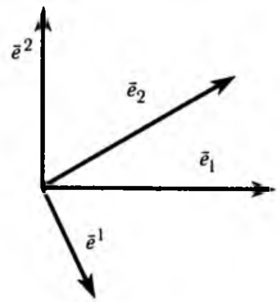

Рис. 4.1

Нехай $\bar{x}$ — довільний вектор E_n. Тоді $\bar{x}=x^1\bar{e}_1+x^2\bar{e}_2+\dots+x^n\bar{e}_n=$ $=x_1\bar{e}^1+x_2\bar{e}^2+\dots+x_n\bar{e}^n$.

Означення 4.20. Координати $x^1, x^2, \dots, x^n$ вектора $\bar{x}$ в початковому базисі називаються *контраваріантними координатами* $\bar{x}$, а координати $x_1, x_2, \dots, x_n$ того самого вектора у взаємному базисі $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \dots, \bar{e}^n$ називаються *коваріантними координатами* $\bar{x}$.

У випадку, коли $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ ортонормований базис $x_i=x^i$ $(i=\overline{1,n})$.

Означення 4.21. Матриця $\mathcal{G}=\|g_{ij}\|$, $i, j=\overline{1,n}$, де $g_{ij}=\left\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \right\rangle$, називається *метричною матрицею* в E_n, а її елементи g_{ij} — *метричними коефіцієнтами* базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ в E_n.

Твердження 4.4. Матриця $\mathcal{G}^*=\|g^{ij}\|$, $i, j=\overline{1,n}$, де $g^{ij}=\left\langle \bar{e}^i, \bar{e}^j \right\rangle$ є оберненою до матриці $\mathcal{G}$, тобто $\mathcal{G}^*=\mathcal{G}^{-1}$.

Зауваження 4.10. У випадку, коли $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ — ортонормований базис, матриця $\mathcal{G}$ є одиничною.

Твердження 4.5. Коваріантні і контраваріантні координати вектора $\bar{x}$ пов'язані рівностями:

$$(x_1 x_2 ... x_n) = \left(x^1 x^2 ... x^n\right)\mathcal{G}, \quad \left(x^1 x^2 ... x^n\right) = (x_1 x_2 ... x_n)\mathcal{G}^{-1}.$$

Нехай в E_n поряд з даним базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ узято новий базис $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n$, причому формула переходу від $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ до $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n$ має вигляд

$$\left(\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n\right) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n)\mathcal{C}, \tag{4.12}$$

де

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ . & . & . & . \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix}.$$

Зауваження 4.11. Запис елемента c_{ij} матриці $\mathcal{C}$ (див. п.2.2.3) у вигляді c_j^i більш зручний при скороченому запису підсумовування, який буде введений у п.9.2.

Твердження 4.6. Якщо $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n$ — базис, взаємний до $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n$, то

$$\left(\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n\right) = \left(\bar{e}^1, \bar{e}^2, ..., \bar{e}^n\right)\mathcal{D}, \tag{4.13}$$

де

$$\mathcal{D} = \left(\mathcal{C}^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & \dots & d_1^n \\ d_2^1 & d_2^2 & \dots & d_2^n \\ . & . & . & . \\ d_n^1 & d_n^2 & \dots & d_n^n \end{pmatrix}.$$

Твердження 4.7. Якщо $\dot{x}^1, \dot{x}^2, ..., \dot{x}^n$ — контраваріантні, а $\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_n$ — коваріантні координати вектора $\bar{x}$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, ..., \dot{\bar{e}}_n$, то

$$(\dot{x}_1 \dot{x}_2 ... \dot{x}_n) = (x_1 x_2 ... x_n)\mathcal{C}, \tag{4.14}$$

$$\left(\dot{x}^1 \dot{x}^2 ... \dot{x}^n\right) = \left(x^1 x^2 ... x^n\right)\mathcal{D}. \tag{4.15}$$

Зауваження 4.12. У випадку, коли $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ — ортонормований базис, а $\mathcal{C}$ — ортогональне перетворення, то $\mathcal{C} = \mathcal{D}$.

Зауваження 4.13. Із формул (4.12) і (4.14) випливає, що матриці перетворення початкового базису і коваріантних координат вектора $\bar{x}$ збігаються.

Із формули (4.15) випливає, що перетворення контраваріантних координат вектора $\bar{x}$ здійснюється з допомогою оберненої матриці $\mathcal{C}^{-1}$. Дійсно,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \\ . \\ . \\ \dot{x}^n \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ . \\ . \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Цим пояснюється назва координат, що використовує латинські слова *co* — спільно, *contra* — напроти, *vario* — змінюють. Зауважимо, що коваріантні і контраваріантні координати вектора будуть розглядатися в цьому та 9-му розділах.

Задача 1. Показати, що для $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3 \in E_3$ $x^1 = \left\langle \bar{x}, \bar{e}^1 \right\rangle$, $x^2 = \left\langle \bar{x}, \bar{e}^2 \right\rangle$, $x^3 = \left\langle \bar{x}, \bar{e}^3 \right\rangle$.

Розв'язання. Помноживши обидві частини рівності $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + x^2\bar{e}_2 + x^3\bar{e}_3$ скалярно на $\bar{e}^1$, дістанемо

$$\left\langle \bar{x}, \bar{e}^1 \right\rangle = x^1\left\langle \bar{e}_1, \bar{e}^1 \right\rangle + x^2\left\langle \bar{e}_2, \bar{e}^1 \right\rangle + x^3\left\langle \bar{e}_3, \bar{e}^1 \right\rangle.$$

Звідси, враховуючи рівності $\left\langle \bar{e}_1, \bar{e}^1 \right\rangle = 1, \left\langle \bar{e}_2, \bar{e}^1 \right\rangle = 0, \left\langle \bar{e}_3, \bar{e}^1 \right\rangle = 0$, що випливають з (4.11), дійдемо до першої рівності в умові задачі.

Аналогічно

$$\left\langle \bar{x}, \bar{e}^2 \right\rangle = x^1 \left\langle \bar{e}_1, \bar{e}^2 \right\rangle + x^2 \left\langle \bar{e}_2, \bar{e}^2 \right\rangle + x^3 \left\langle \bar{e}_3, \bar{e}^2 \right\rangle = x^2;$$

$$\left\langle \bar{x}, \bar{e}^3 \right\rangle = x^1 \left\langle \bar{e}_1, \bar{e}^3 \right\rangle + x^2 \left\langle \bar{e}_2, \bar{e}^3 \right\rangle + x^3 \left\langle \bar{e}_3, \bar{e}^3 \right\rangle = x^3.$$

Задача 2. Відносно базису з метричними коефіцієнтами $g_{11} = 4$, $g_{22} = 3$, $g_{12} = -3$ дано вектор $\bar{x} = (1; 2)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі.

Розв'язання. Використовуючи твердження 4.5, маємо

$$(x_1 x_2) = \left(x^1 x^2\right)\mathcal{G} = (1 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = (-2 \quad 3),$$

$$x_1 = -2, \; x_2 = 3.$$

Задачі для розв'язування

412. Показати, що $x_1 = \langle \bar{x}, \bar{e}_1 \rangle, x_2 = \langle \bar{x}, \bar{e}_2 \rangle, x_3 = \langle \bar{x}, \bar{e}_3 \rangle$.

413. Відносно базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ з метричними коефіцієнтами $g_{11} = 4$, $g_{12} = 3$, $g_{22} = 9$ дано вектор $\bar{x} = (2; 1)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі.

414. Відносно базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ дано вектор $\bar{x} = (-5; 2)$. Знайти координати x_1, x_2 цього вектора у взаємному базисі, знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = 3, |\bar{e}_2| = 4$ і кут між ними $\varphi = 2\pi / 3$.

415. Знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$ і кути між ними $\left(\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_2}\right) = \left(\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_3}\right) = \left(\widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_3}\right) = \pi / 3$, знайти метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

416. Знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, знайти координати векторів цього базису у взаємному з ним базисі $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$.

417. Відносно базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ з метричними коефіцієнтами $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1/2$ дано вектор $\bar{x} = (1; 0; 2)$. Знайти координати x_1, x_2, x_3 цього вектора у взаємному базисі.

418. Знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ і кут $\varphi = \pi / 4$ між ними, знайти координати векторів $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$ базису, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

419. Знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 2$, $g_{22} = 4$, $g_{12} = -2$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{11}, g^{12}, g^{22} базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2$, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2$;

2) координати векторів $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$.

420. Знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 4$, $g_{22} = 4$, $g_{33} = 4$, $g_{12} = 2$, $g_{13} = 2$, $g_{23} = 2$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

2) координати векторів базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

421. Довжини векторів базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дорівнюють 1, а кути між ними дорівнюють $\pi / 4$. Знайти:

1) метричні коефіцієнти g^{ij} базису $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$;

2) координати векторів $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ базису, взаємного з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

4.6. ВИРАЖЕННЯ СКАЛЯРНОГО ДОБУТКУ ЧЕРЕЗ КООРДИНАТИ ВЕКТОРІВ-СПІВМНОЖНИКІВ У ДОВІЛЬНОМУ БАЗИСІ E_n

Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ — базис в E_n, $\bar{x}$, $\bar{y}$ — довільні вектори в E_n.

Твердження 4.8.

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x^i y^j = \left(x^1 \; \ldots \; x^n\right)\mathcal{G}\begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=\sum_{i=1}^{n}x^i y_i=\begin{pmatrix}x^1 & \ldots & x^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix},$$

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}x_i y_j=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\mathcal{G}^{-1}\begin{pmatrix}y_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_n\end{pmatrix},$$

де

$$\bar{x}=x^1\bar{e}_1+x^2\bar{e}_2+\ldots+x^n\bar{e}_n=x_1\bar{e}^1+x_2\bar{e}^2+\ldots+x_n\bar{e}^n,$$
$$\bar{y}=y^1\bar{e}_1+y^2\bar{e}_2+\ldots+y^n\bar{e}_n=y_1\bar{e}^1+y_2\bar{e}^2+\ldots+y_n\bar{e}^n.$$

Наслідок 4.12.

$$|\bar{x}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x^i x^j=\begin{pmatrix}x^1 & \ldots & x^n\end{pmatrix}\mathcal{G}\begin{pmatrix}x^1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x^n\end{pmatrix},$$

$$|\bar{x}|^2=\sum_{i=1}^{n}x_i x^i=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x^n\end{pmatrix},$$

$$|\bar{x}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}x_i x_j=\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n\end{pmatrix}\mathcal{G}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Наслідок 4.13. Кут φ між векторами $\bar{x}$ і $\bar{y}$ визначається за допомогою формул

$$\cos\varphi=\frac{\langle\bar{x},\bar{y}\rangle}{|\bar{x}||\bar{y}|}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}x^i x^j}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}y^i y^j}},$$

$$\cos\varphi=\frac{x^1y_1+x^2y_2+\ldots+x^ny_n}{\sqrt{x^1x_1+x^2x_2+\ldots+x^nx_n}\cdot\sqrt{y^1y_1+y^2y_2+\ldots+y^ny_n}},$$

$$\cos\varphi=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g^{ij}x_iy_j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g^{ij}x_ix_j}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n}g^{ij}y_iy_j}}.$$

У випадку ортонормованого базису формули для $\langle\bar{x},\bar{y}\rangle$, $|\bar{x}|$, $\cos\varphi$ мають вигляд (4.5), (4.7), (4.9) відповідно.

Задача 1. Знайти в E_2 метричну матрицю і скалярний добуток векторів $\bar{x}=2\bar{e}_1-3\bar{e}_2$ і $\bar{y}=\bar{e}_1+5\bar{e}_2$, знаючи, що $|\bar{e}_1|=1$ і $|\bar{e}_2|=2$ і кут між векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ дорівнює $\pi/3$.

Розв'язання. Оскільки $g_{ii}=\langle\bar{e}_i,\bar{e}_i\rangle=|\bar{e}_i|^2$, а $g_{ij}=\langle\bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle=|\bar{e}_i||\bar{e}_j|\cos\varphi_{ij}$, де φ_{ij} — кут між векторами $\bar{e}_i$ і $\bar{e}_j$, $i,\ j=1,\ 2$, то

$$g_{11}=\langle\bar{e}_1,\bar{e}_1\rangle=|\bar{e}_1|^2=1,\ g_{12}=\langle\bar{e}_1,\bar{e}_2\rangle=1\cdot2\cos\pi/3=1,$$
$$g_{22}=|\bar{e}_2|^2=4.$$

Маємо

$$\mathcal{G}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix},\ \mathcal{X}=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix},\ \mathcal{Y}=\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\langle\bar{x},\bar{y}\rangle=\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 5\end{pmatrix}=-51.$$

Задача 2. Базисні вектори $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ довільної системи координат задовольняють умови

$$|\bar{e}_1|=1,\ |\bar{e}_2|=2,\ |\bar{e}_3|=1,\ \widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2}=\pi/3,\ \widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3}=\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3}=\pi/2.$$

Знаючи координати вершин $A_1(1;1;0)$, $A_2(-1;0;1)$, $A_3(0;1;-2)$, $A_4(1;3;2)$, знайти:

1) довжину ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4;
2) кути між ребрами A_1A_2 і A_1A_3, A_1A_2 і A_1A_4, A_1A_3 і A_1A_4.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. Маємо

$$\overline{A_1A_2} = (-2; -1; 1),\ \overline{A_1A_3} = (-1; 0; -2),\ \overline{A_1A_4} = (0; 2; 2).$$

Оскільки

$$g_{11} = |\bar{e}_1|^2 = 1,\ g_{22} = |\bar{e}_2|^2 = 4,\ g_{33} = |\bar{e}_3|^2 = 1,$$
$$g_{12} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle = 1 \cdot 2 \cdot \cos\pi/3 = 1,$$
$$g_{13} = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle = 1 \cdot 1 \cdot \cos\pi/2 = 0,$$
$$g_{23} = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle = 2 \cdot 1 \cdot \cos\pi/2 = 0$$

і $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, то за формулою

$$|\bar{x}|^2 = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} \mathcal{G} \begin{pmatrix} x^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x^n \end{pmatrix}$$

маємо

$$\left|\overline{A_1A_2}\right|^2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= 13.$$

Отже,

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{13}.$$

Аналогічно знаходимо

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{5},\quad \left|\overline{A_1A_4}\right| = 2\sqrt{5}.$$

Кути між ребрами A_1A_2 і A_1A_3 дістанемо за формулою

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \,\widehat{}\, \overline{A_1A_3}\right) = \frac{\left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right\rangle}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \left|\overline{A_1A_3}\right|}.$$

Скалярний добуток

$$\left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3} \right\rangle = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 + 0 - 2 = 1.$$

Тоді

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \,\widehat{}\, \overline{A_1A_2}\right) = \frac{1}{\sqrt{13}\sqrt{5}}.$$

Аналогічно

$$\left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle = -10,\quad \left\langle \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4} \right\rangle = -6,$$

$$\cos\left(\overline{A_1A_2} \,\widehat{}\, \overline{A_1A_4}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}},\quad \cos\left(\overline{A_1A_3} \,\widehat{}\, \overline{A_1A_4}\right) = -\frac{3}{5}.$$

Задача 3. Відносно ортонормованого базису дано вектори $\bar{a} = (-1; 1; 1; -1)$ і $\bar{b} = (0; 3; 0; 0)$. Знайти скалярний добуток цих векторів, їх довжини і кут між ними.

Розв'язання. Скалярний добуток знайдемо за формулою

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y_i.$$

Оскільки у випадку ортонормованого базису взаємні базиси збігаються, то коваріантні і контраваріантні координати також збігаються, тому

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i,\quad |\bar{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i x^i = \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2.$$

Звідси

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 3,$$
$$|\bar{a}|^2 = (-1)^2 + 1^2 + 1^2 + (-1)^2 = 4, |\bar{a}| = 2,$$
$$\left|\bar{b}\right|^2 = 0^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9,\ \left|\bar{b}\right| = 3.$$

Нарешті з формули $\cos\varphi = \dfrac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{|\bar{x}||\bar{y}|}$ дістанемо $\cos\varphi = \dfrac{3}{3 \cdot 2} = \dfrac{1}{2}$. Звідси $\varphi = \pi / 3$.

Задачі для розв'язування

422. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{x} = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ і $\bar{y} = \bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, знаючи, що $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ і кут між векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ дорівнює $\pi / 4$.

423. Вектори $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$ утворюють кут $\alpha = \pi / 6$. Знаючи, що $|\bar{e}_1| = 3$, $|\bar{e}_2| = 4$, обчислити скалярний добуток векторів $\bar{x} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ і $\bar{y} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

424. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ і $\bar{b} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 1$, $g_{12} = 1$, $g_{22} = 4$ базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

425. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + 4\bar{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 1$, $g_{12} = 5/16$, $g_{22} = 1$ базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

426. Знайти косинус кута φ між векторами $\bar{a} = 4\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ і $\bar{b} = 3\bar{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 1$, $g_{12} = -1/4$, $g_{22} = 1$ базису $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$.

427. Знайти косинуси кутів α і β, які вектор $\bar{a} = (x, y)$ утворює з базисними векторами $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти g_{11}, g_{12}, g_{22} цього базису.

428. Знайти довжину вектора $\bar{a} = (7; -8)$, якщо $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

429. Довжини векторів базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ дорівнюють 1, кути між ними дорівнюють $\pi / 3$. Знайти довжини векторів базису $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, взаємного з даним, і кути між ними.

430. Дано вектор $\bar{a} = (7; -8)$. Знайти вектор $\bar{b}$, що має довжину 1, якщо він перпендикулярний до вектора $\bar{a}$ і напрямлений так, щоб пара векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ мала додатну орієнтацію, якщо $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

431. Знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 3$ і кут між ними $\varphi = \pi / 3$, знайти довжину вектора $\bar{a} = (-4; 6)$.

432. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\bar{e}_1| = 4$, $|\bar{e}_2| = 2$, а кут між ними $\varphi = \pi / 3$. Відносно цієї системи координат задані вершини трикутника $A(1; 3)$, $B(1; 0)$, $C(2; 1)$. Визначити довжини сторін AB і AC цього трикутника і кут A між ними.

433. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = 1$ і кут між ними $\alpha = 2\pi / 3$. Відносно цієї системи координат дано вершини трикутника $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(3; 5)$. Знайти довжини сторін AB і BC цього трикутника і кут B між ними.

434. Довжини базисних векторів афінної системи координат $|\bar{e}_1| = 2$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{3}$, а кут між ними $\alpha = 5\pi / 6$. Відносно цієї системи координат дано два вектори $\bar{a} = (1; 2)$, $\bar{b} = (2; 2)$. Знайти кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

435. Відносно афінної системи координат дано трикутник ABC з вершинами в точках $A(1; 1)$, $B(5; 3)$, $C(3; 5)$, довжини сторін якого $|AB| = \sqrt{52}, |AC| = 4, |BC| = \sqrt{28}$. Визначити довжини базисних векторів цієї системи координат і кут між ними.

436. Відносно афінної системи координат дано прямокутний трикутник ABC з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(3; 2)$, прямим кутом при вершині C і катетами $|AC| = 2$, $|BC| = 3$. Визначити довжини базисних векторів цієї афінної системи і кут між ними.

437. Відносно афінної системи координат дано прямокутний трикутник ABC з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(3; 2)$, прямим кутом при вершині C і катетами $|AC| = 2$, $|BC| = 3$. Визначити довжини сторін $A'B'$ і $A'C'$ трикутника $A'B'C'$ і кут A' між ними, якщо вершини цього трикутника мають координати $A'(1; 1)$, $B'(2; 2)$, $C'(2; 4)$.

438. Знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$ і кут φ між ними, знайти:

1) довжину вектора $\bar{a} = (x, y)$;

2) кут α між векторами $\bar{a} = (x^1, y^1)$ і $\bar{b} = (x^2, y^2)$;

3) площу S паралелограма, побудованого на парі векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

439. Знайти косинуси кутів α і β, що вектор $\bar{a} = (x, y)$ утворює з базисними векторами, якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = 1$, а кут між векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ дорівнює $\varphi = \pi / 3$.

440. Виразити через метричні коефіцієнти $g_{ij} = \langle \bar{e}_i \bar{e}_j \rangle$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ довжини базисних векторів і кути $\alpha_{ij} = \widehat{\bar{e}_i \bar{e}_j}$ між ними.

441. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$ і $\bar{b} = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{ij} = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 1/2 \text{ при } i \neq j \end{array}\right.$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

442. Знайти довжину вектора $\bar{a} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ у базисі з метричними коефіцієнтами $g_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ \sqrt{3} / 2 \text{ при } i \neq j. \end{array}\right.$

443. Знайти кут φ між векторами $\bar{a} = (1; 0; 1)$ і $\bar{b} = (-1; 1; -1)$ у базисі з метричними коефіцієнтами $g_{ij} = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 1 / \sqrt{2} \text{ при } i \neq j. \end{array}\right.$

444. Знайти косинуси кутів α_1, α_2, α_3, що вектор $\bar{a} = (x^1, x^2, x^3)$ утворює з базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} цього базису.

445. Знайти косинуси кутів φ_1, φ_2, φ_3, утворених вектором $\bar{a} = (x^1, x^2, x^3)$ з базисними векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_2} = \omega_{12}$, $\widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_3} = \omega_{23}$, $\widehat{\bar{e}_3 \bar{e}_1} = \omega_{31}$.

446. Базисні вектори $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ довільної системи координат задовольняють умови $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_2} = \widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_3} = \widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_3} = \pi / 3$. Знаючи координати вершин піраміди $A_1(0; 1; 1)$, $A_2(1; 0; -1)$, $A_3(1; 1; -1)$, $A_4(2; -1; 2)$, знайти:

1) довжини ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 піраміди;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4.

У задачах 447 і 448 знайти скалярний добуток векторів, один з яких заданий своїми координатами x^1, x^2, x^3 в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, а другий — координатами y_1, y_2, y_3 у базисі $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$, взаємному з базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$:

447. $\bar{x} = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + 4\bar{e}_3 - \bar{e}_4$,

$\bar{y} = \bar{e}^1 - 2\bar{e}^2 + \bar{e}^3 + \bar{e}^4$.

448. $\bar{x} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + 2\bar{e}_4$,

$\bar{y} = \bar{e}^1 - \bar{e}^2 + 3\bar{e}^3 - 2\bar{e}^4$.

449. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = (1; -1; 2; -2)$ і $\bar{b} = (2; 0; -1; 1)$ і кут φ між ними, знаючи метричні коефіцієнти $g_{ij} = \left[\begin{array}{l} 2 \text{ при } i = j, \\ 1 \text{ при } i \neq j, \end{array}\right.$ $i, j = 1; 2; 3; 4$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$.

450. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{x} = 4\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 - \bar{e}_4$ і $\bar{y} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4$ і кут між ними, знаючи довжини базисних векторів $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = |\bar{e}_4| = \sqrt{2}$ і кути між ними $\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_2} = \widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_3} = \widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_4} = \widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_3} = \widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_4} = \widehat{\bar{e}_3 \bar{e}_4} = \pi / 4$.

451. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ — взаємні базиси. Знайти кути θ_i між векторами $\bar{e}_i$ і $\bar{e}^i$ $(i = 1; 2; 3)$, знаючи метричні коефіцієнти g_{ij} базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

452. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}^1, \bar{e}^2, \bar{e}^3$ — взаємні базиси. Знайти кути θ_i між векторами $\bar{e}_i$ і $\bar{e}^i$ $(i = 1; 2; 3)$, якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $\widehat{\bar{e}_1 \bar{e}_2} = \omega_{12}$, $\widehat{\bar{e}_2 \bar{e}_3} = \omega_{23}$, $\widehat{\bar{e}_3 \bar{e}_1} = \omega_{31}$.

В усіх задачах 453–458 припускається, що координати векторів задані відносно ортонормованого базису.

453. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = (1; -1; 1; -1)$ і $\bar{b} = (0; 0; 3; 0)$, їх довжини і кут між ними.

У задачах 454–457 знайти кут між векторами $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$:

454. $\bar{a}_1 = (2; 3; 1; 6)$, $\bar{a}_2 = (3; 2; -6; -1)$.

455. $\bar{a}_1 = (1; 2; 1; 2)$, $\bar{a}_2 = (2; 1; -2; -1)$.

456. $\vec{a}_1 = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 3; -5)$.

457. $\vec{a}_1 = (1; 0; 2; 2)$, $\vec{a}_2 = (0; 1; 1; -1)$.

458. Знайти чотиривимірний вектор, що ортогональний до векторів $(1; 1; 1; 1)$, $(1; -1; -1; 1)$, $(2; 1; 1; 3)$ і має довжину 1.

4.7. ВИЗНАЧНИК ГРАМА. ОБ'ЄМ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА В E_n

Нехай $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — вектори в E_n.

Означення 4.22. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \vec{a}_k, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{a}_k, \vec{a}_k \rangle \end{pmatrix}$$

називається *матрицею Грама* для векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Приклад 1. Метрична матриця $\mathcal{G}$ є матрицею Грама для базисних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в E_n.

Дійсно,

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Означення 4.23. Визначник

$$\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_k \rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle \vec{a}_k, \vec{a}_1 \rangle & \ldots & \langle \vec{a}_k, \vec{a}_k \rangle \end{vmatrix}$$

називається *визначником Грама* для векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Приклад 2.

$$\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n) = |\mathcal{G}|,$$

де $|\mathcal{G}|$ — визначник $\mathcal{G}$.

Твердження 4.9.

$$\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) \geq 0.$$

При цьому $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = 0$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — лінійно залежні.

Твердження 4.10. Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in E_2$, то $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = S^2$, де S — площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2$.

Твердження 4.11. Якщо $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in E_3$, то $\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = V^2$, де V — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ в E_3.

Означення 4.24. *Паралелепіпедом*, побудованим на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ в E_n, для яких точка M_0 є спільним початком, називається множина точок M, для кожної з яких $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_0 + \lambda_1 \vec{a}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k$, де $\lambda_i \in [0,1]$, $i = \overline{1,k}$, O — початок координат в E_n.

Означення 4.25. Об'ємом паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ $(k \leq n)$ в E_n з початком у точці M_0, називається величина V, що визначається рівністю $V = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)}$.

Зауваження 4.14. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ в E_n, не залежить від вибору спільного початку векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Приклад 3. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ в E_n, обчислюється за формулою

$$V_{баз} = \sqrt{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)} = \sqrt{|\mathcal{G}|}.$$

Задача 1. Показати, що площа S паралелограма (рис. 4.2), побудованого на векторах $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ у E_2, обчислюється за формулою

$$S = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}.$$

Розв'язання. $S = |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\sin\omega = |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\sqrt{1 - \cos^2\omega} =$

$$= \sqrt{|\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2 - (|\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} |\vec{a}_1|^2 & |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega \\ |\vec{a}_1||\vec{a}_2|\cos\omega & |\vec{a}_2|^2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}_1^2 & \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle \\ \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \vec{a}_2^2 \end{vmatrix}} = \sqrt{\Gamma(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}.$$

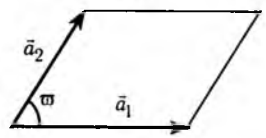

Рис. 4.2

Задача 2. В умовах задачі 2 п.4.6 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

5 1-93

Розв'язання. Об'єм піраміди дорівнює 1/6 об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}$.

Позначимо $\overline{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overline{A_1A_3} = \vec{b}$, $\overline{A_1A_4} = \vec{c}$. Тоді $|\vec{a}| = \sqrt{13}$, $|\vec{b}| = \sqrt{5}, |\vec{c}| = 2\sqrt{5}$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = 1, \langle\vec{a},\vec{c}\rangle = -10, \langle\vec{b},\vec{c}\rangle = -6$.

$$V^2 = \Gamma(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} \langle\vec{a},\vec{a}\rangle & \langle\vec{a},\vec{b}\rangle & \langle\vec{a},\vec{c}\rangle \\ \langle\vec{b},\vec{a}\rangle & \langle\vec{b},\vec{b}\rangle & \langle\vec{b},\vec{c}\rangle \\ \langle\vec{c},\vec{a}\rangle & \langle\vec{c},\vec{b}\rangle & \langle\vec{c},\vec{c}\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 13 & 1 & -10 \\ 1 & 5 & -6 \\ -10 & -6 & 20 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 13 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & -3 \\ -5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 432.$$

$$V = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}.$$

Отже, об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ становить $(1/6)V = 2\sqrt{3}$.

Задачі для розв'язування

459. Знайти площу S паралелограма, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$ базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

460. Знайти площу S паралелограма, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, якщо $|\vec{e}_1| = 2, |\vec{e}_2| = 3$ і кут між ними $\omega = (3/4)\pi$.

461. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 3$, $g_{22} = 13$, $g_{33} = 3$, $g_{12} = 5$, $g_{13} = -1$, $g_{23} = -5$ базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$.

462. Знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = 2$, $g_{22} = 2$, $g_{33} = 2$, $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 1$ базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах.

463. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на базисних векторах $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 2$, $\widehat{\vec{e}_1\vec{e}_2} = \widehat{\vec{e}_1\vec{e}_3} = \widehat{\vec{e}_2\vec{e}_3} = \pi/3$.

464. Довжини векторів базису $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ становлять $2\sqrt{3}$, а кути між ними — $\pi/6$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

465. Обчислити об'єм V паралелепіпеда, знаючи довжини його ребер $|\overrightarrow{OA}| = 2, |\overrightarrow{OB}| = 1, |\overrightarrow{OC}| = 3$, що виходять із однієї вершини O, і плоскі кути між ними $\widehat{AOB} = \pi/2$, $\widehat{BOC} = \widehat{AOC} = \pi/3$.

466. В умовах задачі 446 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

467. Вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$, що виходять з однієї точки, є ребрами n-вимірного паралелепіпеда. Знайти висоту цього паралелепіпеда, беручи за його основу $(n-1)$-вимірний паралелепіпед, побудований на векторах $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_{n-1}$.

468. Обчислити об'єм V паралелепіпеда, знаючи довжини його ребер $|\overrightarrow{OA}| = a, |\overrightarrow{OB}| = b, |\overrightarrow{OC}| = c$ і кути $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$ між ними.

4.8. ОЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРНОГО ДОБУТКУ В E_n

Означення 4.26. Йдеться про те, що упорядкована сукупність із n лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ в E_n має ту саму орієнтацію, що і сукупність базисних векторів $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n$, якщо визначник із координат цих векторів у цьому базисі є додатною величиною, тобто

$$\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & a^2_{(1)} & \dots & a^n_{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^1_{(n)} & a^2_{(n)} & \dots & a^n_{(n)} \end{vmatrix} > 0,$$

і протилежну орієнтацію, якщо цей визначник є від'ємною величиною.

Зауваження 4.15. Якщо визначник із координат векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ дорівнює 0, то вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ лінійно залежні. Вважатимемо, що у цьому випадку упорядкована сукупність векторів $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ не має орієнтації.

Означення 4.27. *Векторним добутком* векторів $\bar{a}_1,\ldots$ $\ldots,\bar{a}_{n-1}\in E_n$ $(n\geq 3)$ називається вектор $\bar{c}$, який позначається символом $[\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{n-1}]$ і задовольняє три умови:

1) довжина вектора $\bar{c}$ дорівнює $\sqrt{\Gamma(\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_{n-1})}$;

2) вектор $\bar{c}$ ортогональний кожному із векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots$ $\ldots,\bar{a}_{n-1}$;

3) вектор $\bar{c}$, якщо $\bar{c}\neq\bar{0}$, напрямлений так, що упорядкована сукупність векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_{n-1}$, $\bar{c}$ має ту саму орієнтацію, що й сукупність базисних векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ в E_n.

Зауваження 4.16. Для векторного добутку в E_n виконуються властивості, аналогічні властивостям для векторного добутку в E_3. Зокрема, необхідною і достатньою умовою лінійної залежності векторів $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_{n-1}$ є рівність нулю їх векторного добутку.

Твердження 4.12. Якщо

$$\bar{a}_1=a^1_{(1)}\bar{e}_1+\ldots+a^n_{(1)}\bar{e}_n=a_1^{(1)}\bar{e}^1+\ldots+a_n^{(1)}\bar{e}^n,$$

. . . .

$$\bar{a}_{n-1}=a^1_{(n-1)}\bar{e}_1+\ldots+a^n_{(n-1)}\bar{e}_n=a_1^{(n-1)}\bar{e}^1+\ldots+a_n^{(n-1)}\bar{e}^n,$$

то

$$[\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{n-1}]=\sqrt{|\mathcal{G}|}\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & a^2_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_{(n-1)} & a^2_{(n-1)} & \ldots & a^n_{(n-1)} \\ \bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \ldots & \bar{e}^n \end{vmatrix}=$$

$$=\sqrt{|\mathcal{G}^{-1}|}\begin{vmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots & a_n^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \ldots & a_n^{(n-1)} \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \ldots & \bar{e}_n \end{vmatrix}. \qquad (4.16)$$

Зауваження 4.17. У випадку ортонормованого базису

$$[\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{n-1}]=\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & a^2_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_{(n-1)} & a^2_{(n-1)} & \ldots & a^n_{(n-1)} \\ \bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \ldots & \bar{e}^n \end{vmatrix}. \qquad (4.17)$$

Задача 1. В умовах задачі 2 п.4.6 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

Розв'язання. Площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює площі трикутника $A_1A_2A_3$, що дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1A_3}$.

Знаходимо векторний добуток у базисі $\bar{e}^1$, $\bar{e}^2$, $\bar{e}^3$, взаємному з даним $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$. За формулою (4.16) маємо

$$[\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}]=\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ \bar{e}^1 & \bar{e}^2 & \bar{e}^3 \end{vmatrix}=\sqrt{3}\left(2\bar{e}^1-5\bar{e}^2-\bar{e}^3\right).$$

За формулою

$$|\bar{x}|^2=\sum_{i,j=1}^{n}g^{ij}x_ix_j=(x_1\ldots x_n)\mathcal{G}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

знаходимо модуль векторного добутку

$$\left|[\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}]\right|^2=\sqrt{3}(2\ \ -5\ \ -1)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\sqrt{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}=$$

$$=(13\ \ -7\ \ -3)\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}=26+35+3=64.$$

Звідси $\left|[\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}]\right|=8$.

Отже, $S_{\Delta A_1A_2A_3}=4$.

Зауваження 4.18. $S_{\Delta A_1A_2A_3}$ можна знайти за допомогою визначника Грама

$$S_{\Delta A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{\Gamma\left(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3}\right)}.$$

Задача 2. Відносно ортонормованого базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4$ простору E_4 дано три вектори $\bar{x}_2=(1;0;0;1)$, $\bar{x}_2=(0;2;0;1)$, $\bar{x}_3=(-1;1;2;0)$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. Об'єм шуканого паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку $[\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3]$.

У випадку ортонормованого базису векторний добуток обчислюється за формулою (4.17). Тоді

$$[\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3]=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&1\\-1&1&2&0\\\bar{e}_1&\bar{e}_2&\bar{e}_3&\bar{e}_4\end{vmatrix}=-\bar{e}_1\begin{vmatrix}0&0&1\\2&0&1\\1&2&0\end{vmatrix}+\bar{e}_2\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&1\\-1&2&0\end{vmatrix}-$$

$$-\bar{e}_3\begin{vmatrix}1&0&1\\0&2&1\\-1&1&0\end{vmatrix}+\bar{e}_4\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\-1&1&2\end{vmatrix}=-4\bar{e}_1-2\bar{e}_2-\bar{e}_3+4\bar{e}_4;$$

$$\left|[\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3]\right|^2=16+4+1+16=37.$$

$$\left|[\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3]\right|=\sqrt{37}.$$

Отже, $V=\sqrt{37}$.

Зауваження 4.19. Об'єм паралелепіпеда можна знайти за допомогою визначника Грама $V=\sqrt{\Gamma(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)}$.

Задача 3. Довести формулу (4.16) в E_3.

Доведення. Нехай $\bar{x}=x^1\bar{e}_1+x^2\bar{e}_2+x^3\bar{e}_3$, $\bar{y}=y^1\bar{e}_1+y^2\bar{e}_2+y^3\bar{e}_3$ — вектори в E_3. Тоді за властивостями векторного добутку в E_3 маємо

$$[\bar{x}\bar{y}]=\left[\left(x^1\bar{e}_1+x^2\bar{e}_2+x^3\bar{e}_3\right)\left(y^1\bar{e}_1+y^2\bar{e}_2+y^3\bar{e}_3\right)\right]=x^1y^2[\bar{e}_1\bar{e}_2]+$$
$$+x^1y^3[\bar{e}_1\bar{e}_3]+x^2y^1[\bar{e}_2\bar{e}_1]+x^2y^3[\bar{e}_2\bar{e}_3]++x^3y^1[\bar{e}_3\bar{e}_1]+x^3y^2[\bar{e}_3\bar{e}_2]=$$
$$=\left(x^1y^2-x^2y^1\right)[\bar{e}_1\bar{e}_2]-\left(x^1y^3-x^3y^1\right)[\bar{e}_3\bar{e}_1]+\left(x^2y^3-x^3y^2\right)[\bar{e}_2\bar{e}_3].$$

Оскільки вектор $\bar{e}^3$ ортогональний до векторів $\bar{e}_1$ і $\bar{e}_2$, то $[\bar{e}_1\bar{e}_2]=k\bar{e}^3$. Звідси $\langle[\bar{e}_1\bar{e}_2],\bar{e}_3\rangle=k\langle\bar{e}^3,\bar{e}_3\rangle=k$.

З іншого боку, $\langle[\bar{e}_1,\bar{e}_2],\bar{e}_3\rangle=V_{баз}=\sqrt{|\mathcal{G}|}$. Тому $k=\sqrt{|\mathcal{G}|}$ і $[\bar{e}_1\bar{e}_2]=\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^3$.

Аналогічно

$$[\bar{e}_2\bar{e}_3]=\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^1,\quad [\bar{e}_3\bar{e}_1]=\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^2.$$

Отже,

$$[\bar{x}\bar{y}]=\left(x^1y^2-x^2y^1\right)\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^3-\left(x^1y^3-x^3y^1\right)\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^2+$$
$$+\left(x^2y^3-x^3y^2\right)\sqrt{|\mathcal{G}|}\bar{e}^1=\sqrt{|\mathcal{G}|}\begin{vmatrix}x^1&x^2&x^3\\y^1&y^2&y^3\\\bar{e}^1&\bar{e}^2&\bar{e}^3\end{vmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

469. Відносно базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ дано координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}=(0;1;0)$, $\bar{b}=(2;-1;3)$. Знайти координати векторного добутку $[\bar{a}\bar{b}]$ у базисі $\bar{e}^1,\bar{e}^2,\bar{e}^3$, взаємному з базисом $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$, якщо $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=|\bar{e}_3|=1$ і $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2}=\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3}=\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3}=\pi/4$.

470. Відносно базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ дано координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}=(0;3;1)$, $\bar{b}=(2;0;1)$. Знайти координати векторного добутку $[\bar{a}\bar{b}]$ в цьому базисі, якщо $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=1$, $|\bar{e}_3|=2$ і $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2}=\pi/2$, $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3}=\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3}=\pi/3$.

471. Відносно базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ дано координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}=(2;-1;3)$, $\bar{b}=(0;5;-2)$. Знайти координати векторного добутку $[\bar{a}\bar{b}]$ в цьому базисі, якщо $|\bar{e}_1|=|\bar{e}_2|=1$, $|\bar{e}_3|=2$ і $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2}=\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3}=\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3}=\pi/3$.

472. Відносно базису $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ дано координати векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $\bar{a}=(1;2;-3)$, $\bar{b}=(0;5;-2)$. Знайти координати векторного добутку $[\bar{a}\bar{b}]$ в цьому базисі, якщо $|\bar{e}_1|=2$, $|\bar{e}_2|=1$, $|\bar{e}_3|=3$ і $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2}=\pi/3$, $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3}=\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3}=\pi/2$.

473. В умовах задачі 446 знайти площу грані $A_1A_2A_3$ піраміди.

У задачах 474–476 відносно ортонормованого базису дано три вектори $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах:

474. $\bar{x}_1=(1;2;1;2)$,
$\bar{x}_2=(0;1;0;-1)$,
$\bar{x}_3=(2;0;1;1)$.

475. $\bar{x}_1=(1;1;1;1)$,
$\bar{x}_2=(1;0;1;0)$,
$\bar{x}_3=(2;-1;-1;1)$.

476. $\bar{x}_1=(-2;0;1;-1)$,
$\bar{x}_2=(0;-1;1;2)$,
$\bar{x}_3=(3;0;0;1)$.

4.9. МІШАНИЙ ДОБУТОК У E_N. ОРІЄНТОВАНИЙ ОБ'ЄМ N-ВИМІРНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА В E_n

Означення 4.28. *Мішаним добутком* векторів $\bar{a}_1, \ldots$ $\ldots, \bar{a}_n$ в E_n називається величина

$$\langle [\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1}], \bar{a}_n \rangle .$$

Твердження 4.13. Якщо

$$\bar{a}_1 = a^1_{(1)}\bar{e}_1 + \ldots + a^n_{(1)}\bar{e}_n = a^{(1)}_1 \bar{e}^1 + \ldots + a^{(1)}_n \bar{e}^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{a}_n = a^1_{(n)}\bar{e}_1 + \ldots + a^n_{(n)}\bar{e}_n = a^{(n)}_1 \bar{e}^1 + \ldots + a^{(n)}_n \bar{e}^n,$$

то

$$\langle [\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1}], \bar{a}_n \rangle = \sqrt{|\mathcal{G}|}\begin{vmatrix} a^1_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_{(n)} & \ldots & a^n_{(n)} \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{|\mathcal{G}^{-1}|}\begin{vmatrix} a^{(1)}_1 & \ldots & a^{(1)}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^{(n)}_1 & \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix}. \qquad (4.18)$$

Зауваження 4.20. У випадку, якщо $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ — ортонормований базис

$$\langle [\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1}], \bar{a}_n \rangle = \begin{vmatrix} a^1_{(1)} & \ldots & a^n_{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a^1_{(n)} & \ldots & a^n_{(n)} \end{vmatrix}. \qquad (4.19)$$

Означення 4.29. *Орієнтованим об'ємом* n-вимірного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ в E_n називається *мішаний добуток* векторів $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, тобто

$$\tilde{V} = \langle [\bar{a}_1 \ldots \bar{a}_{n-1}], \bar{a}_n \rangle.$$

Зауваження 4.21. $\tilde{V} = 0$ тоді і тільки тоді, коли сукупність векторів $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ лінійно залежна, $\tilde{V} > 0$, якщо сукупність векторів $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$

має ту саму орієнтацію, що й сукупність базисних векторів, $\tilde{V} < 0$ — у протилежному випадку.

Зауваження 4.22. Рівність $\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3 = \tilde{V}$ для векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in E_3$ є однією із властивостей мішаного добутку в E_3.

Твердження 4.14.

$$\tilde{V}^2 = \Gamma(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) = V^2,$$

де V — об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$.

Зауваження 4.23. Оскільки для векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ має місце рівність $(\bar{a}_1\bar{a}_2\bar{a}_3)^2 = \Gamma(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$, то для векторів базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в E_3 матимемо

$$(\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3)^2 = \Gamma(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = |\mathcal{G}|.$$

Задача 1. В умовах задачі 2 п.4.6 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Розв'язання. Об'єм піраміди дорівнює 1/6 модуля мішаного добутку векторів $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$. За формулою (4.18) маємо

$$\left\langle \left[\overline{A_1A_2}\ \overline{A_1A_3}\right], \overline{A_1A_4} \right\rangle = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= \sqrt{3}(-12) = -12\sqrt{3}.$$

Тоді об'єм піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$.

Задача 2. Відносно ортонормованого базису дано вектори $\bar{x}_1 = (0;1;1;1)$, $\bar{x}_2 = (1;0;1;1)$, $\bar{x}_3 = (1;1;0;1)$, $\bar{x}_4 = (1;1;1;0)$. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах.

Розв'язання. Обчислимо орієнтований об'єм паралелепіпеда за формулою (4.19).

Маємо

$$\tilde{V} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Тоді $V = |-3| = 3$.

Задачі для розв'язування

477. Знаючи метричні коефіцієнти g_{ij}, базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, знайти об'єм V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\left(x^1, x^2, x^3\right)$, $\left(y^1, y^2, y^3\right)$, $\left(z^1, z^2, z^3\right)$.

478. Знайти орієнтований об'єм $\bar{V}$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = \left(x^1, x^2, x^3\right)$, $\bar{b} = \left(y^1, y^2, y^3\right)$, $\bar{c} = \left(z^1, z^2, z^3\right)$, якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2} = \omega_{12}$, $\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3} = \omega_{23}$, $\widehat{\bar{e}_3\bar{e}_1} = \omega_{31}$.

479. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = (1; 3; 0)$, $\bar{b} = (1; 2; 1)$, $\bar{c} = (1; -2; 3)$ якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$, $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2} = \pi/2$, $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3} = \pi/3$, $\widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3} = \pi/3$.

480. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a} = (1; -1; 1)$, $\bar{b} = (5; 2; -3)$, $\bar{c} = (1; 4; -2)$ якщо $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$ і $\widehat{\bar{e}_1\bar{e}_2} = \widehat{\bar{e}_1\bar{e}_3} = \widehat{\bar{e}_2\bar{e}_3} = \pi/3$.

У задачах 481–483, знаючи метричні коефіцієнти $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, $g_{23} = g_{13} = 1/2$, $g_{12} = 0$ базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

481. $\bar{a} = (1; 0; 7)$, $\bar{b} = (-1; 2; 4)$, $\bar{c} = (3; 2; 1)$.

482. $\bar{a} = (2; -3; 1)$, $\bar{b} = (1; 1; 2)$, $\bar{c} = (3; 1; -1)$.

483. $\bar{a} = (-2; 1; 5)$, $\bar{b} = (3; 0; 2)$, $\bar{c} = (-1; 4; 2)$.

484. В умовах задачі 446 знайти об'єм піраміди $A_1A_2A_3A_4$ і довжину її висоти, опущеної з вершини A_4.

У задачах 485–487 обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4$. (Припускається, що координати векторів задані відносно ортонормованого базису).

485. $\bar{x}_1 = (1; 3; 4; -1)$,
$\bar{x}_2 = (0; 2; 5; 1)$,
$\bar{x}_3 = (1; -7; -3; 2)$,
$\bar{x}_4 = (-2; 5; 0; -3)$.

486. $\bar{x}_1 = (1; 2; 0; 4)$,
$\bar{x}_2 = (2; 0; 1; 0)$,
$\bar{x}_3 = (0; 4; 1; 2)$,
$\bar{x}_4 = (4; 1; 2; 3)$.

487. $\bar{x}_1 = (1; 2; 3; 4)$,
$\bar{x}_2 = (0; 1; 2; 3)$,
$\bar{x}_3 = (1; 0; 3; 4)$,
$\bar{x}_4 = (1; 1; 5; 6)$.

488. Вектори $\bar{a}_1 = (4; 0; 2; 3)$, $\bar{a}_2 = (0; 1; 1; 2)$, $\bar{a}_3 = (2; 0; 4; 1)$, $\bar{a}_4 = (1; 2; 0; 4)$, що виходять з однієї точки, є ребрами 4-вимірного паралелепіпеда. Знайти висоту цього паралелепіпеда, беручи за його основу 3-вимірний паралелепіпед, побудований на векторах:

1) $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$; 2) $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$.

Координати векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$ задані в ортонормованому базисі.

5 ЛІНІЙНІ ОБРАЗИ В E_n

5.1. ПЛОЩИНА І ПРЯМА В E_n

Нехай E_k — деякий лінійний k-вимірний підпростір E_n $(1 \le k \le n-1)$ і M_0 — фіксована точка простору E_n.

Означення 5.1. Множина P_k усіх точок $M \in E_n$, для яких справедлива рівність $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \vec{x}$ (O — початок координат в E_n; $\vec{x}$ пробігає увесь підпростір E_k), називається *k-вимірною площиною простору E_n*.

Отже, k-вимірна площина P_k простору E_n є результатом паралельного зсуву підпростору E_k уздовж вектора $\overrightarrow{OM_0}$. У цьому випадку говорять, що P_k проходить через точку M_0 паралельно підпростору E_k.

Звичайно P_1 називають прямою простору E_k, P_{n-1} — гіперплощиною E_n.

ТЕОРЕМА 5.1. Якщо вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(|\vec{a}| \ne 0)$ ортогональний до гіперплощини P_{n-1} і P_{n-1} проходить через точку $M_0\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, то рівняння гіперплощини P_{n-1} має вигляд

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0$$

або

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0. \tag{5.1}$$

І навпаки, всяке рівняння, що має вигляд (5.1) за умови, що всі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одночасно не дорівнюють нулю, є рівнянням деякої гіперплощини в E_n.

Рівняння (5.1) називається *загальним рівнянням гіперплощини*.

Зауваження 5.1. Рівняння (5.1) є рівнянням першого степеня, тобто лінійним відносно змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тому гіперплощина є поверхнею 1-го порядку в E_n.

Означення 5.2. Кутом φ між гіперплощинами P'_{n-1} і P''_{n-1} називається *кут між векторами, перпендикулярними до цих площин*.

Твердження 5.1. Якщо гіперплощини P'_{n-1} і P''_{n-1} задані своїми загальними рівняннями

$$a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_nx_n + b_1 = 0;$$
$$a''_1x_1 + a''_2x_2 + \ldots + a''_nx_n + b_2 = 0,$$

то

$$\cos\varphi = \frac{\langle \vec{a}', \vec{a}'' \rangle}{|\vec{a}'||\vec{a}''|},$$

де $\vec{a}' = (a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$, $\vec{a}'' = (a''_1, a''_2, \ldots, a''_n)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Множина точок $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тоді й тільки тоді є k-вимірною площиною P_k простору E_n, якщо вона збігається з множиною всіх точок E_n, координати яких задовольняють деяку систему з $n-k$ лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для якої ранг основної матриці дорівнює числу рівнянь $n-k$.

Система з $n-k$ лінійних рівнянь з теореми 5.2 називається *загальними рівняннями площини P_k*.

Зокрема, загальними рівняннями прямої P_1 у просторі E_n є система з $(n-1)$-го лінійних рівнянь, для якої ранг основної матриці дорівнює $n-1$. Ця система може бути записана у вигляді

$$\frac{x_1 - x_1^0}{q_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{q_2} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{q_n}, \tag{5.2}$$

де $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ — координати точки M_0, через яку проходить P_1; $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — координати деякого (ненульового) вектора $\vec{q} \in E_n$, паралельного P_1. Систему (5.2) називають *канонічними рівняннями прямої* P_1. Вектор $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, паралельний прямій, називається *напрямним вектором прямої*.

Якщо в системі (5.2) спільне відношення позначити через t, то (5.2) можна записати у вигляді системи

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + q_1 t, \\ x_2 = x_2^0 + q_2 t, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n^0 + q_n t, \qquad t \in (-\infty, \infty), \end{cases}$$

яку називають *параметричними рівняннями прямої* P_1.

ТЕОРЕМА 5.3. Для відстані d від точки $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ до гіперплощини $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + b = 0$ має місце формула

$$d = \left| \frac{a_1 x_1' + a_2 x_2' + \dots + a_n x_n' + b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} \right|.$$

У випадку $n = 2$, тобто у випадку простору E_2, поняття гіперплощини й прямої збігаються між собою. Тоді загальне рівняння прямої має вигляд $ax + by + c = 0$, де вектор $\vec{a} = (a, b)$ перпендикулярний до прямої. Канонічне рівняння прямої в E_2 має вигляд

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q},$$

де x, y — координати довільної точки M прямої; x_0, y_0 — координати фіксованої точки M_0 прямої; p, q — координати ненульового вектора, колінеарного прямій. Звичайно, q/p при $p \neq 0$ позначають через k і називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Тоді рівняння прямої запишемо у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

При $n = 3$, тобто у випадку простору E_3, поняття гіперплощини P_2 збігається з поняттям площини простору, а поняття прямої P_1 — з поняттям прямої простору.

У цьому випадку загальне рівняння площини P_2 має вигляд

$$ax + by + cz + d = 0,$$

де вектор $\vec{a} = (a, b, c)$ перпендикулярний до площини P_2.

Канонічні рівняння прямої P_1 мають вигляд

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r},$$

де x, y, z — координати довільної точки M прямої; x_0, y_0, z_0 — координати фіксованої точки M_0 прямої; p, q, r — координати (ненульового) вектора, колінеарного прямій P_1.

Параметричні рівняння P_1 мають вигляд:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt, \\ z = z_0 + rt, \qquad t \in (-\infty, \infty). \end{cases}$$

Задача 1. Знайти проекцію точки $A(3; 2; 0; -1)$ на гіперплощину $x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -41$.

Розв'язання. З рівняння гіперплощини знаходимо ортогональний до неї вектор $\vec{a} = (1; 2; -1; 4)$. Рівняння перпендикуляра до заданої гіперплощини, що проходить через точку $A(3; 2; 0; -1)$, має вигляд

$$\frac{x_1 - 3}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3}{-1} = \frac{x_4 + 1}{4}. \tag{5.3}$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -41, \\ \dfrac{x_1 - 3}{1} = \dfrac{x_2 - 2}{2} = \dfrac{x_3}{-1} = \dfrac{x_4 + 1}{4}, \end{cases}$$

знайдемо координати проекції.

Для розв'язування системи запишемо параметричні рівняння прямої (5.3):

$$\begin{cases} x_1 = t + 3, \\ x_2 = 2t + 2, \\ x_3 = -t, \\ x_4 = 4t - 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Підставивши значення x_1, x_2, x_3, x_4 у рівняння гіперплощини, знайдемо $t = -2$. З рівняння (5.4) дістанемо $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$, $x_4 = -9$. Таким чином, точка $A_1(1; -2; 2; -9)$ є проекцією точки $A(3; 2; 0; -1)$ на гіперплощину.

Задача 2. В умовах задачі 2 п.4.1.2 знайти рівняння площини $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Тоді вектори $\overline{A_1M} = (x+1, y, z-1)$, $\overline{A_1A_2} = (5; 3; 1)$, $\overline{A_1A_3} = (2; 2; 3)$ компланарні. При виконанні цієї умови їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто $\overline{A_1M} \cdot \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} = 0$. Якщо точка M не лежить на площині, то $\overline{A_1M} \cdot \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_3} \neq 0$. Тому рівняння площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7(x+1) - 13y + 4(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x - 13y + 4z + 3 = 0.$$

Задача 3. В умовах задачі 2 п.4.1.2 знайти:

1) рівняння прямої A_1A_2;

2) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Розв'язання. 1) Скористаємося канонічним рівнянням прямої (5.2). За напрямний вектор даної прямої можна прийняти вектор $\vec{q} = \overline{A_1A_2} = (5; 3; 1)$.

Враховуючи, що пряма проходить через точку $A_1(-1; 0; 1)$, дістанемо рівняння прямої A_1A_2 у вигляді

$$\frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

2) Скористаємося канонічним рівнянням прямої (5.2).

Пряма проходить через точку $A_4(0; 4; -1)$. Тому покладемо $x_1^0 = 0, x_2^0 = 4, x_3^0 = -1$. За напрямний вектор даної прямої можна взяти вектор $\bar{a}$ — нормальний вектор до площини $A_1A_2A_3$.

З рівняння площини $A_1A_2A_3$, здобутого в задачі 2 цього пункту, маємо: $\bar{a} = (7; -13; 4)$. Тоді рівняння шуканої висоти набере вигляду

$$\frac{x-0}{7} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z+1}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z+1}{4}.$$

Задачі для розв'язування

489. Задані пряма l і точка M в E_2. Знайти:

1) рівняння прямої l', що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

2) рівняння прямої l'', що проходить через точку M паралельно заданій прямій:

а) l: $-3x + 2y - 5 = 0$, $M(-1; 2)$;

б) l: $x + 3y - 11 = 0$, $M(0; 3)$;

в) l: $2x - 4y - 9 = 0$, $M(1; -1)$.

490. Знайти рівняння прямої:

1) яка проходить через точку $(3; 4)$ паралельно осі Ox;

2) яка проходить через точку $(-2, 1)$ паралельно осі Oy.

491. Встановити, чи перетинаються в одній точці три прямі:

1) $2x + 3y - 1 = 0$, $3x - y + 3 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

2) $4x - 5y + 6 = 0$, $5x + 3y - 11 = 0$, $x + 2y - 5 = 0$.

В задачах 492–496 дані прямі l_1 і l_2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M(3; 2)$ і точку перетину прямих l_1 та l_2.

492. l_1: $-2x + y - 5 = 0$, l_2: $x - 5y - 1 = 0$.

493. l_1: $x + y - 1 = 0$, l_2: $2x + 2y - 2 = 0$.

494. l_1: $3x - 4y - 1 = 0$, l_2: $x - y - 2 = 0$.

495. l_1: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{2}$, l_2: $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$.

496. l_1: $\dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y+1}{1}$, l_2: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{5}$.

497. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ паралельно прямій $5x + 8y = 0$.

498. Дано сторони трикутника ABC: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). Знайти рівняння висоти, що проходить через вершину A.

499. Дано вершини трикутника ABC: $A(1; 2)$, $B(2; -2)$, $C(6; 1)$. Потрібно:

1) написати рівняння сторони AB;

2) написати рівняння висоти CD й обчислити її довжину.

500. Дано сторону прямокутника $3x - 4y + 5 = 0$ та дві його вершини $A(1; -3)$, $C(1; 2)$. Знайти рівняння решти сторін прямокутника.

501. Знайти точку B, симетричну точці $A(-2; 4)$ відносно прямої: $3x + y - 8 = 0$.

502. Дано вершини трикутника ABC: $A(-8; 3)$, $B(8; 5)$, $C(8; -5)$. Знайти точку перетину його висот.

503. Знайти рівняння прямої:

1) кутовий коефіцієнт якої 1/2 і відрізок, що відтинається на осі ординат, дорівнює 3;

2) що проходить через точку $(1; 3)$ та кутовий коефіцієнт якої дорівнює -2;

3) що проходить через точку $(-1; 2)$ і утворює з віссю Ox кут $\pi/3$;

4) що проходить через точку $(3; 7)$ і утворює з віссю Ox кут $\pi/6$;

5) що проходить через точку $(0; 1)$ і утворює з віссю Ox кут $\pi/4$.

504. Знайти рівняння прямої:

1) яка відтинає на осях Ox й Oy відрізки, що відповідно становлять 3 і -4;

2) яка проходить через точку $(3; 1)$ і відтинає на осях Ox та Oy відрізки однакової довжини;

3) яка проходить через точку $(1; 2)$ й відтинає на осях Ox та Oy відрізки, відношення відповідних довжин яких дорівнює $1/3$.

505. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(-6; 8)$ та відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 12 кв. од.

506. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $(2; 2)$ та відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 1 кв. од.

507. Знайти відстань d між паралельними прямими:

1) $x - 2y + 4 = 0$, $2x - 4y + 5 = 0$;

2) $2x - 3y - 1 = 0$, $-6x + 9y - 5 = 0$.

508. Через точку $(-2; 2)$ провести прямі, відстань до кожної з яких від точки $(2; 5)$ дорівнює 3.

509. Через точку $(-1; 2)$ провести прямі, відстань до кожної з яких від точки $(6; 1)$ дорівнює 5.

510. Точки $A(1; 2)$, $B(-1; -1)$, $C(2; 1)$ — вершини трикутника. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника при вершині B.

511. Дані вершини трикутника $A(1; -1)$, $B(-2; 1)$, $C(3; 5)$. Знайти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B.

512. Дано вершини трикутника $M_1(-10; 2)$ й $M_2(6; 4)$. Його висоти перетинаються в точці $N(5; 2)$. Визначити координати третьої вершини M_3.

513. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $A(2; -4)$ і рівняння бісектрис двох його кутів $x + y - 2 = 0$ та $x - 3y - 6 = 0$.

514. Знаючи рівняння $3x - 2y + 6 = 0$ однієї зі сторін кута та рівняння його бісектриси $x - 3y + 5 = 0$, скласти рівняння другої сторони кута.

515. Рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $2x - y + 8 = 0$, $x - 2y - 12 = 0$. Точка $(4; 0)$ лежить на основі. Знайти рівняння основи.

516. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна з його вершин $(-2; -2)$ і рівняння трьох медіан: $y = x$, $x = 2$ і $x + 2y - 6 = 0$.

517. Знайти рівняння сторін трикутника, якщо $A(3; -1)$ і $B(7; 3)$ його вершини, а $M(4; 2)$ — точка перетину його висот.

518. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну його вершину $A(2; 1)$, рівняння висот BM і CM: $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$, де M — точка перетину висот.

519. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1; 3)$ так, що середина її відрізка, який міститься між паралельними прямими $x + 2y + 5 = 0$ та $x + 2y + 1 = 0$, лежить на прямій $x - y - 5 = 0$.

520. Дано рівняння двох сторін трикутника: $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$. Його медіани перетинаються в точці $(2; 2)$. Знайти рівняння третьої сторони трикутника.

521. Вершинами трикутника ABC є точки $A(2; -2)$ та $B(3; -1)$. Його медіани перетинаються в точці $O(1; 0)$. Знайти рівняння висоти трикутника, яка проходить через вершину C.

522. Знайти рівняння сторін трикутника ABC, якщо відомі рівняння двох бісектрис $x+2y-13=0$, $x-y-5=0$ і координати точки $A(7;8)$.

523. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;-1;3)$ й має нормальний вектор $\vec{n}=(5;0;4)$.

524. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;-3;7)$ паралельно площині $2x-6y-3z+5=0$.

У задачах 525 і 526 знайти рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

525. $M_0(2;2;-2)$, $\vec{a}=(-2;2;-1)$, $\vec{b}=(1;2;3)$.

526. $M_0(1;2;-5)$, $\vec{a}=(1;-3;-1)$, $\vec{b}=(2;2;1)$.

527. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;1;1)$ і $M_2(-1;1;-1)$ паралельно прямій, визначеній точками $A(5;-2;3)$ та $B(6;1;0)$.

528. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ та $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=(3;-1;-4)$.

У задачах 529 і 530 написати рівняння площини, яка проходить через три точки:

529. $M_1(1;2;3)$, $M_2(1;-1;4)$, $M_3(-1;0;-2)$.

530. $M_1(3;-1;2)$, $M_2(4;-1;1)$, $M_3(2;0;2)$.

531. Знайти рівняння граней тетраедра з вершинами в точках $(1;1;1)$, $(-1;1;1)$, $(1;-1;1)$, $(1;1;-1)$.

532. Знайти рівняння висоти піраміди $ABCD$, опущеної з вершини D на грань ABC, якщо $D(1;4;-2)$, $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

533. Написати рівняння площини:

1) яка проходить через початок координат перпендикулярно до площин $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$;

2) яка проходить через точку $M(1;1;-2)$ перпендикулярно до площин $2x+3z=0$, $x-y+z-1=0$;

3) яка проходить через точку $(1;-1;1)$ перпендикулярно до площин $x-y+z-1=0$, $2x+y+z+1=0$.

534. Через точки $A(1;1;1)$ і $B(2;2;2)$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+y-z=0$.

535. Дано точку $A(1;2;3)$, написати рівняння площин:

1) що проходить через точку A паралельно координатним площинам;

2) що проходять через точку A та через осі координат.

536. Дано дві точки $A(3;2;-1)$ й $B(2;-3;1)$. Знайти рівняння площин, які проходять через точки A і B паралельно координатним осям.

537. Знайти точки перетину площини $x-2y+4z-8=0$ з осями координат.

538. Площина проходить через точку $M_1(6;-10;1)$ і відтинає на осі абсцис відрізок $a=-3$ і на осі аплікат відрізок $c=2$. Знайти рівняння цієї площини.

539. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1;2;-1)$ і $M_2(-3;2;1)$ і відтинає на осі ординат відрізок $b=3$.

540. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $A(-1;2;3)$ й відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

541. Знайти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-1;4;-1)$, $M_2(-13;2;-10)$ і відтинає на осях абсцис та аплікат відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

542. Обчислити об'єм тетраедра, утвореного координатними площинами і площиною, яка проходить через точку $(3;5;-7)$ та відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.

543. Знайти рівняння площини, перпендикулярної до площини $2x-2y+4z-5=0$, яка відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=-2$, $b=2/3$.

544. Знайти рівняння площини, яка паралельна вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$ і відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=3$, $b=-2$.

545. Знайти відстань точки $A(2;3;1)$ від площини $x-2y+z+5=0$.

У задачах 546 і 547 знайти відстань між паралельними площинами:

546. $x-2y+z-1=0$, $2x-4y+2z-1=0$.

547. $2x-y+2z+9=0$, $4x-2y+4z-21=0$.

548. Знайти висоту піраміди $SABC$, опущену з вершини S на грань ABC, якщо $S(1;4;-2)$, $A(0;-1;1)$, $B(3;5;1)$, $C(1;-3;-1)$.

549. Знайти площину, рівновіддалену від площин $2x-3y+$ $+z+5=0$ та $2x-3y+z-7=0$.

550. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин $12x+9y-20z-19=0$ та $16x-12y+15z-9=0$.

551. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $M(1;-2;0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

У задачах 552–554 знайти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути, утворені двома площинами, що перетинаються.

552. $x-2y+4z-3=0$, $2x+4y-z+5=0$.

553. $2x+7y+z-1=0$, $5x-5y+2z+1=0$.

554. $2x-y+3z+5=0$, $x+3y-2z+7=0$.

555. Знайти площину, яка в 2 рази більше віддалена від площини $x+y-z+1=0$, ніж від площини $x+y-z-1=0$, і не розташована між ними.

556. Знайти площину, розташовану між площинами $x-2y+z-2=0$ та $x-2y+z-6=0$, таку, що ділить відстань між ними у відношенні 1:3.

557. Знайти рівняння прямої:

1) яка проходить через дві точки $M_1(2;-3;1/2)$, $M_2(3;5;3/2)$;

2) яка проходить через точку $M_0(2;1;-3)$ паралельно вектору $\bar{a}=(1;-3;1)$;

3) яка проходить через точку $M_1(-3;4;-5)$ паралельно:

а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz.

558. Написати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(0;7;-2)$ паралельно:

1) вектору $\bar{a}=(3;-2;4)$;

2) прямій $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{0}$;

3) прямій $x=3t-2$; $y=2t+1$; $z=-3t+3$.

559. Через точку $A(3;-4;2)$ провести пряму, перпендикулярну до площини $x-2y+3z-7=0$.

560. Через точку $A(2;1;1)$ провести пряму, паралельну площинам $x+y-z+1=0$ і $3x-y-5=0$.

561. Через точку $(-1;2;1)$ провести пряму, паралельну прямій $\begin{cases}x+y-2z-1=0,\\x+2y-z+1=0.\end{cases}$

562. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(5;-1;-3)$ паралельно прямій $\begin{cases}2x+3y+z-6=0,\\4x-5y-z+2=0.\end{cases}$

У задачах 563–565 написати канонічні та параметричні рівняння прямих, які проходять через дві дані точки M_1 і M_2.

563. $M_1(2;-1;-1)$ і $M_2(3;3;-1)$.

564. $M_1(1;-3;1)$ і $M_2(2;4;2)$.

565. $M_1(0;2;1)$ і $M_2(2;0;0)$.

566. Дано вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ і $C(4;-7;-2)$. Написати параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

567. Дано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ і $C(-5;14;-3)$. Написати канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

568. Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$ і $C(-7;11;6)$. Написати канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

569. Дано вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Написати параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

У задачах 570 і 571 довести паралельність прямих:

570. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ і $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z-8=0.\end{cases}$

571. $\begin{cases}x+y-3z+1=0,\\x-y+z+3=0\end{cases}$ і $\begin{cases}x+2y-5z-1=0,\\x-2y+3z-9=0.\end{cases}$

У задачах 572–574 знайти кут між прямими:

572. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ і $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-3}$.

573. $\begin{cases}x+2y+z-1=0,\\x-2y+z+1=0\end{cases}$ і $\begin{cases}x-y-z-1=0,\\x-y+2z+1=0.\end{cases}$

574. $\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} y+z=0, \\ y-z+2=0. \end{cases}$

У задачах 575–577 написати канонічні рівняння прямих:

575. $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$

576. $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0. \end{cases}$

577. $\begin{cases} x-2y+3z+1=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

У задачах 578 і 579 написати параметричні рівняння прямих:

578. $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0, \\ 3x-5y+2z+1=0. \end{cases}$

579. $\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$

580. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(-1;2;-3)$ перпендикулярно до вектора $\bar{a}=(6;-2;-3)$ і перетинає пряму $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}$.

581. Через точку $M(2;1;1)$ провести пряму, паралельну площинам $x-y+z+2=0$, $x+y+2z-1=0$.

582. Через точку $M(2;2;1)$ провести площину, перпендикулярну до прямої $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

583. Через точку $M(1;1;2)$ провести площину, паралельну прямим $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ і $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$.

584. Через точку $M(1;2;1)$ провести площину, паралельну прямим $\begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-y+z=0. \end{cases}$

585. Провести площину через пряму $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ і точку $M(2;1;1)$.

586. Через пряму $\begin{cases} x-1=0, \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ провести площину, перпендикулярну до площини $x+y+z=0$.

587. Знайти рівняння й довжину висоти трикутника, який відтинається на площині $3x-y+4z-12=0$ координатними площинами; висота, опущена з вершини, що лежить на осі Oz.

У задачах 588 і 589 знайти точку перетину прямої та площини:

588. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{2}$, $x+y-z+1=0$.

589. $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$.

590. Знайти проекцію точки $(2;1;1)$ на площину $x+y+$ $+3z+5=0$.

591. Знайти проекцію точки $(2;3;1)$ на пряму $x=t-7$, $y=2t-2$, $z=3t-2$.

592. Знайти точку N, симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

593. Знайти точку, симетричну точці $(4;1;6)$ відносно прямої $\begin{cases} x-y-4z+12=0, \\ 2x+y-2z+3=0. \end{cases}$

594. Знайти точку, симетричну точці $(2;-5;7)$ відносно прямої, яка проходить через точки $(5;4;6)$ і $(-2;-17;-8)$.

595. Знайти точку, симетричну точці $(1;3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

596. Знайти точку N, симетричну точці $M(1;2;3)$ відносно площини $x+y+2z-6=0$.

597. Знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих $\begin{cases} x+4z+1=0, \\ x-4y+9=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} y=0, \\ x+2z+4=0. \end{cases}$

598. Обчислити відстань від точки $M(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

У задачах 599 і 600 знайти відстань між прямими:

599. $\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ 2x+y-z-2=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y-z-2=0, \\ x+2y+2z+4=0. \end{cases}$

600. $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0, \end{cases}$ і $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$.

601. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 2; -3)$ паралельно прямим $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-7}{3}$, $\dfrac{x+5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{-1}$.

602. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 2t - 1$, $y = 3t$, $z = t + 4$ і точку $M(3; -1; 0)$.

603. Довести, що прямі $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ і $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежать в одній площині. Знайти рівняння цієї площини.

604. Знайти рівняння площини, що проходить через пряму $x = 3t + 1$, $y = 2t + 3$, $z = -t - 2$ паралельно прямій $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 5 = 0. \end{cases}$

У задачах 605 і 606 знайти найкоротшу відстань між двома прямими:

605. $\dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$, $\quad \dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$.

606. $x = 2t - 4$, $y = -t + 4$, $z = -2t - 1$; $x = 4t - 5$, $y = -3t + 5$, $z = -5t + 5$.

607. Знайти проекцію точки $A(1; 1; 1; 1; 1)$ п'ятивимірного евклідового простору на гіперплощину $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1$.

608. Знайти проекцію точки $B(0; 1; 2; 3)$ чотиривимірного евклідового простору на гіперплощину $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 41$.

609. Знайти відстань від точки $B(1; 2; 0; 3)$ чотиривимірного евклідового простору до гіперплощини $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 7$.

610. Знайти відстань від точки $A(1; 1; 1; 1; 1)$ п'ятивимірного евклідового простору до гіперплощини $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2$.

611. Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами чотиривимірного евклідового простору $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ і $3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2 = 0$.

612. Обчислити відстань між двома паралельними гіперплощинами п'ятивимірного евклідового простору $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + 2 = 0$ і $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 6 = 0$.

613. Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку $M(2; -3; 7; 4)$ паралельно гіперплощині $2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - 1 = 0$.

614. Знайти рівняння гіперплощини, яка проходить через точку $M(1; 2; 0; -2; 3)$ паралельно гіперплощині $3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 + 3 = 0$.

У задачах 615 і 616 знайти рівняння гіперплощин, які рівновіддалені від двох даних гіперплощин.

615. $x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + x_5 - 4 = 0$, $4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 + 1 = 0$.

616. $3x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 - 1 = 0$, $x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 - 7 = 0$.

617. Знайти рівняння гіперплощини, віддаленої від даної гіперплощини $x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 2 = 0$ на відстань $3 - x$ одиниць.

У задачах 618 і 619 знайти кут між гіперплощинами:

618. $x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5 = 0$, $\quad 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 = 0$.

619. $3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 + 7 = 0$, $\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 1 = 0$.

620. Знайти рівняння проекції прямої $\dfrac{x_1-2}{3} = \dfrac{x_2-3}{1} = \dfrac{x_3-1}{2} = \dfrac{x_4+2}{-1}$ на гіперплощину $2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 4 = 0$.

621. Знайти рівняння проекції прямої $\dfrac{x_1-1}{2} = \dfrac{x_2+3}{-1} = \dfrac{x_3+2}{5} = \dfrac{x_4}{7} = \dfrac{x_5-5}{4}$ на гіперплощину $3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + 18 = 0$.

5.2. ГЕОМЕТРИЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

і нехай $\mathcal{A}$ — основна матриця, а $\mathcal{B}$ — розширена матриця системи.

ТЕОРЕМА 5.3. Якщо $r(\mathcal{A}) \neq r(\mathcal{B})$, то в E_n немає точок, координати яких задовольняють систему (система несумісна).

Якщо $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B}) = n$, в просторі E_n знайдеться тільки одна точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, координати якої є розв'язком системи (система має єдиний розв'язок).

Якщо $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B}) = k$ $(1 \le k < n)$, то множина точок, координати яких задовольняють систему, є $(n-k)$-вимірною площиною P_{n-k} простору E_n (система має безліч розв'язків, причому число вільних невідомих дорівнює $n-k$).

ТЕОРЕМА 5.4. Якщо система однорідна, тобто $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, і 1) $r(\mathcal{A}) = n$, то систему задовольняють тільки координати точки O (0, 0, ..., 0) (нульовий розв'язок);

2) $r(\mathcal{A}) = k$ $(1 \le k < n)$, то множина точок, координати яких задовольняють систему, є $(n-k)$-вимірною площиною P_{n-k} простору E_n, що проходить через початок координат $O(0, 0, \ldots, 0)$.

Наслідок 5.1. Якщо $m = n$, то однорідна система при $|\mathcal{A}| \neq 0$ має єдиний нульовий розв'язок, а при $|\mathcal{A}| = 0$ — безліч розв'язків.

Наслідок 5.2. Однорідна система при $m = n$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли $|\mathcal{A}| = 0$.

Зауваження 5.2. Якщо $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B}) = k$ $(1 \le k < n)$, то розмірність площини P_{n-k} — площини розв'язків системи, дорівнює числу $n-k$ вільних невідомих.

Задача. Визначити розмірність площини п'ятивимірного евклідового простору:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислюючи ранги основної матриці

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

і розширеної матриці

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

дістанемо $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{B}) = 2$. Число базисних невідомих системи дорівнює 2, вільних: $5 - 2 = 3$.

Отже, множина точок, координати яких задовольняють систему, є тривимірною площиною простору E_5.

Задачі для розв'язування

У задачах 622–626 знайти розмірність площин п'ятивимірного евклідового простору:

622. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - x_2 - 8x_3 + 5x_4 + x_5 = 7. \end{cases}$

623. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 4. \end{cases}$

624. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 10, \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -15. \end{cases}$

625. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

626. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

У задачах 627–631 знайти розмірність площин чотиривимірного евклідового простору:

627. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

628. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 11x_2 + 17x_3 + 8x_4 = 0. \end{cases}$

629. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 10x_4 = 0. \end{cases}$

630. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0, \\ 7x_1 - 7x_2 - 17x_4 = 0. \end{cases}$

631. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

6 ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

6.1. ОЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай L і M лінійні простори.

Означення 6.1. *Лінійним оператором* A, що діє із L в M, називається *відповідність* між векторами цих просторів, яка кожному вектору $\bar{x} \in L$ ставить у відповідність цілком певний вектор $\bar{y} \in M$, що називається *образом вектора* $\bar{x}$ і позначається символом $\bar{y} = A(\bar{x})$, причому для будь-яких елементів $\bar{x}_1$ і $\bar{x}_2$ простору L і будь-якого дійсного числа λ виконуються співвідношення:

1. $A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A(\bar{x}_1) + A(\bar{x}_2)$. 2. $A(\lambda \bar{x}) = \lambda A(\bar{x})$.

Зауваження 6.1. Якщо простір L збігається з простором M, то лінійний оператор, що діє в цьому випадку з L в L, називається також *лінійним перетворенням простору* L.

Зауваження 6.2. Лінійний оператор A, що діє із L_n в L_1, називається *лінійним функціоналом*.

Приклад 1. Оператор, який ставить у відповідність кожному вектору $\bar{x} \in L$ сам цей вектор, є лінійним. Він називається *тотожним* і позначається буквою E, так що $E(\bar{x}) = \bar{x}$.

Приклад 2. Оператор, який ставить у відповідність кожному вектору $\bar{x} \in L$ вектор $\lambda \bar{x}$, $\lambda \in R$ є лінійним.

Геометрично лінійний оператор $A(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$ в E_n (або в E^n) при $\lambda > 0$ є однорідний розтяг (стиск) усіх векторів простору з однаковим коефіцієнтом розтягу (стиску). При $\lambda < 0$ розтяг (стиск) усіх векторів простору супроводиться симетричним відображенням їх відносно початку координат.

Задача. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ — базис простору E_2 і $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ — довільний вектор цього простору. Переконатися, що перетворення простору $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1 + \alpha x_2\bar{e}_2$ є лінійним ($\alpha \in R$).

Розв'язання. Для доведення лінійності перетворення слід переконатися у виконанні умов:

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = A(\bar{x}) + A(\bar{y}),$$

$$A(\lambda \bar{x})=\lambda A(\bar{x}),$$

для даного перетворення.

Нехай розклад довільного вектора $\bar{y} \in E_2$ у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ має вигляд $\bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2$, тоді

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + (x_2 + y_2)\bar{e}_2 \ \text{ і } \ \lambda\,\bar{x} = \lambda\, x_1\bar{e}_1 + \lambda\, x_2\bar{e}_2 .$$

Отже,

$$A(\bar{x} + \bar{y}) = (x_1 + y_1)\bar{e}_1 + \alpha\,(x_2 + y_2)\bar{e}_2 = (x_1\bar{e}_1 + \alpha\, x_2\bar{e}_2) +$$
$$+ (y_1\bar{e}_1 + \alpha\, y_2\bar{e}_2) = A(\bar{x}) + A(\bar{y}),$$
$$A(\lambda\,\bar{x}) = \lambda\, x_1\bar{e}_1 + \alpha\,\lambda\, x_2\bar{e}_2 = \lambda\,(x_1\bar{e}_1 + \alpha\, x_2\bar{e}_2) = \lambda\, A(\bar{x}).$$

Геометричне перетворення A є розтяг (стиск) простору E_2 в напрямі вектора $\bar{e}_2$ (рис. 6.1).

Задачі для розв'язування

632. Нехай $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ — базис простору E_2 і $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$ — довільний вектор цього простору. Установити, чи є лінійними такі перетворення простору E_2:

1. $\bar{u} = A(\bar{x}) = \alpha_1 x_1\bar{e}_1 + \alpha_2 x_2\bar{e}_2$; 2. $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1^2\bar{e}_1$;

3. $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_1 + 3x_2)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$; 4. $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1 - 2x_2\bar{e}_2$;

5. $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1$; 6. $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1 + x_1\bar{e}_2$.

Вияснити геометричний зміст цих перетворень.

633. Які із таких перетворень простору E_3 є лінійними?

а) $A(\bar{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;

б) $A(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, (x_3)^2)$,

де через x_1, x_2, x_3 позначені координати довільного вектора $\bar{x}$ у деякому базисі.

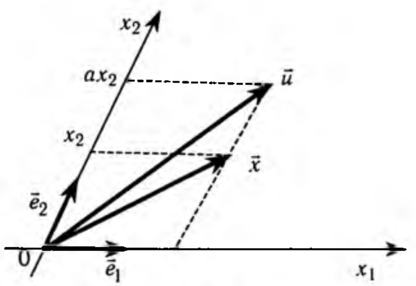

Рис. 6.1.

634. Довести, що операція диференціювання є лінійним оператором простору P_n многочленів степеня не вище n.

635. Довести, що операція проектування в просторі E_3 на площину xOy є лінійним оператором.

636. Довести лінійність таких операторів, визначених в просторі $C[a,b]$ для усіх неперервних на $[a,b]$ функцій:

а) $g(t)=A(f(t))=t\cdot f(t)$; б) $g(t)=A(f(t))=f(t)\cdot\varphi(t)$,

де $\varphi(t)$ фіксована функція неперервна на $[a,b]$.

6.2. МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай A — лінійний оператор, що діє із L^n в L^m, і $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ і $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_m$ — фіксовані базиси просторів L^n і L^m відповідно.

Якщо розклад вектора $A(\bar{p}_i)$ у базисі $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_m$ має вигляд

$$A(\bar{p}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\bar{q}_j\,,\ (i=1,2,\ldots,n)$$

або в розгорнутому вигляді:

$$A(\bar{p}_1) = a_{11}\bar{q}_1 + a_{21}\bar{q}_2 + \ldots + a_{m1}\bar{q}_m = (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

$$A(\bar{p}_2) = a_{12}\bar{q}_1 + a_{22}\bar{q}_2 + \ldots + a_{m2}\bar{q}_m = (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m)\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},$$

....

$$A(\bar{p}_n) = a_{1n}\bar{q}_1 + a_{2n}\bar{q}_2 + \ldots + a_{mn}\bar{q}_m = (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_m)\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

то матриця

$$\mathcal{A}_{qp} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

утворена із коефіцієнтів цього розкладу, називається *матрицею оператора* A у парі базисів $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ і $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_m$.

Говорять, що матриця $\mathcal{A}_{qp}$ задає оператор A у цій парі базисів.

Оскільки кожний вектор $\vec{x} \in L^n$ є матрицею-стовпцем $\mathcal{X}$ висоти n, утвореною із координат цього вектора в базисі $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$, а кожний вектор $\vec{y} \in L^m$ є матрицею-стовпцем $\mathcal{Y}$ висоти m, утвореною з координат цього вектора в базисі $\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_m$, то зв'язок між координатами векторів $\vec{x}$ і $\vec{y} = A(\vec{x})$ можна записати матричними співвідношеннями:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A}_{qp}\mathcal{X}, \text{ тобто } y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Якщо оператор A діє із L^n в L^n, то досить зафіксувати один базис $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n$. При цьому вектори $A(\vec{p}_i)$ потрібно розкласти в цьому базисі.

Якщо розкладання в даному базисі має вигляд

$$A(\vec{p}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \vec{p}_j, \ (i=1,2,\ldots,n),$$

то матриця оператора A запишеться так:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зв'язок між координатами векторів $\vec{x}$ і $\vec{y} = A(\vec{x})$ запишеться матричним співвідношенням

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A}\mathcal{X},$$

звідки випливає, що координати вектора $\vec{y}$ виражаються через координати вектора $\vec{x}$ за формулою

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i=1,2,\ldots,n).$$

Приклад 1. Нехай $\vec{y} = E(\vec{x}) = \vec{x}$. У будь-якому базисі матриця тотожного перетворення має вигляд

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Нехай $\vec{y} = N(\vec{x}) = \vec{0}$. У будь-якому базисі матриця нульового перетворення має вигляд

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Нехай $\vec{y} = A(\vec{x}) = \lambda\,\vec{x}$. Матриця подібного перетворення в будь-якому базисі має вигляд

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Знайти матрицю лінійного оператора

$$\vec{y} = A(\vec{x}) = 2x_1\vec{e}_1 + (5x_1 - 3x_2)\vec{e}_2 - (6x_2 - x_3)\vec{e}_3.$$

Розв'язання. Вектор $\vec{y} = 2x_1\vec{e}_1 + (5x_1 - 3x_2)\vec{e}_2 - (6x_2 - x_3)\vec{e}_3$. Тому

$$y_1 = 2x_1,$$
$$y_2 = 5x_1 - 3x_2,$$
$$y_3 = -6x_2 + x_3$$

і матриця оператора має вигляд

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

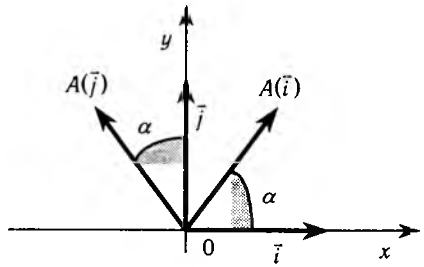

Рис. 6.2

Задача 2. Оператор A повертає усі вектори площини xOy навколо початку координат на кут α проти годинникової стрілки. Знайти його матрицю в базисі $\vec{i}, \vec{j}$.

Розв'язання. Розглянемо дію оператора A на базисні вектори (рис. 6.2):

$$A(\vec{i}) = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j} = (\vec{i}\ \vec{j})\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

$$A(\vec{j}) = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} = (\vec{i}\ \vec{j})\begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Звідси,

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

637. Знайти в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ матриці таких лінійних операторів простору L_2:

1) $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1 + x_1\bar{e}_2$,
2) $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_2\bar{e}_2$,
3) $\bar{u} = A(\bar{x}) = x_1\bar{e}_1 + (x_1 + 2x_2)\bar{e}_2$,
4) $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_1 - 4x_2)\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2$.

638. Знайти в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ матриці таких лінійних операторів простору L_3:

1) $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_1, x_2, 0)$;
2) $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_3, x_2, x_1)$;
3) $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; 2x_1 + 3x_2 - x_3; x_1 + 3x_2 + 2x_3)$;
4) $\bar{u} = A(\bar{x}) = (x_1 - x_2 + x_3; -x_3; -x_2)$.

639. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут — $\pi/2$ навколо початку координат. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}$.

640. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут α за годинниковою стрілкою. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}$.

641. Оператор A повертає усі вектори площини xOy на кут $\pi/6$ навколо початку координат. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}$.

642. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму $y = \sqrt{3}x$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}$.

643. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму $y = 1/\sqrt{3}x$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}$.

644. Нехай A — поворот звичайного тривимірного простору на кут φ навколо осі:

1) Oz; 2) Oy; 3) Ox.

Знайти матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

645. Оператор A ортогонально проектує усі вектори звичайного тривимірного простору на площину:

1) xOy; 2) xOz; 3) yOz.

Записати матрицю цього оператора в базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

646. У просторі P_n многочленів від t степеня не вище n знайти матрицю оператора диференціювання в базисі $\bar{e}_0 = 1$, $\bar{e}_1 = t$, $\bar{e}_2 = \frac{t^2}{2!}, \ldots, \bar{e}_n = \frac{t^n}{n!}$.

647. Який геометричний зміст мають лінійні оператори простору E_3, матриці яких відносно деякого прямокутного базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ мають такий вигляд

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

648. Знайти матрицю $\mathcal{A}$ лінійного оператора, що переводить лінійно незалежні вектори

$$\bar{a}_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}),$$
$$\ldots$$
$$\bar{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$$

простору L_n відповідно у вектори

$$\bar{b}_1 = (b_{11}, \ldots, b_{1n}),$$
$$\ldots$$
$$\bar{b}_n = (b_{n1}, \ldots, b_{nn}).$$

649. Знайти лінійний оператор, що переводить вектори

$$\bar{a}_1 = (2; 3; 5; 0), \bar{a}_2 = (0; 1; 2; 0), \bar{a}_3 = (1; 0; 0; 0), \bar{a}_4 = (0; 0; 0; 1)$$

відповідно у вектори

$$\bar{b}_1 = (1; 1; 1; 0), \bar{b}_2 = (1; 1; -1; 0), \bar{b}_3 = (2; 1; 2; 0), \bar{b}_4 = (0; 0; 0; 2).$$

6.3. ДІЇ НАД ЛІНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Нехай A і B — два лінійних оператори, що діють із лінійного простору L' у лінійний простір L''.

Означення 6.2. *Сумою операторів* A і B називається лінійний оператор $A+B$, що визначається рівністю

$$(A + B)(\bar{x}) = A(\bar{x}) + B(\bar{x}).$$

Означення 6.3. *Добутком лінійного оператора A* на скаляр λ називається лінійний оператор λA, що визначається рівністю

$$(\lambda A)(\bar{x}) = \lambda (A(\bar{x})).$$

Означення 6.4. Оператор $-A = (-1)A$ називається протилежним оператору A.

Означення 6.5. Нульовим оператором, що позначається символом O, називається оператор, що відображає усі елементи простору L' у нульовий елемент простору L''.

Оператор O діє за правилом $O(\bar{x}) = \bar{0}$.

ТЕОРЕМА 6.1. Множина $L(L', L'')$ усіх лінійних операторів, що діють із L' в L'' з операціями суми і множення на скаляр, нульовим оператором і протилежним оператором, означеними вище, утворює лінійний простір.

ТЕОРЕМА 6.2. Якщо в деякому базисі $\{\bar{p}_i\}$ простору L^n і в базисі $\{\bar{q}_j\}$ простору L^m оператору A відповідає матриця $\mathcal{A}$, а оператору B — матриця $\mathcal{B}$, то сумі операторів $A + B$ в цих базисах відповідає матриця $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

ТЕОРЕМА 6.3. Якщо $\mathcal{A}$ — матриця оператора A в базисі $\{\bar{p}_i\}$ простору L^n і базисі $\{\bar{q}_j\}$ простору L^m, то $\lambda\mathcal{A}$ — матриця оператора λA в цих базисах.

Означення 6.6. *Добутком операторів A* і B, що діють із L в L, називається лінійний оператор AB, який діє за правилом $(AB)(\bar{x}) = A(B(\bar{x}))$, тобто спочатку на вектор $\bar{x}$ діє оператор B, а потім на вектор $B(\bar{x})$ — оператор A.

ТЕОРЕМА 6.4. Оператору AB відповідає добуток відповідних матриць $\mathcal{AB}$.

Для оператора A, що діє із L в L, можна визначити натуральний степінь A^n як добуток n операторів, рівних A.

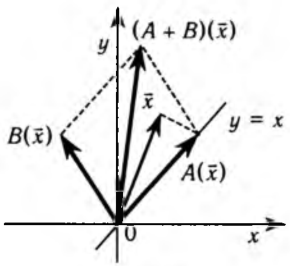

Рис. 6.3

Задача. Оператор A проектує усі вектори площини на пряму $x=y$, а оператор B повертає їх навколо початку координат O на кут $\pi/4$. Як діє на вектор $\bar{x}$ оператор $A + B$? Знайти матрицю цього оператора.

Розв'язання. На рис. 6.3 показано, як за даним вектором $\bar{x}$ побудувати вектор $(A+B)(\bar{x})$.

Для того щоб розв'язати задачу аналітично, запишемо матрицю $\mathcal{A}$ оператора проектування векторів площини на пряму $y = x$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \text{ оскільки } \begin{matrix} A(\bar{i}) = 1/2\bar{i} + 1/2\bar{j}, \\ A(\bar{j}) = 1/2\bar{i} + 1/2\bar{j} \end{matrix}$$

і матрицю $\mathcal{B}$ оператора повороту усіх векторів площини xOy навколо початку координат на кут $\pi/4$:

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \text{ оскільки } \begin{matrix} B(\bar{i}) = \sqrt{2}/2\bar{i} + \sqrt{2}/2\bar{j}, \\ B(\bar{j}) = -\sqrt{2}/2\bar{i} + \sqrt{2}/2\bar{j}. \end{matrix}$$

Тоді матриця оператора $A+B$ матиме вигляд

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})/2 & (1-\sqrt{2})/2 \\ (1+\sqrt{2})/2 & (1+\sqrt{2})/2 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб знайти координати вектора $(A+B)(\bar{x})$, потрібно помножити матрицю $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ на вектор-стовпець $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, складений з координат вектора $\bar{x}$:

$$(A+B)(\bar{x}) = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})/2 & (1-\sqrt{2})/2 \\ (1+\sqrt{2})/2 & (1+\sqrt{2})/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}y\right)\bar{i} +$$

$$+ \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}y\right)\bar{j}.$$

Задачі для розв'язування

650. Дано два лінійних перетворення E^3:

$$\begin{matrix} x' = -x + 4y + 3z, & & x' = -2x + 6y + 4{,}5z, & \\ y' = 4x + 5y + z, & (A) \text{ і } & y' = 6x + 7y + 1{,}5z, & (B). \\ z' = 2x + 8y + 9z & & z' = 3x + 12y + 13z & \end{matrix}$$

Знайти $3A - 2B$.

651. Дано лінійні перетворення E^3:

$$\begin{matrix} x' = x + y, & & x' = y + z, & \\ y' = y + z, & (A) \text{ і } & y' = x + z, & (B). \\ z' = x + z & & z' = x + y & \end{matrix}$$

Знайти перетворення AB і BA.

652. Під дією оператора A кожний вектор площини xOy повертається на кут $\pi/3$. Знайти координатне зображення оператора $A + E$.

653. Оператор A кожний вектор площини xOy проектує на вісь Ox, а оператор B — відображає симетрично відносно бісектриси I та III координатних кутів. Знайти матриці операторів AB і BA.

654. Нехай A — оператор повороту площини xOy навколо початку координат O на кут $\pi/6$, а B — оператор проектування векторів на вісь Ox. Як діють оператори AB, BA, $A + B$? Накреслити рисунок. Знайти матриці цих операторів.

655. Оператор A відображає усі вектори площини xOy симетрично відносно осі Oy і розтягує їх у 2 рази. Накреслити рисунок. Записати матрицю цього оператора. Знайти $A\bar{x}$, де $\bar{x} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$.

656. Оператор A проектує усі вектори площини xOy на пряму $y = -x$, а оператор B повертає їх навколо початку координат O на кут $\pi/6$. Як діють на вектор $\bar{x}$ оператори $A + B$, $2A$, $2B$, $2A - B$? Виконати рисунок. Знайти матриці цих операторів.

657. Показати, що матриця $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ визначає лінійний оператор, який повертає усі вектори площини xOy на кут $\pi/2$ і множить їх на число a.

658. У просторі всіх многочленів від t позначимо через A оператор диференціювання, а через B — оператор множення на незалежну змінну $A(p(t)) = p'(t)$, $B(p(t)) = tp(t)$. Знайти оператор $AB - BA$.

659. Під дією оператора A кожний вектор площини xOy повертається на кути α. Знайти матрицю оператора A^2.

660. Показати, що усякий оператор проектування задовольняє співвідношення $P^2 = P$.

6.4. ВЛАСНІ ЧИСЛА І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай A — лінійний оператор, що діє із L^n у L^n.

Означення 6.7. Число λ називається *власним числом*, або *власним значенням*, оператора A, якщо існує ненульовий вектор $\bar{x}$ такий, що $A(\bar{x})) = \lambda\bar{x}$.

При цьому вектор $\bar{x}$ називається *власним вектором* оператора A.

Надалі при розв'язуванні задач розглядатимуться лише дійсні власні числа оператора. Тоді власний вектор $\bar{x}$ характеризується тим, що даний оператор A ставить вектору $\bar{x}$ у відповідність вектор $\bar{y}$, колінеарний $\bar{x}$ (два вектори L^n називаються *колінеарними*, якщо їх координати пропорційні).

Приклад 1. Для тотожного оператора $E(\bar{x}) = \bar{x}$ будь-який вектор $\bar{x} \neq 0$ є власним, власне число якого дорівнює одиниці.

Приклад 2. Для оператора розтягу простору E_n з коефіцієнтом розтягу λ будь-який вектор $\bar{x} \neq 0$ буде власним з власним числом λ.

Приклад 3. Поворот площини E_2 на кут α, відмінний від 0 і 180°, дійсних власних векторів не має. Якщо ж $\alpha = 0°$ або 180°, то будь-який ненульовий вектор є власним. У першому випадку $\lambda = 1$, у другому $\lambda = -1$.

Означення 6.8. Якщо $\mathcal{A}$ матриця оператора A в довільному базисі, то рівняння $|\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}| = 0$ або в розгорнутому вигляді

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

називається *характеристичним рівнянням* оператора A.

Справедливі твердження.

Кожний корінь λ характеристичного рівняння є власним числом оператора A і навпаки.

Якщо λ — який-небудь із коренів характеристичного рівняння, то відповідний йому власний вектор $\bar{x}$ визначимо, розв'язавши матричне рівняння $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\bar{x} = 0$, або, що те саме, систему рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases}$$

де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — координати вектора $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$.

Означення 6.9. Якщо $\mathcal{A}$ — матриця оператора A у деякому базисі, то власні числа і вектори оператора A називаються ***власними числами*** і ***власними векторами*** матриці $\mathcal{A}$ у цьому базисі.

Задача. Знайти власні вектори і власні числа лінійного оператора, який у деякому базисі $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ простору L^3 має вигляд

$$y_1 = x_1,$$
$$y_2 = 6x_1 + 2x_2 - 3x_3,$$
$$y_3 = 2x_2 + 3x_3.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & -3 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) + 6(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1, \\ \lambda = \dfrac{5 \pm i\sqrt{23}}{2}. \end{array}\right.$$

Власний вектор, відповідний єдиному дійсному значенню $\lambda = 1$, знаходимо з системи

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ 6x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

з останнього рівняння системи дістаємо $x_2 = -x_3$, із другого рівняння маємо $6x_1 = 4x_3 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2}{3}x_3$.

Таким чином, власному значенню $\lambda = 1$ відповідають власні вектори $\vec x = \dfrac{2}{3}x_3\vec e_1 - x_3\vec e_2 + x_3\vec e_3$, де x_3 — довільне число, що не дорівнює нулю.

Задачі для розв'язування

661. Виходячи з геометричного змісту оператора, знайти власні вектори і власні числа таких лінійних операторів площини:

1) $\vec u = A(\vec x)$ — симетричне відображення відносно прямої a;

2) $\vec u = A(\vec x) = \lambda x_1\vec e_1 + x_2\vec e_2$ — геометричний розтяг площини в напрямі вектора $\vec e_1$;

3) $\vec u = A(\vec x) = x_1\vec e_1 + (x_2 + kx_1)\vec e_2$ — зсув площини в напрямі вектора $\vec e_2$.

У задачах 662 і 663 знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, який в ортонормованому базисі $\vec e_1, \vec e_2$ має вигляд:

662. $y_1 = 3x_1 + 4x_2,$
$y_2 = 5x_1 + 2x_2.$

663. $y_1 = x_1 + x_2,$
$y_2 = x_2.$

У задачах 664 і 665 знайти власні числа і власні вектори лінійного оператора, який в ортонормованому базисі $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ має вигляд:

664. $y_1 = 4x_1 - 5x_2 + 7x_3,$
$y_2 = x_1 - 4x_2 + 9x_3,$
$y_3 = -4x_1 + 5x_3.$

665. $y_1 = 2x_1 - x_2 - x_3,$
$y_2 = x_1 + 2x_2 + x_3,$
$y_3 = -2x_1 + x_2 + 2x_3.$

У задачах 666–675 знайти власні вектори і власні значення лінійних операторів площини L^2 і простору L^3, яким у деякому базисі відповідають матриці:

666. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. **667.** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. **668.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **669.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

670. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. **671.** $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **672.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

673. $\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}$. **674.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **675.** $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

676. Знайти власні значення і власні вектори оператора A, під дією якого кожний вектор площини xOy повертається на кут α проти годинникової стрілки.

677. Знайти власні значення і власні вектори лінійного оператора, заданого в деякому базисі $\vec a_1, \vec a_2, \vec a_3, \vec a_4$ простору L^4 матрицею

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

678. Знайти матрицю лінійного оператора, власними значеннями якого є числа 2, − 3, 5, −1, а відповідні їм власні вектори (1; 1; 1; 0), (2; 2; 1; 0), (1; 0; −1; 0), (0; 0; 0; 1).

6.5. ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦІ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДІ ДО НОВОГО БАЗИСУ

Нехай у n-вимірному лінійному просторі L^n зафіксовано два базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ і матриця

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

є матрицею переходу від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ (див. п.2.2.3).

Якщо $\mathcal{A}$ і $\dot{\mathcal{A}}$ матриці оператора A відповідно у базисах $\{\vec{e}_k\}$ і $\{\dot{\vec{e}}_k\}$, то зв'язок між цими матрицями виражається такою рівністю

$$\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{C}.$$

Якщо $\{\vec{e}_k\}$ і $\{\dot{\vec{e}}_k\}$ — ортонормовані базиси E^n, то матриця $\mathcal{C}$ — ортогональна. Тоді $\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^{\mathrm{T}} \mathcal{A} \mathcal{C}$.

Задача. Дано координатне зображення деякого лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $u_1 = x_1 - x_2$, $u_2 = 2x_1 + x_2$.

Знайти координатне зображення того самого оператора в базисі $\dot{\vec{e}}_1$, $\dot{\vec{e}}_2$, де

$$\dot{\vec{e}}_1 = 2\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2,$$
$$\dot{\vec{e}}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2.$$

Розв'язання. Маємо

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|C| = 1 \neq 0$, то $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ — дійсно утворюють базис і існує

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

За формулою

$$\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^{-1} \mathcal{A} \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -11 \\ 33 & 20 \end{pmatrix}.$$

Отже, даний лінійний оператор в новому базисі має координатне зображення:

$$\dot{u}_1 = -18\dot{x}_1 - 11\dot{x}_2,$$
$$\dot{u}_2 = 33\dot{x}_1 + 20\dot{x}_2.$$

Задачі для розв'язування

679. В базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ лінійний оператор A має матрицю $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$.

680. Дано координатне зображення деякого лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$: $u_1 = x_1 + 2x_2$, $u_2 = 3x_1 + 4x_2$. Знайти координатне зображення того самого оператора в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$, де

1) $\vec{e}_1' = 11\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$. 2) $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

681. Дано координатне зображення лінійного оператора в базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$: $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_1 + x_3$, $u_3 = x_2 + x_3$.

Знайти координатне зображення цього оператора в базисі:

1) $\vec{e}_1' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$;

2) $\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{e}_3' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

682. Оператор A на площині xOy проектує усі вектори на вісь Oy і потім симетрично відображає їх відносно прямої $y=x$. Записати його матрицю в базисах $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{e}_1' = 5\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{e}_2' = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

683. Оператор A на площині xOy симетрично відображає усі вектори відносно осі Oy. Записати його матриці в базисах $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{e}_1' = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{e}_2' = \vec{i} - \vec{j}$.

684. В базисі 1, t, t^2 простору P_2 оператор A заданий матрицею $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі, утвореному з многочленів $3t^2 + 2t$, $5t^2 + 3t + 1$, $7t^2 + 5t + 3$.

685. Лінійний оператор A простору E_3 в базисі $\vec{b}_1=(8;\ -6;\ 7)$, $\vec{b}_2=(-16;\ 7;\ -13)$, $\vec{b}_3=(9;\ -3;\ 7)$ має матрицю $\begin{pmatrix} 1 & -18 & 25 \\ -1 & -22 & 20 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}$. Знайти його матрицю в базисі $\vec{b}_1'=(1;\ -2;\ 1)$, $\vec{b}_2'=(3;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}_3'=(2;\ 1;\ 2)$.

6.6. МАТРИЦЯ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА В БАЗИСІ З ВЛАСНИХ ВЕКТОРІВ

Нехай A — лінійний оператор, що діє із L^n у L^n.

ТЕОРЕМА 6.5. Якщо матриця $\mathcal{A}$ лінійного оператора A в деякому базисі $\{\bar{p}_k\}$ діагональна і має вигляд

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

то вектори $\bar{p}_k$ є власними векторами оператора A, а числа λ_k — власними числами оператора A, що відповідають векторам $\bar{p}_k$.

ТЕОРЕМА 6.6. Якщо базисні вектори $\bar{p}_k$ базису $\{\bar{p}_k\}$ є власними векторами лінійного оператора A і λ_k — відповідні їм власні числа, то матриця $\mathcal{A}$ цього оператора в базисі $\{\bar{p}_k\}$ діагональна і має вигляд

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 6.7. Якщо власні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ лінійного оператора A попарно різні, то відповідні їм власні вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ — лінійно незалежні і матриця $\mathcal{A}$ оператора A в базисі векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ має вигляд

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Задача. Лінійний оператор A в площині L^2 у деякому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ має матрицю

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Переходячи до нового базису, звести цю матрицю до діагонального вигляду (якщо це можливо).

Розв'язання. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -7 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=-3, \\ \lambda=2. \end{array}\right.$$

Корені характеристичного рівняння різні. Отже, матрицю можна звести до діагонального вигляду.

Визначимо власні вектори

1) $\lambda=-3$, $\begin{cases} 7x_1-7x_2=0, \\ 2x_1-2x_2=0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x_1=x_2, \\ x_2=x_2 \end{cases}$. Тому $\bar{a}_1=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ — власний вектор, відповідний власному числу $\lambda=-3$.

2) $\lambda=2$, $\begin{cases} 2x_1-7x_2=0, \\ 2x_1-7x_2=0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x_1=\frac{7}{2}x_2, \\ x_2=x_2 \end{cases}$. Тому $\bar{a}_2=7\bar{e}_1+2\bar{e}_2$ — власний вектор, відповідний власному числу $\lambda=2$.

Якщо вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ брати за базис, то в цьому базисі матриця оператора A матиме вигляд:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

У задачах 686–689 лінійний оператор A площини L^2 в деякому базисі має матрицю $\mathcal{A}$. Переходячи до нового базису, звести цю матрицю до діагонального вигляду (якщо це можливо):

686. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. **687.** $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

688. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **689.** $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 690–692 лінійному оператору A простору L^3 у деякому базисі відповідає матриця $\mathcal{A}$. Переходячи до нового базису, звести цю матрицю до діагонального вигляду:

690. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$. **691.** $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 4 & 5 & -4\\ 6 & 4 & -4\end{pmatrix}$.

692. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix}7 & -12 & -2\\ 3 & -4 & 0\\ -2 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

У задачах 693–696 з'ясувати, які з матриць лінійних операторів можна звести до діагонального вигляду, переходячи до нового базису. Знайти цей базис і відповідну йому матрицю:

693. $\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ -3 & 5 & -1\\ -3 & 3 & 1\end{pmatrix}$. **694.** $\begin{pmatrix}6 & -5 & -3\\ 3 & -2 & -2\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

695. $\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. **696.** $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & 8 & -2\end{pmatrix}$.

6.7. САМОСПРЯЖЕНИЙ (СИМЕТРИЧНИЙ) ОПЕРАТОР І ЙОГО МАТРИЦЯ. ВЛАСНІ ЧИСЛА І ВЛАСНІ ВЕКТОРИ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай A — лінійний оператор, що діє з E^n у E^n.

Означення 6.10. Оператор A^*, що діє з E^n у E^n називається *спряженим* до лінійного оператора A, якщо для будь-яких $\bar{x}$ і $\bar{y}\in E^n$ виконуються співвідношення

$$\langle A(\bar{x}),\bar{y}\rangle=\langle \bar{x},A^*(\bar{y})\rangle.$$

Твердження 6.1. Оператор A^*, спряжений до лінійного оператора A, сам є лінійним.

Означення 6.11. Лінійний оператор A називається *самоспряженим,* якщо $A^*=A$, тобто якщо $\langle A(\bar{x}),\bar{y}\rangle=\langle \bar{x},A(\bar{y})\rangle$.

Приклад. Тотожний оператор E є самоспряженим оператором.

ТЕОРЕМА 6.8. У будь-якому ортонормованому базисі дійсного евклідового простору самоспряжений лінійний оператор і тільки такий оператор має симетричну матрицю.

Тому у випадку дійсного евклідового простору самоспряжений оператор називається також *симетричним оператором.*

ТЕОРЕМА 6.9. Усі власні числа симетричного лінійного оператора — дійсні числа.

ТЕОРЕМА 6.10. Власні вектори симетричного лінійного оператора, що відповідають різним власним числам, взаємно ортогональні. Якщо деяке власне число в характеристичному рівнянні має кратність k, то можна вказати k взаємно ортогональних власних векторів, що відповідають цьому власному значенню.

ТЕОРЕМА 6.11. Симетричний лінійний оператор простору E^n має n взаємно ортогональних власних векторів.

З теореми 6.11 випливає наявність у E^n базиса із n взаємно ортогональних власних векторів оператора A (отже, і ортонормованого базису). В цьому базисі матриця $\mathcal{A}$ оператора A має вигляд:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — власні числа оператора A, повторені стільки раз, скільки становить кратність кожного із них у характеристичному рівнянні.

ТЕОРЕМА 6.12. Матрицю симетричного лінійного оператора можна звести до діагонального вигляду шляхом ортогонального перетворення базису.

Приклад. Нехай A — симетричний лінійний оператор, що діє в просторі E^3. Тоді характеристичне рівняння буде рівнянням третього степеня і мати три дійсних корені.

а) Якщо $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — усі різні, то кожний вектор трійки взаємно ортогональних одиничних власних векторів визначається єдиним способом із точністю до знака. При цьому оператор A є сукупністю трьох геометричних розтягів (стисків) у трьох взаємно перпендикулярних напрямах.

б) Якщо $\lambda_1\neq\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, то існує визначений з точністю до знака одиничний власний вектор $\bar{e}_1'$, відповідний власному числу λ_1, двократному кореню λ відповідає нескінченна множина одиничних власних векторів, до того ж усі вони лежать в одній площині, перпендикулярній до $\bar{e}_1'$. При цьому симетричний лінійний оператор є добутком двох перетворень: подібності з коефіцієнтом λ у площині, перпендикулярній до вектора $\bar{e}_1'$ і розтягу (стиску) з коефіцієнтом λ_1, уздовж цієї осі.

в) Якщо $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda$, то будь-який вектор простору буде власним. Оператор A є подібність у просторі з коефіцієнтом, що дорівнює λ. За базис можна взяти будь-яку трійку одиничних попарно ортогональних векторів.

Отже, для будь-якого симетричного оператора в просторі E^3 можна знайти базис, складений з одиничних взаємно перпендикулярних власних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Задача. В ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дано лінійний оператор $\vec{u} = A(\vec{x})$: $u_1 = 7x_1 + 4x_2$, $u_2 = 4x_1 + x_2$.

Звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду, переходячи до нового ортонормованого базису.

Розв'язання. Матриця $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ даного оператора симетрична, тому поставлена задача має розв'язок. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння матриці $\mathcal{A}$:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 9$.

Власні вектори знаходимо з системи

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = -1$ дістанемо

$$\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

За її розв'язок можна взяти $x_1 = 1$, $x_2 = -2$.

Нормуючи цей розв'язок, знаходимо одиничний власний вектор, відповідний власному значенню $\lambda_1 = -1$:

$$\vec{e}_1' = 1/\sqrt{5}\vec{e}_1 - 2/\sqrt{5}\vec{e}_2.$$

При $\lambda_2 = 9$ дістанемо

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ і $\vec{e}_2' = 2/\sqrt{5}\vec{e}_1 + 1/\sqrt{5}\vec{e}_2$.

У базисі $\vec{e}_1'$ і $\vec{e}_2'$ матриця даного лінійного оператора має вигляд:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

697. В ортогональному базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ дано лінійний оператор $u_1 = 6x_1 + 2x_2$, $u_2 = 2x_1 + 3x_2$. Звести матрицю цього оператора до діагонального вигляду, переходячи до нового ортогонального базису.

698. В ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ лінійний оператор площини E^2 має матрицю $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти новий ортонормований базис, в якому матриця оператора буде діагональною. Знайти цю матрицю.

У задачах 699–702 знайти новий ортонормований базис, в якому матриця оператора буде діагональною, знайти цю матрицю, якщо в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ лінійний оператор A простору E^3 має матрицю $\mathcal{A}$:

699. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. **700.** $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$.

701. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **702.** $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

У задачах 703 і 704, переходячи до нового ортонормованого базису, звести матрицю даного оператора до діагонального вигляду. Оператор заданий в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

703. $u_1 = x_1 + 2x_2 - 4x_3$, $u_2 = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3$, $u_3 = -4x_1 - 2x_2 + x_3$.

704. $u_1 = 2x_1 + 4x_3$, $u_2 = 6x_2$, $u_3 = 4x_1 + 2x_3$.

6.8. ЯДРО ТА ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ЛІНІЙНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай A — лінійний оператор, що діє з лінійного простору L у L.

Означення 6.12. *Образом* або *областю значень лінійного оператора* A називається множина всіх елементів $\vec{y}$ простору L, поданих у вигляді $\vec{y} = A(\vec{x})$.

Образ лінійного оператора позначають символом $\mathrm{im}A$.

Означення 6.13. *Ядром лінійного оператора* A називається множина всіх тих елементів $\vec{x}$ простору L, для яких $A(\vec{x}) = 0$.

Ядро лінійного оператора позначають символом $\ker A$.

ТЕОРЕМА 6.13. Ядро $\ker A$ і образ $\mathrm{im}A$ — лінійні підпростори простору L.

Означення 6.14. Розмірність підпростору $\mathrm{im}A$ називається *рангом* оператора A; розмірність підпростору $\ker A$ називається *дефектом* оператора A.

ТЕОРЕМА 6.14. Нехай A лінійний оператор, що діє з L^n у L^n. Тоді розмірність n простору L^n дорівнює сумі рангу і дефекту лінійного оператора A.

ТЕОРЕМА 6.15. Ранг лінійного оператора A дорівнює рангу матриці $\mathcal{A}$ цього оператора.

Приклад. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

з невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Геометрично цю задачу можна тлумачити так.

Візьмемо довільний n-вимірний лінійний простір L^n і виберемо в ньому будь-який базис. Умовимось невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ розуміти як координати деякого вектора $\bar{x} \in L^n$ у вибраному базисі. Розглянемо лінійний оператор A цього простору, який має своєю матрицею $\mathcal{A} = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді систему рівнянь (6.1) можна переписати у вигляді $\mathcal{A}\bar{x} = 0$ або в операторній формі $A(\bar{x}) = 0$.

Звідси видно, що розв'язками системи (6.1) є координати векторів, які належать ядру оператора A. Оскільки розмірність ядра є дефект оператора, а дефект оператора дорівнює дефекту його матриці, то дійдемо до твердження:

Максимальне число лінійно незалежних розв'язків однорідної системи n лінійних рівнянь з n невідомими дорівнює дефекту матриці цієї системи.

*Зауваження 6.3. **Дефектом матриці*** називається різниця між її порядком і рангом.

Нехай A — самоспряжений оператор, що діє в n-вимірному евклідовому просторі E^n і $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \lambda_3 \ge \ldots \ge \lambda_n$ — його власні значення, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ — ортонормований базис, складений з власних векторів, відповідних $\{\lambda_i\}$.

Тоді оператор A можна подати у вигляді:

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$$

або в розгорнутому вигляді

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n, \tag{6.2}$$

де оператор P_k визначається співвідношенням $P_k(\bar{x}) = x_k \bar{e}_k$ і його матриця $\mathcal{P}$ має вигляд $\mathcal{P} = (p_{ij})$, в якій елемент $p_{kk} = 1$, а інші елементи дорівнюють нулю.

Рівняння (6.2) називають ***спектральним розкладом самоспряженого вектора***.

Сукупність коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ спектрального розкладу називається його ***спектром***. ***Спектром лінійного оператора*** називається спектр його спектрального розкладу.

Для самоспряженого оператора спектр оператора збігається з сукупністю його власних значень.

Задача. Позначимо через A операцію ортогонального проектування вектора простору E^3 на площину xOy цього простору. Знайти ранг і дефект оператора A.

Розв'язання. Зауважимо, що A — лінійний оператор. Оператор A переводить простір E^3 у площину xOy. При цьому площина xOy є область значень оператора A. Отже, ранг A дорівнює двом. Ядро оператора A складається з векторів, які лежать на прямій, що проходять через початок координат перпендикулярно до площини xOy, оскільки ці і тільки ці вектори переводяться оператором A у нуль. Отже, дефект дорівнює одиниці. Сума рангу і дефекту оператора A дорівнює трьом.

Задачі для розв'язування

705. Знайти ядро лінійних функціоналів тривимірного евклідового простору:

1) $A(\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{a} \rangle$; 2) $A(\bar{x}) = \langle [\bar{a}\bar{x}], \bar{b} \rangle$,

де $\bar{a}$, $\bar{b}$ — фіксовані вектори простору E^3; $\bar{x}$ — довільний вектор простору E^3.

706. Знайти образ, ядро лінійного оператора в тривимірному евклідовому просторі, заданого формулою $A(\bar{x}) = [\bar{x}\bar{a}]$, де $\bar{a}$ — фіксований вектор E^3.

707. Описати образ і ядро оператора диференціювання в просторі P_n.

У задачах 708–711 знайти ядро, область значень, ранг і дефект лінійних операторів простору E^2 і E^3, які в деякому прямокутному базисі мають матриці:

708. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **709.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

710. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **711.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

У задачах 712–714 знайти ядро і область значень лінійних операторів, заданих матрицями $\mathcal{A}$, якщо в просторі L_4 дано базис $\vec{e}_1=(1;0;0;0)$, $\vec{e}_2=(0;1;0;0)$, $\vec{e}_3=(0;0;1;0)$. $\vec{e}_4=(0;0;0;1)$.

712. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

713. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

714. $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

715. Знайти ядро лінійного оператора, заданого матрицею $\mathcal{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, якщо в просторі L_4 дано базис $\vec{e}_1=(1;0;0;0)$, $\vec{e}_2=(0;1;0;0)$, $\vec{e}_3=(0;0;1;0)$. $\vec{e}_4=(0;0;0;1)$.

7 КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

7.1. КВАДРАТИЧНА ФОРМА. МАТРИЦЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ. ПЕРЕТВОРЕННЯ МАТРИЦІ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ПРИ ПЕРЕХОДІ ДО НОВОГО БАЗИСУ

Означення 7.1. *Квадратичною формою* від змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається однорідний многочлен другого степеня відносно цих змінних:

$$F=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \qquad a_{ij}=a_{ji}, \tag{7.1}$$

або в розгорнутому вигляді

$$F=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\ldots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\ldots$$
$$\ldots+2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n+a_{nn}x_n^2.$$

Зауваження 7.1. Надалі вважатимемо, що змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ є координатами вектора $\vec{x}$ простору L^n, в якому зафіксовано деякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$. Тоді квадратична форма буде функцією $F(\vec{x})$, що задана на L^n зі значеннями в R.

Означення 7.2. Симетрична матриця, складена з коефіцієнтів квадратичної форми

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

називається *матрицею квадратичної форми.*

За допомогою матриці $\mathcal{A}$ квадратичну форму можна записати в матричному вигляді:

$$F(\vec{x})=\mathcal{X}^T\mathcal{A}\mathcal{X},$$

де $\mathcal{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathcal{X}^T=(x_1x_2\ \ldots\ x_n)$.

Твердження 7.1. Якщо $\mathcal{A}$ — матриця квадратичної форми $F(\bar{x})$ у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ простору L^n, то в базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots, \dot{\bar{e}}_n$ простору L^n матриця $\dot{\mathcal{A}}$ квадратичної форми $F(\bar{x})$ має вигляд

$$\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^T \mathcal{A} \mathcal{C}, \qquad (7.2)$$

де $\mathcal{C}$ — матриця переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ до базису $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots, \dot{\bar{e}}_n$ (див. п.2.2.3). При цьому

$$F(\bar{x}) = \dot{\mathcal{X}}^T \dot{\mathcal{A}} \dot{\mathcal{X}}, \quad \mathcal{X} = \mathcal{C} \dot{\mathcal{X}}, \quad \dot{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{pmatrix},$$

де $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ — координати вектора $\bar{x}$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots$ $\dots, \dot{\bar{e}}_n$.

Зауваження 7.2. Нехай змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ у квадратичній формі $F(\bar{x})$ є координатами вектора $\bar{x}$ в ортонормованому базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots, \dot{\bar{e}}_n$ простору E^n і нехай матриця $\mathcal{C}$ є ортогональною матрицею переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ до ортонормованого базису $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots, \dot{\bar{e}}_n$. Тоді, якщо $\mathcal{A}$ — матриця лінійного симетричного оператора A у базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$, то матриця $\dot{\mathcal{A}}$ того самого оператора A у базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dots, \dot{\bar{e}}_n$ має вигляд $\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{C}^T \mathcal{A} \mathcal{C}$, оскільки $\mathcal{C}^T = \mathcal{C}^{-1}$. У цьому випадку перетворення матриці $\mathcal{A}$ лінійного симетричного оператора A збігається з перетворенням матриці $\mathcal{A}$ квадратичної форми $F(\bar{x})$. Тому, якщо в деякій ортонормованій системі координат простору E^n матриця лінійного симетричного оператора A дорівнює матриці квадратичної форми $F(\bar{x})$, то ця рівність має місце в будь-якій іншій ортонормованій системі координат E^n.

Задача 1. Записати матрицю квадратичної форми

$$F(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + 3x_2^2 + x_3^2, \qquad \bar{x} \in L^3.$$

Розв'язання. Оскільки $a_{11} = 1$, $2a_{12} = -2$, $2a_{13} = -1$, $a_{22} = 3$, $2a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$, то

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. У деякому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ простору L^2 квадратична форма має вигляд $F(\bar{x}) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 56x_2^2$. Знайти вигляд $F(\bar{x})$ в базисі $\dot{\bar{e}}_1$ і $\dot{\bar{e}}_2$, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = \bar{e}_1$, $\dot{\bar{e}}_2 = -5\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

Розв'язання. Склавши матрицю $\mathcal{A}$ квадратичної форми в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ і матрицю $\mathcal{C}$ переходу від базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ до базису $\dot{\bar{e}}_1$, $\dot{\bar{e}}_2$, матимемо:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $\dot{\mathcal{A}}$ квадратичної форми в базисі $\dot{\bar{e}}_1$ і $\dot{\bar{e}}_2$ знайдемо з співвідношення (7.2):

$$\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 41 \end{pmatrix}.$$

Тоді квадратична форма $F(\bar{x})$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1$, $\dot{\bar{e}}_2$ матиме вигляд

$$F(\bar{x}) = \dot{x}_1^2 - 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + 41\dot{x}_2^2.$$

Задача 3. В ортонормованому базисі $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ простору E^3 дано квадратичну форму $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 +$ $+ 2x_2x_3$. Знайти матрицю $F(\bar{x})$ в ортонормованому базисі $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$, якщо

$$\dot{\bar{i}} = (1/\sqrt{3})\bar{i} - (1/\sqrt{3})\bar{j} + (1/\sqrt{3})\bar{k},$$
$$\dot{\bar{j}} = (1/\sqrt{6})\bar{i} - (1/\sqrt{6})\bar{j} - (2/\sqrt{6})\bar{k},$$
$$\dot{\bar{k}} = (1/\sqrt{2})\bar{i} + (1/\sqrt{2})\bar{j}.$$

Розв'язання. Запишемо матрицю $\mathcal{A}$ квадратичної форми $F(\bar{x})$ та матрицю $\mathcal{C}$ переходу від одного базису до іншого:

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix},\quad \mathcal{C}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}.$$

Тоді за допомогою (7.2)

$$\dot{\mathcal{A}}=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3} & \sqrt{3}\\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2/\sqrt{6}\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Зауваження 7.3. Матриця $\dot{\mathcal{A}}$ має діагональний вигляд. Отже, базис $\dot{\bar{i}}, \dot{\bar{j}}, \dot{\bar{k}}$ складений з власних векторів симетричного лінійного оператора, якому відповідає матриця $\mathcal{A}$.

Задачі для розв'язування

У задачах 716–721 знайти матриці даних квадратичних форм у новому базисі:

716. $F(\bar{x})=2x_1^2-6x_1x_2+x_2^2$,

$\dot{\bar{e}}_1=\bar{e}_1-2\bar{e}_2$,

$\dot{\bar{e}}_2=\bar{e}_1+4\bar{e}_2$.

717. $F(\bar{x})=x_1^2+4x_1x_2+3x_2^2$.

$\dot{\bar{i}}=\left(1/\sqrt{5}\right)\bar{i}+\left(2/\sqrt{5}\right)\bar{j}$,

$\dot{\bar{j}}=-\left(2/\sqrt{5}\right)\bar{i}+\left(1/\sqrt{5}\right)\bar{j}$.

718. $F(\bar{x})=6x_1x_2-x_2^2$,

$\dot{\bar{e}}_1=2\bar{e}_1+3\bar{e}_2$,

$\dot{\bar{e}}_2=-\bar{e}_1$.

719. $F(\bar{x})=2x_1^2-4x_1x_2+x_2^2-x_3^2$,

$\dot{\bar{e}}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_3$,

$\dot{\bar{e}}_2=\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3,\quad \dot{\bar{e}}_3=-\bar{e}_2$.

720. $F(\bar{x})=x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$,

$\dot{\bar{e}}_1=\bar{e}_1-\bar{e}_2-\bar{e}_3$,

$\dot{\bar{e}}_2=\bar{e}_2+2\bar{e}_3,\quad \dot{\bar{e}}_3=\bar{e}_2$.

721. $F(\bar{x})=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$,

$\dot{\bar{i}}=(1/3)\bar{i}+(2/3)\bar{j}+(2/3)\bar{k}$,

$\dot{\bar{j}}=-(2/3)\bar{i}-(1/3)\bar{j}+(2/3)\bar{k}$,

$\dot{\bar{k}}=(2/3)\bar{i}-(2/3)\bar{j}+(1/3)\bar{k}$.

7.2. КАНОНІЧНИЙ ВИГЛЯД КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ. МЕТОД ЛАГРАНЖА ЗВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Означення 7.3. Квадратична форма (7.1) має канонічний вигляд, якщо $a_{ij}=0$ при $i\neq j$.

Приклад. При $n=4$ квадратична форма $F(\bar{x})=2x_1^2-x_3^2+5x_4^2$ має канонічний вигляд.

Метод Лагранжа дає змогу за допомогою невиродженого лінійного перетворення координат n-вимірного лінійного простору L^n звести квадратичну форму (7.1) до канонічного вигляду

$$F(\bar{x})=\lambda_1\eta_1^2+\lambda_2\eta_2^2+\ldots+\lambda_n\eta_n^2,$$

в якому $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n$ — координати вектора $\bar{x}$ у новому базисі $\bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_n$.

Розглянемо суть методу Лагранжа.

Нехай коефіцієнт при квадраті однієї з координат вектора $\bar{x}$ у формі (7.1) відмінний від нуля. Не порушуючи загальності, можна вважати, що $a_{11}\neq 0$.

Доповнимо члени, що містять x_1, у (7.1) до повного квадрата. Тоді (7.1) набуде вигляду

$$F(\bar{x})=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i,j=2}^{n}a_{ij}^{*}x_ix_j.$$

За допомогою невиродженого лінійного перетворення координат у L^n

$$x_1' = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \ \ x_2' = x_2, \ldots, x_n' = x_n$$

форма (7.1) запишеться у вигляді

$$F(\bar{x}) = a_{11} x_1'^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i' x_j' .$$

Тепер задача спрощується і зводиться до зведення квадратичної форми $\sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}^* x_i' x_j'$, що залежить вже від $(n-1)$ змінних $x_2', x_3', \ldots, x_n'$ до канонічного вигляду.

Якщо усі коефіцієнти при квадратах координат у (7.1) дорівнюють нулю і, наприклад $a_{12} \neq 0$, то після лінійного невиродженого перетворення у L^n

$$x_1' = x_1 - x_2, \quad x_2' = x_1 + x_2, \quad x_i' = x_i, \quad i = \overline{3, n}$$

коефіцієнт при $x_2'^2$ дорівнюватиме $a_{12}/2$ і буде відмінний від нуля.

Задача. Методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду такі квадратичні форми:

1) $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$,

2) $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

Розв'язання. 1) Нехай $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$. Зауважимо, що коефіцієнт при x_1^2 не дорівнює 0. Доповнимо члени, що містять x_1, до повного квадрата. Тоді матимемо

$$F(\bar{x}) = 2\left(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2\right) - 2x_2^2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 =$$
$$= 2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + F_1(\bar{x}),$$

де $F_1(\bar{x}) = x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$.

Застосувавши до $F_1(\bar{x})$ той самий прийом, дістанемо

$$F_1(\bar{x}) = (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 .$$

Після цього $F(\bar{x})$ набуде канонічного вигляду

$$F(\bar{x}) = 2x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 ,$$

де $x_1' = x_1 + x_2, \quad x_2' = x_2 + 2x_3, \quad x_3' = x_3$.

Останні формули задають невироджене лінійне перетворення координат вектора в L^3 при переході до нового базису, в якому квадратична форма $F(\bar{x})$ має канонічний вигляд:

$$F(\bar{x}) = 2x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 .$$

Перевірка: $2x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + x_3^2 = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = F(\bar{x})$.

2) Нехай тепер $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

У цьому випадку всі коефіцієнти $F(\bar{x})$ при квадратах координат дорівнюють нулю. Тому розглянемо таке невироджене перетворення координат у L^3:

$$x_1' = x_1 - x_2, \quad x_2' = x_1 + x_2, \quad x_3' = x_3 .$$

Виразимо x_1 та x_2 через x_1' та x_2' і підставимо в $F(\bar{x})$. Тоді дістанемо

$$x_1 = \frac{x_1' + x_2'}{2}, \quad x_2 = \frac{x_2' - x_1'}{2}.$$

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{4}(x_1' + x_2')(x_2' - x_1') + \frac{1}{2} x_3'(x_1' + x_2') + \frac{1}{2} x_3'(x_2' - x_1') =$$
$$= \frac{1}{4} x_2'^2 - \frac{1}{4} x_1'^2 + \frac{1}{2} x_1'x_3' + \frac{1}{2} x_2'x_3' + \frac{1}{2} x_2'x_3' - \frac{1}{2} x_1'x_3' =$$
$$= \frac{1}{4} x_2'^2 - \frac{1}{4} x_1'^2 + x_2'x_3'.$$

Після цього перетворення коефіцієнт при $x_2'^2$ відмінний від нуля. Доповнимо до повного квадрата члени, що містять x_2'. Тоді

$$F(\bar{x}) = \frac{1}{4}\left(x_2'^2 + 4x_2'x_3' + 4x_3'^2\right) - x_3'^2 - \frac{1}{4} x_1'^2 =$$
$$= \frac{1}{4}(x_2' + 2x_3')^2 - x_3'^2 - \frac{1}{4} x_1'^2 = \frac{1}{4} x_2''^2 - \frac{1}{4} x_1''^2 - x_3''^2,$$

де $x_1'' = x_1' = x_1 - x_2, \quad x_2'' = x_2' + 2x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3, \quad x_3'' = x_3' = x_3$.

Перевірка: $\frac{1}{4}x_2^{*2} - \frac{1}{4}x_1^{*2} - x_3^{*2} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 - x_3^2 = \frac{1}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1x_2\right) - \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \frac{1}{2}x_1x_2 - x_3^2 - \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{4}x_2^2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = F(\bar{x})$.

Задачі для розв'язування

У задачах 722–731 методом Лагранжа знайти канонічний вигляд та невироджене лінійне перетворення, що зводить до цього вигляду такі квадратичні форми (лінійне перетворення визначено неоднозначно):

722. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

723. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

724. $F(\bar{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

725. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2$.

726. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.

727. $F(\bar{x}) = -4x_1x_2$.

728. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3$.

729. $F(\bar{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

730. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.

731. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

7.3. МЕТОД ЯКОБІ ЗВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Нехай $\mathcal{A} = (a_{ij})$ — матриця квадратичної форми (7.1) в деякому базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ n-вимірного лінійного простору L^n.

Позначимо через $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ кутові мінори матриці $\mathcal{A}$, тобто покладемо

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots,$$

$$\Delta_{n-1} == \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}.$$

Припустимо, що мінори $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ відмінні від нуля. Тоді існує невироджене трикутне перетворення базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ вигляду

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{e}_1, \\ \bar{f}_2 &= \alpha_{21}\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{f}_n &= \alpha_{n1}\bar{e}_1 + \alpha_{n2}\bar{e}_2 + \ldots + \alpha_{nn-1}\bar{e}_{n-1} + \bar{e}_n, \end{aligned}$$

що переводить базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ в базис $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$, і таке, що квадратична форма $F(\bar{x})$ набуде в базисі $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ канонічного вигляду:

$$F(\bar{x}) = \lambda_1\eta_1^2 + \lambda_2\eta_2^2 + \ldots + \lambda_n\eta_n^2.$$

При цьому коефіцієнти α_{ji} перетворення базисних векторів визначають за формулою

$$\alpha_{ji} = (-1)^{j+i}\frac{\Delta_{j-1,i}}{\Delta_{j-1}},$$

де $\Delta_{j-1,i}$ — мінор матриці $\mathcal{A}$, що розташований на перетині рядків цієї матриці з номерами 1, 2, ..., j–1 та стовпців з номерами 1, 2, ..., i–1, i+1, ..., j.

Канонічні коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ знаходять за формулами:

$$\lambda_1 = \Delta_1, \ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ \ldots, \ \lambda_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

де Δ_n — визначник матриці $\mathcal{A}$.

Задача. Методом Якобі звести квадратичну форму $F(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2$ до канонічного вигляду.

Р о з в ' я з а н н я. Складемо матрицю квадратичної форми

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори та визначник матриці $\mathcal{A}$:

$$\Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Визначимо канонічні коефіцієнти:

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 4, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 1.$$

Тоді квадратична форма $F(\vec{x})$ матиме такий канонічний вигляд:

$$F(\vec{x}) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2 + \eta_3^2.$$

Визначимо коефіцієнти α_{ji} перетворення базисних векторів:

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_1} = -\frac{0}{1} = 0,$$

$$\alpha_{31} = (-1)^4 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$\alpha_{32} = (-1)^5 \frac{\Delta_{22}}{\Delta_2} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

Трикутне перетворення базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, що зводить $F(\vec{x})$ до канонічного вигляду, запишемо так:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_3.$$

Виразимо нові координати η_1, η_2, η_3 через старі x_1, x_2, x_3.

Запишемо матрицю $\mathcal{C}$ переходу від старого базису до нового:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Координати вектора $\vec{x}$ у новому базисі знайдуться за допомогою формули

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \eta_1 - \eta_3, \\ x_2 = \eta_2, \\ x_3 = \eta_3. \end{cases}$$

Звідси $\eta_1 = x_1 + x_3$, $\eta_2 = x_2$, $\eta_3 = x_3$.

Задачі для розв'язування

У задачах 732–734 методом Якобі звести до канонічного вигляду квадратичні форми, не знаходячи трикутного перетворення.

732. $F(\vec{x}) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3.$

733. $F(\vec{x}) = 11x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3.$

734. $F(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4.$

У задачах 735–737 знайти трикутне перетворення, що зводить квадратичні форми до канонічного вигляду, записати цей канонічний вигляд та виразити нові невідомі через старі.

735. $F(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3.$

736. $F(\vec{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$

737. $F(\vec{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3.$

7.4. ЗВЕДЕННЯ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ЗА ДОПОМОГОЮ ОРТОГОНАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Припустимо, що квадратична форма (7.1) визначена в E^n і змінні x_i — координати вектора $\vec{x}$ в ортонормованому базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Тоді квадратична форма (7.1) може бути зведена до канонічного вигляду за допомогою переходу до ортонормованого базису, складеного з одиничних власних векторів симетричного лінійного оператора A, що відповідає формі (7.1). У цьому базисі матриця оператора A буде діагональною:

$$\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — власні значення, що відповідають векторам базису $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \ldots, \dot{\vec{e}}_n$. Квадратична форма в новому базисі набере вигляду

$$F(\vec{x}) = \dot{X}^T \dot{\mathcal{A}} \dot{X} = \lambda_1 \dot{x}_1^2 + \lambda_2 \dot{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n \dot{x}_n^2.$$

7 1-93

Задача. Знайти ортогональне перетворення ортонормованого базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ площини E^2, що зводить квадратичну форму $F(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$ до канонічного вигляду і записати цей канонічний вигляд.

Розв'язання. Виписуємо матрицю квадратичної форми

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0, \\ \lambda = 5. \end{array}\right.$$

Дана квадратична форма має такий канонічний вигляд:

$$F(\bar{x}) = 5\dot{x}_2^2.$$

Щоб знайти базис, в якому квадратична форма має такий вигляд, треба здобути власні вектори лінійного оператора A, якому відповідає матриця $\mathcal{A}$. Записуємо систему рівнянь, що визначають шукані власні вектори:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи $\lambda = \lambda_1 = 0$, дістаємо

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x_1 = -2x_2, \\ x_2 = x_2, \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2,$

де $x_2 \in (-\infty, +\infty)$.

Якщо покласти $x_2 = 1$, то знайдемо $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — власний вектор A. Відповідний вектору $\bar{a}_1$ одиничний вектор буде $\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Підставляючи $\lambda = \lambda_2 = 5$, дістаємо

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x_1 = 1/2\, x_2, \\ x_2 = x_2, \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2,$

де $x_2 \in (-\infty, +\infty)$.

Покладемо $x_2 = 2$. Знайдемо $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ — другий власний вектор A. Нормуючи його, дістаємо одиничний власний вектор $\dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Вектори $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$ становлять шуканий ортонормований базис. При переході до нового базису $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$ координати всіх векторів перетворюються за формулами:

$$x_1 = -\left(2/\sqrt{5}\right)\dot{x}_1 + \left(1/\sqrt{5}\right)\dot{x}_2,$$
$$x_2 = \left(1/\sqrt{5}\right)\dot{x}_1 + \left(2/\sqrt{5}\right)\dot{x}_2$$

або в матричній формі запису

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \text{ де } \mathcal{C} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Задачі для розв'язування

У задачах 738–744 знайти канонічний вигляд, до якого зводяться квадратичні форми за допомогою ортогонального перетворення, не відшукуючи це перетворення.

738. $F(\bar{x}) = x_1x_2$.

739. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

740. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$.

741. $F(\bar{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

742. $F(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

743. $F(\bar{x}) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

744. $F(\bar{x}) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

У задачах 745–752 знайти ортогональне перетворення, що зводить квадратичні форми до канонічного вигляду і записати його:

745. $F(\bar{x}) = 4x_1x_2 + 3x_2^2$.

746. $F(\bar{x}) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$.

747. $F(\bar{x}) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.

748. $F(\bar{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

749. $F(\bar{x}) = -3x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$.

750. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

751. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

752. $F(\bar{x}) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

7.5. ЗАКОН ІНЕРЦІЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ. КЛАСИФІКАЦІЯ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ. КРИТЕРІЙ СІЛЬВЕСТРА ЗНАКООЗНАЧЕНОСТІ КВАДРАТИЧНОЇ ФОРМИ

Твердження 7.2. (Закон інерції квадратичних форм). Число додатних (від'ємних) коефіцієнтів у канонічному вигляді квадратичної форми не залежить від невиродженого лінійного перетворення, що зводить її до канонічного вигляду.

Означення 7.4. *Індексом інерції k квадратичної форми* називається число відмінних від нуля коефіцієнтів її канонічного вигляду. *Додатним індексом p* — число додатних, *від'ємним індексом q* — число від'ємних коефіцієнтів її канонічного вигляду.

Означення 7.5. Квадратична форма $F(\bar{x})$ називається *додатно (від'ємно) означеною* на L^n, якщо $F(\bar{x}) > 0$ $(F(\bar{x}) < 0)$ для довільного $\bar{x} \neq 0$, $\bar{x} \in L^n$.

Означення 7.6. Квадратична форма $F(\bar{x})$ називається *квазідодатно (квазівід'ємно) означеною* на L^n, якщо $F(\bar{x}) \geq 0$ $(F(\bar{x}) \leq 0)$ при довільному $\bar{x} \in L^n$ та існує $\bar{x} \neq 0$ такий, що $F(\bar{x}) = 0$.

Твердження 7.3. $F(\bar{x})$ тоді і тільки тоді є додатно (від'ємно) означеною на L^n, коли $p = n$ $(q = n)$.

Твердження 7.4. $F(\bar{x})$ тоді і тільки тоді є квазідодатно (квазівід'ємно) означеною, коли $p < n$ і $q = 0$ ($p = 0$ і $q < n$).

Твердження 7.5. $F(\bar{x})$ тоді і тільки тоді є знакозмінною, коли $p \neq 0$ і $q \neq 0$.

Твердження 7.6. (Критерій Сільвестра). Для того щоб квадратична форма $F(\bar{x})$ була додатно означеною, необхідно і досить виконання нерівностей $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, де Δ_i, $i = \overline{1, n}$ — кутові мінори та визначник квадратичної форми.

Для того щоб квадратична форма $F(\bar{x})$ була від'ємно означеною, необхідно і досить, щоб знаки кутових мінорів чергувалися, причому $\Delta_1 < 0$.

Приклад 1. Квадратична форма

$$F(\bar{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

додатно означена, оскільки кутові мінори та визначник її матриці

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

додатні.

Приклад 2. Квадратична форма

$$F(\bar{x}) = 3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$$

не буде ні додатно, ні від'ємно означеною, тобто буде знакозмінною, оскільки її другий кутовий мінор від'ємний:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Задача. Знайти всі значення параметра λ, при яких квадратична форма

$$F(\bar{x}) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

додатно означена.

Розв'язання. Матриця $\mathcal{A}$ квадратичної форми має вигляд

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Її кутові мінори та визначник

$$\Delta_1 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Бачимо, що $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. Вимагатимемо, щоб і Δ_3 був більше нуля.

Дістанемо

$$\Delta_3 = 5\lambda + 2 + 2 - 1 - 5 - 4\lambda \Leftrightarrow \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 2.$$

Відповідь: $\lambda > 2$.

Задачі для розв'язування

У задачах 753–756 знайти всі значення параметра λ, при яких додатно означені такі квадратичні форми:

753. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda\, x_1x_2 + 2x_1x_3$.

754. $F(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda\, x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

755. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda\, x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

756. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda\, x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$.

757. Довести, якщо квадратична форма з матрицею $\mathcal{A}$ додатно означена, то й квадратична форма з оберненою матрицею $\mathcal{A}^{-1}$ також додатно означена.

У задачах 758–764 визначити, які квадратичні форми є додатно і від'ємно означені, а які ні:

758. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10\, x_1x_2$.

759. $F(\bar{x}) = -x_1^2 + 2\, x_1x_2 - 4x_2^2$.

760. $F(\bar{x}) = x_1^2 - 15x_2^2 + 14\, x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

761. $F(\bar{x}) = 12\, x_1x_2 - 12x_1x_3 + 6x_2x_3 - 11x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2$.

762. $F(\bar{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

763. $F(\bar{x}) = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_2x_4$.

764. $F(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_4^2 + 8x_2x_4$.

765. Довести, що квадрат довжини вектора $|\bar{x}|^2$ в E^n є додатно означеною квадратичною формою.

У задачах 766–772 за канонічним виглядом квадратичної форми $F(\bar{x})$ в E^n визначити індекси p та q та її знакоозначеність:

766. $F(\bar{x}) = x_1^2 + \frac{1}{5}x_2^2 + 7x_3^2 + x_4^2$, $(n=4)$.

767. $F(\bar{x}) = 2x_1^2 - 5x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2$, $(n=3)$.

768. $F(\bar{x}) = 25x_1^2 + 13x_3^2 + \frac{1}{8}x_4^2$, $(n=4)$.

769. $F(\bar{x}) = -2x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_4^2$, $(n=4)$.

770. $F(\bar{x}) = 5x_1^2 + 9x_2^2 - 3x_3^2 + x_4^2$, $(n=4)$.

771. $F(\bar{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$, $(n=3)$.

772. $F(\bar{x}) = 9x_1^2 + 3x_3^2$, $(n=3)$.

7.6. ОДНОЧАСНЕ ЗВЕДЕННЯ ДВОХ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Означення 7.7. Нормальним виглядом квадратичної форми (7.1) називається такий її канонічний вигляд, в якому коефіцієнти при квадратах невідомих (не враховуючи нульових) дорівнюють ± 1.

Твердження 7.7. Якщо $F(\bar{x})$ — довільна, а $G(\bar{x})$ — додатно означена форми на L^n, то існує лінійне невироджене перетворення L^n, що зводить обидві форми до канонічного вигляду (а форму $G(\bar{x})$ навіть до нормального вигляду).

Зауваження 7.5. На практиці для одночасного зведення $F(\bar{x})$ та $G(\bar{x})$ до канонічного вигляду спочатку будують базис L^n, в якому $G(\bar{x})$ має нормальний вигляд і знаходять матрицю $\mathcal{A}$ форми $F(\bar{x})$ у цьому базисі. Вважаючи новий базис ортонормованим базисом E^n, дістають ортогональне перетворення E^n, що зводить $F(\bar{x})$ до канонічного вигляду. Ортонормований базис в E^n з власних векторів форми $F(\bar{x})$ є шуканим. У ньому матриця форми $G(\bar{x})$ — одинична, а матриця форми $F(\bar{x})$ — діагональна.

Задача. Дано квадратичні форми

$$F(\bar{x}) = x_1^2 + 56x_2^2 + 16\, x_1x_2,$$

$$G(\bar{x}) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10\, x_1x_2.$$

Показати, що форма $G(\bar{x})$ додатно означена. Знайти невироджене лінійне перетворення, що зводить форму $G(\bar{x})$ до нормального, а форму $F(\bar{x})$ до канонічного вигляду. Записати цей канонічний вигляд.

Розв'язання. Склавши матрицю $\mathcal{B}$ квадратичної форми $G(\bar{x})$, матимемо

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо кутові мінори матриці $\mathcal{B}$:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Отже, квадратична форма $G(\bar{x})$ є додатно означеною. Зведемо її до нормального вигляду, застосовуючи метод Якобі. Визначимо канонічні коефіцієнти:

$$\lambda_1 = \Delta_1 = 1, \quad \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Тоді квадратична форма $G(\bar{x})$ матиме такий нормальний вигляд:

$$G(\bar{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2.$$

Знайдемо трикутне перетворення, що зводить цю квадратичну форму до нормального вигляду:

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \frac{a_{12}}{\Delta_1} = -5,$$

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1, \qquad \bar{f}_2 = -5\bar{e}_1 + \bar{e}_2. \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виразимо старі координати через нові за допомогою матриці $\mathcal{C}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

$$x_1 = \xi_1 - 5\xi_2, \quad x_2 = \xi_2.$$

Знайдемо вигляд квадратичної форми $F(\bar{x})$ і її матриці $\dot{\mathcal{A}}$ у новому базисі $\bar{f}_1, \bar{f}_2$:

$$F(\bar{x}) = (\xi_1 - 5\xi_2)^2 + 56\xi_2^2 + 16(\xi_1 - 5\xi_2)\xi_2 =$$

$$= \xi_1^2 - 10\xi_1\xi_2 + 25\xi_2^2 + 56\xi_2^2 + 16\xi_1\xi_2 -$$

$$- 80\xi_2^2 = \xi_1^2 + 6\xi_1\xi_2 + \xi_2^2.$$

$$\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вважаючи $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ ортонормованим базисом у E^2, здобудемо ортогональне перетворення E^2, що зводить форму $F(\bar{x})$ з матрицею $\dot{\mathcal{A}}$ до канонічного вигляду. Для цього визначимо власні значення і власні одиничні вектори оператора A, матриця якого дорівнює $\dot{\mathcal{A}}$.

Маємо

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 4. \end{array}\right.$$

Для $\lambda_1 = -2$ візьмемо власний одиничний вектор $\bar{g}_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, для $\lambda_2 = 4$ візьмемо власний одиничний вектор $\bar{g}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

Тоді квадратична форма $F(\bar{x})$ у базисі $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ має канонічний вигляд:

$$F(\bar{x}) == -2\eta_1^2 + 4\eta_2^2.$$

Квадратична форма $G(\bar{x})$ у базисі $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ мала одиничну матрицю. В базисі $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ матриця форми $G(\bar{x})$ залишається одиничною, тобто $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, а матриця $\mathcal{C}_1$ переходу від базису $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ до базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ має вигляд

$$\mathcal{C}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

У разі переходу від базису $\bar{f}_1, \bar{f}_2$ до базису $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ координати векторів перетворюються за формулами:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \mathcal{C}_1\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \xi_1 = \left(-1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2, \quad \xi_2 = \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2.$$

Остаточно маємо $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $F(\bar{x}) = -2\eta_1^2 + 4\eta_2^2$, де

$$x_1 = \xi_1 - 5\xi_2 = \left(-1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2 - \left(5/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(5/\sqrt{2}\right)\eta_2 = = -\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2,$$

$$x_2 = \xi_2 = \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2.$$

Перевірка: $F(\bar{x}) = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2 = \left(-\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)^2 + 56\left(\left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)^2 + 16\left(-\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)\left(\left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2\right) = 18\eta_1^2 + 8\eta_2^2 + 24\eta_1\eta_2 + 28\eta_1^2 + 56\eta_1\eta_2 + 28\eta_2^2 + 16(-3\eta_1^2 - 3\eta_1\eta_2 - 2\eta_1\eta_2 - 2\eta_2^2) = -2\eta_1^2 + 4\eta_2^2;$

$$G(\bar{x}) = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2 = \left(-\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)^2 +$$
$$+ 26\left(\left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)^2 + 10\left(-\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2\right)\left(\left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 +\right.$$
$$\left.+ \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2\right) = 18\eta_1^2 + 8\eta_2^2 + 24\eta_1\eta_2 + 13\eta_2^2 + 26\eta_1\eta_2 - 30\eta_1^2 -$$
$$- 20\eta_2^2 - 50\eta_1\eta_2 = \eta_1^2 + \eta_2^2;$$

Відповідь: $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $F(\bar{x}) = -2\eta_1^2 + 4\eta_2^2$,

$x_1 = -\left(6/\sqrt{2}\right)\eta_1 - \left(4/\sqrt{2}\right)\eta_2$, $x_2 = \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_1 + \left(1/\sqrt{2}\right)\eta_2$.

Задачі для розв'язування

У задачах 773–777 з'ясувати, що в парах квадратичних форм одна форма є додатно означеною; знайти невироджене лінійне перетворення, що зводить цю форму до нормального, а іншу форму цієї самої пари до канонічного вигляду, і написати цей канонічний вигляд (лінійне перетворення визначено неоднозначно).

773. $F(\bar{x}) = -4x_1x_2$; $G(\bar{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2$.

774. $F(\bar{x}) = 8x_1^2 - 28x_2^2 + 14x_3^2 + 16x_1x_2 + 14x_1x_3 + 32x_2x_3$;
$G(\bar{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_3$.

775. $F(\bar{x}) = 2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$;
$G(\bar{x}) = (1/4)x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_2x_4$.

776. $F(\bar{x}) = x_1^2 + (3/2)x_2^2 - 2x_3^2 + x_2^4 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$;
$G(\bar{x}) = x_1^2 + (5/4)x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_2x_3$.

777. $F(\bar{x}) = x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$;
$G(\bar{x}) = x_1^2 + 17x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 14x_2x_3$.

8 КВАДРАТИЧНІ ОБРАЗИ В E_2 І E_3

8.1. КВАДРАТИЧНІ ОБРАЗИ В E_2, ЗАДАНІ КАНОНІЧНИМИ РІВНЯННЯМИ

8.1.1. Еліпс

Означення 8.1. *Еліпсом* називається множина точок, для кожної з яких сума відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються *фокусами*, є стале число $2a$, яке більше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси еліпса розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$, то в цій системі координат рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{8.1}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$.

Рівняння (8.1) називається *канонічним рівнянням еліпса*.

У разі такого вибору системи координат осі координат збігаються з осями симетрії еліпса, а початок координат — з центром симетрії еліпса (рис. 8.1). Точки перетину еліпса з осями координат $A_1(a;\ 0)$, $A_2(-a;\ 0)$, $B_1(0;\ b)$, $B_2(0;\ -b)$ називаються *вершинами еліпса*. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, що з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їх довжини $2a$ і $2b$, називаються відповідно *великою* (фокальною) та *малою осями еліпса*. Параметри a та b, які входять у рівняння еліпса (8.1), дорівнюють його півосям.

Форма еліпса (міра його стиску) характеризується його ексцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Оскільки $c < a$, то $0 \le \varepsilon < 1$. В окремому випадку, коли $a = b$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$), еліпс перетворюється в коло, рівняння якого має вигляд

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Відстані $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ від довільної точки $M(x;\ y)$ еліпса до фокусів називаються *фокальними радіусами* точки M.

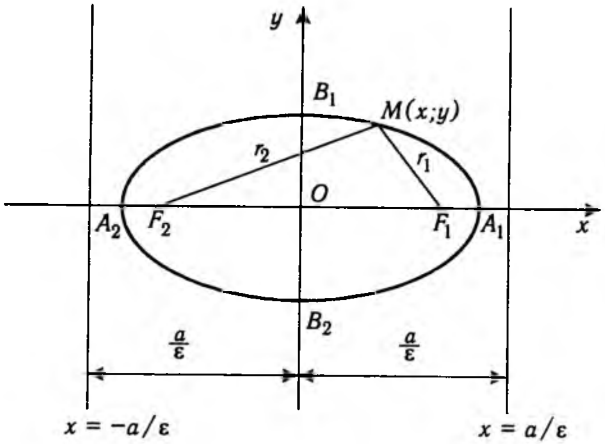

Рис. 8.1

З означення еліпса випливає, що $r_1 + r_2 = 2a$. Фокальні радіуси можуть бути обчислені за формулами

$$r_1 = a - \varepsilon x; \qquad r_2 = a + \varepsilon x,$$

де x — абсциса точки M.

Директрисами еліпса називаються дві прямі, паралельні малій осі, які віддалені від неї на відстань a/ε (коло директрис не має).

Рівняння директрис мають вигляд $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

ТЕОРЕМА 8.1. Якщо r — відстань від довільної точки еліпса до деякого фокуса, d — відстань цієї самої точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, що дорівнює ексцентриситету ε еліпса, тобто $r/d = \varepsilon$.

Рівняння дотичної до еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в точці $M(x_1;\ y_1)$ еліпса має вигляд

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Якщо в декартовій прямокутній системі координат фокуси еліпса розташовані на прямій $y = y_0$, симетрично відносно прямої $x = x_0$, у точках $F_1(x_0 + c;\ y_0)$ і $F_2(x_0 - c;\ y_0)$, то рівняння еліпса набуде вигляду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Задача. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M(-2\sqrt{5}\ ;\ 2)$ і відстань між його фокусами $2c = 6\sqrt{3}$.

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — шукане рівняння еліпса. Координати точки M повинні задовольняти це рівняння. Отже, $\dfrac{20}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1$. Оскільки $b^2 = a^2 - c^2$, то $a^2 - b^2 = 27$.

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{20}{a^2} + \dfrac{4}{b^2} = 1, \\ a^2 - b^2 = 27, \end{cases}$$

знаходимо $a^2 = 36$, $b^2 = 9$.

Таким чином, рівняння еліпса має вигляд $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Задачі для розв'язування

778. Знайти геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох даних точок $F_1(-3;\ 0)$ та $F_2(3;\ 0)$ є величина стала, яка дорівнює 10.

779. Знайти геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-4;\ 0)$ і даної прямої $4x + 25 = 0$ дорівнює $4/5$.

780. Знайти геометричне місце точок, які розміщені від точки $A(3;\ 0)$ вдвічі ближче, ніж від прямої $x = 12$.

781. Скласти рівняння кривої, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $M_1(-3;\ 0)$ та $M_2(3;\ 0)$ дорівнює 50.

782. Скласти рівняння еліпса , фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:

1) його півосі дорівнюють 5 та 2;

2) його велика вісь дорівнює 10, а відстань між фокусами $2c = 8$;

3) його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$;

4) відстань між фокусами $2c = 6$ та ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;

5) його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$;

6) його мала вісь дорівнює 10, а ексцентриситет $\varepsilon = 12/13$;

7) відстань між його директрисами дорівнює 5 та відстань між фокусами $2c = 4$;

8) його велика вісь дорівнює 8, а відстань між директрисами дорівнює 16;

9) його мала вісь дорівнює 6, а відстань між директрисами дорівнює 13;

10) відстань між його директрисами дорівнює 32 та $\varepsilon = 1/2$.

783. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, знаючи, що:

1) півосі його відповідно дорівнюють 4 та 2;

2) відстань між фокусами дорівнює 6 і велика піввісь дорівнює 5;

3) велика піввісь дорівнює 10 та ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;

4) мала піввісь дорівнює 3 та ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$;

5) сума півосей дорівнює 8 і відстань між фокусами дорівнює 8.

784. Дано рівняння еліпса: $9x^2 + 25y^2 = 225$. Обчислити довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса. Скласти рівняння директрис.

785. Дано рівняння еліпса: $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Обчислити довжину осей, координати фокусів, ексцентриситет еліпса.

786. Дано еліпс $9x^2 + 5y^2 = 45$. Знайти його півосі, фокуси, ексцентриситет, рівняння директрис.

787. Відстані одного з фокусів еліпса до кінців його великої осі відповідно дорівнюють 7 та 1. Скласти рівняння цього еліпса.

788. Еліпс проходить через точки $M(\sqrt{3}; -2)$ і $N(-2\sqrt{3}; 1)$. Скласти рівняння еліпса, беручи його осі за осі координат.

789. Дано еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$. Написати рівняння його директрис.

790. Мала вісь еліпса дорівнює 8, його директриси задані рівняннями $x = \pm 8$. Знайти рівняння цього еліпса.

791. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо його малу вісь видно з фокуса під прямим кутом.

792. Визначити ексцентриситет еліпса, якщо відстань між директрисами в 4 рази більша за відстань між фокусами.

793. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 2/3$, фокальний радіус точки M еліпса дорівнює 10. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

794. Еліпс, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, проходить через точку $M(1; 1)$ та має ексцентриситет $\varepsilon = 3/5$. Скласти рівняння еліпса.

795. На еліпсі $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ дано точку $M(2; -5/3)$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

796. Визначити фокальні радіуси точки $M(-4; 2{,}4)$, яка належить еліпсу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

797. Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 1/3$, центр його збігається з початком координат, один з фокусів $(-2; 0)$. Обчислити відстань від точки M_1 еліпса з абсцисою, яка дорівнює 2, до однобічної з цим фокусом директриси.

798. На еліпсі $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ знайти точку, відстань якої від правого фокуса в 4 рази більша за відстань від її лівого фокуса.

799. На еліпсі $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, для якої добуток фокальних радіусів дорівнює квадрату малої півосі.

800. На еліпсі $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ знайти точку, відстань якої до малої осі дорівнює 5.

801. На еліпсі $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, різниця фокальних радіусів якої дорівнює 6,4.

802. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань яких до правого фокуса дорівнює 14.

803. В еліпс $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ вписано правильний трикутник, одна з вершин якого збігається з правою вершиною великої осі. Визначити координати двох інших вершин трикутника.

804. Знайти точки перетину еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ з прямою $2x - y - 9 = 0$.

805. Знайти точки перетину прямої $x + 2y - 7 = 0$ та еліпса $x^2 + 4y^2 = 25$.

806. Скласти рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точці (2; −3).

807. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$, проведених з точки $A(-6; 3)$.

808. Знайти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{30}+\frac{y^2}{24}=1$, паралельних прямій $2x - y + 17 = 0$.

809. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, які перпендикулярні до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.

810. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=2/3$, фокус $F(2; 1)$ та рівняння відповідної директриси $x - 5 = 0$.

811. Скласти рівняння еліпса, якщо відомі його ексцентриситет $\varepsilon=1/2$, фокус $F(-4; 1)$ та рівняння відповідної директриси $y + 3 = 0$.

812. Скласти рівняння еліпса, знаючи що:

1) його велика вісь дорівнює 26 та фокуси $F_1(-10; 0)$, $F_2(14; 0)$;

2) його мала вісь дорівнює 2 та фокуси $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$;

3) його фокуси $F_1(1; 3)$, $F_2(3; 1)$ та відстань між директрисами дорівнює $12\sqrt{2}$;

4) його фокуси $F_1(-2; 3/2)$, $F_2(2; -3/2)$ та ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}/2$.

8.1.2. Гіпербола

Означення 8.2. *Гіперболою* називається множина точок, для кожної з яких модуль різниці відстаней до двох фіксованих точок площини, що називаються ***фокусами***, є стале додатне число $2a$, яке менше за відстань $2c$ між фокусами.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрано так, що фокуси даної гіперболи розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат в точках $F_1(c; 0)$ і $F_2(-c; 0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (8.2)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$. Рівняння (8.2) називається ***канонічним рівнянням гіперболи.***

У разі такого вибору системи координат осі координат збігаються з осями симетрії гіперболи, а початок координат — з її центром симетрії (рис. 8.2). Точки $A_1(a; 0)$ і $A_2(-a; 0)$ називаються ***вершинами гіперболи***, а точки $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$ — ***уявними вершинами гіперболи.*** Відрізок A_1A_2 і його довжина $2a$ називається *дійсною віссю*, а відрізок B_1B_2 і його

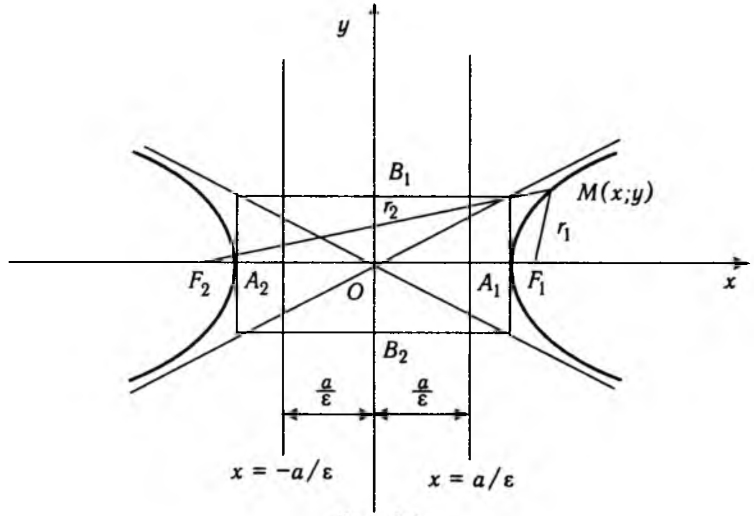

Рис. 8.2

довжина $2b$ — ***уявною віссю гіперболи. Ексцентриситетом гіперболи*** називається відношення відстані між фокусами до дійсної осі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \quad (\text{якщо } c > a, \text{ то } \varepsilon > 1).$$

Відстані $r_1 = MF_1$ і $r_2 = MF_2$ від будь-якої точки гіперболи $M(x; y)$ до фокусів називаються ***фокальними радіусами*** точки M. З означення гіперболи випливає, що $|r_1 - r_2| = 2a$.

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ правої гілки гіперболи обчислюють за формулами:

$$r_1 = MF_1 = \varepsilon x - a; \quad r_2 = MF_2 = \varepsilon x + a.$$

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ лівої гілки гіперболи знаходять за формулами:

$$r_1 = MF_1 = -\varepsilon x + a; \quad r_2 = MF_2 = -\varepsilon x - a.$$

Директрисами гіперболи називаються прямі, перпендикулярні до фокальної осі, які віддалені від центра на відстань a/ε. Директриси мають рівняння $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

ТЕОРЕМА 8.2. Якщо r — відстань від довільної точки гіперболи до деякого фокуса, d — відстань від цієї самої точки до однобічної з цим фокусом директриси, то відношення r/d є величина стала, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи $r/d=\varepsilon$.

Гіпербола має дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm\frac{b}{a}x$.

Асимптоти містять діагоналі прямокутника, центр якого збігається з центром гіперболи, а сторони рівні і паралельні осям гіперболи.

Якщо $a = b$, то рівняння гіперболи має вигляд

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Така гіпербола називається *рівнобічною*.

Дві гіперболи, визначені в одній системі координат рівняннями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, називаються *спряженими*. Такі гіперболи мають спільні осі та асимптоти, проте дійсна вісь однієї є уявною віссю другої і навпаки.

Рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці $M(x_1;$ $y_1)$ гіперболи має вигляд $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

Якщо осі декартової системи координат вибрані так, що фокуси гіперболи розташовані на прямій $y = y_0$ симетрично відносно точки $M_0(x_0;\, y_0)$ в точках $F_1(x_0 + c;\, y_0)$ і $F_2(x_0 - c;$ $y_0)$, то в цій системі координат рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Задача. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, знаючи, що відстань між її вершинами дорівнює 48 та рівняння асимптот мають вигляд $y = \pm\frac{5}{12}x$.

Розв'язання. Оскільки відстань між вершинами гіперболи дорівнює $2a$, то $2a = 48$ або $a = 24$.

Асимптоти гіперболи мають рівняння $y = \pm\frac{b}{a}x$. Отже, $b/a = 5/12$, звідки $b = \frac{24 \cdot 5}{12}$, або $b = 10$.

Отже, рівняння шуканої гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{576} - \frac{y^2}{100} = 1.$$

Задачі для розв'язування

813. Знайти геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней від двох даних точок $F_1(-5;\, 0)$ і $F_2(5;\, 0)$ є величина стала, яка дорівнює 6.

814. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстаней до даної точки $F(-5;\, 0)$ і даної прямої $5x + 16 = 0$ дорівнює $5/4$.

815. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відстань від точки $F(0;\, 6)$ у півтора раза більша за відстань від прямої $y = 8/3$.

816. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від кола $x^2 + 4x + y^2 = 0$ та від точки $M(2;\, 0)$.

817. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) відстань між фокусами $2c = 6$, ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$;

2) рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ та відстань між фокусами $2c = 20$;

3) відстань між директрисами дорівнює $22\frac{2}{13}$ та відстань між фокусами $2c = 26$;

4) ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$ та відстань між директрисами дорівнює $8/3$.

818. Дано гіперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. Знайти:

1) координати фокусів;
2) ексцентриситет;
3) написати рівняння асимптот і директрис;
4) скласти рівняння спряженої гіперболи та обчислити її ексцентриситет.

819. Дано гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти півосі a та b, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

820. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:

1) ексцентриситет гіперболи дорівнює $\sqrt{2}$ та графік гіперболи проходить через точку $M(-5;\ 3)$;

2) рівняння асимптот $y=\pm\frac{2}{3}x$ та графік гіперболи проходить через точку $M(9/2;\ -1)$;

3) рівняння асимптот гіперболи $y=\pm\frac{3}{4}x$ та рівняння директрис $x=\pm\frac{16}{5}$.

821. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо:

1) відстань між фокусами $2c=10$ та ексцентриситет $\varepsilon=5/3$;

2) рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$ та відстань між вершинами дорівнює 48.

822. Дано гіперболу $16x^2-9y^2=-144$. Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет та рівняння асимптот і директрис.

823. Написати рівняння двох спряжених гіпербол, знаючи, що відстань між директрисами першої з них дорівнює 7,2, а відстань між директрисами другої дорівнює 12,8.

824. Скласти рівняння гіперболи, яка має спільні фокуси з еліпсом $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$, за умови, що ексцентриситет її $\varepsilon=1{,}25$.

825. Написати рівняння гіперболи, яка проходить через фокуси еліпса $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ та має фокуси у вершинах цього еліпса.

826. Фокуси гіперболи збігаються з вершинами еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, а директриси гіперболи проходять через фокуси цього еліпса. Скласти рівняння гіперболи.

827. Обчислити півосі гіперболи, знаючи, що кут між асимптотами прямий і рівняння директрис $x=\pm3\sqrt{2}$.

828. Визначити кут між асимптотами гіперболи, якщо відстань між фокусами вдвічі більша за відстань між директрисами.

829. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо кут між асимптотами дорівнює 60°.

830. Довести, що відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її асимптоти дорівнює b.

831. Довести, що добуток відстаней від будь-якої точки гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до її двох асимптот є величина стала, яка дорівнює $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

832. На гіперболі $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ взято точку, абсциса якої дорівнює 10, ордината додатна. Обчислити фокальні радіуси цієї точки та кут між ними.

833. На гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, для якої фокальні радіуси перпендикулярні один до одного.

834. На гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ знайти точку, для якої відстань від лівого фокуса вдвічі більша за відстань від правого фокуса.

835. На гіперболі $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ знайти точку, яка була б в 3 рази ближча від однієї асимптоти, ніж від другої.

836. Гіпербола $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ проходить через точку $M(-5;\ 9/4)$. Знайти фокальні радіуси точки M.

837. Переконавшись, що точка $M(10,-\sqrt{5})$ належить гіперболі $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$, скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

838. На лівій гілці гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ знайти точку, правий фокальний радіус якої дорівнює 18.

839. Знайти фокальні радіуси гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ у точках перетину її з колом $x^2+y^2=91$.

840. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=2$, фокальний радіус її точки M, проведений з деякого фокуса, дорівнює 16. Обчислити відстань від точки M до однобічної з цим фокусом директриси.

841. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки M гіперболи до директриси дорівнює 4. Обчислити відстань від точки M до фокуса, однобічного з цією директрисою.

842. Знайти точки перетину прямої $x - 5y = 0$ і гіперболи $\frac{x^2}{90} - \frac{y^2}{36} = 1$.

843. Знайти точки перетину прямої $4x - 3y - 16 = 0$ і гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

844. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ у точці $A(5, -4)$.

845. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$, паралельних прямій $x + y = 7$.

846. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярних до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

847. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 1$, проведених з точки $C(1; -10)$. Написати рівняння хорди, що з'єднує точки дотику.

848. Гіпербола проходить через точку $A(\sqrt{6}; 3)$ і дотикається до прямої $9x + 2y - 15 = 0$. Скласти рівняння цієї гіперболи за умови, що її осі збігаються з осями координат.

849. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon = 5/4$, фокус $F(5; 0)$ та рівняння відповідної директриси $5x - 16 = 0$.

850. Точка $A(-3; 5)$ належить гіперболі, фокус якої $F(-2; -3)$, а рівняння відповідної директриси $x + 1 = 0$. Написати рівняння цієї гіперболи.

851. Скласти рівняння гіперболи, знаючи, що відстань між її вершинами дорівнює 24 і фокуси $F_1(-10; 2)$, $F_2(16; 2)$.

852. Написати рівняння гіперболи, фокуси якої $F_1(3; 4)$, $F_2(-3; -4)$ та відстань між директрисами дорівнює 3,6.

853. Скласти рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 90° і фокуси $F_1(4; -4)$, $F_2(-2; 2)$.

8.1.3. Парабола

Означення 8.3. *Параболою* називається множина точок, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки площини, що називається *фокусом*, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої, яка не проходить через фокус і називається *директрисою*.

Відстань p від фокуса параболи до її директриси називається *параметром параболи*.

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус міститься в точці $F(p/2; 0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x = -\frac{p}{2}$, то рівняння параболи має вигляд

$$y^2 = 2px. \tag{8.3}$$

Рівняння (8.3) називається *канонічним рівнянням параболи*.

Парабола має одну вісь симетрії, вісь симетрії параболи називається *віссю параболи*. Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її *вершиною*. Для параболи, яка задана рівнянням (8.3), віссю є вісь Ox, а вершиною — початок координат (рис. 8.3).

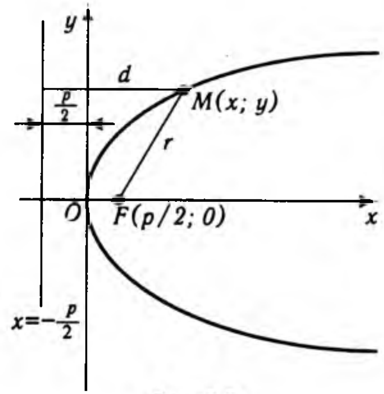

Рис. 8.3

Фокальний радіус r довільної точки $M(x; y)$ параболи (тобто довжина відрізка FM) може бути обчислений за формулою

$$r = x + p/2,$$

де x — абсциса точки M. Якщо директриса параболи — пряма $x = p/2$, а фокус — точка $F(-p/2; 0)$, рівняння параболи має вигляд $y^2 = -2px$. У випадку, якщо директриса параболи — пряма $y = -p/2$, а фокус — точка $F(0; p/2)$ рівняння параболи має вигляд $x^2 = 2py$.

Рівняння дотичної до параболи $y^2 = 2px$ у точці $M(x_1; y_1)$ параболи має вигляд

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Якщо осі декартової прямокутної системи координат вибрані так, що фокус параболи міститься в точці $F(x_0 + p/2; y_0)$, а директриса перпендикулярна до осі Ox і має рівняння $x = x_0 - p/2$, то рівняння параболи має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Зауваження 8.1. Нехай r — відстань від довільної точки параболи до фокуса (фокальний радіус), d — відстань від цієї самої точки до директриси. Тоді за означенням параболи $r = d$. Звідси згідно з твердженням теорем 8.1 та 8.2 вважають, що ексцентриситет параболи $\varepsilon = r/d = 1$.

Задача. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі Ox і відтинає від прямої $y = 2\sqrt{2}x$ хорду довжиною $3/4$.

Розв'язання. Рівняння шуканої параболи має вигляд $y^2 = \pm 2px$. Для визначення координат точок перетину прямої і параболи розв'яжемо систему рівнянь (для випадку $y^2 = 2px$):

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ y = 2\sqrt{2}x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2/2p, \\ y = 2\sqrt{2}\, y^2/2p, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2/2p, \\ \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = p/\sqrt{2}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = p/4, \\ y = p/\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким чином, дістанемо дві точки перетину прямої з параболою $O(0; 0)$ і $M(p/4; p/\sqrt{2})$.

Довжину хорди обчислимо як відстань між точками O і M:

$$\frac{3}{4} = \sqrt{\frac{p^2}{16} + \frac{p^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \sqrt{\frac{9}{16}p^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}p.$$

Звідси $p = 1$, або $2p = 2$. Отже, шукане рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2x$.

Аналогічно у випадку параболи $y^2 = -2px$ здобудемо $y^2 = -2x$.

Задачі для розв'язування

854. Знайти геометричне місце точок, для яких відстань до даної точки $F(3; 0)$ дорівнює відстані до даної прямої $x + 3 = 0$.

855. Скласти рівняння геометричного місця точок, відстані яких до даного кола $(x - 5)^2 + y^2 = 9$ і даної прямої $x + 2 = 0$ рівні між собою.

856. Знайти геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до осі Ox і проходять через точку $(3; 4)$.

857. Знайти геометричне місце точок, для кожної з яких відстані від осі Ox та від точки $F(2; 2)$ рівні.

858. Визначити параметр та розташування відносно координатних осей таких парабол:

1) $y^2 = 6x$; 2) $x^2 = 5y$; 3) $y^2 = -4x$; 4) $x^2 = -y$.

859. Скласти рівняння параболи, вершина якої міститься у початку координат, знаючи, що:

1) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $A(9; 6)$;

2) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $C(1; 1)$.

860. Скласти рівняння параболи, знаючи що вісь ординат є директрисою параболи, а фокус має координати $(5; 0)$.

861. Знайти фокус F та рівняння директриси параболи $y^2 = 24x$.

862. На параболі $y^2 = 8x$ визначити точку, фокальний радіус якої дорівнює 20.

863. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 20x$, якщо абсциса точки M дорівнює 7.

864. Обчислити фокальний радіус точки M параболи $y^2 = 12x$, якщо ордината точки M дорівнює 6.

865. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точки, фокальний радіус яких дорівнює 13.

866. На параболі $y^2 = 4{,}5x$ взято точку $M(x; y)$, яка розміщена від директриси на відстані $d = 9{,}125$. Обчислити відстань цієї точки від вершини параболи.

867. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(-7; 0)$ та рівняння директриси $x - 7 = 0$.

868. Встановити, що кожне з таких рівнянь визначає параболу, знайти координати її вершин та параметр:

1) $y^2 = 4x - 8$; 2) $x^2 = 2 - y$; 3) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$;

4) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 2x - 7$; 5) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

869. Скласти рівняння параболи, якщо дано її фокус $F(4; 3)$ та рівняння директриси $y + 1 = 0$.

870. Скласти рівняння параболи, якщо її фокус $F(7; 2)$ та рівняння директриси $x - 5 = 0$.

871. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, симетричної відносно осі Ox, яка відтинає від прямої $y = x$ хорду завдовжки $4\sqrt{2}$.

872. Парабола $y^2 = 2x$ відтинає від прямої, що проходить через початок координат, хорду завдовжки $3/4$. Скласти рівняння цієї прямої.

873. Через точку $A(2; 1)$ провести таку хорду параболи $y^2 = 4x$, яка б поділялася точкою A навпіл.

874. Знайти точки перетину прямої $x + y - 3 = 0$ і параболи $x^2 = 4y$.

875. Знайти точки перетину прямої $3x + 4y - 12 = 0$ і параболи $y^2 = -9x$.

876. Знайти точки перетину параболи $y^2 = 12x$ з еліпсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

877. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ та кола $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

878. Через точку $P(5; -7)$ провести дотичну до параболи $y^2 = 8x$.

879. Дано рівняння параболи $y^2 = 4x$ та рівняння дотичної до неї $x + 3y + 9 = 0$. Знайти точку їх дотику.

880. До параболи $y^2 = 12x$ провести дотичну в точці з абсцисою $x = 3$.

881. Скласти рівняння дотичної до параболи $x^2 = 16y$, яка перпендикулярна до прямої $2x + 4y + 7 = 0$.

882. Визначити умову, за якої пряма $y = kx + b$ дотикається до параболи $y^2 = 2px$.

883. Знайти найкоротшу відстань параболи $y^2 = 64x$ від прямої $4x + 3y + 46 = 0$.

884. Знайти спільні дотичні еліпса $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ та параболи $y^2 = \frac{20}{3}x$.

885. Скласти рівняння дотичних до параболи $y^2 = 36x$, проведених з точки $A(2; 9)$.

886. З точки $A(5; 9)$ проведені дотичні до параболи $y^2 = 5x$. Скласти рівняння хорди, яка з'єднує точки дотику.

887. Довести, що будь-яка дотична параболи перетинає директрису і фокальну хорду, яка перпендикулярна до осі, у точках, рівновіддалених від фокуса.

888. Довести, що дві параболи, які мають спільну вісь і спільний фокус, що розташований між їх вершинами, перетинаються під прямим кутом.

889. Дано вершину параболи $A(6; -3)$ та рівняння її директриси $3x - 5y + 1 = 0$. Знайти фокус F цієї параболи.

890. Скласти рівняння параболи, якщо відома вершина параболи $A(-2; -1)$ та рівняння директриси $x + 2y - 1 = 0$.

8.2. ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ. РІВНЯННЯ ЕЛІПСА, ГІПЕРБОЛИ, ПАРАБОЛИ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

8.2.1. Полярна система координат у E_2

Означення 8.4. Говорять, що в E_2 задано полярну систему координат, якщо:

1) в E_2 вибрано точку O (полюс), вісь $O\rho$ (полярна вісь), що виходить з цієї точки;

2) координатами (полярними) точки M є пара чисел $(\rho; \varphi)$, де $\rho = |\overline{OM}|$, φ — кут між віссю $O\rho$ і вектором $\overline{OM}$ (рис. 8.4).

Означення 8.5. Число ρ називається *полярним радіусом,* φ — *полярним кутом* точки M. Запис $M(\rho; \varphi)$ означає, що точка M має координати ρ та φ.

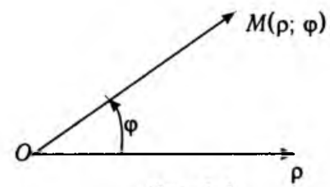

Рис. 8.4

Зауваження 8.2. 1. Додатним поворотом у площині навколо точки O вважається поворот у напрямі проти руху годинникової стрілки.

2. Полярний кут точки має нескінченну множину значень, що відрізняються між собою на величину $2\pi n$, де $n \in Z$. Значення полярного кута, яке задовольняє нерівність $0 \le \varphi < 2\pi$, називається *головним.* У цьому випадку полярна система координат встановлює взаємно однозначну відповідність між точками площини і парами чисел $(\rho; \varphi)$. Винятком є тільки точка O, для якої $\rho = 0$, а кут φ неозначений.

3. За означенням число ρ невід'ємне. Іноді припускають, що ρ може набувати від'ємних значень. У цьому випадку пара $(\rho;\varphi)$ визначає точку M, симетричну точці $M'(|\rho|;\varphi)$ відносно полюса O. Якщо координата ρ може набувати і від'ємних значень, то систему координат називають *узагальненою полярною*.

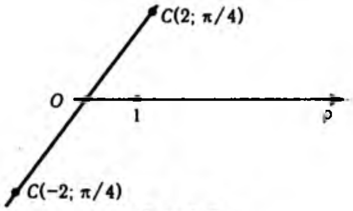

Рис.8.5

Приклад. Пара $(-2;\pi/4)$ визначає точку C, симетричну точці C' $(2;\pi/4)$ відносно полюса O (рис. 8.5).

Задача. Визначити множини точок, що задаються умовами:
1) $\rho = a$, $(a \geq 0)$; 2) $a < \rho < b$ $(0 < a < b)$; 3) $\varphi = \pi/6$; 4) $\alpha \leq \varphi \leq \beta$?

Розв'язання. 1. Точки, полярний радіус яких дорівнює a, лежать на колі радіуса a з центром у полюсі.

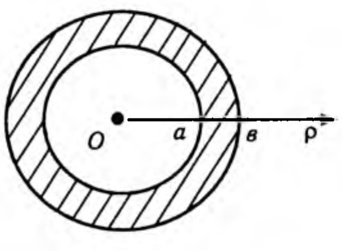

Рис. 8.6

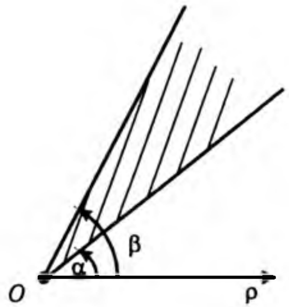

Рис. 8.7

2. Умова $a < \rho < b$ задає кільце між концентричними колами радіусів a та b з центрами в полюсі, причому ці кола вилучаються (рис. 8.6).

3. Точки, полярний кут яких дорівнює $\pi/6$, лежать на промені, що виходить з полюса під кутом $\pi/6$ до полярної осі, а тому умова $\varphi = \pi/6$ задає цей промінь.

Умова $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ задає нескінченний сектор, що міститься між променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$, включаючи ці промені (рис. 8.7).

Задачі для розв'язування

891. Побудувати точки, полярні координати яких мають значення: $(1;\pi/6)$, $(3;\pi/2)$, $(2;3\pi/4)$, $(1;5;0)$, $(3;\pi)$, $(\sqrt{2};\pi/4)$.

892. Точка A має полярні координати $(5;2\pi/3)$. Знайти:
1) точку B, симетричну точці A відносно полюса;
2) точку C, симетричну точці A відносно полярної осі.

893. У полярній системі координат дано точки: $A(2;\pi/6)$, $B(3;4\pi/3)$, $C(1;3\pi/2)$, $D(5;\pi)$, $E(5;0)$. Які координати матимуть ці точки, якщо повернути полярну вісь у додатному напрямі на кут $3\pi/4$?

894. Які множини точок площини задаються умовами:
1) $\rho = 3$; 2) $\rho = 1$; 3) $\rho = a$; 4) $\varphi = \pi/4$; 5) $\varphi = \pi/3$;
6) $\varphi = \text{const}$; 7) $1/2 \leq \rho < 2$; 8) $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$?

895. Обчислити площу трикутника OAB, одна з вершин якого збігається з полюсом, а дві інші мають полярні координати $A(\rho_1;\varphi_1)$ $B(\rho_2;\varphi_2)$.

896. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого збігається з полюсом, а дві інші мають полярні координати $(5;\ \pi/4)$ та $(4;\ \pi/12)$.

897. Обчислити площу трикутника з вершинами (в полярній системі координат): $A(3;\ \pi/8)$, $B(8;\ 7\pi/24)$, $C(6;\ 5\pi/8)$.
Вказівка: зробити рисунок та обчислити площу, комбінуючи площі трикутників, що мають одну вершину в полюсі.

898. Вивести формулу відстані між точками $M_1(\rho_1;\varphi_1)$ і $M_2(\rho_2;\varphi_2)$ у полярній системі координат.

899. Точка P має полярні координати $(5;\ \pi/4)$, а точка Q — координати $(8;\ -\pi/12)$. Знайти відстань між точками P і Q.

900. Точка P має полярні координати $(4;\ \pi/5)$, а точка Q — координати $(6;\ 6\pi/5)$. Знайти відстань між точками P і Q.

901. У полярній системі координат задано три точки: $A(5;\ \pi/2)$, $B(8;\ 5\pi/6)$, $C(3,\ 7\pi/6)$. Переконатись, що трикутник ABC — правильний.

У задачах 902—909 необхідно накреслити лінію, яку задано рівнянням у полярній системі координат (ρ,φ). Для полегшення побудови складіть таблицю тих задовольняючих рівнянню пар значень ρ і φ, які легко знайти.

902. $\rho = \sin 3\varphi$. **903.** $\rho = 1 + \cos\varphi$. **904.** $\rho^2 = \sin\varphi$. **905.** $\rho = 3 + 2\cos\varphi$. **906.** $\rho = \cos 4\varphi$. **907.** $\rho = 2 - \sin\varphi$. **908.** $\rho = 2/\sin\varphi$. **909.** $\rho = 1 - 2\sin\varphi$.

8.2.2. Зв'язок між полярними та прямокутними декартовими координатами точки в E_2

Нехай в E_2 задано прямокутну декартову систему координат Oxy (праву) і полярну систему координат $O'\rho$. У цьому разі припускається, що початок O декартової системи є одночасно і полюсом O' полярної системи, а напрям полярної осі $O'\rho$ збігається з напрямом осі Ox (рис. 8.8).

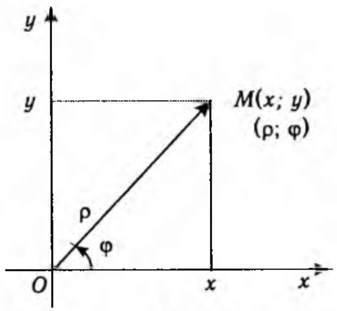

Рис. 8.8

Тоді довільна точка M в E_2 має два набори координат $(x; y)$ та (ρ, φ). Зв'язок між цими координатами виражається у вигляді

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{8.4}$$

і навпаки

$$\rho^2 = x^2 + y^2,$$

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{8.5}$$

Формули (8.4) є формулами переходу від полярних координат до декартових прямокутних, формули (8.5) — від декартових до полярних координат.

Зауваження 8.3. Формули (8.4) та (8.5) дійсні і для узагальненої полярної системи координат.

Задача. Рівняння лінії в полярній системі координат має вигляд $\rho^2\cos\varphi\sin\varphi = 1$. Знайти її рівняння у відповідній прямокутній системі координат.

Розв'язання. Скориставшись формулами (8.5), перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)xy}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}} = 1, \Leftrightarrow xy = 1.$$

Це рівняння гіперболи.

Задачі для розв'язування

У задачах 910—913 координати точок задані у деякій прямокутній системі координат. Знайти координати цих точок у відповідній полярній системі координат:

910. $(3; -4)$. **911.** $(-1; 1)$. **912.** $(0; 2)$. **913.** $(5; 0)$.

У задачах 914—917 рівняння лінії задано у прямокутній системі координат $(x; y)$. Знайти рівняння цієї самої лінії у відповідній полярній системі координат (ρ, φ):

914. $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. **915.** $(x^2 + y^2)^{3/2} = x + y$. **916.** $x^2y^2 = = x^2 + y^2$. **917.** $x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} - 3 = 0$.

У задачах 918—921 рівняння лінії задано у полярній системі координат $(\rho; \varphi)$. Знайти її рівняння у відповідній декартовій системі координат (x, y).

918. $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$. **919.** $\rho^2 = \sin\varphi$. **920.** $\rho = 2/(5\cos\varphi - 3\sin\varphi)$. **921.** $\rho^2 - 2p\sin\varphi - 8 = 0$.

922. Знаючи полярні координати точки $\rho = 10$, $\varphi = \pi/6$, знайти її прямокутні координати, якщо полюс міститься в точці (2; 3), а полярна вісь паралельна осі Ox.

923. Полюс полярної системи координат міститься в точці (3; 5), а додатний напрям полярної осі збігається з додатним напрямом осі Oy. Знайти полярні координати точок: $M_1(9; -1)$ і $M_2(5; 5 - 2\sqrt{3})$.

8.2.3. Рівняння еліпса, гіперболи, параболи в полярній системі координат

Якщо полюс O' полярної системи координат збігається з фокусом F параболи (еліпса, гіперболи), полярна вісь перпендикулярна до директриси D (директрис) і напрямлена так, що не перетинає директрису D (однобічну директрису D) (рис. 8.9), то рівняння параболи (еліпса, гілки гіперболи, відповідної фокусу F) має вигляд

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \tag{8.6}$$

де p — відстань від фокуса до директриси (відповідної директриси); ε — ексцентриситет відповідної лінії другого порядку.

У разі такого вибору полярної системи координат рівняння гілки гіперболи, що не відповідає вибраному фокусу F, має вигляд

$$\rho = \frac{-\varepsilon p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Якщо вибір полярної системи координат відмінний від попереднього випадку лише тим, що полярна вісь перетинає

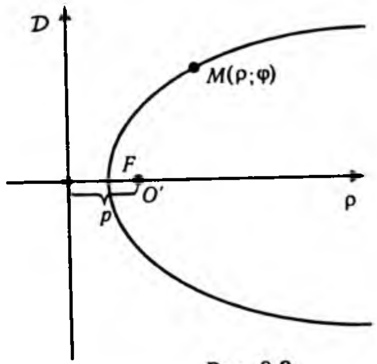

Рис. 8.9

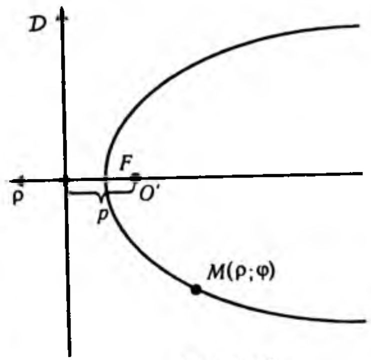

Рис. 8.10

директрису D (відповідну директрису D) (рис. 8.10), то рівняння параболи (еліпса, гілки гіперболи, відповідної F) має вигляд

$$\rho = \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (8.7)$$

У разі такого вибору системи координат рівняння гілки гіперболи, що не відповідає вибраному фокусу F, має вигляд

$$\rho = \frac{-\varepsilon p}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

Якщо полюс полярної системи збігається з центром еліпса (гіперболи), а полярна вісь ортогональна до директрис, то рівняння еліпса (гіперболи) матиме вигляд

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi} \qquad \left(\rho^2 = \frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}\right).$$

Зауваження 8.4. Якщо полюс збігається з центром кола радіуса a, а полярна вісь має довільний напрям, то рівняння кола в такій полярній системі має вигляд

$$\rho = a.$$

Якщо полюс полярної системи координат збігається з вершиною параболи, а полярна вісь перпендикулярна до директриси і не перетинає її, то рівняння параболи має вигляд

$$\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

У цьому випадку, якщо полярна вісь перетинає директрису, то рівняння має вигляд

$$\rho = -\frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Задача 1. Вивести полярне рівняння параболи (еліпса, гілки гіперболи), якщо полюс збігається з фокусом лінії, полярна вісь перпендикулярна до директриси (директрис) і напрямлена так, що не перетинає директрису (однобічну відповідну директрису).

Розв'язання. Нехай F — фокус цієї лінії, D — відповідна директриса (рис. 8.11). Спільна властивість еліпса, гіперболи і параболи полягає в тому, що для довільної точки лінії відношення r/d фокального радіуса r цієї точки до відстані d між цією точкою і відповідною директрисою є величина стала, яка дорівнює ε, де ε — ексцентриситет кривої ($\varepsilon<1$ для еліпса, $\varepsilon>1$ для гіперболи, $\varepsilon=1$ для параболи).

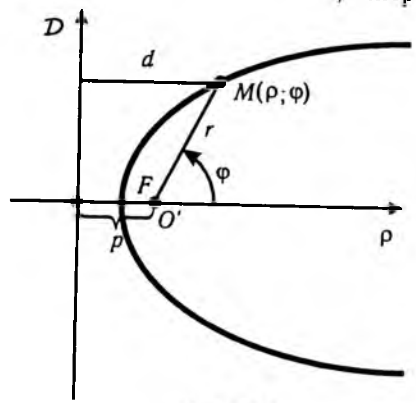

Рис. 8.11

Крім того, за умовою задачі полюс полярної системи збігається з фокусом лінії. В цьому випадку $r=\rho$. Оскільки полярна вісь перпендикулярна до директриси і не перетинає її, то $d = p+\rho\cos\varphi$, де p — відстань від фокуса F до директриси (p — параметр лінії). Тоді для довільної точки $M(\rho;\varphi)$ лінії маємо

$$\varepsilon = \frac{r}{d} = \frac{\rho}{d} = \frac{\rho}{p+\rho\cos\varphi}.$$

8 1-93

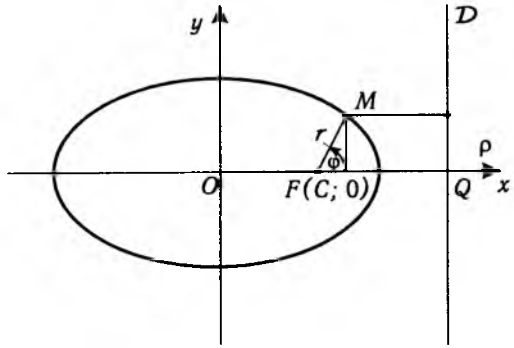

Рис. 8.12

Звідси

$$\rho = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Це рівняння збігається з (8.6).

Задача 2. Для еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ написати полярне рівняння, якщо полярна вісь співнапрямлена з віссю абсцис, а полюс міститься у правому фокусі.

Розв'язання. Оскільки полярна вісь перетинає однобічну директрису (рис. 8.12), то рівняння еліпса може бути записано у вигляді (8.7). У нашому випадку з рівняння еліпса маємо $a = 5$, $b = 4, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$, $p = QF = \frac{a}{\varepsilon} - c = \frac{5}{3/5} - 3 = \frac{25}{3} - 3 = \frac{16}{3}$.

Підставивши значення p і ε у рівняння (8.7), дістанемо

$$\rho = \frac{\frac{16}{3}\frac{3}{5}}{1 + \frac{3}{5}\cos\varphi} = \frac{16}{5 + 3\cos\varphi}.$$

Задачі для розв'язування

924. Відносно полярної системи координат скласти рівняння кола, радіус якого дорівнює a і центр міститься:

1) у полюсі; 2) у точці $(a; 0)$; 3) у точці $(\rho_1; \varphi_1)$.

925. Відносно полярної системи координат скласти рівняння еліпса, центр якого збігається з полюсом, а фокальна вісь — з полярною віссю.

926. Під яким кутом до фокальної осі нахилений діаметр еліпса $\rho^2 = \frac{288}{16 - 7\cos^2\varphi}$, довжина якого дорівнює 10 од.?

927. Скласти рівняння еліпса, беручи його фокальну вісь за полярну вісь і помістивши полюс:

1) у лівому фокусі еліпса;
2) у правому фокусі еліпса.

928. Обчислити довжину півосей та відстань між двома фокусами еліпса:

$$\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}.$$

929. Установити, що рівняння $\rho = \frac{21}{5 - 2\cos\varphi}$ визначає еліпс, скласти полярні рівняння його директрис.

930. На еліпсі $\rho = \frac{12}{3 - \sqrt{2}\cos\varphi}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 6.

931. Скласти рівняння гіперболи, центр якої збігається з полюсом і дійсна вісь з полярною віссю.

932. Обчислити кут між асимптотами гіперболи $\rho^2 = \frac{48}{4\cos^2\varphi - 1}$.

933. Скласти рівняння гіперболи, беручи її фокальну вісь за полярну вісь і помістивши полюс у правому фокусі гіперболи.

934. Скласти рівняння асимптот та директрис гіперболи $\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$.

935. Скласти полярне рівняння для правої гілки гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, якщо полярна вісь співнапрямлена з віссю абсцис, а полюс міститься в лівому фокусі.

936. Установити, що рівняння $\rho = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$ визначає праву вітку гіперболи, скласти полярні рівняння директрис і асимптот цієї гіперболи.

937. На гіперболі $\rho = \dfrac{15}{3 - 4\cos\varphi}$ знайти точки, полярний радіус яких дорівнює 3.

938. Скласти рівняння параболи, беручи її вісь за полярну вісь і вершину за полюс.

939. На параболі $\rho = \dfrac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ знайти точку, радіус-вектор якої дорівнює відстані цієї точки від директриси параболи.

940. Скласти рівняння параболи, фокус якої збігається з полюсом і вісь — з полярною віссю.

941. На параболі $\rho = \dfrac{p}{1 - \cos\varphi}$ знайти точку:

1) з найменшим радіусом-вектором;
2) з радіусом-вектором, який дорівнює параметру параболи.

942. Довести, що добуток перпендикулярів, які проведені з кінців будь-якої фокальної хорди на вісь параболи, є величина стала.

943. Відносно прямокутної системи координат написати канонічні рівняння таких кривих:

1) $\rho = \dfrac{25}{13 - 12\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{1}{3 - 3\cos\varphi}$;

3) $\rho = \dfrac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; 4) $\rho = \dfrac{4}{\sqrt{5} - \cos\varphi}$.

8.3. Зведення загальних рівнянь ліній другого порядку до канонічного вигляду

Нехай в E_2 введено декартову прямокутну систему координат xOy. *Лінією другого порядку* в E_2 називається лінія, рівняння якої є рівнянням другого степеня відносно змінних x та y.

Рівняння другого степеня відносно змінних x та y має загальний вигляд

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0. \quad (8.8)$$

Покладається, що a_{11}, a_{12}, a_{22} одночасно не дорівнюють нулю. Рівняння (8.8) називають *загальним рівнянням лінії другого порядку*.

ТЕОРЕМА 8.3. Загальне рівняння (8.8) лінії другого порядку за допомогою ортогонального перетворення базису та паралельного перенесення осей координат можна звести до одного з таких канонічних виглядів:

I. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + D = 0$, де $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$.

II. $\lambda_1 x^2 + 2a'_{20}y = 0$, де $\lambda_1 \neq 0,\ a'_{20} \neq 0$.

III. $\lambda_1 x^2 + D = 0$, де $\lambda_1 \neq 0$.

Зведення загального рівняння лінії другого порядку (8.8) до канонічного вигляду виконується так:

а) знаходять те ортогональне перетворення, яке зводить квадратичну форму старших членів до канонічного вигляду, і виконують у рівнянні відповідну заміну змінних. Внаслідок цього перетворення з рівняння зникає член, який містить добуток координат.

б) виконавши після цього паралельне перенесення осей нової системи координат, рівняння зводять до вигляду I, II або III.

Розглянемо загальне рівняння другого порядку (8.8). Тоді $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ матриця квадратичної форми старших членів.

Нехай λ_1 та λ_2 — власні числа матриці $\mathcal{A}$, $\vec{e}_1{}'$ та $\vec{e}_2{}'$ — одиничні ортогональні власні вектори, що відповідають числам λ_1 і λ_2. Якщо, не змінюючи початку координат, перейдемо до базису $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, у новій системі координат $x'Oy'$ рівняння (8.8) має вигляд

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0. \quad (8.9)$$

При цьому λ_1 та λ_2 одночасно не дорівнюють нулю, оскільки $\mathcal{A}$ ненульова матриця. Далі вважатимемо, що $\lambda_1 \neq 0$.

Можливі такі випадки.

Випадок I. Якщо $\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0$, то рівняння (8.9) можна записати у вигляді

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + \left(a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}\right) = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення координатних осей системи $x'Oy'$ за формулами

$$\dot{x} = x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \quad \dot{y} = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2},$$

дістанемо в системі координат $\dot{x}O_1\dot{y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1 \dot{x}^2 + \lambda_2 \dot{y}^2 + D = 0, \text{ де } O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}; -\frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$$

$$\text{і } D = a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}.$$

Випадок II. Нехай $\lambda_2 = 0$, $a'_{20} \neq 0$. Тоді рівняння (8.9) матиме вигляд $\lambda_1 x'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0$ або

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + 2a'_{20}\left(y' + \frac{a_{00}\lambda_1 - a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1}\right) = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення за формулами

$$\dot{x} = x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \quad \dot{y} = y' + \frac{a_{00}\lambda_1 - a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1},$$

здобудемо в системі $\dot{x}O_1\dot{y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1 \dot{x}^2 + 2a'_{20}\dot{y} = 0,$$

де $O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}; -\frac{a_{00}\lambda_1 - a'^2_{10}}{2a'_{20}\lambda_1}\right)$.

Випадок III. Нехай $\lambda_2 = a'_{20} = 0$. Тоді рівняння (8.9) матиме вигляд

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{10}x' + a_{00} = 0$$

або

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} = 0.$$

Виконавши паралельне перенесення за формулами

$$\dot{x} = x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \quad \dot{y} = y',$$

дістанемо в системі $\dot{x}O_1\dot{y}$ для рівняння (8.9)

$$\lambda_1 \dot{x}^2 + D = 0, \text{ де } O_1\left(-\frac{a'_{10}}{\lambda_1}; 0\right) \text{ і } D = a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1}.$$

Означення 8.6. Якщо рівняння (8.8) визначає на площині порожню множину, точку, пряму, пару прямих, то відповідна лінія другого порядку називається *виродженою.*

ТЕОРЕМА 8.4. Існує лише три види невироджених ліній другого порядку: еліпс, гіпербола, парабола.

Зауваження 8.5. За умовами теореми 8.3 матимемо: еліпс, якщо $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, D \neq 0$ та $\lambda_1\lambda_2 > 0, \lambda_1 D < 0$; гіперболу, якщо $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0, D \neq 0$ та $\lambda_1\lambda_2 < 0$; параболу, якщо $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0, a'_{20} \neq 0$.

Задача. Знайти канонічне рівняння та визначити тип кривої другого порядку

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0. \qquad (8.10)$$

Записати відповідні формули перетворення координат. Виконати схематичний рисунок лінії у початковій системі координат.

Розв'язання. Виписуємо квадратичну форму старших членів

$$F = 5x^2 + 4xy + 8y^2.$$

Її матриця $\mathcal{A}$ має вигляд $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0, \Leftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Отже, квадратична форма F має такий канонічний вигляд:

$$F = 4x'^2 + 9y'^2.$$

Знаходимо базис, в якому квадратична форма має канонічний вигляд.

Підставивши $\lambda = \lambda_1 = 4$ у систему

$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 2y = 0, \\ 2x + (8-\lambda)y = 0, \end{cases}$$

матимемо $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + 4y = 0, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} x = -2y, \\ y = y \end{cases}$ або $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} y$, де $y \in (-\infty; +\infty)$.

Якщо покладемо $y = -1$, то знайдемо власний вектор $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Тоді вектору $\vec{a}_1$ відповідатиме одиничний вектор $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Підставляючи $\lambda = \lambda_2 = 9$, дістанемо систему

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0, \\ 2x - y = 0, \end{cases}$$

розв'язавши яку маємо $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} y,\ y \in (-\infty; +\infty)$. Покладемо $y = 2$. Тоді знайдемо власний вектор $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, звідки $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

Отже, $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ і $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ утворюють шуканий ортонормований базис. Перехід до нової системи координат відбувається поворотом осей на кут α такий, що $\sin\alpha = -1/\sqrt{5}$ і $\cos\alpha = 2/\sqrt{5}$.

Оскільки у разі переходу до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ координати всіх векторів перетворюються за формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ де } C = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

або $x = \left(2/\sqrt{5}\right)x' + \left(1/\sqrt{5}\right)y',\ y = \left(-1/\sqrt{5}\right)x' + \left(2/\sqrt{5}\right)y'$,

то $-32x - 56y = \left(-8/\sqrt{5}\right)x' - \left(144/\sqrt{5}\right)y'$.

Тоді рівняння лінії другого порядку в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$ матиме вигляд

$$4x'^2 - \left(8/\sqrt{5}\right)x' + 9y'^2 - \left(144/\sqrt{5}\right)y' + 80 = 0.$$

Виділимо повні квадрати в лівій частині останнього рівняння

$$4\left(x'^2 - \left(2/\sqrt{5}\right)x'\right) + 9\left(y'^2 - \left(16/\sqrt{5}\right)y'\right) = -80 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x' - 1/\sqrt{5}\right)^2 + 9\left(y' - 8/\sqrt{5}\right)^2 = 36.$$

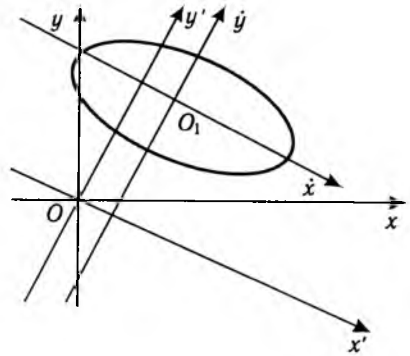

Рис.8.13

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей. Покладемо

$$\dot{x} = x' - 1/\sqrt{5}, \quad \dot{y} = y' - 8/\sqrt{5}.$$

Новий початок координат O_1 в системі $x'Oy'$ має координати $O_1(1/\sqrt{5}; 8/\sqrt{5})$.

Рівняння лінії в системі координат $\dot{x}O_1\dot{y}$ матиме вигляд $4\dot{x}^2 + 9\dot{y}^2 = 36$ або $\dfrac{\dot{x}^2}{9} + \dfrac{\dot{y}^2}{4} = 1$, тобто крива є еліпсом з півосями $a = 3$ та $b = 2$.

Початкову систему координат xOy було повернуто на кут α $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$, тангенс якого дорівнює $-1/2$. У цій повернутій системі координат центр еліпса розміщено в точці $O_1(1/\sqrt{5}; 8/\sqrt{5})$, а осі еліпса паралельні осям координат (рис. 8.13).

Зауваження 8.6. Рівняння (8.10) еліпса в умові задачі громіздке і не є канонічним, оскільки початкову систему координат xOy щодо еліпса було вибрано невдало.

Задачі для розв'язування

У задачах 944—991 знайти канонічне рівняння та визначити тип лінії другого порядку. Виконати схематичний рисунок лінії в початковій системі координат:

944. $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

945. $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$.

946. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y + 49 = 0$.
947. $4x^2 - y^2 + 8x - 2y + 3 = 0$.
948. $2x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$.
949. $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$.
950. $2y^2 + 8x + 12y - 3 = 0$.
951. $x^2 + 4y^2 + 4x - 16y - 8 = 0$.
952. $x^2 - 4y + 6x + 5 = 0$.
953. $y^2 - 10x - 2y - 19 = 0$.
954. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$.
955. $x^2 - 6x + 8 = 0$.
956. $x^2 + 4y^2 + 8y + 5 = 0$.
957. $32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$.
958. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$.
959. $17x^2 - 12xy + 8y^2 = 0$.
960. $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.
961. $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 8 = 0$.
962. $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.
963. $4x^2 - 4xy + y^2 = 5$.
964. $13x^2 - 48xy + 26y^2 = 45$.
965. $x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.
966. $9x^2 + 30xy + 25y^2 = 0$.
967. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25 = 0$.
968. $21x^2 + xy - 10y^2 = 0$.
969. $10x^2 - 7xy + y^2 = 0$.
970. $5x^2 - 4xy + y^2 = 0$.
971. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + x + 3y - 19\frac{11}{16} = 0$.
972. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y = 19$.
973. $x^2 - 2xy + y^2 - 12x + 12y - 14 = 0$.
974. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$.
975. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.
976. $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.
977. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.
978. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.
979. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$.
980. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$.
981. $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$.
982. $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$.
983. $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$.
984. $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$.
985. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$.

986. $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$.
987. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$.
988. $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$.
989. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.
990. $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$.
991. $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 4x - 6y + 1 = 0$.

8.4. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ В E_3

Нехай в E_3 задано декартову прямокутну систему координат $Oxyz$.

Поверхнею другого порядку в E_3 називається поверхня, рівняння якої є рівнянням другого степеня відносно змінних x, y, z. У загальному вигляді рівняння другого степеня відносно змінних x, y, z має вигляд

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+$$
$$+2a_{10}x+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0. \qquad (8.11)$$

ТЕОРЕМА 8.4. Якщо рівняння (8.11) не визначає вироджену поверхню другого порядку (порожню множину, точку, площину, пару площин), воно визначає одну з таких поверхонь другого порядку: еліпсоїд, гіперболоїд (одно- або двополий), конус, параболоїд (еліптичний або гіперболічний), циліндр (еліптичний, гіперболічний або параболічний).

Зауваження 8.7. Зведення рівняння поверхні другого порядку до канонічного вигляду здійснюється за допомогою ортогонального перетворення і паралельного перенесення способом, аналогічним способу зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

У табл.8.1 наведено більш докладне пояснення змісту теореми.

Таблиця 8.1. **Поверхні другого порядку та їх канонічні рівняння**

№ пор.	Поверхня	Канонічне рівняння	Рисунок
1	Еліпсоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	8.14
2	Однополий гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	8.15

Продовження табл. 8.1

№ пор.	Поверхня	Канонічне рівняння	Рисунок
3	Двополий гіперболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	8.16
4	Конус	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	8.17
5	Еліптичний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	8.18
6	Гіперболічний параболоїд	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	8.19
7	Еліптичний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	8.20
8	Гіперболічний циліндр	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	8.21
9	Параболічний циліндр	$y2 = 2px$	8.22

Форму та розташування поверхонь другого порядку вивчають, як правило, методом паралельних перерізів, тобто розглядають перерізи поверхонь площинами, паралельними координатним площинам. Форма та розміри дістаних перерізів дають змогу з'ясувати форму поверхні.

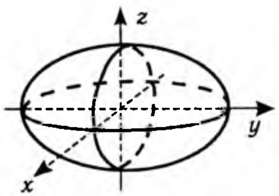

Рис. 8.14

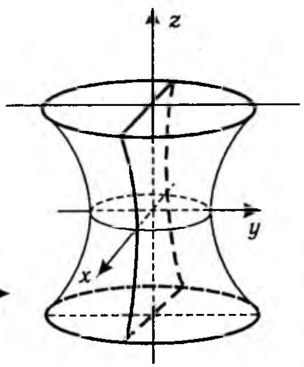

Рис. 8.15

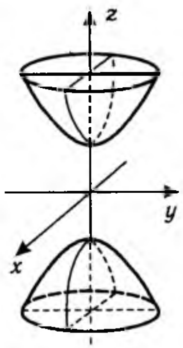

Рис. 8.16

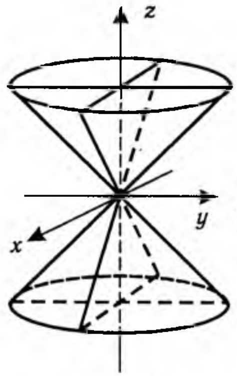

Рис.8.17

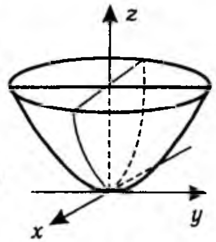

Рис.8.18

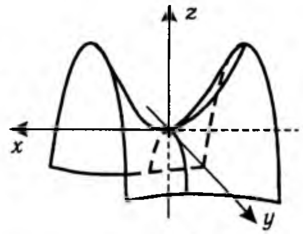

Рис.8.19

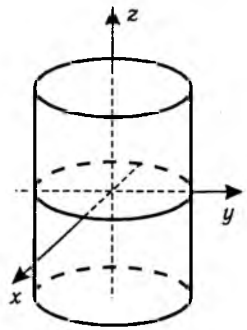

Рис.8.20

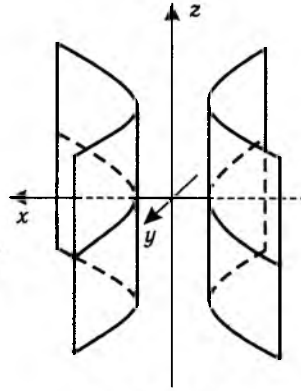

Рис.8.21

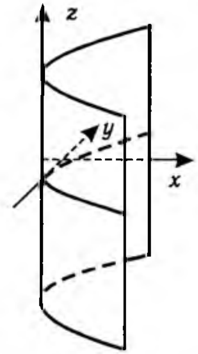

Рис.8.22

Задача 1. Знайти лінії перерізу поверхні однополого гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8.12}$$

площинами, паралельними координатним площинам.

Розв'язання. Розглянемо переріз однополого гіперболоїда (8.12) площинами, паралельними координатній площині xOy, тобто площинами $z = h$. Переріз гіперболоїда площиною $z = h$ визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}, \\ z = h. \end{cases}$$

Звідси випливає, що будь-яка площина $z = h$ перерізає гіперболоїд по еліпсу з півосями $a' = a\sqrt{1+h^2/c^2}$, $b' = b\sqrt{1+h^2/c^2}$, причому a' та b' мають найменше значення при $h = 0$, тобто еліпс найменших розмірів утворюється в перерізі площиною $z = 0$; у разі нескінченного зростання $|h|$ величини a' та b' також нескінченно зростають (рис. 8.23).

Площина $x = h$, паралельна площині yOz, перерізає однополий гіперболоїд (8.12) по лінії, яка визначається системою рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Якщо $|h| \neq a$, цими рівняннями визначаються гіперболи, а якщо $|h| = a$ — то дві прямі, що перетинаються.

Перерізи площинами $y = h$, паралельними площині xOz, аналогічні перерізам гіперболоїда площинами $x = h$ (рис. 8. 24).

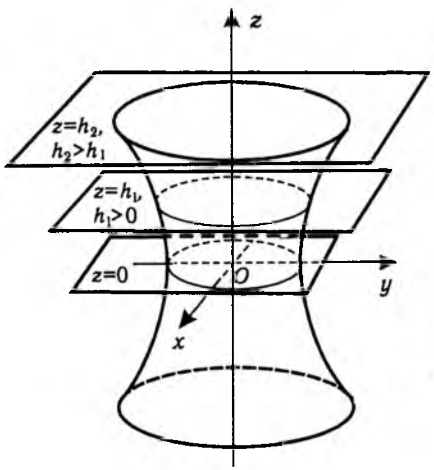

Рис. 8.23

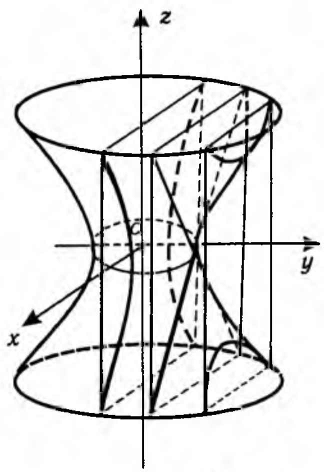

Рис. 8.24

Усі ці перерізи дають уявлення про форму поверхні однополого гіперболоїда.

Задача 2. Звести до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 4x + 2y - 4z = 16.$$

Записати відповідні формули перетворення координат. Визначити вид поверхні.

Розв'язання. Записуємо квадратичну форму старших членів:

$$F = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz.$$

Матриця $\mathcal{A}$ цієї форми має вигляд $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Складаємо та розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \Leftrightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - 4(2-\lambda) + 4\lambda = 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0, \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0, \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 4, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = -2. \end{array}\right.$$

Квадратична форма F має такий канонічний вигляд:

$$F = 4x'^2 + y'^2 - 2z'^2.$$

Щоб знайти базис, в якому квадратична форма має такий вигляд, треба знайти власні вектори лінійного оператора, що визначається матрицею $\mathcal{A}$ у системі координат $Oxyz$.

Записуємо систему рівнянь, що визначає шукані власні вектори:

$$\begin{cases} (2-\lambda)x - 2y + 0z = 0, \\ -2x + (1-\lambda)y - 2z = 0, \\ 0x - 2y - \lambda z = 0. \end{cases}$$

Підставляючи $\lambda = \lambda_1 = 4$, маємо

$$\begin{cases} -2x - 2y + 0z = 0, \\ -2x - 3y - 2z = 0, \\ 0x - 2y - 4z = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} x = 2z, \\ y = -2z, \\ z = z \end{cases}$$

або $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} z, \quad z \in (-\infty; +\infty)$.

Поклавши $z = 1$, дістанемо $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ — власний вектор, що відповідає значенню $\lambda_1 = 4$. Тоді одиничний вектор $\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ співнапрямлений з вектором $\vec{a}_1$. Аналогічно для значення $\lambda = \lambda_2 = 1$ знайдемо $\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, для $\lambda = \lambda_3 = -2$ дістанемо $\vec{e}_3' = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. Вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ утворюють шуканий ортонормований базис.

Матриця переходу до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ матиме вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

У разі переходу до нового базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ координати векторів перетворюються за формулами:

$$x = (2/3)x' + (2/3)y' + (1/3)z',$$
$$y = (-2/3)x' + (1/3)y' + (2/3)z',$$
$$z = (1/3)x' - (2/3)y' + (2/3)z'.$$

Підставляючи ці вирази для x, y, z в групу членів першого степеня рівняння поверхні, дістанемо

$$4x + 2y - 4z = (8/3)x' + (8/3)y' + (4/3)z' - (4/3)x' + (2/3)y' + (4/3)z' - (4/3)x' + (8/3)y' - (8/3)z' = 6y'.$$

Отже, рівняння даної поверхні в базисі $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ матиме вигляд

$$4x'^2 + y'^2 - 2z'^2 + 6y' = 16 \quad \text{або} \quad 4x'^2 + (y'+3)^2 - 2z'^2 = 25.$$

Звідси

$$\frac{x'^2}{25/4} + \frac{(y'+3)^2}{25} - \frac{z'^2}{25/2} = 1.$$

Виконаємо паралельне перенесення координатних осей. Покладемо

$$\dot{x} = x', \quad \dot{y} = y' + 3, \quad \dot{z} = z'.$$

Новий початок координат $O_1(0; -3; 0)$ в системі $Ox'y'z'$. Рівняння поверхні в системі координат $O_1\dot{x}\dot{y}\dot{z}$ матиме вигляд

$$\frac{\dot{x}^2}{25/4} + \frac{\dot{y}^2}{25} - \frac{\dot{z}^2}{25/2} = 1.$$

Отже, дана поверхня є однополим гіперболоїдом.

Задачі для розв'язування

992. Дослідити перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ площинами, паралельними координатним площинам.

993. Знайти перерізи еліпсоїда $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ координатними площинами. Визначити його вершини та довжину осей.

994. Знайти відношення осей двох паралельних перерізів еліпсоїда $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, а саме: перерізу площиною xOz та площиною, яка віддалена від неї на відстань двох одиниць.

995. Дослідити перерізи двополого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ площинами, паралельними координатним площинам.

996. Дано однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Знайти лінії його перерізу з координатними площинами.

997. Накреслити головні перерізи еліптичного параболоїда $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ і проекції паралельних їм перерізів на відповідні координатні площини.

998. Методом перерізів дослідити форму і розташування відносно прямокутної системи координат таких поверхонь (накреслити рисунок):

1) $x^2 + y^2 = 2(z-1)^2$. 2) $2y^2 + z^2 = 1 - x$.
3) $3x^2 - y^2 - z^2 = 3$. 4) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 1$.

9 1-93

999. Установити, що площина $x - 2 = 0$ перерізає еліпсоїд $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$ по еліпсу; знайти його півосі та вершини.

1000. Установити, що площина $z + 1 = 0$ перерізає однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ по гіперболі, знайти її півосі і вершини.

1001. Установити, що площина $y + 6 = 0$ перерізає гіперболічний параболоїд $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$ по параболі, знайти її параметр та вершину.

1002. Знайти рівняння проекцій на координатні площини перерізу еліптичного параболоїда $y^2 + z^2 = x$ площиною $x + 2y - z = 0$.

1003. Установити, яка лінія є перерізом еліпсоїда $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}=1$ площиною $2x - 3y + 4z - 11 = 0$, знайти її центр.

1004. Установити, яка лінія є перерізом гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=y$ площиною $3x - 3y + 4z + 2=0$, знайти її центр.

Установити, які лінії визначаються такими рівняннями та знайти центр кожної з них.

1005. $\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{6}=2z,\\ 3x-y+6z-14=0.\end{cases}$

1006. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=2z,\\ x-2y+2=0.\end{cases}$

1007. $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{36}=1,\\ 9x-6y+2z-28=0.\end{cases}$

1008. Установити, при яких значеннях m площина $x + mz - 1 = 0$ перерізає двополий гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$:
1) по еліпсу; 2) по гіперболі.

1009. Установити, при яких значеннях m площина $x + my - 2 = 0$ перерізає еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{2}+\frac{z^2}{3}=y$:

1) по еліпсу; 2) по параболі.

1010. Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2y$ має єдину спільну точку з площиною $2x - 2y - z - 10 = 0$, знайти її координати.

1011. Довести, що двополий гіперболоїд $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ має єдину спільну точку з площиною $5x + 2z + 5 = 0$, знайти її координати.

1012. Довести, що еліпсоїд $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ має єдину спільну точку з площиною $4x - 3y + 12z - 54 = 0$, знайти її координати.

1013. Визначити, при якому значенні m площина $x - 2y - 2z + m = 0$ дотикається до еліпсоїда $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$.

1014. Знайти точки перетину поверхні та прямої:

1) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1,\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$;

2) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,\quad \frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z+2}{4}$;

3) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z,\quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$;

4) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=z,\quad \frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

1015. Довести, що площина $2x - 12y - z + 16 = 0$ перерізає гіперболічний параболоїд $x^2 - 4y^2 = 2z$ по прямолінійних твірних. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

1016. Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перерізає однополий гіперболоїд $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ по прямолінійних твірних. Скласти рівняння цих прямолінійних твірних.

1017. Довести, що рівняння $z = xy$ визначає гіперболічний параболоїд.

1018. Довести, що рівняння $z^2 = xy$ визначає конус з вершиною у початку координат.

1019. Назвати та побудувати поверхні:
1) $x^2 = 2yz$; 2) $z - a = xy$.

У задачах 1020—1031 з'ясувати, які поверхні визначаються такими рівняннями:

1020. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0.$

1021. $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0.$

1022. $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0.$

1023. $3x^2 + 4y^2 + 8y - 12x + 17z = 0.$

1024. $x^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0.$

1025. $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0.$

1026. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y + 4z + 4 = 0.$

1027. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0.$

1028. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0.$

1029. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0.$

1030. $x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 8x + 12y + 1 = 0.$

1031. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0.$

У задачах 1032–1041 звести до канонічного вигляду рівняння поверхонь другого порядку. Визначити вид кожної з поверхонь. Знайти відповідні формули перетворення координат:

1032. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 18.$

1033. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy = 15.$

1034. $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4xz = 36.$

1035. $x^2 + 4xy - 8xz - 2y^2 - 4yz + z^2 = 6.$

1036. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz = 3.$

1037. $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 4xy + 12yz = 0.$

1038. $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz + 4x + 4z = 0.$

1039. $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z = 6.$

1040. $2x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 4x + 2y - 4 = 0.$

1041. $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz + 9z + \frac{1}{4} = 0.$

9 ФОРМИ І ТЕНЗОРИ В E_n

9.1. ЛІНІЙНІ ФОРМИ І ТЕНЗОРИ РАНГУ 1

Означення 9.1. Функція $y = A(\bar{x})$, аргумент якої $\bar{x} \in E_n$ $(n \geq 1)$, а значення $y \in R$, називається *лінійною функцією* на E_n, якщо для будь-яких векторів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x} \in E_n$ і довільного числа $\lambda \in R$ виконуються рівності

$$A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = A(\bar{x}_1) + A(\bar{x}_2),$$
$$A(\lambda\bar{x}) = \lambda A(\bar{x}).$$

Нехай $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = e_H$ — фіксований базис у E_n, $(\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n) = e^B$ — базис, взаємний до e_H, $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n = x_1\bar{e}^1 + \ldots + x_n\bar{e}^n$ — розклад вектора $\bar{x}$ за базисами e_H і e^B (див. п.4.5).

Твердження 9.1. У базисі e_H лінійна функція $A(\bar{x})$ має вигляд

$$A(\bar{x}) = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \tag{9.1}$$

де

$$a_1 = A(\bar{e}_1), \ldots, a_n = A(\bar{e}_n).$$

Твердження 9.2. У базисі e^B лінійна функція $A(\bar{x})$ має вигляд

$$A(\bar{x}) = a^1x_1 + \ldots + a^nx_n, \tag{9.2}$$

де

$$a^1 = A(\bar{e}^1), \ldots, a^n = A(\bar{e}^n).$$

Означення 9.2. *Лінійною формою* від n змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен першого степеня відносно сукупності цих змінних.

Зауваження 9.1. З (9.1) і (9.2) випливає, що лінійна функція $A(\bar{x})$ на E_n є лінійною формою як від сукупності контраваріантних, так і коваріантних координат вектора $\bar{x} \in E_n$. Надалі $A(\bar{x})$ називатимемо лінійною формою на E_n.

Твердження 9.3. Має місце рівність

$$A(\bar{x}) = \langle \bar{a}, \bar{x} \rangle .$$

де $\bar{a} = a_1\bar{e}^1 + \ldots + a_n\bar{e}^n = a^1\bar{e}_1 + \ldots + a^n\bar{e}_n$, $\langle \bar{a}, \bar{x} \rangle$ — скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{x}$ у E_n.

Означення 9.3. Коефіцієнти a_1, ..., a_n многочлена (9.1) (a^1,... ..., a^n многочлена (9.2)) називаються *коваріантними (контраваріантними) коефіцієнтами лінійної форми* $A(\bar{x})$, а матриця $(a_1 \;\; \ldots \;\; a_n)$ (матриця $(a^1 \;\; \ldots \;\; a^n)$) — *коваріантною (контраваріантною)* матрицею $A(\bar{x})$ на E_n.

Твердження 9.4. Між коваріантними і контраваріантними коефіцієнтами лінійної форми $A(\bar{x})$ має місце зв'язок

$$(a_1 \;\; \ldots \;\; a_n) = (a^1 \;\; \ldots \;\; a^n)\,\mathcal{G} \text{ або } a_i = \sum_{k=1}^{n} a^k g_{ki} ,$$

$i = \overline{1, n}$, де $\mathcal{G} = \|g_{ij}\|$ — метрична матриця в E_n (див. п.4.5).

Нехай $\dot{e}_H$ — новий базис у E_n, $\dot{e}^B$ — базис, взаємний до $\dot{e}_H$, $\mathcal{C}$ — матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$. Тоді формули (4.12), (4.13) мають вигляд $\dot{e}_H = e_H\mathcal{C}$ і $\dot{e}^B = e^B\mathcal{D}$.

Нехай $A(\bar{x}) = \dot{a}_1\dot{x}^1 + \ldots + \dot{a}_n\dot{x}^n = \dot{a}^1\dot{x}_1 + \ldots + \dot{a}^n\dot{x}_n$.

Твердження 9.5. Коваріантні коефіцієнти $A(\bar{x})$ у разі переходу до нового базису перетворюються за формулою

$$\dot{a}_i = \sum_{k=1}^{n} a_k c_i^k , \tag{9.3}$$

а контраваріантні — за формулою

$$\dot{a}^i = \sum_{k=1}^{n} a^k d_k^i . \tag{9.4}$$

Зауваження 9.2. Формула (9.3) збігається з формулою (4.14) перетворення коваріантних координат вектора $\bar{a}$, а формула (9.4) — з формулою (4.15) перетворення контраваріантних координат того самого вектора, тобто твердження 9.5 встановлює взаємно однозначну відповідність між $A(\bar{x})$ в E_n та вектором $\bar{a} \in E_n$.

Означення 9.4. *Тензором рангу* 1 типу (1; 0) (типу (0; 1)) в E_n називається геометричний об'єкт, який у кожному базисі $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ визначається заданням n координат a_1, ..., a_n (a^1, ..., a^n), що змінюються у разі переходу до нового базису $\dot{\bar{e}}, \ldots, \dot{\bar{e}}_n$ за формулою

$$\dot{a}_i = \sum_{k=1}^{n} a_k c_i^k \quad \left(\dot{a}^i = \sum_{k=1}^{n} a^k d_k^i \right). \tag{9.5}$$

Зауваження 9.3. Тензор типу (1; 0) називають *коваріантним*, типу (0; 1) — *контраваріантним тензором рангу 1.*

Зауваження 9.4. Вектор $\bar{a}$ в E_n — це коваріантний тензор рангу 1, якщо $\bar{a}$ задано своїми коваріантними координатами, і контраваріантний тензор рангу 1, якщо $\bar{a}$ задано своїми контраваріантними координатами.

Зауваження 9.5. Формула (9.5) перетворення координат коваріантного (контраваріантного) тензора рангу 1 в разі зміни базису в E_n збігається з формулою (9.3) ((9.4)) перетворення коваріантних (контраваріантних) коефіцієнтів лінійної форми. Отже, задання лінійної форми $A(\bar{x})$ в E_n можна ототожнювати із заданням коваріантного тензора рангу 1 в E_n, якщо $A(\bar{x})$ задано у вигляді (9.1), або контраваріантного тензора рангу 1, якщо $A(\bar{x})$ задано у вигляді (9.2). При цьому на значення $A(\bar{x})$ можна дивитися як на значення відповідного тензора на векторі $\bar{x}$.

Задача 1. Довести формулу (9.1).

Доведення. Нехай $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = e_H$ — фіксований базис у E_n і $\bar{x} = x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n$.

Тоді $A(\bar{x}) = A(x^1\bar{e}_1 + \ldots + x^n\bar{e}_n) = x^1A(\bar{e}_1) + \ldots + x^nA(\bar{e}_n)$. Оскільки $A(\bar{e}_1) = a_1, \ldots, A(\bar{e}_n) = a_n$, то

$$A(\bar{x}) = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n .$$

Задача 2. Довести формулу (9.3).

Доведення. Нехай $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n) = e_H$ — фіксований базис у E_n, $(\dot{\bar{e}}_1 \ldots, \dot{\bar{e}}_n) = \dot{e}_H$ — новий базис і $\dot{e}_H = e_H\,\mathcal{C}$.

Оскільки $\dot{a}_i = A(\dot{\bar{e}}_i)$, а $\dot{\bar{e}}_i = c_i^1\bar{e}_1 + \ldots + c_i^n\bar{e}_n$, то

$$\dot{a}_i = A(c_i^1\bar{e}_1 + \ldots + c_i^n\bar{e}_n) = c_i^1A(\bar{e}_1) + \ldots + c_i^nA(\bar{e}_n) =$$

$$= c_i^1a_1 + \ldots + c_i^na_n = \sum_{k=1}^{n} a_k c_i^k .$$

Задача 3. Нехай $A(\bar{x})$ — лінійна форма в E_3. Визначити вигляд $A(\bar{x})$ в деякому базисі e_H в E_3, якщо її значення на векторах $\bar{x}_1 = (2;3;5)$, $\bar{x}_2 = (3;7;4)$, $\bar{x}_3 = (1;2;2)$ в e_H дорівнюють відповідно 10; 3; 3.

Розв'язання. За твердженням 9.1 лінійна форма $A(\bar{x}) = a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3$.

За умовою задачі для коефіцієнтів лінійної форми a_1, a_2 і a_3 маємо систему трьох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 + 5a_3 = 10, \\ 3a_1 + 7a_2 + 4a_3 = 3, \\ a_1 + 2a_2 + 2a_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язком даної системи є числа $a_1 = 3$, $a_2 = -2$, $a_3 = 2$. Отже, лінійна форма має вигляд

$$A(\bar{x}) = 3x^1 - 2x^2 + 2x^3.$$

Задача 4. Знайти перетворення змінних x^1, x^2, x^3, що зводить лінійну форму $A(\bar{x}) = 2x^1 + 3x^2 + x^3$ в E_3 до канонічного вигляду $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$. Записати координати векторів нового базису.

Розв'язання. Знайдемо базис $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3$, в якому $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$.

Для цього покладемо

$$\begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + x^3 = \dot{x}^1, \\ \qquad\quad x^2 \qquad = \dot{x}^2, \\ \qquad\qquad\quad x^3 = \dot{x}^3. \end{cases}$$

Зауважимо, що у разі такої заміни змінних x^1, x^2, x^3 на $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dot{x}^3$ форма $A(\bar{x})$ набере вигляду $A(\bar{x}) = \dot{x}^1$. Крім того, цю заміну можна розглядати як перетворення контраваріантних координат вектора $\bar{x}$ за формулою (4.15), оскільки

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Запишемо цю заміну у вигляді $\begin{cases} x^1 = \frac{1}{2}\dot{x}^1 - \frac{3}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\dot{x}^3, \\ x^2 = \dot{x}^2, \\ x^3 = \dot{x}^3. \end{cases}$

Бачимо, що матриця перетворення контраваріантних координат має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці і є координатами векторів $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3$ нового базису в e_H, тобто

$$\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dot{\bar{e}}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. За формулою (9.3) знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}$ коефіцієнтів лінійної форми $A(\bar{x}) = -2x^1 - x^2$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$, якщо

$$\dot{\bar{e}}_1 = 3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2, \quad \dot{\bar{e}}_2 = 4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2.$$

Результат перевірити безпосереднім здобуттям коефіцієнтів лінійної форми в новому базисі.

Розв'язання. Зауважимо, що формула (9.3) еквівалентна формулі $\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}C$. За умовами задачі матриця $\mathcal{A}$ лінійної форми $A(\bar{x})$ у старому базисі має вигляд $\mathcal{A} = (-2 \ \ -1)$, а матриця C переходу від старого базису до нового $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. Тоді

$$\dot{\mathcal{A}} = (\dot{a}_1 \ \ \dot{a}_2) = (-2 \ \ -1)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} = (-11 \ \ -15),$$

тобто $\dot{a}_1 = -11$, $\dot{a}_2 = -15$.

Лінійна форма в новому базисі має вигляд $A(\bar{x}) = -11\dot{x}^1 - 15\dot{x}^2$.

Перевіримо правильність результату безпосереднім знаходженням коефіцієнтів. Маємо

$$\dot{a}_1 = A(\dot{\bar{e}}_1) = A(3\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2) = 3A(\bar{e}_1) + 5A(\bar{e}_2).$$

Оскільки $A(\bar{e}_1) = -2$, $A(\bar{e}_2) = -1$, то $\dot{a}_1 = 3(-2) + 5(-1) = -11$. Аналогічно $\dot{a}_2 = A(\dot{e}_2) = A(4\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2) = 4A(\bar{e}_1) + 7A(\bar{e}_2) = 4(-2) + 7(-1) = -15$.

Задачі для розв'язування

1042. Довести формулу (9.2).

1043. Довести формулу (9.4).

1044. Довести твердження 9.3.

1045. Значення лінійної форми $A(\vec{x})$ на векторах $\vec{x}_1=(2;5)$ і $\vec{x}_2=(3;7)$ в деякому базисі e_H в E_2 відповідно дорівнюють 1; 2. Визначити вигляд $A(\vec{x})$ в e_H.

1046. Визначити вигляд лінійної форми $A(\vec{x})$ в базисі e_H простору E_2, якщо її значення на векторах $\vec{x}_1=(2;-3)$, $\vec{x}_2=(4;-5)$ в e_H дорівнюють відповідно 4 і 10.

1047. Визначити вигляд лінійної форми $A(\vec{x})$ в базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ простору E_2, якщо її значення на векторах $\vec{a}=(4;7)$, $\vec{b}=(5;8)$ в цьому базисі дорівнюють відповідно -13 і -14.

1048. Визначити вигляд лінійної форми $A(\vec{x})$ у базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\vec{x}_1=(5;-6;4)$, $\vec{x}_2=(3;-3;2)$, $\vec{x}_3=(4;-5;2)$ дорівнюють відповідно 3; 2; 1.

1049. Визначити вигляд лінійної форми $A(\vec{x})$ в базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\vec{x}_1=(4;-3;2)$, $\vec{x}_2=(6;-2;3)$, $\vec{x}_3=(5;-3;2)$ в e_H дорівнюють відповідно -4; -1 і -3.

1050. Визначити вигляд лінійної форми $A(\vec{x})$ в базисі e_H простору E_3, якщо її значення на векторах $\vec{x}_1=(5;2;3)$, $\vec{x}_2=(2;-2;5)$, $\vec{x}_3=(3;4;2)$ в e_H дорівнюють відповідно -2; 0 і -10.

1051. Лінійна форма $A(\vec{x})$ у базисі $\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2}$ простору E_2 має вигляд $A(\vec{x})=x_1+2x_2$. Визначити вигляд $A(\vec{x})$ у базисі $\vec{e}_1,\vec{e}_2$, якщо метрична матриця $\mathcal{G}=\begin{pmatrix}4&-3\\-3&3\end{pmatrix}$.

1052. У базисі $\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}$ простору E_3 лінійна форма $A(\vec{x})=x_1+2x_3$. Визначити вигляд цієї форми з коваріантними коефіцієнтами, якщо метрична матриця $\mathcal{G}=\begin{pmatrix}1&1/2&1/2\\1/2&1&1/2\\1/2&1/2&1\end{pmatrix}$.

1053. Знайти перетворення змінних x^1, x^2, x^3, що зводить лінійну форму $A(\vec{x})=3x^1-x^2$ до канонічного вигляду $A(\vec{x})=\dot{x}^1$. Записати базис, в якому ця форма має канонічний вигляд.

1054. Визначити базис, в якому лінійна форма $A(\vec{x})=x^1+2x^2-x^3$ має канонічний вигляд $A(\vec{x})=\dot{x}^1$.

1055. Визначити базис простору E_4, в якому лінійна форма $A(\vec{x})=2x^1-x^2+x^3-x^4$ записується в канонічному вигляді $A(\vec{x})=\dot{x}^1$.

1056. Знайти формули перетворення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, що зводять лінійну форму $A(\vec{x})=x_2-2x_3+x_4$ до канонічного вигляду $A(\vec{x})=\dot{x}_2$. Записати базис, в якому ця форма має канонічний вигляд.

1057. Довести, що для будь-якої невиродженої лінійної форми $A(\vec{x})$ у просторі E_n існує канонічний базис, в якому ця форма записується у канонічному вигляді $A(\vec{x})=\dot{x}_1$, де $\dot{x}_1$ — перша координата вектора $\vec{x}$ у цьому базисі.

1058. Знайти матрицю лінійної форми $A(\vec{x})=5x^1+2x^2$, у базисі $\dot{\vec{e}}_1,\dot{\vec{e}}_2$, якщо $\dot{\vec{e}}_1=-\vec{e}_1$, $\dot{\vec{e}}_2=2\vec{e}_1+\vec{e}_2$. Результат перевірити безпосереднім знаходженням коефіцієнтів.

1059. Знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}$ лінійної форми $A(\vec{x})=-4x^1+x^2-2x^3$ у новому базисі $\dot{\vec{e}}_1,\dot{\vec{e}}_2,\dot{\vec{e}}_3$, знаючи матрицю $\mathcal{C}=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&1\\2&1&3\end{pmatrix}$ переходу від одного базису до іншого. Визначити безпосередньо коваріантні коефіцієнти лінійної форми у новому базисі.

1060. Визначити коваріантні коефіцієнти лінійної форми $A(\vec{x})=x^1-x^2+3x^3$ у новому базисі $\dot{\vec{e}}_1,\dot{\vec{e}}_2,\dot{\vec{e}}_3$ за допомогою формули (9.3) та безпосередньо, якщо $\dot{\vec{e}}_1=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $\dot{\vec{e}}_2=2\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $\dot{\vec{e}}_3=\vec{e}_1+3\vec{e}_2+2\vec{e}_3$.

1061. Записати лінійну форму $A(\vec{x})=2x^1-x^2+3x^3+x^4$ у новому базисі $\dot{\vec{e}}_1,\dot{\vec{e}}_2,\dot{\vec{e}}_3,\dot{\vec{e}}_4$, якщо задана матриця переходу $\mathcal{C}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&6&1&1\\5&4&2&1\\2&3&2&3\end{pmatrix}$ від одного базису до іншого. Результат перевірити безпосереднім знаходженням коефіцієнтів.

9.2. БІЛІНІЙНА ФОРМА І ТЕНЗОРИ РАНГУ 2

Означення 9.5. Функція $z = A(\bar{x}, \bar{y})$, аргументи якої $\bar{x}, \bar{y} \in E_n$, а значення $z \in R$, називається *білінійною функцією* в E_n, якщо для будь-яких векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in E_n$ і довільного числа $\lambda \in R$ виконуються рівності:

$$\begin{aligned} &A(\bar{x}_1 + \bar{x}_2, \bar{y}) = A(\bar{x}_1, \bar{y}) + A(\bar{x}_2, \bar{y}), \\ &A(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) = A(\bar{x}, \bar{y}_1) + A(\bar{x}, \bar{y}_2), \\ &A(\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda A(\bar{x}, \bar{y}), \\ &A(\bar{x}, \lambda \bar{y}) = \lambda A(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Зауваження 9.6. Білінійна функція $A(\bar{x}, \bar{y})$ є лінійною функцією від кожного з своїх аргументів $\bar{x}$ та $\bar{y} \in E_n$.

Приклад. Скалярний добуток $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ в E_n — білінійна функція в E_n.

Дійсно, з перших трьох аксіом скалярного добутку в евклідовому просторі (див. п.4.2)

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{x} \rangle, \ \langle (\bar{x}_1 + \bar{x}_2), \bar{y} \rangle = \langle \bar{x}_1, \bar{y} \rangle + \langle \bar{x}_2, \bar{y} \rangle, \ \langle (\lambda \bar{x}), \bar{y} \rangle = \\ = \lambda \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$$

випливає виконання рівностей (9.6) в означенні білінійної функції в E_n.

Нехай e_H та e^B — пара взаємних базисів в E_n, $\bar{x}, \bar{y} \in E_n$,

$\bar{x} = x^1 \bar{e}_1 + \ldots + x^n \bar{e}_n = x_1 \bar{e}^1 + \ldots + x_n \bar{e}^n$,

$\bar{y} = y^1 \bar{e}_1 + \ldots + y^n \bar{e}_n = y_1 \bar{e}^1 + \ldots + y_n \bar{e}^n$ — розклад $\bar{x}$ та $\bar{y}$ за базисами e_H та e^B.

Твердження 9.6.

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{X}^B \mathcal{A}_{HH} (Y^B)^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x^i y^j, \tag{9.7}$$

де

$$\mathcal{A}_{HH} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ a_{ij} = A(\bar{e}_i, \bar{e}_j), \quad \mathcal{X}^B = (x^1 \ldots x^n).$$

Твердження 9.7.

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{X}^B \mathcal{A}_H{}^B (Y_H)^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^j x^i y_j, \tag{9.8}$$

де

$$\mathcal{A}_H{}^B = \begin{pmatrix} a_1^1 & \ldots & a_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^1 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix}, \ a_i^j = A(\bar{e}_i, \bar{e}^j) \quad Y_H = (y_1 \ \ldots \ y_n).$$

Зауваження 9.7. Зображення $A(\bar{x}, \bar{y})$ у випадку, коли вектор $\bar{x}$ задано своїми коваріантними координатами, а вектор $\bar{y}$ — контраваріантними координатами, тут і надалі не розглядатиметься, оскільки воно аналогічне випадку, який розглянуто у твердженні 9.7.

Твердження 9.8.

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{X}_H \mathcal{A}^{BB} (Y_H)^T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^{ij} x_i y_j, \tag{9.9}$$

де

$$\mathcal{A}^{BB} = \begin{pmatrix} a^{11} & \ldots & a^{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{n1} & \ldots & a^{nn} \end{pmatrix}, \ a^{ij} = A(\bar{e}^i, \bar{e}^j).$$

Зауваження 9.8. Далі використовуватимемо нове позначення підсумовування. Якщо написано вираз, що складається з однієї літери або добутку кількох літер з індексами та при цьому будь-який індекс зустрічається двічі — один раз зверху, другий раз знизу, то цей вираз означатиме суму членів такого самого вигляду, що написані для всіх значень цього індексу, що повторюється. З урахуванням цієї згоди формули (9.7), (9.8), (9.9) запишуться відповідно у вигляді

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = a_{ij} x^i y^j, \ A(\bar{x}, \bar{y}) = a_i^j x^i y_j, \ A(\bar{x}, \bar{y}) = a^{ij} x_i y_j.$$

Зауваження 9.9. Білінійною формою $2n$ змінних $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ називається однорідний многочлен другого степеня лінійний від кожної з сукупностей $x_1, \ldots, x_n$ та $y_1, \ldots, y_n$ по n змінних. З формул (9.7), (9.8), (9.9) випливає, що білінійна функція $A(\bar{x}, \bar{y})$ в E_n є білінійною формою від координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$. Надалі $A(\bar{x}, \bar{y})$ також називатимемо білінійною формою в E_n.

Означення 9.6. Матриця $\mathcal{A}_{HH}$ ($\mathcal{A}_H{}^B$, $\mathcal{A}^{BB}$) називається *двічі коваріантною* (один раз коваріантною та один раз контраваріантною, двічі контраваріантною) матрицею білінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y})$.

Означення 9.7. Елементи a_{ij} матриці $\mathcal{A}_{HH}$ (a_i^j матриці $\mathcal{A}_H{}^B$, a^{ij} матриці $\mathcal{A}^{BB}$) називаються *двічі коваріантними* (один раз коваріатними та один раз контраваріантними, двічі контраваріантними) коефіцієнтами білінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y})$.

Приклад. Для білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = \langle \bar{x},\bar{y}\rangle$ буде $a_{ij} = g_{ij}, a_i^j = \delta_i^j, a^{ij} = g^{ij}$.

Дійсно, $a_{ij} = A(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \langle \bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle = g_{ij}$, $a_i^j = A(\bar{e}_i,\bar{e}^j) = \langle \bar{e}_i,\bar{e}^j\rangle = \delta_i^j$, $a^{ij} = A(\bar{e}^i,\bar{e}^j) = \langle \bar{e}^i,\bar{e}^j\rangle = g^{ij}$.

Отже, у цьому випадку $\mathcal{A}_{HH} = \|g_{ij}\| = \mathcal{G}$, $\mathcal{A}_H{}^B = \|\delta_i^j\| = \mathcal{E}$, $\mathcal{A}^{BB} = \|g^{ij}\| = \mathcal{G}^{-1}$ та $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \mathcal{X}^B\mathcal{G}(Y^B)^T = \mathcal{X}^B(Y_H)^T = \mathcal{X}_H\mathcal{G}^{-1}(Y_H)^T$ або $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = g_{ij}x^iy^j = \delta_i^j x^i y_j = g^{ij}x_iy_j$.

Зауваження 9.10. Нехай $A(\bar{x},\bar{y})$ — симетрична білінійна форма, тобто форма, для якої $A(\bar{x},\bar{y}) = A(\bar{y},\bar{x})$, і квадратична форма $A(\bar{x},\bar{x})$ — додатно означена, тоді $A(\bar{x},\bar{y})$ задовольняє усім аксіомам скалярного добутку евклідового простору. Тому скалярний добуток в L_n можна задати за допомогою білінійної форми такого вигляду.

Твердження 9.9. Якщо $\mathcal{A}_{HH}$, $\mathcal{A}_H^B$, $\mathcal{A}^{BB}$ — матриці $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі e_H, то $\mathcal{A}_{HH} = \mathcal{A}_H^B\,\mathcal{G}$, $\mathcal{A}^{BB} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{A}_H^B$, де $\mathcal{G}$ — метрична матриця базису e_H в E_n.

Твердження 9.10. Якщо a_{ij}, a_i^j, a^{ij} — коефіцієнти $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі e_H, то $a_{ij} = a_i^k g_{kj}$, $a^{ij} = a_k^j g^{ki}$.

Нехай e_H, e^B, $\dot{e}_H$, $\dot{e}^B$ дві пари взаємних базисів у E_n, $\dot{e}_H = e_H\,\mathcal{C}$, $\dot{e}^B = e^B\,\mathcal{D}$ (див. п.9.1).

Твердження 9.11. Якщо $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$, $\dot{\mathcal{A}}_H^B$, $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ — матриці $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі $\dot{e}_H$, то $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \mathcal{C}^T\mathcal{A}_{HH}\,\mathcal{C}$, $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \mathcal{C}^T\mathcal{A}_H^B\,\mathcal{D}$, $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \mathcal{D}^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}$.

Твердження 9.12. Якщо $\dot{a}_{ij}, \dot{a}_i^j, \dot{a}^{ij}$ — коефіцієнти $A(\bar{x},\bar{y})$ в базисі $\dot{e}_H$, то

$$\dot{a}_{ij} = a_{kl}c_i^kc_j^l = \begin{pmatrix}c_i^1 & \dots & c_i^n\end{pmatrix}\mathcal{A}_{HH}\begin{pmatrix}c_j^1\\ \dots \\ c_j^n\end{pmatrix} = \mathcal{C}_i{}^T\mathcal{A}_{HH}\,\mathcal{C}_j = A(\bar{C}_i,\bar{C}_j),$$

$$\dot{a}_i^j = a_k^lc_i^kd_l^j = \begin{pmatrix}c_i^1 & \dots & c_i^n\end{pmatrix}\mathcal{A}_H^B\begin{pmatrix}d_1^j\\ \dots \\ d_n^j\end{pmatrix} = \mathcal{C}_i{}^T\mathcal{A}_H^B\,\mathcal{D}^j = A(\bar{C}_i,\bar{D}^j), \tag{9.10}$$

$$\dot{a}^{ij} = a^{kl}d_k^id_l^j = \begin{pmatrix}d_1^i & \dots & d_n^i\end{pmatrix}\mathcal{A}^{BB}\begin{pmatrix}d_1^j\\ \dots \\ d_n^j\end{pmatrix} = (\mathcal{D}^i)^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}^j = A(\bar{D}^i,\bar{D}^j),$$

де матриця $\mathcal{C}_i$ — i-й стовпець матриці $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}^j$ — j-й стовпець матриці $\mathcal{D}$, а $\bar{C}_i = c_i^1\bar{e}_1 + \dots + c_i^n\bar{e}_n$, $\bar{D}^j = d_1^j\bar{e}^1 + \dots + d_n^j\bar{e}^n$.

Означення 9.8. *Тензором рангу* 2 типу (2; 0) (типу (1; 1), типу (0; 2)) в E_n називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі e_H визначається заданням n^2 чисел a_{ij} (a_i^j, a^{ij}), що називаються *координатами тензора* та змінюються у разі переходу до нового базису $\dot{e}_H$ за формулами

$$\dot{a}_{ij} = a_{kl}c_i^kc_j^l \quad \left(\dot{a}_i^j = a_k^lc_i^kd_l^j,\ \dot{a}^{ij} = a^{kl}d_k^id_l^j\right).$$

Зауваження 9.11. Тензор рангу 2 типу (2; 0) звичайно називають двічі коваріантним, типу (1; 1) — один раз коваріантним та один раз контраваріантним, типу (0; 2) — двічі контраваріантним тензором рангу 2.

Зауваження 9.12. Формули перетворення координат тензора рангу 2 у разі переходу до нового базису збігаються з формулами (9.10) перетворення однойменних коефіцієнтів білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$. Це дає можливість поставити у відповідність тензору рангу 2 даного типу білінійну форму з коефіцієнтами того самого типу, що дорівнюють відповідним координатам тензора в одному й тому самому базисі E_n. При цьому значення $A(\bar{x},\bar{y})$ на парі векторів $\bar{x}$, $\bar{y}$ називають і значенням відповідного тензора на парі векторів $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Приклад. Білінійній формі $\langle \bar{x},\bar{y}\rangle = \mathcal{X}^B\mathcal{G}_{HH}(Y^B)^T = \mathcal{X}^B(Y_H)^T = \mathcal{X}_H\mathcal{G}^{BB}(Y_H)^T$ відповідають три тензора рангу 2:

1) двічі коваріантний тензор G, координати якого в e_H дорівнюють $g_{ij} = \langle \bar{e}_i,\bar{e}_j\rangle$. Матриця координат цього тензора $\mathcal{G}_{HH} = \mathcal{G} = \|g_{ij}\|$. Цей тензор називається *метричним тензором* простору E_n.

2) один раз коваріантний та один раз контраваріантний тензор E, координати якого $g_i^j = \langle \bar{e}_i, \bar{e}^j \rangle = \delta_i^j$. Матриця координат цього тензора $\mathcal{G}_H{}^B = \mathcal{E} = \| \delta_i^j \|$.

3) двічі контраваріантний тензор G^{-1}, координати якого в e_H дорівнюють $g^{ij} = \langle \bar{e}^i, \bar{e}^j \rangle$. Матриця координат цього тензора $\mathcal{G}^{BB} = \| g^{ij} \| = \mathcal{G}^{-1}$. Цей тензор називається взаємним до метричного.

Задача 1. У просторі E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x}, \bar{y})$, яка набирає значення -3 на векторах $2\bar{e}^1 - \bar{e}^2, \bar{e}^1 - \bar{e}^2$; значення -1 на векторах $\bar{e}^2, \bar{e}^1 + \bar{e}^2$; значення -12 на векторах $-\bar{e}^1 + \bar{e}^2, 2\bar{e}^1 + \bar{e}^2$; значення -6 на векторах $3\bar{e}^2, \bar{e}^1$. Знайти вигляд цієї форми з двічі контраваріантними коефіцієнтами.

Розв'язання. Білінійна форма $A(\bar{x}, \bar{y})$ з двічі контраваріантними коефіцієнтами має вигляд:

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = a^{11} x_1 y_1 + a^{12} x_1 y_2 + a^{21} x_2 y_1 + a^{22} x_2 y_2 .$$

Для визначення коефіцієнтів a^{11}, a^{12}, a^{21},a^{22} білінійної форми складемо систему чотирьох рівнянь, використавши значення білінійної форми на чотирьох парах векторів:

$$\begin{cases} a^{11} \cdot 2 \cdot 1 + a^{12} \cdot 2(-1) + a^{21}(-1)1 + a^{22}(-1)(-1) = -3, \\ a^{11} \cdot 0 \cdot 1 + a^{12} \cdot 0 \cdot 1 + a^{21} \cdot 1 \cdot 1 + a^{22} \cdot 1 \cdot 1 = -1, \\ a^{11}(-1)2 + a^{12}(-1)1 + a^{21} \cdot 1 \cdot 2 + a^{22} \cdot 1 \cdot 1 = -12, \\ a^{11} \cdot 0 \cdot 1 + a^{12} \cdot 0 \cdot 0 + a^{21} \cdot 3 \cdot 1 + a^{22} \cdot 3 \cdot 0 = -6. \end{cases}$$

Остаточно система має вигляд

$$\begin{cases} 2a^{11} - 2a^{12} - a^{21} + a^{22} = -3, \\ a^{21} + a^{22} = -1, \\ -2a^{11} - a^{12} + 2a^{21} + a^{22} = -12, \\ 3a^{21} = -6. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо: $a^{11} = 2$, $a^{12} = 5$, $a^{21} = -2$, $a^{22} = 1$. Шукана білінійна форма має вигляд:

$$A(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 + 5x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2.$$

Задача 2. Довести першу з формул твердження 9.11.

Розв'язання. Нехай в E_n зафіксовано два базиси e_H та $\dot{e}_H$, і $\dot{e}_H = e_H \mathcal{C}$, де $\mathcal{C}$ — матриця переходу від базису $\dot{e}_H$ до базису e_H.

Координати $\mathcal{X}^B$, Y^B векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ в базисі e_H виражаються через координати $\dot{\mathcal{X}}^B$, $\dot{Y}^B$ цих векторів в базисі $\dot{e}_H$ за формулами $\mathcal{X}^B = \dot{\mathcal{X}}^B \mathcal{C}^T$, $Y^B = \dot{Y}^B \mathcal{C}^T$. Тоді білінійну форму $A(\bar{x}, \bar{y})$ можна записати у вигляді $A(\bar{x}, \bar{y}) =$ $= \dot{\mathcal{X}}^B \dot{\mathcal{A}}_{HH} (\dot{Y}^B)^T = \mathcal{X}^B \mathcal{A}_{HH} (Y^B)^T = \dot{\mathcal{X}}^B \mathcal{C}^T \mathcal{A}_{HH} \mathcal{C} (\dot{Y}^B)^T$, оскільки $(Y^B)^T = \mathcal{C} (\dot{Y}^B)^T$. Якщо $\bar{x}$ і $\bar{y}$ — довільні вектори E_n, то із рівності $\dot{\mathcal{X}}^B \dot{\mathcal{A}}_{HH} (\dot{Y}^B)^T = \dot{\mathcal{X}}^B \mathcal{C}^T \mathcal{A}_{HH} \mathcal{C} (\dot{Y}^B)^T$ маємо $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \mathcal{C}^T \mathcal{A}_{HH} \mathcal{C}$.

Задача 3. В евклідовому просторі E_3 дано білінійну форму $A(\bar{x}, \bar{y}) = x^1y_2 - x^2y_3 + 2x^3y_1$ (один раз коваріантними та один раз контраваріантними коефіцієнтами) та взаємний до метричного тензор G^{-1} з матрицею $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Визначити вигляд цієї форми з двічі контраваріантними та двічі коваріантними коефіцієнтами.

Розв'язання. За умовою задачі матриця $\mathcal{A}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y})$ має вигляд

$$\mathcal{A}_H^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицю $\mathcal{G}$ знайдемо як обернену до матриці $\mathcal{G}^{-1} =$ $= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Маємо

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулами твердження 9.9

$$\mathcal{A}_{HH} = \mathcal{A}_H^B \mathcal{G} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&6&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&6&3\\-1&-3&-2\\2&2&2\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}^{BB} = \mathcal{G}^{-1}\mathcal{A}_H^B = \begin{pmatrix}3&1&-3\\1&1&-2\\-3&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6&3&-1\\-4&1&-1\\10&-3&2\end{pmatrix}$$

і білінійна форма має вигляд:

$$A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^1 + 6x^1y^2 + 3x^1y^3 - x^2y^1 - 3x^2y^2 - $$
$$- 2x^2y^3 + 2x^3y^1 + 2x^3y^2 + 2x^3y^3,$$

$$A(\bar{x},\bar{y}) = -6x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_1y_3 - 4x_2y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 + 10x_3y_1 -$$
$$- 3x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

Задача 4. Нехай у просторі E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 5x_2y_1 + 6x_2y_2$ у базисі e^B. 1) Знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ форми $A(\bar{x},\bar{y})$ у базисі $\dot{e}^B$ за допомогою формули $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \mathcal{D}^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}$ твердження 9.11, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$; 2) переконатися в правильності знаходження елементів матриці $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ за формулами (9.10) перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу до нового базису $\dot{e}^B$.

Розв'язання. 1) Матриця $\mathcal{A}^{BB}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$ має вигляд $\mathcal{A}^{BB} = \begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}$.

1) Визначимо матрицю $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = (\mathcal{C}^{-1})^T = \left(-\begin{pmatrix}-1&-2\\-1&-1\end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \mathcal{D}^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D} = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}12&16\\7&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}44&28\\27&17\end{pmatrix}.$$

2) Переконаємося в правильності знаходження елементів матриці $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ за формулою (9.10). Маємо

$$\dot{a}^{11} = \mathcal{D}_1^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}_1 = (1\quad 2)\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (12\quad 16)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 12 + 32 = 44,$$

$$\dot{a}^{12} = \mathcal{D}_1^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}_2 = (1\quad 2)\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (12\quad 16)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 12 + 16 = 28,$$

$$\dot{a}^{21} = \mathcal{D}_2^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}_1 = (1\quad 1)\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = (7\quad 10)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 7 + 20 = 27,$$

$$\dot{a}^{22} = \mathcal{D}_2^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}_2 = (1\quad 1)\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (7\quad 10)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 7 + 10 = 17.$$

Запишемо нарешті формули перетворення коваріантних координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу від базису e^B до $\dot{e}^B$. Оскільки $\mathcal{X}_H = \dot{\mathcal{X}}_H\mathcal{C}^{-1}$, $Y_H = \dot{Y}_H\mathcal{C}^{-1}$, то

$$(x_1\quad x_2) = (\dot{x}_1\quad \dot{x}_2)\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}, \quad (y_1\quad y_2) = (\dot{y}_1\quad \dot{y}_2)\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$$

або

$$x_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2, \qquad y_1 = \dot{y}_1 + \dot{y}_2,$$
$$x_2 = 2\dot{x}_1 + \dot{x}_2, \qquad y_2 = 2\dot{y}_1 + \dot{y}_2.$$

Тоді

$$A(\bar{x},\bar{y}) = 2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 4(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2) +$$
$$+ 5(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + 6(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(2\dot{y}_1 + \dot{y}_2) =$$
$$= 44\dot{x}_1\dot{y}_1 + 28\dot{x}_1\dot{y}_2 + 27\dot{x}_2\dot{y}_1 + 17\dot{x}_2\dot{y}_2.$$

Задачі для розв'язування

1062. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 набуває значення 6; 2; −23; −10 відповідно на парах векторів $2\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $\bar{e}_1 + \bar{e}_2, -\bar{e}_1 + \bar{e}_2$; $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2, \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$; $-\bar{e}_2, 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$.

1063. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 на парі векторів $\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ набуває значення 15, на парі векторів $2\bar{e}_1, 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$ — значення 10, на парі векторів $7\bar{e}_2, 4\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2$ — значення −147 і на парі $\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2, \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ — значення −9.

1064. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$, яка у площині E_2 набуває відповідно значення −1; 9; 5; 20 на парах векторів (1; 2), (1, 0); (−1; −2), (2; −1); (2; −3), (1; 2); (1; 1), (−1; 4), координати яких задано в базисі e^B.

1065. У площині E_2 білінійна форма $A(\bar{x},\bar{y})$ на парі векторів $\bar{e}^1+\bar{e}^2, 3\bar{e}^1-\bar{e}^2$ набуває значення 15, на парі векторів $-\bar{e}^2, \bar{e}^1$ — значення −3, на парі векторів $\bar{e}^1+\bar{e}^2$, $-\bar{e}^1-\bar{e}^2$ набуває значення −5, на парі векторів $2\bar{e}^1, 2\bar{e}^2$ — значення −4. Знайти білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$.

1066. У E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + 2x_1y_2 - x_2y_2$ та метричний тензор G з матрицею $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. Визначити вигляд цієї білінійної форми з двічі коваріантними коефіцієнтами і один раз коваріантними та один раз контраваріантними коефіцієнтами.

1067. Метрика евклідового простору E_3 задана метричним тензором G з матрицею $\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$. Записати білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + x^2y^2 + x^3y^1 + 2x^3y^3$ у вигляді форми з двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1068. Білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y_1 - x^2y_2 + 2x^3y_3$ задано в E_3 з взаємним до метричного тензором G^{-1}, матриця якого $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$. Який вигляд матиме ця білінійна форма з двічі коваріантними і двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1069. У E_3 задано метричний тензор G з матрицею $\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$ та білінійна форма $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y_1 - 2x^2y_1 - 4x^2y_2 + 4x^3y_3$. Записати цю форму у вигляді форми з двічі коваріантними і двічі контраваріантними коефіцієнтами.

1070. Нехай $A(\bar{x},\bar{y})$ — білінійна форма з двічі контраваріантною матрицею $\mathcal{A}^{BB} = \begin{pmatrix}a^{11} & \dots & a^{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ a^{n1} & \dots & a^{nn}\end{pmatrix}$ у базисі e^B. Знайти закон зміни матриці $\mathcal{A}^{BB}$ у разі переходу до нового базису $\dot{e}^B$.

1071. Знайти закон зміни матриці $\mathcal{A}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$ у разі переходу від базису e_H до нового базису $\dot{e}_H$ в E_n. Як зміниться закон, якщо розглянути координати вектора $\bar{x}$ в базисі e^B, а координати вектора $\bar{y}$ в базисі e_H?

1072. Нехай у площині E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_2$ з двічі контраваріантними коефіцієнтами. Знайти її матрицю $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$, якщо матриця $\mathcal{C}$ переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$ має вигляд $\mathcal{C} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

1073. В умовах задачі 1072 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ за формулами перетворення цих коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу до нового базису $\dot{e}_H$.

1074. Визначити двічі контраваріантну матрицю $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ в базисі $\dot{e}^B$, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$, $\dot{\bar{e}}_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

1075. В умовах задачі 1074 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}^B$, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів.

1076. Знайти двічі коваріантну матрицю $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 - x^2y^2$, яка задана у площині E_2, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1077. В умовах задачі 1076 переконатися в правильності знаходження елементів матриці $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$ за формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу до нового базису .

1078. Знайти двічі коваріантну матрицю $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = 2x^1y^1 + 4x^1y^2 + 5x^2y^1 + 6x^2y^2$, яка задана у площині E_2, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1079. В умовах задачі 1078 визначити коефіцієнти $\dot{a}_{11}, \dot{a}_{12}, \dot{a}_{21}, \dot{a}_{22}$ як значення білінійної форми на базисних векторах $\dot{a}_{ij} = A\left(\dot{\bar{e}}_i, \dot{\bar{e}}_j\right)$, використовуючи формули перетворення базисних векторів.

1080. У площині E_2 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = 2x^1y_1 + 4x^1y_2 + 5x^2y_1 + 6x^2y_2$. Визначити матрицю $\dot{\mathcal{A}}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y})$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1081. В умовах задачі 1078 визначити коефіцієнти $\dot{a}_1^1, \dot{a}_1^2, \dot{a}_2^1, \dot{a}_2^2$ за формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньою підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат у разі переходу до нового базису.

1082. Знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}_H^B$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y_1 + 2x^1y_2 + x^2y_1 - 2x^2y_2$ у новому базисі $\dot{e}_H$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1083. В умовах задачі № 1082 знайти коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ безпосередньою підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу до нового базису .

1084. Нехай у просторі E_3 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^1 + 2x^2y^2 + 3x^3y^3$ у базисі e_H. Знайти її матрицю $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$ у базисі $\dot{e}_H$, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = (1;\ 1;\ 1)$, $\dot{\bar{e}}_2 = (1;\ 1;\ -1)$, $\dot{\bar{e}}_3 = (1;\ -1;\ -1)$.

1085. В умовах задачі 1084 визначити двічі коваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів.

1086. Знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}_{HH}$ двічі коваріантної білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^2 + x^2y^3 + x^3y^1$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1$, $\dot{\bar{e}}_2$, $\dot{\bar{e}}_3$, якщо $\dot{\bar{e}}_1 = (1;\ 0;\ 0)$, $\dot{\bar{e}}_2 = (1;\ 1;\ 0)$, $\dot{\bar{e}}_3 = (1;\ 1;\ 1)$.

1087. В умовах задачі 1086 визначити двічі коваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$ за формулами $\dot{a}_{ij} = A\left(\dot{\bar{e}}_i, \dot{\bar{e}}_j\right)$.

1088. Записати двічі контраваріантну матрицю $\dot{\mathcal{A}}^{BB}$ білінійної форми $A(\bar{x},\bar{y}) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + x_3y_1$ у новому базисі $\dot{e}_H$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$.

1089. В умовах задачі 1088 визначити двічі контраваріантні коефіцієнти білінійної форми в базисі $\dot{e}_H$, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів та безпосередньо підстановкою в білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y})$ формул перетворення координат $\bar{x}$ та $\bar{y}$ у разі переходу до нового базису.

1090. В E_3 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y_2 + x^2y_3 + x^3y_1$. Знайти матрицю $\dot{\mathcal{A}}_H^B$ білінійної форми в новому базисі $\dot{e}_H$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$.

1091. В умовах задачі 1090 визначити коефіцієнти $\dot{a}_i^j, i, j = \ = 1; 2; 3$ білінійної форми, користуючись формулами перетворення коефіцієнтів. Результати перевірити, розглядаючи коефіцієнти як значення білінійної форми на базисних векторах.

1092. В E_4 задано білінійну форму $A(\bar{x},\bar{y}) = x^1y^2 + x^2y^3 + x^3y^4$ у базисі e_H. Знайти її матрицю $\mathcal{A}_{HH}$ в новому базисі $\dot{e}_H$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$.

1093. В умовах задачі 1092 визначити коефіцієнти $\dot{a}_{23}$ та $\dot{a}_{42}$, користуючись формулами для перетворення коефіцієнтів. Результат перевірити, визначивши їх значеннями білінійної форми на базисних векторах $\dot{a}_{23} = A(\dot{\bar{e}}_2, \dot{\bar{e}}_3)$ $\dot{a}_{42} = A(\dot{\bar{e}}_4, \dot{\bar{e}}_2)$.

1094. Користуючись означенням тензора рангу 2 довести, що метричні коефіцієнти g_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$, є координатами двічі коваріантного тензора в E_n.

1095. Користуючись означенням тензора рангу 2 довести, що елементи матриці $\mathcal{G}^{-1} = \left\| g^{ij} \right\|, i,j = \overline{1,n}$, є координатами двічі контраваріантного тензора в E_n.

1096. Користуючись означенням тензора рангу 2, довести, що числа $\delta^{\,j}_{\,i}$ (символ Кронекера), $i,j = \overline{1,n}$ є координатами один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора в E_n. Записати білінійну форму, яка відповідає цьому тензору.

1097. Довести, що елементи матриці лінійного оператора в E_n є координатами один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора рангу 2.

1098. Нехай $A(\bar{x}) = a_1x^1 + \ldots + a_nx^n$ — лінійна форма в E_n. Довести, що коефіцієнти $a_i\,a_j$ $(i,j = \overline{1,n})$ квадрата цієї форми є координатами двічі коваріантного тензора.

1099. Нехай a_{ij} $(i,j = \overline{1,n})$ — координати двічі коваріантного тензора в базисі e_H простору E_n. Довести, що якщо матриця $\mathcal{A} = \left\| a_{ij} \right\|$ вироджена, то і матриця $\dot{\mathcal{A}} = \left\| \dot{a}_{ij} \right\|$, де $\dot{a}_{ij}$ — координати того самого тензора в базисі $\dot{e}_H$, також вироджена.

1100. Нехай матриця $\mathcal{A} = \left\| a_{ij} \right\|$ невироджена. Довести, що елементи матриці $\mathcal{A}^{-1} = \left\| a^{ij} \right\|$, оберненої до $\mathcal{A}$, є координатами двічі контраваріантного тензора, якщо елементи a_{ij} матриці $\mathcal{A}$ є координатами двічі коваріантного тензора.

9.3. ПОЛІЛІНІЙНА ФОРМА ТА ТЕНЗОРИ ДОВІЛЬНОГО РАНГУ. ОСНОВНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ТЕНЗОРАМИ

Означення 9.9. Функція $z = A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$, аргументи якої $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \in E_n$, а значення $z \in R$, називається *полілінійною функцією* в E_n, якщо вона є лінійною функцією від кожного зі своїх аргументів окремо.

Нехай перші $p(0 \le p \le k)$ з аргументів $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p$ функції $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$ задані своїми контраваріантними координатами в базисі e_H, а решта $k - p = q$ аргументів $\bar{x}_{p+1} = \bar{y}^1, \ldots, \bar{x}_{p+q} = \bar{y}^q$ — коваріантними координатами в базисі e^B.

Твердження 9.13.

$$A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^q) = a^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \underset{1}{x}^{i_1} \ldots \underset{p}{x}^{i_p} \overset{1}{y}_{j_1} \ldots \overset{q}{y}_{j_q}, \tag{9.11}$$

де $\underset{s}{x}^1, \ldots, \underset{s}{x}^n$ — координати вектора $\bar{x}_s$ у базисі e_H, $\overset{t}{y}_1, \ldots, \overset{t}{y}_n$ — координати вектора $\bar{y}^t$ у базисі e^B, $a^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = A(\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_p}, \bar{e}^{j_1}, \ldots, \bar{e}^{j_q})$.

У правій частині (9.11) підсумовування проводиться за індексами $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$, кожний з яких незалежно від інших пробігає значення від 1 до n.

Зауваження 9.13. Полілінійною формою від kn змінних $\underset{1}{x}^1, \ldots, \underset{1}{x}^n; \ldots; \underset{p}{x}^1, \ldots, \underset{p}{x}^n; \overset{1}{y}_1, \ldots, \overset{1}{y}_n; \ldots; \overset{q}{y}_1, \ldots, \overset{q}{y}_n$ називається однорідний многочлен степеня k лінійний окремо від кожної із сукупності n змінних-координат векторів $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^q$. З формули (9.11) випливає, що полілінійна функція в E_n є полілінійною формою від координат векторів-аргументів. Тому полілінійну функцію в E_n називають і полілінійною формою в E_n.

Означення 9.10. Коефіцієнти $a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ у формулі (9.11) називаються p-разів коваріантними та q-разів контраваріантними або типу (p,q) коефіцієнтами полілінійної форми $A(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$.

Твердження 9.14. Для коефіцієнтів полілінійної форми в фіксованому базисі e_H мають місце такі рівності:

Якщо $p > 0$,

$$a_{i_1 \ldots i_{p-1}\alpha}^{j_1 \ldots j_q} g^{\alpha i_p} = a_{i_1 \ldots i_{p-1}}^{i_p j_1 \ldots j_q}.$$

Якщо $q > 0$,

$$a_{i_1 \ldots i_p}^{\alpha j_2 \ldots j_q} g_{\alpha j_1} = a_{i_1 \ldots i_p j_1}^{j_2 \ldots j_q}.$$

Твердження 9.15. Якщо $\dot{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$ коефіцієнти полілінійної форми $A(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k)$ в базисі $\dot{e}_H$, то

$$\dot{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = a_{k_1 \ldots k_p}^{l_1 \ldots l_q} c_{i_1}^{k_1} \ldots c_{i_p}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} \ldots d_{l_q}^{j_q}, \qquad (9.12)$$

де $\mathcal{C} = \left\| c_j^i \right\|$ — матриця переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$, $\mathcal{D} = (\mathcal{C}^{-1})^T = \left\| d_i^j \right\|$ (див. п.4.5).

Означення 9.11. Тензором рангу нуль в E_n називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі e_H визначається заданням одного й того самого числа.

Приклад. Модуль вектора $\bar{a}$ — тензор рангу нуль.

Означення 9.12. Тензором A рангу k $(k \in N)$ типу (p, q) в E_n $(p + q = k, \ \ p \geq 0, q \geq 0)$ називається геометричний об'єкт, який в кожному базисі e_H визначається заданням n^k чисел $a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$, що називаються координатами тензора A та змінюються у разі переходу до нового базису $\dot{e}_H$ за формулами

$$\dot{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = a_{k_1 \ldots k_p}^{l_1 \ldots l_q} c_{i_1}^{k_1} \ldots c_{i_p}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} \ldots d_{l_q}^{j_q}. \qquad (9.13)$$

Позначення. Писатимемо $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.14. Тензор рангу k типу (p, q) звичайно називають p-разів коваріантним та q разів контраваріантним тензором рангу k $(k = p + q)$.

Зауваження 9.15. Формули (9.13) перетворення координат тензора рангу k у разі переходу до нового базису збігаються з формулами (9.12) перетворення однойменних коефіцієнтів полілінійної форми. Це дає можливість тензору рангу k типу (p, q) поставити у відповідність полілінійну форму степеня k вигляду (9.11) з коефіцієнтами, що дорівнюють відповідним координатам тензора в одному і тому самому базисі e_H. При цьому значення полілінійної форми (9.11) на векторах $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_p, \bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^q$ називають і значеннями відповідного тензора на цих векторах.

Під основними операціями над тензорами розуміють операції множення тензора на число, додавання тензорів, множення тензорів, перестановки індексів тензора, згортання індексів тензора, підняття та опускання індексів тензора.

Рівність тензорів. Два тензори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли вони однакового типу і мають рівні відповідні координати в деякому базисі.

Множення тензора на число. Добутком αA тензора $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ на число α називається тензор $(\alpha A)_{e_H} = \left\{ \alpha\, a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.16. Якщо полілінійну форму помножити на число α, то коефіцієнти добутку визначаться за цією самою формулою.

Додавання тензорів. Сумою $A + B$ тензорів $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ та $B_{e_H} = \left\{ b_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ типу (p, q) називається тензор C, для якого $C_{e_H} = \left\{ c_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} + b_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$.

Зауваження 9.17. Тензори A та B можна додати тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий тип.

Зауваження 9.18. Під різницею $A - B$ тензорів A та B розуміють тензор $C = A + (-1)B$.

Множення тензорів. Нехай $A_{e_H} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} \right\}$ — тензор типу (p, q), $B_{e_H} = \left\{ b_{l_1 \ldots l_r}^{m_1 \ldots m_s} \right\}$ — тензор типу (r, s).

Покладемо $l_1 = i_{p+1}, \ldots, l_r = i_{p+r}, m_1 = j_{q+1}, \ldots, m_s = j_{q+s}$.

Добутком $C = AB$ тензорів A та B називається тензор типу $(p + r, q + s)$, для якого

$$C_{e_H} = \left\{ c_{i_1 \ldots i_{p+r}}^{j_1 \ldots j_{q+s}} \right\} = \left\{ a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} b_{l_1 \ldots l_r}^{m_1 \ldots m_s} \right\}.$$

Зауваження 9.19. Операція множення визначена для тензорів A та B довільних типів.

Перестановка індексів. Ця операція полягає в переході від даного тензора A до тензора B за таким правилом: верхні та нижні індекси кожної координати тензора A в будь-якому базисі підлягають одній і тій самій перестановці (перестановка верхніх індексів взагалі не збігається з перестановкою нижніх індексів).

Зауваження 9.20. За цим самим правилом змінюються коефіцієнти полілінійної форми у разі перестановок її аргументів, що задані координатами одного й того самого типу.

Згортання тензора. Нехай A — тензор типу (p, q), для якого $p \neq 0$ та $q \neq 0$. Визначимо згортання тензора A за парою виділених індексів, один з яких верхній, а другий — нижній. У довільному базисі e_H зафіксуємо значення $(q-1)$ верхніх та $(p-1)$ нижніх індексів, крім двох виділених. Розглянемо координати тензора A в e_H з фіксованими значеннями $(q-1)$ верхніх та $(p-1)$ нижніх індексів та рівними виділеними індексами. Сума таких координат визначає координату тензора B в e_H з фіксованими $(q-1)$ верхніми та $(p-1)$ нижніми індексами. Тензор B і є результатом згортання тензора A за парою виділених індексів.

Зауваження 9.21. Крім операції «згортання тензора», розглядають операцію «згортання тензорів», що полягає у такому: нехай A тензор типу (p, q), для якого $p \neq 0$, B — тензор типу (r, s), для якого $s \neq 0$. Під згортанням тензорів A та B будемо розуміти згортання тензора AB за одним з нижніх індексів A та одним з верхніх індексів тензора B.

Операція підняття та опускання індексів. Операція підняття індекса полягає у переході від тензора A типу (p, q) при $p>0$ до тензору B типу $(p-1, q+1)$ за правилом

$$B_{e_H} = \left\{ b_{i_1 \ldots i_{p-1}}^{i_p j_1 \ldots j_q} \right\} = \left\{ g^{i_p \alpha} a_{i_1 \ldots i_{p-1} \alpha}^{j_1 \ldots j_q} \right\}. \qquad (9.14)$$

Операція опускання індекса полягає у переході від тензора A типу (p, q) при $q>0$ до тензору C типу $(p+1, q-1)$ за правилом

$$C_{e_H} = \left\{ c_{i_1 \ldots i_p j_1}^{j_2 \ldots j_q} \right\} = \left\{ g_{j_1 \alpha} a_{i_1 \ldots i_p}^{\alpha j_2 \ldots j_q} \right\}. \qquad (9.15)$$

Зауваження 9.22. За цим самим правилом змінюються коефіцієнти полілінійної форми в фіксованому базисі у разі зміни типу координат одного з аргументів.

Зауваження 9.23. Користуючись операціями підняття (опускання) індекса та перестановки індексів, можна довільний нижній (верхній) індекс підняти (опустити) на довільне місце серед верхніх (нижніх) індексів.

Задача 1. У базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ евклідового простору E_2 дано трилінійну функцію $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = x^1 y^2 z_2 - 4x^2 y^1 z_1$ у вигляді трилінійної форми з двічі коваріантними і один раз контраваріантними коефіцієнтами. Визначити коефіцієнти трилінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ у базисі $\dot{\bar{e}}_1, \dot{\bar{e}}_2$: 1) користуючись формулами (9.12) перетворення коефіцієнтів; 2) безпосередньою підстановкою в полілінійну форму формул перетворення координат векторів $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, якщо $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. 1. Запишемо коефіцієнти полілінійної форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$a_{11}^1 = 0,\ a_{12}^1 = 0,\ a_{21}^1 = -4,\ a_{22}^1 = 0,$$
$$a_{11}^2 = 0,\ a_{12}^2 = 1,\ a_{21}^2 = 0,\ a_{22}^2 = 0.$$

Коефіцієнти форми $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ у разі переходу до нового базису перетворюються за формулою (9.12):

$$\dot{a}_{ij}^k = a_{sl}^m c_i^s c_j^l d_m^k .$$

При цьому матриця $\mathcal{D}$ має вигляд $\mathcal{D} = (\mathcal{C}^{-1})^T =$ $= \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 \\ d_2^1 & d_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Отже,

$$\dot{a}_{11}^1 = a_{12}^2 c_1^1 c_1^2 d_2^1 + a_{21}^1 c_1^2 c_1^1 d_1^1 = 1 \cdot 1(-1)2 - 4(-1)1 \cdot 3 =$$
$$= -2 + 12 = 10,$$
$$\dot{a}_{12}^1 = a_{12}^2 c_1^1 c_2^2 d_2^1 + a_{21}^1 c_1^2 c_2^1 d_1^1 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 - 4(-1)(-2)3 =$$
$$= 6 - 24 = -18,$$
$$\dot{a}_{21}^1 = a_{12}^2 c_2^1 c_1^2 d_2^1 + a_{21}^1 c_2^2 c_1^1 d_1^1 = 1(-2)(-1)2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$
$$= 4 - 36 = -32,$$
$$\dot{a}_{22}^1 = a_{12}^2 c_2^1 c_2^2 d_2^1 + a_{21}^1 c_2^2 c_2^1 d_1^1 = 1(-2)3 \cdot 2 + (-4)3 \cdot (-2)3 =$$
$$= -12 + 72 = 60,$$
$$\dot{a}_{11}^2 = a_{12}^2 c_1^1 c_1^2 d_2^2 + a_{21}^1 c_1^2 c_1^1 d_1^2 = 1 \cdot 1(-1)1 + (-4)(-1)1 \cdot 1 =$$
$$= -1 + 4 = 3,$$
$$\dot{a}_{12}^2 = a_{12}^2 c_1^1 c_2^2 d_2^2 + a_{21}^1 c_1^2 c_2^1 d_1^2 = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-4)(-1)(-2)1 =$$
$$= 3 - 8 = -5,$$

$$\dot{a}_{21}^2 = a_{12}^2 c_2^1 c_1^2 d_2^2 + a_{21}^1 c_2^2 c_1^1 d_1^2 = 1(-2)(-1)1 + (-4)3\cdot 1\cdot 1 =$$
$$= 2 - 12 = -10,$$
$$\dot{a}_{22}^2 = a_{12}^2 c_2^1 c_2^2 d_2^2 + a_{21}^1 c_2^2 c_2^1 d_1^2 = 1(-2)3\cdot 1 + (-4)3(-2)1 =$$
$$= -6 + 24 = 18.$$

Тоді трилінійна форма в новому базисі матиме вигляд:

$$A(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 10\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 - 18\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 - 32\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 + 60\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 +$$
$$+ 3\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 - 5\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 - 10\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 + 18\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2.$$

2. Переконаємося в правильності знайдених коефіцієнтів безпосередньою підстановкою в трилінійну форму $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ формул перетворення координат векторів $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ у разі переходу до нового базису.

Для координат вектора $\bar{x}$ маємо $\left(\mathcal{X}^B\right)^T = \mathcal{C}\left(\dot{\mathcal{X}}^B\right)^T$ або $\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ \dot{x}^2 \end{pmatrix}$.

Звідси

$$x^1 = \dot{x}^1 - 2\dot{x}^2,$$
$$x^2 = -\dot{x}^1 + 3\dot{x}^2.$$

Аналогічно для координат вектора $\bar{y}$ маємо $\left(Y^B\right)^T = \mathcal{C}\left(\dot{Y}^B\right)^T$ або $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{y}^1 \\ \dot{y}^2 \end{pmatrix}$.

Звідси

$$y^1 = \dot{y}^1 - 2\dot{y}^2,$$
$$y^2 = -\dot{y}^1 + 3\dot{y}^2.$$

Для координат вектора $\bar{z}$ маємо $\left(\mathcal{Z}_H\right)^T = \mathcal{D}\left(\dot{\mathcal{Z}}_H\right)^T$ або $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}$.

Звідси

$$z_1 = 3\dot{z}_1 + \dot{z}_2,$$
$$z_2 = 2\dot{z}_1 + \dot{z}_2.$$

Підставляючи координати векторів $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ в полілінійну форму, маємо:

$$A(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\dot{x}^1 - 2\dot{x}^2\right)\left(-\dot{y}^1 + 3\dot{y}^2\right)\left(2\dot{z}_1 + \dot{z}_2\right) - 4\left(-\dot{x}^1 + 3\dot{x}^2\right)\times$$
$$\times\left(\dot{y}^1 - 2\dot{y}^2\right)\left(3\dot{z}_1 + \dot{z}_2\right) = \left(-\dot{x}^1\dot{y}^1 + 3\dot{x}^1\dot{y}^2 + 2\dot{x}^2\dot{y}^1 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2\right)\times$$
$$\times\left(2\dot{z}_1 + \dot{z}_2\right) - 4\left(-\dot{x}^1\dot{y}^1 + 2\dot{x}^1\dot{y}^2 + 3\dot{x}^2\dot{y}^1 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2\right)\left(3\dot{z}_1 + \dot{z}_2\right) =$$
$$= -2\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 + 6\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 + 4\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 - 12\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 - \dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 +$$
$$+ 3\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 + 2\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 - 6\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2 + 12\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 - 24\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 -$$
$$- 36\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 + 72\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 + 4\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 - 8\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 - 12\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 +$$
$$+ 24\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2 = 10\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_1 - 18\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_1 - 32\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_1 + 60\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_1 +$$
$$+ 3\dot{x}^1\dot{y}^1\dot{z}_2 - 5\dot{x}^1\dot{y}^2\dot{z}_2 - 10\dot{x}^2\dot{y}^1\dot{z}_2 + 18\dot{x}^2\dot{y}^2\dot{z}_2.$$

Задача 2. Дано тензор B рангу 1 типу (1; 0) у базисі e_H простору E_4: $B_{e_H} = \{b_i\} = (1;3;-2;4)$. Знайти тензор λB, якщо $\lambda = -3$.

Розв'язання. Добутком тензора $B_{e_H} = \{b_i\}$ на число $\lambda = -3$ буде тензор

$$(\lambda B)_{e_H} = \{\lambda\, b_i\} = (-3\cdot 1; -3\cdot 3; -3\cdot(-2); -3\cdot 4) =$$
$$= (-3; -9; 6; -12).$$

Задача 3. Дано два тензори A і B типу (2; 0) у базисі e_H простору E_3

$$A_{e_H} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad B_{e_H} = \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

Розв'язання. Сума тензорів

$$(A+B)_{e_H} = C_{e_H} = \{c_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1+(-4) & 3+5 & 2+1 \\ -1+1 & 0+(-3) & 1+2 \\ 2+1 & 4+3 & 2+(-2) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Різниця тензорів

$$(A-B)_{e_H} = D_{e_H} = \{d_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1-(-4) & 3-5 & 2-1 \\ -1-1 & 0-(-3) & 1-2 \\ 2-1 & 4-3 & 2-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Дано тензор A рангу 1 типу (0; 1): $A_{e_H} = \{a^i\} = (1;2;3)$ та тензор B рангу 2 типу (2; 0): $B_{e_H} = \{b_{jk}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ у базисі e_H простору E_3. Знайти тензор AB.

Розв'язання. Результатом множення цих тензорів буде тензор $C = AB$ рангу $1+2=3$. Кількість координат тензора $C_{e_H} = \{c^i_{jk}\}$ дорівнюватиме $3^3 = 27$. Їх можна записати у вигляді тривимірної матриці, тобто у вигляді трьох квадратних матриць розміром 3×3, накладених послідовно одна на одну.

Складемо матриці:

$$\{c^1_{jk}\} = \{a^1 b_{jk}\} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\{c^2_{jk}\} = \{a^2 b_{jk}\} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\{c^3_{jk}\} = \{a^3 b_{jk}\} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Дістали 27 координат тензора $C_{e_H} = \{c^i_{jk}\}$, де $i, j, k = 1;\ 2;\ 3$. Перший індекс i означає номер шару тривимірної матриці, другий j — номер рядка, третій k — номер стовпця.

Задача 5. Виконати операцію перестановки індексів тензора

$$A_{e_H} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 15 \end{pmatrix},$$

який є двічі коваріантним тензором рангу 2 в E_3.

Розв'язання. Для тензора A рангу 2 операція перестановки індексів призводить до нового тензора B рангу 2, матриця координат якого буде транспонованою щодо матриці координат початкового тензора, тобто

$$B_{e_H} = \{b_{ij}\} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix},$$

де $b_{ij} = a_{ji}$.

Задача 6. Дано тензор $A_{e_H} = \{a^{lm}_{ijk}\}$ типу (3; 2) у базисі e_H простору E_3. Згорнути цей тензор парами індексів m, k та l, j.

Розв'язання. Покладемо $k = m$. Дістанемо тензор $B_{e_H} = \{b^l_{ij}\} = \{a^{lm}_{ijm}\}$, де $b^l_{ij} = a^{lm}_{ijm} = a^{l1}_{ij1} + a^{l2}_{ij2} + a^{l3}_{ij3}$.

Тензор B_{e_H} є тензором рангу 3.

Згорнемо його ще раз, поклавши $j = l$. Маємо

$$C_{e_H} = \{c_i\} = \{b^l_{il}\}, \text{ де } c_i = b^l_{il} = b^1_{i1} + b^2_{i2} + b^3_{i3}.$$

Тензор $C_{e_H} = \{c_i\}$ є тензором типу (1, 0).

Задача 7. Згорнути тензор

$$C_{e_H} = \{c^j_i\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

типу (1; 1) у базисі e_H простору E_3.

Розв'язання. Покладемо $i = j$. Дістанемо тензор

$$D_{e_H} = \{c^j_j\} = c^j_j = c^1_1 + c^2_2 + c^3_3 = 1 + 4 + 2 = 7,$$

який є тензором рангу нуль.

Задача 8. Дано тричі коваріантний тензор $A_{e_H} = \{a_{ijk}\}$ рангу 3 в евклідовому просторі E_n. Перейти до тричі контраваріантного тензора $B_{e_H} = \{b^{ijk}\}$ рангу 3 за допомогою операції підняття індексів, якщо взаємний метричний тензор $G^{-1}_{e_H} = \{g^{mk}\}$ відомий.

Розв'язання. Піднімемо у тензора $A_{e_H} = \{a_{ijk}\}$ спочатку третій індекс k. Для цього помножимо його на взаємний метричний тензор $G_{e_H}^{-1} = \{g^{mk}\}$ та згорнемо за індексом k, тобто

$$\{g^{mk} a_{ijk}\} = \{c_{ij}^{m}\}.$$

Діючи аналогічно, піднімемо другий індекс j

$$\{g^{sj} c_{ij}^{m}\} = \{d_i^{sm}\}.$$

І, нарешті,

$$B_{e_H} = \{b^{lsm}\} = \{g^{li} d_i^{sm}\}.$$

Задачі для розв'язування

1101. У деякому базисі e_H простору E_2 дано трилінійну форму $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 5x^1 y_2 z_2$ з коефіцієнтами типу (1; 2) (один раз коваріантними та двічі контраваріантними) і матрицю $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ переходу від базису e_H до базису $\dot{e}_H$.

а) Знайти коефіцієнти $\dot{a}_{ij}^{k}$ трилінійної форми $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ в новому базисі, користуючись формулами (9.12) перетворення коефіцієнтів.

б) Визначити вигляд трилінійної форми $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ у новому базисі $\dot{e}_H$ безпосередньою підстановкою формул перетворення координат векторів $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$.

1102. У деякому базисі e_H евклідового простору E_2 задано трилінійну форму $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = 2x_1 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1$ з коефіцієнтами типу (0; 3).

Визначити: а) коефіцієнти $\dot{a}^{ijk}$ трилінійної форми $A(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ у новому базисі $\dot{e}_H$ за допомогою формул (9.12) перетворення коефіцієнтів, якщо $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця переходу від базису e_H до $\dot{e}_H$; б) переконатися в правильності знаходження коефіцієнтів безпосередньою підстановкою в трилінійну форму формул перетворення координат векторів $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$ у разі переходу до нового базису.

1103. Знайти добуток один раз контраваріантного тензора $C_{e_H} = \{c^i\} = (-1;5;0)$ на дійсне число $\lambda = 5$.

1104. Знайти тензор $C = \lambda D$, якщо

$$D_{e_H} = \{d_i^j\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & -1 \end{pmatrix};\ \lambda = -2.$$

1105. Довести, якщо $A_{e_H} = \{a_{ij}^{k}\}$ та $B_{e_H} = \{b_{ij}^{k}\}$ є тензорами рангу 3 типу (2; 1), то і $C = C_{e_H} = \{c_{ij}^{k}\} = A + B$ є тензором рангу 3 типу (2; 1).

1106. Чи можна додавати тензори таких видів:

а) $A_{e_H} = \{a^{ik}\}$ та $B_{e_H} = \{b^{ik}\}$;

б) $A_{e_H} = \{a_{ijk}\}$ та $B_{e_H} = \{b_{jk}^{i}\}$;

в) $C_{e_H} = \{c_{ijk}\}$ та $D_{e_H} = \{d^{ijk}\}$;

г) $C_{e_H} = \{c_{ijk}^{l}\}$ та $D_{e_H} = \{d_{ijk}^{l}\}$.

1107. Тензори A та B рангу 2 типу (0; 2) задані координатами в одному і тому самому базисі e_H простору E_3.

$$A_{e_H} = \{a^{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B_{e_H} = \{b^{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

1108. Тензори A та B рангу 2 (один раз коваріантні та один раз контраваріантні) задані координатами в одному і тому самому базисі e_H простору E_3:

$$A_{e_H} = \{a_i^j\} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad B_{e_H} = \{b_i^j\} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти суму та різницю цих тензорів.

1109. Дано два тензори рангу 1: $A_{e_H} = \{a_i\} = (1;2;-1)$ та $B_{e_H} = \{b_j\} = (2;4;1)$. Знайти тензор AB.

1110. Дано два тензори рангу один: $C_{e_H} = \{c^i\} = (4;2;-1)$ та $D_{e_H} = \{d^i\} = (1;3;-1)$. Знайти тензори CD та DC.

1111. Знайти тензор $P = FQ$, якщо $F_{e_H} = \{f^i\} = (1;-1;2)$,

$$Q_{e_H} = \{q_j^k\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1112. Записати координати тензора $C = AB$, якщо $A_{e_H} = \{a^{ij}\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_{e_H} = \{b_k\} = (-1;2;3)$.

1113. Виконати операцію перестановки індексів один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора $C_{e_H} = \{c_k^l\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ 11 & 6 & 18 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1114. Виконати операцію перестановки індексів для двічі контраваріантного тензора $B_{e_H} = \{b^{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 10 \\ 3 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

1115. Згорнути тензор $A_{e_H} = \{a_k^l\} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 12 & 7 \\ 1 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

1116. Згорнути тензор $B_{e_H} = \{b_i^j\} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 8 \\ -1 & 13 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1117. Згорнути тензор C, здобутий у результаті добутку двічі коваріантного тензора $A_{e_H} = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ та один раз контраваріантного тензора $B_{e_H} = \{b^k\} = (1;2;4)$ по індексах j та k.

1118. Згорнути тензор $P_{e_H} = \{p_i^{jk}\}$ один раз коваріантний та двічі контраваріантний, знайдений внаслідок добутку контраваріантного тензора $Q_{e_H} = \{q^k\} = (-1;2;5)$ рангу 1 і один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора $R_{e_H} = \{r_i^j\} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ рангу 2 по індексах i та k.

1119. Довести, що координати тензорів A і B у (9.14) є коефіцієнтами типів (p, q) і $(p-1, q+1)$ однієї і тієї самої полілінійної форми степеня $k = p + q$ в E_n.

1120. Довести, що координати тензорів A і C в (9.15) є коефіцієнтами типів (p, q) і $(p+1, q-1)$ однієї і тієї самої полілінійної форми степеня $k = p + q$ в E_n.

1121. Опустити верхній індекс у тензора $B_{e_H} = \{b_{lm}^k\}$ рангу 3 типу (2; 1) в E_n, якщо метричний тензор G простору E_n відомий.

1122. Опустити верхні індекси у тензора $C_{e_H} = \{c_m^{kl}\}$ (один раз коваріантного та двічі контраваріантного) в E_n, якщо метричний тензор G простору E_n відомий.

1123. Знайти тензор рангу 2 типу (1,1), який дістається, якщо у метричного тензора $G_{e_H} = \{g_{ij}\}$ у E_n підняти один з нижніх індексів.

1124. Знайти тензор рангу 2 типу (1; 1), який дістається, якщо у взаємного метричного тензора $G_{e_H}^{-1} = \{g^{ij}\}$ у E_n опустити один з верхніх індексів.

1125. Знайти повне згортання $g_{ij}g^{ij}$ метричних тензорів евклідового простору E_n.

ВІДПОВІДІ

1. $\begin{pmatrix}4&7&4\\4&-2&12\\7&3&3\end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix}2&5&6\\2&9&-1\\9&12&6\end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix}3&-1&4\\6&4&6\\5&5&19\\2&6&9\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}2&1&4\\3&6&2\\7&3&4\\4&7&2\end{pmatrix}$.

5. $(1\ 6\ 2\ 4\ 2)$. **6.** $\begin{pmatrix}0\\5\\7\end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix}7&26\\19&38\\8&45\end{pmatrix}$. **8.** $\begin{pmatrix}-3&-5&7\\15&20&13\end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix}-2&2\\9&5/2\end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix}2&3&0\\3&4&-8\end{pmatrix}$. **11.** $x_1=-8$, $x_2=-6$. **12.** $x_1=3$, $x_2=15$. **13.** $\begin{pmatrix}5&3\\0&8\\-7&2\\6&-1\end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix}1\\3\\4\\-5\end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix}2&6&10\\3&7&11\\4&8&-1\\5&9&3\end{pmatrix}$. **16.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix}-1&3&2\\0&4&5\\1&2&3\end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix}3&4&7\\0&5&8\end{pmatrix}$.

19. $(1\ -3\ 3\ 0)$. **20.** $\begin{pmatrix}2&5&3\\3&-1&1\\4&0&1\end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix}-17&-34&-51\\-17&-34&-51\\17&34&51\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix}14&9&-4\\16&5&-3\\7&1&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4&3&11\\-1&-3&1\\6&4&17\end{pmatrix}$. **24.** $\begin{pmatrix}-10&-4&-7\\6&14&4\\-7&5&-4\end{pmatrix}$. **25.** $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

26. $\begin{pmatrix}11&4\\5&1\end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix}-1&1\\2&22\end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix}4\\14\end{pmatrix}$. **30.** $\begin{pmatrix}10\\3\\13\end{pmatrix}$. **31.** (12).

32. $\begin{pmatrix}9&6&3\\3&2&1\\6&4&2\end{pmatrix}$. **33.** $\begin{pmatrix}2&0&-2&-4\\4&0&-4&-8\\5&0&-5&-10\\6&0&-6&-12\end{pmatrix}$. **34.** $\begin{pmatrix}11&-2&-6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. **35.** $\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}$.

36. $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$. **37.** $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{pmatrix}$. **38.** $\begin{pmatrix}13&-14\\21&-22\end{pmatrix}$. **39.** $\begin{pmatrix}1&-31\\0&32\end{pmatrix}$. **40.** $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, якщо n — парне; $\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$, якщо n — непарне. **41.** $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\sin n\alpha\\\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$. **42.** $\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$.

43. $\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$. **44.** $\begin{pmatrix}b_1^k&0&0&\dots&0\\0&b_2^k&0&\dots&0\\.&.&.&.&.\\0&0&0&\dots&b_n^k\end{pmatrix}$. **46.** $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. **47.** $\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\5&5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\3&3\\5&5\\7&7\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&1\\-1&1&4\\-1&2&7\\-1&3&10\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&4&-2\\0&14&-7\\0&24&-12\\0&34&-17\end{pmatrix}$. **48.** $\begin{pmatrix}x&2y\\-y&x-2y\end{pmatrix}=(x-y)\mathcal{E}+y\mathcal{A}$.

49. $\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}=(x-y)\mathcal{E}+y\mathcal{A}$. **50.** $\begin{pmatrix}x&y&0\\u&v&0\\3t-3x-u&t-3y-v&t\end{pmatrix}$. **51.** $\begin{pmatrix}x&2y\\3y&x+3y\end{pmatrix}$.

52. $\begin{pmatrix}3197&-1266\\7385&-922\end{pmatrix}$. **53.** $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. **54.** $\begin{pmatrix}18&15&5\\19&53&11\\11&15&12\end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix}5&0&2\\5&1&1\\-3&2&0\end{pmatrix}$.

56. $\begin{pmatrix}9&5&-10\\2&4&-9\\3&5&-12\end{pmatrix}$. **58.** $\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$, де $bc=-a^2$. **61.** Зі знаком «+». **62.** $j=2$, $i=6$. **66.** 5. **67.** −3. **68.** 1. **69.** $ab-c^2-d^2$. **70.** $\sin(\alpha-\beta)$. **71.** −2. **72.** 0. **73.** −30. **74.** 0. **75.** −1. **76.** 1. **77.** 1. **78.** $\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2$. **79.** $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. **80.** 60. **81.** 180. **82.** 60. **83.** 60. **84.** 1. **85.** 2. **86.** $2a^2(a+x)$. **87.** 0. **88.** 1. **89.** −16. **90.** −17. **91.** 0. **92.** 4. **93.** $abc+2x^3-(a+b+c)x^2$. **94.** 6. **95.** 6. **96.** 0. **97.** $(ab+bc+ac)x+abc$. **98.** $1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. **99.** 1. **100.** $\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)$. **101.** −70. **102.** 640. **103.** 0. **104.** 360. **105.** 2128. **106.** 52. **107.** $-3(x^2-1)(x^2-4)$. **108.** $(af+cd-eb)^2$. **109.** $n!$. **110.** $(x_2-x_1)\times\sin(\gamma-\beta)+(z_2-z_1)\sin(\beta-\alpha)-(y_2-y_1)\sin(\gamma-\alpha)$. **111.** 8. **112.** 20.

122. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. **123.** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}5&2\\2&-1\end{pmatrix}$. **124.** $\frac{1}{47}\begin{pmatrix}6&-5\\7&2\end{pmatrix}$.

125. $\begin{pmatrix}1&-2&9\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$. **126.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-4&-3\\-1&1&3\\1&2&0\end{pmatrix}$. **127.** $\frac{1}{20}\begin{pmatrix}-4&2&10\\0&-5&5\\8&1&-5\end{pmatrix}$.

128. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&4&-1\\-1&-1&1\\3&-6&3\end{pmatrix}$. **129.** $-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&2&-4\\0&0&3\\0&-2&1\end{pmatrix}$. **130.** $\begin{pmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

131. $\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\31&-19&3&-4\\-23&14&-2&3\end{pmatrix}$. **132.** $\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$. **133.** $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$.

134. $\frac{1}{31}\begin{pmatrix}21&8&22\\25&11&-55\\17&36&-6\end{pmatrix}$. **135.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2\\7\\-2\end{pmatrix}$. **136.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-22\\-3\\7\end{pmatrix}$. **137.** $\begin{pmatrix}2&-23\\0&8\end{pmatrix}$.

138. $\begin{pmatrix}18&-32\\5&-8\end{pmatrix}$. **139.** $\begin{pmatrix}-3&2&0\\-4&5&-2\\-5&3&0\end{pmatrix}$. **140.** $\begin{pmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{pmatrix}$. **141.** $-\frac{1}{109}\begin{pmatrix}-13&6&1\\6&-204&-579\\-27&-63&-174\end{pmatrix}$.

142. $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. **143.** $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$. **144.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 20 & -17 & 4 \\ -12 & 11 & -2 \end{pmatrix}$.

145. $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 17 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$. **146.** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **147.** $\frac{1}{180}\begin{pmatrix} -36 & -55 & 89 \\ 36 & 55 & 19 \\ 0 & 15 & 15 \end{pmatrix}$. **148.** $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

149. $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -4 & 10 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. **150.** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. **151.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

152. $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -23 & 8 & -56 \\ -5 & -57 & 7 \\ -17 & -2 & -28 \end{pmatrix}$. **153.** $(-2;\ 5;\ -3;\ 1)$. **154.** $(24{,}5;\ 21{,}5;\ 10)$.

155. $\left(\frac{11}{16};\frac{47}{16};\frac{17}{8}\right)$. **156.** $\left(\frac{5}{8};\frac{9}{8};\frac{9}{8}\right)$. **157.** $(2;\ 3;\ 4)$. **158.** $(1;\ -1;\ 2)$.

159. $(-6;\ -1;\ 8)$. **160.** $\left(\frac{4}{3};-\frac{1}{3};3\right)$. **161.** $(1;\ 1;\ 1;\ 1)$. **164.** 1) $\overrightarrow{AC}$, 2) $\overrightarrow{DA}$, 3) 0, 4) $\overrightarrow{CM}$. **165.** $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
166. $\overrightarrow{AB} = 2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = 2\left(\vec{b} - 2\vec{a}\right)$, $\overrightarrow{AC} = 2\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$. **168.** $\frac{\vec{a} + \lambda\,\vec{c}}{1+\lambda}$. **169.** 1) $\alpha = \frac{1}{2}$; 2) $\alpha<1$; 3) $\alpha>1$. **170.** $\frac{|\overrightarrow{KM}|}{|\overrightarrow{MB}|} = \frac{1}{6}$. **171.** Точка перетину медіан. **172.** $\frac{\vec{b}\,|\vec{c}| + \vec{c}\,|\vec{b}|}{|\vec{c}| + |\vec{b}|}$.
174. $\frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}{2}$. **175.** 22. **176.** $|\vec{a} - \vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$. **178.** $|R| = 15$ кг.
179. 1) $\alpha = -1$; 2) $\alpha = \pm 1$. **180.** 1) $\alpha = 3$, $\beta = 2$; 2) $\alpha = -11$, $\beta = -23$.
181. 1) $\alpha = 7/5$; 2) $\alpha = -2$. **182.** $2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. **183.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) так. **187.** $\lambda = 1$, $\mu = 1$. **188.** $\overrightarrow{AB} = (1;\ 0)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;\ 1)$, $\overrightarrow{CD} = (2;\ 1)$, $\overrightarrow{DE} = (-1;\ 0)$, $\overrightarrow{EF} = (1;\ -1)$, $\overrightarrow{FA} = (-2;\ -1)$. **189.** $\overrightarrow{A'B'} = (1;\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{A'D'} = (0;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{A'C} = (1;\ 1;\ -1)$, $\overrightarrow{A'B} = (1;\ 0;\ -1)$, $\overrightarrow{A'D} = (0;\ 1;\ -1)$.
190. $\overrightarrow{BC} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \frac{|\vec{a}| - |\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$. **191.** $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{DA} = \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **192.** а) $\overrightarrow{CM} = (-1;\ 1)$, $\overrightarrow{OB} = (-1;\ -2)$, $\overrightarrow{KM} = (-1;\ -1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;\ -2)$, $\overrightarrow{NC} = (1;\ 1)$, $\overrightarrow{AN} = (-1;\ -5)$; б) $\overrightarrow{CM} = (-2;\ 1)$, $\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{2};1\right)$, $\overrightarrow{KM} = (-1;\ 1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;\ 2)$, $\overrightarrow{NC} = (1;\ -1)$, $\overrightarrow{AN} = (1;\ 1)$. **193.** $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}$.

194. $\left(\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|};\ \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}\right)$. **195.** $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{5};\ -\frac{2}{5}\right)$, $\overrightarrow{BC} = \left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5}\right)$,

$\overrightarrow{CD} = \left(-\frac{2}{5};\ \frac{3}{5}\right)$, $\overrightarrow{DA} = \left(-\frac{3}{5};-\frac{3}{5}\right)$. **196.** $A(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $C\left(\frac{1}{4}, 1\right)$, $D\,(1;\ 0)$, $M\left(\frac{1}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, $S\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$. **197.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) ні; 5) так; 6) так. **198.** 1) Так; 2) а) ні; б) так; в) ні; 3) так; 4) ні. **199.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **200.** 1) Так; 2) ні. **201.** Ні. **202.** Так.
206. 1) $d = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, базис: 1, t^2, ..., t^{2k} $\left(k = \left[\frac{n}{2}\right]\right)$; 2) $d = 2n + 1$, базис: 1, $\cos t$, $\sin t$, ..., $\cos nt$, $\sin nt$; 3) $d = n + 1$, базис: 1, $\cos t$, ..., $\cos nt$; 4) $d = n$, базис: $\sin t$, $\sin 2t$, ..., $\sin nt$. **207.** $d = n^2$. **208.** $f(\alpha), f'(\alpha), \frac{f''(\alpha)}{2!}, \ldots, \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}$. **209.** $(4;\ 2;\ -3)$. **210.** 1) $(1;\ -1;\ 1;\ -1;\ -1;\ 1)$; 2) $(2;\ -1;\ -1;\ 1;\ -1)$; 3) $(1;\ -1;\ -1;\ 2;\ -1;\ 1)$. **211.** $(7;\ 7;\ 6;\ 1)$. **212.** 1) $(2;\ -1;\ 3)$; 2) $(5;\ 3;\ -2)$; 3) $(1;\ -3;\ -1)$; 4) $(4;\ -2;\ 1)$. **213.** 1) $\left(\frac{5}{4};\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{1}{4}\right)$; 2) $(1;\ 0;\ -1;\ 0)$.
214. $\bar{x}_1 = (3;\ 1;\ -1;\ 0)$, $\bar{x}_2 = (1;\ -1;\ 3;\ 4)$. **219.** 1) $-\bar{e}_1' + \bar{e}_2'$; 2) $2\bar{e}_1' - 3\bar{e}_2' + \bar{e}_3'$; 3) $-\bar{e}_1' + 2\bar{e}_2' - 4\bar{e}_3'$; 4) $-\frac{1}{3}\left(\bar{e}_1' + \bar{e}_2' + \bar{e}_3' + \bar{e}_4'\right)$. **220.** $\bar{e}_1' + \bar{e}_2' + \ldots + \bar{e}_n'$. **221.** $x_1 = \varepsilon\, x_5'$, $x_2 = \alpha\, x_1'$, $x_3 = \beta\, x_2'$, $x_4 = \gamma\, x_3'$, $x_5 = \delta\, x_4'$. **222.** 1) $x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3'$, $x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3'$, $x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3'$; 2) $x_1 = 2x_1' + x_3' - x_4'$, $x_2 = -3x_1' + x_2' - 2x_3' + x_4'$, $x_3 = x_1' - 2x_2' + 2x_3' - x_4'$, $x_4 = x_1' - x_2' + x_3' - x_4'$. **223.** $h_1 = -18h_2' + h_3' - 10h_4'$, $h_2 = -2h_2' + h_3'$, $h_3 = 6h_2' + 4h_4'$, $h_4 = h_1' - 3h_4'$. **224.** 1) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$; 2) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 13 & 19 & 46{,}75 \\ -9 & -13 & 31{,}5 \\ 7 & 10 & 20{,}25 \end{pmatrix}$; 3) $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **225.** 1) $x_1' = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$, $x_2' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $x_3' = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$, $x_4' = \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$; 2) $x_1' = x_2 - x_3 + x_4$, $x_2' = -x_1 + x_2$, $x_3' = x_4$, $x_4' = x_1 - x_2 + x_3 - x_4$.

226. $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. **227.** $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \ldots & (-1)^{n-1}n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$. **229.** L''' — множина елементів $\bar{x}_{12} = (0, 0, x_3, x_4)$.

$\bar{y}_{12} = (0,0,y_3,y_4)$, $\bar{z}_{12} = (0,0,z_3,z_4)$, L^{IV} — збігається з простором L_4. **231.** L''' — множина сталих величин. L^{IV} — множина многочленів вигляду $c_0t^4 + c_1t^2 + c_2t + c_3$. **232.** 1) Ні; 2) так. **234.** 1) Базис утворюють, наприклад, вектори (1; 0; 0; ...; 1), (0; 1; 0; ...; 0), (0; 0; 1; ...; 0), ..., (0; 0; ...; 1; 0). Розмірність $n-1$. 2) Базис утворюють вектори, для яких, якщо k — номер базисного вектора, то його координати з номером $2k-1$ дорівнюють 1, а всі інші — нулі, $k = 1; 2; ...; \left[\frac{n+1}{2}\right]$, де $[x]$ означає найбільше ціле число $\le x$. Розмірність $\left[\frac{n+1}{2}\right]$. 3) Довільна пара неколінеарних векторів. Розмірність 2. 4) Базис утворюють, наприклад, матриці $\mathcal{A}_{ij}$, для яких $a_{ij} = a_{ji} = 1$, а всі інші елементи — нулі. Розмірність $\frac{n(n+1)}{2}$. 5) Нескінченно вимірний підпростір. **235.** 1) $d(L' + L'') = 3$, $d(L' \cap L'') = 1$; 2) $d(L' + L'') = 3$, $d(L' \cap L'') = 2$. **236.** $d = 3$, базис: $1 + 2t + t^3$, $1 + t + t^2$, $1 + t^2$; $d = 1$, базис: $2 + 3t + t^2 + t^3$. **237.** 1) Усі вектори вигляду $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\\0\\\gamma\end{pmatrix}$; 2) усі вектори вигляду $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\beta\\\alpha\end{pmatrix}$. **238.** Усі многочлени степеня ≤ 2. **239.** 1) $d = 3$. Базис утворюють, наприклад, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_4$. 2) $d = 3$. Базис утворюють, наприклад, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_5$. **241.** 2. **242.** 3. **243.** 4. **244.** 2. **245.** 4. **246.** 2, якщо $\lambda \ne 0$; 0, якщо $\lambda = 0$. **247.** 33. **248.** 4. **249.** 3, якщо $\lambda = 2$; 4, якщо $\lambda \ne 2$. **250.** 4, якщо $\lambda \ne 0$; 3, якщо $\lambda = 0$. **251.** $r = 2$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 6\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 4\\3 & 8\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 4\\1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 6\\1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 8\\1 & 4\end{vmatrix}$. **252.** $r=3$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 4\\0 & 3 & 0\end{vmatrix}$. **253.** $r = 2$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & 3\\2 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -2\\4 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 4\\4 & 7\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & -2\\2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & 5\\2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & 1\\2 & 8\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & 7\\2 & 2\end{vmatrix}$. **254.** $r = 3$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\2 & -1 & 4\\7 & 7 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 5 & -1\\-1 & -3 & 4\\7 & 9 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 5 & -1\\2 & -3 & 4\\7 & 9 & 1\end{vmatrix}$. **255.** $r = 3$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}3 & -1 & 3\\5 & -3 & 2\\7 & -5 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & -1 & 5\\5 & -3 & 4\\7 & -5 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\-3 & 2 & 3\\-5 & 1 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 3 & 5\\-3 & 2 & 4\\-5 & 1 & 1\end{vmatrix}$. **256.** $r = 2$. Базисні мінори $\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & -1\\1 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 4\\1 & 7\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\3 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 5\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 7\end{vmatrix}, \ldots$. **261.** Вектори лінійно незалежні. **262.** Вектори лінійно залежні. Вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_4$ лінійно незалежні, $\bar{a}_3 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2$. **263.** $\lambda = 15$. **264.** $\lambda = 12$. **265.** Не існує. **266.** (0,1; 5,1; 2; −2,3). **267.** (1; 2; −2). **268.** (0; 2; 5/3; −4/3). **269.** (2; 1; 1; 1). **270.** $(-16 + x_3 + x_4 + 5x_5;$

$23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5;\ x_3;\ x_4;\ x_5)$. **271.** $(6-x_4;\ 2-2x_4;\ 0;\ x_4)$. **272.** $(172{,}2 - x_3;\ 36{,}7 + x_3;\ x_3;\ 29{,}1;\ -9{,}8)$. **273.** Немає розв'язку. **274.** $(14 + x_3;\ -9 - 2x_3;\ x_3)$. **275.** $(-4 + x_3;\ 3 - x_3;\ x_3)$. **276.** $\left(\frac{1}{7}(-2 - 5x_4); \frac{6}{7}(-1 + x_4); \frac{1}{7}(-2 - 5x_4); x_4\right)$. **277.** $(x_1;\ -2 - x_1;\ -x_1;\ 1)$. **278.** (10; − 4; 3; 1). **279.** $(0;\ 1 - 3x_4;\ 1 - x_4;\ x_4)$. **280.** (2; 1; 1; −1). **281.** (0; −1; 1; 1). **282.** Система несумісна. **283.** $(x_1;\ 5x_1 + 3x_3 - 8;\ x_3;\ 19 - 13x_1 - 9x_3)$. **284.** (1; −1; 2). **285.** $\left(x_1; x_2; \frac{9}{7} - 2x_1 + x_2; \frac{1}{7}\right)$. **286.** (5; 4; 3; 1; 2). **287.** (−0,2; −2,4; 2,6; 4,4). **288.** $\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2; x_2; -4; 2; 1\right)$. **289.** Немає розв'язків. **290.** (1,5; 1,16; 1,4). **291.** (1,96; 2,96; 5,04). **292.** $\left(\frac{11}{5} - \frac{8}{5}x_3; -\frac{4}{5} + \frac{7}{5}x_3; x_3\right)$. **293.** Система несумісна. **294.** $\left(-\frac{1}{4}\left(5 + 3x_3 + 3x_5\right); \frac{1}{8}\left(19 + 5x_3 - 4x_4 + 5x_5\right); x_3; x_4; x_5\right)$. **295.** $(3 + 2x_2;\ x_2;\ 2)$. **296.** Система несумісна. **297.** $\left(-\frac{x_5}{2}; -1 - \frac{x_5}{2}; 0; -1 - \frac{x_5}{2}; x_5\right)$. **298.** Якщо $(\lambda - 1)(\lambda + 2) \ne 0$, то система має єдиний розв'язок $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda + 2}$. Якщо $\lambda = 1$, то $(1 - x_2 - x_3;\ x_2,\ x_3)$. При $\lambda = -2$ система несумісна. **299.** Якщо $\lambda \ne 0$ система несумісна. Якщо $\lambda = 0$, то $\left(\frac{1}{2}(-5x_3 - 13x_4 - 3); \frac{1}{2}(-7x_3 - 19x_4 - 7); x_3; x_4\right)$. **300.** Якщо $(\lambda - 1) \times (\lambda + 3) \ne 0$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{1}{\lambda + 3}; \frac{1}{\lambda + 3}; \frac{1}{\lambda + 3}; \frac{1}{\lambda + 3}\right)$. При $\lambda = 1$ загальний розв'язок має вигляд: $(1 - x_2 - x_3 - x_4;\ x_2;\ x_3;\ x_4)$. При $\lambda = -3$ система несумісна. **301.** (0; 0; 0). **302.** (0; 0; 0). **303.** $\left(\frac{2}{3}x_2; x_2; 0\right)$. **304.** $(0;\ x_2;\ 3x_2)$. **305.** $\left(\frac{1}{2}x_3; \frac{5}{4}x_3; x_3\right)$. **306.** $\left(\frac{3}{11}x_3; \frac{4}{11}x_3; x_3\right)$. **307.** $\left(2x_2 + \frac{2}{7}x_4; x_2; -\frac{5}{7}x_4; x_4\right)$. **308.** $\left(-\frac{1}{2}x_3; -x_3; x_3\right)$. **309.** (0; 0; 0; 0). **310.** $\left(-\frac{3}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_5; \frac{5}{8}x_3 + \frac{5}{8}x_5; x_3; 0; x_5\right)$. **311.** 1) $k = 2$, (8; −6; 1; 0), (−7; 5; 0; 1). 2) $k = 1$, (11; −7; 1). 3) $k = 1$, (−7; 3; 0; 1). 4) $k = 1$, (1; 1; 1). 5) $k = 3$, (−1; 0; 1; 0; 0), (−1; 0; 0; 1; 0), (0; 1/2; 0; 0; −1). 6) $k = 2$, (0; 1; 1; 0), (0; −1; 0; 1). 7) $k = 2$, (7; −3; 1; 0), (−3; 1; 0; 1). 8) $k = 1$, (−8; −4; 5; 1). 9) $k = 1$, (7; −4; −2; 0). 10) $k = 3$, (− 2; 1; 0; 0, 0; 0), (−1; 0; −1; 1; 0; 0), (0; 0; 0; 0; 1; 1). 11) $k = 3$, (0; 1; −1; −1; 2; 0), (0; 1; −1; −1; 0; 2). 12) $k = 2$, (0; −1; 1; 0; 0), (0; 0; 0; −1; 1).

312. 1) $\begin{cases}5x_1-2x_2+x_3=0,\\ 3x_1-\ x_2-\ x_4=0.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}7x_1-3x_2+x_3=0,\\ 3x_1-\ x_2-\ x_4=0.\end{cases}$ 3) $7x_1-4x_2-2x_3=0.$

313. $\mathcal{A}$ — ні, $\mathcal{B}$ — так. **314.** $-1/2$. **315.** 0. **318.** $|\bar a|=\dfrac{3}{5}, \cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{2}{3}, \cos\gamma=\dfrac{2}{3}$. **319.** 1) $(-1/4;\ -1/2)$. 2) $(1/4;\ -11/2)$. 3) $(1/3;\ -2/3)$. **320.** $\alpha=4$, $\beta=-1$. **322.** $(-4;\ 0;\ 10)$. **323.** $M(4;\ -4;\ 2)$. **324.** $3/5$. **325.** $\sqrt{61}/2$. **326.** $10\sqrt{2}/3$. **327.** $2\bar p+5\bar q$. **328.** $2\bar a-3\bar b$. **329.** $\overrightarrow{AD}=11\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}=10\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}=11\overrightarrow{AB}-8\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$. **330.** $2\bar p-3\bar q+\bar r$. **331.** $\bar d=\bar a-3\bar b+4\bar c$. **332.** 1) -6. 2) 9. 3) 13. 4) -61. **333.** $\sqrt{217}$. **334.** 1) -7. 2) 13. **335.** -13. **336.** 10. **337.** $|\bar a|=|\bar b|$. **338.** 1) -4. 2) 0. 3) 6. 4) 7. **339.** 1) -36. 2) -6. 3) -28.

340. 4. **342.** 1. **345.** $\cos\left(\widehat{\bar a\bar b}\right)=0{,}34$. **346.** $\cos\hat B=1/3\sqrt{29}$. **348.** $\cos\varphi=-4/5$. **349.** $\cos\hat A=\dfrac{7}{3\sqrt{70}}, \cos\hat B=\dfrac{31}{3\sqrt{365}}, \cos\hat C=\dfrac{21}{\sqrt{1022}}$. **350.** 90°.

351. 6. **352.** 5. **353.** 1) $-2/3$; 2) $-2/5$; 3) $56/5$. **354.** $3\sqrt{5}$. **355.** $20/\sqrt{3}$. **356.** $-1/3$. **357.** $(-3/2;\ 3/4;\ 3/2)$. **358.** 15. **359.** 12. **361.** 1) 24. 2) 60. **365.** 1) $(5;\ 1;\ 7)$; 2) $(10;\ 2;\ 14)$. **366.** 1) $(6;\ -4;\ -6)$; 2) $(-12;\ 8;\ 12)$. **367.** 1) $(-5;\ -3;\ -2)$; 2) $(-4;\ -5;\ -2)$. **368.** $\sqrt{22}$. **369.** $49/2$. **370.** 5. **371.** 49. **372.** 4. **373.** $(2;\ 11;\ 7)$. **374.** $(-12;\ -1;\ 4)$. **375.** $2\sqrt{42}$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{42}}, \cos\beta=-\dfrac{5}{\sqrt{42}}, \cos\gamma=\dfrac{4}{\sqrt{42}}$. **376.** $7\sqrt{2}, \cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **377.** $(-6;\ -24;\ 8)$. **378.** $(7;\ 5;\ 1)$. **379.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **381.** 27. **382.** -7. **383.** 3. **384.** 11. **386.** $(0;\ 8;\ 0)$, $(0;\ -7;\ 0)$. **387.** $(-7;\ 14;\ -7)$, $(10;\ 13;\ 19)$. **388.** $(-50;\ -4;\ -19)$, -140. **391.** а) Ні; б) так. **392.** а) -1; б) 4. **396.** $\pi/2$. **397.** $\pi/4$. **398.** $3\sqrt{2}$; 6; $3\sqrt{2}$; $\pi/2$; $\pi/4$; $3\pi/4$. **399.** а) Не зміниться; б) зміниться на доповняльний до π; в) не зміниться.

406. $\bar e_1=\left(0;-\dfrac{1}{\sqrt5};\dfrac{2}{\sqrt5}\right); \bar e_2=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{21}};\dfrac{4}{\sqrt{21}};\dfrac{2}{\sqrt{21}}\right); \bar e_3=\left(\dfrac{10}{\sqrt{105}};\dfrac{2}{\sqrt{105}};\dfrac{1}{\sqrt{105}}\right)$.

407. $\bar e_1=\left(\dfrac{1}{\sqrt2};0;\dfrac{1}{\sqrt2}\right); \bar e_2=(0;1;0); \bar e_3=\left(-\dfrac{1}{\sqrt2};0;\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$. **408.** $\bar e_1=\left(-\dfrac{1}{\sqrt5};0;\dfrac{2}{\sqrt5}\right); \bar e_2=\left(\dfrac{22}{3\sqrt{70}};-\dfrac{5}{3\sqrt{70}};\dfrac{11}{3\sqrt{70}}\right)$. **409.** $\bar e_1=\left(-\dfrac{1}{\sqrt3};\dfrac{1}{\sqrt3};\dfrac{1}{\sqrt3}\right)$; $\bar e_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt2};0;\dfrac{1}{\sqrt2}\right)$. **410.** $(1;\ 2;\ 2;\ -1)$; $(2;\ 3;\ -3;\ 2)$; $(2;\ -1;\ -1;\ -2)$. **411.** $(1;\ 0;\ 2;\ 1)$; $(2;\ -2;\ -1;\ 0)$; $(1;\ 1;\ 0;\ -1)$. **413.** $(11;\ 15)$. **414.** $(-57;\ 62)$.

415. $g^{11}=g^{22}=g^{33}=3/2$, $g^{12}=g^{13}=g^{23}=-1/2$. **416.** $\bar e_1=(g_{11},g_{12},g_{13})$; $\bar e_2=(g_{21},g_{22},g_{23})$; $\bar e_3=(g_{31},g_{32},g_{33})$. **417.** $(2;\ 3/2;\ 5/2)$. **418.** $\bar e^1=(2,-\sqrt2)$; $\bar e^2=(-\sqrt2,2)$. **419.** 1) $g^{11}=1$, $g^{12}=1/2$, $g^{22}=1/2$. 2) $\bar e^1=\left(1;\dfrac12\right)$; $\bar e^2=\left(\dfrac12;\dfrac12\right)$. **420.** 1) $g^{11}=g^{22}=g^{33}=3/8$, $g^{12}=g^{13}=g^{23}=-1/8$; 2) $\bar e^1=\left(\dfrac38;-\dfrac18;-\dfrac18\right)$, $\bar e^2=\left(-\dfrac18;\dfrac38;-\dfrac18\right), \bar e^3=\left(-\dfrac18;-\dfrac18;\dfrac38\right)$. **421.** 1) $g^{11}=g^{22}=g^{33}=\sqrt2+1$; $g^{12}=g^{13}=g^{23}=-1$. 2) $\bar e^1=\left(\sqrt2+1;-1;-1\right); \bar e^2=\left(-1;\sqrt2+1;-1\right); \bar e^3=\left(-1;-1;\sqrt2+1\right)$. **422.** $\dfrac{5\sqrt2}{2}-1$. **423.** $2-6\sqrt3$.

424. 33. **425.** 5. **426.** $1/4$. **427.** $\cos\alpha=\dfrac{g_{11}x+g_{12}y}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}}$; $\cos\beta=\dfrac{g_{21}x+g_{22}y}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{11}x^2+2g_{12}xy+g_{22}y^2}}$. **428.** $|\bar a|=30$. **429.** $|\bar e^1|=|\bar e^2|=|\bar e^3|=\dfrac{\sqrt6}{2}$; $\widehat{\bar e^1\bar e^2}=\widehat{\bar e^2\bar e^3}=\widehat{\bar e^3\bar e^1}=\arccos\left(-\dfrac13\right)$. **430.** $\bar b=(4/5;-1/5)$. **431.** $2\sqrt{61}$. **432.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=6$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=4$; $A=\pi/3$. **433.** $\left|\overrightarrow{AB}\right|=2\sqrt{13}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt7$; $\cos B=\dfrac{8}{\sqrt{91}}$. **434.** $\alpha=\dfrac{5\pi}{3}$. **435.** $|\bar e_1|=2, |\bar e_2|=1$, $\widehat{\bar e_1\bar e_2}=\dfrac{2\pi}{3}$. **436.** $|\bar e_1|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}, |\bar e_2|=\dfrac{3\sqrt2}{2}, \omega=\arccos\left(-\dfrac{2}{\sqrt5}\right)$. **437.** $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|=1; \left|\overrightarrow{A'C'}\right|=5$; $\cos A'=4/5$. **438.** 1) $|\bar a|=\sqrt{x^2+2xy\cos\varphi+y^2}$; 2) $\cos\alpha=\dfrac{x^1x^2+\left(x^1y^2+x^2y^1\right)\cos\varphi+y^1y^2}{\sqrt{\left(x^1\right)^2+2x^1y^1\cos\varphi+\left(y^1\right)^2}\sqrt{\left(x^2\right)^2+2x^2y^2\cos\varphi+\left(y^2\right)^2}}$; 3) $S=(x^1y^2-x^2y^1)\sin\varphi$. **439.** $\cos\alpha=\dfrac{x+y/2}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{x/2+y}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}$.

440. $|\bar e_1|=\sqrt{g_{11}}, |\bar e_2|=\sqrt{g_{22}}$, $|\bar e_3|=\sqrt{g_{33}}, \cos(\widehat{\bar e_1\bar e_2})=\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$, $\cos(\widehat{\bar e_2\bar e_3})=\dfrac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}$, $\cos(\widehat{\bar e_3\bar e_1})=\dfrac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$. **441.** $-1/2$. **442.** $\sqrt{6-\sqrt3}$.

443. $\cos\varphi=-\dfrac{2}{\sqrt{4+\sqrt2}}$. **444.** $\cos\alpha_1=\dfrac{g_{11}x^1+g_{12}x^2+g_{13}x^3}{\sqrt{g_{11}}|\bar a|}$, $\cos\alpha_2=\dfrac{g_{21}x^1+g_{22}x^2+g_{23}x^3}{\sqrt{g_{22}}|\bar a|}$; $\cos\alpha_3=\dfrac{g_{31}x^1+g_{32}x^2+g_{33}x^3}{\sqrt{g_{33}}|\bar a|}$, де

$$|\vec a| = \sqrt{g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + 2g_{12}x^1x^2 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{31}x^3x^1}.$$

445. $\cos\varphi_1 = \dfrac{x^1 + x^2\cos\omega_{12} + x^3\cos\omega_{13}}{|\vec a|}$, $\cos\varphi_2 = \dfrac{x^1\cos\omega_{21} + x^2 + x^3\cos\omega_{23}}{|\vec a|}$,

$$\cos\varphi_3 = \frac{x^1\cos\omega_{31} + x^2\cos\omega_{32} + x^3}{|\vec a|},$$

де $|\vec a| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 2x^1x^2\cos\omega_{12} + 2x^2x^3\cos\omega_{23} + 2x^3x^1\cos\omega_{31}}$.

446. $\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt5$, $\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right| = \sqrt3$, $\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt5$, $\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}\,\overrightarrow{A_1A_4}} = \pi/2$.

447. -1. **448.** 0. **449.** -2, $\cos\theta = -1/5$. **450.** $10\sqrt2$, $\cos\left(\widehat{\vec x\,\vec y}\right) = \dfrac{5\sqrt2}{\sqrt{135\sqrt2 - 8}}$. **451.** $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt G}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}}}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt G}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33}\end{vmatrix}}}$,

$\cos\theta_3 = \dfrac{\sqrt G}{\sqrt{g_{33}}\sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{vmatrix}}}$, де $G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$. **452.** $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt\Omega}{\sin\omega_{23}}$,

$\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt\Omega}{\sin\omega_{31}}$, $\cos\theta_3 = \dfrac{\sqrt\Omega}{\sin\omega_{12}}$, де $\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos_{32} & 1\end{vmatrix}$.

453. $\vec a\vec b = 3$, $|\vec a| = 2$, $|\vec b| = 3$, $\widehat{\vec a\vec b} = \pi/3$. **454.** $\pi/2$. **455.** $\pi/2$. **456.** $\pi/2$.

457. $\pi/2$. **458.** $\vec x_1 = \left(0; \dfrac{1}{\sqrt2}; -\dfrac{1}{\sqrt2}; 0\right)$, $\vec x_2 = \left(0; -\dfrac{1}{\sqrt2}; \dfrac{1}{\sqrt2}; 0\right)$. **459.** 6.

460. $3\sqrt2$. **461.** 2. **462.** 2. **463.** $4\sqrt2$. **464.** $36\sqrt{\sqrt3 - 5/3}$. **465.** $3\sqrt2$.

466. $\dfrac{5\sqrt2}{12}$. **467.** $h = \sqrt{\begin{vmatrix} (a_1a_1) & \dots & (a_1a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_na_1) & \dots & (a_na_n)\end{vmatrix}} : \sqrt{\begin{vmatrix} (a_1a_1) & \dots & (a_1a_{n-1}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n-1}a_1) & \dots & (a_{n-1}a_{n-1})\end{vmatrix}}$.

468. $abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$. **469.** $\sqrt{\dfrac{\sqrt2 - 1}{2}}\left(3\vec e^1 - 2\vec e^3\right)$. **470.** $\dfrac{\sqrt2}{2}\left(17\vec e_1 + 15\vec e_2 - 11\vec e_3\right)$. **471.** $2\sqrt2\left(-12\vec e_1 + 5\vec e_2 + 3\vec e_3\right)$.

472. $\sqrt3\left(9\vec e_1 - 3\vec e_2 + 5/3\vec e_3\right)$. **473.** $\dfrac{\sqrt{11}}{4}$. **474.** $2\sqrt{15}$. **475.** $\sqrt{26}$. **476.** $\sqrt{60}$.

477. $V = \sqrt G\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}$, де $G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}$. **478.** $V = \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3\end{vmatrix}\sqrt G$,

де $G = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{21} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{31} & \cos_{32} & 1\end{vmatrix}$. **479.** $V = \sqrt2$. **480.** $\dfrac{19}{\sqrt2}$. **481.** $\dfrac{62}{\sqrt2}$.

482. $\dfrac{29}{\sqrt2}$. **483.** $\dfrac{68}{\sqrt2}$. **484.** $V = \dfrac{5}{6\sqrt2}$, $H = \dfrac{10}{\sqrt{22}}$. **485.** 66. **486.** 14. **487.** 4.

488. а) $H = \dfrac{\sqrt7}{\sqrt{33}}$; б) $\dfrac{2}{\sqrt6}$. **489.** 1) а) $2x + 3y - 4 = 0$; б) $3x - y + 3 = 0$; в) $4x + 2y - 2 = 0$; 2) а) $-3x + 2y - 7 = 0$; б) $x + 3y - 9 = 0$; в) $2x - 4y - 6 = 0$. **491.** 1) Не перетинаються; 2) перетинаються. **492.** $25x - 53y + 31 = 0$. **493.** Прямих незліченна множина. **494.** $3x - 4y - 1 = 0$. **495.** $11x + 5y - 43 = 0$. **496.** $43x - 23y - 83 = 0$. **497.** $5x + 8y + 11 = 0$.

498. $y = x$. **499.** 1) $4x + y - 6 = 0$; 2) $x - 4y - 2 = 0$, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \dfrac{19\sqrt{17}}{17}$.

500. $4x + 3y + 5 = 0$; $4x + 3y - 10 = 0$; $3x - 4y - 15 = 0$. **501.** (4; 6). **502.** (7; 3). **503.** 1) $y = \dfrac12 x + 3$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = \sqrt3 x + 2 + \sqrt3$;

4) $y = \dfrac{\sqrt3}{3}x + 7 - \sqrt3$; 5) $y = x + 1$. **504.** 1) $4x - 3y = 12$; 2) $x + y = 4$, $x - y = 2$; 3) $3x + y = 5$, $3x - y = 1$. **505.** $2x + 3y = 12$; $8x + 3y = -24$.

506. $\dfrac{x}{1} + \dfrac{y}{-2} = 1$; $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{1} = 1$. **507.** 1) $\dfrac{3}{2\sqrt5}$; 2) $\dfrac{8}{3\sqrt{13}}$. **508.** $y = 2$, $24x - 7y + 62 = 0$. **509.** $3x - 4y + 11 = 0$; $4x + 3y - 2 = 0$. **510.** $y = x$. **511.** $4x + y - 3 = 0$. **512.** $M_3(6, -6)$. **513.** Вказівка. Якщо на одній із сторін кута дана точка A, то точка, симетрична точці A відносно бісектриси цього кута, буде лежати на іншій його стороні. $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$, $7x + y - 10 = 0$. **514.** $6x + 17y - 15 = 0$. **515.** $y = \pm(x - 4)$. **516.** $2x + y - 12 = 0$, $x - 4y - 6 = 0$, $5x - 2y + 6 = 0$. **517.** $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 8 = 0$, $x + 3y - 16 = 0$. **518.** $x - y - 1 = 0$, $2x - 3y - 1 = 0$, $3x - 4y - 1 = 0$. **519.** $17x + 4y - 29 = 0$. **520.** $11x - 3y - 34 = 0$. **521.** $x + y - 1 = 0$. **522.** $5x - y - 27 = 0$, $x - 5y - 3 = 0$, $23x + 11y - 249 = 0$. **523.** $5x + 4z - 22 = 0$. **524.** $2x - 6y - 3z - 1 = 0$. **525.** $8x + 5y - 6z - 38 = 0$. **526.** $x + 3y - 8z - 47 = 0$. **527.** $3x - 4y - 3z + 4 = 0$. **528.** $9x - y + 7z - 40 = 0$. **529.** $17x - 2y - 6z + 5 = 0$. **530.** $x + y + z - 4 = 0$. **531.** $x - 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, $x + y + z = 1$. **532.** $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 4}{-1} = \dfrac{z + 2}{2}$. **533.** 1) $7x - y - 5z = 0$; 2) $3x + y - 2z - 8 = 0$; 3) $2x - y - 3z = 0$. **534.** $x - y = 0$. **536.** $2y + 5z + 1 = 0$, $2x + z - 5 = 0$, $5x - y - 13 = 0$. **538.** $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{-4} + \dfrac{z}{2} = 1$. **539.** $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{-3/2} = 1$. **540.** $x - y - z + 6 = 0$, $x + y - z + 2 = 0$, $x + y + z - 4 = 0$. **541.** $2x - 21y + 2z + 88 = 0$, $2x - 3y - 2z + 12 = 0$. **542.** $1/6$, $125/6$, $243/2$, $1125/2$. **543.** $x - 3y - 2z + 2 = 0$. **544.** $2x - 3y + z - 6 = 0$. **545.** $\dfrac{2}{\sqrt6}$. **546.** $\dfrac{1}{2\sqrt6}$. **547.** 6,5. **548.** 3. **549.** $2x -$

$-3y+z-1=0$. **550.** $\left(0;0;-\frac{2}{7}\right)$, $\left(0;0;-\frac{28}{5}\right)$. **551.** $(0;\ 0;\ -2)$, $\left(0;0;-6\frac{4}{13}\right)$. **552.** $3x+2y+3z+2=0$; $x+6y-5z+8=0$. **553.** $7x+2y+3z=0$; $3x-12y+z+2=0$. **554.** $3x+2y+z+12=0$; $x-4y+5z-2=0$. **555.** $x+y-z-3=0$. **556.** $x-2y+z-5=0$; $x-2y+z-3=0$. **557.** 1) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{8}=\frac{z-\frac{1}{2}}{1}$; 2) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{1}$; 3) а) $\frac{x+3}{1}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+5}{0}$; б) $\frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{0}$; в) $\frac{x+3}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z+5}{1}$. **558.** 1) $\begin{cases}x=3t,\\ y=-2t+7,\\ z=4t-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x=3t,\\ y=4t+7,\\ z=-2;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x=3t,\\ y=2t+7,\\ z=-3t-2.\end{cases}$ **559.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{3}$. **560.** $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}$. **561.** $\begin{cases}x+y-2z+1=0,\\ x+2y-z-2=0.\end{cases}$ **562.** $\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{-11}$.

563. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+1}{0}$, $\begin{cases}x=t+2,\\ y=4t-1,\\ z=-1.\end{cases}$ **564.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-1}{1}$, $\begin{cases}x=t+1,\\ y=7t-3,\\ z=t+1.\end{cases}$ **565.** $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-1}$, $\begin{cases}x=2t,\\ y=-2t+2,\\ z=-t+1.\end{cases}$ **566.** $\begin{cases}x=5t+4,\\ y=-11t-7,\\ z=-2.\end{cases}$

567. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$. **568.** $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$. **569.** $\begin{cases}x=3t+3,\\ y=15t+1,\\ z=19t-3.\end{cases}$

572. 90°. **573.** 60°. **574.** 90°. **575.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$. **576.** $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$. **577.** $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{1}$. **578.** $\begin{cases}x=t+1,\\ y=-7t,\\ z=-19t-2.\end{cases}$ **579.** $\begin{cases}x=-t+1,\\ y=3t+2,\\ z=5t-1.\end{cases}$

580. $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$. **581.** $\begin{cases}x+y+2z-5=0,\\ x-y+z-2=0.\end{cases}$ **582.** $x+y+3z-7=0$. **583.** $x-z+1=0$. **584.** $x-y+z=0$. **585.** $x-5y+5z-2=0$. **586.** $x-2y+z-1=0$. **587.** $\begin{cases}x+3y=0,\\ 3x-y+4z-12=0,\end{cases}$ $\frac{3\sqrt{65}}{5}$.
588. $(-7;\ -5;\ -11)$. **589.** Пряма паралельна площині. **590.** $(1;\ 0;\ -2)$.
591. $(-5;\ 2;\ 4)$. **592.** $\left(\frac{9}{7};-\frac{4}{7};-3\frac{1}{7}\right)$. **593.** $(2;\ -3;\ 2)$. **594.** $(4;\ 1;\ -3)$.
595. $(-5;\ 1;\ 0)$. **596.** $(0;\ 1;\ 1)$. **597.** $\begin{cases}y+z-2=0,\\ 2x+5y+4z+8=0.\end{cases}$ **598.** 7.

599. 1. **600.** 25. **601.** $9x+11y+5z-16=0$. **602.** $11x-12y+14z-45=0$. **603.** $2x-16y-13z+31=0$. **604.** $13x-14y+11z+51=0$. **605.** 13. **606.** 3. **607.** $A_0(1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)$. **608.** $B_0(2;\ -2;\ 3;\ 7)$. **609.** $\frac{3}{5\sqrt{2}}$.

610. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **611.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **612.** $2\sqrt{2}$. **613.** $2x_1-x_2+x_3-3x_4-2=0$. **614.** $3x_1+2x_2-4x_3+x_4-x_5-2=0$. **615.** $3x_1+4x_2+4x_3-3x_4-2x_5+5=0$, $5x_1-2x_2+2x_3+5x_4-3=0$. **616.** $x_1+x_2-x_3+x_4-2=0$, $x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5+3=0$. **617.** $x_1+x_2+3x_3-5x_4-20=0$, $x_1+x_2+3x_3-5x_4+16=0$. **618.** $\pi/4$. **619.** $\pi/2$. **620.** $\frac{x_1-26}{88}=\frac{x_2-11}{33}=\frac{x_3-17}{59}=\frac{x_4+10}{-34}$. **621.** $\frac{x_1+2}{3}=\frac{x_2+1}{-4}=\frac{x_3+1}{-35}=\frac{x_4+3}{-27}=\frac{x_5-6}{-29}$. **622.** Тривимірна площина. **623.** У E_5 немає точок, координати яких задовольняють систему. **624.** Чотиривимірна площина. **625.** Тривимірна площина. **626.** Тривимірна площина. **627.** Систему задовольняє тільки одна точка $O(0;\ 0;\ 0;\ 0)$. **628.** Пряма в E_4, що проходить через початок координат. **629.** Двовимірна площина. **630.** Пряма в E_4, що проходить через початок координат. **631.** Двовимірна площина. **632.** 1; 3; 4; 5; 6 — лінійні перетворення, 2 — не є лінійним; 1) розтяг (стиск) площини E_2 у напрямі вектора $\bar{e}_1$ в α_1 раз і в напрямі вектора $\bar{e}_2$ в α_2 рази; 3) додавання до вектора $\bar{x}$ вектора $3x_2\bar{e}_1$; 4) розтяг площини E_2 в напрямі вектора $\bar{e}_2$ в 2 рази і наступне симетричне відображення відносно Ox_1; 5) проектування вектора $\bar{x}$ на вісь Ox_1; 6) вектор $\bar{x}$ переходить у вектор, що лежить на бісектрисі першого і третього координатних кутів і має з вектором $\bar{x}$ одну і ту саму першу координату. **633.** 1) Лінійне; 2) нелінійне. **637.** 1) $\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix}$. **638.** 1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&-1\\1&3&2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$. **639.** $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

640. $\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$. **641.** $\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2&-1/2\\1/2&\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$. **642.** $\begin{pmatrix}1/4&\sqrt{3}/4\\\sqrt{3}/4&3/4\end{pmatrix}$.

643. $\begin{pmatrix}3/4&\sqrt{3}/4\\\sqrt{3}/4&1/4\end{pmatrix}$. **644.** 1) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&0&\sin\varphi\\0&1&0\\-\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}$. **645.** 1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

646. $\begin{pmatrix}0&1&0&0&\dots&0\\0&0&1&0&\dots&0\\0&0&0&1&\dots&0\\.&.&.&.&.&.\\0&0&0&0&\dots&1\\0&0&0&0&\dots&0\end{pmatrix}$. **647.** 1) Відображення від площини $\bar{e}_1\,\bar{e}_2$;

2) розтяг в 4 рази вздовж $\bar{e}_2$; 3) проектування на площину $\bar{e}_2\,\bar{e}_3$; 4) проектування на $\bar{e}_3$. **648.** $C = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}$, де $\mathcal{A}$ і $\mathcal{B}$ матриці, стовпці яких складаються з координат векторів $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ і $\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_n$ відповідно. **649.** $x_1' = 2x_1 - 11x_2 + 6x_3$; $x_2' = x_1 - 7x_2 + 4x_3$; $x_3' = 2x_1 - x_2$; $x_4' = 2x_4$. **650.** E. **651**. $x' = x + y + 2z$; $y' = 2x + y + z$; $z' = x + 2y + z$. **652.** $x' = 3/2x - \sqrt{3}/2y$; $y' = \sqrt{3}/2x + 3/2y$. **653.** $\mathcal{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

654. $\mathcal{AB} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{BA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

655. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A\bar{x} = -6\bar{i} + 10\bar{j}$. **656.** $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, $2\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $2\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $2\mathcal{A} - \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. **658.** $\mathcal{AB} - \mathcal{BA} = \mathcal{E}$. **659.** $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. **661.** 1) Власними векторами будуть: а) вектори, що лежать на прямій a з власними значеннями 1; б) вектори, перпендикулярні до прямої a з власним значенням -1; 2) власними векторами будуть вектори, що лежать на осях Ox_1, Ox_2. Для власних векторів, що лежать на осі Ox_1, власне значення дорівнює λ, а для власних векторів, що лежать на осі Ox_2, власне значення дорівнює 1; 3) власними векторами будуть вектори, що лежать на осі Ox_2, з власним значенням 1. **662.** $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 7$, $\bar{x}_1 = (4; -5)t$, $\bar{x}_2 = (1; 1)t$. **663.** $\lambda = 1$, $\bar{x} = (1; 0)t$. **664.** $\lambda = 1$, $\bar{x} = (1; 2; 1)t$. **665.** $\lambda = 1$, $\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $\bar{x}_1 = (0; -1; 1)t$, $\bar{x}_2 = \left(-\left(1+\sqrt{5}\right); \left(3-\sqrt{5}\right); 2\sqrt{5}\right)t$, $\bar{x}_3 = \left(1-\sqrt{5}; -3-\sqrt{5}; 2\sqrt{5}\right)t$. **666.** $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -1$, $\bar{x}_1 = (2; 5)t$, $\bar{x}_2 = (1; -1)t$. **667.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\bar{x}_1 = (-2; 1)t$, $\bar{x}_2 = (1; 1)t$. **668.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, власними векторами є усі ненульові двовимірні вектори. **669.** $\lambda = \pm 2i + 1$ (дійсних власних значень немає). **670.** $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$, $\bar{x}_1 = (3; 1)t$, $\bar{x}_2 = (1; 3)t$. **671.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, $\bar{x}_1 = (1; 1; 1)t$, $\bar{x}_2 = (1; 0; 1)t$, $\bar{x}_3 = (1,1,0)t$. **672.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = (0; -1; 1)t$, $\bar{x}_3 = (3; 4; 2)t$. **673.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$, $\bar{x}_1 = (-5; 1; 0)t$, $\bar{x}_2 = (-3; 0; 1)t$, $\bar{x}_3 = (1; 1; -3)t$. **674.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, $\bar{x} = (1; 1; 1)t$. **675.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\bar{x}_1 = (1; 1; 1)t$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = (1; 2; 3)t$. **676.** а) Якщо $\alpha \neq \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то в множині дійсних чисел власних векторів і власних чисел немає; б) якщо $\alpha = 0°$, то $\lambda = 1$; якщо $\alpha = 180°$, то $\lambda = -1$, власним вектором є будь-який ненульовий вектор. **677.** $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, $\bar{x}_1 = (1; 0; -2; -4)t_1 + (0; 1; 1; 2)t_2$. **678.** $x_1' = 15x_1 - 23x_2 + 10x_3$, $x_2' = 10x_1 - 18x_2 + 10x_3$, $x_3' = 2x_1 - 7x_2 + 7x_3$, $x_4' = -x_4$. **679.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **680.** 1) $u_1' = -133x_1' - 37x_2'$, $u_2' = 496x_1' + 138x_2'$; 2) $u_1' = 2x_1' - 2x_2'$, $u_2' = -4x_1' + 3x_2'$. **681.** а) $u_1' = -x_1' + 3x_2'$, $u_2' = x_2'$, $u_3' = 4x_1' - 2x_2' + 2x_3'$; б) $u_1' = x_1' + x_2'$, $u_2' = x_1' + x_3'$, $u_3' = x_2' + x_3'$. **682.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$. **683.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **684.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -15/4 & -4 & -5 \\ 9/4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. **685.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. **686.** $x_1' = (4; -5)$, $x_2' = (1; 1)$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. **687.** $x_1' = (1; -1)$, $x_2' = (1; 2)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. **688.** Матриця до діагонального вигляду не зводиться. **689.** Матриця до діагонального вигляду не зводиться. **690.** $\bar{x}_1 = (1; 2; 1)$, $\bar{x}_2 = (1; 1; 0)$, $\bar{x}_3 = (1; 2; 2)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **691.** $\bar{x}_1 = (1; 1; 2)$, $\bar{x}_2 = (1; 0; 1)$, $\bar{x}_3 = (1; 2; 2)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

692. $\bar{x}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{x}_2 = (1; 1; -2)$, $\bar{x}_3 = (4; 3; -4)$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **693.** $\bar{x}_1 = (1; 1; 1)$, $\bar{x}_2 = (1; 0; -3)$, $\bar{x}_3 = (0; 1; 3)$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. **694.** Матриця до діагонального вигляду не зводиться. **695.** $\bar{x}_1 = (-3; 2; 1)$, $\bar{x}_2 = (-2; 1; 0)$, $\bar{x}_3 = (1; 2; 0)$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **696.** Матриця до діагонального вигляду не зводиться.

697. $\bar{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{e}_2' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. **698.** $\bar{e}_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{e}_2' = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. **699.** $\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; 1; -1)$, $\bar{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1; 2; 1)$, $\bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 0; 1)$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **700.** $\bar{e}_1' = \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2' = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_3' = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$, $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **701.** $\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1; 0; 1)$, $\bar{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1; -1; 1)$, $\bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1; 2; 1)$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **702.** $\bar{e}_1' = \frac{1}{3}(1; 2; 2)$, $\bar{e}_2' = \frac{1}{3}(2; -2; 1)$, $\bar{e}_3' = \frac{1}{3}(-2; -1; 2)$, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **703.** $\bar{e}_1' = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_2' = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\bar{e}_3' = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

704. $\bar{e}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1;0;1), \bar{e}_2' = (0;1;0), \bar{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;0;1), \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. **705.** 1) Двовимірний підпростір векторів, ортогональних до $\bar{a}$; 2) двовимірний підпростір векторів, колінеарних до $\bar{a}$ і $\bar{b}$. **706.** Ядро оператора — пряма, натягнута на вектор $\bar{a}$; образ — площина, перпендикулярна до вектора $\bar{a}$. **707.** N_{n-1} — образ, N_0 — ядро. **708.** Ядро — вектори колінеарні $\bar{e}_2$, область значень — вектори, колінеарні $a\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, ранг і дефект дорівнює 1. **709.** Ядро — вектори, колінеарні $\bar{e}_2$, область значень — вектори площини $\bar{e}_1, \bar{e}_3$, ранг дорівнює 2, дефект — 1. **710.** Ядро — вектори площини $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, область значень — вектори, колінеарні $\bar{e}_3$, ранг дорівнює 1, дефект 2. **711.** Ядро — вектори, колінеарні $\bar{e}_2$, область значень — вектори площини $\bar{e}_2\ \bar{e}_3$, ранг дорівнює 2, дефект — 1. **712.** Ядро — вектори площини $\bar{e}_2\ \bar{e}_4$, область значень — вектори площини $\bar{e}_1, \bar{e}_3$. **713.** Ядро — вектори, колінеарні вектору $\bar{e}_4$, область значень — вектори простору E_3. **714.** Ядро — вектори площини $\bar{e}_3\ \bar{e}_4$, область значень — площина $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. **715.** Площина, натягнута на вектори $\bar{a}_1 = (2; 1; 0; -5)$; $\bar{a}_2 = (2; 0; 1; -7)$. **716.** $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 18 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix}$. **717.** $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \frac{21}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

718. $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 27 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$. **719.** $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **720.** $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

721. $\dot{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$. **722.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2, \eta_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \eta_2 = 2x_2 + x_3, \eta_3 = 3x_3$. **723.** $F(\bar{x}) = 2\eta_1^2 + 10\eta_2^2 + 190\eta_3^2, \eta_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3, \eta_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_3, \eta_3 = \frac{1}{10}x_3$. **724.** $F(\bar{x}) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3, y_2 = \frac{x_2}{2} - \frac{x_3}{2}, y_3 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2}$. **725.** $F(\bar{x}) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2, y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, y_2 = \sqrt{3}x_2, y_3 = x_2 - x_3$. **726.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2, \eta_1 = \sqrt{2}x_1 - 3\sqrt{2}x_2 + 2\sqrt{2}x_3, \eta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3, \eta_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3$. **727.** $F(\bar{x}) = y_1^2 - y_2^2, y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_1 + x_2$. **728.** $F(\bar{x}) = \frac{1}{4}\eta_1^2 - \frac{1}{4}\eta_2^2, \eta_1 = x_1 + x_2 + x_3, \eta_2 = x_1 - x_2 + x_3$. **729.** $F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\eta_1^2 - \frac{1}{2}\eta_2^2 + 6\eta_3^2, \eta_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \eta_2 = x_1 - x_2 - 4x_3, \eta_3 = x_3$. **730.** $F(\bar{x}) = y_1^2 - y_2^2, y_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2}, y_2 = \frac{-x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{2}, y_3 = x_3, y_4 = x_4$. **731.** $F(\bar{x}) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, y_1 = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} + x_3, y_2 = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}, y_3 = x_3$. **732.** $F(\bar{x}) = 9\eta_1^2 + 2\eta_2^2 + \frac{1}{2}\eta_3^2$. **733.** $F(\bar{x}) = 11\eta_1^2 + \frac{30}{11}\eta_2^2 + \frac{27}{10}\eta_3^2$. **734.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 - 2\eta_2^2 + \frac{1}{2}\eta_3^2 + \eta_4^2$. **735.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + 4\eta_2^2 - 9\eta_3^2, \bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = -\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{f}_3 = \frac{5}{2}\bar{e}_1 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \eta_1 = x_1 + x_2 - 2x_3, \eta_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \eta_3 = x_3$. **736.** $F(\bar{x}) = 5\eta_1^2 + \frac{9}{5}\eta_2^2 - \eta_3^2, \bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = -\frac{4}{5}\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{f}_3 = -\frac{1}{3}\bar{e}_1 - \frac{1}{3}\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \eta_1 = x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{9}{15}x_3, \eta_2 = x_2 + \frac{1}{3}x_3, \eta_3 = x_3$. **737.** $F(\bar{x}) = 3\eta_1^2 + 3\eta_2^2 - \frac{16}{3}\eta_3^2, \bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = \bar{e}_2, \bar{f}_3 = \bar{e}_1 - \frac{2}{3}\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \eta_1 = x_1 - x_3, \eta_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3, \eta_3 = x_3$. 738. $F(\bar{x}) = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2\right)$. **739.** $F(\bar{x}) = \frac{3}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2$. **740.** $F(\bar{x}) = 2\dot{x}_1^2$. **741.** $F(\bar{x}) = 4\dot{x}_1^2 + 4\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_3^2$. **742.** $F(\bar{x}) = \dot{x}_1^2 + \sqrt{3}\dot{x}_2^2 - \sqrt{3}\dot{x}_3^2$. **743.** $F(\bar{x}) = 6\dot{x}_1^2 + 6\dot{x}_2^2 + 9\dot{x}_3^2$. **744.** $F(\bar{x}) = 3\dot{x}_1^2 + \left(1 + \sqrt{17}\right)\dot{x}_2^2 + \left(1 - \sqrt{17}\right)\dot{x}_3^2$. **745.** $F(\bar{x}) = 4\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2, x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\dot{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\dot{x}_2, x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\dot{x}_2$. **746.** $F(\bar{x}) = \dot{x}_1^2 + 9\dot{x}_2^2, x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_2, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_2$. **747.** $F(\bar{x}) = 9\dot{x}_1^2, x_1 = \frac{1}{3}\dot{x}_1 + \frac{2}{3}\dot{x}_2 - \frac{2}{3}\dot{x}_3, x_2 = -\frac{2}{3}\dot{x}_1 + \frac{2}{3}\dot{x}_2 + \frac{1}{3}\dot{x}_3, x_3 = \frac{2}{3}\dot{x}_1 + \frac{1}{3}\dot{x}_2 + \frac{2}{3}{}_3$. **748.** $F(\bar{x}) = \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\dot{x}_3^2, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_3, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{x}_2$. **749.** $F(\bar{x}) = -\dot{x}_1^2 - 7\dot{x}_2^2 + 5\dot{x}_3^2, x_1 = \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_2, x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3$. **750.** $F(\bar{x}) = 3\dot{x}_1^2 + 6\dot{x}_2^2 - 2\dot{x}_3^2, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{x}_2$. **751.** $F(\bar{x}) = 5\dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2, x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\dot{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\dot{x}_3, x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\dot{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\dot{x}_2$. **752.** $F(\bar{x}) = 9\dot{x}_1^2 + 18\dot{x}_2^2 + 18\dot{x}_3^2, x_1 = \frac{1}{3}\dot{x}_1 - \frac{2}{3}\dot{x}_2 + \frac{2}{3}\dot{x}_3, x_2 = \frac{2}{3}\dot{x}_1 - \frac{1}{3}\dot{x}_2 - \frac{2}{3}\dot{x}_3, x_3 = \frac{2}{3}\dot{x}_1 + \frac{2}{3}\dot{x}_2 + \frac{1}{3}\dot{x}_3$. **753.** $|\lambda| < \sqrt{\frac{5}{3}}$. **754.** $-0{,}8<\lambda<0$. **755.** λ не існує. **756.** λ не існує. **758.** Додатно означена. **759.** Від'ємно означена. **760.** Загального вигляду. **761.** Від'ємно означена. **762.** Додатно означена. **763.** Загального вигляду. **764.** Додатно означена. **766.** $p = 4$, $q = 0$, додатно означена. **767.** $p = 2$, $q = 1$, знакозмінна. **768.** $p = 3$, $q = 0$, квазідодатно означена. **769.** $p = 0$, $q = 3$, квазівід'ємно означена. **770.** $p = 3$, $q = 1$, знакозмінна. **771.** $p = 0$, $q = 3$, від'ємно означена. **772.** $p = 2$, $q = 0$ квазідодатно означена. **773.** $F(\bar{x}) = -2\eta_1^2 + \frac{2}{3}\eta_2^2$, $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2$, $x_1 = \eta_1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}\eta_2$, $x_2 = \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{6}\sqrt{3}\eta_2$. **774.** $F(\bar{x}) = 9\eta_1^2 + 9\eta_2^2 - 9\eta_3^2$, $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$, $x_1 = \sqrt{2}\eta_2$, $x_2 = \frac{1}{6}\eta_1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}\eta_3$, $x_3 = \frac{2}{3}\eta_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\eta_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\eta_3$. **775.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 - 3\eta_4^2$, $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2$, $x_1 = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4$, $x_2 = \eta_2 - \eta_4$, $x_3 = \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 + \frac{1}{2}\eta_3 - \frac{1}{2}\eta_4$, $x_4 = \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2 - \frac{1}{2}\eta_3 + \frac{1}{2}\eta_4$. **776.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + 2\eta_2^2 + 2\eta_3^2 - 7\eta_4^2$, $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2$, $x_1 = \frac{2}{3}\eta_2 + \frac{2}{3}\eta_3 + \frac{1}{3}\eta_4$, $x_2 = \frac{2}{3}\eta_2 - \frac{4}{3}\eta_3 + \frac{4}{3}\eta_4$, $x_3 = \eta_3 - 2\eta_4$, $x_4 = \eta_1$. **777.** $F(\bar{x}) = \eta_1^2 + 2\eta_2^2 - 3\eta_3^2$, $G(\bar{x}) = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2$, $x_1 = \eta_1 - \eta_2$, $x_2 = -\eta_2 + \eta_3$, $x_3 = -3\eta_2 + 2\eta_3$. **778.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ — еліпс. **779.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ — еліпс. **780.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ — еліпс. **781.** $x^2 + y^2 = 16$ — коло. **782.** 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$; 4) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 5) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; 6) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 7) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$; 8) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; 9) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$ або $\frac{x^2}{117/4} + \frac{y^2}{9} = 1$; 10) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$. **783.** 1) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; 3) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$; 5) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. **784.** 5 та 3; $F_1(4;0)$, $F_2(-4; 0)$; $\varepsilon = 4/5$; $x = \pm 25/4$. **785.** $2a = 26$; $2b = 10$; $\varepsilon = 12/13$; $F_1(12; 0)$, $F_2(-12; 0)$. **786.** $\sqrt{5}$ та 3; $F_1(0; -2)$, $F_2(0; 2)$; $\varepsilon = 2/3$; $y = \pm 9/2$. **787.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. **788.** $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{5} = 1$. **789.** $x = \pm 9$. **790.** $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$. **791.** $\varepsilon = \sqrt{2}/2$. **792.** $\varepsilon = 1/2$. **793.** 15. **794.** $16x^2 + 25y^2 = 41$. **795.** $5x + 12y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. **796.** $r_1 = 2{,}6$; $r_2 = 7{,}4$. **797.** 10. **798.** $M_1(-15/2; 3\sqrt{7}/2)$ та $M_2(-15/2; -3\sqrt{7}/2)$ **799.** Вершини великої осі. **800.** $(\pm 5; \pm 2)$. **801.** $(4; 1{,}8)$, $(4; -1{,}8)$, $(-4; 1{,}8)$, $(-4; -1{,}8)$. **802.** $(-5; 3\sqrt{3})$, $(-5; -3\sqrt{3})$. **803**. $A(6; 0)$, $B(6/7; 12\sqrt{3}/7)$, $C(6/7; -12\sqrt{3}/7)$. **804.** $M_1(3; -3)$, $M_2(69/13; 21/13)$. **805.** $(4; 3/2)$, $(3; 2)$. **806.** $x - 2y - 8 = 0$. **807.** $y = 3$ і $12x + 7y + 51 = 0$. **808.** $2x - y \pm 12 = 0$. **809.** $x + y - 5 = 0$ і $x + y + 5 = 0$. **810.** $5x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 55 = 0$. **811.** $4x^2 + 3y^2 + 32x - 14y + 59 = 0$. **812.** 1) $\frac{(x-2)^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3 = 0$; 3) $11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0$; 4) $68x^2 + 48xy + 82y^2 - 625 = 0$. **813.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$. **814.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **815.** $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$. **816.** Права гілка гіперболи $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. **817.** 1) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 3) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$; 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$. **818.** 1) $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$; 2) $\varepsilon = 5/3$; 3) $y = \pm\frac{4}{3}x$; 4) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$, $\varepsilon = 5/4$. **819.** $a = 3$, $b = 4$, $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$, $\varepsilon = 5/3$, $y = \pm\frac{4}{3}x$, $x = \pm 9/5$. **820.** 1) $x^2 - y^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1$; 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **821.** 1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$; 2) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$. **822.** $a = 3$, $b = 4$, $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$, $\varepsilon = 5/4$, $y = \pm\frac{4}{3}x$, $y = \pm 16/5$. **823.** $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ і $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$. **824.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **825.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$. **826.** $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{40} = 1$. **827.** $a = 6$, $b = 6$. **828.** $\alpha = 90^\circ$. **829.** $\varepsilon = 2/\sqrt{3}$. **832.** $r_1 = 9$; $r_2 = 19$, $\operatorname{tg}\theta = 28\sqrt{2}/41$. 833. $x = \pm 4/5\sqrt{34}$, $y = \pm 1{,}8$ (чотири точки). **834.** $x = 9{,}6$, $y = \pm 3/5\sqrt{119}$ (2 точки). **835.** $(\pm 14\sqrt{3}/3; \pm 4\sqrt{3}/3)$ (чотири точки). **836.** $r_1 = 2\frac{1}{4}$; $r_2 = 10\frac{1}{4}$. **837.** $x - 4\sqrt{5}y + 10 = 0$, $x - 10 = 0$. **838.** $(-8; 0)$. **839.** $r_1 = 6$; $r_2 = 14$. **840.** 8. **841**. 12. **842.** $(10; 2)$, $(-10; -2)$. **843.** $(25/4, 3)$ — пряма дотикається до гіперболи. **844.** $x + y = 1$. **845.** $x + y + 3 = 0$ і $x + y - 3 = 0$. **846.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$. **847.** $2x + 5y - 16 = 0$. **848.** $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{45} = 1$, $\frac{3x^2}{10} - \frac{4y^2}{5} = 1$. **849.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **850.** $x^2 - 4y^2 - 6x - 24y - 47 = 0$. **851.** $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$. **852.** $2xy + 7y^2 - 144 = 0$. **853.** $2xy + 2x - 2y + 7 = 0$. **854.** $y^2 = 12x$. **855.** $y^2 = 20x$. **856.** $y^2 = 2px$. **857.** $y = \frac{x^2}{4} - x + 2$. **858.** 1) $p = 3$, у правій півплощині симетрично відносно осі Ox; 2) $p = 2{,}5$, у верхній півлощині симетрично відносно осі Oy; 3) $p = 2$, у лівій півплощині симетрично відносно осі Ox; 4) $p = 1/2$, у нижній півплощині симетрично відносно осі Oy. **859.** 1) $y^2 = 4x$, 2) $x^2 = y$. **860.** $y^2 = 10x - 25$. **861.** $F(6;0)$, $x + 6 = 0$. **862.** $A(18; 12)$ і $B(18; -12)$. **863.** 12. **864.** 6. **865.** $(9; 12)$, $(9; -12)$. **866.** $OM = 10$. **867.** $y^2 = -28x$. **868.** 1) $A(2;0)$, $p = 2$; 2) $A(0;2)$, $p = 1/2$; 3) $A(-2; 1)$, $p = 2$; 4) $A(6; -1)$, $p = 3$; 5) $A(-4; 3)$, $p = 1/4$. **869.** $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$. **870.** $x = \frac{1}{4}y^2 - y + 7$. **871.** $y^2 = 4x$, $y^2 = -4x$. **872.** $y = \pm 2\sqrt{2}x$.

873. $2x - y - 3 = 0$. **874.** (2;1), (−6; 9). **875.** (− 4;6) — пряма дотикається до параболи. **876.** $(5/4; \sqrt{15})$, $(5/4; -\sqrt{15})$ та дві уявні точки перетину. **877.** $x - 2 = 0$. **878.** $x + y + 2 = 0$ і $2x + 5y + 25 = 0$. **879.** (9; −6). **880.** $x + y + 3 = 0$ у точці (3; −6) і $x - y + 3 = 0$ у точці (3; 6). **881.** $2x - y - 16 = 0$. **882.** $p = 2bk$. **883.** $d = 2$. **884.** $x + 3y + 15 = 0$ і $x - 3y + 15 = 0$. **885.** $3x - y + 3 = 0$ і $3x - 2y + 12 = 0$. **886.** $d = 13\frac{5}{13}$. **889.** $F(9; -8)$. **890.** $4x^2 - 4xy + y^2 + 32x + 34y - 89 = 0$. **892.** 1) $B(5;5\pi/3)$; 2) $C(5;4\pi/3)$. **893.** $A'\left(2;\frac{17}{12}\pi\right)$, $B'\left(3;\frac{7}{12}\pi\right)$, $C'\left(1;\frac{3\pi}{4}\right)$, $D'\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$, $E'\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$. **894.** 1) Коло радіуса 3 з центром у полюсі; 2) коло радіуса 1 з центром у полюсі; 3) коло радіуса a з центром у полюсі; 4) промінь, що виходить з полюса під кутом $\pi/4$ до полярної осі; 5) промінь, що виходить з полюса під кутом $\pi/3$ до полярної осі; 6) промінь, що виходить з полюса під кутом φ до полярної осі; 7) кільце між концентричними колами радіусів 1/2 та 2 з центрами в полюсі, причому точки кола радіуса 2 вилучаються; 8) нескінченний сектор, що міститься між променями $\varphi = \pi/6$ та $\varphi = \pi/3$. **895.** $S = \frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. **896.** 5 кв.од. **897.** $3(4\sqrt{3} - 1)$ кв.од. **898.** $d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$. **899.** $PQ = 7$. **900.** $PQ = 10$. **901.** $AB = BC = CA = 7$. **910.** (5; arctg(−4/3)). **911.** $(\sqrt{2}; 3\pi/4)$. **912.** $(2; \pi/2)$. **913.** (5; 0). **914.** $\rho^2 + 2p(\cos\varphi - \sin\varphi) + 1 = 0$. **915.** $\rho^2 = \cos\varphi + \sin\varphi$. **916.** $\rho^2\sin^2 2\varphi = 4$. **917.** $\rho^2 - 2\rho - 3 = 0$. **918.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. **919.** $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} = y$. **920.** $5x - 3y - 2 = 0$. **921.** $x^2 + (y - 1)^2 = 9$. **922.** $(2 + 5\sqrt{3};8)$, $(2 - 5\sqrt{3};-2)$. **923.** $(6\sqrt{2}; 5\pi/4)$, $(4; \pi/6)$. **924.** 1) $\rho = a$; 2) $\rho = 2a\cos\varphi$; 3) $\rho^2 - 2\rho\rho_1\cos(\varphi - \varphi_1) = a^2 - \rho_1^2$. **925.** $\rho^2 = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$. **926.** $\varphi = \arccos(\pm 4/5)$. **927.** 1) $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$; 2) $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$. **928.** $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{6}$, $2c = 2\sqrt{2}$. **929.** $\rho = -\frac{21}{2\cos\varphi}$, $\rho = \frac{29}{2\cos\varphi}$. **930.** $(6; \pi/4)$, $(6; -\pi/4)$. **931.** $\rho^2 = \frac{-b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$. **932.** $\varphi = 2\pi/3$. **933.** $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. **934.** Рівняння асимптот: $\rho = \frac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)}$ і $\rho = \frac{2}{\sin\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)}$, рівняння директрис: $\rho = \frac{-\sqrt{2}}{\cos\varphi}$ і $\rho = \frac{-3\sqrt{2}}{\cos\varphi}$. **935.** $\rho = \frac{9}{4-5\cos\varphi}$. **936.** Рівняння директрис: $\rho = -\frac{34}{5\sin\varphi}$, $\rho = -\frac{16}{5\cos\varphi}$; рів-

няння асимптот: $\rho = \frac{20}{3\sin\varphi - 4\cos\varphi}$, $\rho = \frac{-20}{3\sin\varphi + 4\cos\varphi}$. **937.** $(3; 2\pi/3)$, $(3; -2\pi/3)$. **938.** $\rho = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **939.** $M(3; \arccos 1/3)$ — дві точки, симетричні відносно полярної осі. **940.** $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi}$. **941.** 1) $(p/2; \pi)$ — вершина параболи; 2) дві точки: $(p; \pi/2)$ і $(p; 3\pi/2)$. **942.** $|\delta_1\delta_2| = p^2$. **943.** 1) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; 2) $y^2 = 2x/3$; 3) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 4) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$. **944.** Еліпс $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$; $O_1(5; -2)$ — новий початок. **945.** Гіпербола $\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{9} = 1$, $O_1(3; -2)$ — новий початок. **946.** «Уявний еліпс» $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = -1$. **947.** Дві прямі, що перетинаються $4x'^2 - y'^2 = 0$, $O_1(-1; -1)$ — новий початок. **948.** Єдина точка $O_1(-2; 1)$. **949.** Коло $\frac{x'^2}{13} + \frac{y'^2}{13} = 1$, $O_1(2; 3)$ — новий початок. **950.** Парабола $y'^2 = -4x'$, $O_1\left(\frac{21}{8}; -3\right)$ — новий початок. **951.** Еліпс $\frac{x'^2}{28} + \frac{y'^2}{7} = 1$, $O_1(-2; 2)$ — новий початок. **952.** Парабола $x'^2 = 4y'$, $O_1(-3; -1)$ — новий початок. **953.** Парабола $y'^2 = 10x'$, $O_1(-2;1)$ — новий початок. **954.** Точка $O_1(2;1)$. **955.** Прямі $x = 4$, $x = 2$. **956.** Уявний еліпс $x'^2 + \frac{y'^2}{1/4} = -1$. **957.** Гіпербола $\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$. **958.** Еліпс $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1$. **959** Єдина точка $x'^2 + 4y'^2 = 0$. **960.** Дві прямі, що перетинаються $x'^2 - y'^2 = 0$. **961.** Уявний еліпс $\frac{x'^2}{4} + y'^2 = -1$. **962.** Еліпс $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1$. **963.** Дві прямі $x'^2 = 1$. **964.** Гіпербола $x'^2 - \frac{y'^2}{9} = 1$. **965.** Пряма $x - 2y = 0$. **966.** Пряма $3x + 5y = 0$. **967.** Дві паралельні прямі $2x - 3y + 5 = 0$ і $2x - 3y - 5 = 0$. **968.** Дві прямі $3x - 2y = 0$ і $7x + 5y = 0$. **969.** Дві прямі $5x - y = 0$ і $2x - y = 0$. **970.** Дві уявні прямі, що перетинаються в початку координат. **971.** Еліпс $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{1} = 1$. **972.** Гіпербола $\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$. **973.** Дві прямі $y'^2 = 25$. **974.** Парабола $y'^2 = 6x'$. **975.** Гіпербола $x'^2 - \frac{y'^2}{4} = 1$. **976.** Еліпс

$\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$. **977.** Гіпербола $\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{36}=1$. **978.** Дві прямі, що перетинаються $x'^2-4y'^2=0$. **979.** Уявний еліпс $x'^2+2y'^2=-1$. **980.** Точка $2x'^2+3y'^2=0$. **981.** Еліпс $\frac{x'^2}{30}+\frac{y'^2}{5}=1$. **982.** Гіпербола $\frac{x'^2}{5/9}-\frac{y'^2}{5/16}=1$. **983.** Дві прямі $x'^2-4y'^2=0$. **984.** $2x'^2+3y'^2=-1$ — уявний еліпс. **985.** $x'^2+2y'^2=0$ — єдина точка. **986.** $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$ — еліпс. **987.** $\frac{x'^2}{4}-y'^2=1$ — гіпербола. **988.** $\frac{x'^2}{9}+y'^2=1$ — еліпс. **989.** Парабола $y'^2=2x'$. **990.** Дві прямі $x'^2=1$. **991.** Пряма $y'^2=0$. **992.** Площини, паралельні площині xOy, перетинають його по колах; площини, паралельні іншим координатним площинам, перерізають його по еліпсах. **993.** У площині xOy маємо еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$, у площині yOz маємо еліпс $\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, у площині zOx маємо еліпс $\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$. Еліпсоїд має шість дійсних вершин $A(6;\ 0;\ 0)$, $A_1(-6;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 4;\ 0)$, $B_1(0;\ -4;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 3)$, $C_1(0;\ 0;\ -3)$; $2a=12$, $2b=8$, $2c=6$. **994.** $a:a_1=c:c_1=3:\sqrt{5}$. **998.** 1) Конус обертання навколо осі Oz з вершиною в точці $(0;\ 0;\ 1)$; 2) еліптичний параболоїд, напрямлений у від'ємному напрямі осі Ox з вершиною в точці $(1;\ 0;\ 0)$; 3) двополий гіперболоїд обертання навколо осі Ox; 4) однополий гіперболоїд обертання навколо осі Oy. **999.** 3, $\sqrt{3}$; $(2;\ 3;\ 0)$, $(2;\ -3;\ 0)$, $(2;\ 0;\ \sqrt{3})$, $(2;\ 0;\ -\sqrt{3})$. **1000.** 4, 3; $(4;\ 0;\ -1)$, $(-4;\ 0;\ -1)$. **1001.** 15, $(0;\ -6;\ -3/2)$. **1002.** а) На площину Oxy: $\begin{cases}x^2+4xy+5y^2-x=0,\\ z=0;\end{cases}$ б) на площину Oxz: $\begin{cases}x^2-2xz+5z^2-4x=0,\\ y=0;\end{cases}$ в) на площину Oyx: $\begin{cases}y^2+z^2+2y-z=0,\\ x=0.\end{cases}$ **1003.** Еліпс, $(2;\ -1;1)$ — центр. **1004.** Гіпербола, $(1;\ -1;\ -2)$ — центр. **1005.** Еліпс, $(-3/2;\ 1;\ 13/4)$ — центр. **1006.** Парабола, центр не існує. **1007.** Гіпербола, $(2;\ -3;\ -4)$ — центр. **1008.** 1) $1<|m|<\sqrt{2}$; 2) $|m|<1$. **1009.** 1) $m\neq 0$ і $m\geq -1/4$; у випадку $m=-1/4$ — точка; 2) $m=0$. **1010.** $(9;\ 5;\ -2)$. **1011.** $(3;\ 0;\ -10)$. **1012.** $(6;\ -6;\ 2)$. **1013.** $m=\pm 18$. **1014.** 1) $(3;\ 4;\ -2)$ і $(6;\ -2;\ 2)$; 2) $(4;\ -3;\ 2)$ — пряма дотикається до поверхні; 3) пряма та поверхня не мають спільних точок; 4) пряма належить поверхні. **1015.** $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x-2y+4=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-12y-z+16=0,\\ x+2y-8=0.\end{cases}$ **1016.** $\begin{cases}y+2z=0,\\ x-5=0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x-5z=0,\\ y+4=0.\end{cases}$ **1017.** Вказівка: здійснити поворот навколо осі Oz на кут 45°. **1019.** 1) Конус з центром у початку координат; 2) гіперболічний параболоїд. **1020.** Еліпсоїд. **1021.** Гіперболічний параболоїд. **1022.** Конус другого порядку. **1023.** Еліптичний параболоїд. **1024.** Круговий циліндр. **1025.** Конус другого порядку. **1026.** Точка $(0;\ 1;\ -1)$. **1027.** Двополий гіперболоїд. **1028.** Однополий гіперболоїд. **1029.** Еліпсоїд. **1030.** Гіперболоїд. **1031.** Параболоїд. **1032.** $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{3}+\frac{z'^2}{2}=1$ — еліпсоїд, де $x=\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'$, $z=\frac{2}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'$. **1033.** $\frac{x'^2}{15}+\frac{y'^2}{5}-\frac{z'^2}{3}=1$ — однополий гіперболоїд, де $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z=z'$. **1034.** $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{4}=1$ — гіперболічний циліндр, де $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{2}{3\sqrt{2}}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{3\sqrt{2}}y'+\frac{2}{3}z'$, $z=-\frac{4}{3\sqrt{2}}y'+\frac{1}{3}z'$. **1035.** $x'^2-\frac{y'^2}{2}-\frac{z'^2}{2}=1$ — двополий гіперболоїд, де $x=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'$, $y=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'-\frac{2}{3}z'$, $z=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{2}{3}z'$. **1036.** $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{1}=1$ — еліптичний циліндр, де $x=-\frac{1}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $y=\frac{2}{\sqrt{6}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'$, $z=\frac{1}{\sqrt{6}}x'-\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{2}}z'$. **1037.** $\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{2}=1$ — гіперболічний циліндр, де $x=-\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=\frac{1}{3}x'-\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $z=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}z'$. **1038.** $\frac{\dot{x}^2}{4/3}+\frac{\dot{y}^2}{2}=1$ — еліптичний циліндр, де $x=\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{2}{\sqrt{6}}y'$, $z=-\frac{1}{\sqrt{3}}x'+\frac{1}{\sqrt{2}}y'-\frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $\dot{x}=x'$, $\dot{y}=y'+2/\sqrt{2}$. **1039.** $\frac{\dot{x}^2}{6}+\frac{\dot{y}^2}{3}+\frac{\dot{z}^2}{2}=1$ — еліпсоїд, де $x=\frac{2}{3}x'+\frac{2}{3}y'-\frac{1}{3}z'$, $y=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $z=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $\dot{x}=x'-1$, $\dot{y}=y'$, $\dot{z}=z'+1$. **1040.** $\frac{\dot{x}^2}{3}+\frac{\dot{y}^2}{2}=1$ — еліптичний циліндр, де $x=\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}y'-\frac{2}{\sqrt{6}}z'$, $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}x'+\frac{1}{\sqrt{3}}y'+\frac{1}{\sqrt{6}}z'$, $\dot{x}=x'+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\dot{y}=y'+\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\dot{z}=z'$. **1041.** $\frac{\dot{x}^2}{1}+\frac{\dot{y}^2}{1/2}+\frac{\dot{z}^2}{1/3}=1$ — еліпсоїд, де $x=\frac{2}{3}x'-\frac{1}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $y=\frac{2}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{1}{3}z'$, $z=-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{2}{3}z'$, $\dot{x}=x'-\frac{1}{2}$, $\dot{y}=y'+\frac{1}{2}$, $\dot{z}=z'+\frac{1}{3}$. **1045.** $A(\bar{x})=$

$= 3x^1 - x^2$. **1046.** $A(\bar{x}) = 5x^1 + 2x^2$ **1047.** $A(\bar{x}) = 2x^1 - 3x^2$. **1048.** $A(\bar{x}) = x^1 + x^2 + x^3$. **1049.** $A(\bar{x}) = x^1 + 2x^2 - x^3$. **1050.** $A(\bar{x}) = 2x^1 - 3x^2 - 2x^3$. **1051.** $A(\bar{x}) = -2x^1 + 3x^2$. **1052.** $A(\bar{x}) = 2x^1 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3$. **1053.** $x^1 = \frac{1}{3}\dot{x}^1 + \frac{1}{3}\dot{x}^2$, $x^2 = \dot{x}^2$, $\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1054.** $\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1055.** $\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_4 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1056. $x_1 = \dot{x}_1$, $x_2 = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_3 - \dot{x}_4$, $x_3 = \dot{x}_3$, $x_4 = \dot{x}_4$, $\dot{\bar{e}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\bar{e}}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **1057.** Вказівка: знайти базис $\dot{\bar{e}}^1, \dot{\bar{e}}^2, \ldots, \dot{\bar{e}}^n$, для якого $A(\dot{\bar{e}}^1) = 1$, $A(\dot{\bar{e}}^2) = A(\dot{\bar{e}}^3) = \ldots = A(\dot{\bar{e}}^n) = 0$. **1058.** $\dot{\mathcal{A}} = (-5\ 12)$. **1059.** $\dot{\mathcal{A}} = (-3\ \ -7\ \ -13)$. **1060.** $\dot{a}_1 = 5$, $\dot{a}_2 = -5$, $\dot{a}_3 = 4$. **1061.** $A(\bar{x}) = 19\dot{x}^1 + 11\dot{x}^2 + 9\dot{x}^3 + 7\dot{x}^4$. **1062.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$. **1063.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 2x^1y^1 - x^1y^2 + x^2y^1 - 5x^2y^2$. **1064.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2$. **1065.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_1 + x_2y_2$. **1066.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 7x^1y^1 + 5x^1y^2 + 3x^2y^1 + 2x^2y^2$; $A(\bar{x}, \bar{y}) = 2x^1y_1 + 3x^1y_2 + x^2y_1 + x^2y_2$. **1067.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 21x_1y_1 - 18x_1y_2 + 8x_1y_3 - 20x_2y_1 + 18x_2y_2 - 8x_2y_3 + 10x_3y_1 - 9x_3y_2 + 4x_3y_3$. **1068.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 6x^1y^1 - 3x^1y^2 + x^1y^3 + 3x^2y^1 - 2x^2y^2 + x^2y^3 + 2x^3y^1 - 2x^3y^2 + 2x^3y^3$; $A(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 2x_1y_3 + 2x_2y_1 - 5x_2y_2 + 6x_2y_3 + x_3y_1 - 3x_3y_2 + 6x_3y_3$. **1069.** $A(\bar{x}, \bar{y}) = 2x^1y^1 + x^1y^2 + 2x^2y^3 - 8x^2y^1 - 10x^2y^2 - 12x^2y^3 + 8x^3y^1 + 8x^3y^2 + 16x^3y^3$; $A(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - 2x_1y_3 - 2x_2y_1 - 4x_2\ y_2 - 2x_2\ y_3 + \frac{1}{2}x_3\ y_1 + 2x_3\ y_2 + 3x_3\ y_3$. **1070.** $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \mathcal{D}^T\mathcal{A}^{BB}\mathcal{D}$.

1071. $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \mathcal{C}^T\mathcal{A}_H^B\,\mathcal{D}$, $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{A}_H^B\,\mathcal{C}$. **1072.** $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

1073. $\dot{a}^{11} = \frac{1}{2}$, $\dot{a}^{12} = \frac{1}{2}$, $\dot{a}^{21} = \frac{1}{2}$, $\dot{a}^{22} = -\frac{1}{2}$. **1074.** $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \begin{pmatrix} 5/9 & -2/9 \\ 4/9 & 11/9 \end{pmatrix}$.

1075. $\dot{a}^{11} = \frac{5}{9}$, $\dot{a}^{12} = -\frac{2}{9}$, $\dot{a}^{21} = \frac{4}{9}$, $\dot{a}^{22} = \frac{11}{9}$. **1076.** $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \mathcal{C}^T\mathcal{A}_{HH}\,\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **1077.** $\dot{a}_{11} = 2$, $\dot{a}_{12} = 2$, $\dot{a}_{21} = 2$, $\dot{a}_{22} = -2$. **1078.** $\dot{\mathcal{A}}_{HH} =$

$= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. **1079.** $\dot{a}_{11} = -1$, $\dot{a}_{12} = 4$, $\dot{a}_{21} = 3$, $\dot{a}_{22} = -4$. **1080.** $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \mathcal{C}^T\mathcal{A}_H^B\,\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **1081.** $\dot{a}_1^1 = 7$, $\dot{a}_1^2 = 5$, $\dot{a}_2^1 = 3$, $\dot{a}_2^2 = 1$. **1082.** $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. **1083.** $\dot{a}_1^1 = 1$, $\dot{a}_1^2 = 1$, $\dot{a}_2^1 = 2$, $\dot{a}_2^2 = -2$. **1084.** $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$. **1085.** $\dot{a}_{11} = 6$, $\dot{a}_{12} = 0$, $\dot{a}_{13} = -4$, $\dot{a}_{21} = 0$, $\dot{a}_{22} = 6$, $\dot{a}_{23} = 2$, $\dot{a}_{31} = -4$, $\dot{a}_{32} = 2$, $\dot{a}_{33} = 6$. **1086.** $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1087.** $\dot{a}_{11} = 0$, $\dot{a}_{12} = 1$, $\dot{a}_{13} = 1$, $\dot{a}_{21} = 0$, $\dot{a}_{22} = 1$, $\dot{a}_{23} = 2$, $\dot{a}_{31} = 1$, $\dot{a}_{32} = 2$, $\dot{a}_{33} = 3$. **1088.** $\dot{\mathcal{A}}^{BB} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 6 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **1089.** $\dot{a}^{11} = -2$, $\dot{a}^{12} = 4$, $\dot{a}^{13} = -2$, $\dot{a}^{21} = 6$, $\dot{a}^{22} = -6$, $\dot{a}^{23} = 2$, $\dot{a}^{31} = -3$, $\dot{a}^{32} = 3$, $\dot{a}^{33} = -1$. **1090.** $\dot{\mathcal{A}}_H^B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **1091.** $\dot{a}_1^1 = -1$, $\dot{a}_1^2 = 1$, $\dot{a}_1^3 = 0$, $\dot{a}_2^1 = -1$, $\dot{a}_2^2 = 0$, $\dot{a}_2^3 = 1$, $\dot{a}_3^1 = 0$, $\dot{a}_3^2 = 0$, $\dot{a}_3^3 = 1$. **1092.** $\dot{\mathcal{A}}_{HH} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **1093.** $\dot{a}_{23} = 1$, $\dot{a}_{42} = -1$. **1101.** а) $\dot{a}_1^{11} = 10$, $\dot{a}_1^{12} = -20$, $\dot{a}_1^{21} = -20$, $\dot{a}_1^{22} = 40$, $\dot{a}_2^{11} = 5$, $\dot{a}_2^{12} = -10$, $\dot{a}_2^{21} = -10$, $\dot{a}_2^{22} = 20$; б) $A(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 10\dot{x}^1\dot{y}_1\dot{z}_1 - 20\dot{x}^1\dot{y}_2\dot{z}_1 + 5\dot{x}^2\dot{y}_1\dot{z}_1 - 10\dot{x}^2\dot{y}_2\dot{z}_1 - 20\dot{x}^1\dot{y}_1\dot{z}_2 + 40\dot{x}^1\dot{y}_2\dot{z}_2 - 10\dot{x}^2\dot{y}_1\dot{z}_2 + 20\dot{x}^2\dot{y}_2\dot{z}_2$. **1102.** $\dot{a}^{111} = 24$, $\dot{a}^{112} = 14$, $\dot{a}^{121} = 6$, $\dot{a}^{122} = 4$, $\dot{a}^{211} = 6$, $\dot{a}^{212} = 4$, $\dot{a}^{221} = 1$, $\dot{a}^{222} = 1$. **1103.** $(-5; 25; 0)$. **1104.** $C_{e_H} = \{C_i^j\} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -2 & 0 & -8 \\ -10 & -14 & 2 \end{pmatrix}$. **1105.** Вказівка: переконатися, що $C_{e_H} = \{C_{ij}^k\}$ змінюється за тензорним законом. **1106.** а) Так; б) ні; в) ні; г) так. **1107.** $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & -9 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 5 & -5 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$. **1108.** $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathcal{A} - \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$. **1109.** $C_{e_H} = \{C_{ij}\} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

1110. $\mathcal{C} \cdot \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -4 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{D} \cdot \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 12 & 6 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **1111.** $p_i^{lk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$p_j^{2k} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $p_j^{3k} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **1112.** $c_k^{11} = (-3; 6; 9)$, $c_k^{12} = (1; -2; -3)$, $c_k^{13} = (-2; 4; 6)$, $c_k^{21} = (0; 0; 0)$, $c_k^{22} = (0; 0; 0)$, $c_k^{23} = (-3; 6; 9)$, $c_k^{31} = (-2; 4; 6)$, $c_k^{32} = (-1; 2; 3)$, $c_k^{33} = (-1; 2; 3)$. **1113.** $\begin{pmatrix} 3 & 11 & 9 \\ -1 & 6 & 0 \\ 8 & 18 & 4 \end{pmatrix}$.

1114. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \\ 4 & 10 & -4 \end{pmatrix}$. **1115.** 12. **1116.** 24. **1117.** $c_i = (22; 3; 12)$. **1118.** $p^j = (15; 9; 1)$. **1121.** $c_{lmi} = g_{ik} b_{lm}^k$. **1122.** $b_{mji} = g_{ik} g_{jl} c_m^{kl}$. **1123.** δ_i^j. **1124.** δ_i^j. **1125.** n.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — 5-е изд. — М.: Наука, 1984.

2. *Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Наука, 1987.

3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1988.

4. *Гантмахер Р. Р.* Теория матриц. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988.

5. *Гусак А. А., Гусак Г. М.* Справочник по высшей математике. — Минск: Наука и техника, 1991.

6. *Збірник* задач з аналітичної геометрії та векторної алгебри / В. В. Булдигін, В. А. Жук, С. О. Рушицька, В. В. Ясінський. — К.: Вища шк., 1999.

7. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1988.

8. *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — 3-е изд. — М.: Наука, 1984.

9. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1980.

10. *Сборник* задач по математике для втузов / Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидова. — М.: Наука, 1986. — Ч. I.

Навчальне видання

Діскант Валентин Іванович
Береза Людмила Романівна
Грижук Олександра Павлівна
Захаренко Лідія Михайлівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

З ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Оправа і титул художника *В. М. Кушніренка*
Художній редактор *Г. С. Муратова*
Технічний редактор *А. І. Омоховська*
Коректор *Р. Б. Попович*
Комп'ютерна верстка *С. В. Дьогтєвої*

Свідоцтво про внесення до Держ. реєстру від 04.12.2000
серія ДК № 268

Підп. до друку 18.06.2001. Формат 84 × 108/32. Папір офс. № 1.
Гарнітура Antiqua. Офс. друк. Ум. друк. арк. 15,96.
Обл.-вид. арк.14,50. Тираж 5000 пр. Вид. № 10300.
Зам. № 1-93

Видавництво «Вища школа», 01054, Київ-54, вул. Гоголівська, 7

Надруковано з плівок, виготовлених у видавництві
«Вища школа», у ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4