УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

За редакцією
В.П.Дубовика
І.І.Юрика

УНІВЕРСИТЕТСЬКА БІБЛІОТЕКА
Заснована в 2001 році

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

За редакцією
В.П.Дубовика
І.І.Юрика

Допущено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів

КИЇВ 2001

ББК 22.11я73
В55

Допущено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Автори:
В. П. Дубовик (гл. 10), ***І. І. Юрик*** (гл. 1), ***І. П. Вовкодав*** (гл. 7), ***В. І. Дев'ятко*** (гл. 5), ***Р. К. Клименко*** (гл. 3), ***В. В. Крочук*** (гл. 6), ***М. А. Мартиненко*** (гл. 8), ***Ю. І. Микитюк*** (гл. 4), ***Ф. Ф. Михайленко*** (гл. 2), ***Н. В. Нестеренко*** (гл. 9)

Рецензенти:
кафедра вищої математики Технологічного ун-ту Поділля (м. Хмельницький), кафедра вищої математики Полтавського пед. ін-ту.

Вища математика: Збірник задач: Навч. посібник / В. П. Дубовик,
В 55 І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; За ред. В.П.Дубовика, І. І. Юрика. — К.: А.С.К., 2001. — 480 с.: іл. — (Унів. б-ка).

ISBN 966-539-321-9

Збірник задач складено на основі досвіду роботи авторів у технічних вузах. Послідовність розділів, означення, умови задач і символіка в основному відповідають підручнику В. П. Дубовика, І. І. Юрика «Вища математика» (К.: А.С.К., 2001). У кожному параграфі умовам задач передують короткі теоретичні відомості, які містять основні формули, означення і деякі алгоритми. До всіх задач дано відповіді, а до деяких з них — вказівки і розв'язання.

Для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

ББК 22.11я73

Навчальне видання

Університетська бібліотека

ДУБОВИК Володимир Панасович, ЮРИК Іван Іванович, ВОВКОДАВ Іван Пилипович, ДЕВ'ЯТКО Вікторія Іванівна, КЛИМЕНКО Раїса Костянтинівна, КРОЧУК Всеволод Васильович, МАРТИНЕНКО Михайло Антонович, МИКИТЮК Юрій Іванович, МИХАЙЛЕНКО Феодосій Феодосійович, НЕСТЕРЕНКО Неля Василівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА. ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Допущено Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів технічних і технологічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Редактор *Є. Бондарчук*

Підписано до друку 27.03.2001. Формат 60x84 1/16. Папір друк.
Гарнітура літературна. Умовн.-друк. арк. 27,9. Зам. № 1–19.

«А.С.К.», 04112, Київ-112, вул. Шамрила, 2б.
Свідоцтво серія ДК № 66 від 29.0.2000 р.

Головне п... об'єднання «Поліграфкнига», 03057, Київ-57, вул. Довженка, 3.

ISBN 966-539-321-9

Глава 1

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. ВИЗНАЧНИКИ

1.1. Визначники другого і третього порядків

Вирази

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

називаються відповідно *визначниками (детермінантами)* другого і третього порядків.

Символи a_{ij} називаються *елементами визначника.* Вони можуть бути числами, функціями, алгебраїчними виразами тощо. Положення елемента у визначнику характеризується двома індексами: перший означає номер рядка (зверху вниз), а другий — номер стовпця (зліва направо), на перетині яких знаходиться даний елемент.

Якщо вважати, що визначник першого порядку — це один елемент, то можна дати таке означення.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначників другого і третього порядків відповідно називається визначник першого і другого порядків, які дістаємо з даних визначників викресленням i-го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Властивості визначників.

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями.
2. Якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник змінить знак.
3. Якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю.

4. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

5. Спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника.

6. Якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю.

7. Якщо кожен елемент n-го рядка (n-го стовпця) є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, у одного з яких n-й рядок (n-й стовпець) складається з перших доданків, а у другого — з других; інші елементи всіх трьох визначників однакові.

8. Визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Теорема 1. *Визначник дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення, тобто*

$$\Delta = \sum_k a_{ik}A_{ik}, \text{ або } \Delta = \sum_k a_{ki}A_{ki}.$$

Ці формули називаються *розкладом визначника* за елементами i-го рядка та i-го стовпця відповідно.

Наприклад,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Це розклад визначників за елементами першого рядка.

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Обчислити визначники.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$. **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$. **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$. **4.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 4 \end{vmatrix}$. **5.** $\begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} a+2 & a^2 \\ a & a^2-2a+4 \end{vmatrix}$. **7.** $\begin{vmatrix} 1 & \log_a \frac{1}{b} \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} \log_a b & \log_{a^2} b \\ \log_{b^2} a & \log_b a \end{vmatrix}$. **9.** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & -1 \\ 1 & \operatorname{ctg}\alpha \end{vmatrix}$. **10.** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} & -1 \\ 1 & \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{12} \end{vmatrix}$. **12.** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} & \cos\frac{\pi}{3} \\ 2\sin\frac{\pi}{6} & \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5} \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **14.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$. **15.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **17.** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -10 & 7 \end{vmatrix}$. **18.** $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 14 & 3 & 2 \\ 21 & 3 & 5 \end{vmatrix}$. **20.** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 13 & -4 & 15 \\ 7 & 0 & -4 \end{vmatrix}$. **21.** $\begin{vmatrix} 2 & 14 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 0 & 16 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язати рівняння і нерівності.

22. $\begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0$. **23.** $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = 0$.

24. $\begin{vmatrix} \sin x & 1 \\ 1 & 2\cos x \end{vmatrix} = 0$. **25.** $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$.

26. $\begin{vmatrix} |x+1| & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$. **27.** $\begin{vmatrix} (0{,}5)^{x^2} & 0{,}25 \\ 0{,}125 & 2^{2x-6} \end{vmatrix} = 0$.

28. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & \frac{1}{x+2} \end{vmatrix} \geqslant 1$. **29.** $\begin{vmatrix} |x-1| & 1 \\ 2 & \frac{1}{|x+2|} \end{vmatrix} < 0$.

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & -1 & -x \\ -x & 2x & 1 \end{vmatrix} = 4$. **31.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$.

32. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3x^2 & 5 & x \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} > 0$. **33.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -4 & x^4 & x^2 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0$.

Обчислити визначники, користуючись їх властивостями та теоремами 1, 2.

34. $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}$. **35.** $\begin{vmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & -a & -b \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$. **36.** $\begin{vmatrix} ab & a^2+b^2 & 1 \\ ac & a^2+c^2 & 1 \\ ad & a^2+d^2 & 1 \end{vmatrix}$.

37. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix}$. 38. $\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha & \sin\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

39. $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & 1+\cos^2\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 2 \end{vmatrix}$.

Користуючись властивостями визначників і теоремами 1, 2, довести рівності.

40. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$

41. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

42. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -7 & -11 \end{vmatrix}.$

43. $\begin{vmatrix} 0,(123) & 0,1(23) & 0,12(3) \\ \frac{30}{37} & \frac{10}{11} & 1 \\ 1 & \frac{37}{55} & -0,37 \end{vmatrix} = \frac{1}{450}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$

44. $\begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 2 \\ 2+x & 2-x & 4 \\ 3-x & 3+x & 2 \end{vmatrix} = 4x\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

45. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \end{vmatrix}.$

46. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$

47. $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = 0.$

48. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$. 49. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$

50. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

51. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

Обчислити визначники, розклавши їх за елементами того рядка, який містить найбільшу кількість нулів.

52. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. 53. $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ 0 & a^2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. 54. $\begin{vmatrix} -b & 1 & b \\ 0 & -b & -1 \\ b & 1 & -b \end{vmatrix}$.

55. $\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$.

1.2. Визначники вищих порядків

Визначником четвертого порядку називається вираз

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + a_{i4}A_{i4} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j} + a_{4j}A_{4j}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} (визначники третього порядку з відповідними знаками). Аналогічно дають означення визначників п'ятого порядку через визначники четвертого порядку і т. д., і взагалі, визначник n-го порядку означають через визначники $(n-1)$-го порядку, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення до елементів a_{ij} (визначники $(n-1)$-го порядку з відповідними знаками). Це розклад визначника за елементами i-го рядка та j-го стовпця відповідно.

Всі наведені в п. 1.1 властивості визначників справджуються для визначників будь-якого порядку.

Обчислити визначники.

56. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$. **57.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

58. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. **59.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники, розклавши їх за елементами рядка (стовпця), що містить букви.

60. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **61.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$.

62. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **63.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

64. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. **65.** $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники, розклавши їх на елементи другого рядка.

66. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **67.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

68. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. **69.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники, розклавши їх за елементами того рядка (стовпця), який містить найбільшу кількість нулів.

70. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. **71.** $\begin{vmatrix} a & b & a & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix}$.

72. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. **73.** $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники накопиченням нулів у рядку чи стовпці.

74. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$. **75.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$.

76. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **77.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$. **78.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

79. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$. **80.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

81. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -5 & 17 & -6 & -11 \\ 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \\ 8 & 3 & 6 & 8 & 11 \end{vmatrix}$. **82.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Використовуючи властивості визначників, довести рівність.

83. $\begin{vmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{vmatrix} = 0.$ **84.** $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$

85. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$.

86. Скільки доданків входить у формулу повного розкладу визначника: а) четвертого порядку; б) п'ятого порядку?

87. Числа 1081, 1403, 2093, 1541 діляться на 23. Не обчислюючи визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix},$$

довести, що він також ділиться на 23.

88. Довести, що коли визначник має діагональний вигляд, тобто $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, то він дорівнює добутку його діагональних елементів: $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

89. Довести, що коли визначник має трикутний вигляд, тобто $a_{ij} = 0$, $i > j$, то він дорівнює добутку його діагональних елементів.

Обчислити визначники, привівши їх до трикутного вигляду.

90. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **91.** $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

92. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **93.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Обчислити визначники n-го порядку.

94. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & \ldots & 2 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **95.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & n-4 & n-3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

96. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

97. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 0 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$. **98.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 1 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 1 & \ldots & n-1 & n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 1 & n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$.

99. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ -2 & 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

100. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x+a_n \end{vmatrix}$.

101. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & x_n \end{vmatrix}$.

§ 2. МАТРИЦІ

2.1. Дії над матрицями

Прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, складена з m рядків та n стовпців і записана у вигляді

$$A = A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

називається *матрицею* (*числовою матрицею розміром* $m \times n$).

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$, де a_{ij} — елементи матриці. Якщо $m = n$, то матриця називається *квадратною*.

Дві матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називаються *рівними між собою*, якщо вони мають однакові розміри ($A = A_{m\times n}$, $B = B_{m\times n}$) і рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. *Нульовою* називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначають її буквою O. Квадратна матриця називається *діагональною*, якщо всі її елементи, крім тих, що лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю. Діагональна матриця, у якої кожний елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається *одиничною* і позначається буквою E.

Визначником квадратної матриці $A_{n\times n} = (a_{ij})$ називається визначник, який складений з елементів матриці і позначається символом $\det A$. Таким чином,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\det A \neq 0$.

Сумою $C = A + B$ двох матриць однакового розміру $A_{m\times n} = (a_{ij})$ та $B_{m\times n} = (b_{ij})$ називається матриця

$$C_{m\times n} = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ на число k називається матриця

$$B = kA = (ka_{ij}).$$

Різниця $A - B$ матриць однакових розмірів визначається як сума матриці A і матриці B, помноженої на -1:

$$A - B = A + (-1)B.$$

Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців першої матриці A дорівнює кількості рядків другої матриці B.

Якщо матриця A узгоджена з матрицею B, то добутком $C = AB$ матриці $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицю $B_{n\times k} = (b_{ij})$ називається така $C_{m\times k}$-матриця, у якої елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$C = C_{m\times k} = (c_{ij}),\ c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Матриці A і B називаються переставними, якщо $AB = BA$.

Матриця $A^* = (a^*_{ij})$ називається *транспонованою* до матриці $A = (a_{ij})$, якщо $a^*_{ij} = a_{ji}$.

Квадратна матриця A називається *симетричною*, якщо $A^* = A$, і *кососиметричною*, якщо $A^* = -A$.

102. Довести такі властивості алгебраїчних операцій над матрицями:

а) $A + B = B + A$; б) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
в) $A + O = O + A = A$; г) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
д) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; е) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

103. Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Знайти:

1) $2A - 3B$; 2) $A + 2A^*$; 3) $\left(-\frac{1}{2}B^* - B\right)^*$;

4) $A^* - \frac{1}{3}B^*$; 5) $(A + B) - (A^* + B^*)$; 6) $(A + B)^* - (A^* + B^*)$.

104. Знайти матрицю $A = 2B - C^*$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

105. Обчислити

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^* - 2(0 \quad 1 \quad -3 \quad 5).$$

106. Довести, що для довільної квадратної матриці A матриця $S = A + A^*$ — симетрична, а матриця $K = A - A^*$ — кососиметрична.

107. Довести, що довільну квадратну матрицю можна виразити у вигляді суми симетричної і кососиметричної матриць.

108. Довести, що для довільної квадратної матриці A n-го порядку і дійсного числа α справедлива рівність

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

109. Користуючись результатами задач 106—108, записати матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

у вигляді суми симетричної і кососиметричної матриць.

Знайти добуток матриць.

110. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. **111.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

112. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. **113.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ -4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

114. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ **115.** $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}(4 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1)$.

116. $(5 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

117. Знайти матрицю $AB - BA$:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Піднести матриці до степеня.

118. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$. **119.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^2$.

120. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}^3$. **121.** $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3$.

122. Довести рівності:
1) $(AB)^* = B^*A^*$; 2) $A(BC) = (AB)C$;
3) $A(B + C) = AB + AC$.

123. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють нульовій матриці.

124. Знайти всі матриці другого порядку, квадрати яких дорівнюють одиничній матриці.

Знайти всі матриці, які переставні з даною матрицею A.

125. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **126.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

2.2. Обернена матриця

Нехай A—квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається *оберненою* до матриці A, якщо

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Теорема. *Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб матриця A була невиродженою; при цьому*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю до матриць.

127. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$. **128.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **129.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

130. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **131.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

132. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **133.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

134. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння.

135. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. **136.** $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

137. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. **138.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

139. $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

140. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.3. Ранг матриці

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених k рядків і k стовпців, називається *мінором k-го порядку матриці* $A = A_{m\times n}$.

Рангом $r(A)$ *матриці* A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Крім безпосереднього обчислення мінорів, ранг матриці можна знайти простішим методом, який грунтується на тому, що ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати так звані елементарні перетворення, а саме:

а) переставити місцями два рядки (стовпці);

б) помножити кожний елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;

в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те саме число.

Визначити ранг матриці.

141. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. **142.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. **143.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

144. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **145.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **146.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

147. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. **148.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

149. $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **150.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

§ 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Система двох лінійних рівнянь з двома невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і справедливі формули Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$, то система не має розв'язків. Якщо $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система має безліч розв'язків.

Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Аналогічно введемо позначення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок і його знаходять за формулами Крамера

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Якщо $\Delta = 0$, а одне з чисел Δ_x, Δ_y, Δ_z відмінне від нуля, то система розв'язку не має. При $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ система може бути несумісною або мати безліч розв'язків.

Аналогічні формули Крамера справедливі для n лінійних рівнянь з n невідомими.

Розв'язати системи лінійних рівнянь.

151. $$\begin{aligned} 3x - 5y &= 13,\\ 2x + 7y &= 81. \end{aligned}$$

152. $$\begin{aligned} 3x - 4y &= -6,\\ 3x + 4y &= 18. \end{aligned}$$

153. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7,\\ 4x - 5y &= 40. \end{aligned}$$

154. $$\begin{aligned} 5x + 2y &= 4,\\ 7x + 4y &= 8. \end{aligned}$$

155. $$\begin{aligned} 14x + 4y + 6z &= 30,\\ 5x - 3y + 2z &= 15,\\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned}$$

156. $$\begin{aligned} 2x + y &= 5,\\ x + 3z &= 16,\\ 5y - z &= 10. \end{aligned}$$

157. $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 2,\\ 3x + 2y + 2z &= -2,\\ x - 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

158. $$\begin{aligned} 2x - y - z &= 1,\\ x + 2y + 3z &= 5,\\ x + 3y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

159. $$\begin{aligned} 3x - 5y + 3z &= 1,\\ x + 2y + z &= 4,\\ 2x + 7y - z &= 8. \end{aligned}$$

160. $$\begin{aligned} 7x + 3y - 6z &= -1,\\ 7x + 9y - 9z &= 5,\\ 2x - 4y + 9z &= 28. \end{aligned}$$

161. $$\begin{aligned} 2x + y - 5z &= -1,\\ x + 2y - 4z &= 1,\\ x - y - z &= -2. \end{aligned}$$

162. $$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1,\\ x - 3y - 2z &= 3,\\ 2x - y + z &= -2. \end{aligned}$$

163. $$\begin{aligned} 2x - y - z &= 2,\\ 3x - y + 2z &= 5,\\ 4x - 2y - 2z &= -3. \end{aligned}$$

164. $$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -1,\\ 3x - 2y + z &= \frac{1}{3},\\ 5x - 8y + 9z &= 3. \end{aligned}$$

165. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11,\\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4,\\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11. \end{aligned}$$

166. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4,\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= -2,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -1. \end{aligned}$$

167. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,\\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

168. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31,\\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10. \end{aligned}$$

169. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6,\\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4. \end{aligned}$$

170. $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6,\\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8,\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4. \end{aligned}$$

171. $$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &=\\ &= -5,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1. \end{aligned}$$

172. $$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -5,\\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 &= -4,\\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 &= 12,\\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5. \end{aligned}$$

173. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 6,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 4,\\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 6,\\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 6. \end{aligned}$$

174. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= 12,\\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 &= 0,\\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4,\\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 16. \end{aligned}$$

175. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2,\\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2,\\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2,\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0,\\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0. \end{aligned}$$

176. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2,\\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0,\\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3,\\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &=\\ &= -2. \end{aligned}$$

177. $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &+\\ + x_5 &= 3,\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &+\\ + 5x_5 &= 13,\\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &+\\ + 4x_5 &= 10,\\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &+\\ + 3x_5 &= 11,\\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &+\\ + 2x_5 &= 6. \end{aligned}$$

178. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 &=\\ &= -3,\\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &-\\ - x_5 &= -1,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 &+\\ + 2x_5 &= 8,\\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &=\\ &= 3,\\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &+\\ + 2x_5 &= -2. \end{aligned}$$

3.2. Матричний метод розв'язування систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}\right. \qquad (1)$$

Введемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з правилом множення матриць систему (1) можна записати одним матричним рівнянням з невідомою матрицею X:

$$AX = B.$$

Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1}, то

$$X = A^{-1}B.$$

Ця формула називається *матричним записом* розв'язку системи (1). Отже, щоб розв'язати систему рівнянь (1), достатньо знайти матрицю, обернену до матриці системи A, і помножити її на матрицю з вільних членів справа.

Матричним методом розв'язати системи рівнянь.

179. $x + 2y - z = -3,$
$3x + 4y + z = 1,$
$5x + y - 3z = -2.$

180. $2x - y + z = 5,$
$3x + 4y - 2z = -3,$
$x - 3y + z = 4.$

181. $x - 2y + 3z = -5,$
$4x + 2y - 3z = 0,$
$3x - 3y + 5z = -9.$

182. $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7,$
$7x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 1,$
$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 9,$
$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6.$

183. $3x + 2y + z = 5,$
$2x - y + z = 6,$
$x + 5y = -3.$

184. $3x + z = -2,$
$x + 2y = 3,$
$-x + y + 2z = 5.$

185. $4x + y + 4z = -2,$
$x + y + 2z = -1,$
$2x + y + 2z = 0.$

186. $x - 4y = -5,$
$2x - 3y + z = -7,$
$x + 4y + 2z = -1.$

3.3. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гаусса

Нехай задано систему m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

Метод Гаусса — це метод послідовного виключення невідомих. За допомогою елементарних перетворень систему (2) приводять до системи вигляду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \cdots \qquad\qquad\qquad + \bar{a}_{1n}x_1 = \bar{b}_1, \\ \qquad \bar{a}_{2k}x_k + \cdots \qquad\qquad + \bar{a}_{2n}x_2 = \bar{b}_2, \\ \qquad\qquad \bar{a}_{3l}x_l + \cdots \qquad + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{rs}x_s + \cdots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = \bar{b}_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Таку систему рівнянь називають *східчастою* або *трапецієподібною*.

1) Якщо система (3) містить рівняння виду $0 = b_t$ і $b_t \neq 0$, то вона очевидно *несумісна*.

2) Якщо система (3) не містить рівнянь виду $0 = b_t$ ($b_t \neq 0$), то вона *має безліч розв'язків*.

Назвемо невідомі $x_1, x_k, x_l, \ldots, x_s$ *основними*, а всі інші — *вільними* (якщо вони є). Надаючи вільним невідомим довільні значення і підставляючи їх у рівняння системи, з r-го рівняння знайдемо x_s. Підставляючи це значення в перші $r - 1$ рівнянь і піднімаючись угору по системі, знайдемо всі основні невідомі. Оскільки вільні невідомі можуть набувати будь-яких значень, то система має безліч розв'язків.

3) Якщо $r = n$, то система (3) має трикутний вигляд і вільних невідомих не має. В цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Розв'язати системи лінійних рівнянь методом Гаусса.

187. $x + 2y + 3z = 5,$
$x + 3y + 4z = 6,$
$2x - y - z = 1.$

188. $x - 2y + z = 4,$
$2x - y + z = 3,$
$3x + 2y + 2z = 2.$

189. $x + y - z = -2,$
$3x - y + 2z = 9,$
$4x + 4y - 3z = -5.$

190. $2x - y + 2z = 5,$
$4x + 3y - 4z = 7,$
$4x + 8y - 12z = 3.$

191. $2x - 3y + 5z = 0,$
$8x + 2y - z = 21,$
$2x + 11y - 16z = 21.$

192. $x - y + 2z = 1,$
$-x + 2y - 3z = 3,$
$2x - y + 3z = 2.$

193. $x + y + z = 1,$
$2x + y + 2z = 1,$
$x + y + 3z = 2,$
$x + 3z = 1.$

194. $-x + y + 2z = 1,$
$x + 2y - z = 2,$
$2x + y - 3z = 1,$
$x + 5y = 5.$

195. $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1,$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3.$

196. $2x_1 + x_2 + x_3 = 2,$
$x_1 + 3x_2 + x_3 = 5,$
$x_1 + x_2 + 5x_3 = -7,$
$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14.$

197. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$
$7x_1 + 14x_2 + 20x_3 +$
$+ 27x_4 = 0,$
$5x_1 + 10x_2 + 16x_3 +$
$+ 19x_4 = -2,$
$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 +$
$+ 13x_4 = 5.$

198. $x_1 + x_2 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 4,$
$x_2 + x_3 + x_4 = -3,$
$x_3 + x_4 + x_5 = 2,$
$x_4 + x_5 = -1.$

199. $105x_1 - 175x_2 - 315x_3 +$
$+ 245x_4 = 84,$
$90x_1 - 150x_2 - 270x_3 +$
$+ 210x_4 = 72,$
$75x_1 - 125x_2 - 225x_3 +$
$+ 175x_4 = 59.$

200. $7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8,$
$-3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 =$
$= -3,$
$2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1,$
$-x_1 + x_3 + 24x_4 = 1,$
$-x_2 + x_3 + 2x_4 = 3.$

3.4. Однорідні системи лінійних рівнянь

Однорідна система m лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Ненульовий розв'язок (якщо він є) системи (4) можна знайти методом Гаусса. Якщо $m = n$ і визначник Δ системи дорівнює нулю ($\Delta = 0$), то однорідна система має безліч ненульових розв'язків.

Нехай дано систему двох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Розв'язок такої системи можна знайти за формулами

$$x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де t — довільне дійсне число.

Нехай дано систему трьох однорідних лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Якщо $\Delta = 0$, то система має безліч розв'язків. Нехай у визначнику Δ існує принаймні один відмінний від нуля мінор другого порядку, наприклад, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, тоді розв'язки можна знайти за формулами

$$x = t\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad y = -t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad z = t\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

де t — довільне дійсне число.

Якщо всі мінори другого порядку у визначнику Δ дорівнюють нулю, то система (5) зводиться до одного рівняння з трьома невідомими. Надаючи двом невідомим довільних значень, знаходять відповідне їм третє невідоме.

Розв'язати системи рівнянь.

201. $x + 2y + 3z = 0,$
$2x + y + z = 0,$
$x - y + 2z = 0.$

202. $-x + y - 2z = 0,$
$x - y + 2z = 0,$
$2x + y - z = 0.$

203. $3x + 2y - z = 0,$
$2x - y + 3z = 0,$
$x + y - z = 0.$

204. $2x - 5y + 2z = 0,$
$x + 4y - 3z = 0.$

205. $3x + 2y + 2z = 0,$
$5x + 2y + 3z = 0.$

206. $x + 2y - z = 0,$
$2x + 9y - 3z = 0.$

207. $3x + 2y + z = 0,$
$2x + 5y + 3z = 0,$
$3x + 4y + 2z = 0.$

208. $2x - 3y + z = 0,$
$x + y + z = 0,$
$3x - 2y + 2z = 0.$

209. $3x - y + 2z = 0,$
$2x + 3y - 5z = 0,$
$x + y + z = 0.$

210. $2x - y + 3z = 0,$
$x + 2y - 5z = 0,$
$3x + y - 2z = 0.$

211. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$
$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 20x_4 = 0,$
$x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0.$

212. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$
$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0,$
$x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0.$

213. $x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0,$
$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0,$
$4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 -$
$- 4x_5 = 0,$
$2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 -$
$- 7x_5 = 0.$

214. $x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0,$
$2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0,$
$x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 +$
$+ 5x_5 = 0,$
$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 =$
$= 0.$

215. Вказати всі значення параметра λ, при яких система рівнянь

$$\begin{aligned} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 &= 0 \end{aligned}$$

не визначена (тобто має більш як один розв'язок).

216. Вказати всі значення параметра λ, при яких система рівнянь

$$\begin{aligned} -4x_1 + (2+2\lambda)x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 &= 0, \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 + \lambda x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ \lambda x_1 + (1+\lambda)x_2 - 2x_3 + \lambda x_4 &= 0, \\ -\lambda x_1 - (1+\lambda)x_2 - \lambda x_3 - (2+2\lambda)x_4 &= 0 \end{aligned}$$

має єдиний розв'язок.

217. Показати, що система

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 &= 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

має безліч розв'язків, причому в кожному її розв'язку $x_4 = x_5 = 0$.

3.5. Сумісність систем лінійних рівнянь

Нехай задано систему (2) m лінійних рівнянь з n невідомими.

Розглянемо основну матрицю A і розширену матрицю A даної системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}.$$

Справедлива теорема Кронекера — Капеллі.

Теорема. *Для того щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці. Якщо $r(A) = r(\tilde{A}) = n$, то система має єдиний розв'язок. Якщо $r(A) = r(\tilde{A}) < n$, то система має безліч розв'язків.*

Дослідити сумісність і знайти розв'язок систем.

218. $x - \sqrt{3}y = 1,$
$\sqrt{3}x - 3y = \sqrt{3}.$

219. $\sqrt{5}x - 5y = \sqrt{5},$
$x - \sqrt{5}y = 5.$

220. $2x - y + z = -2,$
$x + 2y + 3z = -1,$
$x - 3y - 2z = 3.$

221. $x + 2y - 4z = 1,$
$2x + y - 5z = -1,$
$x - y - z = -2.$

222. $3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3,$
$2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3,$
$x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3,$
$x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22.$

223. $x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6,$
$3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6,$
$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7.$

224. $2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6,$
$3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4,$
$9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.$

225. $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2,$
$7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5,$
$5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3.$

226. $9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4,$
$6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8.$

227. $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2,$
$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3,$
$9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1,$
$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5,$
$7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7.$

Дослідити і розв'язати системи рівнянь залежно від значень параметра λ.

228. $\lambda x + \lambda y + (\lambda + 1) z = \lambda,$
$\lambda x + \lambda y + (\lambda - 1) z = \lambda,$
$(\lambda + 1) x + \lambda y + (2\lambda + 3) z = 1.$

229. $\lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1.$

230. $(1 + \lambda) x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + (1 + \lambda) x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + (1 + \lambda) x_3 = 1.$

231. $(3 + 2\lambda) x_1 + (1 + 3\lambda) x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1) x_4 = 3,$
$3\lambda x_1 + (3 + 2\lambda) x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1) x_4 = 1,$
$3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + 3x_3 + (\lambda - 1) x_4 = 1,$
$3\lambda x_1 + 3\lambda x_2 + \lambda x_3 + (\lambda - 1) x_4 = 1.$

Глава 2

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§ 1. ВЕКТОРИ. ЛІНІЙНІ ДІЇ НАД НИМИ

Вектором називається напрямлений відрізок. Якщо початок вектора міститься в точці A, а кінець — у точці B, то вектор позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (рис. 2.1). Вектор позначають також малою буквою латинського алфавіту із стрілочкою над нею або жирним шрифтом без стрілочки: $\vec{a}$, **c**.

Довжина вектора $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$ називається його *модулем* і позначається $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, довжина якого дорівнює 0 (тобто початок якого збігається з кінцем), називається *нульовим;* позначається $\vec{0}$.

Одиничним називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці. Одиничний вектор, який має той самий напрям, що й вектор $\vec{a}$, позначається $\vec{a}^0$.

Вектори, які лежать на паралельних прямих (або на одній і тій самій прямій), називаються *колінеарними.*

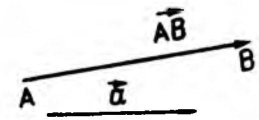


Рис. 2.1

Вектори, які лежать на паралельних площинах (або на одній і тій самій площині), називаються *компланарними.*

Вектори називаються *рівними між собою,* якщо вони колінеарні, однаково напрямлені і рівні за модулем.

Вектор, колінеарний даному вектору $\vec{a}$, рівний йому за модулем і протилежно напрямлений, називається *протилежним вектором* для вектора $\vec{a}$ і позначається $-\vec{a}$.

Радіусом-вектором точки M відносно точки O називається вектор $\overrightarrow{OM}$.

Сумою $\vec{a} + \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ називається вектор, напрямлений з початку вектора $\vec{a}$ в кінець вектора $\vec{b}$ за умови, що кінець вектора $\vec{a}$ і початок вектора $\vec{b}$ збігаються (рис. 2.2, *а*). *Сума кількох векторів* — це вектор, який замикає ламану, побудовану з даних векторів (рис. 2.2, *б*).

Різницю $\vec{a} - \vec{b}$ векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ розглядають як суму векторів $\vec{a}$ та $-\vec{b}$ (рис. 2.3).

Добутком дійсного числа α на вектор $\vec{a}$ називається вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, довжина якого $|\vec{b}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec a$ при $\alpha > 0$ і протилежний йому при $\alpha < 0$ (рис. 2.4). Якщо $\alpha = 0$, то $\alpha\vec a = \vec 0$.

Лінійною комбінацією векторів $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_k$ з дійсними коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ називається довільний вектор виду $\alpha_1\vec a_1 + \alpha_2\vec a_2 + \ldots + \alpha_k\vec a_k$. Якщо вектор поданий у вигляді лінійної комбінації деяких векторів, то кажуть, що він *розкладений за цими векторами*.

Вектори $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_k$ називаються *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, що $\alpha_1\vec a_1 + \alpha_2\vec a_2 + \ldots + \alpha_k\vec a_k = \vec 0$ і $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_k^2 = 0$. Якщо рівність $\alpha_1\vec a_1 + \alpha_2\vec a_2 + \ldots + \alpha_k\vec a_k = \vec 0$ справджується лише при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то вектори $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_k$ називаються *лінійно незалежними*.

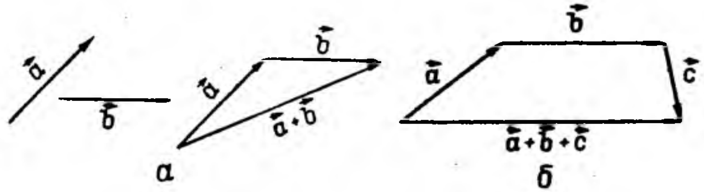


Рис. 2.2

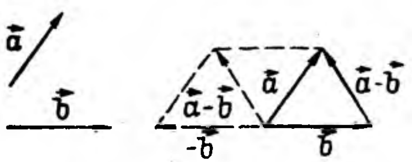


Рис. 2.3

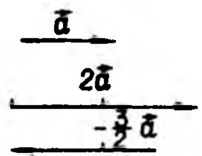


Рис. 2.4

Два колінеарні вектори — лінійно залежні, а два неколінеарні — лінійно незалежні.

Три компланарні вектори — лінійно залежні, а три некомпланарні вектори — лінійно незалежні. Чотири вектори в тривимірному просторі завжди лінійно залежні.

Базисом $\vec e_1, \vec e_2$ *векторів на площині* називається упорядкована пара лінійно незалежних (неколінеарних) векторів $\vec e_1$ і $\vec e_2$. Всякий вектор $\vec d$, компланарний векторам $\vec e_1$ і $\vec e_2$, які утворюють базис, можна подати у вигляді суми $\vec d = \alpha\vec e_1 + \beta\vec e_2$. Числа α та β називають *координатами вектора* $\vec d$ *у базисі* $\vec e_1, \vec e_2$ і пишуть $\vec d = (\alpha, \beta)$, а саму суму — розкладом вектора за цим базисом.

Базисом $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ *у просторі* називається упорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів. Довільний вектор $\vec d$ простору можна розкласти за базисом $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$: $\vec d = \alpha\vec e_1 + \beta\vec e_2 + \gamma\vec e_3$, де α, β, γ — координати вектора $\vec d$ у цьому базисі: $\vec d = (\alpha, \beta, \gamma)$.

1. За даними векторами $\vec a$ і $\vec b$ побудувати кожний з таких векторів: 1) $\vec a + \vec b$; 2) $\vec a - \vec b$; 3) $\vec b - \vec a$; 4) $-\vec a - \vec b$.

2. На трьох некомпланарних векторах $\vec{OA} = \vec a$, $\vec{OB} = \vec b$ і $\vec{OC} = \vec c$ побудовано паралелепіпед. Вказати ті його вектори-діагоналі, які відповідно рівні $\vec a + \vec b - \vec c$, $\vec a - \vec b + \vec c$, $\vec a - \vec b - \vec c$ і $\vec b - \vec a - \vec c$.

3. Дано: $|\vec a| = 13$, $|\vec b| = 19$ і $|\vec a + \vec b| = 24$. Обчислити $|\vec a - \vec b|$.

4. Дано: $|\vec a| = 11$, $|\vec b| = 23$ і $|\vec a - \vec b| = 30$. Визначити $|\vec a + \vec b|$.

5. Визначити $|\vec a + \vec b|$ і $|\vec a - \vec b|$, якщо вектори $\vec a$ і $\vec b$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec a| = 5$ і $|\vec b| = 12$.

6. Вектори $\vec a$ і $\vec b$ утворюють кут $\varphi = 60°$, $|\vec a| = 5$, $|\vec b| = 8$. Знайти $|\vec a + \vec b|$ і $|\vec a - \vec b|$.

7. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec a$ і $\vec b$, щоб справджувалось одне з таких співвідношень: 1) $|\vec a + \vec b| = |\vec a - \vec b|$; 2) $|\vec a + \vec b| > |\vec a - \vec b|$; 3) $|\vec a + \vec b| < |\vec a - \vec b|$?

8. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec a$ і $\vec b$, щоб вектор $\vec a + \vec b$ ділив пополам кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$?

9. У трикутнику ABC проведено медіани AD, BM, CN. Довести рівність $\vec{AD} + \vec{BM} + \vec{CN} = \vec 0$.

10. У паралелограмі $ABCD$ позначено сторони $\vec{AB} = \vec a$, $\vec{AD} = \vec b$; M — точка перетину діагоналей. Довести, що вектори $\vec a$, $\vec b$ утворюють базис, і виразити вектори $\vec{MA}$, $\vec{MB}$, $\vec{MC}$ і $\vec{MD}$ у цьому базисі.

11. Три сили $\vec F_1$, $\vec F_2$ і $\vec F_3$ прикладені в одній точці і мають взаємно перпендикулярні напрями. Визначити модуль їх рівнодійної, якщо $|\vec F_1| = 10$Н, $|\vec F_2| = 11$Н, $|\vec F_3| = 2$Н.

12. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec a$ і $\vec b$, перевірити на рисунку справедливість тотожностей:

1) $(\vec a + \vec b) + (\vec a - \vec b) = 2\vec a$; 2) $(\vec a + \vec b) - (\vec a - \vec b) = 2\vec b$;

3) $\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$; 4) $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

5) $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

13. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. Через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виразити вектори, що збігаються з медіанами трикутника $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{CP}$.

14. У трикутнику з попередньої задачі виразити всі вектори-медіани за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$

15. Сторона BC трикутника ABC поділена на п'ять рівних частин, і всі точки поділу D_1, D_2, D_3, D_4 сполучені з протилежною вершиною A. Довести, що вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ і $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ утворюють базис і знайти вирази для векторів $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$, $\overrightarrow{D_4A}$ у цьому базисі.

16. Знаючи радіуси-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трьох послідовних вершин паралелограма, знайти радіус-вектор $\vec{r}_4$ четвертої його вершини.

17. Знаючи радіуси-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_1'$ чотирьох вершин A, B, C, A_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, знайти радіуси-вектори чотирьох останніх його вершин.

18. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{n}$. Розкласти по цих двох векторах вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{EF}$.

19. У ромбі $ABCD$ дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти по цих векторах усі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

20. У рівнобічній трапеції $ABCD$ відома нижня основа $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, бічна сторона $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ і кут між ними $\angle A = \frac{\pi}{3}$. Розкласти за базисом $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ усі вектори, що складають решту сторін і діагоналі трапеції.

21. У трикутнику ABC сторона BC поділена точкою D у відношенні $m : n$, тобто $\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{m}{n}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ по векторах $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

22. Вантаж вагою $\vec{P}$, підвішений на нитці до нерухомої точки затримується горизонтальною силою $\vec{Q}$ у положенні, при якому нитка утворює з вертикаллю кут 45°. Знайти величину горизонтальної сили $\vec{Q}$ і величину натягу нитки $\vec{T}$.

23. Вершина D паралелограма $ABCD$ сполучена з точкою K, що лежить на стороні BC, такою, що $BK : KC = 2 : 3$. Вершина B сполучена з точкою L, що лежить на стороні CD, такою, що $CL : LD = 5 : 3$. В якому відношенні точка M перетину прямих DK і BL поділяє відрізки DK і BL?

24. У тетраедрі $ABCD$ точки K і L — відповідно середини ребер AC і BD, O — точка перетину медіан грані ACD. Знайти: 1) координати вектора $\overrightarrow{BO}$ в базисі $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) координати вектора KL у базисі $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$.

§ 2. СИСТЕМИ КООРДИНАТ

Якщо в просторі зафіксовано точку O і базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то кажуть, що в просторі задано *декартову систему координат* $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точку O називають *початком координат*, а прямі Ox, Oy, Oz, які проходять через початок координат і відповідно паралельні векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,— *осями координат (віссю абсцис, віссю ординат, віссю аплікат)*.

Координатами точки M *у базисі* $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ називають координати радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ у цьому базисі.

Якщо базисні вектори одиничні і взаємно перпендикулярні, то такий базис називають *ортонормованим* і позначають $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а відповідну цьому базису систему координат $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — *прямокутною*. Надалі, *якщо не зроблено окремого застереження, то розглядатимемо лише ортонормовані базиси і прямокутні системи координат.*

Перетворення декартових прямокутних координат на площині при паралельному перенесенні осей (рис. 2.5) визначають формулами

$$X = x - a; \quad Y = y - b,$$

де x, y — старі координати довільної точки; X, Y — нові координати тієї самої точки; a, b — координати нового початку координат відносно старих осей.

Формули *перетворення координат точок площини при повороті осей* (рис. 2.6) на кут α такі:

$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Узагальненням прямолінійних (декартових) систем координат є криволінійні системи, зокрема, полярна, циліндрична та сферична. Зв'язок між полярними (ρ і φ) та прямокутними (x і y) координатами точки M площини Oxy (рис. 2.7) виражається формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi \; (0 \leqslant \rho < \infty, \; 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

Залежності між прямокутними $(x,\ y,\ z)$ і циліндричними $(\rho,\ \varphi,\ z)$ координатами точки у просторі (рис. 2.8) виражаються формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z\ \ (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$
$$-\infty < z < +\infty).$$

Прямокутні $(x;\ y;\ z)$ *і сферичні* $(\rho;\ \varphi;\ \theta)$ *координати точки* M (рис. 2.9) об'єднані формулами

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \rho\cos\theta\ \ (0 \leqslant \rho < +\infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi).$$

25. На координатній прямій Ox побудувати точки $A_1\ (4)$, $A_2\ (-1)$.

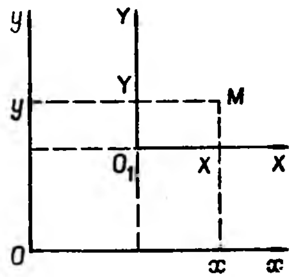


Рис. 2.5

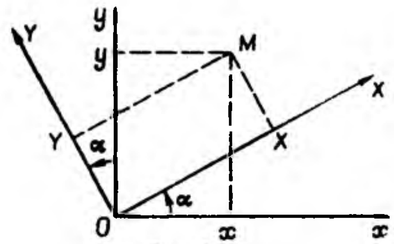


Рис. 2.6

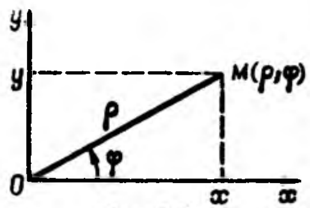


Рис. 2.7

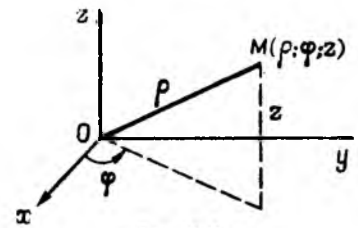


Рис. 2.8

26. У прямокутній системі координат Oxy побудувати точки $B_1\ (2;\ 1)$, $B_2\ (1;\ -3)$, $B_3\ (0;\ -2)$.

27. У прямокутній системі координат $Oxyz$ побудувати точки $C_1\ (2;\ 3;\ 3)$, $C_2\ (1;\ -2;\ 3)$, $C_3\ (-1;\ 2;\ 0)$.

28. Для точки $M\ (2;\ 3)$ побудувати точки, симетричні їй відносно осей Ox та Oy і відносно початку координат. Визначити координати цих точок.

29. Знайти координати точок, симетричних відносно бісектриси першого координатного кута для точок: 1) $A\ (3;\ 4)$; 2) $B\ (2;\ -5)$; 3) $C\ (-3;\ 4)$.

30. Сторона квадрата дорівнює 1. Визначити координати його вершин, прийнявши за осі координат дві його діагоналі.

31. Визначити, в яких чвертях може бути розміщена точка $M\ (x;\ y)$, якщо: 1) $xy > 0$; 2) $xy < 0$; 3) $x - y = 0$; 4) $x + y = 0$.

32. Написати формули перетворення координат, якщо початок координат (без зміни напряму осей) перенесено в точку: 1) $A\ (3;\ 4)$; 2) $B\ (-2;\ 1)$; 3) $C\ (-3;\ 5)$.

33. Початок координат перенесено (без зміни напряму осей) в точку $O'(3;\ -4)$. Координати точок $A\ (1;\ 3)$, $B\ (-3;\ 0)$ і $C\ (-1;\ 4)$ визначено в новій системі. Обчислити координати цих самих точок у старій системі координат.

34. У деякій прямокутній системі координат задано точку $A\ (7;\ -5)$. Обчислити координати цієї самої точки при умові, що початок координат перенесено в точку $O_1\ (-4;\ 7)$.

35. Знайти відстань між двома точками, які мають однакові координати ($x = 1$ і $y = 2$) відносно двох різних прямокутних систем координат, причому нова система утворюється зі старої перенесенням початку координат у точку $O'\ (3,\ 4)$ без зміни напряму осей.

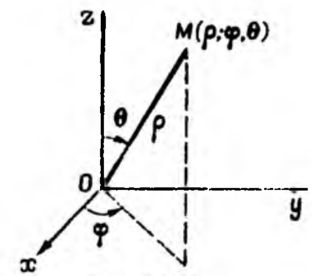


Рис. 2.9

36. Дано точки $A\ (2;\ 1)$, $B\ (-1;\ 3)$ і $C\ (-2;\ 5)$. Знайти їхні координати в новій системі, якщо початок координат перенесено (без зміни напряму осей) у точку B.

37. Осі координат повернуто на кут $\alpha = 60°$. Координати точок $A\ (2\sqrt{3};\ -4)$; $B\ (\sqrt{3};\ 0)$ і $C\ (0;\ -2\sqrt{3})$ визначено в новій системі. Обчислити координати цих самих точок у старій системі координат.

38. У прямокутній декартовій системі координат дано точки $A\left(\sqrt{8};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $M\ (x;\ y)$. Знайти координати цих самих точок при умові, що осі координат замінено бісектрисами координатних кутів.

39. Початок координат перенесено в точку $O'(-1;\ 2)$, осі координат повернуто на кут $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$. Координати точок $M_1\ (3;\ 2)$, $M_2\ (2;\ -3)$ і $M_3\ (13;\ -13)$ визначено в новій системі. Обчислити координати цих самих точок у старій системі.

40. Дано квадрат $ABCD$, сторона якого $a = 1$. За осі координат вибрано один раз сторони AB і AD, а іншим разом — діагоналі AC і BD. Знайти залежність між координатами однієї і тієї самої точки відносно цих двох систем координат.

41. Побудувати точки, задані полярними координатами $A_1\left(2;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $A_3 = \left(3;\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

42. Знайти відстань між двома заданими в полярних координатах точками:

1) $A\left(2; \frac{\pi}{12}\right)$ і $B\left(1; \frac{5\pi}{12}\right)$; 2) $A\left(4; \frac{\pi}{5}\right)$ і $B\left(6; \frac{6\pi}{5}\right)$;

3) $A\left(3; \frac{11\pi}{18}\right)$ і $B\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$.

43. Як розміщені точки, полярні координати яких задовольняють одне з таких рівнянь: 1) $\rho = 1$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$?

44. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5; 0)$, $M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8; \frac{2}{3}\pi\right)$, $M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right)$. Знайти декартові координати цих точок.

45. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь збігається з додатною піввіссю абсцис. У декартовій прямокутній системі координат дано точки $M_1(0; 5)$, $M_2(-3; 0)$, $M_3(\sqrt{3}; 1)$, $M_4(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $M_5(1; -\sqrt{3})$. Визначити полярні координати цих точок.

46. Знайти полярні координати точок, симетричних з точками $\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(3; \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; -\frac{\pi}{6}\right)$, $M(\rho; \varphi)$:

1) відносно полюса; 2) відносно полярної осі.

47. Побудувати точки, циліндричні координати яких мають значення: $A_1\left(3; \frac{\pi}{6}; 1\right)$, $A_2\left(0{,}5; \frac{\pi}{2}; 2\right.$, $A_3(6; \pi; -1)$.

48. Знайти декартові прямокутні координати точок, заданих у циліндричних координатах: $A\left(2; \frac{\pi}{3}; -1\right)$, $B\left(\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi; 2\right)$, $C\left(5; \frac{\pi}{2}; 3\right)$. При цьому вісь абсцис збігається з полярною віссю, а початок координат — з полюсом.

49. Знаючи прямокутні координати точок $A(-1; 1; 2)$, $B(0; 2; 3)$, $C(5; 0; 1)$, знайти їхні циліндричні координати.

50. Знайти декартові прямокутні координати точки $M\left(2; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$, заданої сферичними координатами.

51. Знайти сферичні координати точок за їхніми прямокутними координатами: $A(-8; -4; 1)$, $B(-2; -2; -1)$, $C(0; -4; 3)$, $D(1; -1; -1)$, $E(0; 1; 0)$.

52. Знайти довжину меншої з двох дуг великого кола, яка сполучає дві точки A і B, що лежать на кулі радіуса r, знаючи широту і довготу цих точок: $A(\varphi_1; \theta_1)$, $B(\varphi_2; \theta_2)$.

§ 3. ВЕКТОРИ В СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Якщо точка $A(x_1; y_1; z_1)$ є початком вектора $\vec{a}$, а точка $B(x_2; y_2; z_2)$ — його кінцем, то координати a_x, a_y, a_z вектора знаходять за формулами

$$a_x = x_2 - x_1; \quad a_y = y_2 - y_1; \quad a_z = z_2 - z_1.$$

Довжину $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і його напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{Ox, \vec{a}}), \quad \cos\beta = \cos(\widehat{Oy, \vec{a}}), \quad \cos\gamma = \cos(\widehat{Oz, \vec{a}})$$

визначають за формулами

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

звідки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\gamma + \cos^2\beta = 1.$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ збігаються з координатами його орта $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $\text{пр}_{\vec{e}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ колінеарні, якщо

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Лінійні дії над векторами зводять до відповідних арифметичних дій над їхніми координатами.

Якщо точка $C(x; y; z)$ належить прямій AB і ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}$, то координати x, y, z точки C визначають за формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

У векторній формі дані формули запишуться у вигляді

$$\vec{r}_C = \frac{\vec{r}_A + \lambda \vec{r}_B}{1 + \lambda},$$

де $\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$, $\vec{r}_C$ — радіуси-вектори точок A, B, C. Зокрема, якщо C — середина відрізка AB, то в цих формулах слід покласти $\lambda = 1$.

53. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхню довжину:
1) $A(5; -1; 2)$; $B(1; 2; 1)$; 2) $A(4; -5; 2)$; $B(2; -3; 1)$;

3) $A\ (7;\ 3;\ -2)$; $B\ (4;\ 3;\ 2)$; 4) $A\ (3;\ -2;\ 2)$; $B\ (-1;\ 0;\ 2)$;
5) $A\ (-1;\ 0;\ 5)$; $B\ (1;\ 2;\ 0)$; 6) $A\ (6;\ -3;\ 0)$; $B\ (0;\ 0;\ 5)$.

54. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = (3;\ -1;\ 4)$, якщо його початок збігається з точкою $M\ (1;\ 2;\ -3)$.

55. Визначити початок вектора $\vec{a} = (2;\ -3;\ -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1;\ -1;\ 2)$.

56. Обчислити модуль вектора $\vec{a} = (3;\ -6;\ 2)$.

57. Дано дві координати вектора $a_x = 4$, $a_y = -12$. Визначити його третю координату a_z, якщо $|\vec{a}| = 13$.

58. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, і його довжина:

1) $|\vec{a}| = 4,\ \alpha = 45°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 120°$;
2) $|\vec{a}| = 4,\ \alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 60°$;
3) $|\vec{a}| = 8,\ \alpha = 135°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 60°$;
4) $|\vec{a}| = 2,\ \alpha = 120°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 120°$;
5) $|\vec{a}| = 6,\ \alpha = 120°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 45°$.

59. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12;\ -15;\ -16)$.

60. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A\ (2;\ 3;\ 4)$, $B\ (3;\ 5;\ 6)$.

61. Два промені, що виходять з початку координат, утворюють з осями координат кути α_1, β_1, γ_1 і α_2, β_2, γ_2. Знайти напрямні косинуси бісектриси кута між цими променями.

62. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:
1) $\alpha = 60°,\ \beta = 120°,\ \gamma = 45°$; 2) $\alpha = 45°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 135°$;
3) $\alpha = 60°,\ \beta = 45°,\ \gamma = 30°$; 4) $\alpha = 120°,\ \beta = 60°,\ \gamma = 150°$?

63. Чи може вектор утворювати з двома координатними осями кути:
1) $\alpha = 45°,\ \beta = 30°$; 2) $\alpha = 150°,\ \beta = 90°$;
3) $\alpha = 60°,\ \beta = 45°$; 4) $\alpha = 120°,\ \beta = 30°$?

64. Довести, що коли площина відтинає на осях координат відрізки довжинами a, b, c, то довжина перпендикуляра p, опущеного на цю площину з початку координат, задовольняє співвідношення

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}.$$

65. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}| = 2$.

66. Визначити координати точки M, якщо її радіус-вектор утворює з координатними осями однакові кути і його модуль дорівнює $3\sqrt{3}$.

67. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$, якщо задано вектор $\vec{a}$ і кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{e}})$ між векторами:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k},\ \varphi = 60°$; 2) $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k},\ \varphi = 0°$;
3) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -3),\ \varphi = 120°$; 4) $\vec{a} = (0;\ 3;\ -4),\ \varphi = 150°$.

68. Задано проекції X, Y, Z сили $\vec{F}$ на координатні осі. Знайти величину сили і напрям її дії, якщо:
1) $X = 5,\ Y = 5\sqrt{2},\ Z = -5$; 2) $X = -3\sqrt{2},\ Y = 3,\ Z = 3$;
3) $X = 2,\ Y = 2,\ Z = -1$; 4) $X = -3,\ Y = 4,\ Z = 0$.

69. Дано два вектори: $\vec{a} = (4;\ -1;\ 7)$ і $\vec{b} = (-1;\ 2;\ 1)$. Знайти проекції на координатні осі векторів: 1) $\vec{a} - \vec{b}$; 2) $\vec{a} + 3\vec{b}$; 3) $3(-2\vec{a} + \vec{b}) - 2\vec{b}$; 4) $-\vec{a} - 2\vec{b} + 5(\vec{a} + \vec{b})$.

70. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1)$ і $\vec{b} = (-9;\ 6;\ -3)$ і встановити, який з них довший за інший і в скільки разів.

71. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a} = (-6;\ \beta;\ 2)$ і $\vec{b} = (\alpha;\ 4;\ -1)$ колінеарні.

72. Дано точки $A\ (5;\ 0;\ 2)$, $B\ (-3;\ 3;\ -1)$, $C\ (1;\ 2;\ -3)$, $D\ (5;\ -4;\ 3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

73. Дано точки $A\ (-1;\ 5;\ -10)$, $B\ (5;\ -7;\ 8)$, $C\ (2;\ 2;\ -7)$, $D\ (5;\ -4;\ 2)$. Перевірити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, і встановити, який з них довший від іншого і в скільки разів, як вони напрямлені — в один бік чи в протилежні.

74. Знайти орт вектора $\vec{a} = (6;\ -2;\ -3)$.

75. Визначити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = (3;\ -5;\ 8)$ і $\vec{b} = (-1;\ 1;\ -4)$.

76. Два вектори $\vec{a} = (2;\ -3;\ 6)$ і $\vec{b} = (-1;\ 2;\ -2)$ виходять з однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрис кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.

77. Вектори $\overrightarrow{AB} = (2;\ 6;\ -4)$ і $\overrightarrow{AC} = (4;\ 2;\ -2)$ збігаються зі сторонами трикутника ABC. Визначити координати векторів — медіан $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

78. Кінці однорідного стержня розміщено в точках $A\ (4;\ -4)$ і $B\ (0;\ 2)$. Визначити координати його центра мас. (*Вказівка*: див. задачу 103).

79. Центр мас однорідного стержня PQ лежить у точці $M\ (2;\ 4)$, а один з його кінців — у точці $P\ (-1;\ 2)$. Визначити координати точки Q другого кінця цього стержня.

80. Дано вершини трикутника $A\ (3;\ -7)$, $B\ (5;\ 2)$ і $C\ (-1;\ 0)$. Знайти середини його сторін.

81. Знайти довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A\ (3;\ -2)$, $B\ (5;\ 2)$ і $C\ (-1;\ 4)$.

82. Дано дві точки: A (2; —1), B (1; 1). Знайти координати точки N, що симетрична точці B відносно точки A.

83. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін M (1; —1), N (—2; 4) і P (—3; 2).

84. Знайти вершини трикутника, якщо середини його сторін P (3; —2), Q (1; 6) і R (—4; 2).

85. Дано три вершини паралелограма: A (4; —4), B (6; —2) і C (0; 4). Визначити четверту вершину D, яка протилежна до B.

86. Дано три вершини паралелограма: A (3; 1), B (4; 6) і C (—4; 3). Знайти четверту вершину D, яка протилежна до B.

87. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A\left(-4\frac{1}{2}; -7\right)$ і B (2; 6) і точку перетину діагоналей $M\left(3; 1\frac{1}{2}\right)$. Знайти координати двох інших його вершин.

88. Дано дві суміжні вершини паралелограма A (—2; 5), B (2; 7) і точку перетину його діагоналей M (2; 1). Визначити дві інші його вершини.

89. Знаючи координати вершин трикутника A (2; 4), B (4; —9), C (—4; 2), знайти довжину медіани, проведеної з вершини B.

90. Відрізок, обмежений точками A (2; —2), B (5; 4), поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

91. На промені, що виходить з початку координат і проходить через точку P (4; 3), знайти точку D, відстань якої від початку координат дорівнює 9.

92. Пряма лінія відтинає на осі абсцис відрізок OA, довжина якого 4, і на осі ординат відрізок OB, довжина якого 7. Знайти координати основи перпендикуляра, опущеного з початку координат на дану пряму.

93. Дано вершини трикутника A (3; —4), B (2; —1), C (5; 8). Знайти точку перетину бісектриси внутрішнього кута B із стороною AC.

94. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами A (4; —5), B (—2; 3) і C (0; —2).

95. Знайти точку перетину спільних дотичних двох кіл, центри яких збігаються з точками C_1 (2; 5) і $C_2\left(7\frac{1}{3}; 10\frac{1}{3}\right)$, а радіуси відповідно дорівнюють 3 і 7.

96. Знайти точку перетину прямої, що проходить через точки A (5; 2) і B (—1; 5), з віссю абсцис.

97. На прямій, що сполучає точки C (—3; 5) і D (—1; 2), знайти точку, абсциса якої дорівнює 5.

98. Дано три точки A (2; —1), B (4; 3) і C (5; 5), що лежать на одній прямій. Визначити відношення λ, в якому кожна з них поділяє відрізок, обмежений двома іншими.

99. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками P (2; 2) і Q (1; 5) поділений на три рівні частини.

100. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника з вершинами A (2; —2), B (2; 5), C (—1; 4), D (—2; —1).

101. Знайти центр мас однорідної трикутної пластини з вершинами A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ і C $(x_3; y_3)$.

102. У трьох точках $A\left(6; 1\frac{1}{2}\right)$, B (5; 7) і C (1; 4) розміщено маси відповідно по 6, 10 і 4 одиниці. Знайти центр мас цієї системи.

103. У точках M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$, ..., M_n $(x_n; y_n)$ зосереджено відповідно маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Довести, що координати центра мас такої системи визначаються формулами

$$x_C = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 \cdots + m_n}, \quad y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}.$$

104. У трьох точках A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ і C $(x_3; y_3)$ зосереджено однакові маси. Знайти центр мас цієї системи.

105. Знайти центр мас трикутника з однорідного дроту з вершинами A (5; 3), B (8; —1) і C (2; 7).

106. Знайти центр мас трикутника з однорідного дроту з вершинами A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ і C $(x_3; y_3)$.

107. Однорідний дріт зігнуто у вигляді прямого кута зі сторонами m і n. Знайти центр мас такої системи.

108. Послідовні вершини суцільної однорідної чотирикутної пластини A (—1; 1), B (2; 5), C (5; 6) і D (5; —1). Знайти координати її центра мас.

109. Точка M перетину медіан трикутника лежить на осі ординат, дві вершини трикутника мають координати A (1; —5), B (—3; 2), третя вершина C лежить на осі абсцис. Визначити координати точок M і C.

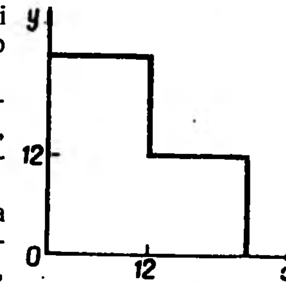


Рис. 2.10

110. Дано вершини однорідної трикутної пластини A $(x_1; y_1)$, B $(x_2; y_2)$ і C $(x_3; y_3)$. Якщо сполучити середини сторін, то утвориться нова однорідна трикутна пластина. Довести, що центри мас обох пластин збігаються.

111. Однорідна пластина має форму квадрата, сторона якого дорівнює 12. У пластині зроблено квадратний виріз, сторони якого проходять через центр квадрата, осі координат напрямлено вздовж ребер пластини (рис. 2.10). Знайти центр мас цієї пластини.

§ 4. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\varphi.$$

Скалярний добуток позначають також $(\vec{a}, \vec{b})$ і $\overleftrightarrow{ab}$.

Геометричні властивості скалярного добутку.

1) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (умова перпендикулярності векторів);

2) $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$;

3) $\frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$;

4) $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$.

Алгебраїчні властивості скалярного добутку.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; 2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

3) $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$; 4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Якщо вектори задано своїми координатами $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

а кут φ між векторами знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

112. Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, довжини векторів $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$. Обчислити: 1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; 2) $\vec{a}^2$; 3) $(\vec{a} + \vec{b})^2$; 4) $(3\vec{b} - 2\vec{a}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{a})$.

113. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з ними кути по $\frac{\pi}{3}$; $|\vec{a}| = 3$; $|\vec{b}| = 5$; $|\vec{c}| = 8$. Обчислити: 1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 3\vec{c})$; 2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2$.

114. Обчислити скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

115. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 6\vec{m} - 8\vec{n}$, якщо $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

116. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 6$ і $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\pi}{4}$.

117. До однієї точки прикладено дві сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$, що діють під кутом 120°, причому $|\vec{F_1}| = 7$, $|\vec{F_2}| = 4$. Знайти величину рівнодійної сили $\vec{R}$.

118. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60°. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$ і $|\vec{c}| = 6$, визначити модуль вектора $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

119. Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ будуть взаємно перпендикулярними?

120. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ був перпендикулярним до вектора $\vec{a} - \vec{b}$?

121. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

122. До вершини куба прикладено сили, які дорівнюють 1, 2, 3 та напрямлені по діагоналях граней куба, що проходять через цю вершину. Знайти величину рівнодійної $\vec{R}$ цих сил

123. Знайти кут між бісектрисами двох координатних кутів площин Oxy та Oxz.

Вказівка. Одиничні вектори бісектрис розкласти за координатним базисом і знайти їх скалярний добуток.

124. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$; $|\vec{a}| = \sqrt{3}$; $|\vec{b}| = 1$. Обчислити кут α між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

125. У прямокутному рівнобедреному трикутнику проведено медіани з вершин гострих кутів. Обчислити тупий кут між ними.

126. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, що виходять з однієї вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

127. Дано вектори $\vec{c} = (2;\ -1;\ -2)$, $\vec{d} = (12;\ -6;\ 4)$. Обчислити: 1) $\vec{c} \cdot \vec{d}$; 2) $\sqrt{\vec{c}^2}$; 3) $(\vec{c} + \vec{d})^2$; 4) $(2\vec{c} - 3\vec{d})(\vec{d} - \vec{c})$.

128. Дано точки A (0; 4; —6), B (3; 0; 6) і C (1; 2; —4). Обчислити: 1) $(2\vec{BC} + \vec{BA}) \cdot (2\vec{AB} - \vec{CB})$; 2) $\sqrt{\vec{CA}^2}$; 3) координати вектора $\vec{BC}$ $(\vec{AC} \cdot \vec{AB})$.

129. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F} = (2;\ 3;\ -5)$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{S} = (-7;\ 2;\ -5)$.

130. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F} = (6;\ -4;\ -10)$, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки A (3; —2; 6) у точку B (4; —1; 0).

131. Дано три сили $\vec{F_1} = (2; 3; 5)$, $\vec{F_2} = (4; -3; 2)$, $\vec{F_3} = (1; -4; -2)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка прикладання, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки A (4; 2; —8) у точку B (3; —2; —5).

132. Проекції переміщення рухомої точки на осі координат дорівнюють $S_x = 2$ м, $S_y = 1$ м, $S_z = -2$ м. Проекції діючої сили $\vec{F}$ на осі координат відповідно дорівнюють $F_x = 5$ Н, $F_y = 4$ Н і $F_z = 3$ Н. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ і кут між $\vec{F}$ і переміщенням $\vec{S}$.

133. Дано вершини чотирикутника A (2; —1; 2), B (2; 5; 0), C (—3, 2; 1) і D (—4; —4; 3). Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

134. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

135. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1; -2; 2)$, $\vec{b} = (-6; 4; 12)$; 2) $\vec{a} = (4; -10; 1)$, $\vec{b} = (11; -8; -7)$; 3) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$;

4) $\vec{a} = 5\vec{i} + 6\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} - 5\vec{j}$; 5) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 12\vec{j}$.

136. Дано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти вектор $\vec{c}$, що є ортогональною проекцією вектора $\vec{b}$ на пряму, напрям якої визначається вектором $\vec{a}$.

137. Дано точки A (1; 0; 0), B (0; 0; 2) і C (1; 0; 1). Побудувати вектори $\vec{AC}$ і $\vec{AB}$ і знайти кут між ними.

138. Дано вершини трикутника A (0; —1; 4), B (—3; —1; 0) і C (4; —2; 1). Визначити його внутрішній кут при вершині B.

139. Дано вершини трикутника A (4; 3; —2), B (6; 2; 0) і C (2; —1; 2). Визначити його зовнішній кут при вершині A.

140. На площині дано трикутник з вершинами C (1; 1), A (3; 1) і B (2; 0). Знайти кут, утворений стороною CB і медіаною CM цього трикутника.

141. Обчисливши внутрішні кути трикутника з вершинами A (2; 3; 1), B (4; 0; 7), C (8; 5; —2), переконатись, що цей трикутник рівнобедрений.

142. З вершини квадрата проведено прямі, що ділять протилежні сторони пополам. Знайти кут між цими прямими.

143. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$, $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

144. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (2; 1, -1)$ і задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$.

145. Знайти вектор $\vec{x}$, якщо він перпендикулярний до векторів

$\vec{a} = (2; 3; -1)$ і $\vec{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $\vec{x}\,(2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

146. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 2)$ і $\vec{b} = (18; -22; -5)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}| = 14$.

147. Дано два вектори: $\vec{a} = (3; -1; 5)$ і $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Знайти вектор x при умові, що він перпендикулярний до осі Oz і задовольняє умову $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$.

148. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} = (5; 2; 5)$, $\vec{b} = (2; -1; 2)$; 2) $\vec{a} = (0; 3; -4)$, $\vec{b} = (6; 4; 3)$;

3) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-3; 0; 4)$; 4) $\vec{a} = (-3; -2; 0)$, $\vec{b} = (1; 2; 2)$.

149. Дано точки A (4; 4; —1), B (1; —2; 5), C (1; —2; 1) і D (1; 3; —3). Побудувати вектори $\vec{AB}$ і $\vec{CD}$ і знайти $\text{пр}_{\vec{AB}}\vec{CD}$.

150. Дано три вектори: $\vec{a} = (3; -6; 21)$, $\vec{b} = (1; 4; -5)$ і $\vec{c} = (3; -4; 12)$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\,(\vec{a} + \vec{b})$.

151. Дано точки A (—1; 3; —3), B (4; 3; 6), C (2; 0; 3), D (4; 3; —3). Обчислити $\text{пр}_{\vec{CD}}\vec{AB}$.

152. Дано дві точки: M (—6; 6; —7) і N (6; —10; 8). Обчислити проекцію вектора $\vec{S} = (2; -6; 2)$ на вісь вектора $\vec{MN}$.

153. Дано три вектори: $\vec{a} = (6; -12; -2)$, $\vec{b} = (2; 8; -10)$, $\vec{c} = (3; -4; 12)$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\,(\vec{a} + \vec{b})$.

154. Дано три вектори: $\vec{a} = (2; -6; 8)$, $\vec{b} = (3, -4; 2)$ і $\vec{c} = (-1; 1; 4)$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

155. Дано три вектори: $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j}$ і $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Обчислити $\text{пр}_{\vec{c}}\,(3\vec{a} - 2\vec{b})$.

156. Знайти проекцію вектора $\vec{s} = (\sqrt{2}; -3; -3)$ на вісь, що утворює з координатними осями Ox, Oz кути $\alpha = 45°$, $\gamma = 60°$, а з віссю Oy — гострий кут β.

157. Дано дві точки: A (4; —3; —1), B (3; 6; —1). Знайти проекцію вектора AB на вісь, що утворює з координатними осями Ox, Oy кути $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$, а з віссю Oz — тупий кут γ.

158. Знайти проекцію вектора $\vec{s} = (4; -3; 2)$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути.

159. Задано дві точки: A (0; 4; 3) і B (2; —1; 2). Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, яка утворює з координатними осями рівні тупі кути.

160. Силу $\vec{R} = (1; -8; -7)$ розкладено по трьох напрямах, один з яких задано вектором $\vec{a} = (2; 2; 1)$. Знайти складову сили $\vec{R}$ у напрямі вектора $\vec{a}$.

§ 5. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який позначається символом $\vec{a} \times \vec{b}$ і задовольняє такі три умови:

1) довжина вектора $\vec{a} \times \vec{b}$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi$, де $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$;

2) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярний кожному з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ має такий напрям, що при спостереженні з його кінця найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ виконується проти годинникової стрілки (рис. 2.11).

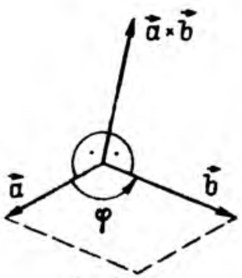


Рис. 2.11

Векторний добуток позначають також $[\vec{a}, \vec{b}]$ і $[\vec{a}\vec{b}]$.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$ (умова колінеарності векторів);

2) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$;

3) $\alpha\vec{a} \times \vec{b} = \alpha\vec{a} \times \vec{b}$;

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Якщо вектори задано їхніми координатами: $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

161. Знайти модуль векторного добутку $|\vec{a} \times \vec{b}|$, якщо:

1) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{3}$;

2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$;

3) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{2\pi}{3}$;

4) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{5\pi}{6}$.

162. Знайти векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$:

1) $\vec{a} = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 7\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$;

3) $\vec{a} = (1;\ 2;\ -2)$, $\vec{b} = (8;\ 6;\ 4)$;

4) $\vec{a} = (1;\ -5;\ 3)$, $\vec{b} = (0;\ -1;\ -3)$.

163. Позначивши через α кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, виразити $\operatorname{tg}\alpha$ через векторний і скалярний добуток цих векторів.

164. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ і $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

165. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$ і $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$. Обчислити $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

166. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчислити $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

167. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{2}{3}\pi$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити: 1) $(\vec{a} \times \vec{b})^2$; 2) $((\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b}))^2$.

168. Довести тотожність $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2\vec{b}^2$.

169. Довести, що при будь-яких векторах $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ вектори $\vec{a} \times \vec{p}$, $\vec{a} \times \vec{q}$ і $\vec{a} \times \vec{r}$ компланарні.

170. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$. Довести, що $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

171. Дано вектори $\vec{a} = (3; -1; 2)$ і $\vec{b} = (1; 2; -1)$. Знайти координати векторів: 1) $\vec{a} \times \vec{b}$; 2) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (2\vec{a} - \vec{b})$.

172. Дано точки A (4; 1; 4), B (3; 4; 1), C (5; 4; 3). Знайти координати векторних добутків: 1) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$; 2) $(\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}) \times \overrightarrow{CB}$.

173. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$;

2) $\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 10\vec{k}$;

3) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (0;\ -5;\ 6)$;

4) $\vec{a} = (-5;\ -6;\ 1)$, $\vec{b} = (3;\ 7;\ 0)$.

174. Обчислити площу трикутника ABC, заданого вершинами A, B і C, якщо:
1) $A\ (4;\ 2;\ 3)$, $B\ (5;\ 1;\ 2)$, $C\ (6;\ 5;\ 8)$;
2) $A\ (-1;\ -1;\ -1)$, $B\ (0;\ 1;\ 2)$, $C\ (2;\ 1;\ 0)$;
3) $A\ (1;\ 2;\ 3)$, $B\ (-1;\ 3;\ 0)$, $C\ (-2;\ -3;\ -5)$;
4) $A\ (0;\ -1;\ 3)$, $B\ (-5;\ 0;\ 4)$, $C\ (1;\ 4;\ 3)$.

175. Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Дві його вершини лежать у точках $A\ (2;\ -1;\ 3)$ і $B\ (1;\ 2;\ 1)$. Знайти координати вершини C, якщо вона лежить на осі Oz.

176. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ та $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$.

177. У трикутнику з вершинами $A\ (3;\ 1;\ 4)$, $B\ (7;\ -4;\ 4)$ і $C\ (3;\ 5;\ 1)$ знайти висоту $h = |\overrightarrow{BD}|$.

178. Силу $\vec{F} = (2;\ -4;\ 5)$ прикладено до точки $M\ (4;\ -2;\ 3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $C\ (3;\ 2;\ -1)$.

179. Силу $\vec{F} = (2;\ 2;\ 9)$ прикладено до точки $A\ (4;\ 2;\ -3)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту цієї сили відносно точки $B\ (2;\ 4;\ 0)$.

180. Силу $\vec{F} = (3;\ 4;\ -2)$ прикладено до точки $C\ (2;\ -1;\ 2)$. Знайти величину моменту цієї сили відносно початку координат та його напрямні косинуси.

181. Дано три сили $\vec{P} = (3;\ -1;\ -5)$, $\vec{Q} = (2;\ 2;\ -1)$ і $\vec{R} = (-4;\ 1;\ 5)$, прикладені до точки $C\ (-2;\ 3;\ -2)$. Визначити величину і напрямні косинуси моменту рівнодійної цих сил відносно точки $A\ (1;\ 2;\ -1)$.

182. По нескінченному прямолінійному провіднику тече струм з силою $\vec{I}$. Знайти в будь-якій точці простору напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, утвореного цим струмом, використовуючи при визначенні напряму вектора $\vec{H}$ правило свердлика.

183. Обчислити в будь-якій точці простору напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, утвореного струмом, що тече по прямолінійному провіднику, якщо напрям провідника збігається з напрямом: а) осі Ox; б) осі Oy.

184. Обчислити в точці $M\ (-3;\ 4;\ 2)$ напруженість $\vec{H}$ магнітного поля, утвореного струмом $\vec{I} = -3\vec{k}$, який тече по прямолінійному провіднику.

185. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a} = (4;\ -4;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 3;\ 6)$;

2) $\vec{a} = (2;\ -4;\ -4)$, $\vec{b} = (2;\ 1;\ -2)$;

3) $\vec{a} = (2;\ 1;\ -2)$, $\vec{b} = (6;\ -3;\ 2)$;

4) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 2\vec{k}$;

5) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

186. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4;\ -2;\ -3)$ і $\vec{b} = (0;\ 1;\ 3)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}| = 13$, знайти його координати.

187. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a} = (16;\ -30;\ 6)$, утворює гострий кут з віссю Ox. Знаючи, що $|\vec{c}| = 17$, знайти його координати.

188. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;\ -3;\ 1)$ і $\vec{b} = (1;\ -2;\ 3)$ і задовольняє умову $\vec{x}\,(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

§ 6. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Мішаним добутком $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ упорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ задано своїми координатами: $\vec{a} = (a_x;\ a_y;\ a_z)$, $\vec{b} = (b_x;\ b_y;\ b_z)$, $\vec{c} = (c_x;\ c_y;\ c_z)$, то їхній мішаний добуток визначають за формулою

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів:

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

а об'єм відповідної піраміди

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\,|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|.$$

Необхідна і достатня умова компланарності або *лінійної залежності векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ виражається рівністю

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0.$$

Якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$, то упорядкована трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *права* (рис. 2.12), а якщо $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$ (рис. 2.13), то *ліва*.

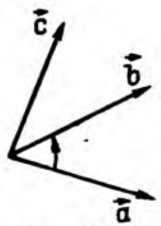


Рис. 2.12

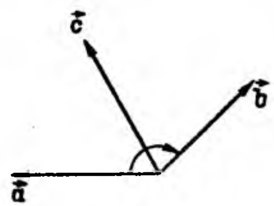


Рис. 2.13

189. Обчислити мішані добутки $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ заданих векторів:

1) $\vec{a} = \vec{i},\ \ \vec{b} = \vec{j},\ \ \vec{c} = \vec{k}$; 2) $\vec{a} = \vec{k},\ \ \vec{b} = \vec{j},\ \ \vec{c} = \vec{i}$;

3) $\vec{a} = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k},\ \ \vec{b} = \vec{i} - \vec{k},\ \ \vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$;

4) $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k},\ \ \vec{c} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$;

5) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3),\ \ \vec{b} = (3;\ 1;\ 2),\ \ \vec{c} = (2;\ 3;\ 1)$;

6) $\vec{a} = (4;\ 7;\ 8),\ \ \vec{b} = (6;\ 4;\ 5),\ \ \vec{c} = (1;\ 2;\ 3)$.

190. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2),\ \vec{b} = (-2;\ 1;\ 1),\ \vec{c} = (1;\ -2;\ 2)$;

2) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 1),\ \vec{b} = (2;\ 1;\ 1),\ \vec{c} = (1;\ 1;\ 2)$;

3) $\vec{a} = (3;\ -2;\ -1),\ \vec{b} = (2;\ -3;\ 1),\ \vec{c} = (1;\ -2;\ -3)$;

4) $\vec{a} = (1;\ 4;\ 3),\ \vec{b} = (2;\ -5;\ 1),\ \vec{c} = (1;\ -3;\ 2)$;

5) $\vec{a} = (-1;\ 2;\ 0),\ \vec{b} = (3;\ -7;\ 2),\ \vec{c} = (2;\ -5;\ 2)$.

191. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (3;\ 2;\ 2),\ \vec{b} = (1;\ -1;\ 3),\ \vec{c} = (1;\ 9;\ -11)$;

2) $\vec{a} = (3;\ 1;\ -1),\ \vec{b} = (1;\ 2;\ -3),\ \vec{c} = (3;\ -4;\ 7)$;

3) $\vec{a} = (5;\ -1;\ 3),\ \vec{b} = (2;\ 1;\ 2),\ \vec{c} = (3;\ -1;\ -2)$.

192. З'ясувати лінійну залежність векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3),\ \vec{b} = (4;\ 5;\ 6),\ \vec{c} = (7;\ 8;\ 9)$;

2) $\vec{a} = (2;\ 1;\ 2),\ \vec{b} = (1;\ 2;\ 2),\ \vec{c} = (2;\ 2;\ 1)$;

3) $\vec{a} = (1;\ 7;\ 1),\ \vec{b} = (8;\ 1;\ 8),\ \vec{c} = (1;\ 2;\ 1)$.

193. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$:

1) $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j},\ \ \vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$;

2) $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k},\ \ \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},\ \ \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$;

3) $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{b} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k},\ \ \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$;

4) $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k},\ \ \vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},\ \ \vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

194. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис на множині всіх векторів, якщо:

1) $\vec{a} = (2;\ 3;\ -1),\ \vec{b} = (1;\ -1;\ 3),\ \vec{c} = (1;\ 9;\ -11)$;

2) $\vec{a} = (3;\ -2;\ 1),\ \vec{b} = (2;\ 1;\ 2),\ \vec{c} = (3;\ -1;\ -2)$;

3) $\vec{a} = (0;\ 1;\ -3),\ \vec{b} = (1;\ -3;\ 4),\ \vec{c} = (1;\ -2;\ 1)$.

195. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо:

1) $\vec{a} = (0;\ -5;\ 7),\ \vec{b} = (3;\ -2;\ -1),\ \vec{c} = (1;\ 5;\ 3),\ \vec{d} = (20;\ -27;\ 35)$;

2) $\vec{a} = (2;\ 1;\ -3),\ \vec{b} = (3;\ -2;\ 1),\ \vec{c} = (-1;\ 0;\ -2),\ \vec{d} = (-2;\ 2;\ 1)$;

3) $\vec{a} = (0;\ 1;\ 2),\ \vec{b} = (-1;\ 0;\ 3),\ \vec{c} = (1;\ 2;\ -5),\ \vec{d} = (0;\ 3;\ 0)$;

4) $\vec{a} = (2;\ 1;\ 1),\ \vec{b} = (1;\ 2;\ -2),\ \vec{c} = (1;\ 1;\ 2),\ \vec{d} = (4;\ 3;\ -2)$.

196. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, обчислити $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

197. Довести, що при будь-яких векторах $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ вектори $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} - \vec{b}$ та $\vec{c} - \vec{a}$ компланарні.

198. Довести тотожність $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

199. Довести тотожність $\vec{a}\cdot\vec{b}\,(\vec{c} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, де λ і μ — будь-які числа.

200. Довести, що кінці радіусів-векторів $\vec{r}_1 = (4; -2; -2)$, $\vec{r}_2 = (3; 1; 1)$, $\vec{r}_3 = (4; 2; 0)$, $\vec{r}_4 = (7; -1; -6)$ лежать в одній площині.

201. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо вони задовольняють умову $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$.

202. Точки $A(-1; 3; -2)$, $B(-2; 6; 2)$, $C(-1; 7; 1)$, $D(2; 6; -5)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.

203. У тетраедрі $OABC$ з вершини O проведено медіани бічних граней. Приймаючи їх за ребра нового тетраедра, довести, що об'єм його становить 1/4 об'єму тетраедра $OABC$.

204. З'ясувати, чи лежать точки $A(3; 3; 2)$, $B(7; 1; 5)$, $C(1; 1; 2)$ та $D(3; -1; 4)$ в одній площині.

205. Довести, що чотири точки $A(2; 3; -1)$, $B(1; 2; 5)$, $C(0; 3; 1)$, $D(3; 2; 3)$ лежать в одній площині.

206. Обчислити об'єм піраміди $ABCD$ з вершинами в точках:
1) $A(3; -2; 5)$, $B(1; 3; 1)$, $C(-1; -1; 3)$, $D(4; 3; 4)$;
2) $A(1; -2; -1)$, $B(4; 4; 4)$, $C(2; 1; -1)$, $D(3; 0; 3)$;
3) $A(6; 1; 4)$, $B(2; -2; -5)$, $C(7; 1; 3)$, $D(1; -3; 7)$;
4) $A(1; 2; 6)$, $B(0; 3; 8)$, $C(-5; -1; 4)$, $D(-3; 2; -6)$.

207. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2; 2; 1)$, $B(3; 1; 2)$, $C(3; 3; 2)$ і $D(4; 5; -3)$ обчислити висоту $h = |\overrightarrow{DE}|$.

208. Дано вершини піраміди $A(1; 2; 1)$, $B(3; 0; -2)$, $C(5; 2; 7)$, $D(-6; -5; 8)$. Знайти довжину висоти піраміди, опущеної з вершини D.

209. Об'єм піраміди $V = 5$, три її вершини лежать у точках $A(2; 1; -1)$, $B(3; 0; 1)$, $C(2; -1; 3)$. Знайти координати четвертої вершини D, якщо відомо, що вона лежить на осі Oy.

210. Об'єм піраміди $V = 2$, три її вершини лежать у точках $A(2; 1; 3)$, $B(3; 3; 2)$, $C(1; 2; 4)$. Знайти координати четвертої вершини, коли відомо, що вона лежить на осі Oz.

211. Дано три некомпланарні вектори $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$, $\vec{n} = (A; B; C)$. Знайти площу паралелограма, який є ортогональною проекцією на площину, перпендикулярну до $\vec{n}$, паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

212. Дано три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє систему рівнянь $\vec{a} \cdot \vec{x} = \alpha$, $\vec{b} \cdot \vec{x} = \beta$, $\vec{c} \cdot \vec{x} = \gamma$.

Глава 3

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§ 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ

1.1. Поняття про лінію та її рівняння

Лінію на площині можна задати рівнянням $F(x, y) = 0$, яке задовольняють координати всіх точок $M(x; y)$ даної лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на лінії.

Точки перетину двох ліній, заданих рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$, визначають із системи цих рівнянь.

1. На лінії, визначеній рівнянням $x^2 + y^2 = 25$, знайти точки з абсцисами: 1) 0: 2) —3; 3) 5; 4) 7; на цій самій лінії знайти точки з ординатами: 5) 3; 6) —5; 7) —8. Яка лінія визначена заданим рівнянням? Зобразити її на рисунку.

2. Перевірити належність точок $A(0; 5)$, $B(-2; 3)$ і $C(1; -1{,}5)$ до лінії $2x^2 - 3xy + y - 5 = 0$.

3. Перевірити належність точки $(2; -1)$ до лінії $x^2 + 4y^2 - 2(x + y) - 6 = 0$.

4. Вказати, які з наступних ліній:
а) $x^2(2x + y) - 3y^2(x + 5) = 4$;
б) $(x^2 + y^2)^2 - 2(x - y) = 6x^2$;
в) $3x^3 + 5y^2 - 7x^2 - y + 4x + 8 = 0$;
г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; д) $ax - by = 0$ проходять через початок координат.

5. Знайти точки перетину з осями координат (а) — з віссю Ox, б) — з віссю Oy) таких ліній:
1) $x^2 + y^2 = 49$; 2) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$;
3) $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 4) $(x + 5)^3 + (y - 4)^2 = 9$;
5) $x^2 + y^2 - 12x + 16y = 0$; 6) $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 7 = 0$;
7) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$.

6. Знайти точки перетину двох ліній:
1) $x^2 + y^2 = 8$ і $x - y = 0$;
2) $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0$ і $x + y = 0$;
3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ і $x^2 + y^2 = 25$;
4) $x^2 + y^2 - 8x + 10y + 40 = 0$ і $x^2 + y^2 = 4$.

7. При яких значеннях параметрів a, b, c лінія $x^2 + 2ax + y^2 + 2by + c = 0$:
а) не перетинає вісь Ox; б) перетинає її в двох точках;
в) дотикається до неї?

8. З'ясувати, які геометричні образи визначаються рівняннями:
1) $x - y = 0$; 2) $x + y = 0$; 3) $x^2 - y^2 = 0$; 4) $x^2 + y^2 = 0$;

5) $x^2 + y^2 = r^2$; 6) $y = b$; 7) $(x - 1)(x + 3) = 0$; 8) $xy = 0$; 9) $x(x + 1)(x - 2) = 0$; 10) $(x + a)(y - b) = 0$; 11) $x^2 + y^2 + 4 = 0$.

1.2. Визначення рівняння лінії за її геометричними властивостями

Щоб скласти рівняння лінії за її геометричними властивостями, треба:

1) на площині вибрати систему координат;
2) взяти точку на лінії з довільними координатами;
3) записати у вигляді рівняння геометричну властивість, характерну для всіх точок лінії;
4) виразити через введені координати всі величини, що входять у рівняння.

9. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок A (0; 3) і B (6; —3). Які з точок C (1; —2), D (2; —1), E (—1; 2), K (—2; 1) лежать на цій лінії?

10. З точки P (6; —8) проведено довільні промені до перетину з віссю абсцис. Скласти рівняння геометричного місця їх середин.

11. З точки C (10; —3) проведено довільні промені до перетину з віссю ординат. Скласти рівняння геометричного місця їх середин.

12. Скласти рівняння траєкторії точки M (x, y), яка, рухаючись, знаходиться вдвічі ближче до точки A (—1; 1), ніж до точки B (—4; 4).

13. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок M_1 (—4; 0) і M_2 (4; 0) дорівнює 50.

14. Написати рівняння лінії, модуль різниці відстаней кожної з точок якої до точок F_1 (—2; —2) і F_2 (2; 2) дорівнює 4.

15. Скласти рівняння геометричного місця точок, що містяться вдвічі ближче до точки A (3; 0), ніж до прямої $x = 12$.

16. Знайти траєкторію точки, яка, рухаючись, залишається в півтора раза далі від точки F (0; 6), ніж від прямої $y = \frac{8}{3}$.

17. Скласти рівняння геометричного місця центрів кіл, що дотикаються до осі Oy і проходять через точку M_0 (—4; 3). Назвати одержану лінію і побудувати її.

18. Розкласти силу $P = 15$ Н на дві складові у відношенні 2 : 3. Знайти геометричне місце вершин силових трикутників, що задовольняють цю умову. Назвати лінію.

19. Скласти рівняння геометричного місця точок, найкоротші відстані яких до даного кола $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ і до даної прямої $x + 2 = 0$ рівні між собою.

20. Скласти рівняння лемніскати як геометричного місця точок, добуток відстаней яких від двох даних точок P і Q є величина стала і рівна довжині відрізка $PQ = 4$.

21. Два стержні обертаються навколо двох нерухомих точок A і B, відстань між якими дорівнює $2a$. При обертанні стержні залишаються взаємно перпендикулярними. Знайти геометричне місце точок перетину стержнів.

22. Дві точки, що рухаються рівномірно з однаковою швидкістю, описують дві взаємно перпендикулярні прямі. Скласти рівняння геометричного місця середин відрізків, що сполучають рухомі точки, якщо відоме їх початкове розміщення.

1.3. Полярні рівняння лінії

Рівняння $\Phi(\rho, \varphi) = 0$ називається *рівнянням лінії в полярних координатах* або *полярним рівнянням*, якщо його задовольняють полярні координати ρ і φ кожної точки даної лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на лінії (рис. 3.1). Це рівняння можна дістати безпосередньо з геометричних властивостей лінії або ж з її рівняння в декартових координатах переходом до полярних координат за формулами $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, де $\rho \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, якщо полюс вибрати за початок прямокутної системи координат, а полярну вісь — за вісь абсцис (рис. 3.2).

Обернені формули переходу: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

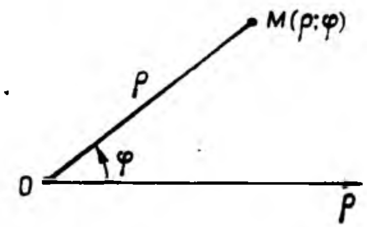


Рис. 3.1

23. Як розміщено точки, полярні координати яких задовольняють такі рівняння:

1) $\rho = 1$; 2) $\rho = 5$; 3) $\rho = a$; 4) $\varphi = \frac{\pi}{6}$; 5) $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

6) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 7) $\varphi = \text{const}$?

Записати в полярних координатах рівняння таких ліній.

24. $y = x$. **25.** $x = 2$. **26.** $x + y - 1 = 0$.
27. $x^2 + y^2 = 25$. **28.** $x^2 + y^2 = 3y$. **29.** $x^2 + y^2 + 6x = 0$.
30. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (лемніската Бернуллі).

Записати в декартових координатах рівняння і побудувати графіки таких ліній.

31. $\rho = 4$. **32.** $\operatorname{tg} \varphi = -1$. **33.** $\rho \cos \varphi = 2$.

34. $\rho \sin \varphi = 3$. **35.** $\rho = \dfrac{1/\sqrt{2}}{\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}$. **36.** $\rho^2 \sin 2\varphi = 2a^2$.

37. Скласти в полярних координатах рівняння прямої, перпендикулярної до полярної осі, і такої, що відтинає від цієї осі відрізок завдовжки три одиниці.

38. Скласти в полярних координатах рівняння променя, який виходить з полюса під кутом 60° до полярної осі.

39. Скласти в полярних координатах рівняння прямої, яка проходить через полюс під кутом 45° до полярної осі.

40. Скласти в полярних координатах рівняння прямої, паралельної полярній осі і розміщеної над нею, якщо відстань між ними дорівнює b $(b > 0)$.

41. Побудувати лінію $\rho = 2 + 2\cos\varphi$.

42. Побудувати лінії:
1) $\rho = a\varphi$ (спіраль Архімеда); 2) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (кардіоїда); 3) $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ (лемніската Бернуллі);
4) $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гіперболічна спіраль); 5) $\rho = a(1 + 2\cos\varphi)$ (равлик Паскаля).

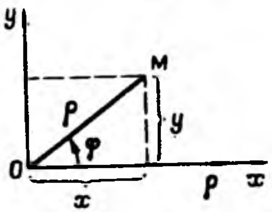


Рис. 3.2

43. Побудувати лінії:
1) $\rho = a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова роза);
2) $\rho = a\sin 2\varphi$ (двопелюсткова роза).

44. Побудувати лінії:
1) $\rho = 4\cos 2\varphi$; 2) $\rho = 3\cos 3\varphi$; 3) $\rho = 2\cos 4\varphi$;
4) $\rho = \cos\frac{\varphi}{2}$; 5) $\rho = \cos\frac{\varphi}{3}$.

45. Записати рівняння кола з радіусом $R = 3$ і центром у точках: 1) $C(-3; 0)$; 2) $C(0; 3)$ в полярних координатах.

46. Навколо точки O обертається промінь із сталою кутовою швидкістю ω. На промені рухається точка M із сталою швидкістю v. Скласти в полярних координатах рівняння траєкторії руху точки M, якщо в початковий момент промінь збігається з додатним напрямом осі абсцис, а точка M — з початком координат O.

47. Дано коло з діаметром $AB = 2R$. З кінця діаметра A проведено хорду AC, а з кінця хорди C опущено перпендикуляр на діаметр AB; з основи цього перпендикуляра D опущено перпендикуляр на хорду AC. Яку лінію опише основа M цього перпендикуляра, якщо хорду AC обертати навколо точки A?

48. Відрізок AB довжиною $2a$ ковзає своїми кінцями вздовж сторін прямого кута. З вершини цього кута O на відрізок AB опущено перпендикуляр OM. Знайти геометричне місце основ цих перпендикулярів.

49. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, опущених з нерухомої точки на дотичні до кола.

50. Дано дві точки F_1 і F_2 на відстані $2c$ одна від одної. Знайти геометричне місце точок, добуток відстаней яких до точок F_1 і F_2 дорівнює c^2. Записати рівняння лінії в полярних координатах.

51. Дано коло радіуса a і на ньому дві діаметрально протилежні точки O і A. Навколо точки O обертається промінь. Нехай пряма, на

якій лежить цей промінь, перетинає коло в змінній точці B. На цій прямій від точки B у напрямі променя відкласти відрізок BM, який дорівнює діаметру кола. Скласти в полярних і декартових координатах рівняння траєкторії руху точки M при обертанні променя. За початок координат вибрати точку O, а за додатний напрям осі Ox — промінь OA.

1.4. Параметричні рівняння лінії

Рівняння
$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in \langle t_1, t_2\rangle, \qquad (1)$$
називають *параметричними рівняннями лінії l в декартовій прямокутній системі координат*, якщо для кожного значення параметра $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ точка $M(x(t); y(t))$ належить лінії l і, навпаки, для кожної точки $M(x; y)$ лінії l існує таке значення параметра $t \in \langle t_1, t_2\rangle$, що $x = x(t)$ і $y = y(t)$. Виключивши параметр t з рівнянь (1), дістанемо рівняння лінії у вигляді $F(x, y) = 0$.

Аналогічно визначаються параметричні рівняння лінії в полярних координатах.

У задачах 52—55, виключивши параметр t, записати рівняння даних ліній у вигляді $F(x, y) = 0$ і побудувати їх.

52. а) $x = 2t - 1$, $y = 2 - t$; б) $x = t^2 - 2t + 1$, $y = t - 1$; в) $x = \frac{t}{2}$, $y = t^2$ $(t \in (-\infty, +\infty))$.

53. а) $x = 2\cos t - 1$, $y = 2\sin t + 3$; б) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$; в) $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(t \in [0, 2\pi])$.

54. а) $x = 2\sec t$, $y = 2\operatorname{tg} t$ $\left(t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$; б) $x = 10\cos^2 t$, $y = 5\sin 2t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$; в) $x = 3\sin 2t$, $y = 6\sin^2 t$ $(t \in [0, \pi))$.

55. $x = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, $y = \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ $(t \in (-\infty, 0))$.

56. Вважаючи, що параметром є полярний кут, записати параметричні рівняння ліній:
а) $\rho\varphi = a$; б) $\rho = 2R\sin\varphi$; в) $\rho = 2R\cos\varphi$.

57. Довільна точка M, рухаючись на площині, міститься на відстані R від даної точки C. Скласти параметричні рівняння траєкторії руху точки M.

58. Скласти параметричні рівняння траєкторії руху тіла, кинутого під кутом α до обрію з початковою швидкістю v_0.

59. Скласти параметричні рівняння відрізка з кінцевими точками $M_1(1; 1)$ і $M_2(2; 3)$, поклавши за параметр відстань між точками:
а) M і M_1; б) M і M_2 (M — довільна точка відрізка).

60. Скласти параметричні рівняння кола $x^2 + y^2 = 2Rx$, вважаючи, що параметр t є полярний кут, якщо полярна вісь збігається з віссю Ox, а полюс знаходиться:

а) у початку координат; б) у центрі кола.

61. Скласти параметричні рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо параметр t — відрахований проти годинникової стрілки кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$.

62. Скласти параметричні рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо параметр t — відрахований проти годинникової стрілки кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$.

63. Скласти параметричні рівняння параболи $y^2 = 2px$, якщо параметр t є:

а) ордината y; б) кут нахилу вектора $\overrightarrow{OM}$ до осі Ox;

в) кут нахилу фокального радіуса-вектора $\overrightarrow{FM}$ до осі Ox.

64. Кулька котиться вздовж нахиленого жолобка і, набувши швидкості v, відривається від нього в тій точці, де дотична має горизонтальний напрям. Визначити подальшу траєкторію руху кульки.

65. Прямокутник, дві сторони якого збігаються з осями координат, деформується так, що діагональ його залишається незмінною і має довжину a. З вершини прямокутника, що є протилежною до початку координат, опущено перпендикуляр на діагональ. Основа його при цьому описує криву, що називається астроїдою. Скласти її параметричні рівняння.

66. Циклоїдою називається траєкторія довільної точки кола, що котиться без ковзання по прямій. Скласти її рівняння, вибираючи кут обертання радіуса, що сполучає центр даного кола з вибраною точкою на ньому, за параметр.

67. Скласти параметричні рівняння «розгортки кола», тобто траєкторії кінця туго намотаної нитки, що змотується з нерухомої круглої котушки.

1.5. Векторне рівняння лінії

Кожну точку $M(x;\ y) \equiv M(\vec{r})$ площини Oxy можна задати її радіусом-вектором $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x;\ y)$.

Множина точок $M(\vec{r})$, які збігаються з кінцями векторів $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де t — скалярний змінний параметр, визначає на площині деяку лінію L (рис. 3.3).

Рівняння $\vec{r} = \vec{r}(t)$ називається *векторним параметричним рівнянням лінії L*. Векторному рівнянню відповідають параметричні рівняння $x(t)$, $y(t)$ лінії L, що є координатами вектора $\vec{r}(t)$.

Зокрема, пряму лінію на площині можна задати:

1) векторним рівнянням у параметричній формі

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{s}t \quad (\vec{s} \neq 0,\ t \in (-\infty,\ +\infty)),$$

де $\vec{s}$ — напрямний вектор прямої; $\vec{r}_0$ — радіус-вектор фіксованої точки $M_0(x_0;\ y_0)$ на прямій; $\vec{r}(t)$ — радіус-вектор довільної точки на прямій; t — скалярний параметр;

2) нормальним векторним рівнянням

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\vec{n} \neq 0),$$

де $\vec{n}$ — нормальний вектор прямої;

3) векторним рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(\vec{r}_1)$ і $M_2(\vec{r}_2)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t \quad (t \in (-\infty,\ +\infty)).$$

68. При якій необхідній і достатній умові прямі $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}_1 t$ і $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}_2 t$:

1) перетинаються в одній точці;
2) паралельні, але не збігаються;
3) збігаються?

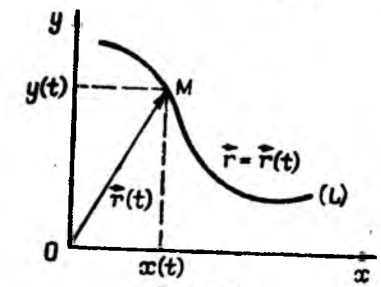


Рис. 3.3

69. Скласти векторне рівняння геометричного місця точок на площині, рівновіддалених від двох заданих точок $M_1(\vec{r}_1)$ і $M_2(\vec{r}_2)$. Дати геометричне тлумачення лінії.

70. Скласти векторне рівняння: а) осі Ox; б) осі Oy.

71. Скласти векторне рівняння геометричного місця точок на площині, рівновіддалених від двох заданих точок $M_1(\vec{i} - 2\vec{j})$ і $M_2(3\vec{i} + 4\vec{j})$.

72. Перевірити, які з точок $A(2\vec{i} + \vec{j})$, $B(\vec{i} + 2\vec{j})$, $C(\vec{i} - 2\vec{j})$ і $D(-\vec{i} + 2\vec{j})$ належать лінії $\vec{r} \cdot (\vec{i} + 3\vec{j}) = 5$.

73. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(2\vec{i} + 2\vec{j})$, яке проходить через початок координат.

74. Знайти векторне рівняння геометричного місця точок, з яких даний відрізок AB, де $A(\vec{r}_1)$ і $B(\vec{r}_2)$, видно під прямим кутом.

75. Яке рівняння задовольняють радіуси-вектори точок, що належать колу на площині Oxy з центром у точці $C\,(3\vec{i})$ і радіусом, що дорівнює 5?

76. Дати геометричне тлумачення векторних рівнянь на площині Oxy: 1) $\vec{r}\cdot\vec{j} = -5$; 2) $\vec{r}\cdot\vec{i} = 6$.

77. Відомі вершини плоского трикутника $A\,(\vec{r_1})$, $B\,(\vec{r_2})$ і $C\,(\vec{r_3})$. Скласти векторні рівняння: 1) висоти, опущеної з вершини A; 2) медіани, проведеної з вершини B; 3) серединного перпендикуляра, проведеного до сторони BC.

§ 2. ПОВЕРХНІ І ЛІНІЇ В ПРОСТОРІ ТА ЇХНІ РІВНЯННЯ

2.1. Поверхня та її рівняння

Рівнянням поверхні відносно заданої системи координат називається таке рівняння з трьома змінними, яке задовольняють координати лише кожної точки цієї поверхні. В системі координат $Oxyz$ поверхня S може бути задана рівнянням

$$F(x, y, z) = 0.$$

78. Упевнитись, що точка $A\,(1; 0; 2)$ належить поверхні $x^2 - 3y^2 + 4z^2 - 5z - 7 = 0$, а точка $B\,(1; 1; 1)$ не належить їй.

79. Переконатись, що жодна з поверхонь:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$; 2) $x^2 + xy - z^6 + 6 = 0$;
3) $x - 4y + z - 1 = 0$; 4) $(x-3)(y+1)(z-5) = 0$;
5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$

не проходить через початок координат.

80. На поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ знайти точку, якщо: 1) абсциса дорівнює 1, а ордината 2; 2) абсциса дорівнює 2, а ордината 5; 3) абсциса дорівнює 2, а апліката 2; 4) ордината дорівнює 2, а апліката 4.

У задачах 81—93 встановити, які геометричні образи визначаються такими рівняннями.

81. $y = 0$. **82.** $x - 2 = 0$. **83.** $4x - 2y + z + 4 = 0$.
84. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. **85.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$.
86. $3x^2 + y^2 + z^2 = 0$. **87.** $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 2 = 0$.
88. $4x^2 - y^2 = 0$. **89.** $xz = 0$. **90.** $xyz = 0$.
91. $x^2 - 4x = 0$. **92.** $yz + z^2 = 0$. **93.** $y^2 + 2z^2 = 0$.

94. Скласти рівняння сфери, центр якої міститься у точці $C\,(5; -3; 7)$, а радіус дорівнює 9.

95. Сфера проходить через точку $A\,(2; -1; -3)$ і має центр у точці $C\,(3; -2; 1)$. Скласти рівняння цієї сфери.

96. Скласти рівняння геометричного місця точок, різниця квадратів відстаней яких до точок $F_1\,(2; 3; -5)$ і $F_2\,(2; -7; -5)$ є величина стала і дорівнює 13. Назвіть цю поверхню.

97. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від точок $M_1\,(1; 2; -3)$ і $M_2\,(3; 2; 1)$.

98. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких до граней куба з вершинами $A\,(2; 2; 2)$, $B\,(2; -2; -2)$, $C\,(-2; 2; -2)$ і $D\,(-2; -2; -2)$ — стала величина, що дорівнює 32.

99. Скласти рівняння поверхні, сума відстаней кожної точки якої до точок $F_1\,(0; 0; -4)$ і $F_2\,(0; 0; 4)$ дорівнює 10.

100. Скласти рівняння поверхні, модуль різниці відстаней від кожної точки якої до точок $F_1\,(0; -5; 0)$ і $F_2\,(0; 5; 0)$ дорівнює 6.

101. Стержень рухається в просторі так, що три його фіксовані точки A, B, C ковзають на координатних площинах. Якою поверхнею обмежено рух довільно вибраної на стержні четвертої точки M?

102. Скласти рівняння поверхні, описаної стержнем, який ковзає по трьох ребрах куба, кожні два з яких не належать одній площині. Ребро куба дорівнює a.

103. Пересвідчитися, що точка $A\,(1; -1; 2)$ належить поверхням

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0 \text{ і } 2x - 2y + z - 6 = 0.$$

2.2. Рівняння лінії в просторі

Лінію l у просторі можна розглядати як лінію перетину двох поверхонь. Визначає лінію l система рівнянь $F_1\,(x, y, z) = 0$, $F_2\,(x, y, z) = 0$, які задають дані поверхні.

Лінію l можна трактувати також як траєкторію точки, тобто описати векторним параметричним рівнянням $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, якому відповідають скалярні параметричні рівняння $x = x\,(t)$, $y = y\,(t)$, $z = z\,(t)$ — координати вектора $\vec{r}\,(t)$.

104. Встановити, які з точок $M_1\,(3; 4; -4)$, $M_2\,(-3; 2; 4)$, $M_3\,(-1; -4; 4)$ і $M_4\,(2; 3; -3)$ належать лінії $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 36$, $y + z = 0$?

105. На лінії $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0$ знайти точку: 1) якщо абсциса дорівнює 3; 2) якщо ордината дорівнює 2; 3) якщо апліката дорівнює 8.

106. Встановити, які лінії визначаються системами рівнянь:

а) $x - 5 = 0$, $z + 2 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, $y = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 = 20$, $z - 2 = 0$; г) $x^2 + y^2 + z^2 = 49$, $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 25 = 0$.

107. Скласти рівняння лінії перетину площини Oxz і сфери з центром у початку координат і радіусом $R = 3$.

108. Скласти рівняння лінії перетину сфери з центром у точці $C\,(1; -2; 3)$ і радіусом $R = 6$ з площинами, паралельними площині Oxy, що знаходяться на відстані трьох одиниць від неї.

109. Точки A (3; —2; 5) і B (—1; 6; —3) є кінцями діаметра кола, що проходить через точку C (1; —4; 1). Скласти рівняння цього кола.

110. Відрізок завдовжки a обертається навколо деякої осі, залишаючись перпендикулярним до неї і одночасно ковзаючи одним з кінців уздовж цієї осі (відомо, що переміщення пропорційне величині кута обертання). Другий кінець відрізка при цьому рухається вздовж лінії, яка називається гвинтовою. Скласти її рівняння.

§ 3. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

3.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряма на площині в декартових координатах може бути задана одним з таких рівнянь:

1) $Ax + By + C = 0$ — загальне рівняння прямої;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ — рівняння прямої, що проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n} = (A;\ B)$ (рис. 3.4);

3) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ — рівняння прямої (рис. 3.5), що проходить через точку M_0 $(x_0; y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (m;\ n)$ (канонічне рівняння прямої);

4) $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$ $(t \in (-\infty;\ \infty))$ — параметричні рівняння прямої (рис. 3.6), що у векторній формі мають вигляд

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t;$$

5) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — рівняння прямої (рис. 3.7), що проходить через дві задані точки M_1 $(x_1; y_1)$, M_2 $(x_2; y_2)$;

6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ — рівняння прямої у відрізках на осях (рис. 3.8), де a і b — відрізки, що їх відтинає пряма на координатних осях Ox і Oy відповідно;

7) $y = kx + b$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис. 3.9), де k — кутовий коефіцієнт прямої ($k = \operatorname{tg} \varphi$); b — величина відрізка, що його відтинає пряма на осі Oy;

8) $y - y_0 = k(x - x_0)$ — рівняння прямої (рис. 3.10), що проходить через задану точку і має заданий кутовий коефіцієнт;

9) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ — нормальне рівняння прямої (рис. 3.11), де $p > 0$ — довжина перпендикуляра, проведеного з початку координат на пряму; α — кут нахилу цього перпендикуляра до осі Ox.

У задачах 111—113: 1) записати рівняння прямої, привести його до загального виду, записати у відрізках на осях та побудувати пряму; 2) знайти відстань від початку координат до прямої.

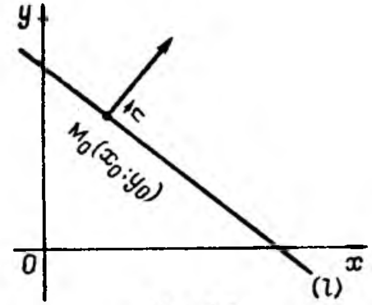


Рис. 3.4

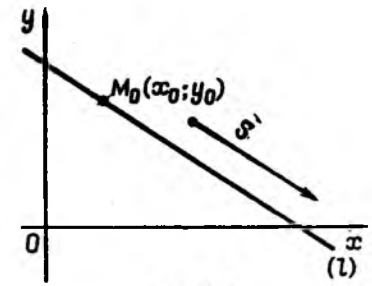


Рис. 3.5

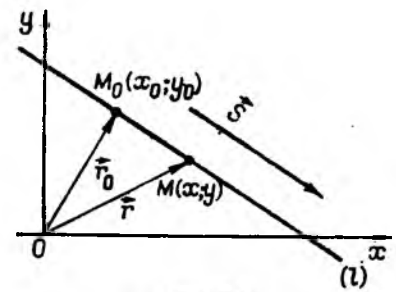


Рис. 3.6

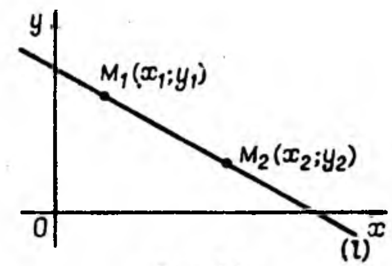


Рис. 3.7

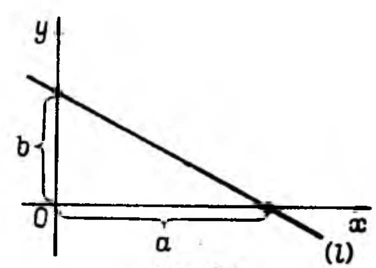


Рис. 3.8

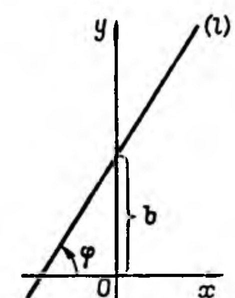


Рис. 3.9

111. Пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A;\ B)$:

а) $M_0(-1; 2)$, $\vec{n} = (2; 2)$; б) $M_0(2; 1)$, $\vec{n} = (2; 0)$;

в) $M_0(1; 1)$, $\vec{n} = (2; -1)$.

112. Пряма задана точкою $M_0(x_0; y_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = (m;\ n)$:

а) $M_0(-1; 2)$, $\vec{s} = (3; -1)$; б) $M_0(1; 1)$, $\vec{s} = (0; -1)$;

в) $M_0(-1; 1)$, $\vec{s} = (2; 0)$.

113. Пряма задана двома точками $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$:

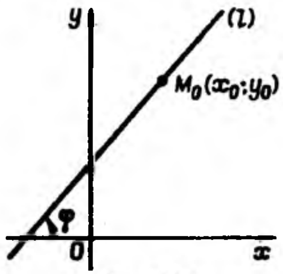


Рис. 3.10

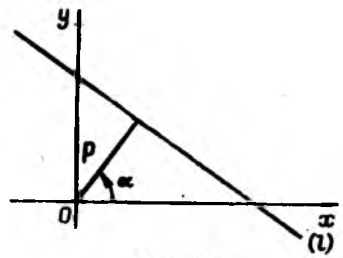


Рис. 3.11

а) $M_1(1;\ 2)$, $M_2(-1;\ 0)$; б) $M_1(1;\ 1)$, $M_2(1; -2)$; в) $M_1(2;\ 2)$, $M_2(0;\ 2)$.

114. За умовою задачі 113 скласти параметричні рівняння прямих і вказати координати їх напрямних векторів.

115. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами у точках $A(-4; 2)$, $B(2; 0)$ та $C(2; -4)$. Знайти точку їх перетину.

116. Дано дві вершини трикутника $A(2; 1)$ і $B(-1; 1)$. Довжина його сторони $AC = \sqrt{2}$, а центр маси лежить на прямій $5x - 7y - 2 = 0$. Знайти його третю вершину C.

117. Знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута C трикутника з вершинами $A(0; 0)$, $B(3; -1)$, $C(4; 7)$.

118. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $A(4; 3)$ і відтинає від координатного кута трикутник з площею, що дорівнює 3 кв. од.

119. Через точку $(2; -1)$ провести пряму, відрізок якої між осями координат ділився б у цій точці навпіл.

120. Знайти значення A, при яких пряма $Ax + 8y - 20 = 0$ відтинає на координатних осях однакові відрізки.

3.2. Загальне рівняння прямої та його дослідження. Пучок прямих

Рівняння $Ax + By + C = 0$ називається *загальним рівнянням прямої на площині*, де A, B — координати вектора нормалі до прямої; C — вільний член:

1) $C = 0$ — рівняння $Ax + By = 0$ визначає пряму, що проходить через початок координат;

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$ — рівняння $Ax + C = 0$ або $x = a$ $\left(a = -\frac{C}{A}\right)$ визначає пряму, паралельну осі Oy;

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C = 0$ — рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ — осі Oy;

4) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ — рівняння $By + C = 0$ або $y = b$ $\left(b = -\frac{C}{B}\right)$ визначає пряму, паралельну осі Ox;

5) $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$ — рівняння $By = 0$ або $y = 0$ — осі Ox;

6) $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ — рівняння визначає пряму $y = kx + b$ з кутовим коефіцієнтом $\left(k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}\right)$.

Пряма $Ax + By + C = 0$ ділить площину на дві півплощини так, що для координат точок однієї з них справджується нерівність $Ax + By + C > 0$, а для координат точок іншої — нерівність $Ax + By + C < 0$.

Сукупність усіх прямих, що проходять через одну й ту саму точку, називається пучком прямих, а їх спільна точка — центром пучка.

Якщо через x_0 і y_0 позначити координати центра, то рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

визначає довільну пряму пучка.

Рівняння пучка прямих можна записати також у вигляді

$$(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Змінюючи λ від $-\infty$ до $+\infty$, дістанемо довільну пряму, що проходить через точку перетину прямих

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ і } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

121. З'ясувати, чи перетинає пряма $2x + 3y + 5 = 0$ відрізок, обмежений точками $M_1(-1; 3)$ і $M_2(2; -5)$. Якщо так, то знайти точку їх перетину.

122. З'ясувати, чи перетинає пряма $3x + 2y - 10 = 0$ відрізок AB, якщо його кінці $A(1; 1)$ і $B(2; 2)$. Знайти точку їх перетину.

123. Визначити кутовий коефіцієнт k та відрізок b і побудувати прямі:

1) $2x - 3y - 6 = 0$; 2) $2x + 3y = 0$;

3) $y = -3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

124. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b, що його відтинає пряма на осі Oy, якщо вона задана рівняннями:

1) $5x - y + 3 = 0$; 2) $2x + 3y - 6 = 0$; 3) $5x + 3y + 2 = 0$; 4) $3x + 2y = 0$; 5) $y - 3 = 0$.

125. Задано сторони трикутника рівняннями $4x + 3y - 5 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x - 2 = 0$. Визначити його вершини.

126. Рівняння двох сторін паралелограма $8x + 3y + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, а рівняння однієї з його діагоналей $3x + 2y + 3 = 0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

127. Середини сторін трикутника лежать у точках M_1 (2; 1), M_2 (5; 3) і M_3 (3; —4). Скласти рівняння його сторін.

128. При якому значенні параметра a три прямі $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ і $3x + ay - 2 = 0$ проходять через одну точку?

129. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку M (—2; 4) паралельно: 1) осі Ox; 2) осі Oy.

130. З'ясувати, при яких значеннях параметра a пряма

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0:$$

1) паралельна осі Ox; 2) паралельна осі Oy; 3) проходить через початок координат.

131. Визначити, при яких значеннях параметрів m і n пряма

$$(2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + 2m + 7n + 19 = 0$$

паралельна осі ординат і перетинає вісь абсцис у точці (5; 0).

132. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $7x - y + 3 = 0$ і $3x + 5y - 4 = 0$ і точку A (2; —1).

133. Через точку перетину прямих $2x + 5y - 8 = 0$ і $x - 3y + 4 = 0$ провести пряму, яка:

1) проходить через початок координат; 2) паралельна осі абсцис; 3) паралельна осі ординат; 4) проходить через точку (4; 3).

134. Через точку перетину прямих $2x - 5y - 1 = 0$ і $x + 4y - 7 = 0$ провести пряму, що поділяє відрізок між точками A (4; —3) і B (—1; 2) у відношенні $\lambda = 2/3$.

135. Знайти пряму, що належить одночасно двом пучкам прямих $(x + y - 1) + \lambda_1(x - 1) = 0$ і $(2x - 3y) + \lambda_2(y + 1) = 0$.

136. Задані рівняння сторін чотирикутника $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$ і $3x + y - 12 = 0$. Скласти рівняння його діагоналей.

3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Кутом між прямими l_1 і l_2 називається кут θ, на який треба повернути пряму l_1 (проти годинникової стрілки), щоб вона сумістилася з прямою l_2 (рис. 3.12).

Якщо прямі задано канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

то кут між ними $\theta = (\widehat{l_1, l_2})$ $(0 \leqslant \theta < \pi)$ знаходять за формулою

$$\cos\theta = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}}.$$

Ознакою паралельності прямих є пропорційність координат напрямних векторів $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$, а умовою перпендикулярності — рівність $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Якщо прямі задано рівняннями з кутовим коефіцієнтом $y = k_1 x + b_1$ і y

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

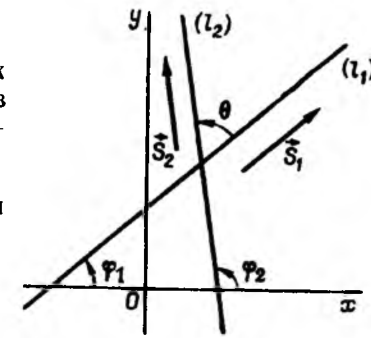


Рис. 3.12

Ознакою паралельності цих прямих буде рівність їх кутових коефіцієнтів $k_1 = k_2$, а ознакою перпендикулярності — рівність $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Якщо прямі l_1 і l_2 задано загальними рівняннями

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Ознакою їх паралельності є рівність $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, а перпендикулярності — рівність $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

137. Задано пряму і точку M. Треба:

1) написати рівняння прямої, що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої;

2) написати рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно заданій прямій;

3) написати рівняння прямої, що проходить через точку M під кутом 45° до заданої прямої, якщо:

а) $y - 2x - 1 = 0$, M (—1; 2), б) $2y + 1 = 0$, M (1; 0);
в) $x + y + 1 = 0$, M (0; 1); г) $2x + 3y + 4 = 0$, M (2; 1).

138. Знайти проекцію точки P (—6; 4) на пряму $4x - 5y + 3 = 0$.

139. Знайти точку Q, симетричну до точки P (—5; 13) відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

140. Знайти проекцію точки P (—8; 12) на пряму, що проходить через точки A (2; —3) і B (—5; 1).

141. Знайти точку M_1, симетричну до точки M_2 (8; —9) відносно прямої, що проходить через точки A (3; —4) і B (—1; —2).

142. Знайти точку перетину медіан і точку перетину висот трикутника з вершинами A (—4; 2), B (2; —5), C (5; 0).

143. Довести, що чотирикутник з вершинами A (1; 1), B. (0; 3), C (2; 4) та D (3; 2) є квадрат.

144. Довести, що чотирикутник, обмежений прямими $x + 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$ та $x - 2y - 3 = 0$, є ромб.

145. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину A (3; —4) та рівняння двох висот $7x - 2y - 1 = 0$ і $2x - 7y - 6 = 0$.

146. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину A (2; —4) та рівняння бісектрис двох його кутів: $x + y - 2 = 0$ та $x - 3y - 6 = 0$.

147. Скласти рівняння сторін трикутника, знаючи вершину A (—4; 2) та рівняння двох медіан $3x - 2y + 2 = 0$ і $3x + 5y - 12 = 0$.

148. Скласти рівняння катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо C (5; —1) — вершина прямого кута, а $2x - 3y + 5 = 0$ — рівняння гіпотенузи.

149. Точка D (1; —1) є центром квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y + 12 = 0$. Знайти рівняння інших сторін квадрата.

150. Точка A (—4; 5) є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x - y + 8 = 0$. Скласти рівняння сторін та іншої діагоналі цього квадрата.

151. Протилежні вершини квадрата лежать у точках A (—1; 3) і C (6; 2). Скласти рівняння його сторін.

152. Не обчислюючи координат вершин трикутника, скласти рівняння прямих, проведених через ці вершини паралельно протилежним сторонам. Сторони трикутника задано рівняннями $5x - 2y + 6 = 0$, $4x - y + 3 = 0$ і $x + 3y - 7 = 0$.

153. У трикутнику ABC відомі сторона (AB) $4x + y - 12 = 0$, висота (BH) $5x - 4y - 15 = 0$ і висота (AH) $2x + 2y - 9 = 0$. Скласти рівняння двох інших сторін і третьої висоти.

154. Знайти рівняння прямих, що належать пучку прямих $(x + 2y - 7) + \lambda(3x - y + 5) = 0$ і перпендикулярні до кожної з основних прямих пучка.

3.4. Відстань від точки до прямої

Відстань від точки M_0 (x_0; y_0) до прямої $Ax + By + C = 0$ знаходять за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

155. Показати, що точка M (—1; 2) належить прямій: $x = 2t$, $y = -1 - 6t$. Знайти значення параметра t, що відповідає цій точці.

156. Обчислити відстань від точки M (1; 1) до прямої:

$$x = -1 + 2t, \quad y = 2 + t.$$

157. Точка A (2; —5) є вершиною квадрата, одна із сторін якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрата.

158. Задано вершини трикутника: A (—10; —13), B (—2; 3) та C (2; 1). Обчислити довжину перпендикуляра, опущеного з вершини B на медіану, проведену з вершини C.

159. Дві сторони квадрата лежать на прямих $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y + 13 = 0$. Обчислити його площу.

160. Скласти рівняння прямих, паралельних прямій $5x + 12y + 20 = 0$, що розміщені від неї на відстані дві одиниці.

161. Через точку M_1 (1; 2) провести прямі, розміщені на однакових відстанях від точок M_2 (2; 3) і M_3 (4; —5).

162. Написати рівняння бісектрис кутів між прямими $3x + 4y - 12 = 0$ і $y = 0$.

163. Переконатися в тому, що точки A (—4; —3), B (—5; 0), C (5; 6) та D (1; 0) є вершинами трапеції, та знайти її висоту.

164. Точка A належить прямій $2x - 3y + 4 = 0$ і розміщена на відстані дві одиниці від прямої $4x - 3y = 0$. Знайти координати точки A.

165. Точка A належить прямій $x + y = 8$ і розміщена на однаковій відстані від точки B (2; 8) і від прямої $x - 3y + 2 = 0$. Знайти координати точки A.

166. Гіпотенуза прямокутного трикутника лежить на прямій $2x + y - 2 = 0$, а точка C (3; —1) є вершиною прямого кута. Площа трикутника дорівнює $\frac{9}{4}$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать катети.

167. Скласти рівняння сторін трикутника, якщо відомі одна з його вершин (2; —4) і рівняння бісектрис двох кутів: $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$.

168. Задано рівняння $3x + y - 3 = 0$, $3x + 4y = 0$ двох сторін трикутника і рівняння $x - y + 5 = 0$ бісектриси одного з його внутрішніх кутів. Скласти рівняння третьої сторони.

169. Скласти рівняння бісектриси гострого кута між двома прямими $x + y + 1 = 0$ і $x - 7y - 3 = 0$.

170. Скласти рівняння бісектриси того кута між двома прямими $x + y + 2 = 0$, $x + 7y + 3 = 0$, в якому лежить точка A (2; —1).

§ 4. ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

4.1. Загальне рівняння площини та його дослідження

$Ax + By + Cz + D = 0$ — загальне рівняння площини;

$\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ — нормальний вектор (перпендикулярний до площини);

$D = 0,\ Ax + By + Cz = 0$ — рівняння площини, що проходить через точку $O\ (0;\ 0;\ 0)$;

$C = 0,\ Ax + By + D = 0$ — рівняння площини, паралельної осі Oz;

$C = D = 0,\ Ax + By = 0$ — рівняння площини, що проходить через вісь Oz;

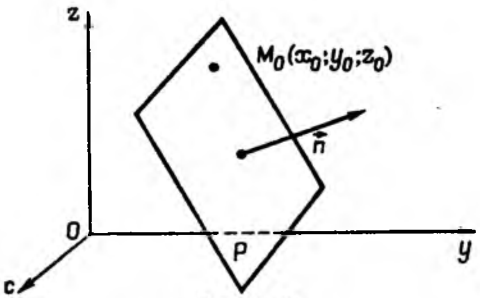


Рис. 3.13

$B = C = 0,\ Ax + D = 0$ — рівняння площини, паралельної площині Oyz;

$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ — рівняння координатних площин;

$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) + C\ (z - z_0) = 0$ — рівняння площини P, що проходить через точку $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ і має нормальний вектор $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ (рис. 3.13).

171. Точка $P\ (2;\ -1;\ -1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

172. Задано дві точки: $M_1\ (3;\ -1;\ 2)$ і $M_2\ (4;\ -2;\ -1)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

173. Скласти рівняння площини, що проходить:
1) через точки $M_1\ (1;\ -3;\ 2)$ і $M_2\ (-2;\ 1;\ 4)$ паралельно осі Ox;
2) через точки $P_1\ (-2;\ 1;\ -3)$ і $P_2\ (1;\ -3;\ -4)$ паралельно осі Oy;
3) через точки $Q_1\ (4;\ -1;\ 1)$ і $Q_2\ (0;\ -2;\ -3)$ паралельно осі Oz.

174. Скласти рівняння площини, що проходить:
1) через вісь Ox і точку $M_1\ (-1;\ 1;\ -3)$;
2) через вісь Oy і точку $M_2\ (1;\ -2;\ 5)$;
3) через вісь Oz і точку $M_3\ (2;\ 3;\ -4)$.

175. Скласти рівняння площини, що проходить:
1) через точку $M_1\ (-2;\ 3;\ -1)$ паралельно площині Oxy;
2) через точку $M_2\ (4;\ -1;\ 5)$ паралельно площині Oxz;
3) через точку $M_3\ (-3;\ -2;\ 2)$ паралельно площині Oyz.

176. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 і M_2 паралельно вектору $\vec{a}$, якщо:

а) $M_1\ (1;\ 2;\ 0)$, $M_2\ (2;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}\ (3;\ 0;\ 1)$; б) $M_1\ (1;\ 1;\ 1)$, $M_2\ (2;\ 3;\ -1)$, $\vec{a} = (0;\ -1;\ 2)$.

177. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1, паралельно векторам $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, якщо:

а) $M\ (1;\ 1;\ 1)$, $\vec{a}_1 = (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_2 = (-1;\ 0;\ 1)$; б) $M\ (0;\ 1;\ 2)$, $\vec{a}_1 = (2;\ 0;\ 1)$, $\vec{a}_2 = (1;\ 1;\ 0)$.

4.2. Різні види рівнянь площини

Площина в декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ може бути задана рівняннями:

1) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ — рівняння площини у відрізках на осях, де a, b, c — величини відрізків, що їх відтинає площина на координатних осях Ox, Oy, Oz відповідно;

2)
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

— рівняння площини, що проходить через три точки (які не лежать на одній прямій) $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$.

Відстань від точки $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ визначають за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

178. Скласти рівняння площини, що проходить через три задані точки M_1, M_2 і M_3, якщо:

а) $M_1\ (1;\ 2;\ 0)$, $M_2\ (2;\ 1;\ 1)$, $M_3\ (3;\ 0;\ 1)$; б) $M_1\ (1;\ 1;\ 1)$, $M_2\ (0;\ -1;\ 2)$, $M_3\ (2;\ 3;\ -1)$.

179. Обчислити об'єм піраміди, яку відтинає площина $6x + 2y - 3z + 12 = 0$ від координатного кута.

180. Визначити напрямні косинуси та координати нормального вектора площини, що проходить через три точки: $M_1\ (-1;\ 2;\ 0)$, $M_2\ (3;\ -1;\ -2)$, $M_3\ (0;\ -1;\ 2)$.

181. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M\ (-1;\ 2;\ 3)$ і відтинає від осей Ox та Oy відрізки $a = 2$, $b = -1$.

182. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M\ (2;\ -1;\ 1)$ і відтинає від осей координат рівні між собою відрізки.

183. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1\ (1;\ -3;\ 5)$ і відтинає на осях Oy і Oz вдвічі більші відрізки, ніж на осі Ox.

184. Знайти відстань від точки $M\ (1;\ 5;\ 4)$, до площини, що відтинає на осях координат відрізки $a = 1$, $b = 5$ та $c = 4$.

185. Знайти відстань від початку координат до площини, що проходить через точки $A\ (1;\ -1;\ 0)$, $B\ (2;\ 1;\ -1)$, $C\ (1;\ -1;\ -2)$.

186. Обчислити висоту h_s піраміди з вершинами S (0; 6; 4), A (3; 5; 3), B (—2; 11; —5) та C (1; —1; 1).

187. Написати рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути між площинами:

а) $x - 2y + 5z - 11 = 0$ і $2x + y + 5z - 5 = 0$;

б) $3x + y - z - 1 = 0$ і $x - 3y + z - 3 = 0$.

188. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від площин

$$x + 4y - 3z - 2 = 0 \text{ і } 5x + z + 8 = 0.$$

189. Обчислити об'єм куба, дві грані якого лежать на площинах

$$2x - y + 3z + 9 = 0 \text{ і } 2x - y + 3z - 4 = 0.$$

190. На відстані трьох одиниць від площини $3x - 6y - 2z + 14 = 0$ провести площину, паралельну їй.

191. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від площин $x + 5y - 2z - 3 = 0$ і $x + 5y - 2z + 1 = 0$.

192. Скласти рівняння площини, якщо точки A (1; —2; 0) і B (3; 2; 6) симетричні щодо неї.

193. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через точку A (2; 3; —4) і відтинає на осях Ox і Oz відрізки завдовжки 2 і 4, а також площиною, що проходить через точку B (0; 1; 0) паралельно площині Oxz. Скласти рівняння п'яти площин, що обмежують дане тіло, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

194. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через точку A (1; 0; 0) паралельно площині Oyz, а також площиною, що проходить через точку B (2; 1; 1) і відтинає на осях Ox і Oy відрізки *2* і *3*. Скласти рівняння всіх площин, що обмежують дане тіло, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

195. Тіло обмежене площинами Oxy і Oyz, площиною, що проходить через точки (2; 0; 0), (—2; 3; 3), (0; 1; 2), площиною, що проходить через точку $\left(\frac{4}{3};\ 1;\ 0\right)$ та вісь Oz, а також площиною, що проходить через точку (0; 2; 0) паралельно площині Oxz. Скласти рівняння всіх площин, що обмежують дане тіло, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

196. Призма обмежена площиною Oxy, площиною, що проходить через точку (0; 0; 3) паралельно осям Ox та Oy, площиною, що проходить через вісь Oz і точку (1; 1; 0), площиною, що проходить через точки (0; 0; 0), (0; 0; 1), (2; 1; 0), а також площиною, що проходить через точки (6; 0; 0) і (0; 3; 0) паралельно осі Oz. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти об'єм і зобразити її графічно.

197. Призма обмежена площиною Oxz, площиною, що проходить через точку (0; 3; 0) паралельно площині Oxz, площиною, що проходить через вісь Oy і точку (1; 0; 1), площиною, що проходить через точки (0; 1; 0), (0; 2; 0), (1; 0; 2), і площиною, що проходить через точку (—1; 0; 2) перпендикулярно до осі Oz. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти об'єм і зобразити її графічно.

198. Зрізана піраміда обмежена координатними площинами, площиною, що проходить через точку (—2; 3; 4) і відтинає на осях Oy і Oz відрізки *3* і *4*, та площиною, що проходить через точки (—1; 2; 0), (2; 2; —1), (0; 2; 1). Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

199. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що паралельна осі Oy і відтинає на осях Ox і Oz відрізки *2* і *3*, а також площиною, що проходить через точки (—2; 5; 3), (0; 0; 3), (2; 5; —3). Скласти рівняння всіх граней тіла, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

200. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через точки (0; 0; 1), (—2; 3; 1), (4; 0; —1), площиною, що проходить через точку (1; 0; 1) і відтинає на осях Ox і Oz рівні між собою відрізки завдовжки дві одиниці. Скласти рівняння всіх граней тіла, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

4.3. Кут між двома площинами. Умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Кут між двома площинами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ знаходять за формулою

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності площин:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Умова паралельності площин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Дві площини збігаються, якщо справджуються рівності

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

201. З'ясувати взаємне розміщення заданих площин та обчислити косинус кута між ними, якщо:

1) $x - 2y + z - 1 = 0$, $y + 3z - 1 = 0$;

2) $2x - y + z - 1 = 0$, $4x - 2y + 2z + 1 = 0$;

3) $x - y + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$;

4) $2x - y - z + 1 = 0$, $-4x + 2y + 2z - 2 = 0$.

202. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_0 (1; 0; —1) і:

1) паралельна площині $2x - y + 3z = 0$;

2) перпендикулярна до площин $x + 2y + 1 = 0$ і $3x - 2y + z - 4 = 0$;

3) точку $M_1(1; -1; 2)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z + 5 = 0$;

4) лінію перетину двох площин $2x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 2y - z + 3 = 0$.

203. Знайти косинус кута між площиною, що проходить через точки $O(0; 0; 0)$, $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(1; 1; 1)$, та площиною:

а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

204. Скласти рівняння площини, що утворює з площиною $x - y = 0$ кут $60°$ і проходить:

а) через вісь Ox; б) через вісь Oy.

205. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $4x - y + 3z - 6 = 0$ і $x + 5y - z + 10 = 0$, і перпендикулярна до площини $2x - y + 5z - 5 = 0$.

206. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину двох площин $x + 2y - z = 0$ і $2x - y + z - 3 = 0$ перпендикулярно до площини, що проходить через точки $(1; 1; 1)$, $(0; 0; 1)$, $(2; 0; 0)$.

207. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через точку $(0; 0; -3)$ та лінію перетину площин $2x + 3y - 6 = 0$ і Oxy, площиною, що проходить через точку $(0; 0; -2)$ паралельно площині Oxy, а також площиною, що проходить через точку $(1; 0; -2)$ перпендикулярно до осі Ox. Скласти рівняння всіх площин, що обмежують дане тіло, знайти його об'єм і зобразити тіло графічно.

208. Призма обмежена площиною, що проходить через точку $(1; 2; 3)$ паралельно площині Oyz, площиною, що проходить через лінії перетину площин $x = 3$ і $y = 0$ та $x = 3$ і $z = 0$, площинами Oxz і Oxy, а також площиною, яка проходить через дві точки $(0; -3; 4)$ та $(1; 3; 0)$ паралельно осі Ox. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти об'єм і зобразити її графічно.

209. Призма обмежена площинами Oyz і Oxy, площиною, що проходить через точку $(-2; 0; 3)$ перпендикулярно до осі Oz, площиною, що проходить через точки $(1; 1; -1)$, $(0; 2; 2)$, $(2; 0; 1)$, і площиною, що проходить через точки $(2; 0; 0)$ і $(-2; 6; 0)$ перпендикулярно до площини Oxy. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти її об'єм і зобразити призму графічно.

§ 5. ПРЯМА ЛІНІЯ В ПРОСТОРІ

5.1. Різні види рівнянь прямої в просторі

Пряма у просторі може бути задана:

1) загальними рівняннями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

де $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — рівняння площин, що перетинаються по прямій;

2) параметричними рівняннями

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt,$$

де $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — задана точка, що належить прямій, $\vec{s} = (m; n; p)$ — напрямний вектор прямої;

3) канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

4) рівняннями прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ є

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

210. Пряма задана загальними рівняннями. Скласти канонічні та параметричні рівняння цієї прямої, якщо:

а) $\begin{cases} 2x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0. \end{cases}$

211. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 і M_2, якщо:

а) $M_1(1; -2; 1)$, $M_2(3; 1; -1)$; б) $M_1(3; -1; 0)$, $M_2(1; 0; -3)$.

212. Знайти сліди прямих:

а) $\begin{cases} x - z - 5 = 0, \\ y + 2z - 4 = 0; \end{cases}$ б) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$

в площинах Oxy і Oxz та побудувати прямі.

213. Привести до канонічного виду рівняння прямих

1) $\begin{cases} y = 3, \\ z = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2, \\ z = x + 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4, \\ z = y \end{cases}$

та побудувати прямі.

214. Написати рівняння траєкторії руху матеріальної точки $M(x; y; z)$, що вийшла з точки $A(4; -3; 1)$ і рухається із швидкістю $\vec{v}(2; 3; 1)$.

215. Задано рівняння руху точки $M(x; y; z)$:

$$x = 3 - 4t, \; y = 5 + 3t, \; z = -2 + 12t.$$

Визначити її швидкість.

216. Нехай $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$ — рівняння руху точки $M(x; y; z)$. Визначити шлях s, пройдений точкою M за проміжок часу від $t_0 = 0$ до $t_1 = 7$.

217. Скласти рівняння ребер тетраедра з вершинами у точках. $A\ (1;\ -1;\ 0)$, $B\ (2;\ 0;\ -2)$, $C\ (0;\ 4;\ -3)$ та $D\ (-1;\ 2;\ -2)$.

218. Написати рівняння площин, що проектують пряму

$$\begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

на три координатні площини.

219. Якими рівняннями можна зобразити проекції прямої

$$\begin{cases} 3x + 2y - z + 5 = 0, \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

на координатні площини?

220. Перевірити, чи лежать три точки M_1, M_2, M_3 на одній прямій, якщо:

а) $M_1\ (1;\ -1;\ 2)$, $M_2\ (-2;\ 0;\ 1)$ і $M_3\ (0;\ -3;\ -4)$;

б) $M_1\ (3;\ 0;\ 1)$, $M_2\ (0;\ 2;\ 4)$ і $M_3\ (1;\ 4/3;\ 3)$.

221. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (1;\ -5;\ 3)$ і утворює з осями координат кути, що відповідно дорівнюють $60°$, $45°$ і $120°$.

5.2. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності прямих

Кут між двома прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ і } \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

обчислюють за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умова паралельності прямих

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Умова перпендикулярності прямих

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

222. Визначити кут, утворений прямими

$$x + 1 = y - 1 = -(z + 2) \text{ та } \frac{x + 5}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{2}.$$

223. Обчислити кути, утворені протилежними ребрами тетраедра з вершинами $A\ (3;\ -1;\ 0)$, $B\ (0;\ -7;\ 3)$, $C\ (-2;\ 1;\ -1)$ та $D\ (3;\ 2;\ 6)$.

224. Обчислити кут між прямими

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \text{ і } \begin{cases} 3x + y - 5z = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 1 = 0. \end{cases}$$

225. Довести паралельність прямих:

а) $\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ та $\dfrac{x + 7}{3} = \dfrac{y - 5}{-1} = \dfrac{z - 9}{4}$;

б) $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ y + 4z = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0, \\ 3x + 4y + 7z = 0. \end{cases}$

226. Довести, що пряма $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x - z - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$

227. Знайти косинус кута між прямими

а) $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0, \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0, \\ 3x - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ та $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

228. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0\ (2;\ 0;\ -3)$ паралельно:

а) вектору $\vec{s} = (2;\ -3;\ 5)$; б) прямій $\dfrac{x - 1}{5} = \dfrac{y + 2}{2} = \dfrac{z + 1}{-1}$;

в) осі Ox; г) осі Oz;

д) прямій $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0; \\ x + 3y - 2z - 3 = 0; \end{cases}$

е) прямій $x = -2 + t$, $y = 2t$, $z = 1 - \frac{1}{2}t$.

229. У площині Oxz знайти пряму, що проходить через початок координат перпендикулярно до прямої $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = \dfrac{z - 5}{1}$.

230. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A\ (2;\ 3;\ 1)$ на пряму $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z - 2}{3}$.

231. Скласти рівняння загального перпендикуляра до двох прямих: $\dfrac{x - 7}{1} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 9}{-1}$ та $\dfrac{x - 3}{-7} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 1}{3}$.

232. Задано вершини трикутника $A\ (3;\ -1;\ -1)$, $B\ (1;\ 2;\ -7)$, $C\ (-5;\ 14;\ -3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

233. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A\ (3;\ 2;\ 1)$ на вісь Ox.

5.3. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут між прямою $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ і площиною $Ax+By+Cz+D=0$ знаходять за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Умова паралельності прямої і площини

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Точку перетину прямої і площини знаходять із системи рівнянь

$x=x_0+mt,\ y=y_0+nt,\ z=z_0+pt,\ Ax+By+Cz+D=0.$

234. Скласти рівняння площини, що проходить через точку A (1; —2; 3) і пряму $\begin{cases}2x-3y+z-3=0,\\ x+3y+2z+1=0.\end{cases}$

235. Задано пряму $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{0}$ і точку M (0; 1; 2). Треба:

а) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму і точку M;

б) скласти рівняння площини, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої;

в) обчислити відстань від точки до прямої;

г) знайти проекцію точки M на задану пряму.

236. Задано площину $x-y-z+1=0$ і пряму

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

Треба:

а) обчислити синус кута між площиною і прямою;

б) координати точки перетину прямої і площини;

в) скласти рівняння площини, що проходить через задану пряму перпендикулярно до площини.

237. При якому значенні коефіцієнта A площина $Ax+2y-z+5=0$ паралельна прямій $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{2}$?

238. При яких значеннях коефіцієнтів A і B площина $Ax+By+9z-1=0$ перпендикулярна до прямої $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-3}{3}$?

239. Переконатися, що задані прямі лежать в одній площині, і скласти рівняння цієї площини:

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ і $\frac{x-7}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-2}$;

б) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-2}$ і $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}$.

240. Через точку M_0(1; 1; 1) провести пряму паралельно площинам

$$x+y+z+1=0 \text{ і } x-y-z+2=0.$$

241. Знайти проекцію точки P_0 (—1; 3; 2) на площину $x-2y+5z+27=0$.

242. Знайти точку B, симетричну точці A (1; 3; —4) щодо площини $3x+y-2z=0$.

243. Знайти проекцію точки P (1; 2; 3/2) на пряму $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{2}$.

244. Знайти проекцію точки A (191; —1; 0) на площину, що містить прямі $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ і $x=3t+7,\ y=2t+2,\ z=1-2t$.

245. Знайти проекцію точки перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{2}=z$ з площиною Oxz на пряму $\begin{cases}x-2y+3z=0,\\ 2x+y+z-5=0.\end{cases}$

246. Дано точки A (3; 2; —1), B (0; —1; 0), C (0; 1; 1). Через пряму AB проведено площину паралельно осі Oy. Знайти проекцію точки C на цю площину.

247. Скласти рівняння та знайти довжину перпендикуляра, опущеного з точки (1; 0; 4) на пряму $\begin{cases}x-y+z-1=0,\\ 2x+y-z+4=0.\end{cases}$

248. Знайти точку, симетричну точці A (1; 0; —1) щодо площини, що містить прямі $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=z+2$ та $\begin{cases}3x-y-2=0,\\ y-3z-7=0.\end{cases}$

249. Знайти відстань від точки A (1; —1; 0) до прямої, що проходить через точки B (0; 1; 2) і C (—1; 0; 3).

250. Переконатися, що прямі $\begin{cases}2x+2y-z=0,\\ x-y-z-1=0\end{cases}$ і $\frac{x}{3}=\frac{y+30}{-1}=\frac{z-2}{4}$ паралельні між собою, та знайти відстань між ними.

251. Скласти рівняння прямої, паралельної площинам $x-y+z-1=0$ і $2x+y=0$, що перетинала б прямі $x=y=z$ і $x=2t,\ y=t-1,\ z=-t$.

252. Знайти точку, симетричну точці P (1; —2; —6) щодо прямої
$\begin{cases} x - y + 2z + 1 = 0, \\ x - z + 2 = 0. \end{cases}$

253. Знайти відстань від точки P (—1; 3; 3) до прямої $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}$.

254. Знайти відстань між прямими
$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0, \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ і $\frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}$.

255. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину площини $2x + y - 3z + 1 = 0$ з прямими
$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{2} \text{ і } \frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+4}{-6}.$$

256. Провести площину через перпендикуляри, опущені з точки M_0 (—3; 2; 5) на площини $4x + y - 3z + 13 = 0$ і $x - 2y + z - 11 = 0$.

257. Через точку A (0; —1; 2) проведено площину перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 3y - z + 1 = 0. \end{cases}$ Під яким кутом ця площина перетинає координатну площину Oxy? Скласти рівняння лінії їх перетину.

258. Дано вершини піраміди A (0; 0; 1), B (1; 0; —1), C (1; 2; 3), D (1; 0; 1). Знайти проекцію її ребра AD на площину ABC.

259. Дано вершини піраміди A (0; 1; 2), B (—1, 0; 0), C (1; —1; —1), D (0; 2; 2). Знайти кут між ребром піраміди AD і її висотою DE.

260. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку (0; 1; —2), перетинає вісь Oz і паралельна площині $x - 2y + z - 1 = 0$. Який кут утворює ця пряма з віссю Ox?

261. Знайти кут між прямою $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + z + 3 = 0 \end{cases}$ та площиною що проходить через точки (1; 2; 3) і (0; 1; —2) перпендикулярно до площини Oyz.

262. Дано вершини трикутника A (1; —1; 2), B (0; 1; 4), C (—2; 1; 0). Висота BH перетинає основу AC в точці H. Знайти довжину AH.

263. Дано вершини трикутника A (—1; 2; 3), B (0; 0; —1), C (2; 0; —1). Скласти рівняння площини, що проходить через медіану AD цього трикутника перпендикулярно до площини ABC.

264. Дано вершини трикутника A (—1; 0; 0), B (2; 3; —1), C (0; 1; —3). Скласти рівняння площини, що проходить через вершину, трикутника C перпендикулярно до висоти AH.

265. Дано вершини піраміди A (1; 2; —1), B (0; 0; 1), C (—1; 0; 1),

D (—2; —1; 0). Скласти рівняння площини, що містить ребро AB і висоту AK основи ACD цієї піраміди.

266. Скласти рівняння прямої, що міститься в площині $x - y + 2z + 2 = 0$ і перетинає прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$ і
$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y + 2z - 4 = 0. \end{cases}$
Знайти і побудувати відрізок прямої, який лежить між точками перетину прямих.

267. Піраміда обмежена площиною Oyz, площиною, що проходить через точку (0; 0; 1) паралельно площині Oxy, площиною, що проходить через точку (1; 2; 0) і містить вісь Oz, а також площиною, що проходить через точку (0; 3; 0) і пряму $\frac{x}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z-4}{0}$. Скласти рівняння всіх граней піраміди, обчислити об'єм і зобразити її графічно.

268. Піраміда обмежена площинами Oxy і Oyz, площиною, що проходить через точку (0; 0; 3) і пряму $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$, а також площиною, що проходить через точки (0; 0; 3) і (0; 1; 0) паралельно осі Ox. Скласти рівняння всіх граней піраміди, обчислити об'єм і зобразити її графічно.

269. Піраміда обмежена площинами Oxy і Oxz, площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} = z - 1$ і $x = t$, $y = 2$, $z = t$, і площиною, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x - z - 3 = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ паралельно осі Oy. Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

270. Піраміда обмежена площиною, що проходить через осі Ox і Oz, площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3} = y - 1 = \frac{z-1}{3}$ і $x = \frac{y-3}{-2} = z$, площиною Oyz і площиною, що проходить через точки (0; 0; 2) і (0; 3; 0) паралельно осі Ox. Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

271. Призма обмежена площинами Oxy і Oxz, площиною, що проходить через точку (1; 3; 2) перпендикулярно до осі Oy, площиною, що проходить через вісь Oy і точку (1; 0; 1), і площиною, що проходить через пряму $\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z-1}{2}$ паралельно осі Oy. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти об'єм і зобразити її графічно.

272. Тіло, обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через точки (0; 0; 2), (—1; 2; 3), (1; 1; 1), і площиною, що проходить через пряму $x = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-2}$ перпендикулярно до площини Oyz. Скласти рівняння всіх граней, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

273. Піраміда обмежена координатними площинами, площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3} = y - 1 = z$ і $x = t - 1$, $y = t + 3$, $z = t + 2$, і площиною, що перпендикулярна до площини Oxz і відтинає на осях Ox і Oz відрізки *2* і *3*. Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

274. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через пряму $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ і точку (0; 0; 3), та площиною, що проходить через точки (0; 3; 0) і (0; 0; —3) паралельно осі Ox. Скласти рівняння всіх граней, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

275. Зрізана піраміда обмежена координатними площинами, площиною, що проходить через прямі $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{3}$ і $x = \frac{y}{-3} = z - 2$, і площиною, що проходить через точку (2; 6; 1) перпендикулярно до осі Oz. Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

276. Призма обмежена площинами Oxz і Oxy, площиною, що проходить через точку (1; 3; —1) паралельно площині Oxz, площиною, що через пряму $\frac{x}{2} = y = \frac{z-3}{-3}$ і точку $\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$, і площиною, що проходить через точки (4; 0; 0) і (0; 1; 3) паралельно осі Oy. Скласти рівняння всіх граней призми, знайти об'єм і зобразити її графічно.

277. Піраміда обмежена площинами Oyz і Oxy, площиною, що проходить через пряму $\frac{x}{2} = y - 2 = \frac{z-1}{4}$ і точку (0; 3; 0), і площиною, що проходить через точку (4; —1; 0) і відтинає на осях Ox і Oz відрізки *2* і *3*. Скласти рівняння всіх граней піраміди, знайти об'єм і зобразити її графічно.

278. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через прямі $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{8} = \frac{z}{-2}$ і $x = 0$, $y = 2t$, $z = 2 - t$, і площиною, що проходить через точку (1; 0; 1) і відтинає на осях Ox і Oz рівні між собою відрізки завдовжки 2. Скласти рівняння граней, знайти об'єм і зобразити тіло графічно.

279. Тіло обмежене координатними площинами, площиною, що проходить через пряму $\begin{cases} x - y = 0, \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно до площини Oyz, і площиною, що проходить через прямі $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$ і $x = 3t - 1$, $y = t + 1$, $z = 3 - 3t$. Скласти рівняння граней, знайти об'єм і зобразити задане тіло графічно.

§ 6. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1. Коло

Рівняння $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ визначає коло (рис. 3.14) з центром у точці C (x_0, y_0) і радіусом R. Зокрема, якщо центром кола є початок координат ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), то рівняння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

280. Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

1) центром кола є точка C (2; —3), а радіус $R = 7$;

2) центром кола є точка C (6; —8) і коло проходить через початок координат;

3) точки A (3; 2) і B (—1; 6) є кінцями одного з діаметрів кола;

4) центром кола є точка C (1; —1), а пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола;

5) коло проходить через точки A (3; 1) і B (—1; 3), а центр лежить на прямій $3x - y - 2 = 0$;

6) коло проходить через три точки: M_1 (—1; 5), M_2 (—2; —2) і M_3 (5; 5);

7) коло проходить через точку M (1; 2) і дотикається до координатних осей.

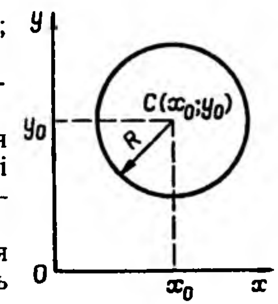


Рис. 3.14

281. Скласти рівняння кола, що дотикається до двох паралельних прямих $2x + y - 5 = 0$ і $2x + y + 15 = 0$, причому до однієї з них — у точці A (2; 1).

282. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Ox у початку координат і перетинає вісь Oy у точці M (0; —8).

283. Скласти рівняння кола, що дотикається до осі Oy у початку координат і перетинає вісь Ox у точці M (4; 0).

284. Встановити, що кожне з рівнянь визначає коло, знайти його центр C та радіус R:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$;

б) $x^2 + y^2 - 8x = 0$; в) $x^2 + y^2 + 4y = 0$;

г) $2x^2 + 2y^2 - 12x + y + 3 = 0$;

д) $7x^2 + 7y^2 - 2x - 7y - 1 = 0$.

285. Написати рівняння діаметра кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$, перпендикулярного до прямої $5x + 2y - 13 = 0$.

286. Знайти тангенс кута між радіусами кола $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$, проведеними через точки перетину його з віссю Oy.

287. Знайти кут між радіусами кола $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$, проведеними через точки перетину його з віссю Ox.

288. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y = \sqrt{9 - x^2}$; 2) $y = -\sqrt{25 - x^2}$; 3) $x = -\sqrt{4 - y^2}$;

4) $x = \sqrt{16 - y^2}$; 5) $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$; 6) $y = 15 - \sqrt{64 - x^2}$; 7) $x = -2 - \sqrt{9 - y^2}$; 8) $x = -2 + \sqrt{9 - y^2}$; 9) $y = -3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$; 10) $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

289. Визначити, при яких значеннях кутового коефіцієнта k пряма $y = kx$:

1) перетинає коло $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;
2) дотикається до цього кола; 3) не має спільних з ним точок.

290. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 3x - y = 0 \text{ та } 3x^2 + 3y^2 + 2x + y = 0.$$

291. Обчислити відстань від центра кола $x^2 + y^2 - 2x = 0$ до прямої, що проходить через точки перетину двох кіл:

$$x^2 + y^2 + 5x - 8y + 1 = 0 \text{ та } x^2 + y^2 - 3x + 7y - 25 = 0.$$

292. Визначити довжину спільної хорди двох кіл:

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \text{ та } x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0.$$

293. Написати рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$, проведених з початку координат.

294. Скласти рівняння дотичних до кола, що проходять через точку $M_0(x_0; y_0)$, якщо:

а) $M_0(1; -2)$, а рівняння кола $x^2 + y^2 = 5$;
б) $M_0(0; 5)$, а рівняння кола $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 17 = 0$.

295. З точки $P(-9; 3)$ проведені дотичні до кола $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 78 = 0$. Обчислити відстань від центра кола до хорди, що сполучає точки дотику.

296. З точки $P(4; -4)$ проведено дотичні до кола $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Обчислити довжину хорди, що сполучає точки дотику.

297. Обчислити довжину дотичної, проведеної з точки $P(1; -2)$ до кола $x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$.

298. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, паралельних прямій $2x + y - 7 = 0$.

299. Скласти рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$, перпендикулярних до прямої $x - 2y + 9 = 0$.

6.2. Еліпс

Канонічне рівняння еліпса (рис. 3.15) має вигляд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$, $a > b$.

Відстані між вершинами називаються *осями еліпса: велика (фокальна) вісь* $A_2A_1 = 2a$ *і мала вісь* $B_2B_1 = 2b$, *відстань між фокусами* $F_2F_1 = 2c$; a, b — *півосі еліпса*.

Ексцентриситет ε еліпса визначається рівністю $\varepsilon = \frac{c}{a}$, очевидно, $0 < \varepsilon < 1$. $F_1M = r_1$ і $F_2M = r_2$ — *фокальні радіуси точки* M. Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — *директриси еліпса.*

Рівняння дотичної до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *у точці* $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Еліпс з центром у точці $C(x_0; y_0)$ задається рівнянням

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

300. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично щодо початку координат, якщо:

1) його півосі відповідно дорівнюють 4 і 2;
2) відстань між фокусами $2c = 6$, а більша вісь $2a = 10$;
3) більша вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$;
4) менша вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c = 8$;
6) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

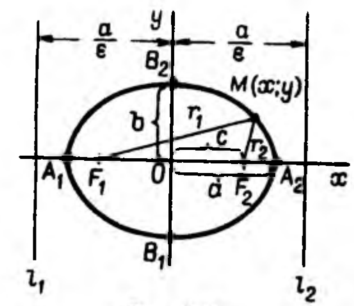


Рис. 3.15

301. Задано рівняння еліпса $25x^2 + 169y^2 = 4225$. Визначити:

1) довжину осей; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет; 4) координати точок еліпса, відстань яких до лівого фокуса F_1 дорівнює 14.

302. Задано рівняння еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Визначити:

1) його осі; 2) координати фокусів; 3) ексцентриситет.

303. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2 + 5y^2 = 20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

304. Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $9x^2 + 5y^2 = 1$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

305. Меридіан земної кулі має форму еліпса, відношення осей якого дорівнює 299/300. Визначити ексцентриситет земного меридіана.

306. Земля рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого міститься Сонце. Найменша з віддалей від Землі до Сонця дорівнює $\approx$147 500 000, а найбільша — 152 500 000 км. Знайти більшу піввісь і ексцентриситет орбіти Землі.

307. Знайти множину середин хорд еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, паралельних прямій $x + 2y - 1 = 0$.

308. Через точку M (0; 3) провести пряму, що перетинала б еліпс $x^2 + 4y^2 = 20$ у двох точках A і B, таких, що $MA = 2MB$.

309. На еліпсі $9x^2 + 25y^2 = 225$ знайти точки, відстань яких від правого фокуса в чотири рази більша за відстань від лівого.

310. Визначити траєкторію точки M, що, рухаючись, залишається вдвічі ближчою до точки F (—1; 0), ніж до прямої $x + 4 = 0$.

311. Визначити траєкторію точки M, що, рухаючись, залишається втричі ближчою до точки A (1; 0), ніж до прямої $x - 9 = 0$.

312. Встановити, що кожне з рівнянь визначає еліпс, знайти його центр C, півосі та ексцентриситет:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

313. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$; 2) $y = 1 - \frac{4}{3}\sqrt{-6x - x^2}$;

3) $x = -2\sqrt{-5 - 6y - y^2}$; 4) $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8 + 2y - y^2}$.

Зобразити ці лінії.

314. Визначити, при яких значеннях параметра m пряма $y = -x + m$:

1) перетинає еліпс $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$;

2) дотикається до нього; 3) не має з ним спільних точок.

315. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.

316. Скласти рівняння дотичних до еліпса $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярних до прямої $2x - 2y - 13 = 0$.

317. З точки C (10; —8) проведено дотичні до еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Скласти рівняння хорди, що сполучає точки дотику.

318. З точки P (—16; 9) проведено дотичні до еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Обчислити відстань від точки P до хорди еліпса, що сполучає точки дотику.

319. Довести, що дотичні до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, проведені в кінцях одного й того самого діаметра, паралельні.

6.3. Гіпербола

Канонічне рівняння гіперболи (рис. 3.16, *а*) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \ b > 0.$$

Параметри $2a$, $2b$ — *осі гіперболи;* a, b — її *півосі;* A_1 $(-a;\ 0)$, A_2 $(a;\ 0)$ — *вершини, осі симетрії* Ox і Oy — *дійсна і уявна,* O (0; 0) — *центр гіперболи.*

Прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ — *асимптоти гіперболи.*

Точки F_1 $(-c;\ 0)$ і F_2 $(c;\ 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, — *фокуси гіперболи.* Число $\varepsilon = \frac{c}{a}$ — *ексцентриситет гіперболи* $(1 < \varepsilon < \infty)$. Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ називаються *директрисами гіперболи.*

Гіпербола, для якої $a = b$, називається *рівносторонньою,* її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот $y = \pm x$.

Гіперболи (рис. 3.16, *б*)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ і } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

називаються *спряженими.*

Дотична до гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у точці M_0 $(x_0;\ y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Рівняння гіперболи (рис. 3.16, *в*) з центром у точці C $(x_0;\ y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

а рівняння її асимптот

$$y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0).$$

320. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів;

в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

321. Побудувати гіперболу $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти:

а) півосі; б) координати фокусів;

в) ексцентриситет; г) рівняння асимптот.

322. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі абсцис симетрично щодо початку координат, якщо:

1) її осі $2a = 10$ і $2b = 8$;

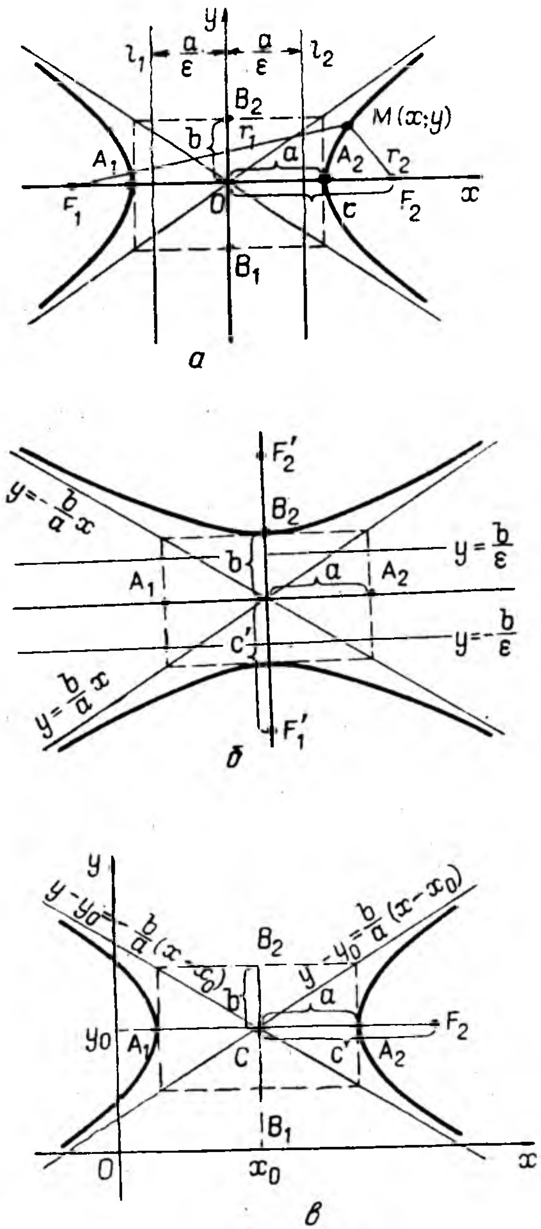


Рис. 3.16

2) відстань між фокусами $2c = 10$ і вісь $2b = 8$;
3) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет $\varepsilon = 3/2$;
4) вісь $2a = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = 5/4$;
5) рівняння асимптот $y = \pm \frac{4}{3} x$, а відстань між фокусами $2c = 20$.

323. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої лежать на осі ординат симетрично щодо початку координат, якщо:
1) її осі $2a = 16$, $2b = 36$;
2) відстань між фокусами $2c = 10$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;
3) рівняння асимптот $y = \pm \frac{12}{5} x$ і відстань між вершинами дорівнює 48.

324. Через точку M (—1; 1) провести прямі, паралельні асимптотам гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 25$.

325. Скласти рівняння діаметра гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, який ділить навпіл хорду, що лежить на прямій $3x + 2y - 1 = 0$.

326. Знайти кутовий коефіцієнт хорди гіперболи $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$, що проходить через точку M (3; —1) і поділяється в ній навпіл.

327. Знайти ті точки гіперболи $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, що лежать на відстані семи одиниць від лівого фокуса F_1.

328. Визначити кут між асимптотами гіперболи, якщо її ексцентриситет дорівнює двом.

329. На гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ знайти точку, відстань якої від лівого фокуса вдвічі більша, ніж від правого.

330. Рівняння еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Скласти рівняння гіперболи, вершини якої розміщені у фокусах, а фокуси — у вершинах даного еліпса.

331. Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ і прямою $9x + 2y - 24 = 0$.

332. Задано точку M $(10; -\sqrt{5})$ на гіперболі $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать фокальні радіуси точки M.

333. Через лівий фокус гіперболи $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ проведено перпендикуляр до її дійсної осі. Знайти відстань від фокусів до точок перетину цього перпендикуляра з гіперболою.

334. Довести, що добуток відстаней кожної точки гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ до її асимптот є величина стала і дорівнює 5,76.

335. Встановити, що кожне з рівнянь визначає гіперболу, знайти координати її центра C, осі, ексцентриситет та рівняння асимптот:

1) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;
2) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
3) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$;
4) $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$.

336. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

а) $45x^2 - 36y^2 - 90x - 24y + 41 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

337. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 4x - 5}$; 2) $y = 7 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;

3) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$; 4) $x = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{y^2 + 4y - 12}$.

338. Встановити, що кожне з рівнянь визначає гіперболу, знайти для кожної з них центр C, півосі, рівняння асимптот і побудувати їх:

1) $xy = 18$; 2) $2xy = 9$; 3) $2xy + 25 = 0$.

339. Визначити, при яких значеннях параметра m пряма $y = \frac{5}{2}x + m$:

1) перетинає гіперболу $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$;

2) дотикається до неї; 3) не має з нею спільних точок.

340. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$, паралельних прямій $10x - 3y + 9 = 0$.

341. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярних до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

342. Написати рівняння дотичних, проведених з точки $A(-1; -7)$ до гіперболи $x^2 - y^2 = 16$.

343. Визначити траєкторію точки $M(x; y)$, що при переміщенні залишається вдвічі ближчою до прямої $x = 1$, ніж до точки $F(4; 0)$.

6.4. Парабола

Канонічне рівняння параболи

$$y^2 = 2px$$

(рис. 3.17); $p > 0$ — *параметр параболи;* точка $O(0; 0)$ — *вершина;* вісь Ox — *вісь параболи;* точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ — *фокус параболи*. Пряма $x = -\frac{p}{2}$ — *директриса параболи; фокальний радіус точки* $M(x; y)$ параболи визначається рівністю $r = x + \frac{p}{2}$.

Рівняння параболи, симетричної щодо осі Oy з вершиною у початку координат (рис. 3.18), має вигляд

$$x^2 = 2py.$$

Фокус $F\left(0; \frac{p}{2}\right)$; $y = -\frac{p}{2}$ — *директриса; фокальний радіус точки* M: $r = y + \frac{p}{2}$ $(p > 0)$.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

Рівняння

$$y^2 = -2px \text{ і } x^2 = -2py \ (p > 0)$$

визначають параболи, зображені на рис. 3.19 і 3.20 відповідно.

Дотична до параболи $y^2 = 2px$ *у точці* $M_0(x_0; y_0)$ визначається рівністю $yy_0 = p(x + x_0)$.

Рівняння параболи з вершиною у точці $C(x_0; y_0)$ (рис. 3.21) має вигляд

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

344. Знайти координати фокуса і рівняння директриси параболи $y^2 = 8x$. Обчислити довжину фокального радіуса точки $M(2; 4)$.

345. Скласти канонічне рівняння параболи, якщо:

1) відстань фокуса, що лежить на осі Ox, до вершини дорівнює чотирьом;

2) відстань фокуса, розміщеного на осі Oy, до директриси дорівнює шести;

3) парабола симетрична щодо осі абсцис і проходить через точку $M(1; 2)$;

4) парабола симетрична щодо осі ординат і проходить через точку $M(5; 1)$.

346. Скласти рівняння параболи, якщо вершина її має координати $(-2; 2)$, параметр $p = 5$, а напрям її осі симетрії збігається:

1) з додатним напрямом осі Ox; 2) з від'ємним напрямом осі Ox; 3) з додатним напрямом осі Oy; 4) з від'ємним напрямом осі Oy. Побудувати ці лінії.

347. Через фокус параболи $y^2 = 4x$ проведено хорду, перпендикулярну до її осі. Визначити довжину цієї хорди.

348. Скласти рівняння спільної хорди параболи $y^2 = 18x$ і кола $x^2 + y^2 + 12x - 64 = 0$.

349. Встановити, що кожне з рівнянь визначає параболу, знайти координати її вершини C і величину параметра p:

а) $y^2 - 4x + 8 = 0$; б) $x^2 + y - 2 = 0$;
в) $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$;
г) $\frac{1}{6}x^2 - 2x + y + 7 = 0$; д) $\frac{1}{4}y^2 + x - y = 0$;
е) $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$.

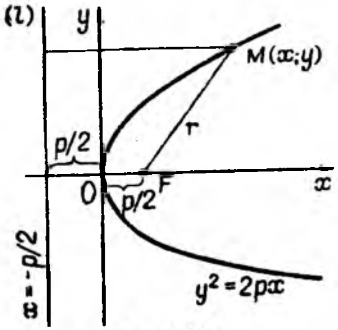


Рис. 3.17

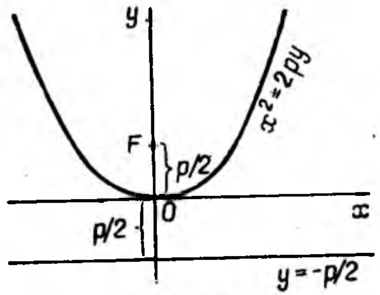


Рис. 3.18

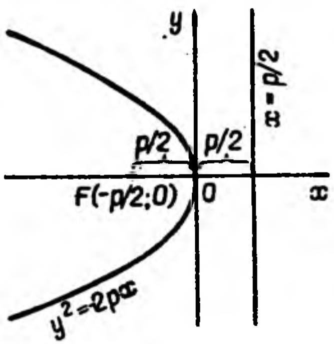


Рис. 3.19

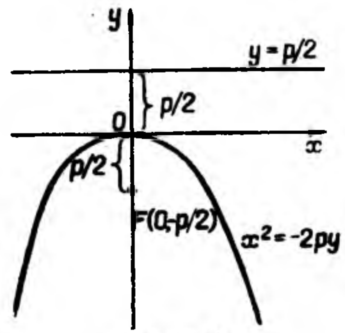


Рис. 3.20

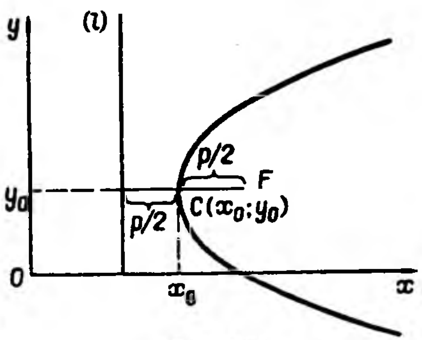


Рис. 3.21

350. Встановити, які лінії визначаються рівняннями:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = -3\sqrt{-2x}$; 3) $x = \sqrt{5y}$;
4) $x = -5\sqrt{-y}$; 5) $y = 3 - 4\sqrt{x-1}$; 6) $x = -4 + 3\sqrt{y+5}$;
7) $x = 2 - \sqrt{6-2y}$; 8) $y = -5 - \sqrt{-3x-21}$.

351. Визначити, при яких значеннях кутового коефіцієнта k пряма $y = kx + 2$:

1) перетинає параболу $y^2 = 4x$; 2) дотикається до неї;
3) не має спільних з нею точок.

352. Задано рівняння параболи $y^2 = 12x$. Провести до неї дотичну:

1) в точці з абсцисою $x = 3$;

2) паралельно прямій $3x - y + 5 = 0$;
3) перпендикулярно до прямої $2x + y - 7 = 0$;
4) яка утворює з прямою $4x - 2y + 9 = 0$ кут $\frac{\pi}{4}$.

353. Камінь, кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи і впав на відстані 16 м від початкової точки. Визначити параметр параболічної траєкторії, якщо найбільша висота, досягнута каменем, дорівнює 12 м.

354. Знайти довжину спільної хорди двох парабол $4y = 12 - x^2$ і $4x = 12 - y^2$.

355. Знайти площу чотирикутника з вершинами у точках перетину параболи $y = 4 - x^2$ з віссю Ox і прямою $y = 3x$.

356. Пояснити геометричний зміст рівнянь:

1) $4x^2 - y^2 = 0$; 2) $4x^2 + y^2 = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25 = 0$; 5) $x^2 + xy = 0$;
6) $y^2 - 16 = 0$; 7) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$.

6.5. Полярні та параметричні рівняння кривих другого порядку

Рівняння

$$x = x_0 + R\cos t,\ \ y = y_0 + R\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi)$$

є параметричними рівняннями кола (рис. 3.22) з центром у точці $C(x_0; y_0)$ і радіусом R, зокрема, якщо центр кола лежить у точці $O(0; 0)$, то рівняннями кола є

$$x = R\cos t,\ \ y = R\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi).$$

У полярній системі координат рівняння кола з центром у точці $C(\rho_0; \varphi_0)$ і радіусом R має вигляд

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \rho_0^2 = R^2,$$

зокрема, $\rho = R$, якщо центр лежить у точці $O(0; 0)$ (рис. 3.23).

Параметричними рівняннями еліпса (рис. 3.24) з центром у точці $O(0; 0)$ є

$$x = a\cos t,\ \ y = b\sin t \quad (0 \leqslant t < 2\pi),$$

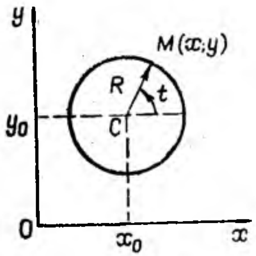
в полярній системі координат:

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - \varepsilon\cos\varphi)},$$

де $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ — ексцентриситет еліпса (рис. 3.25).

Рівняння правої гілки гіперболи в полярній системі координат

$$\rho = \frac{b^2}{a(1 - \varepsilon\cos\varphi)},$$



а

Рис. 3.22

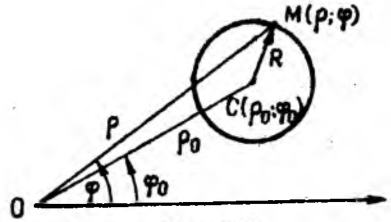


Рис. 3.23

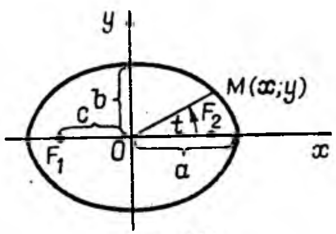


Рис. 3.24

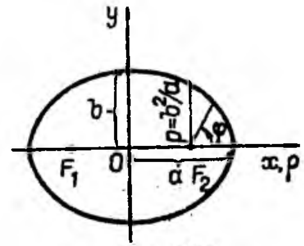


Рис. 3.25

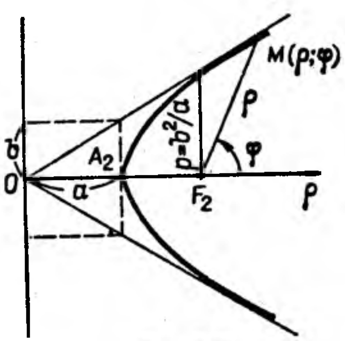


Рис. 3.26

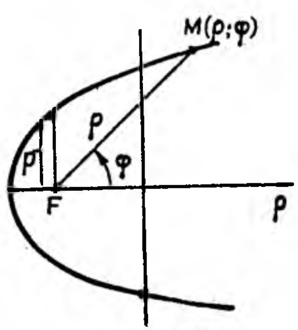


Рис. 3.27

де $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ — ексцентриситет гіперболи (рис. 3.26). Рівнянням параболи в полярній системі координат є

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos\varphi},$$

де p — параметр параболи (рис. 3.27).

У задачах 357—365, виключивши параметр t, знайти рівняння заданих кривих у декартових координатах і побудувати ці криві.

357. $x = -1 + 2\cos t,\ y = 3 + 2\sin t,\ t \in (-\infty;\ +\infty)$.

358. $x = 2R\cos^2 t,\ y = R\sin 2t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

359. $x = 4\sin 2t,\ y = 8\sin^2 t,\ t \in [0,\ \pi)$.

360. $x = 3\cos t,\ y = 4\sin t,\ t \in [0,\ 2\pi)$.

361. $x = 1 + 2\sec t,\ y = -1 + \operatorname{tg} t,\ t \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

362. $x = 3\left(t + \frac{1}{t}\right),\ y = 2\left(t - \frac{1}{t}\right),\ t \in (0,\ +\infty)$.

363. $x = 3\left(t - \frac{1}{t}\right),\ y = 2\left(t + \frac{1}{t}\right),\ t \in (0,\ +\infty)$.

364. $x = t - 1,\ y = t^2 - 2t + 1,\ t \in (-\infty,\ +\infty)$.

365. $x = 10\operatorname{ctg}^2 t,\ y = 10\operatorname{ctg} t,\ t \in \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

366. Скласти параметричне рівняння кола $x^2 + y^2 = 2Rx$, позначивши параметром t полярний кут, якщо полярна вісь має напрям Ox, а полюс лежить:

а) у початку координат; б) у центрі кола.

367. Скласти параметричні рівняння параболи $y^2 = 2px$, вибираючи за параметр t:

а) ординату y;

б) кут між віссю Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$, відраховуючи його проти годинникової стрілки;

в) кут між віссю Ox і фокальним радіусом-вектором $\overrightarrow{FM}$.

368. Записати рівняння кола $x^2 + 2x + y^2 - 6y - 6 = 0$ в параметричній формі.

369. Записати в параметричній формі рівняння кіл:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$; 2) $x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$.

370. Скласти параметричні рівняння еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, приймаючи за параметр t кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$, відраховуючи його проти годинникової стрілки.

371. Скласти параметричні рівняння гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, приймаючи за параметр t кут між віссю Ox і радіусом-вектором $\overrightarrow{OM}$, відраховуючи його проти годинникової стрілки.

372. Записати рівняння кіл у полярних координатах:

1) $x^2 + y^2 = 25$; 2) $x^2 + y^2 - 4x = 0$; 3) $x^2 + y^2 + 3y = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$; 5) $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 1 = 0$.

373. Скласти рівняння кола в полярній системі координат, якщо радіус кола $R = 5$, а центр його лежить:

1) у полюсі; 2) у точці $C(5; 0)$; 3) у точці $C\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$.

374. Скласти рівняння еліпса з півосями 4 і 2, прийнявши його фокальну вісь за полярну, а полюс розмістивши:

1) у лівому фокусі еліпса; 2) у правому фокусі еліпса.

375. Для правої гілки гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ записати рівняння у полярних координатах, якщо полярна вісь збігається з віссю Ox, а полюс лежить:

а) у лівому фокусі; б) у правому фокусі.

376. Обчислити довжину осей і відстань між двома фокусами еліпса $\rho = \frac{3\sqrt{2}}{2 - \cos\varphi}$.

377. Скласти рівняння асимптот гіперболи $\rho = \frac{2}{1 - \sqrt{2}\cos\varphi}$.

378. Обчислити кут між асимптотами гіперболи $\rho^2 = \frac{48}{4\cos^2\varphi - 1}$.

379. Скласти рівняння параболи з параметром $p = 4$, приймаючи її вісь симетрії за полярну, а вершину розмістивши у полюсі.

380. Скласти рівняння параболи з параметром p, фокус якої лежить у полюсі, а вісь збігається з полярною.

381. Записати канонічні рівняння кривих другого порядку:

1) $\rho = 4$; 2) $\rho = 2a\sin\varphi$; 3) $\rho = 2a\cos\varphi$;

4) $\rho = \frac{9}{5 - 4\cos\varphi}$; 5) $\rho = \frac{9}{4 - 5\cos\varphi}$; 6) $\rho = \frac{3}{1 - \cos\varphi}$.

382. Визначити полярні та декартові координати центрів і радіуси кожного з наступних кіл:

а) $\rho = 4\cos\varphi$; б) $\rho = 3\sin\varphi$; в) $\rho = -5\sin\varphi$;

г) $\rho = 6\cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$; д) $\rho = 8\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$; е) $\rho = 8\sin\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$.

§ 7. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

7.1. Поняття поверхні другого порядку

Алгебраїчною поверхнею другого порядку називається поверхня, рівняння якої в декартовій системі координат має вигляд

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + My + Lz + K = 0,$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E, F одночасно не дорівнюють нулю.

383. Скласти рівняння поверхні, різниця квадратів відстаней кожної точки якої до точок $F_1(2; 3; -5)$ і $F_2(2; -7; -5)$ дорівнює 13.

384. Скласти рівняння поверхні, сума квадратів відстаней кожної точки якої до точок $F_1(-5; 0; 0)$ і $F_2(5; 0; 0)$ дорівнює сталому числу 100.

385. Скласти рівняння поверхні, сума відстаней кожної точки якої до точок $F_1(0; 0; -4)$ і $F_2(0; 0; 4)$ дорівнює 10.

386. Скласти рівняння поверхні, модуль різниці відстаней кожної точки якої до точок $F_1(0; -5; 0)$ і $F_2(0; 5; 0)$ дорівнює шести.

387. Знайти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від даної точки і даної площини.

388. Скласти рівняння поверхні, кожна точка якої розміщена вдвічі ближче до точки $A(2; 0; 0)$, ніж до точки $B(-4; 0; 0)$.

389. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від прямої $x = a$, $y = 0$ і площини Oyz.

7.2. Циліндричні поверхні

Рівняння $F(x; y) = 0$, що не містить змінної z, визначає циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Oz. Аналогічно кожне з рівнянь $F(y; z) = 0$ і $F(x; z) = 0$ визначає циліндричну поверхню з твірною відповідно паралельною осі Ox або Oy (рис. 3.28, *а*, *б*, *в*).

Рівняння циліндричної поверхні з напрямною $F(x; y) = 0$, $z = 0$ і твірною, паралельною вектору $\vec{s} = (m; n; p)$, має вигляд $F\left(x - \frac{m}{p}z, y - \frac{n}{p}z\right) = 0$.

Циліндри другого порядку:

а) круговий $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 3.29);

б) еліптичний $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 3.30);

в) гіперболічний $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 3.31);

г) параболічний $y^2 = 2px$, $p > 0$ (рис. 3.32).

390. Назвати тип поверхонь, що визначаються рівняннями:

1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $y^2 = 2z$; 3) $y^2 + z^2 - 4y = 0$;
4) $z = 9 - x^2$; 5) $x^2 + z^2 = 6x$; 6) $xy = 1$.

Побудувати ці поверхні.

391. Які поверхні визначаються рівняннями:

1) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y = 0$; 2) $4x^2 - 9y^2 = 36$;
3) $x^2 - 2z^2 - 4x + 6z = 0$; 4) $9x^2 - 25z^2 = 0$;
5) $x^2 - 4x = 0$; 6) $yz - z^2 = 0$; 7) $y^2 + z^2 = 0$?

392. Скласти рівняння трьох циліндричних поверхонь, описаних навколо сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$, з осями, паралельними відповідно:

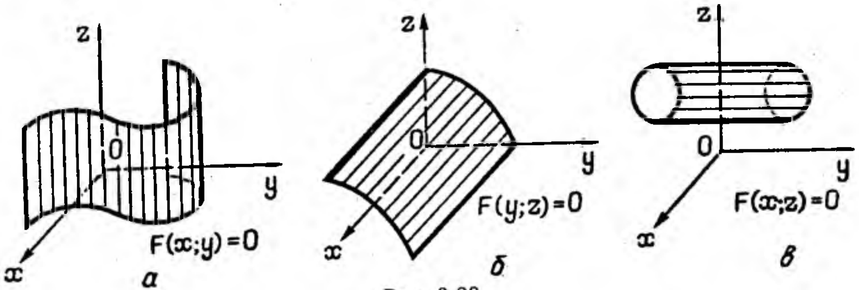


Рис. 3.28

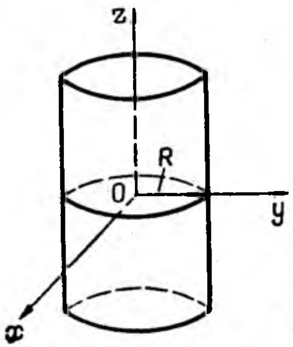


Рис. 3.29

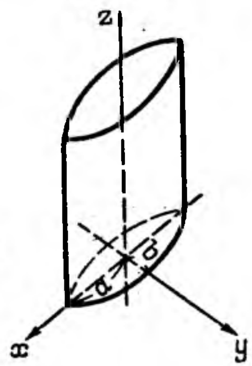


Рис. 3.30

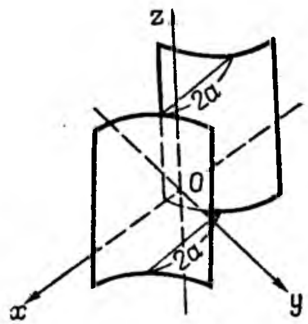


Рис. 3.31

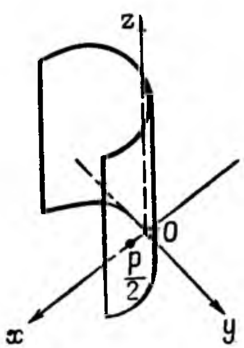


Рис. 3.32

а) осі Ox; б) осі Oy; в) осі Oz.

393. Скласти рівняння циліндра, що проектує коло

$$\begin{cases} x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

на площини: а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

394. Скласти рівняння проекції кола

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 36, \\ x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 25 \end{cases}$$

на площини:

а) Oxy; б) Oxz; в) Oyz.

395. Скласти рівняння циліндричної поверхні з напрямною $y^2 = 4x$, $z = 0$ і твірною, паралельною вектору $\vec{s} = (1; 2; 3)$.

396. Скласти рівняння циліндричної поверхні з твірною, паралельною вектору $\vec{s} = (1; 1; 1)$, і напрямною $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$.

397. Побудувати тіло, обмежене поверхнями $y^2 = x$, $z = 0$, $z = 4$, $x = 4$, і скласти рівняння діагоналей грані, що лежать у площині $x = 4$.

398. Довести, що лінія перетину двох параболічних циліндрів $y^2 = x$, $z^2 = 1 - x$ лежить на круговому циліндрі. Яке рівняння цього циліндра?

399. Скласти рівняння циліндра з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною — колом $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z = 1$.

400. Твірна циліндра паралельна осі Oz, а напрямна — коло $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Скласти рівняння циліндра.

401. Твірні циліндра паралельні вектору $\vec{s} = (1; 1; 1)$, його напрямна — коло $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Скласти рівняння циліндра.

7.3. Поверхні обертання

Поверхнею обертання називається поверхня, утворена обертанням заданої плоскої лінії L навколо деякої прямої l (осі обертання), що лежить у площині лінії L.

Щоб дістати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії L, що лежить у площині Oxz, навколо осі Oz, треба в рівнянні цієї лінії замінити змінну x на вираз $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$, тобто якщо рівняння лінії L $F(x, z) = 0$, $y = 0$, то при її обертанні навколо осі Oz рівняння поверхні обертання має вигляд $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$ (рис. 3.33).

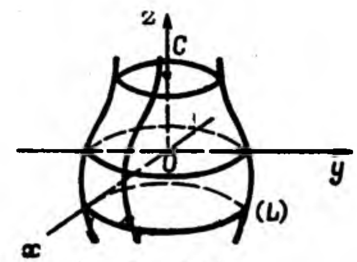


Рис. 3.33

402. Скласти рівняння поверхні, утвореної при обертанні кривої $z = x^2$, $y = 0$:

а) навколо осі Oz; б) навколо осі Ox.

403. Скласти рівняння поверхні, утвореної при обертанні прямої $y = z$, $x = 0$:

а) навколо осі Oy; б) навколо осі Oz.

404. Скласти рівняння поверхні, утвореної при обертанні навколо осі Oz лінії:

а) $z = \frac{1}{x^2}$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$; в) $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{25} = 1$.

405. Пряма $x - 1 = y + 1 = z$ обертається навколо осі Oz. Скласти рівняння поверхні обертання.

406. Пряма $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ обертається навколо осі Ox. Скласти рівняння поверхні, що при цьому утворюється.

407. Скласти рівняння і визначити тип поверхні, яка утворилася при обертанні гіперболи $y^2 - x^2 = 1$ навколо:

а) осі Ox; б) осі Oy.

408. Скласти рівняння поверхні, яка утворилася при обертанні кола $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ навколо осі Oy.

409. Знайти рівняння поверхонь, які утворилися при обертанні гіперболи $xy = 1$ навколо своїх асимптот.

7.4. Конічні поверхні

Конічною називається поверхня, описана рухомою прямою (твірною), що проходить через фіксовану точку (вершину) і перетинає деяку криву L (напрямну) конуса.

Нехай задано конус з вершиною $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і напрямною L:

$$F_1(x;\ y;\ z) = 0, \quad F_2(x;\ y;\ z) = 0.$$

Точка $M(x;\ y;\ z)$ належить конусу тільки тоді, коли існує таке число t, що точка $N(x + t(x - x_0);\ y + t(y - y_0);\ z + t(z - z_0))$ лежить на твірній, тобто

$$\begin{cases} F_1(x + t(x - x_0),\ y + t(y - y_0),\ z + t(z - z_0)) = 0, \\ F_2(x + t(x - x_0),\ y + t(y - y_0),\ z + t(z - z_0)) = 0. \end{cases}$$

Виключивши з цієї системи параметр t, матимемо рівняння конуса у вигляді

$$F(x;\ y;\ z) = 0.$$

Рівняння конуса другого порядку з вершиною в точці $O(0;\ 0)$ (рис. 3.34) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Однією з можливих напрямних цього конуса є еліпс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c.$$

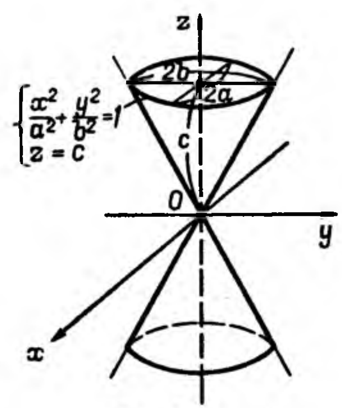


Рис. 3.34

410. Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить у початку координат, а напрямна задана рівняннями:

а) $x^2 + y^2 = a^2$, $z = h$; б) $x^2 + (y - 6)^2 + z^2 = 25$, $y = 3$.

411. Скласти рівняння конуса, вершина якого лежить у початку координат, а напрямна задана рівняннями:

а) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

412. Скласти рівняння конуса, якщо задана його вершина M_0 та рівняння напрямної L:

1) $M_0(0;\ 1;\ 0)$, $L: x^2 = 2y,\ z = 1$; 2) $M_0(0;\ 0;\ 1)$, $L: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $z = 0$.

413. Скласти рівняння конуса, утвореного обертанням прямої $y = 5x$ навколо осі Ox.

414. Які поверхні визначаються рівняннями:

1) $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 2) $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{9} = 0$; 3) $4x^2 - y^2 + 9z^2 = 0$;

4) $2x^2 - y^2 - z^2 = 0$?

415. Скласти рівняння конуса, вершина якого знаходиться у початку координат, а напрямна задана рівняннями

$$x^3 + y^2 + (z - 5)^2 = 9, \ z = 4.$$

416. У площині Oxy лежить парабола з вершиною у початку координат і параметром $p = 2$. Віссю симетрії є додатна вісь Ox. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $M_0(0;\ 0;\ 8)$ і напрямною, що задана параболою. Побудувати конус.

417. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $M_0(4;\ 0;\ -3)$ і напрямною

$$\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1, \ x = 0.$$

418. Пряма, ковзаючи вздовж лінії $\frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$, $y = 0$, проходить через точку $M_0(0;\ 3;\ 0)$. Скласти рівняння конічної поверхні, що при цьому утворюється.

419. Скласти рівняння і визначити тип поверхні, утвореної обертанням прямої $y - z + 1 = 0$, $x = 0$ навколо осі Oz.

420. Знайти геометричне місце дотичних, проведених з початку координат до сфери $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$.

421. Скласти рівняння конуса з вершиною в точці $M_0(1;\ 1;\ 1)$ і дотичною до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

7.5. Сфера

Рівняння сфери радіуса R з центром у точці $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ має вигляд $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ (рис. 3.35); зокрема, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

422. Скласти рівняння сфери з центром у точці $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і радіусом R, якщо:

а) $C(3;\ -1;\ -2)$, $R = 5$; б) $C(1;\ 0;\ -1)$, $R = 1$; в) $C(0;\ 4;\ 0)$, $R = 5$.

423. Визначити координати центра сфери та її радіус, якщо вона задана рівняннями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 8y - 6x + 25 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12y + 16z + 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 5 = 0$.

424. Скласти рівняння сфери з центром у точці $C(x_0; y_0; z_0)$, якщо:
1) $C(0; 0; 0)$ і сфера проходить через точку $M_1(6; -2; 3)$;
2) $C(1; 4; -7)$ і сфера дотикається до площини $6x + 6y - 7z + 42 = 0$;
3) $C(6; -8; 3)$ і сфера дотикається до осі Oz.

425. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких від двох точок $M_1(-1; 0; 0)$ та $M_2(1; 0; 0)$ стала і дорівнює чотирьом.

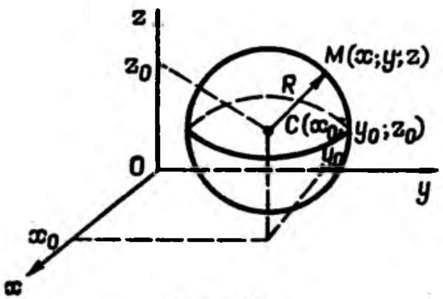


Рис. 3.35

426. Скласти рівняння сфери, якщо точки $M_1(2; -3; -5)$ і $M_2(4; 1; -3)$ є кінцями діаметра сфери.

427. Скласти рівняння сфери, якщо її центр міститься на площині $2x + y - z + 3 = 0$, а точки $M_1(3; 1; -3)$, $M_2(-2; 4; 1)$ і $M_3(-5; 0; 0)$ лежать на сфері.

428. Скласти рівняння сфери, центр якої лежить на прямій

$$\begin{cases} 2x + 4y - z - 7 = 0, \\ 4x + 5y + z - 14 = 0 \end{cases}$$

і яка дотикається до площин $x + 2y - 2z - 2 = 0$ та $x + 2y - 2z + 4 = 0$.

429. Скласти параметричні рівняння діаметра сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 11 = 0$, перпендикулярного до площини $5x - y + 2z - 17 = 0$.

430. Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр, утворений площинами

$$3x - 2y + 6z - 18 = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

431. Скласти рівняння геометричного місця точок, що лежать вдвічі ближче до точки $A(2; 0; 0)$, ніж до точки $B(-4; 0; 0)$.

432. Знайти центр і радіус кола

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 10y = 0, \\ x + 2y + 2z - 19 = 0. \end{cases}$$

433. Скласти рівняння площини, що проходить через центр C сфери $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y - 3z = 0$ перпендикулярно до прямої, що проходить через центр C і початок координат.

434. Знайти проекцію на площину Oxy лінії перетину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4(x - 2y - 2z)$ площиною, що проходить через центр сфери перпендикулярно до прямої $x = 0$, $y + z = 0$.

435. Знайти координати центра і радіус кола

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0, \quad 2x + 2y + z + 1 = 0.$$

7.6. Еліпсоїд. Гіперболоїди. Параболоїди

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку:

1. *Еліпсоїд* (рис. 3.36) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
2. *Гіперболоїди:*
   а) однопорожнинний (рис. 3.37) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;
   б) двопорожнинний (рис. 3.38) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.
3. *Параболоїди:*
   а) еліптичний (рис. 3.39) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$;
   б) гіперболічний (рис. 3.40) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$.

Встановити тип заданих поверхонь, дослідити форму і побудувати їх.

436. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{25} = 1$. **437.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{36} = 1$.

438. $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. **439.** $x^2 + y^2 = -4z$.

440. $x^2 - y^2 = 8z$. **441.** $2x = y^2 + \dfrac{z^2}{4}$.

442. $z = 4 - x^2 - y^2$. **443.** $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

444. Множина поверхонь задана в прямокутній системі координат рівнянням, що містить параметр λ. Визначити тип поверхні залежно від λ:
1) $x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$; 2) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$; 3) $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$;
4) $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$; 5) $x^2 - y^2 - z^2 = \lambda$; 6) $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$;
7) $x^2 + y^2 = \lambda z$; 8) $\lambda x^2 + y^2 = z$; 9) $\lambda(x^2 + y^2) = z$;
10) $x^2 + y^2 = \lambda$; 11) $x^2 - y^2 = \lambda$; 12) $x^2 + \lambda y^2 = \lambda z + 1$.

445. Знайти координати центра поверхні, її півосі, рівняння площин симетрії і побудувати поверхню, якщо:
1) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x + 4y + 6z = 0$;
2) $3x^2 + 2y^2 + z^2 + 6x + 4y + 2z - 6 = 0$.

446. Знайти координати центра поверхні, її вершин, рівняння осей і площин симетрії, зобразити поверхні, якщо:
1) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 + 6x + 4y - 6z = 0$;

2) $2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x - 8z + 10 = 0$.

447. Знайти лінії перетину поверхні $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} - \frac{z^2}{9} = 1$ з координатними площинами та площинами $z = 2$ і $x = 3$.

448. Лінії перетину поверхні $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$ площинами $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ спроектовані на площину Oyz. Зобразити проекції.

449. Лінії перетину поверхні $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$ площинами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектовані на площину Oyz. Зобразити проекції.

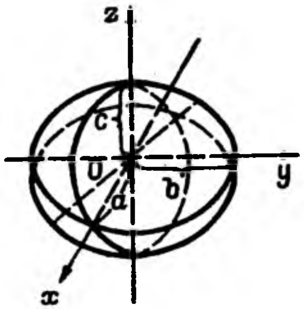


Рис. 3.36

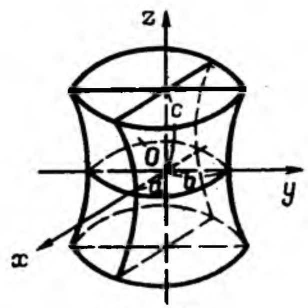


Рис. 3.37

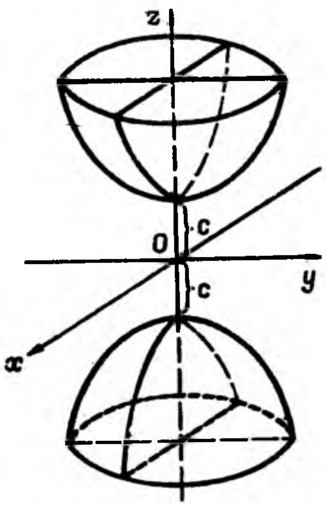


Рис. 3.38

450. Перерізи поверхні $2x^2 - y^2 = 2z$ площинами $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ спроектовані на площину Oyz. Зобразити проекції.

451. Перерізи поверхні $2x^2 - y^2 = 2z$ площинами $y = -1$, $y = 0$, $y = 1$ спроектовані на площину Oxz. Зобразити проекції.

452. Перерізи поверхні $2x^2 - y^2 = 2z$ площинами $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ спроектовані на площину Oxy. Зобразити проекції.

453. Перерізи поверхонь: а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$; в) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ площиною $x = 0$ спроектовані на площину Oyz. Зобразити проекції.

454. Визначити тип лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ і знайти її параметричні рівняння.

455. Довести, що лінія перетину поверхні $x^2 + y^2 = 2z$ площиною $x + y + z = 1$ є еліпс, і знайти його параметричні рівняння.

456. Довести, що площини $z - 2 = 0$ і $z + 2 = 0$ перетинають гіперболічний параболоїд $x^2 - \frac{y^2}{9} = 2z$ по спряжених гіперболах; визначити їх осі та ексцентриситет.

457. Довести, що площина $y - 4 = 0$ перетинає еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 4z$ по параболі; визначити її параметр і вершину.

458. Встановити, при яких значеннях α площина $x + \alpha z - 1 = 0$ перетинає двопорожнинний гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = -1$:
а) по еліпсу; б) по гіперболі.

459. Скласти рівняння нормалі до поверхні $10x^2 + 16y^2 - z^2 = 1$ у точці M_0 (1; —1; 5).

460. Написати рівняння дотичної площини до поверхні $x^2 + 4y^2 = 2z$ у точці P (—2; 1; 4).

461. Знайти дотичну площину до еліптичного параболоїда $x^2 + \frac{y^2}{4} = 2z$, паралельну площині $2x - y + 2z - 17 = 0$.

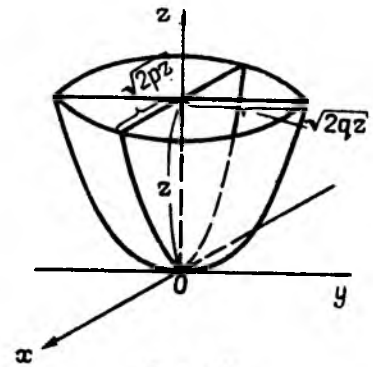


Рис. 3.39

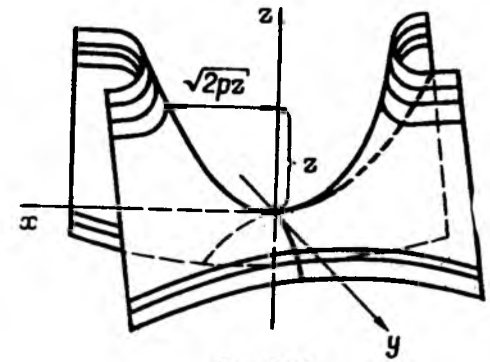


Рис. 3.40

462. Скласти рівняння дотичної площини до однопорожнинного гіперболоїда $x^2 + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (6, 1, 3)$.

463. Дано гіперболічний параболоїд $y^2 - \frac{z^2}{4} = x$. Скласти рівняння дотичної площини до нього у точці M_0 (21; 5; 4) та визначити лінію перетину її з поверхнею.

464. Знайти лінію перетину поверхонь $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ і $x^2 - y^2 = 2az$.

465. Довести, що еліптичний параболоїд $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 2z$ і сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 50z$ перетинаються по двох колах. Знайти їх центри і радіуси.

466. Рівняння $10x - 2y - z - 21 = 0$ визначає одну з дотичних площин до поверхні $x^2 - \frac{y^2}{4} = z$. Знайти рівняння кожної з тих двох прямих, по яких вони перетинаються.

467. Довести, що площина $4x - 5y - 10z - 20 = 0$ перетинає поверхню $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$ по прямолінійних твірних. Скласти їх рівняння.

468. Упевнившись, що точка M_0 (1; 3; —1) лежить на поверхні $4x^2 - z^2 = y$, скласти рівняння його прямолінійних твірних, що проходять через точку M, і визначити кут між ними.

469. Побудувати гіперболоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ і знайти його твірні, що проходять через точку M_0 (4; 1; —3).

470. Знайти рівняння прямолінійних твірних гіперболічного параболоїда $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 2z$, що проходять через точку M_0 (4; 3; 0).

471. Довести, що проекції прямолінійних твірних параболоїда $x^2 - y^2 = 2z$ на площину Oxz дотикаються до параболи $x^2 = 2z$.

472. Довести, що проекції прямолінійних твірних гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ на площину Oxy дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 1$.

473. Дві прямолінійні твірні гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ перетинаються в точці, що належить площині $z = h$. Знайти кут між ними:

1) при $h = 0$; 2) при $h = 1$; 3) при довільному h.

474. Знайти множину точок поверхні S, в яких перетинаються її взаємно перпендикулярні прямолінійні твірні, якщо S задана рівнянням:

1) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; 2) $x^2 - y^2 = 2z$; 3) $x^2 - 4y^2 = 2z$.

475. Знайти кут між твірною і віссю обертання поверхні $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{3} = 0$.

§ 8. КВАДРАТИЧНІ ФОРМИ

8.1. Лінійні оператори. Власні числа та вектори лінійних операторів

Лінійним оператором у лінійному тривимірному просторі R_3 називається відображення $A : R_3 \to R_3$ простору в себе з властивостями

$$A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} \text{ і } A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y},$$

де λ — довільне число; $\vec{x}$, $\vec{y}$ — довільні вектори в R_3.

Нехай $A : R_3 \to R_3$ — лінійний оператор, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — деякий фіксований базис в R_3.

Розклавши вектори $A\vec{e}_k$, $k = \overline{1, 3}$, за цим базисом,

$$A\vec{e}_k = a_{1k}\vec{e}_1 + a_{2k}\vec{e}_2 + a_{3k}\vec{e}_k, \quad k = \overline{1, 3},$$

дістанемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

що називається *матрицею лінійного оператора A* в базисі $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Ненульовий вектор $\vec{x}$ і відповідне йому число λ, що справджують векторне рівняння

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{2}$$

називаються *власним вектором* і *власним числом лінійного оператора A*. У просторі R_3 векторному рівнянню (2) відповідає матричне рівняння

$$(A - \lambda E) X = 0, \tag{3}$$

де A — матриця (1) лінійного оператора A; E — одинична матриця третього порядку; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ — матриця-стовпчик координат вектора $\vec{x}$.

Рівняння (3) можна записати у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda) x_3 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Система (3) або (4) має ненульові розв'язки за умови

$$\det (A - \lambda E) = 0. \tag{5}$$

Многочлен $p(\lambda) = \det (A - \lambda E)$ називається *характеристичним многочленом оператора A*, а рівняння (5) — його *характеристичним рівнянням*.

Корені характеристичного рівняння (5) є власними числами оператора A. Стовпчик координат будь-якого власного вектора, який відповідає власному числу λ, є нетривіальним розв'язком однорідної системи рівнянь (4).

Множина всіх власних чисел називається *спектром оператора*, причому кожне з них входить у спектр стільки разів, яка його кратність. Спектр називається *простим*, якщо характеристичне рівняння має лише прості корені λ_1, λ_2, λ_3. Всі корені характеристичного рівняння симетричної матриці дійсні.

Якщо характеристичне рівняння (5) має дійсні і різні корені, то відповідні їм власні вектори лінійно незалежні, тобто вони можуть складати базис.

Матриця лінійного оператора A є діагональною, якщо всі вектори базису — власні вектори оператора.

Приклад 1. Знайти власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо власні числа

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ тобто } \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5.$$

Власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = -1$, знаходимо з відповідної системи рівнянь (4)

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 + (3-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 + 4x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1 = t$, $x_2 = -2t$, де t — довільне число. Отже, власний вектор має вигляд $\vec{x}_1 = (1; -2)\,t$ або $\vec{x}_1 = t\vec{i} - 2t\vec{j}$, $0 \neq t \in \mathbf{R}$.

Для власного числа $\lambda_2 = 5$ складаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 = 0, \\ 8x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо відповідний власний вектор $\vec{x}_2 = (1;\ 4)\,s$, або $\vec{x}_2 = s\vec{i} + 4s\vec{j}$, $0 \neq s \in \mathbf{R}$. Отже, кожний вектор однопараметричних множин колінеарних між собою векторів $\vec{x}_1 = (1;\ -2)\ t$, $0 \neq t \in \mathbf{R}$, $\vec{x}_2 = (1;\ 4)\ s$, $0 \neq s \in \mathbf{R}$, є власним вектором матриці A.

Приклад 2. Знайти власні числа та власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Р о з в' я з а н н я. Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{тобто } (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 17) = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm \sqrt{2}\,i$. У дійсному просторі R_3 лише дійсний корінь $\lambda_1 = 1$ буде власним числом матриці A. Відповідний власний вектор знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} (2-1)x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (1-1)x_2 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 0x_2 + (4-1)x_3 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = t$. Отже, $\vec{x} = (0;\ 1;\ 0)\ t$ — множина колінеарних між собою власних векторів матриці A, що відповідають власному числу $\lambda_1 = 1$. Цю множину векторів можна записати у вигляді

$$\vec{x} = 0 \cdot \vec{i} + t\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = t\vec{j}, \quad 0 \neq t \in \mathbf{R},$$

тобто власні вектори зазначеної матриці колінеарні базисному вектору $\vec{j}$.

Приклад 3. Знайти матрицю лінійного перетворення, якщо за базис вибрано власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$.

Р о з в' я з а н н я. За умовою $\vec{x}_1^{\,*} = \lambda_1\vec{x}_1$, $\vec{x}_2^{\,*} = \lambda_2\vec{x}_2$, $\vec{x}_3^{\,*} = \lambda_3\vec{x}_3$, де $\vec{x}_1^{\,*}$, $\vec{x}_2^{\,*}$, $\vec{x}_3^{\,*}$ — образи векторів $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$.

Позначимо матрицю перетворення

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

і знайдемо її елементи.

Очевидно, у базисі $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ можна записати

$$\vec{x}_1 = 1 \cdot \vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За умовою вектор $\vec{x}_1$ після перетворення переходить у вектор $\vec{x}_1^{\,*} = \lambda_1\vec{x}_1$, а тому

$$\vec{x}_1^{\,*} = \lambda_1\vec{x}_1 + 0 \cdot \vec{x}_2 + 0 \cdot \vec{x}_3 \Rightarrow \lambda_1\vec{x}_1 = A\vec{x}_1.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки знаходимо

$$a_{11} = \lambda_1, \quad a_{21} = 0, \quad a_{31} = 0.$$

На основі співвідношень $\vec{x}_2^{\,*} = \lambda_2\vec{x}_2$, $\vec{x}_3^{\,*} = \lambda_3\vec{x}_3$ аналогічно знаходимо

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = \lambda_2, \quad a_{32} = 0,$$
$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{33} = \lambda_3.$$

Отже, шукана матриця перетворення має вигляд

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}.$$

У задачах 476—478 встановити, які із заданих відображень простору R_3 в себе є лінійними операторами; записати їх матриці у прямокутному базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

476. $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, де λ — стале число.

477. $A\vec{x}=(\vec{x}\cdot\vec{e})\cdot\vec{e}$, де $\vec{e}$ — заданий одиничний вектор.

478. $A\vec{x}=\vec{a}\times\vec{x}$, де $\vec{a}$ — відомий вектор.

479. У деякому базисі простору R_3 задано вектори $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ і матрицю A. Користуючись визначенням, встановити, які із заданих векторів є власними векторами матриці A, знайти відповідні їм власні значення, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $\vec{x}=(1;\ 3)$, $\vec{y}=(3;\ 1)$, $\vec{z}=(5;\ 0)$;

б) $A=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 7\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=(3;\ 0;\ 0)$, $\vec{y}=(0;\ -2;\ 0)$, $\vec{z}=(1;\ 0;\ -1)$;

в) $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=(-4;\ 1;\ 1)$, $\vec{y}=(2;\ 0;\ 0)$, $\vec{z}=(0;\ 0;\ 2)$.

480. Знайти характеристичне рівняння і спектр матриці A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -7 & 3\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 5\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

481. Знайти власні числа лінійного оператора, заданого у R_3 матрицею A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -3 & 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

482. Довести, що матриці A і A^T (T — знак транспонування) мають однакові власні числа.

483. Довести, що визначник матриці дорівнює добутку її характеристичних чисел.

484. Довести: якщо $\lambda\neq 0$ є власним числом матриці A, то $\frac{1}{\lambda}$ — власне число оберненої матриці A^{-1}.

485. Знайти матрицю A, якщо відомі її власні числа λ_1 та λ_2 і відповідні їм власні вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$, тобто:

а) $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1$; $\vec{x}=(1;\ 0)$, $\vec{y}=(0;\ 1)$;

б) $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-5$; $\vec{x}=(2;\ -1)$, $\vec{y}=(3;\ 4)$.

486. Знайти власні вектори лінійного оператора, заданого матрицею A, якщо:

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}2 & 19 & 30\\ 0 & -5 & -12\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 15 & -7 & 4\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & -2 & 9\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & -1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

487. Довести: якщо лінійний оператор A має обернений A^{-1}, то вони мають одні й ті самі власні вектори.

Знайти власні числа та власні вектори лінійних операторів в R_3, заданих своїми матрицями.

488. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$. **489.** $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

490. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$. **491.** $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$.

492. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$. **493.** $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$.

494. $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\3&0&2\\-2&2&1\end{pmatrix}$. **495.** $A=\begin{pmatrix}7&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&5\end{pmatrix}$.

496. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

8.2. Квадратичні форми та їх перетворення

Квадратичною формою від n змінних $x_1, \ldots, x_n$ у деякому лінійному просторі R_n з фіксованим базисом $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ називається однорідний многочлен другого степеня

$$F(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, \tag{1}$$

де $A=(a_{ij})$ — матриця квадратичної форми; $x_1, \ldots, x_n$ — координати вектора у просторі R_n.

Матриця A є симетричною, тобто для її елементів справедливі рівності $a_{ij}=a_{ji}$ $(i\neq j)$.

Якщо позначити два вектори

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad X^T=(x_1\ \ldots\ x_n),$$

то квадратичну форму (1) можна записати матричною рівністю

$$F(x_1, \ldots, x_n)=X^TAX. \tag{2}$$

Нехай у деякому базисі квадратична форма (1) не містить добутків x_ix_j $(i\neq j)$. Така квадратична форма називається зведеною до канонічного вигляду. Для всякої квадратичної форми існує базис, в якому вона має канонічну форму, тобто

$$F=(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2, \tag{3}$$

де λ_i — власні числа матриці A.

Таким є базис, складений з ортогональних одиничних (ортонормованих) власних векторів матриці A.

Напрями базисних власних векторів називаються головними напрямами (осями) квадратичної форми.

Отже, щоб звести задану квадратичну форму (1) до канонічного вигляду, треба відшукати власні числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ її матриці і скласти вираз (3).

Приклад 1. Задано матрицю

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&3&5\\0&5&-2\end{pmatrix}$$

квадратичної форми $F(x_1, x_2, x_3)$ у R_3. Записати її у вигляді многочлена.

Розв'язання. За умовою $a_{11}=2$, $a_{22}=3$, $a_{33}=-2$, $a_{12}=a_{21}=-1$, $a_{13}=a_{31}=0$, $a_{23}=a_{32}=5$. Отже,

$$F(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+3x_2^2-2x_3^2-2x_1x_2+10x_2x_3.$$

Приклад 2. Знайти ортогональну матрицю T, що зводить квадратичну форму $F(x_1, x_2)=x_1^2-2x_2^2+4x_1x_2$ до канонічного вигляду, і записати її.

Розв'язання. За умовою матриця квадратичної форми у просторі R_2

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&-2\end{pmatrix}.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&-2-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Його корені $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$. Отже, канонічний вигляд заданої квадратичної форми

$$F'(y_1, y_2)=2y_1^2-3y_2^2.$$

Стовпчики шуканої ортогональної матриці T — ортонормовані власні вектори матриці A. Знайдемо їх. Нехай $\lambda_1=2$, тоді із системи рівнянь

$$\begin{cases}-x_1+2x_2=0,\\ 2x_1-4x_2=0\end{cases}$$

знаходимо $x_1=2x_2$.

Звідси стовпчик $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t$, $0\neq t\in R$ є власним вектором матриці A, а тому стовпчик $\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ є нормованим власним вектором.

Аналогічно знаходимо власний вектор матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_2=-3$. Це буде вектор $\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}s$, $0\neq s\in R$, а нормований власний вектор $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Отже, шукана матриця

$$T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Знайти ортогональну матрицю T, яка зводить квадратичну форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3,$$

задану у R_3, до канонічного вигляду, і записати її.

Р о з в' я з а н н я. Матриця квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Її власні числа $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$, а відповідні їм власні ортонормовані вектори

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукана матриця

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

а канонічний вигляд квадратичної форми

$$F'(y_1, y_2, y_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

497. Записати матриці квадратичних форм $F(x_1, \ldots, x_n)$, якщо:

а) $F(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2$;

б) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - x_1x_2$;

в) $F(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2^2$; г) $F(x_1, x_2) = 3x_1x_2$;

д) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1x_3$;

е) $F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$;

є) $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 5x_3^2$;

ж) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - 2x_1x_3$.

498. Записати квадратичні форми $F(x_1, \ldots, x_n)$ у матричному вигляді, якщо:

а) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2$;

б) $F(x_1, x_2) = x_2^2 + 3x_1x_2$;

в) $F(x_1, x_2) = 2x_2^2 - x_1^2$;

г) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3$;

д) $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_1x_3 - x_2x_3$;

е) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2x_3$.

499. Записати квадратичну форму $F(x_1, \ldots, x_n)$ у вигляді $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ за заданою матрицею A, якщо:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

500. Знайти ортогональну матрицю, що зводить до канонічного вигляду квадратичну форму $F(x_1, \ldots, x_n)$, і записати її, якщо:

а) $F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2$;

б) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{6}\,x_1x_2$;

в) $F(x_1, x_2) = 2x_1x_2$;

г) $F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

д) $F(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

е) $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

є) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

ж) $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$;

з) $F(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 4x_2^2 - 4\sqrt{2}x_1x_2$.

8.3. Спрощення рівнянь поверхонь та кривих другого порядку у просторах R_3 і R_2

1. *Поверхні другого порядку у просторі R_3 описуються алгебраїчними рівняннями другого степеня з трьома змінними x_1, x_2, x_3*

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{k=1}^{3} b_kx_k + c = 0. \qquad (1)$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} = a_{ji}\ (i \neq j), \quad X^T = (x_1\ x_2\ x_3),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = (b_1\ b_2\ b_3), \quad C = c.$$

Тоді рівняння (1) можна записати у матричному вигляді

$$X^T AX + 2BX + C = 0. \tag{2}$$

Задача спрощення та класифікації поверхонь другого порядку зводиться до відшукання такого базису в R_3, в якому ліва частина рівняння (1) або (2) з новими змінними x_1', x_2', x_3' має найпростіший вигляд. Для цього спочатку знаходять таке ортогональне перетворення, в якому квадратична форма $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j$ набуває канонічного вигляду.

Тоді у новому базисі рівняння (1) запишеться

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k (x_k')^2 + 2\sum_{k=1}^{3} b_k' x_k' + c = 0, \tag{3}$$

причому не всі λ_i, $i = \overline{1, 3}$ дорівнюють нулю.

Якщо $\lambda_k \neq 0$, то переносом початку координат можна вилучити лінійний член

$$(\lambda_k (x_k')^2 + 2b_k x_k') = \lambda_k \left(x_k' + \frac{b_k}{\lambda_k}\right)^2 - \frac{b_k^2}{\lambda_k} = \lambda_k x_k'' - \frac{b_k^2}{\lambda_k}.$$

Після таких перетворень дістанемо спрощене рівняння поверхні, яке називається канонічним (відносно змінних x, y, z). При цьому канонічне рівняння поверхні матиме один з таких виглядів:

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$ $(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + bz = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
3) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
4) $\lambda_1 x^2 + by = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$; 5) $\lambda_1 x^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$.

Приклад 1. Привести до канонічного вигляду і назвати поверхню, задану рівнянням

$$6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz + 8x - 4y - 8z + 1 = 0.$$

Р о з в' я з а н н я. Квадратична форма $F(x, y, z) = 6x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 4xz$ має матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ортогональну матрицю T зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Для цього розв'язуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

знаходимо власні числа матриці A $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -2$ і відповідні їм ортонормовані власні вектори

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді ортогональна матриця T, що зводить квадратичну форму $F(x, y, z)$ до канонічного вигляду $8(x')^2 + 4(y')^2 - 2(z')^2$, буде

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Базисними векторами нової системи координат 0; $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ є вектори

$$\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{k}), \quad \vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{k}), \quad \vec{k}' = \vec{j}.$$

У новій системі координат задане рівняння поверхні матиме вигляд

$$8(x')^2 + 4(y')^2 - 2(z')^2 + (8 - 4 - 8)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + $$
$$+ 1 = 0$$

або після перетворень —

$$\frac{(x')^2}{0{,}625} + \frac{(y' + \sqrt{2})^2}{1{,}25} - \frac{(z' + 1)^2}{2{,}5} = 1.$$

Друге перетворення координат треба виконати згідно з рівностями

$$x'' = x', \quad y'' = y' + \sqrt{2}, \quad z'' = z' + 1,$$

звідки остаточно дістанемо канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{(x'')^2}{0{,}625} + \frac{(y'')^2}{1{,}25} - \frac{(z'')^2}{2{,}5} = 1.$$

Тобто, перетворення координат здійснювалось за формулами

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' + \frac{1}{\sqrt{2}}y'' - 1,$$
$$y = z' = z'' - 1,$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x'' - \frac{1}{\sqrt{2}}y'' + 1,$$

а канонічна система координат O'; $\vec{i}'$; $\vec{j}'$; $\vec{k}'$, де $O'(-1; -1; 1)$.

Звести до канонічного вигляду і визначити тип поверхонь, заданих рівняннями, вказати в кожному з випадків канонічну систему координат:

501. $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0$.

502. $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$.

503. $2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$.

504. $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$.

505. $2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy + 2yz + 2zx - 4x + 6y - 2z + 3 = 0$.

506. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$.

507. $2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$.

508. $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 6zx - 2x + 6y + 2z = 0$.

509. $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$.

2. *Криві другого порядку у просторі R_2 описуються алгебраїчними рівняннями другого степеня вигляду* (1) *або* (2) *за умови, що* $i, j = 1, 2$. У цьому випадку канонічне рівняння (3) може набирати одного з таких виглядів:

1) $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$ $(\lambda_1\lambda_2 \neq 0)$;
2) $\lambda_1 x^2 + by = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$; 3) $\lambda_1 x^2 + c = 0$ $(\lambda_1 \neq 0)$.

Приклад 2. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку:

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0,$$

визначити її тип і вказати канонічну систему координат.

Розв'язання. Матриця квадратичної форми, яка міститься в заданому рівнянні, має вигляд $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$. Її власні числа: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$, а власні вектори $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; 1)$, $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1; -1)$. Виконуючи перетворення за допомогою матриці $T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, спрощуємо задане рівняння

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' + \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0.$$

Власні числа λ_1 і λ_2 відмінні від нуля, а тому можна виділити повний квадрат по кожній з нових змінних:

$$8(x')^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' = 8\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4,$$

$$-2(y')^2 + \frac{12}{\sqrt{2}}y' = -2\left(y' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 9.$$

Замінюючи змінні x', y' на x'', y'' за формулами

$$x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y' - \frac{3}{\sqrt{2}},$$

що відповідають паралельному зсуву вздовж координатних осей, дістанемо рівняння

$$8(x'')^2 - 2(y'')^2 - 8 = 0, \text{ або } (x'')^2 - \frac{1}{4}(y'')^2 = 1.$$

Рівняння, що дістали, є канонічним рівнянням гіперболи. Перетворення координат проведено за формулами

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' + y'') + 2, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x'' - y'') - 1.$$

Канонічна система координат O'; $\vec{i}'$; $\vec{j}'$, де O' (2; —1).

У задачах 510—516 звести рівняння кривої другого порядку до канонічного вигляду, визначити її тип і вказати канонічну систему координат.

510. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y + 16 = 0$.

511. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

512. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

513. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

514. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

515. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

516. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

517. Крива другого порядку визначається рівняннями:
а) $x^2 - 2y + \lambda(y^2 - 2x) = 0$; б) $x^2 + 2\lambda xy + y^2 - 1 = 0$. Вказати її тип, якщо параметр λ змінюється в інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

Глава 4

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

§ 1. ДІЙСНІ ЧИСЛА

Абсолютною величиною (модулем) дійсного числа x є невід'ємне число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Властивості модуля дійсного числа:

1) $a = b \Rightarrow |a| = |b|$; 2) $|x| \geqslant x$; 3) $|x| = |-x|$;
4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$; 5) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$;
6) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; 7) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$;
8) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$; 9) $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$, $x \leqslant -a$.

Множину розуміють як сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю. Об'єкти, з яких складається множина, є її *елементами*. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$. Запис $x \overline{\in} X$ або $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина, елементами якої є числа, називається *числовою*.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, є *скінченною*, а множина, яка містить нескінченну кількість елементів, є *нескінченною*. Множина, яка не містить жодного елемента, є *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Множина C, яка містить елементи, кожний з яких належить множині A або множині B, є *об'єднанням (сумою) множин* A і B: $C = A \cup B$.

Множина D, що складається з елементів, кожний з яких належить одночасно множинам A і B, є *перерізом (добутком) множин* A і B: $D = A \cap B$.

Множина E, що складається з елементів, кожний з яких належить множині A і не належить множині B, є *різницею множин* A і B: $E = A \setminus B$.

Існує два основних способи задання (опису) множин:

1) множина A визначається безпосереднім перерахуванням усіх своїх елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$ і позначається

$$A = \{a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_n\};$$

2) множина A визначається як сукупність тільки тих елементів з деякої основної множини T, які мають спільну властивість α, і позначається

$$A = \{x \in T \mid \alpha(x)\}.$$

Запис $\alpha(x)$ означає, що елемент x має властивість $\alpha(x)$.

Застосовуючи метод математичної індукції, довести, що для довільного натурального числа n мають місце такі співвідношення.

1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

4. $1 + x^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1$.

5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Знайти розв'язки рівнянь.

6. $|2x + 3| = \frac{1}{2}$. **7.** $\sqrt{x^2} + x^3 = 0$.

8. $|x^2 - 4x + 3| = 7$. **9.** $|-2x^2 + 3x - 9| = 2$.

10. $\sqrt{(3x-1)^2} = 1 - 3x$. **11.** $\left|\frac{3x-2}{x+2}\right| = 1$.

12. $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right| = 2$.

Знайти ті значення змінної x, для яких мають місце такі нерівності.

13. $|x + 1| \leqslant 2$. **14.** $x^2 > 16$.

15. $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$.

16. $|x| \geqslant |x + 4|$. **17.** $|x + 2| + |x - 2| \leqslant 12$.

18. $|x + 2| - |x| > 1$. **19.** $||x + 1| - |x - 1|| < 1$.

Дані множини A описати перерахуванням усіх їхніх елементів.

20. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x^2 - 7x + 6 = 0\}$.

21. $A = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x + \frac{1}{x} \leqslant 2,\ x > 0\right\}$.

22. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x^3 - 3x^2 - 4x = 0\}$.

23. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2\sin 3x = 1,\ 0 < x < \pi\}$.

24. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 - 3x - 4 \leqslant 0\}$.

25. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} \mid \frac{1}{9} < 3^x \leqslant 27\right\}$.

26. $A = \{x \in \mathbf{N} \mid 2 \leqslant \log_2 x \leqslant 3\}$.

27. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \operatorname{tg} 2x = 1,\ 0 < x < 2\pi\}$.

28. $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2^{|x-1|} < 5\}$.

Зобразити на координатній площині такі множини.

29. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid x - y = 1\}$.

30. $A = \left\{(x, y) \in R_2 \mid x^2 - \frac{y^2}{4} = 0\right\}$.

31. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

32. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid x^2 - y^2 > 1\}$.

33. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid x^2 \geqslant 2y + 1\}$.

34. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid x \geqslant y^2 - 1;\ x + y < 1\}$.

35. $A = \left\{(x, y) \in R_2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.

36. $A = \{(x, y) \in R_2 \mid xy > 1;\ y > x^2\}$.

§ 2. ФУНКЦІЯ

2.1. Функція. Найпростіші властивості функції

Якщо кожному числу x з деякої множини D за певним правилом поставлене у відповідність єдине число y, то y є функцією від x і позначається $y = f(x)$, $x \in D$.

Змінна x є *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінна y — *залежною змінною*, або *функцією*.

Множина D значень аргументу x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, є *областю визначення* цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є *множиною значень функції*.

Функція $f(x)$ є *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$, і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є *періодичною*, якщо $f(x + T) = f(x)$. Число T називається *періодом функції*. Найменше з додатних чисел T є *основним періодом функції*.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1 < x_2$, маємо:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є *зростаючою;*
2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція є *спадною;*
3) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функція є *неспадною;*
4) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функція є *незростаючою.*

Зростаючі, незростаючі, спадні й неспадні функції на множині D називаються *монотонними на цій множині*.

Функція $f(x)$, яка визначена на множині D, є *обмеженою* на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| < M$.

Якщо для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які визначені на множині D, існує таке число N, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $f(x) \leqslant N$ або $g(x) \geqslant N$, то $f(x)$ є *обмеженою зверху*, а $g(x)$ —*обмеженою знизу* функцією.

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, визначає y як функцію x, то y є *неявною* функцією x.

Функція $x = \varphi(y)$ є *оберненою* до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in E$ відповідає едине значення змінної $x \in D$.

Функція $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in E$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$ тоді і тільки тоді, коли вона є строго монотонною в області D.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t, які визначені на одному й тому самому проміжку, є параметричним заданням функцій; змінна t при цьому називається *параметром*.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, то змінну y можна розглядати як складену функцію від x: $y = \varphi(\Phi(x))$.

37. Знайти функціональну залежність основи a прямокутника від його висоти h, якщо площа прямокутника $S = 4$ кв. од.

38. Один з катетів прямокутного трикутника $b = 5$. Знайти залежність гіпотенузи c трикутника від другого катета a.

39. Виразити залежність висоти h циліндра від його радіуса r, якщо дано площу S повної поверхні циліндра.

40. Виразити площу рівнобічної трапеції з основами a і b як функцію кута α при основі a.

41. З моменту часу t_0 тіло рухається із сталим прискоренням a. Знайти залежність швидкості та пройденого шляху від часу руху. Як зв'язані між собою шлях і швидкість у момент часу t?

42. Знайти об'єм кругового конуса V як функцію його повної поверхні S, якщо відомо, що радіус основи конуса $r = 3$.

43. У кулю з радіусом R вписано циліндр. Знайти функціональну залежність об'єму V циліндра від його висоти h.

44. У кулю з радіусом R вписано прямий круговий конус. Написати функціональну залежність площі S бічної поверхні конуса:

а) від його твірної l;
б) від кута α при вершині конуса в його осьовому перерізі;
в) від кута β при основі конуса.

45. На відрізку $0 \leqslant x \leqslant 1$ осі Ox рівномірно розподілено масу, яка дорівнює 2 г, а в точках $x = 2$ і $x = 3$ зосереджено маси по 1 г в кожній. Знайти аналітичний вираз функції $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, яка чисельно дорівнює масі, що міститься в інтервалі $(-\infty;\ x)$.

46. Дано: $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Знайти $f(-1;)$ $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(4)$.

47. Дано: $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; $\varphi(x) = \frac{|x-1|}{x+3}$. Знайти $f(0)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2)$; $\varphi(0)$; $\varphi(-1)$; $\varphi(1)$; $\varphi(2)$. Чи існують $f(-2)$ і $\varphi(-3)$?

48. Дано: $f(x) = \lg x^4$. Знайти $f(-1)$; $f(1)$; $f(-0{,}01)$; $f(0{,}1)$; $f(10)$.

49. Дано: $f(x) = 3 + [x]$. Знайти $f(0,\ 9)$; $f(0{,}99)$; $f(1)$; $f(1{,}2)$; $f(1{,}9)$; $f(2)$.

50. Дано: $\varphi(t) = t^2 + 2$. Знайти $\varphi(2)$; $\varphi(a)$; $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$; $\varphi(a+1)$; $\varphi(a^2 - 1)$.

51. Дано: $F(x) = 3x^4 + x^2 - 3$. Довести, що $F(a) = F(-a)$.

52. Дано: $F(x) = 2z^5 - 3z^3 + z$. Довести, що $F(-z) = -F(z)$.

53. Дано: $\Phi(t) = 3t^3 + \frac{3}{t^3} - 2t - \frac{2}{t}$. Довести, що $\Phi(t) = \Phi\left(\frac{1}{t}\right)$.

54. Дано: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Знайти всі корені рівняння:
1) $f(x) = f(0)$; 2) $f(x) = f(-1)$.

55. Дано: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 23x$. Знайти всі корені рівняння $f(x) = f(-2)$.

56. $f(x) = x^2 - 12x + 3$ Знайти всі корені рівняння $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$.

57. $F(x) = x^2 + 6$; $\varphi(x) = 5x$. Знайти всі корені рівняння $F(x) = |\varphi(x)|$.

58. $f(x) = x + 1$; $\varphi(x) = x - 2$. Розв'язати рівняння $|f(x) + \varphi(x)| = |f(x)| + |\varphi(x)|$.

59. Знайти множину нулів D_0 і області знакосталості D_+, D_- для кожної з функцій:
1) $f(x) = 1 + x$; 2) $f(x) = 2 + x - x^2$;

3) $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$; 4) $f(x) = 1 - e^{\frac{1}{x}} - 1$.

60. Дано: $y = 10^z$; $z = \lg x$. Виразити y як функцію x.

61. Дано: $y = \sqrt{z^2 - 1}$; $z = \frac{1}{\cos t}$. Виразити y як функцію t.

62. Дано: $y = \sqrt{1 - t^2}$; $t = \cos 3x$. Виразити y як функцію x.

63. Дано: $y = \sqrt{1 + z^2}$; $z = \operatorname{ctg} x$. Виразити y як функцію x.

64. Дано: $y = \sqrt{1 + u}$; $u = -\frac{1}{v}$; $v = \frac{1}{\sin^2 t}$. Виразити y як функцію t.

65. Дано: $y = \log_2(\operatorname{arctg} x)$; $v = 2^y$; $u = \operatorname{tg} v$. Виразити u як функцію x.

Знайти область визначення функцій.

66. $y = \sqrt{2x+3}$. 67. $y = \sqrt{x^2 - 16}$. 68. $y = \lg(3 - x)$.

69. $y = \sqrt{25 - x^2}$. 70. $y = \sqrt[3]{5x^2 - x^3}$. 71. $y = \sqrt{5x - x^2}$.

72. $y = \frac{1}{x^2 + 2}$. 73. $y = \frac{1}{x^3 - 3}$. 74. $y = \frac{1}{x^2 - 16x}$.

75. $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$. 76. $y = \arccos\frac{2x - 3}{5}$.

77. $y = \sqrt{-x} + \sqrt{4 + x}$. 78. $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}}$.

79. $y = \lg(5x - x^2 - 6)$. 80. $y = \arcsin\sqrt{\frac{1 - x^2}{2}}$.

81. $y = 2^{\arccos(1-x)}$. 82. $y = 5^{x^2-3}$.

83. $y = \frac{1}{\lg\sqrt{1-x}} + \sqrt{x+2}$. 84. $y = (x - 2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

85. $y = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}} + \sqrt{1 - |x|}$.

86. $y = \arcsin\frac{x-3}{2} - \lg(4 - x)$.

87. $y = \lg\sin(x - 3) + \sqrt{16 - x^2}$.

88. $y = \lg\frac{x-5}{x^2 - 10x + 24} + \sqrt[3]{x+5}$.

89. $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{\sqrt{1+x}}}$.

90. $y = \sqrt{\lg\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)} + \lg(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$.

91. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} + \lg[1 - \lg(x^2 - 5x + 16)]$.

92. $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$.

93. $y = \operatorname{ctg}\pi x + \arccos(2^x)$.

94. $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \sqrt[3]{\sin x}$.

95. $y = (x^2 + x + 1)^{-\frac{3}{2}} + \arccos\frac{2}{2 + \sin x}$.

Які із зазначених функцій є парними, непарними; не є ні парними, ні непарними?

96. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$. 97. $f(x) = x^6 + 2x$.

98. $f(x) = x^5 + \frac{x^3}{3} - x$. 99. $f(x) = \cos x + |x|$.

100. $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$. 101. $f(x) = \frac{a^x - a^{-x}}{2}$.

102. $f(x) = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$. 103. $f(x) = \sin x - 3x^2$.

104. $f(x) = \sin x - \cos x$. 105. $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$.

106. $f(x) = 3\sin^2 x + 2\cos x$. 107. $f(x) = 2x^3\sin x$.

108. $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x\sin x$. 109. $f(x) = x\frac{a^x - 1}{a^x + 1}$.

110. $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$.

111. $f(x) = (x^3 + 2\sin x)\sqrt{1 + x^2}$.

З'ясувати, які із зазначених у задачах 112—120 функцій є періодичними, і знайти їхній найменший період T.

112. $f(x) = 3\sin 5x$. 113. $f(x) = |\cos x|$.

114. $f(x) = 2x^2\sin x$. 115. $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

116. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$. 117. $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

118. $f(x) = 3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}\frac{x}{3}$. 119. $f(x) = 2 - 3\operatorname{tg} x$.

120. $f(x) = 2\sin x - 3\sin 2x + 4\sin 3x$.

Довести, що функції є монотонно зростаючими в зазначених інтервалах.

121. $f(x) = (x - 1)^2$, $1 \leqslant x < +\infty$.

122. $f(x) = x^3 + 1$, $-\infty < x < \infty$.

123. $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

124. $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $0 < x < \pi$.

125. $f(x) = \log_2 x$, $0 < x < \infty$.

126. $f(x) = 3x - 2\cos x$, $-\infty < x < \infty$.

Довести, що функції в задачах 127—132 є монотонно спадними в зазначених інтервалах.

127. $f(x) = 2x^2 + 1$, $-\infty < x \leqslant 0$.

128. $f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

129. $f(x) = (2 - x)^3$, $-\infty < x < \infty$.

130. $f(x) = 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, $-\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

131. $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^x - 1$, $-\infty < x < \infty$.

132. $f(x) = 2\lg x - \log_2 x$, $0 < x < \infty$.

133. Дослідити на монотонність такі функції:
1) $f(x) = ax + b$; 2) $f(x) = ax^2 + bx + c$;
3) $f(x) = x^3$; 4) $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$; 5) $f(x) = a^x$ $(a > 0)$.

134. Які з наведених функцій є обмеженими; необмеженими:
1) $y = 2^{-|x|}$; 2) $y = x^3 + 2x + 1$; 3) $y = \frac{x^2}{x^4 + 1}$;
4) $y = -x^2 + 2x - 3$; 5) $y = |2x - 5|$; 6) $y = \log_4(x + 5)$;
7) $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$; 8) $y = x\sin x$; 9) $y = 5^{x^2+2}$?

135. Написати в явному вигляді функцію y, яку задано неявно такими рівняннями:
1) $x^2 - y^2 = 4$; 2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $x^3 + y^3 = a^3$;
4) $xy = c$; 5) $3^{xy} = 4$; 6) $\lg x + \lg(y + 1) = 2$;
7) $5^{x+y}(x^3 + 2) = x^2 - 7$; 8) $(1 + x)\cos y - x^2 = 0$.

Визначити обернену функцію $x = \varphi(y)$ та область її існування.

136. $y = 2x + 3$, $-\infty < x < \infty$.

137. $y = x^2$: а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

138. $y = 4 - x^2$: а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

139. $y = x^2 + 2x + 3$: а) $-\infty < x \leqslant -1$; б) $-1 \leqslant x < \infty$.

140. $y = \frac{1 - x}{1 + x}$; $x \neq -1$.

141. $y = \sqrt{1 - x^2}$: а) $-1 \leqslant x < 0$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Знайти функції $y = \varphi(x)$, які обернені до даних.

142. $y = x^3 + 8$. 143. $y = \frac{2}{3x - 1}$. 144. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$.

145. $y = 3^{x+2}$. 146. $y = 3 - \lg(x - 5)$. 147. $y = \log_{x^2} 3$.

148. $y = \frac{2^x}{1 + 2^x}$. 149. $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$. 150. $y = 4\cos 3x$.

151. $y = 4\arcsin\sqrt{1 - x^2}$.

152. З рівнянь, які параметрично задають функцію, виключити параметр:
1) $x = 3t$; $y = 6t - t^2$;
2) $x = \cos t$; $y = \sin 2t$;
3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \sin\varphi$; $y = 1 - \cos\varphi$;
5) $x = \operatorname{tg} t$; $y = \sin 2t + 2\cos 2t$.

153. Перевірити, чи лежить точка, яку задано декартовими координатами, на лінії:
1) точка (5; 1) на колі $x = 2 + 5\cos t$, $y = -3 + 5\sin t$;
2) точка $(2; \sqrt{3})$ на колі $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$.

154. Знайти значення параметра, яке відповідає заданим координатам точки на лінії:
1) $x = 3(2\cos t - \cos 2t)$, $y = 3(\sin t - \sin 2t)$; $(-9; 0)$;
2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3; 2)$;
3) $x = 2\operatorname{tg} t$, $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$; $(2; 2)$;
4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0; 0)$.

2.2. Елементарні функції. Графіки

Основними елементарними функціями є такі:
1) степенева $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;
2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
4) тригонометричні $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
5) обернені тригонометричні $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то правильні такі твердження.

1. Графік функції $y = f(x) + b$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Oy на величину, що дорівнює b.

2. Графік функції $y = f(x + a)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ паралельним перенесенням останнього вздовж осі Ox на величину, що дорівнює $-a$.

3. Графік функції $y = cf(x)$, $c \neq 0$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < c < 1$ за допомогою стискування в $\frac{1}{c}$ разів ординат останнього, а при $c > 1$ за допомогою розтягування в c разів його ординат із збереженням відповідних абсцис. Якщо $-\infty < c < 0$, то графік $y = cf(x)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = -cf(x)$ відносно осі Ox.

4. Графік функції $y = f(kx)$ дістанемо з графіка функції $y = f(x)$ при $0 < k < 1$ збільшенням в $\frac{1}{k}$ разів абсцис його точок, а при $1 < k < +\infty$ — зменшенням у k разів абсцис його точок із збереженням їхніх ординат. Якщо $-\infty < k < 0$, то графік $y = f(kx)$ є дзеркальним відображенням графіка $y = f(-kx)$ відносно осі Oy.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул в яких над основними елементарними функціями виконується скінченне число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називають *елементарними*.

Побудувати графіки функцій.

155. $y = \frac{1}{3}x - 1$. **156.** $y = 3 - 2x$.

157. $y = |4x + 2| + |4x - 2|$. **158.** $y = |x + 2| - |x - 2|$.

159. $y = |x - 3| - 2|x + 1| + 2|x| - x + 1$.

160. Тіло, яке рівномірно рухається по прямій, через 8 с після початку руху міститься на відстані 30 см від деякої точки цієї прямої. Через 23 с ця відстань становила вже 67,5 см. Знайти залежність відстані S від часу t. Через який час тіло перебуватиме від точки на відстані 87,5 см?

161. Тіло рухається прямолінійно під дією сили F. Відомо, що на переміщення тіла з прискоренням 12 м/с^2 на $S = 15$ м затрачено роботу $A = 32$ Дж. За законом Ньютона знайти силу F як функцію прискорення ω.

162. У посудину довільної форми налито рідину. На глибині $h = 25{,}3$ см тиск цієї рідини $p = 18{,}4$ г/см^2. Треба:

а) скласти функцію, яка виражає залежність тиску від глибини;

б) знайти тиск на глибині $h = 14{,}5$ см;

в) на якій глибині тиск дорівнюватиме 26,5 г/см^2?

163. Деяка кількість газу займала при 20 °С об'єм 107 см^2, при 40 °С об'єм дорівнював 114 см^3. Треба:

а) на підставі закону Гей-Люссака скласти функцію, яка виражає залежність об'єму V газу від температури t;

б) який об'єм займатиме газ при 0 °С?

164. Напруга в деякому ланцюгу спадає рівномірно за лінійним законом. На початку досліду напруга була 16 В, а через 5 с знизилась до 10 В. Знайти напругу U як функцію часу t. Через який проміжок часу напруга знизиться до 7,6 В?

Побудувати графіки функцій.

165. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. **166.** $y = |2 - x^2|$. **167.** $y = 3 - 2x^2$.

168. $y = x^2 + x + 1$. **169.** $y = |x^2 + 4x - 5|$.

170. $y = -3x^2 + 7x - 4$. **171.** $y = -x^2 + 2x - 3$.

172. $y = |4x - x^2|$.

Знайти найбільші значення функцій.

173. $y = 5 - 2x^2$. **174.** $y = -2x^2 + 3x - 1$.

175. $y = |-2x^2 - 7x + 1|$. **176.** $y = -x^2 - 4x + 3$.

177. $y = -x^2 + 2ax + 3a^2$. **178.** $y = a^2x - b^2x^2$.

Знайти найменші значення функцій:

179. $y = x^2 - 3$. **180.** $y = 2x^2 + 8x + 5$.

181. $y = |16 - 9x^2|$. **182.** $y = 3x^2 - 5x - 1$.

183. $y = |3x^2 - 5x - 2|$. **184.** $y = (ax + b)(ax - 2b)$.

185. Число a подати як суму двох чисел так, щоб їхній добуток був найбільшим.

186. Число a подати як суму двох чисел так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.

187. Біля стіни будинку потрібно зробити огорожу завдовжки l, щоб огородити прямокутну ділянку. На якій відстані від стіни повинна бути паралельна їй частина огорожі, щоб ділянка мала найбільшу площу?

188. Периметр осьового перерізу прямого кругового циліндра дорівнює p. Яким має бути радіус R циліндра, щоб його бічна поверхня була найбільшою?

189. Вікно має форму прямокутника, який зверху закінчується півкругом. Яким має бути радіус R півкруга, щоб при заданому периметрі p вікно мало найбільшу площу?

190. У прямий конус вписано циліндр так, що площини і центри основ циліндра і конуса збігаються. При якому відношенні радіуса R_1 циліндра до радіуса R_2 конуса циліндр матиме найменшу бічну поверхню?

191. Тіло є прямим круговим циліндром, на який зверху покладено конус тієї самої основи. Кут при вершині конуса дорівнює α, периметр осьового перерізу тіла p. При якому радіусі R циліндра бічна поверхня тіла буде найбільшою і чому дорівнює її площа?

Побудувати графіки функцій.

192. $y = \frac{1}{4}x^3$. **193.** $y = -(x + 1)^3$. **194.** $y = x^3 + x - 1$.

195. $y = -\frac{1}{2}x^{3/2}$. **196.** $y = 2x^{-0{,}5}$. **197.** $y = |(x - 1)^3|$.

198. $y = x^4 - \frac{1}{2}$.

199. Квадрат якого числа дорівнює самому числу, доданому до його оберненої величини? (Скласти рівняння і розв'язати його графічно.)

200. Дерев'яна куля радіуса $R = 10$ см з густиною 0,8 г/см^3 плаває на поверхні води. Знайти висоту сегмента, зануреного у воду. (Скласти рівняння і розв'язати його графічно.)

201. Дерев'яний кут і піраміда з квадратною основою мають разом масу 0,8 кг. Ребро куба дорівнює стороні основи піраміди, висота піраміди 45 см. Густина деревини 0,8 г/см^3. Знайти ребро куба. (Скласти рівняння і розв'язати його графічно.)

Побудувати графіки функцій.

202. $y = 4^{x-1}$. 203. $y = \frac{1}{3}2^x - 1$. 204. $y = \frac{1}{2} - 5^{2x+1}$.

205. $y = 3^{-x} + 1$. 206. $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2}$. 207. $y = 0{,}2^{\left|\frac{x-1}{2}\right|}$.

208. $y = 3\log_3 x$. 209. $y = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$.

210. $y = |\log_5 x|$. 211. $y = \log_2(x+2) - 1$.

212. $y = \log_{\frac{1}{3}}|x+1|$. 213. $y = |1 - \log_2 x|$. 214. $y = \log_{x^2} 3$.

215. Побудувати фігуру, обмежену лініями $y = 2^x$, $y = \frac{1+x}{x}$, $x = 3$. За графіком знайти наближено координати точок перетину цих ліній.

216. Знайти найбільше можливе ціле значення n, при якому $2^x > x^n$ для всіх $x \geqslant 100$.

217. Дано функцію $y = x + \lg\frac{1}{x}$. Побудувати графік цієї функції і по ньому знайти найменше значення функції на інтервалі (0; 2).

218. Гіперболічні функції sh x, ch x, th x, cth x визначаються так:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Побудувати графіки цих функцій, а також довести справедливість рівностей:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2) $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 2x$;
3) $2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} 2x$; 4) $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$;
5) $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$; 6) $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$;
7) $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; 8) $1 - \operatorname{cth}^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Побудувати графіки функцій.

219. $y = 1 + \sin x$. 220. $y = \cos x - 1$.

221. $y = -2\sin 3x$. 222. $y = \sin\frac{x}{4}$.

223. $y = -2\cos\frac{x}{2}$ 224. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

225. $y = 3\cos\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right)$. 226. $y = 3\sin\frac{x-\pi}{3}$.

227. $y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$. 228. $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

229. $y = |\operatorname{tg} 2x|$. 230. $y = \left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$.

231. Дві сторони трикутника відповідно дорівнюють a і b, а кут між ними x. Знайти площу трикутника як функцію кута x, область визначення цієї функції і те значення x, при якому площа трикутника буде найбільшою. Побудувати графік цієї функції.

232. Точка рухається рівномірно по колу радіуса R з центром у початку координат проти руху годинникової стрілки з лінійною швидкістю v см/с. На початку руху абсциса цієї точки була a. Скласти рівняння гармонічного коливання абсциси точки.

233. Точка рухається рівномірно по колу $x^2 + y^2 = 1$. В момент t_0 її ордината була y_0, а в момент t_1 — y_1. Знайти залежність ординати точки від часу, період і початкову фазу коливання.

Побудувати графіки функцій.

234. $y = \arccos\frac{x}{2}$. 235. $y = 1 - \operatorname{arctg} x$.

236. $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. 237. $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$.

238. $y = \operatorname{arcctg} 2x - 2$. 239. $y = 2\arcsin 2x$.

Знайти інтервали змінної x, на яких вірні тотожності.

240. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. 241. $\arcsin\sqrt{x} + \arccos\sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$.

242. $\arcsin\sqrt{1-x^2} = \arccos x$. 243. $\arccos\sqrt{1-x^2} = -\arcsin x$.

244. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. 245. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{x} - \pi$.

246. Розгорткою конуса є круговий сектор з центральним кутом α. Знайти залежність кута ω при вершині конуса від кута α.

247. Картина висотою a висить похило на стіні так, що утворює зі стіною двогранний кут φ. Нижній край картини на b вищий від рівня очей спостерігача, який перебуває на відстані l від стіни. Знайти залежність між кутом γ, під яким спостерігач бачить картину, і кутом φ.

248. За допомогою перетворень графіків основних елементарних функцій та дій з ними побудувати графіки функцій:

1) $y = \sin x + \cos x$; 2) $y = 2\sin x + \cos\frac{x}{2}$;
3) $y = x^3 + 3x$; 4) $y = x + \sin 2x$;
5) $y = \cos x - |\cos x|$; 6) $y = x + \lg x$;
7) $y = 2x + \operatorname{arctg} x$; 8) $y = x\sin x$;
9) $y = \log_{\frac{1}{2}}|x-3|$; 10) $y = |\log_2|x+1||$;
11) $y = |x^2 - 5|x| + 6|$; 12) $y = \arcsin\frac{1}{x}$; 13) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$;
14) $y = \frac{1}{|x|+1}$; 15) $y = \sin(\arcsin x)$; 16) $y = \arccos(\cos x)$;
17) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; 18) $y = \operatorname{cosec} x$; 19) $y = \cos^2\frac{x}{2}$;

20) $y = \frac{2x+1}{3x+4}$; 21) $y = \frac{1}{x^2 - x + 1}$;

22) $y = \begin{cases} x & \text{при} \quad x \leqslant 0, \\ -x^2 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$ 23) $y = \begin{cases} \lg x & \text{при} \quad 0 < x < 1, \\ x - 1 & \text{при} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

249. Знайти графічно наближені розв'язки рівнянь:
1) $x^3 + x = 1$; 2) $10^{-x} = x$; 3) $x = 2\sin x$;
4) $3x - \cos x - 1 = 0$; 5) $2x - \lg x - 7 = 0$;
6) $2^x - 3x + 2 = 0$.

250. Побудувати графіки функцій, які задано параметричними рівняннями:
1) $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$; 2) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;
3) $x = \cos t$, $y = t + 2\sin t$; 4) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^2 + 1)$.

§ 3. ГРАНИЦЯ

3.1. Послідовність. Границя послідовності

Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}.$$

називають *числовою послідовністю* (або коротко послідовністю) і позначають символом $\{x_n\}$, де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — члени або елементи послідовності, x_n — загальний член послідовності.

Число x_0 є *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Написати перших п'ять членів послідовності.

251. $\left\{x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}\right\}$. **252.** $\left\{x_n = 2 + (-1)^n\frac{n+1}{n}\right\}$.

253. $\left\{x_n = \frac{2n-1}{2n+1}\right\}$. **254.** $\left\{x_n = \frac{1}{1+n^2}\right\}$.

255. $\left\{x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2+1}\right\}$. **256.** $\left\{x_n = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + n\pi\right\}$.

Написати формулу загального члена послідовності.

257. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; .... **258.** $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{6}{27}$; $\frac{8}{81}$; ....

259. 1; $\frac{3}{2!}$; $\frac{5}{3!}$; $\frac{7}{4!}$; ....

260. $-\frac{1}{2\cdot 5}$; $\frac{1}{3\cdot 6}$; $-\frac{1}{4\cdot 7}$; $\frac{1}{5\cdot 8}$; ....

261. $\frac{2}{3\cdot 1}$; $\frac{3}{4\cdot 2}$; $\frac{4}{5\cdot 3}$; $\frac{5}{6\cdot 4}$; ....

262. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$; $3\operatorname{tg}\frac{\pi}{16}$; $4\operatorname{tg}\frac{\pi}{32}$; ....

263. $\frac{2}{3!}$; $\frac{8}{5!}$; $\frac{32}{7!}$; $\frac{128}{9!}$; ....

264. $\frac{1}{3\cdot 1}$; $\frac{1\cdot 3}{9\cdot 2}$; $\frac{1\cdot 3\cdot 5}{27\cdot 6}$; $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{81\cdot 24}$; ....

265. $\frac{2}{1}$; $\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}$; $\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}$; $\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13}$; ....

266. $\frac{1}{1\cdot 3}$; $-\frac{1}{6\cdot 7}$; $\frac{1}{11\cdot 11}$; $-\frac{1}{16\cdot 15}$; ....

267. Послідовність має такі значення: $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = 0{,}99$; $x_3 = 0{,}999$; ...; $x_n = \underbrace{0{,}999\ldots9}_{n}$; ... . Чому дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$? Знайти n, при якому абсолютне значення різниці між x_n і її границею не перевищує 0,0001.

268. Дано послідовність: $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{1}{8}$; ...; $x_n = \frac{1}{n^3}$; ... . Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Яким має бути n для того, щоб абсолютне значення різниці між x_n і її границею було меншим від 10^{-3}?

269. Довести, що $x_n = \frac{2n}{n+3}$ прямує до 2 при необмеженому зростанні n. Починаючи з якого n абсолютне значення різниці між x_n і 2 не перевищує 10^{-4}?

270. Послідовність має вигляд $\left\{x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{3n+1}\right\}$. Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. При якому n абсолютне значення різниці між x_n і її границею буде меншим від 10^{-2}?

271. Довести, що послідовність $\left\{x_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}\right\}$, зростаючи монотонно при необмеженому зростанні n, прямує до 4/3. Для яких значень n величина $\frac{4}{3} - x_n$ не перевищує даного додатного числа ε?

272. Довести, що послідовність $\left\{x_n = \frac{\sqrt{4n^2+9}}{n}\right\}$ при $n \to \infty$ має границю, яка дорівнює 2. При якому значенні n величина $|2 - x_n|$ не перевищує даного додатного числа ε?

273. Довести, що для послідовності $\{x_n = 1 + (-1)^n\}$ при $n \to \infty$ границі не існує.

274. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень: $x_1 = 5$; $x_2 = 8$; $x_3 = 11$; ...; $x_n = 3n + 2$; ... . Довести, що x_n нескінченно велика при $n \to \infty$. Для яких значень n значення x_n перевищуватиме $M > 0$?

275. Показати, що послідовність $\{x_n = 2^n\}$ є нескінченно великою при необмеженому зростанні n. Для яких значень n величина x_n буде більшою ніж 10^3?

Встановити, які з послідовностей є нескінченно великими.

276. $\{x_n = 3^{\sqrt{n+1}}\}$. **277.** $\{x_n = n^{(-1)^n}\}$.

278. $\left\{x_n = n^2 \cos \frac{n\pi}{3}\right\}$. **279.** $\{x_n = \lg (\lg n) : n \geqslant 2\}$.

280. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень: $x_1 = \frac{1}{4}$; $x_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$; ...; $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1}$; .... Довести, що x_n прямує до деякої границі при $n \to \infty$.

281. Послідовність $\{x_n\}$ набуває значень: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4}$; $x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$; ...; $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}$; .... Довести, що x_n прямує до деякої границі при $n \to \infty$.

282. Дано послідовність: $x_1 = \sqrt{6}$; $x_2 = \sqrt{6 + x_1}$; ...; $x_n = \sqrt{6 + x_{n-1}}$; .... Довести, що ця послідовність має границю, і знайти її

Знайти границі.

283. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+5}$. **284.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2n}{4n+3}$. **285.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+3n+4}{n(2-5n)}$.

286. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+n-1}{2n^2-9n+3}$. **287.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+100n^2-5n-1}{27n^3+91n^2+5}$.

288. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-7n+3}{5n^3+8}$. **289.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+8n^3-3}{2-6n^4-n^5}$.

290. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+2n+7}{3n^3-4}$. **291.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^3-(n-1)^3}{(2n+1)^3+(n-1)^3}$.

292. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5+(n-1)^5}{(n+1)^5-(n-1)^5}$. **293.** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{2+3n^2}{2n^2-7}\right)$.

294. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{8n^3+3n^2-1}}{5n+1}$. **295.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3}+9}$.

296. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+2}-\sqrt[3]{1-4n^2}}{\sqrt[4]{2n^3-3n-1}+\sqrt[5]{5n^4+9}}$.

297. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{6n^8+1}-\sqrt[6]{2n^3-7n^2+5n-1}}{\sqrt[4]{9n^4+5n^3+2n^2+7}+\sqrt{16n^3+3}}$.

298. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{5n^3+9}-\sqrt{3n^3-8}}{\sqrt[3]{1-2n^5}+\sqrt[4]{7n^4+2}}$. **299.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+2}+3n)^2}{\sqrt[3]{5n^7-9n^6+1}}$.

300. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3})$. **301.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!-n!}$.

302. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+4)!}{(n+3)!+(n+2)!}$. **303.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}$.

304. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$. **305.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n}{3^n-4^{n+1}}$. **306.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-5^n}{3^n+4^n}$.

307. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-5^{\frac{1}{n}}}{2^{\frac{1}{n}}+4^{\frac{1}{n}}}$. **308.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}[1+2+\dots+(n-1)]$.

309. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\dots+\frac{1}{5^n}}$.

310. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}\right)$.

311. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$.

312. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

313. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$.

314. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$.

315. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2}{n^3}$.

3.2. Границя функції. Обчислення границь

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі X точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A є границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Позначення:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Функція $y = f(x)$ при $x \to x_0$ є нескінченно великою (має границю ∞), якщо вона визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, і для довільного числа $M > 0$ існує таке $\delta = \delta(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$).

При $x \to \infty$ функція $y = f(x)$ є нескінченно великою, якщо для довільного числа $M > 0$ можна знайти таке число $N = N(M) > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ $(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty)$.

Функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою величиною при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0)$.

Деякі властивості нескінченно малих величин:

1) якщо при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\alpha(x)$ — нескінченно мала, а $f(x)$ — нескінченно велика величина, то при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\frac{1}{\alpha(x)}$ і $\frac{1}{f(x)}$ — відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;

2) сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;

4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то справедливі формули:

1) $\lim cf(x) = c \lim f(x)$, $c = \text{const}$;

2) $\lim [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim f(x) \pm \lim \varphi(x)$;

3) $\lim [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim f(x) \cdot \lim \varphi(x)$;

4) $\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim \varphi(x)}$, $\lim \varphi(x) \neq 0$.

При обчисленні границь часто використовують такі границі:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ — *перша важлива границя;*

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\lim\limits_{\alpha\to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$ — *друга важлива границя.*

Число A є границею функції $y = f(x)$ зліва (лівою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ $(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) = A)$.

Число B є границею функції $y = f(x)$ справа (правою границею) в точці x_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$ $(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0) = B)$.

Ліва і права границі функції називаються *односторонніми границями.*

316. Дано $y = x^2$. Якщо $x \to 2$, то $y \to 4$. При яких δ з $|x - 2| < \delta$ випливає $|y - 4| < \varepsilon = 0{,}001$?

317. Нехай $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. При $x \to 2$ маємо: $y \to \frac{3}{5}$. Яким має бути δ, щоб з $|x - 2| < \delta$ випливала нерівність $\left|y - \frac{3}{5}\right| < 0{,}1$?

318. Дано $y = \frac{x - 1}{2(x + 1)}$. Якщо $x \to 3$, то $y \to \frac{1}{4}$. При яких δ з $|x - 3| < \delta$ випливає $\left|\frac{1}{4} - y\right| < 0{,}01$?

319. Функція $y = \frac{3}{x^2 + 3}$ прямує до 0 при $x \to \infty$, тобто $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2 + 3} = 0$. При якому N з нерівності $|x| > N$ випливає $|y| < \frac{1}{13}$?

320. При $x \to \infty$ функція $y = \frac{4x^2 + 1}{4x^2 + 7}$ прямує до 1. Яким має бути N, щоб із нерівності $|x| > N$ випливало $|y - 1| < \varepsilon$?

321. При $x \to 0$ функція $y = \frac{1 + 2x}{x} \to \infty$. Які умови має задовольняти x для того, щоб справджувалась нерівність $|y| > 10^4$?

322. Якщо x прямує до 1, то функція $y = \frac{1}{(x - 1)^2}$ необмежено зростає. Яким має бути δ, щоб із нерівності $|x - 1| < \delta$ випливала нерівність $\frac{1}{(x - 1)^2} > N = 10^4$?

323. Функція $y = \frac{1}{10^x - 1}$ нескінченно велика при $x \to 0$. Які нерівності має задовольняти x для того, щоб $|y| > 1000$?

324. Якщо $x \to \infty$, то $y = \log_2 x \to \infty$. Яким має бути M для того, щоб із $x > M$ випливало $y > 10$?

325. Які з основних елементарних функцій є обмеженими в усій області їх визначення?

326. Довести, що функція $y = \frac{x}{x^2 + 2}$ є обмеженою на всій числовій осі.

327. Чи буде функція $y = \frac{x^2}{8 - x^3}$ обмеженою на всій числовій осі; на проміжку $(-\infty;\ 0)$?

328. Довести, що $y = \frac{x}{x + 1} \to 0$ при $x \to 0$. Які умови має задовольняти x для того, щоб справджувалась нерівність $|y| < 10^{-4}$?

329. Показати, що при $x \to \infty$ функція $y = \sqrt{x + 4} - \sqrt{x + 1}$ прямує до 0. Яким має бути N для того, щоб при $x > N$ було $y < \varepsilon$?

Знайти границі.

330. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 + 3}{3x - 1}$. **331.** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3 - 8x^2 + 1}{x + 3}$. **332.** $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x + 4}}$

333. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1+\operatorname{tg} x}{2+\cos 2x}$. 334. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x^2-x-1}{x-3}-2\right)$.

335. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x^3+2}+\dfrac{2x}{x^3-1}\right)$. 336. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sqrt{x}+8x^2-1}{x+\sin 5x}$.

337. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt[3]{x}}{x^2-2x-3}$. 338. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$.

339. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. 340. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

341. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. 342. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}$.

343. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$. 344. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$.

345. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$.

346. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^3-3x^2+4}$. 347. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{5+8x^2-x^4}$.

348. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{7+2x^2}$. 349. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{1+5x^2-2x^3}$.

350. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{5x^2+6x+4}$. 351. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-1}{(2x+1)(3x-7)}$.

352. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x^4}{3x^3+1}-2x\right)$. 353. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^3}{4x^2-3}-\dfrac{2x^2}{4x+3}\right)$.

354. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2}{2x+1}-\dfrac{(2x+1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right]$.

355. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^3+3x^2-1}+x}$. 356. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{8x^5+3}+\sqrt{2x^3-1}}{\sqrt[4]{x^5+4x^4+2}-\sqrt[3]{x^5-5}}$.

357. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^7+2}+\sqrt[3]{3x^3-1}}{x+\sqrt[6]{2x^8+x^7-x+3}}$. 358. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\sqrt[3]{x^4+8x-1}}{\sqrt{4x^3-3}-\sqrt[5]{x^9+x^8+1}}$.

359. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+\sqrt{x^5+4}}{\sqrt[3]{9x^{10}-x^9+1}-(x+2)^3}$.

360. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^6+2x^4+3x^2-1}-\sqrt{1-x^3}}{x+7-\sqrt{3+x^2-4x^5}}$.

361. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$. 362. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$.

363. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4-x^3}}{x}$. 364. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{1+(x+1)^3}-1}{x+1}$.

365. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{5+x^2}-3}$. 366. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4-\sqrt{x+16}}{x^2}$.

367. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{1-\sqrt{x^2+6x+10}}$. 368. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

369. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$. 370. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$.

371. $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x}-3}$. 372. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{\sqrt[3]{x-6}+2}$.

373. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$. 374. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt{9+2x}-5}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}$. 376. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{\sqrt[3]{8+3x+x^2}-2}$.

377. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x}}$. 378. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}$.

379. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}$. 380. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

381. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. 382. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

383. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$.

384. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2+3x+1}-\sqrt{4x^2-5x+3})$.

385. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(2x+3)^2}-\sqrt[3]{(2x-7)^2})$.

386. $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{9x^3+2}-\sqrt{9x^3-1})$.

387. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$. 388. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$. 389. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$.

390. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 8x}{\sin 2x}$. 391. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 3x}{x}$. 392. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\operatorname{arctg} 5x}$.

393. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\operatorname{arctg} 2x}{4x-\arcsin x}$. 394. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2-7x}{\sin 4x}$.

395. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\pi(2+x)}{4x}$. 396. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

397. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 3x}{1-\cos 2x}$. 398. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos^3 x}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}$. 400. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin[2\pi(x+10)]}{\operatorname{arctg} 2x}$.

401. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\ +\dfrac{5\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x}{\arcsin 2x^2}$. 402. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{\cos\left[\dfrac{\pi}{2}(x+1)\right]}$.

403. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt[3]{(1-\cos\alpha)^2}}$. 404. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{arctg} x}{\sqrt{4+x}-2}$.

405. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos 2x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$. 406. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

407. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$. 408. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\operatorname{tg}^3\alpha-\sin^3\alpha}$.

409. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\sqrt{\cos x}}$. 410. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

411. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$. 412. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

413. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x$. 414. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{(\pi-4x)^2}{1-\sin 2x}$.

415. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$. 416. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg} x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

417. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{tg}^2\pi x}{1+\cos\pi x}$. 418. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

419. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sqrt{x^2-3x+3}-1}$. 420. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin 3\pi x}{\operatorname{arctg}(x^2-2x)}$.

421. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$. 422. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

423. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

424. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\operatorname{arctg} 3x}-\sqrt[3]{1-\arcsin 3x}}{\sqrt{1-\arcsin 2x}-\sqrt{1+\operatorname{arctg} 2x}}$.

425. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$. 426. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}x}{(x^2-6x+8)^2}$.

427. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{\sin\frac{2\pi}{3}x+\sin\frac{4\pi}{3}x}{2x^2-3x-9}$. 428. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

429. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$. 430. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}\right)$.

431. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. 432. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.

433. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{3x-1}{x}}$. 434. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^x$.

435. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x-1}\right)^x$. 436. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x^2}$.

437. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$. 438. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-5}\right)^{3x-1}$.

439. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2-1}\right)^{\frac{x^2}{4}}$. 440. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+7}{x^3+2}\right)^{\frac{x^3+1}{5}}$.

441. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+3x+2}\right)^{\frac{x-1}{3}}$. 442. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+8}{x^2-2x-7}\right)^x$.

443. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$. 444. $\lim\limits_{x\to 8}\left(\dfrac{x+1}{2x-7}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-2}}$.

445. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos 2}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$. 446. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sin x}{\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{4}}}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$. 448. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 4\pi}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x\sin 2x}}$. 450. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\dfrac{k}{x}\right)\right]$. 452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(2+x)-\ln 2}$.

453. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$. 454. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$. 455. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-3x}-1}{2x}$.

456. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$. 457. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{e^{x^2}-e^4}$. 458. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

459. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$. 460. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$.

461. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$. 462. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to 1}\left(2e^{x-1}-1\right)^{\frac{2x-1}{x-1}}$. 464. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3e^{x-2}-2\right)^{\frac{x-3}{x-2}}$.

465. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{3x-1}{x+3}\right)^{\frac{\ln(x+3)}{\ln(2x-3)}}$ 466. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(1+x)}{\ln(2-x)}}$.

467. $\lim\limits_{x\to -1}\left(2e^{x+1}-1\right)^{\frac{\ln(1-x)}{\ln(2+x)}}$. 468. $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-3e^x\right)^{\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}}$.

469. Обчислити односторонні границі:

1) $\lim\limits_{x\to 3+0}\dfrac{2}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to 3-0}\dfrac{2}{x-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{|x-1|}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{|x-1|}{x-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}}$, $\lim\limits_{x\to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}}$; 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+0} 2^{\operatorname{tg} 2x}$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}-0} 2^{\operatorname{tg} 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2+0} 2^{\frac{1}{(x-2)^2}}$, $\lim\limits_{x\to 2-0} 2^{\frac{3}{(x-2)^3}}$; 6) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x\to -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x)$, якщо $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{при } x<2, \\ x^2 & \text{при } x\geqslant 2. \end{cases}$

3.3. Порівняння нескінченно малих величин

Нехай $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ — нескінченно малі величини при $x\to x_0$, тоді:

1) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = A\neq 0$, $A\in R$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є нескінченно малими одного порядку;

2) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 0$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

3) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \infty$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою нижчого порядку, ніж $\alpha_2(x)$;

4) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2^k(x)} = A\neq 0$, $A\in R$, то $\alpha_1(x)$ є нескінченно малою k-го порядку відносно $\alpha_2(x)$;

5) якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ є еквівалентними нескінченно малими ($\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$);

6) якщо $\alpha_1(x)\sim\alpha_1^*(x)$, $\alpha_2(x)\sim\alpha_2^*(x)$ при $x\to x_0$, то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1^*(x)}{\alpha_2^*(x)}.$$

470. Нескінченно мала величина u_n набуває таких значень: $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{9}$, ..., $u_n = \frac{1}{n^2}$, ..., а нескінченно мала величина v_n — відповідно $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{6}$, ..., $v_n = \frac{1}{n!}$, ... Порівняти u_n і v_n; яка з них є більш низького порядку мализни?

471. Послідовність u_n набуває таких значень: $u_1 = 0$, $u_2 = \frac{3}{8}$, $u_3 = \frac{8}{27}$, ..., $u_n = \frac{n^2-1}{n^3}$, ..., а послідовність v_n — відповідно $v_1 = 2$, $v_2 = \frac{9}{16}$, $v_3 = \frac{28}{81}$, ..., $v_n = \frac{n^3+1}{n^4}$, ... Порівняти ці нескінченно малі величини.

472. Нескінченно малі величини u_n і v_n набувають відповідно таких значень: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = \frac{4}{5}$, ..., $u_n = \frac{3n-1}{n^2+1}$, ..., $v_1 = \frac{1}{3}$, $v_2 = \frac{3}{23}$, $v_3 = \frac{2}{25}$, ..., $v_n = \frac{n+1}{5n^2+2n-1}$, ... Переконатись у тому, що u_n і v_n є нескінченно малими одного порядку мализни. Чи є вони еквівалентними?

473. Функції $y = \frac{4-x}{4+x}$ і $y = \sqrt{x}-2$ є нескінченно малими при $x\to 4$. Яка з них є більш високого порядку мализни?

474. При $x\to -3$ функції $y = x^2+2x-3$ і $y = \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}$ є нескінченно малими. Порівняйте їх. Чи будуть вони еквівалентними?

475. Довести, що прирости функцій $u = a\sqrt{x}$ і $v = bx^2$ при $x>0$ і спільному $\Delta x\to 0$ матимуть один порядок мализни. При якому значенні x вони будуть еквівалентними ($a\neq 0$, $b\neq 0$)?

476. Показати, що при $x\to 1$ нескінченно малі величини $1-x$ і $a(1-\sqrt[k]{x})$, де $a\neq 0$ і k — ціле додатне число, матимуть один порядок мализни. При якому значенні a вони будуть еквівалентними?

477. Довести, що при $x\to 0$ нескінченно малі величини $\ln(1+x)$ і $(\sin 2x - \sin x)$ будуть еквівалентними.

478. Показати, що при $x\to 0$ нескінченно малі величини $(1-\cos x)$ і $x(\sqrt{1+x}-1)$ будуть еквівалентними.

479. Довести, що при $x\to -1$ нескінченно малі величини $(2+x-x^2)$ і (x^3+1) будуть еквівалентними.

У задачах 480—488 визначити порядок мализни відносно x функції, яка є нескінченно малою при $x\to 0$.

480. $y = \frac{3x(x-2)}{1+\sqrt[4]{x}}$. **481.** $y = \frac{8x^7}{x^{10}+2x^5+1}$.

482. $y = \sqrt[4]{16x+\sqrt[4]{x^5}}$. **483.** $y = e^{\sqrt[3]{x}}-1$.

484. $y = e^{\sqrt{x\sin x}}-1$. **485.** $y = \ln(1+\operatorname{tg} x)$.

486. $y = \sqrt{\cos x}-\sqrt[4]{\cos x}$. **487.** $y = \operatorname{tg}(3-\sqrt{9-x^2})$.

488. $y = \arcsin(\sqrt{1+x}-1)$.

489. Виходячи з еквівалентності функцій $\sqrt{1+x}-1$ і $\frac{1}{2}x$ при $x\to 0$, обчислити наближено: 1) $\sqrt{105}$; 2) $\sqrt{912}$; 3) $\sqrt{260}$; 4) $\sqrt{1632}$; 5) $\sqrt{0.31}$; 6) $\sqrt{0,021}$.

490. Показати, що при $x \to 0$ функції $\sqrt[n]{1+x} - 1$ і $\frac{x}{n}$ є еквівалентними нескінченно малими. Скористатися цим і обчислити наближено: 1) $\sqrt[3]{1047}$; 2) $\sqrt[3]{8144}$; 3) $\sqrt[5]{1{,}1}$; 4) $\sqrt[5]{1080}$. Знайти значення цих коренів за допомогою калькулятора. Порівняти результати.

491. Використати еквівалентність $\ln(1+x)$ і x при $x \to 0$ для наближеного обчислення натуральних логарифмів таких чисел: 1,01; 1,02; 1,1; 1,2. Знайти десяткові логарифми цих чисел і порівняти з табличними даними.

492. Користуючись основними еквівалентностями ($\sin\alpha \sim \alpha$, $\operatorname{tg}\alpha \sim \alpha$, $\operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha$, $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$, $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha\ln a$, $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$, $(1+\alpha)^{k} - 1 \sim k\alpha$, $\alpha \to 0$), обчислити границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 15x}{\operatorname{tg} 10x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{3}}{\operatorname{tg} 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{x\sin 2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+2x^2}{\sin^2\left(\frac{x}{4}\right)}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{bx}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sin(x-3)}{x^2-4x+3}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin^2 3x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{7}{4}x}{e^{-2x}-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin ax-\sin bx}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x^3-\ln a^3}{x-a}$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x^2}-\cos 2x}{x^2}$; 16) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{\sin 3x}-1}{x}$; 18) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{a^{x+1}-1}{\sqrt{1-\cos(x+1)}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x^2}-1}{x^2}$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\sin 4x}-1}{\operatorname{arctg} 2x}$.

§ 4. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $y = f(x)$ є *неперервною в точці* x_0, якщо виконуються такі умови:

1) функція визначена в точці x_0 і в деякому околі цієї точки;

2) існують скінченні односторонні границі функції $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$;

3) односторонні границі рівні між собою і дорівнюють значенню функції в точці x_0, тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, то функція $y = f(x)$ є розривною в точці x_0, а сама точка x_0 — точкою розриву функції.

Якщо функція визначена в точці x_0 і існують скінченні односторонні границі, але не всі числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ рівні між собою, то розрив функції в точці x_0 є *розривом першого роду*, а точка x_0 — *точкою розриву першого роду*. Величина $\delta = |f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$ є *стрибком функції*. Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то розрив у точці x_0 є *усувним*, а точка x_0 — *точкою усувного розриву*. Довизначивши функцію в точці x_0 рівністю $f(x_0) = f(x_0 \pm 0)$, дістанемо неперервну функцію.

Якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності, то розрив функції в точці x_0 є *розривом другого роду*, а точка x_0 — *точкою розриву другого роду*.

Функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна в кожній внутрішній точці цього відрізка, а також у точці a справа і в точці b зліва.

Всі елементарні функції неперервні в області свого визначення.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то:

1) вона обмежена на цьому відрізку і досягає на ньому принаймні один раз свого найбільшого і найменшого значення;

2) набуває всіх проміжних значень між найменшим і найбільшим значеннями;

3) при зміні знаку функції на відрізку знайдеться принаймні одна точка c ($a < c < b$), в якій $f(c) = 0$.

493. Функцію $f(x)$ задано так:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } x \leqslant -1, \\ x^2 & \text{при } -1 < x \leqslant 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 2, \\ 2 & \text{при } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Чи буде ця функція неперервною? Побудувати її графік.

494. При якому значенні a функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ a - x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

буде неперервною? Побудувати її графік.

495. Знайти числа A і B такі, щоб функція

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leqslant 0, \\ A\cos x + B, & 0 < x \leqslant \pi, \\ (x-\pi)^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$$

була неперервною. Побудувати її графік.

496. Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} A - 4x, & x \leqslant -\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{B}{x}, & x \geqslant \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

При яких значеннях A і B ця функція буде неперервною? Побудувати її графік.

497. Функція $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ невизначена в точці $x = 2$. Яким має бути $f(2)$ для того, щоб після довизначення функції вона стала неперервною при $x = 2$?

498. Довизначити функцію $f(x)$ у точці $x_0 = 0$ так, щоб вона стала неперервною в цій точці:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$;

3) $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$; 4) $f(x) = x \sin \frac{\pi}{x}$.

499. В яких точках функції $f(x) = \frac{1}{4x-1}$ і $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$ є розривними? Побудувати графіки обох функцій. Яка різниця в поведінці цих функцій поблизу точок розриву?

500. Скільки точок розриву і якого роду має функція $f(x) = \frac{1}{\ln|x-2|}$? Побудувати її графік.

Дослідити функцію на неперервність і побудувати схематично її графік.

501. $f(x) = \frac{2}{3x-1} + 1$. **502.** $f(x) = 2 + \frac{1}{1-x}$.

503. $f(x) = \frac{3}{|x-2|} - \frac{1}{2}$. **504.** $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$.

505. $f(x) = 5^{\frac{1}{x+3}}$. **506.** $f(x) = 3^{\frac{1}{2-5x}} + 1$.

507. $f(x) = 2^{\frac{1}{|3x+2|}} - 1$. **508.** $f(x) = \frac{1}{3} - 4^{\frac{1}{(1-x)^2}}$.

509. $f(x) = \frac{2}{7^{\frac{1}{2x-1}}}$. **510.** $f(x) = \frac{3}{7^{\frac{1}{x+1}} + 3}$.

511. $f(x) = \frac{2}{1 - 3^{3+x}}$. **512.** $f(x) = \frac{4}{5^{2x-3} - 2}$.

513. $f(x) = \frac{1}{2^{3x+4} + 8}$. **514.** $f(x) = \frac{1}{2^{\frac{x}{x-2}} + 1}$.

515. $f(x) = \frac{3}{\log_2|x+1|}$. **516.** $f(x) = \frac{2}{\lg|2x-3|} - 1$.

517. $f(x) = \frac{5}{2 + 3^{\frac{1}{2-x}}}$. **518.** $f(x) = \frac{2}{2^{\frac{x}{1-x}} - 4}$.

519. $f(x) = \frac{1}{2 - 7^{\frac{1}{2x+1}}}$. **520.** $f(x) = \frac{1}{5^{\frac{3x}{x-2}} - 1}$.

521. $f(x) = \frac{6}{3 - 8^{\frac{5x}{4-x}}}$. **522.** $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 0, \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - x, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

523. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} 2x, & x < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2x+3}, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

524. $f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}, & |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 2, & |x| > -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

525. $f(x) = \begin{cases} 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), & x < \frac{\pi}{3}, \\ 4, & x \geqslant \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

526. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leqslant 3, \\ \log_5(x-3), & 3 < x < 4, \\ \sqrt[3]{2x}, & x \geqslant 4. \end{cases}$

527. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ x^2, & 0 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x-3}, & x > 1. \end{cases}$ **528.** $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leqslant -1, \\ 2x^2 - 1, & -1 < x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$

529. $f(x)=\begin{cases} e^{x+3}, & x<-3, \\ 10-x^2, & |x|\leqslant 3, \\ 2^{\frac{1}{x-2}}, & x>3. \end{cases}$

530. $f(x)=\begin{cases} 2-x, & x\leqslant -1, \\ 3^{\frac{3}{1-2x}}, & -1<x\leqslant 2, \\ \dfrac{1}{3(x-1)}, & x>2. \end{cases}$

531. $f(x)=\begin{cases} 8^{\frac{1}{x+2}}, & x<-2, \\ |x^2-1|, & |x|\leqslant 2, \\ 3\cos(x-2), & x>2. \end{cases}$

532. Використовуючи властивості неперервних функцій, упевнитися в тому, що рівняння $x^5-3x=1$ має принаймні один корінь $1<x<2$.

533. Показати, що рівняння $x\cdot 2^x=1$ має принаймні один додатний корінь, який не перевищує 1.

534. Показати, що рівняння $x=a\sin x+b$ $(0<a<1,\ b>0)$ має принаймні один додатний корінь, який не перевищує $a+b$.

535. Показати, що: а) многочлен непарного степеня має принаймні один дійсний корінь; б) многочлен парного степеня має принаймні два дійсних корені, якщо він має хоча б одне значення, яке протилежне за знаком коефіцієнту при його старшому члені.

536. Показати, що рівняння $\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ $(a_1>0,\ a_2>0,\ a_3>0,\ \lambda_1<\lambda_3<\lambda_3)$ має два дійсних корені, які містяться в інтервалах $(\lambda_1;\ \lambda_2)$ і $(\lambda_2;\ \lambda_3)$.

537. Довести, що коли функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;\ b)$ і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — довільні точки з цього інтервалу, то між ними знайдеться таке число ξ, що

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)].$$

538. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і $g(t)=\max\limits_{x\in[a;t]} f(x)$, $h(t)=\min\limits_{x\in[a;t]} f(x)$, $t\in[a;\ b]$. Довести, що функції $g(t)$ і $h(t)$ неперервні на відрізку $[a;\ b]$.

Глава 5

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. ПОХІДНА

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x називається границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

де Δx — приріст аргументу, а $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ — приріст функції.

Позначається похідна через y', або $\frac{dy}{dx}$, або $f'(x)$. Отже,

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \text{або}\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Значення похідної функції $f(x)$ при $x=x_0$ дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою $x=x_0$, тобто $f'(x_0)=k$.

З погляду фізики похідна має таке тлумачення:

а) швидкість руху $v=S'(t)$, де S — шлях, t — час;

б) лінійна густина $\gamma=m'(l)$, де m — маса стержня, l — довжина;

в) сила струму $I=Q'(t)$, де Q — кількість електрики, що проходить через провідник, t — час;

г) теплоємність $C=\omega'(t)$, де ω — кількість теплоти; t — температура.

Односторонні похідні позначаються відповідно так:

ліва похідна $f'_-(x)=\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$;

права похідна $f'_+(x)=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо обидві ці границі існують і рівні між собою, то тільки в цьому випадку кажуть, що в цій точці існує похідна:

$$f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x).$$

Знайти $\Delta f(x_0;\ \Delta x)$.

1. $f(x)=x^5$, $x_0=2$, $\Delta x=0{,}3$.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$, $\Delta x=0{,}5$.

3. $f(x)=\lg x$, $x_0=1000$, $\Delta x=100$.

4. $f(x)=2^x$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}25$.

5. $f(x)=1+x^2$, $x_0=3$, $\Delta x=0{,}1$.

Знайти $\Delta f(x_0,\ \Delta x)$ як функцію Δx.

6. $f(x)=\cos x$, $x_0=0$. **7.** $f(x)=x^3$, $x_0=2$.

8. $f(x)=e^x$, $x_0=3$. **9.** $f(x)=\log_5 x$, $x_0=1$.

10. $f(x) = 3^x$, $x_0 = -1$. 11. $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = 0{,}5$.

Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функцій.

12. $y = 3x^2 - 2x - 1$ при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}5$.

13. $y = \frac{1}{x+2}$ при $x = 0$, $\Delta x = 0{,}1$.

14. $y = \sqrt[3]{x-1}$ при $x = 2$, $\Delta x = 0{,}4$.

15. $y = \ln x$ при $x = 1$, $\Delta x = 0{,}01$.

16. $y = \sin x$ при $x = \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

17. Знайти кутовий коефіцієнт січної до лінії $y = x^2 + 2x$, якщо абсциси точок перетину дорівнюють:

1) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}5$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}1$.

18. Дано рівняння прямолінійного руху $S = t^3 + 3t^2 + 2$, де шлях подано в метрах, а час — у секундах. Знайти середню швидкість руху: а) за перші 2 с; б) за проміжок часу від $t = 2$ с до $t = 3$ с.

19. Знайти відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ для функції $y = x^3 + 3x$ у точці $x = 1$, якщо: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}5$; в) $\Delta x = 0{,}1$; г) $\Delta x = 0{,}01$. Чому дорівнює похідна y' при $x = 1$?

Користуючись означенням похідної, знайти $f'(x)$.

20. а) $f(x) = x^5$ у точці $x = 1$;

б) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 8$.

21. $f(x) = \operatorname{tg} x$ у точці $x = \frac{\pi}{4}$.

22. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ у точці $A(1; 1)$.

23. Тіло, яке вільно падає, рухається за законом $S = \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9{,}80$ м/с² — прискорення вільного падіння. Знайти середню швидкість руху за проміжок часу від $t = 5$ с до $(t + \Delta t)$ с, приймаючи $\Delta t = 1$ с; 0,1 с; 0,05 с; 0,001 с; знайти швидкість тіла в кінці п'ятої і десятої секунд падіння. Визначити формулу для швидкості падаючого тіла у будь-який момент часу t.

24. Тонкий неоднорідний стержень AB має довжину $L = 20$ см. Маса відрізка AM зростає пропорційно квадрату відстані точки M від точки A, причому відомо, що маса відрізка $AM = 2$ см дорівнює 8 г. Знайти: а) середню лінійну густину відрізка $AM = 2$ см; б) усього відрізка AB; в) густину стержня в точці M.

25. У тонкому неоднорідному стержні AB завдовжки 30 см маса (у грамах) розподілена за законом $m = 3l^2 + 5l$, де l — довжина частини стержня, що відраховується від точки A. Знайти: 1) середню лінійну густину стержня; 2) лінійну густину: а) в точці, віддаленій від точки A на відстань $l = 5$ см; б) у самій точці A; в) у кінцевій точці стержня.

26. Довести, що коли $f(x)$ має похідну в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

Дано $f(x)$; знайти $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$.

27. $f(x) = |x| + |x + 2|$: а) $x_0 = -2$; б) $x_0 = -3$.

28. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leqslant 0, \\ -x^2 + 3x, & x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

29. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leqslant 1, \\ x^2 \log_2 x, & x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$.

30. $f(x) = \sqrt[3]{1 - \ln x}$, $x_0 = 1$. 31. $f(x) = \begin{cases} 5, & x = 5, \\ \frac{1}{5 - x}, & x \neq 5, \end{cases}$ $x_0 = 4$.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

2.1. Обчислення похідних

Основні правила диференціювання. Вважаємо, що C — стала величина, а $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — деякі диференційовні функції від x.

1. $C' = 0$.
2. $(C_1 u + C_2 v)' = C_1 u' + C_2 v'$.
3. $(uv)' = u'v + uv'$.
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.
5. Якщо $y = f(u)$, де $u = u(x)$, то $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, або $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
6. Якщо $y = f(x)$, а $x = \varphi(y)$, то $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.
7. Якщо $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Таблиця похідних.

1. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$. 2. $(\sqrt[n]{u^m})' = \frac{mu'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$.

3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$. 4. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$.

5. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$. 6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$. 9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. 11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$. 13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$. 15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$. 17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

18. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$.

Знайти похідні.

32. $4x^2 - 3x + 5$. 33. $x^5 - 4x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 1$.

34. $\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} + 5x^2 - x + 2$. 35. $\dfrac{x^7}{7} - \dfrac{2x^6}{3} + 3x - 5$.

36. $\dfrac{9}{x^4}$. 37. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{x} + \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{x^2}$.

38. $\dfrac{4}{5}x\sqrt[4]{x}$. 39. $\dfrac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2}$. 40. $x\sqrt[3]{x^2}(2-x)^2$.

41. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}} - \dfrac{\sqrt[4]{x}}{3}$. 42. $x^5(x^3-5)$. 43. $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

44. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$. 45. $\dfrac{ax^2+bx+c}{2ax+b}$. 46. $\dfrac{3}{3x+5} - \dfrac{2}{x}$.

47. $(x^2-3x+1)^5$. 48. $\sqrt[3]{x^3+3x^2-1}$. 49. $(x^5-1)^3$.

50. $x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^2-5}$. 51. $\dfrac{2x+1}{\sqrt{3-2x}}$.

52. $f(x) = (x^3-3x+1)^4$; знайти $f'(0)$ і $f'(-1)$.

53. $S(t) = \sqrt{t^2-6t+12}$; знайти $S'(2)$ і $S'(4)$.

54. $\varphi(z) = \left(z^2 + \dfrac{4}{z}\right)^2$; знайти $\varphi'(2)$.

55. $\varphi(t) = \sqrt{5-t^2}$; знайти $\varphi'(1)$.

56. $\dfrac{1}{3}x^3\sin 3x$. 57. $\sin^2\dfrac{x}{4}$. 58. $\left(\sin\dfrac{x}{4} - \cos\dfrac{x}{4}\right)^2$.

59. $x^3\operatorname{tg} x - 10x$. 60. $\operatorname{ctg} x - 2x + 3$. 61. $\operatorname{tg}^4 3x$.

62. $\operatorname{ctg}^3 4x$. 63. $\cos 3x$. 64. $\cos^5 2x$.

65. $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{x+1}$. 66. $\dfrac{1}{5}\sin^5 x - \sin x + \sin\dfrac{\pi}{9}$.

67. $1 + \cos^2\dfrac{x}{2}$. 68. $x \cdot \operatorname{tg} 3x$. 69. $(2x-1)\operatorname{ctg}(x+5)$.

70. $\operatorname{tg} 3x + \dfrac{3}{4}\operatorname{tg}^2 4x$. 71. $3\operatorname{tg}\dfrac{x^2-1}{x}$.

72. $\dfrac{1}{2}\sin^2\sqrt{x} - \dfrac{2}{5}\sin^5\sqrt{x}$. 73. $\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)^2$.

74. $\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\cos\frac{\pi}{3}} + 2x^2 - 3$. 75. $\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}$.

76. $2\sin x + 2x\cos x + x^2 \cdot \sin x$. 77. $2x^2 \cdot \ln x - x^4$.

78. $\ln(3x^2 - x^3)$. 79. $\lg\cos 5x$. 80. $\lg\sin 3x$.

81. $\dfrac{1}{5}x^5\ln x - \dfrac{1}{8}x^8 + 5$. 82. $\ln\dfrac{x^3+1}{x^3}$.

83. $\dfrac{3x+2}{\lg x}$. 84. $\log_3\ln 5x$. 85. $\ln\left(\operatorname{ctg} x + \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

86. $\ln\dfrac{(x+3)(x-1)^3}{(x+2)^2(x-5)}$. 87. $2\ln\dfrac{x+1}{x-1} + 4\operatorname{arcctg} x$.

88. $\ln\operatorname{tg}\dfrac{3x+2}{6}$. 89. $\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$. 90. $\ln\sin(2x^2+x-1)$.

91. $\lg(2x^3 + \sqrt{16x^4+1})$. 92. $\ln\arccos\sqrt[3]{x^3+5}$.

93. $x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$. 94. $\sin(2\ln x) - 2\ln\dfrac{1}{x}$.

95. $e^x\cos(x+1)$. 96. $2^{3x} \cdot 3^{-2x}$. 97. $(x^2+4x+5)e^{-2x}$.

98. $\sqrt[3]{x^2}\,e^{x^3/3}$. 99. $(\sqrt{3x}-1)e^{\sqrt{3x}}$. 100. $3^{x-1}(x+1)$.

101. xa^{3x+2} 102. $\sqrt[3]{x^2+2^{x-1}}$. 103. $2e^{-x} - \sin(2e^{-x})$.

104. $1 - e^{\cos^2 3x}\sin^2 3x$. 105. $\arcsin\operatorname{tg} x$.

106. $x\sqrt{a^2-x^2} - a^2\arccos\dfrac{x}{a}$.

107. $\sqrt{x}\arccos\sqrt{x} - \sqrt{1-x}$. 108. $x\arcsin\dfrac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$.

109. $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 110. $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2} + 2\ln\cos\dfrac{x}{2}$.

111. $\arccos\dfrac{x^2+1}{x-1}$. 112. $x\arcsin 3^x$.

113. $\arccos\dfrac{2x^3}{1+x^6}$. 114. $(x-1)\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$.

115. $\arcsin\dfrac{x^2-16}{x^2+16}$. 116. $\operatorname{arcctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

117. $\arccos\sqrt{1-\dfrac{x^2}{5}}$. 118. $\arccos\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

119. $\sqrt{\operatorname{sh} 2x}$. 120. $\operatorname{ch}^2\sqrt{x}$. 121. $\operatorname{cth}(\cos 3x)$.

122. $\sqrt[5]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$. 123. $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x}}}$. 124. $\sqrt[5]{(1-x^2)^2(1+x)^3}$.

125. $\cos(\sin^2 x)\sin(\cos^2 x)$. 126. $\dfrac{1}{\sin^m nx}$.

127. $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x\left(\dfrac{2}{x}\right)^3\left(\dfrac{x}{3}\right)^2$. 128. $\lg(\ln^5 4x)$.

129. $\frac{1}{3\sqrt{5}} \lg \frac{x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{x\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. 130. $\log_5 \cos\left(5\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$.

131. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}^2 x)$. 132. $\log_{5x}(e+1)$. 133. $(\cos x)^{\sin x}$.

134. $\lg(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{5\operatorname{sh} x}$. 135. $(\sqrt[3]{x})^{\cos^2 x}$.

136. $\sqrt{\sin x}\, 5^{\sqrt{\sin x}}$. 137. $\lg(\operatorname{ch} x) - \frac{1}{2\operatorname{th} x}$.

138. $\operatorname{arctg}(\operatorname{cth} x)$. 139. $e^{-x}\operatorname{ch} 5x$. 140. $\arcsin\frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

141. $\lg|2x+5|$. 142. $\arccos\frac{1}{|x+1|}$. 143. $|\cos(x+5)|$.

144. $|\operatorname{arcctg} 5x|$ 145. $\sqrt[4]{\frac{5-x}{(2+x)^3}}$.

146. $(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\ldots(x-x_n)^{a_n}$. 147. 5^{x^6}.

148. $(\log_x 5)^{x^2}$. 149. $\cos(\cos(\cos(x)))$.

150. $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. 151. $\frac{1}{2^x}(\lg 5\cdot\cos x + \sin x)$.

152. $5^{\frac{1-\sin x}{\cos x}} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$. 153. $\sin\lg\sqrt{1+x^2}$.

154. $x^2 - 3\operatorname{ctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5\frac{x}{3}$. 155. $\sin^3 x\cos 3x$.

156. $\sin^2 x\sin 2x$. 157. $\cos^5 x\sin 5x$.

158. $\cos^3 x\cos 3x$. 159. $\sin 3x\cos 4x$.

160. $y = \begin{cases} 5-x, & x\leqslant 0, \\ 4^{-x}, & x>0. \end{cases}$ 161. $y = \begin{cases} 5x+1, & x<0, \\ \lg(4x+3), & x\geqslant 0. \end{cases}$

162. $y = \begin{cases} x^3 e^{-x^2}, & |x|\leqslant 5, \\ \frac{1}{e}, & |x|>5. \end{cases}$ 163. $y = \begin{cases} \lg^2(3x^2+1), & x<0, \\ \sqrt[3]{2-x}, & x\geqslant 0. \end{cases}$

164. $\cos^2 3x + 3^{1-x}$. 165. $\operatorname{ctg}(2-3x) + \arcsin\sqrt{x}$.

166. $\frac{2}{1-3x} + \sin^2 x$. 167. $\ln(\pi - \alpha x) + 3\operatorname{arctg} 4x$.

168. $4\operatorname{tg}(2-\pi x) + \frac{1}{\cos 4x}$. 169. $e^{\pi x}\sin\frac{x}{5}$.

170. $\operatorname{ctg}^2\log_3(1-5x)$. 171. $\arccos 7^{-5x}$.

172. $\frac{1-e^x}{3-4x\operatorname{tg} x}$. 173. $3x\operatorname{ctg}^2 4^{-x}$.

174. $\frac{5e^{-x}}{1-3x}$. 175. $\arccos x^3 + \lg(5x+1)$.

176. $\cos^4\frac{2}{3+\sqrt[3]{x}}$. 177. $\operatorname{tg}^3\frac{e^{ax}}{5x-1}$.

Використовуючи логарифмування, знайти похідні функцій.

178. x^{5x}. 179. x^{3^x}. 180. $(\sqrt[3]{x})^{\sqrt{x}}$.

181. $(\lg x)^{\frac{5}{2x}}$. 182. $(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. 183. $x^{3\cos x}$.

184. $ax^{\sqrt{x}}$. 185. $\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x+2}$. 186. $(\cos x)^{\arcsin x}$.

187. $x^{2x^{3x}}$. 188. $(x^3+5)^{\cos x}$. 189. $(5x+4)^{\frac{x}{x+1}}$.

190. $(\lg x)^{4x}$ 191. $\frac{(x-1)^2(3x+1)}{(x+5)^2}$. 192. $\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}(2x-1)(x+1)^2}$.

193. $\frac{\sqrt[4]{4x+5}}{\sqrt[3]{(3x-1)^2(x+3)}}$. 194. $x^3 3^{x^2}\cos 5x$.

195. $(x^2+1)\sqrt{\frac{x(2x-1)}{(3x+5)\sqrt[3]{(x-5)^2}}}$ 196. $\sqrt[5]{\frac{x^3(x^3+1)}{(x^2-1)^2}}$.

197. $\sqrt[3]{x^2\cos x\cdot\sqrt{2-e^x}}$. 198. $\sqrt{\frac{(x-1)\sin 2x}{(x^2+1)\cos 3x}}$.

199. $x^2\cdot 5^{\sqrt{x}}\cdot\operatorname{tg} x$.

200. 1) Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = 1 + \operatorname{sh}(x-2)$ при $x = 2$. Виконати рисунок.

2) Знайти похідні функцій $y = \ln\operatorname{sh} 2x$ і $y = \ln\operatorname{ch} 2x$ та побудувати їхні графіки.

3) Знайти похідні функцій $\operatorname{sh}^2 x$ і $\operatorname{ch}^2 x$ та, використовуючи відповідну властивість гіперболічних функцій, пояснити рівність цих похідних.

4) Використовуючи відповідну властивість гіперболічних функцій, показати, що похідна функції $y = \operatorname{sh} x\operatorname{ch} 3x + \operatorname{ch} x\operatorname{sh} 3x$ дорівнює $4\operatorname{ch} 4x$.

5) Показати, що похідна функції

$$y = \frac{\operatorname{th} 2x + \operatorname{th} 3x}{1 + \operatorname{th} 2x\operatorname{th} 3x} \text{ дорівнює } \frac{5}{\operatorname{ch}^2 5x}.$$

Вводячи проміжні змінні, знайти похідні функцій.

201. 1) $y = \lg(\sin^2 x + \sqrt{1+\sin^2 x})$;

2) $y = (\arcsin x)^2\lg(\arcsin x)$.

202. 1) $y = a^{-x^2}\arccos a^{-x^2}$;

2) $y = \frac{1-5^{3x}}{1+5^{3x}}$.

203. 1) $y = 5\operatorname{sh}^3 3x + 2\sqrt{\operatorname{sh} 3x}$; 2) $y = 2\operatorname{arctg} 5^{-1,5x} - 5^{-1,5x}$

204. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} x^2+6x, & x\leqslant 0, \\ ax+b, & x>0. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнти a і b так, щоб функція $f(x)$ була неперервна і диференційовна в точці $x_0 = 0$.

205. Нехай

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x+5|}, & |x| \geqslant 2, \\ ax^2 + b, & |x| < 2. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнти a і b так, щоб функція $f(x)$ була неперервна і диференційовна в будь-якій точці.

206. Довести, що функція $y = \ln\frac{1}{x+1}$ задовольняє співвідношення $xy' + 1 = e^y$.

207. Довести, що функція $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$ задовольняє співвідношення $2y = xy' + \ln y'$.

208. Довести, що функція $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ задовольняє співвідношення $(1-x^2)y' - xy = 1$.

Знайти похідні функцій, обернених до заданих.

209. $y = \operatorname{ch} 2x$. **210.** $y = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}$. **211.** $y = \arccos 5^x$.

212. $y = \lg\sin 3x$. **213.** $y = 5x^2 - 2x$. **214.** $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

215. Функції, обернені до гіперболічних, позначаються символами $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Знайти похідні цих функцій.

2.2. Функції, задані неявно

Якщо функція задана в неявній формі $F(x; y) = 0$, то для знаходження похідної $\frac{dy}{dx} = y'$ потрібно продиференціювати функцію $F(x; y)$ по змінній x, вважаючи y функцією від x:

$$\frac{d}{dx}F(x;\ y) = 0.$$

З цієї рівності знайти y'.

216. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$, якщо $x^4 + y^4 = 4xy$.

217. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до кола $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$, проведеної в точці $A\ (3;\ 5)$?

Знайти похідні функцій y, заданих неявно..

218. 1) $x^3 + y^3 = 3xy$; 2) $x^3 - x^2y + y^3 = 25$.

219. $3^x + 3^y = 3^{x+y}$. **220.** $x^2 - y = \operatorname{arcctg} y$.

221. $\lg x + \frac{x+1}{y} = ay^2$. **222.** $xy = \arcsin(x+y)$.

223. $y = 2x + \arccos 3y$. **224.** $\lg(x+y) - \frac{x}{y} = 10$.

225. $x^2y = \operatorname{arctg}(2x+y)$. **226.** $xy = \operatorname{tg}^2(\sqrt{x} + y)$.

227. $\cos^2\frac{\sqrt{x}}{y} = 5y$. **228.** $x\sqrt[3]{y^2} = 5^{\frac{y}{1-x}}$.

229. $\frac{3}{x - \sqrt{y}} = \arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2y}$. **230.** $\arcsin\cos\frac{1}{xy} - x^2\lg y = 0$.

231. $\frac{1-3x}{y} = \operatorname{tg}(xy+5)$. **232.** $\sin(5x - 2y) = e^{\pi xy}$.

233. $xy^2 + \frac{1-y}{\sqrt{x}} = e^{\pi}$. **234.** $x\ln y = \cos xy^2$.

235. $5x - y = x^y$. **236.** $x - y = \ln(y^2 - \sqrt{x})$.

237. $\frac{x}{y} = \frac{\cos y}{1-2x}$. **238.** $\frac{y}{x} = \ln(xy - 5)$.

239. $x - \sqrt{y} = 3 - x^2y$. **240.** $\frac{y}{\sqrt{x}} = 3 - x\sqrt[3]{y}$.

241. $5 - \frac{y}{\sqrt[3]{x}} = xy^2$. **242.** $x\sin y = e^{\pi}(2-y)$.

243. $\frac{x+1}{y^2} = \operatorname{tg} xy$. **244.** $\frac{x}{y} - 3^{xy} = 5$.

245. $xy = \ln\left(3 + \frac{x}{2y}\right)$. **246.** $2xy + \ln\left(1 - \frac{x}{y}\right) = 8$.

247. $y\cos xy = x^2 + 3$. **248.** $\ln(x^2 + 2y) = 2\sqrt{xy}$.

249. Показати, що функція y, визначена рівнянням $xy - \ln y = 1$, задовольняє також співвідношення $y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0$.

2.3. Функції, задані параметрично

250. Побудувати графіки функцій, заданих параметрично:

1) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$

251. З рівнянь, що параметрично задають функцію, виключити параметр:

1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin 2t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$

252. Знайти значення параметра t, що відповідає заданим координатам точки на лінії:

1) $x = t^3 + 3t^2$, $y = t^2 - 1$, $(4;\ 0)$:
2) $x = 2\sin t$, $y = 4\cos 2t$, $(1;\ 2)$;
3) $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $\left(1;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
4) $x = t^3 + 2$, $y = t^2 + t + 1$, $(2;\ 1)$.

Якщо функція задана параметрично: $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то похідна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Знайти похідні функцій, заданих параметрично.

253. $\begin{cases} x = 3\sin 2t - \sin 3t, \\ y = 3\cos 2t + \cos 3t. \end{cases}$ **254.** $\begin{cases} x = e^{2t}\sin 3t, \\ y = e^{2t}\cos 3t. \end{cases}$

255. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{1-\sin t}, \\ y = \dfrac{\sin t}{\sin t - 1}. \end{cases}$ **256.** $\begin{cases} x = \lg(2+t^3), \\ y = \operatorname{arcctg} t - 2t. \end{cases}$

257. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2t\sin t. \end{cases}$ **258.** $\begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = \dfrac{2}{3-5t}. \end{cases}$

259. $\begin{cases} x = 2^{\cos^2 t^2}, \\ y = t\operatorname{arctg}\dfrac{3}{1-2\sqrt{t}}. \end{cases}$ **260.** $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+\sin t}, \\ y = t^2 3^{-t}. \end{cases}$

261. $\begin{cases} x = \arccos t^2, \\ y = t\sin\sqrt{t}. \end{cases}$ **262.** $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\sqrt{t}}, \\ y = t\operatorname{ctg} t. \end{cases}$

263. $\begin{cases} x = \dfrac{1-\cos t}{t^2}, \\ y = \ln(1-2t). \end{cases}$ **264.** $\begin{cases} x = \dfrac{1-\sqrt{t}}{\cos t}, \\ y = t\ln t. \end{cases}$

265. Показати, що функція, задана параметрично рівняннями $x = \operatorname{sh} 3t$, $y = \operatorname{ch} 3t$, задовольняє співвідношення $yy'_x - x = 0$.

266. Упевнитися в тому, що функція, задана параметрично рівняннями $x = \sqrt[3]{1+t^2} - \ln(1+\sqrt[3]{1+t^2})$, $y = \sqrt[3]{1+t^2}$, задовольняє співвідношення $y'_x - \frac{1}{y} = 1$.

267. Упевнитися в тому, що функція, задана параметрично рівняннями $x = \frac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \frac{3+2\ln t}{t}$, задовольняє співвідношення $yy'_x = 2x(y'_x)^2 + 1$.

2.4. Механічне застосування похідної

268. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^4 - t^3 + 2t + 2$, де t виражається в секундах, а S — у сантиметрах. Знайти швидкість руху в кінці першої і третьої секунд.

269. Кут α, на який повертається колесо за t (с), дорівнює $\alpha = 2t^2 - 8t + 3$. Знайти кутову швидкість ω руху колеса. В який момент кутова швидкість дорівнює нулю?

270. Тіло масою 6 кг рухається прямолінійно за законом

$$s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t,$$

де t виражається в секундах, а s — у сантиметрах. Обчислити кінетичну енергію $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ через 3 с.

271. Колесо обертається так, що його кут повороту пропорційний кубічному степеню часу. Перший оберт було виконано колесом за 4 с. Знайти кутову швидкість ω через 36 с.

272. Тіло масою $m = 2$ кг рухається прямолінійно по шляху $s = 2t^2 + 3t + 1$. Знайти імпульс сили ($t = mv - mv_0$) через 6 с після початку руху.

273. Кількість теплоти ω, потрібної для нагрівання 1 г води від 0 до t, визначається за формулою

$$\omega = t + 0{,}00002t^2 + 0{,}0000003t^3.$$

Обчислити питому теплоємність води для: 1) $t = 30$ °C; 2) $t = 100$ °C.

274. Закон зміни маси радію залежно від часу має вигляд $m = m_0 e^{-kt}$, де m_0 — початкова маса; k — сталий коефіцієнт ($k = 0{,}000436$). Визначити швидкість розпаду радію в момент часу $t = t_0$.

275. Кількість електрики, що протікає через провідник з моменту часу $t = 0$, задається законом $Q = 3t^2 + 2t + 3$ (кулонів). Знайти силу струму в кінці десятої секунди.

276. Точка рухається по гіперболі $y = \frac{10}{x}$ так, що її абсциса x зростає рівномірно зі швидкістю 1 одиниця за секунду. З якою швидкістю змінюється її ордината, коли проходить точку (5; 2)?

277. Одна сторона прямокутника має сталу величину $a = 10$ см, а друга b зростає зі сталою швидкістю 4 см/с. З якою швидкістю зростають діагональ прямокутника та його площа в той момент, коли $b = 30$ см?

278. Радіус кулі зростає рівномірно зі швидкістю 5 см/с. З якою швидкістю зростають площа поверхні і об'єм кулі в момент, коли радіус її становить 50 см?

279. Барометричний тиск p змінюється з висотою h згідно з функцією $p = p_0 e^{ch}$, де p_0 — нормальний тиск, а c — стала. На висоті

5540 м тиск досягає половини нормального. Знайти швидкість зміни барометричного тиску з висотою.

280. З якою швидкістю зростає величина y при $x = 3$, якщо y зв'язано з x співвідношенням $y^2 = 8x$, а аргумент x зростає рівномірно із швидкістю чотири одиниці за секунду?

281. Ордината точки, що описує коло $x^2 + y^2 = 36$, зменшується із швидкістю 2 см/с. З якою швидкістю змінюється абсциса точки, якщо ордината стає рівною $2\sqrt{5}$ см?

282. В якій точці еліпса $9x^2 + 4y^2 = 360$ ордината спадає з такою самою швидкістю, з якою абсциса зростає?

283. Сторона квадрата збільшується із швидкістю v. Яка швидкість зміни периметра і площі квадрата в той момент, коли сторона його дорівнює 5?

284. Радіус кола змінюється із швидкістю v. Яка швидкість зміни довжини кола і площі круга в той момент, коли його радіус дорівнює R?

285. При якій зміні кута швидкість зміни синуса і тангенса одного й того самого кута однакові?

286. Швидкість зменшення косинуса збільшилася в n разів. У скільки разів при цьому змінилася швидкість зменшення котангенса?

287. Вважаючи, що об'єм стовбура дерева пропорційний кубу його діаметра і що останній рівномірно збільшується із року в рік, показати, що швидкість росту об'єму, коли діаметр дорівнює 90 см, в 25 разів більша швидкості, коли діаметр дорівнює 18 см.

288. Точка рухається по кривій $\rho = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$. Знайти швидкість зміни полярного радіуса ρ щодо полярного кута φ.

289. Точка рухається по кривій $\rho = a\varphi^2$. Знайти швидкість зміни полярного радіуса, якщо відомо, що він обертається з кутовою швидкістю ω.

290. Точка рухається по колу $\rho = 2R \sin \varphi$. Знайти швидкість зміни абсциси і ординати точки, якщо полярний радіус обертається з кутовою швидкістю ω. Полярна вісь є абсцисою, полюс — початком системи декартових координат.

291. Круг радіуса R котиться без ковзання по прямій. Центр круга рухається із сталою швидкістю v. Знайти швидкість зміни абсциси x і ординати y для точки, що лежить на границі круга.

292. При зарядці конденсатора зв'язок між його зарядом і напругою визначається за формулою $q = 4 \cdot 10^{-7}u^4 - 10^{-12}u^2$, де q — заряд у кулонах; u — напруга конденсатора у вольтах. Знайти динамічну ємність конденсатора при напрузі 50 кВ $\left(\text{динамічна ємність } C = \frac{dq}{du}\right)$.

293. Насос подає воду в циліндричний бак, діаметр якого 6 дм. Висота підйому води збільшується на 1 дм щосекунди. Знайти швидкість наповнення бака.

294. На відстані 5 км від прямолінійного берега міститься маяк, ліхтар якого робить повний оберт за 1 хв. Знайти швидкість, з якою б промінь світла ковзав по прямолінійному берегу в момент, коли він створює з береговою лінією кут 60°.

295. Пліт підтягують до берега за допомогою каната, який намотується на коловорот зі швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху плота в той момент, коли його відстань від берега дорівнюватиме 25 м, якщо коловорот розміщено на березі вище поверхні води на 4 м.

2.5. Геометричне застосування похідної

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Довжина дотичної (рис. 5.1)

$$AM_0 = T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|\sqrt{1 + (y_0')^2};$$

довжина нормалі

$$CM_0 = N = |y_0|\sqrt{1 + (y_0')^2};$$

довжина піддотичної

$$AB = S_T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|;$$

довжина піднормалі

$$BC = S_N = |y_0 \cdot y_0'|.$$

296. В яких точках лінії $y = x^2(x - 2)^2$ дотичні паралельні осі Ox?

297. Скласти рівняння дотичних до лінії $y = x - \frac{1}{x}$ у точках її перетину з віссю абсцис.

298. В яких точках лінії $y = \sin x + \cos x$ дотичні паралельні осі Ox?

299. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кубічної параболи $y = x^3$: а) в початку координат; б) в точці $A(1; 1)$; в) в точці $B(-2; -8)$.

300. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 2x$ паралельна: а) осі Ox; б) прямій $y = 2x - 1$?

301. Чи може дотична до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ утворювати з віссю Ox гострий кут?

Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривих у точках.

302. $y = \operatorname{tg} 2x$ у початку координат.

303. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ у точці перетину з віссю Ox.

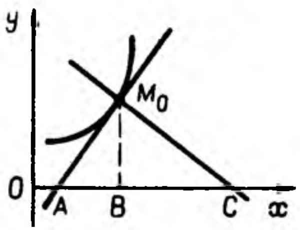


Рис. 5.1

304. $y = \arccos 3x$ у точці перетину з віссю Oy.

305. $y = \ln x$ у точці перетину з віссю Ox.

306. $y = e^{1-x^2}$ у точках перетину з прямою $y = 1$.

307. Скласти рівняння дотичної і нормалі до параболи $y = 2x^2$ у точці A (1; 2).

308. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $y = \frac{2}{x}$ у точці A (2; 1).

309. В якій точці параболи $y = x^2 - 3x + 5$ дотична паралельна прямій $2x + 2y - 5 = 0$?

310. В яких точках гіперболи $y = \frac{3}{x}$ дотична перпендикулярна до прямої $x - 3y - 4 = 0$?

311. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$; паралельної прямій $2x + y + 5 = 0$.

312. Скласти рівняння дотичної до лінії $y = x^4 + 6x + 6$, перпендикулярної до прямої $2x + 4y - 7 = 0$.

313. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - x + 1$, перпендикулярної до прямої $6x - 2y - 5 = 0$.

314. Скласти рівняння нормалі до гіперболи $y = \frac{x-1}{x+2}$, паралельної прямій $9x + 3y + 2 = 0$.

315. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $y = \frac{2}{x}$, паралельної її хорді, що сполучає точки з абсцисами $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$.

316. Скласти рівняння нормалі до параболи $y = x^2 - 6x + 6$, перпендикулярної до прямої, що сполучає початок координат з вершиною параболи.

317. Довести, що дотичні до лінії $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$, проведені в точках, для яких $y = 1$, перетинаються в початку координат.

318. Знайти віддаль від початку координат до нормалі, проведеної до лінії $y = e^{2x} + x^2$ в точці з абсцисою $x = 0$.

319. Знайти довжини дотичної, нормалі, піддотичної і піднормалі до лінії $y = x^3$ в точці A (1; 1).

320. Знайти довжини дотичної, нормалі, піднормалі і піддотичної до лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ в точці з абсцисою $x = a$ $(a > 0)$.

321. Скласти рівняння дотичної і нормалі до еліпса $\frac{x^2}{16} + \frac{3y^2}{16} = 1$ в точці A (2; —2).

322. Скласти рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 - 5x + 7y + 6 = 0$ в точках його перетину з координатними осями.

323. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 4x + 2$ паралельної до прямої $3x - 2y + 6 = 0$.

324. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ в точці M (5; 9/4).

325. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, перпендикулярних до прямої $2x + 4y - 3 = 0$.

326. Скласти рівняння нормалей до еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$, перпендикулярних до прямої $2x - 3y + 5 = 0$.

327. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $x^3 + y^3 - 3x^2y^2 + 3 = 0$ в точці A (1; —1).

328. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^4 + y^4 = 4x^2y^2 + 1$ в точці A (1; 2).

329. Скласти рівняння нормалі до параболи $y^2 = 2x + 4$, паралельної прямій $4x - y + 5 = 0$.

330. Обчислити довжини дотичної, нормалі, піддотичної і піднормалі до параболи $y^2 = 4x$ в точці A (1; 2).

331. Показати, що у гіперболи $x^2 - y^2 = a^2$ довжина відрізка нормалі дорівнює полярному радіусу цієї точки.

332. Знайти кут, під яким лінія $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ перетинає вісь Ox.

333. Знайти кут, під яким перетинаються лінії $y = 2x$ і $xy = 2$.

334. Під якими кутами перетинаються лінії: 1) $y = (x-2)^2$ і $y = -4 + 6x - x^2$; 2) $x^2 + y^2 = 8$ і $y^2 = 2x$?

335. Знайти кути, під якими перетинаються лінії $x^2 + y^2 - 4x = 1$ і $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

336. Знайти кут, під яким лінія $y = x - \frac{1}{x^2}$ перетинає вісь Ox.

337. Довести, що сума довжин відрізків на осях координат, які відтинає дотична до кривої $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, для всіх її точок дорівнює a.

338. Довести, що відрізок дотичної до астроїди $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, обмежений координатними осями, має сталу довжину, що дорівнює a.

339. Довести, що відрізок, який відтинає на осі абсцис дотична в довільній точці кривої $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$, пропорційний кубу абсциси точки дотику.

340. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до лінії
$\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 2\sin 2t \end{cases}$ в точці $A\,(2\sqrt{3};\ \sqrt{3})$.

341. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії
$\begin{cases} x = t^3 - 2t^2 + 2, \\ y = t^2 - 3t + 3 \end{cases}$ в точці $A\,(1;\ 1)$.

342. Знайти кут, під яким дотична, проведена до кривої
$\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$ в точці $A\,(1;\ 1/2)$, нахилена до осі Ox.

343. Знайти кут, під яким лінія $\begin{cases} x = t^2 - 5t + 6, \\ y = t^3 - 1 \end{cases}$ перетинає вісь Ox.

344. Знайти точку на лінії $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases}$ в якій дотична паралельна прямій $x - 2y + 3 = 0$.

345. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$ в точці $A\,(3;\ 2)$.

346. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії $x = e^{2t} + 1$, $y = 2 - e^{-t}$ при $t = 0$.

347. Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3} \quad \text{при } t = 1.$$

348. Знайти кути, під якими перетинаються лінії

$$y = x^2 \ \text{ і } \ \begin{cases} x = \dfrac{5}{3}\cos t, \\ y = \dfrac{5}{4}\sin t. \end{cases}$$

349. Знайти кути, під якими перетинаються лінії

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x = \dfrac{a + 2}{1 + t^2}, \\ y = \dfrac{a + \sqrt{3}}{1 + t^2}. \end{cases}$$

350. Знайти довжину дотичної, нормалі, піддотичної і піднормалі до циклоїди $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$ в довільній точці $t = t_0$.

351. Знайти довжину дотичної, нормалі, піддотичної і піднормалі до астроїди $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t \end{cases}$ в довільній точці.

352. Довести, що відрізок нормалі до кривої
$\begin{cases} x = 2a\sin t + a\sin t\cos^2 t, \\ y = -a\cos^3 t, \end{cases}$ обмежений осями координат, дорівнює $2a$.

353. Дано коло $\rho = 2a\sin\varphi$. Знайти кут між полярним радіусом і дотичною і кут α між полярною віссю і дотичною.

354. Знайти тангенс кута між полярною віссю і дотичною до лінії $\rho = \dfrac{a}{\cos^2\varphi}$ в точках, в яких $\rho = 2a$.

355. Знайти тангенс кута між полярною віссю і дотичною в початку координат до лінії: 1) $\rho = \sin^3\varphi$; 2) $\rho = \sin 3\varphi$.

356. Довести, що дві кардіоїди $\rho = a\,(1 + \cos\varphi)$ і $\rho = a\,(1 - \cos\varphi)$ перетинаються під прямим кутом.

357. Знайти кут між дотичною і полярним радіусом точки дотику логарифмічної спіралі $\rho = ae^{k\varphi}$.

358. Профіль підйому шосе має форму кривої $y = \dfrac{x}{1 + x}$. Визначити кут нахилу підйому в його початку.

359. Шосе проходить через річку. Міст має форму параболи $x^2 = 2py$. Яким потрібно зробити нахил насипу до мосту, щоб перехід з мосту на ухил був плавним? Довжина мосту $l = 20$ м, стріла прогину $f = 0{,}5$ м.

360. Провід високовольтної лінії передачі електричного струму має довжину між опорами 80 м; рівняння лінії проводу $y = 0{,}001x^2$. Який кут створюють між собою проводи біля кожної опори?

§ 3. ДИФЕРЕНЦІАЛ

3.1. Обчислення диференціалів

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна щодо приросту аргументу

$$dy = f'(x)\,\Delta x.$$

Оскільки $dx = \Delta x$, то $dy = f'(x)\,dx$. При досить малих значеннях Δx справджується наближена рівність $\Delta y \approx dy$. Звідси випливає формула для наближеного обчислення значення функції

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x.$$

Основні властивості диференціала.

1) $dC = 0$ ($C = \text{const}$);

2) $d\,(au + bv) = a\,du + b\,dv$ (a, b — сталі, u, v — диференційовні функції);

3) $d\,(uv) = u\,dv + v\,du$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ ($v \neq 0$);

5) $df(u) = f'(u)\,du$.

361. Знайти приріст функції $y = x^2$, що відповідає приросту Δx незалежної змінної x. Обчислити Δy, якщо $x = 2$ і $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta x = 0{,}02$.

362. Знайти приріст ΔV об'єму V кулі при зміні радіуса $R = 5$ на ΔR. Обчислити ΔV, якщо $\Delta R = 0{,}2$; $0{,}1$; $0{,}02$. Яка буде помилка значення ΔV, якщо обмежитися членом, до якого входить ΔR у першому степені?

363. Задана функція $y = x^5 + 4x$. Знайти значення приросту і його лінійної частини, що відповідають зміні x від $x_1 = 1$ до $x_2 = 1{,}2$.

364. Який приріст матиме функція $y = 2x^3 - 3x$ при переході незалежної змінної від $x = 2$ до $x = 2{,}01$? Яке значення відповідної лінійної головної частини? Знайти відношення другої величини до першої.

365. Дана функція $f(x) = x^3$. Відомо, що в деякій точці приросту незалежної змінної $\Delta x = 0{,}1$ відповідає головна частина приросту функції $df(x) = 0{,}5$. Знайти початкове значення незалежної змінної x.

366. Знайти приріст і диференціал функції $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}2$. Обчислити абсолютну і відносну похибки, які виявляються при заміні приросту функції диференціалом. Зробити рисунок.

367. Знайти приріст і диференціал функції $y = \sqrt[3]{x}$ при $x = 8$ і $\Delta x = 0{,}8$. Обчислити абсолютну і відносну похибки. Виконати рисунок.

368. Дано $y = x^5 - 4x$. При $x = 1$ обчислити Δy і dy, даючи значення $\Delta x = 2$; $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta x = 0{,}01$. Знайти відповідні значення відносної похибки $\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

369. Знайти графічно приріст і диференціал функції $y = 2^x$ і обчислити абсолютну і відносну похибки при заміні приросту функції її диференціалом при $x = 1$ і $\Delta x = 0{,}5$.

370. Сторона квадрата дорівнює 10 см. На скільки збільшиться його площа, якщо кожну його сторону збільшити на: 1) 1 см; 2) 0,4 см; 3) 0,05 см. Знайти головну лінійну частину приросту площі цього квадрата і оцінити відносну похибку (в процентах) при заміні приросту його головною частиною.

371. Відомо, що при збільшенні сторін квадрата на 0,2 см лінійна головна частина приросту площі становить 1,8 см². Знайти лінійну головну частину приросту, що відповідає приросту кожної сторони на: 1) 0,5 см; 2) 0,8 см, 3) 1,4 см.

372. Показати, базуючись на формулі закону Ома $I = \frac{E}{R}$, що мала зміна струму, зумовлена малою зміною опору, може бути знайдена наближено за формулою $\Delta I \approx -\frac{I}{R}\Delta R$.

373. Мідний кубик, ребро якого дорівнює 5 см, рівномірно прошліфований з усіх боків. Знаючи, що вага його зменшилася на 0,96 г, і вважаючи, що питома вага міді дорівнює 8 г/см³, визначити, як зменшилися розміри куба, тобто на скільки скоротилося його ребро.

374. При статичному розрізі конденсатора закон зменшення його напруги залежно від часу виражається формулою $u = u_0 e^{-\alpha t}$, де u_0 — початкове значення напруги; α — деяка стала; t — час, що відраховується від початку розрядки.

1) Знайти швидкість зміни напруги конденсатора залежно від часу розрядки. 2) Показати, що зміна напруги за нескінченно малий проміжок часу dt пропорційна цьому проміжку і величині, що має в цей момент часу напруга в конденсаторі.

375. Циліндрична трубка заповнена водою. Зваживши воду, знайшли площу поперечного перерізу трубки. Яка похибка знайденої величини радіуса, якщо $r = 0{,}5$ см, а похибка площі перерізу — 0,1 см²?

376. Енергія махового колеса нафтового двигуна виражається формулою $E = \frac{3}{200} n^2$, де n — число обертів. Визначити приріст числа обертів, якщо $\Delta E = 0{,}72$ м/хв, $n = 24$ об/хв.

377. Об'єм V кулі радіуса r дорівнює $\frac{4}{3}\pi r^3$. Знайти приріст і диференціал об'єму і дати їх геометричну інтерпретацію.

378. Вільне падіння матеріальної точки визначається за законом $S = \frac{gt^2}{2}$. Знайти приріст і диференціал шляху в момент t і з'ясувати їх механічний зміст.

Знайти диференціали функцій.

379. $x^2\sqrt{x}$. **380.** $(ax + b)(cx + d)$. **381.** $\lg \frac{5x}{2x+1}$.

382. $5\cos x - x^2 \sin x + 7$. **383.** $\arcsin \frac{\cos x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

384. $5^{x-4} + \ln(1 + x^2)$. **385.** $\operatorname{tg}^3 \frac{x^3}{5}$.

386. $\lg \frac{x+1}{2x+5}$. **387.** $\frac{ax+b}{cx+d}$. **388.** $(ax^2 + bx + c)^n$.

389. $\sin^n x \cos^m x$. **390.** $5^{\sin x \cos 2x}$. **391.** $\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x}$.

392. $\lg \sin \operatorname{tg} \sqrt[5]{x^4}$. **393.** $\arcsin^2 x + \arccos^3 x^2$. **394.** $\operatorname{arctg}^4 x^3$.

395. $\arccos \frac{ax+b}{c}$. **396.** $\sin^3 \frac{6x}{x+1}$. **397.** $\sqrt{\arccos x} + \operatorname{ctg}^3 x$.

398. $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + x^2}$. **399.** $5^{x^2} + 2x^5$.

Знайти диференціали функцій, заданих неявно.

400. $y^3 + y = x^3 - 1$. **401.** $\cos \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - y = x^2 - 4$.

402. $e^{y^2} = x^2 - y$. 403. $\sin\frac{x}{y} = e^{xy}$.

404. $\mathrm{tg}^2\sqrt[3]{xy} = \lg(x+y)$. 405. $5^{x-y} + \cos\frac{y}{x} = 25$.

406. $y^2 - xy = e^y + x$. 407. $2xy = \ln(x^2 - 2y)$.

408. $x^2 + y^2 = 4\sqrt{xy}$. 409. $x^3 + y^3 - 3xy = 5$.

410. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$. 411. $xy = \sin(x+y)$.

Обчислити значення диференціала функції.

412. $y = (\mathrm{ctg}\,x + 1)^2$ при зміні x від $x = \frac{\pi}{4}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

413. $y = \mathrm{tg}^3\varphi$ при зміні φ від 45° до 45° 20′.

414. $y = \cos 2\varphi$ при зміні φ від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{31\pi}{180}$.

415. $y = \mathrm{ctg}\,2\varphi$ при зміні φ від $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{29\pi}{90}$.

416. $y = \mathrm{tg}\frac{\theta}{4}$ при зміні θ від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{25\pi}{36}$.

417. Знайти наближене значення приросту функції $y = \sin x$ при зміні x від 45° до 45° 5′. Чому дорівнює $\sin 45°5'$?

418. Знайти наближене значення приросту функції $y = \mathrm{tg}\,x$ при зміні x від 30° до 30° 3′.

419. Знайти наближене значення приросту функції $y = \frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ при зміні x від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4} + 0{,}1$.

420. Дано: $\rho = a\sqrt{\sin 3\varphi}$; знайти $d\rho$.

421. $y = 2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{2x}} + 5^{\sqrt{x}}$. Обчислити dy при $x = 1$ і $dx = 0{,}5$.

422. Обчислити наближено $\sin 45°20'$. Порівняти результат з табличним значенням.

423. Перевірити, що функція y, визначена рівнянням $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, задовольняє відношення $x(dy - dx) = y(dy + dx)$.

424. $f(x) = e^{0{,}3x(2-x)}$. Обчислити наближено $f(3;\ 1)$.

425. Знайти наближену рівність для приросту ΔV об'єму V прямого кругового циліндра з висотою h при зміні радіуса основи r на величину Δr.

426. За законом Клапейрона об'єм V, що його займає газ, тиск газу P і абсолютна температура T пов'язані формулою $PV = RT$, де R — газова стала. Знайти наближений вираз для приросту ΔV об'єму V при зміні тиску P на величину ΔP, вважаючи сталою температуру T.

Обчислити наближено.

427. $\mathrm{arctg}\,1{,}05$. 428. $\mathrm{arctg}\,0{,}93$. 429. $\sqrt{\frac{(3{,}046)^2 - 8}{(3{,}046)^2 + 7}}$.

430. $\arcsin 0{,}707$. 431. $\arccos 0{,}45$. 432. $\mathrm{arctg}\,0{,}95$.

433. $\lg 0{,}9$. 434. $\cos 62°$. 435. $\sqrt{82}$. 436. $\sin 31°$.

Виразити диференціал складеної функції через незалежну змінну та її диференціал.

437. $y = \sqrt[3]{x^2 + 3x}$, $x = t^3 - 3t + 5$.

438. $S = \sin^2 v$, $v = \frac{t^4 - 1}{4}$.

439. $u = \mathrm{arcctg}\,v$, $v = \frac{1}{\mathrm{ctg}\,x}$.

440. $u = 2^{-\frac{1}{v^2}}$, $v = \lg x$.

441. $y = \ln\mathrm{ctg}\frac{x}{2}$, $x = \arccos u$, $u = \sin 2v$.

442. $z = e^{2y}$, $y = \frac{1}{2}\lg x$, $x = 3t^2 - 5t + 2$.

443. $z = \sqrt{2y}$, $y = \ln(x+1)$, $x = 2t^2 - 4t + 5$.

444. $y = \cos u$, $u = \frac{1}{v}$, $v = e^{5x+4}$.

3.2. Диференційовність функції

Функція диференційовна в точці, якщо вона в цій точці має скінченну похідну.

445. Функція $y = |x - 1|$ неперервна на всій числовій осі $(-\infty < x < +\infty)$. Показати, що при $x = 1$ вона не диференційовна.

446. Функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ неперервна на всій числовій осі. Показати, що в точці $x = 0$ вона не диференційовна.

447. Дослідити неперервність і диференційовність функції $y = |x^3|$ при $x = 0$.

448. Дослідити неперервність і диференційовність функції

$$f(x) = \begin{cases} x + 0{,}25 & \text{при } x < 0{,}5, \\ 2x - x^2 & \text{при } x \geqslant 0{,}5. \end{cases}$$

449. Функція $y = |\sin x|$ неперервна при всіх x. Показати, що при $x = 0$ вона диференційовна. Чи є значення незалежної змінної, при яких функція не диференційовна?

450. Дослідити неперервність і диференційовність функції $y = e^{-|x|}$ при $x = 0$.

451. $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Чи неперервна і диференційовна ця функція при $x = 0$?

452. $f(x) = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Чи неперервна і диференційовна ця функція при $x = 0$? Відобразити результат геометрично.

453. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$. Чи неперервна і диференційовна ця функція при $x = 0$?

454. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x}}$ при $x \neq 0$ і $f(0) = 0$. Чи неперервна і диференційовна ця функція при $x = 0$?

§ 4. ПОХІДНІ І ДИФЕРЕНЦІАЛИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Похідна від похідної називається другою похідною, або похідною другого порядку, і позначається y'', або $f''(x)$, або $\frac{d^2y}{dx^2}$. Отже

$$y'' = (y')', \text{ або } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Аналогічно визначається похідна третього порядку:

$$y''' = (y'')', \text{ або } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Похідна n-го порядку позначається $y^{(n)}$, або $f^{(n)}(x)$, або $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно, то має місце формула Лейбніца

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + uv^{(n)}.$$

Для функцій, заданих параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ похідні можна знайти за формулами

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}; \ \ldots.$$

Диференціалом другого порядку називається диференціал від диференціала: $d^2y = d(dy)$. Аналогічно

$$d^3y = d(d^2y);$$

$$d^2y = f''(x)\,dx^2, \quad d^3y = f'''(x)\,dx^3, \ \ldots, \ d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n,$$

x — незалежна змінна.

Знайти похідні другого порядку функцій.

455. $\sin^2 x$. 456. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 457. $\log_5 \sqrt[3]{x^2 - 1}$.
458. e^{-5x^2}. 459. $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$. 460. $x^{2\sqrt{x}}$.
461. $\ln \operatorname{tg} x$. 462. $\frac{1}{2}x^2(4\ln x - 5)$. 463. $\frac{1}{3}(3x\sin 2x + 2\cos 3x)$.
464. $x^2\sqrt{1 - x^2} + x\arcsin x$. 465. $x\sqrt{x} + \operatorname{ctg} 2x + 1$.
466. $\sqrt[3]{x} + \lg x$. 467. $e^{2x}\ln(x + 1)$.
468. Знайти $y''(0)$ і $y'''(0)$, якщо $y(x) = e^{3x}\sin 2x$.
469. Знайти $y'''(0)$, якщо $y = \lg(2x + 1)$.
470. Знайти $y^{(5)}(1)$, якщо $y = x^4 \ln x$.
471. Знайти $y''(0)$, якщо $y = 2^{\cos x}\sin(\cos x)$.

Нехай функція $f(u)$ двічі диференційовна. Знайти y' і y''.

472. $y = f\left(\frac{1}{x^4}\right)$. 473. $y = \lg f(2^x)$. 474. $y = \operatorname{tg} f(x^2)$.
475. $y = e^{f(\lg x)}$. 476. $y = \sqrt{f(\ln x)}$. 477. $y = \arccos f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ — двічі диференційовні функції. Знайти y' і y''.

478. $y = u\sqrt{v}$. 479. $y = u^2v$. 480. $y = \lg\frac{u}{v}$.
481. $y = \sin uv$. 482. $y = u5^v$. 483. $y = u \operatorname{tg} v$

Знайти похідні n-го порядку функцій.

484. $\sin x$. 485. $x^n\sqrt[m]{x}$. 486. $\lg(x + 1)$.
487. 5^{-x}. 488. $x^2\lg x$. 489. e^{ax}.
490. $\cos 5x$. 491. $\dfrac{x}{x + 5}$. 492. $\dfrac{x^3}{x - 1}$.
493. $\cos^2 x$. 494. $\ln x$. 495. $\sin 3x$.
496. $y = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 3}$, знайти $y^{(50)}$.
497. $y = \dfrac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$, знайти $y^{(20)}$.

Застосовуючи формулу Лейбніца, знайти похідні.

498. $y = (x^2 + 3x + 2)\sin x$, $y^{(25)}$ — ? 499. $y = (x^3 + 1)e^x$, $y^{(30)}$ — ?
500. $y = e^{-x}\cos x$, $y^{(10)}$ — ? 501. $y = x^2\ln x$, $y^{(5)}$ — ?
502. $y = x \operatorname{ch} x$, $y^{(50)}$ — ? 503. $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 3x + 7}$, $y^{(n)}(1)$ — ?
504. $y = \ln\dfrac{1}{1 - x}$, $y^{(n)}(0)$ — ? 505. $y = x^2 \operatorname{sh} x$, $y^{(20)}$ — ?
506. $y = x^5e^{-x}$, $y^{(25)}$ — ? 507. $y = 5^x\sin x$, $y^{(40)}$ — ?
508. Довести, що $(x^{n-1}e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n\dfrac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$.
509. Обчислити значення n-ї похідної функції $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ в точці $x = 0$.

510. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; знайти $y^{(5)}(0)$, $(c \neq 0)$.

511. $y = \frac{x^2+1}{x^2-3x+1}$; знайти $y^{(5)}(0)$.

Довести, що наведені функції задовольняють такі співвідношення.

512. $y = xe^{2x}$, $y'' - 4y' + 4y = 0$.

513. $y = x\ln^2 x$, $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$.

514. $y = \frac{x}{2} + \sin\ln x$, $x^2y'' + xy' + y = x$.

515. $y = xe^x + 2e^{2x}$, $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

516. $y = \sin 2x - x\cos 2x$, $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$.

517. $y = \frac{x-3}{x+4}$, $2y'^2 = (y-1)y''$.

518. $y = (x^2-1)^n$, $(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(x-1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0$.

519. $y = A\sin(\omega t + \omega_0) + B\cos(\omega t + \omega_0)$, $(A, B, \omega, \omega_0$ — сталі), $y'' + \omega^2 y = 0$.

520. $y = \sin(n \arcsin x)$, $(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$.

521. Показати, що $(e^{ax}\cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax}\cos(bx + n\varphi)$, де $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$.

522. Знайти y'', якщо $x^2 + y^2 = r^2$.

Знайти похідні другого порядку функцій $y = f(x)$, заданих неявно.

523. $y = 1 + xe^y$. 524. $y = \operatorname{ctg}(x+y)$.

525. 1) $x + y = xy$; 2) $y^2 = 3ax$.

526. $2^{x-y} = x + y$. 527. $x^2 + y^2 = 2e^y$.

528. $y = \ln(x+y)$. 529. $x^2 + y^2 - 4xy + 2 = 0$.

530. $2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln(x^2+y^2)$. 531. $y = \cos(x+y)$.

532. $x^3 + y^3 + 6xy = 8$.

533. Довести, що коли $(a+bx)e^{y/x} = x$, то $x^3\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)^2$.

534. $y^2 - x^2 + 2y = 2$; знайти y'' в точці A (1; 1).

535. $e^s + ts = e$; знайти $\frac{d^2s}{dt^2}$ в точці A (0; 1).

536. $y^2 = 2px$; знайти $K = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

Знайти y''' функції $y = f(x)$, заданої неявно.

537. $x^2 + y^2 = r^2$. 538. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

539. $x = \operatorname{arctg}(x+y)$. 540. $y = \operatorname{ctg}(x - y + 1)$.

541. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$ в точці A (1; 1).

542. Знайти y''', якщо $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

Знайти похідні функцій, заданих параметрично.

543. 1) $x = \sin^2 3t$, $y = 6t - \sin 6t$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

2) $x = 2t\sin t$, $y = 2t\cos t$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

544. $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{\cos t}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

545. $x = \arccos t$, $y = \ln(1-t^2)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

546. $x = \operatorname{arcctg} t$, $y = \ln(2+t^2)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

547. $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

548. $x = t^2 + 1$, $y = \cos^3 t$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

549. $x = \sin 2t$, $y = e^{t^2-1}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ — ?

550. $x = \cos\frac{t}{2}$, $y = t - \sin t$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ — ?

551. Довести, що функція $y = f(x)$, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ задовольняє співвідношення $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

552. Довести, що функція $y = f(x)$, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} y = 3t - t^3, \\ x = 3\,{}^2, \end{cases}$ задовольняє співвідношення

$$36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3.$$

553. Довести, що функція, задана параметричними рівняннями $\begin{cases} y = \sin kt, \\ x = \sin t, \end{cases}$ задовольняє співвідношення

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0.$$

554. Довести, що коли

$$\begin{cases} x = f(t)\cos t - f'(t)\sin t, \\ y = f(t)\sin t + f'(t)\cos t, \end{cases}$$

то $dx^2 + dy^2 = (f(t) + f''(t))^2\, dt^2$.

Знайти диференціали другого порядку функцій.

555. $5x^2 + 6x - 1$. 556. $\frac{1}{x}\lg x$. 557. x^2e^{-5x}.

558. 5^{-x}. 559. $\ln(x + \sqrt{x^2+16})$. 560. $5\cos(x+1)$.

561. $\sin 2x + \cos 2x$. 562. $\sqrt[5]{x^4}$. 563. $2x^5 + x\sqrt[3]{x}$.

564. $\frac{\cos x}{x}$. **565.** $5\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{5}$. **566.** $4x\sin\frac{x}{2}$.

Знайти диференціали другого порядку функцій, заданих неявно.

567. $x^2 + xy + y^2 = 3$. **568.** $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$.
569. $x^3 + y^3 - xy = 1$. **570.** $x - y + 5\cos y = 0$.
571. $x^2 - 2y + y^2 = 16$. **572.** $xy = e^{y+1}$.
573. $x + y = \ln(x - y)$. **574.** $xy = \sin y$.

Знайти d^2y у зазначеній точці.

575. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y = 2$, $(1;\ 1)$.
576. $2\ln(y - x) + \sin xy = 0$, $(0;\ 1)$.
577. $x^3y + \arcsin(y - x) = 1$, $(1;\ 1)$.
578. $3(y - x + 1) + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} = 0$, $(1;\ 0)$.

Знайти диференціали вказаних порядків.

579. $y = x^n$, d^by — ? **580.** $y = 5^{\sqrt{x}}$, d^3y — ?
581. $y = \mathrm{arctg}\,2x$, d^3y — ? **582.** $\rho^2\sin^2\varphi - 5\cos^2\varphi = 0$, $d^3\rho$ — ?
583. $y = (2x+1)^4$; знайти d^3y при $x = 1$.
584. $y = \frac{x+5}{(2x+3)^2}$; знайти d^5y при $x = 0$.
585. $y = 64(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})$; знайти d^6y при $x = 2$.
586. $y = 2\sin x\cos 2x$; знайти d^5y при $x = \frac{5\pi}{6}$.
587. $y = x^2\,\mathrm{ch}\,x$; знайти d^4y при $x = 0$.
588. $y = \mathrm{arctg}\,2x$; знайти d^3y при $x = 0$.

589. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^3 + 3t^2 - t + 1$. Знайти прискорення точки в кінці другої секунди.

590. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^4 - 6t^3 + 12t^2 + 2$. В які моменти часу t прискорення обертається на нуль?

591. Точка рухається прямолінійно за законом $S = 2t - e^{-t}$. Показати, що рух уповільнений.

592. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^2 + t\sqrt[3]{t}$. Показати, що рух прискорений.

593. Точка рухається прямолінійно за законом $S = S_0 + \cos\frac{\pi t}{3}$. Знайти прискорення в кінці третьої секунди.

594. Тіло рухається за законом $S = ae^t + be^{-t}$; показати, що його прискорення чисельно дорівнює пройденому шляху.

595. Точка рухається прямолінійно, причому $S = \sqrt{t}$. Довести, що рух уповільнений і що прискорення a пропорційне кубу швидкості v.

596. Баржу, палуба якої на 4 м нижче рівня пристані, підтягують до неї за допомогою каната, що намотується на коловорот із швидкістю 2 м/с. З яким прискоренням рухається баржа в момент, коли вона віддалена від пристані на 8 м (по горизонталі)?

§ 5. ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

5.1. Теорема Ролля

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, диференційовна в інтервалі $(a;\ b)$ і на кінцях відрізка і набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то в середині інтервалу знайдеться хоч би одна точка $c \in (a,\ b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Звідси випливає, що між двома нулями диференційовної функції лежить хоч би один корінь похідної.

597. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = x^3 + 7x^2 + 4x - 11$ на відрізку $[-2;\ 1]$.

598. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = \ln\cos x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

599. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = 1 + \sqrt[3]{x^2 - 6x + 5}$ на відрізку $[1;\ 5]$.

600. Перевірити справедливість теореми Ролля для функції $y = e^{x^2-2x+2}$ на відрізку $[0;\ 2]$.

601. Функція $y = \frac{8-x^2}{x^4}$ має на кінцях відрізка $[-2;\ 2]$ однакові значення. Її похідна дорівнює нулю в точках (яких?), розміщених поза цим відрізком. Пояснити, чому не виконується для цієї функції теорема Ролля.

602. Чи має місце теорема Ролля для функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$?

603. Показати, що для функції $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$ на відрізку $[-2;\ 0]$ не має застосування теорема Ролля, і пояснити чому.

604. Показати, що рівняння $x^3 - 12x + a = 0$ не може мати двох різних коренів на інтервалі $(-1;\ 2)$.

605. Довести, що рівняння $x^5 + 5x - 9 = 0$ має тільки один дійсний корінь.

606. $f(x) = 2x(x-2)(x-4)(x-6)$. Довести, що всі три корені рівняння $f'(x) = 0$ дійсні.

607. Не знаходячи похідної функції $f(x) = (x-3)(x-5)(x-6)(x-7)$, з'ясувати, скільки дійсних коренів має рівняння $f'(x) = 0$, і вказати інтервали, в яких вони лежать.

608. 1) Довести, що рівняння $16x^4 - 64x + 31 = 0$ не може мати два різних дійсних корені на інтервалі $(0;\ 1)$.

2) Довести, що рівняння $e^{x-1} + x - 2 = 0$ має корінь $x = 1$ і не має інших дійсних коренів.

609. Показати, що функція $f(x) = x^n + px + q$ не може мати більше двох дійсних коренів при парному n і більше трьох при непарному n.

5.2. Теорема Лагранжа

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в інтервалі $(a; b)$, то в середині інтервалу знайдеться хоч би одна точка $c \in (a; b)$, в якій справджується рівність $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

610. Написати формулу Лагранжа для функції $y = \sqrt[3]{x^5} + 1$ на відрізку $[a; b]$.

611. Написати формулу Лагранжа для функції $y = \ln(x^2 + 1)$ на відрізку $[x_1; x_2]$.

612. Написати формулу Лагранжа для функції $y = \operatorname{arctg} x$ на відрізку $[x_0; x_0 + h]$.

613. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = x^3 - 3x + 1$ на відрізку $[0; 3]$.

614. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = \ln x$ на відрізку $[1; e]$.

615. Перевірити справедливість теореми Лагранжа для функції $y = \sqrt{x + 1}$ на відрізку $[0; 7]$.

616. На дузі параболи $y = x^2 - 2x + 3$, обмеженій точками $A(2; 3)$ і $B(4; 11)$, знайти точку, дотична в якій паралельна хорді AB.

617. Користуючись теоремою Лагранжа, довести формулу $\sin(x + h) - \sin x = h \cos c$, де $x < c < x + h$.

5.3. Теорема Коші

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовні в інтервалі $(a; b)$ і $\varphi'(x) \neq 0$ при $x \in (a; b)$, то існує хоч би одна точка $c \in (a; b)$, для якої справджується рівність

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

618. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = \operatorname{arctg} x$ і $\varphi(x) = x^3 + 3x + 1$ на відрізку $[a; b]$.

619. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = \ln(1 + x^2)$ і $\varphi(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ на відрізку $[a; b]$.

620. Написати формулу Коші для функцій $f(x) = e^{2x}$ і $\varphi(x) = e^x + 1$ на відрізку $[a; b]$.

621. Перевірити справедливість теореми Коші для функцій $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = 1 + \cos x$ на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

622. Перевірити справедливість формули Коші для функцій $f(x) = x^3$ і $\varphi(x) = x^2 + 1$ на відрізку $[1; 2]$.

623. Записати формулу Коші для функцій $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$ і $\varphi(x) = x^2 + 4$ на відрізку $[0; 2]$; знайти значення c.

624. Довести, що на відрізку $\left[x; \frac{1}{2}\right]$ $(x \geqslant 0)$ приріст функції $y = \ln(1 + x^2)$ менше приросту функції $y = \operatorname{arctg} x$, а на відрізку $\left[\frac{1}{2}; x\right]$ — навпаки $\Delta(\operatorname{arctg} x) < \Delta(\ln(1 + x^2))$. Користуючись останнім співвідношенням, показати, що на відрізку $[1/2; 1]$ $\operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2) \geqslant \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

5.4. Правило Лопіталя—Бернуллі

Правило Лопіталя — Бернуллі застосовується для розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$. Нехай функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні в околі точки a, диференційовні і $\varphi'(x) \neq 0$ в цьому околі, за винятком, можливо, самої точки a, та $f(x) \to 0$ і $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо остання границя існує. Аналогічно і для випадку, коли $f(x) \to \infty$ і $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$. Розкриття інших невизначеностей $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞; 0^0 і ∞^0 зводиться попередньо до перших двох невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$. Якщо $f(x) \to 0$, а $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \left(\frac{0}{0}\right), \text{ або } \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

У випадку трьох останніх невизначеностей

$$\lim_{x \to a} f(x)^{\varphi(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) \ln f(x)}$$

Знайти границі.

625. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$. **626.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + x^3 - x^5}{4x - x^4}$.

627. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5^x - 1}{\sin x}$. **628.** $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^\alpha - 5^\alpha}{x^\beta - 5^\beta}$. **629.** $\lim\limits_{x \to b} \frac{a^x - a^b}{x - b}$.

630. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{5^x - 4^x}$. **631.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} + 3x^2 - 1}{3x - \operatorname{tg}^3 x}$. **632.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sh} 2x - 5x}{2x - \sin x}$.

633. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sin 4x}$. **634.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^x - 2^{-x}}{\ln(1 + 2x)}$.

635. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 3x - 2}{x^5 + 3x^2 - 2x - 2}$. **636.** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 4x}$.

637. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$. **638.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$.

639. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$. **640.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+2x^3-\cos 2x}{x^2-\sin^3 x}$.

641. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x^2}-1}{\sin^2 2x}$. **642.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{5x-\mathrm{tg}\,5x}$.

643. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-e\ln(\ln(e+x))}{\sin^2 x}$. **644.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_2\cos mx}{\ln\cos nx}$.

645. $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{\ln(1-x)}{\ln\sin(1-x)}$. **646.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x^2}{\ln\sin x^2}$.

647. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$. **648.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{6}}{\ln|x-3|}$.

649. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x\ln(x-a)}{\ln(e^{2x}-e^{2a})}$. **650.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)\sin\frac{5}{x+1}$.

651. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\,\mathrm{tg}\,x$. **652.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\,2x\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$.

653. $\lim\limits_{x\to a}\sin\frac{x-a}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}$. **654.** $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{tg}\,x\ln\sin x$.

655. $\lim\limits_{x\to 2}(4-x^2)\,\mathrm{ctg}\,\pi x$. **656.** $\lim\limits_{x\to 2-0}\cos\frac{\pi x}{4}\ln(2-x)$.

657. $\lim\limits_{x\to 1+0}\mathrm{arctg}(x-1)\ln(x-1)$. **658.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\mathrm{ctg}\,x\ln\cos x}$.

659. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{\ln(x-1)}-\frac{1}{x-2}\right)$. **660.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{tg}\,x-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

661. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right)$. **662.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\ln\sin x}-\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\right)$.

663. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\sin(x-1)}\right)$. **664.** $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{e}{e^x-e}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

665. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,x)^{\frac{1}{\ln x^2}}$. **666.** $\lim\limits_{x\to 1}x^{\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}}$. **667.** $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}}$.

668. $\lim\limits_{x\to +0}(\sin x)^{\frac{1}{\ln\sin x}}$. **669.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)^{\mathrm{ctg}\,2x}$.

670. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)^{\cos\frac{\pi x}{4}}$. **671.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,x)^{2x-\pi}$.

672. $\lim\limits_{x\to 1-0}(\ln(1-x))^{\mathrm{tg}\,\pi x}$. **673.** $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-\sin x}$.

674. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$. **675.** $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$. **676.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

677. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,2x)^{\frac{x^2+1}{x}}$. **678.** $\lim\limits_{x\to +0}(\mathrm{ch}\,x)^{\ln\mathrm{sh}\,x}$.

679. Довести, що границі а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}=1$ не можна знайти за правилом Лопіталя — Бернуллі. Знайти ці границі безпосередньо.

680. Перевірити, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-\sin 2x}{3x+\cos 3x}$$

існує, але не може бути обчислена за правилом Лопіталя—Бернуллі. Обчислити цю границю.

681. Перевірити, чи можна застосувати правило Лопіталя — Бернуллі для обчислення границі

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+3x+\cos 2x}{(x+\sin^2 x)\,e^{\cos x}}.$$

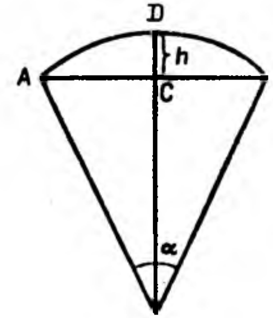


Рис. 5.2

682. Значення якої функції (при досить великих значеннях x) більше: $a^x x^a$ чи x^x?

683. Значення якої функції (при досить великих значеннях x) більше: $f(x)$ чи $\ln f(x)$ за умови, що $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$?

684. Довести, що при $x\to 0$ $e-(1+x)^{1/x}$ — нескінченно мала першого порядку відносно x.

685. Показати, що площа кругового сегмента з малим центральним кутом α, хордою $AB=b$ і стрілкою $CD=h$ (рис. 5.2) наближено дорівнює $S\approx\frac{2}{3}bh$ зі скільки завгодно малою відносною похибкою при $\alpha\to 0$.

5.5. Формула Тейлора

Якщо функція $y=f(x)$ має неперервні похідні до $(n+1)$-го порядку включно в точці $x=a$ та її околі, то має місце формула Тейлора

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

При $a = 0$ ця формула називається формулою Маклорена.

Розвинення деяких функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^c \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + $$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + $$

$$+ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(c + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}},$$

де c лежить між 0 і x.

686. Розкласти многочлен $x^3 + 6x^2 + 7x + 6$ за степенями $x + 2$.

687. Розкласти многочлен $3x^4 + 5x^3 - 4x + 1$ за степенями $x - 2$.

688. Розкласти многочлен $x^4 - 9x^3 + 22x^2 - 24x + 14$ за степенями $x - 5$.

689. Розвинути функцію $f(x) = (x^2 - x - 1)^3$ за степенями $x + 1$.

690. Знайти многочлен третього степеня, якщо $f(3) = 2$, $f'(3) = -1$, $f''(3) = 4$, $f'''(3) = -18$. Обчислити $f(-2)$, $f'(0)$ і $f''(5)$.

691. $f(x)$ — многочлен четвертого степеня. Знаючи, що $f(1) = 2$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 4$, $f'''(1) = 0$, $f^{(IV)}(1) = -6$, обчислити $f(0)$, $f'(2)$ і $f''(3)$.

692. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $y = \ln x$ при $a = 1$.

693. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $y = \sqrt{x}$ при $a = 9$.

694. Написати формулу Маклорена п'ятого порядку для $\operatorname{sh} x$.

695. Написати формулу Маклорена четвертого порядку для $\operatorname{ch} x$.

696. Написати формулу Тейлора третього порядку для функції $y = \frac{x}{x+2}$ при $a = 1$. Побудувати графік цієї функції та її многочлена Тейлора третього порядку.

697. Дана функція $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2x$. Знайти три перші члени розкладу за степенями $(x - 2)$. Обчислити $f(1{,}9)$ наближено за цими трьома членами розкладу і точно. Знайти абсолютну і відносну похибки.

698. Користуючись наближеною формулою $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$, обчислити $\frac{1}{\sqrt{e}}$ і оцінити похибку.

699. Знайти $\cos 15°$ з точністю до 0,001. Скільки для цього треба взяти членів з відповідної формули Маклорена?

700. Скільки потрібно взяти членів з відповідної формули Маклорена, щоб обчислити $\sin 20°$ з точністю до 0,001? Знайти це значення.

701. Наближено, з точністю до 0,01, обчислити: 1) $\cos 1$; 2) $\sqrt[3]{e}$; 3) $\ln(1,03)$.

702. Показати, що розвинення за формулою Маклорена для функцій $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$ і $\ln(1 + x)$ можна записати у вигляді $x + o(x)$, де $o(x)$ — нескінченно мала вищого порядку, ніж x.

703. Користуючись розвиненням за формулою Маклорена, обчислити границі

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x^2 + x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + 3x^5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3 + 2x^5}$.

§ 6. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Монотонність і екстремум функції

Якщо $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для $x \in (a; b)$, то функція $f(x)$ на цьому інтервалі зростає (спадає).

Якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, то її похідна в цій точці обертається на нуль або не існує і, проходячи через цю точку, похідна змінює знак.

У випадку мінімуму похідна, проходячи через цю точку зліва направо, змінює знак з «—» на «+», у випадку максимуму — з «+» на «—».

Функція $f(x)$ в точці x_0 має максимум (мінімум), якщо в цій точці $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$).

Якщо в точці x_0 перша похідна від функції обертається на нуль, а перша відмінна від нуля похідна буде парного порядку, то в цій точці функція має екстремум, причому мінімум, якщо ця похідна додатна, і максимум, якщо від'ємна.

704. Показати, що функція $y = 4 - 3x - x^3$ скрізь спадає.

705. Показати, що функція $y = \sqrt{5 + 4x - x^2}$ зростає на інтервалі $(-1; 2)$ і спадає на інтервалі $(2; 5)$.

706. Показати, що функція $y = x - \operatorname{arctg} x$ скрізь зростає.

707. Показати, що функція $y = \frac{4}{x} - 2x$ спадає на будь-якому інтервалі, який не містить точки $x = 0$.

708. Показати, що функція $y = e^x - x$ зростає при $x > 0$.

709. Знайти інтервали монотонності функції

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$$

710. Знайти інтервали монотонності функції $y = x^4 - 8x^2 + 1$.

Знайти екстремуми та інтервали монотонності функцій.

711. $y = x^3 - 3x + 5$. 712. $y = 3x^2 - x^3 - 1$.

713. $y = 1 - \sqrt{x^2 - 6x + 10}$. 714. $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3} + 1$.

715. $y = x - \ln(x + 2)$. 716. $y = x - \arcsin x$.

717. $y = 4 + 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$. 718. $y = 6\sqrt[3]{(x-2)^2} - 4x + 1$.

719. $y = \sqrt[3]{x^2(x + 1)}$. 720. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$.

721. $y = \sin 2x + 3 - x$. 722. $y = 2\sin x + \cos 2x$.

723. $y = x^2 e^{-2x}$. 724. $y = \ln x - 2\frac{x-1}{x+1}$.

725. $y = x + 2\cos x$. 726. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$.

727. $y = 2x^2 - \ln|x| + 1$. 728. $y = x - 2\sin x$.

729. $y = 1 - \frac{1}{x} - \ln|x + 2|$. 730. $y = x^2 - 4\ln(1 + x)$.

731. $y = \sqrt{3}x + \cos 2x - 3$. 732. $y = \ln|x^2 - 2x| + 1$.

733. $y = \ln|\sin x| - \sqrt{3}x + 5$. 734. $y = x - \ln|\cos x| + 1$.

735. $y = xe^{x^2 - 3x}$. 736. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2 + 2x + 9}$.

737. $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

738. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{8}x^2 - \frac{x-1}{2}$.

739. $y = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin x + \frac{1}{4}x\sqrt{1 - x^2} - \frac{\pi}{12}x^2$.

740. $y = \frac{x^2}{x-1}$. 741. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$. 742. $y = \frac{x}{4} - \sqrt[4]{x}$.

743. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$. 744. $y = x^2 \ln x$. 745. $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$.

746. $y = \ln(x^2 + x + 1) - \ln\frac{3}{4}$.

За допомогою формули Тейлора з'ясувати поведінку даних функцій у зазначених точках.

747. $y = x^6 + 3x^3 - 4$ у точці $x = 0$.

748. $y = x^8 - 4x^6 + 2$ у точці $x = 0$.

749. $y = x^9 + 3x^4 - 1$ у точці $x = 0$.

750. $y = x\sin x - x^2$ у точці $x = 0$.

751. $y = x\cos x - x$ у точці $x = 0$.

752. $y = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x + 4$ у точці $x = 1$.

753. $y = x^3 + 3x^2 - 21x + 12\ln x$ у точці $x = 1$.

Довести нерівність.

754. $x \leqslant \frac{5}{4} - \sqrt{1 - x}$. 755. $4x^2 - 1 \geqslant 2\ln 2x$.

756. $e^{x-2} \geqslant x - 1$. 757. $4x^2 \geqslant 3 - \frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

758. $2\sqrt{x} \geqslant 3 - \frac{1}{x}$. 759. $x + 1 > \ln(x + 2)$.

760. $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ $(x > 1)$. 761. $2x\operatorname{arctg} x \geqslant \ln(1 + x^2)$.

762. 1) $1 + x\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \geqslant \sqrt{1 + x^2}$. 2) $\operatorname{ch} x \geqslant 1 + \frac{x^2}{2}$.

6.2. Найбільше і найменше значення функції

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ набуває своїх найбільшого і найменшого значень, або в критичних точках (у точках, в яких похідна перетворюється в нуль або не існує), що належать цьому відрізку, або на його кінцях.

Знайти найбільше і найменше значення даних функцій у зазначених інтервалах.

763. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$, $[-4; 0]$.

764. $y = x - 4\sqrt{x} + 1$, $[1; 9]$.

765. $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1$, $[-1; 2]$.

766. $y = x + \frac{4}{x^2}$, $[1; 3]$. 767. $y = \frac{x}{1 + x^2}$, $[0; 2]$.

768. $y = \sqrt{21 + 4x - x^2}$, $[-1; 7]$.

769. $y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2x + 5}$, $[-1; 3]$.

770. $y = \sin 2x - x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

771. $y = 2\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. 772. $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $[0; 3]$.

773. $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}$, $[0; 1]$.

774. Число 48 розкласти на два доданки так, щоб їхній добуток був найбільшим.

775. Число 16 розкласти на два доданки так, щоб сума їх квадратів була найменшою.

776. Число 30 розкласти на два доданки так, щоб сума їх кубів була найменшою.

777. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю $V = 1764$ см^3, якщо сторони основи відносяться, як $3:4$, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

778. Об'єм правильної шестикутної призми дорівнює V. Якою має бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?

779. Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м^3 вдвічі більша за ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

780. Знайти співвідношення між радіусом r і висотою h циліндра, який має при даному об'ємі V найбільшу повну поверхню.

781. Треба зробити конічну лійку з твірною, що дорівнює 20 см. Якою має бути висота лійки, щоб її об'єм був найбільшим?

782. Знайти сторони прямокутника найбільшого периметра, вписаного в півколо радіуса r.

783. З круга вирізано сектор з центральним кутом α. З цього сектора згорнута конічна поверхня. При якому значенні α об'єм конуса буде найбільшим?

784. Знайти висоту циліндра найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R.

785. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса R.

786. Знайти висоту прямого кругового конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіуса R.

787. Якою має бути висота конуса, вписаного в кулю радіуса R, щоб його бічна поверхня була найбільшою?

788. Знайти кут при вершині осьового перетину конуса з найменшою бічною поверхнею, описаною навколо даної кулі.

789. На параболі $y^2 = 4x$ знайти точку, найближчу до точки $A(6;\ 0)$.

790. У лівому фокусі еліпса $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{5} = 1$ лежить вершина рівнобедреного трикутника. В якій точці осі Ox треба провести основу цього трикутника паралельно осі Oy, щоб його площа була найбільшою?

791. На параболі $y = x^2 - 4$ знайти найближчу до початку координат точку.

792. На гіперболі $xy = 4$ знайти точку, сума квадратів координат якої була б найменшою.

793. Одна сторона і дві вершини прямокутника лежать на осі Ox, а дві інші — на параболі $y = 12 - x^2$. Знайти розміри прямокутника найбільшої площі.

794. Через точку $(2;\ 8)$ провести пряму, яка б відтинала на додатних півосях координат відрізки, сума яких була б найбільшою.

795. Знайти висоту h у рівнобічній трапеції площею 16 см^2 і кутом 60° між бічною стороною і більшою основою, при якій сума бічних сторін і меншої основи була б найменшою.

796. На гіперболі $x^2 - y^2 = 4$ знайти точки, найближчі до точки $A(0;\ 2)$.

797. На гіперболі $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ знайти точки, віддаль від яких до прямої $y = 2x$ була б найменшою.

798. Стовбур завдовжки 10 м має форму зрізаного конуса з діаметром основ 1,5 і 0,5 м. Треба вирубати з цього стовбура балку з прямокутним поперечним перерізом, сторони якого відносяться, як $2:1$, а вісь збігається з віссю стовбура. Які мають бути розміри балки, щоб її об'єм був найбільшим?

799. Смугу бляхи завширшки a треба зігнути у вигляді циліндричного жолоба, перетин якого матиме форму дуги кутового сегмента. Яким має бути центральний кут φ, щоб місткість жолоба була найбільшою?

800. Ціна алмаза, за інших однакових умов, пропорційна квадрату його маси. Ціна алмаза в 1 карат становить a (крб.). Показати, що найменша вартість двох алмазів загальною масою в 4 карати становить за тих самих умов $8a$ (крб.).

801. Три пункти A, B і C розміщені так, що $\angle ABC = 60°$. Одночасно виїжджають з пункту A автомобіль і з пункту B — поїзд. Автомобіль рухається до пункту B зі швидкістю 80 км/год, поїзд — до пункту C зі швидкістю 50 км/год. В який момент часу (від початку руху) відстань між поїздом і автомобілем буде найменшою, якщо $AB = 200$ км?

802. Треба знайти висоту, на якій слід підвісити лампу над круглим столом радіуса 80 см, щоб освітленість краю стола була найбільшою. Яскравість освітлення визначається формулою

$$I = \frac{k \cos \varphi}{r^2},$$

де φ — кут нахилу променів; r — відстань від джерела освітлення до площадки; k — сила джерела світла.

803. Пішоходові треба дістатися з пункту A, розміщеного на шосе, до пункту B, розміщеного за 12 км від шосе. Відстань $AB = 20$ км. На якому кілометрі шосе пішохід має звернути із шосе на цілину, щоб дійти найшвидше до пункту B, якщо його швидкість по шосе 6 км/год, а по цілині — 3 км/год.

804. На прямолінійному відрізку $AB = a$, що сполучає два джерела світла A (сили p) і B (сили q), знайти найменш освітлене місце (освітленість обернено пропорційна квадрату віддалі від джерела світла).

805. Завод D потрібно сполучити шосейною дорогою з прямолінійним відрізком залізниці, на якій розташоване місто A. Віддаль від заводу до найближчої точки B на залізниці дорівнює $DB = 40$ км. Відстань від міста до цієї точки B на залізниці дорівнює $AB = 200$ км. Вартість перевезення по шосе в $\sqrt{5}$ разів вища, ніж залізницею. В яку точку C залізниці треба провести шосейну дорогу, щоб вартість перевезення була найменшою?

806. Канал, ширина якого 27 м, під прямим кутом впадає в другий канал завширшки 64 м. Якої найбільшої довжини стовбур можна сплавити цією системою каналів?

807. Картина висотою 1,4 м повішена на стіну так, що її нижній край на 1,8 м вище ока глядача. На якій відстані від стіни має стояти глядач, щоб кут зору був найбільшим?

808. На сторінці книжки друкований текст повинен займати s см². Верхнє і нижнє поля мають бути по a см, праве і ліве — по b см. При яких розмірах сторінки на неї піде найменше паперу?

809. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?

810. Газова суміш складається з оксиду азоту і кисню. Знайти концентрацію кисню, при якій оксид азоту, що міститься в суміші, окислиться з максимальною швидкістю. Швидкість реакції виражається формулою $v = k\,(100\,x^2 - x^3)$, де x — концентрація окису азоту (в об'ємних процентах).

811. Об'єм газів, що виділяються з топки котла в димову трубу внаслідок тяги, можна виразити формулою $N = \sqrt{\frac{T_0}{T} - \frac{T_0^2}{T^2}}$, де T_0 — абсолютна температура повітря поза трубою; T — середня температура в трубі. При якому значенні T тяга буде найефективнішою?

812. Обчислити швидкість течії струменя газу, при якій питома витрата газу досягне мінімуму. Питома витрата газу задовольняє співвідношення

$$\varphi(v) = \rho_0 v \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

де ρ_0 — густина; v — швидкість течії, $v_{\max}$ — максимальна швидкість течії газу.

813. Струмопровідний кабель складається з мідного дроту та ізоляції. Якщо через x позначити відношення радіуса мідного дроту до товщини ізоляції, то швидкість телеграфування $v = Ax \ln \frac{1}{x}$. При якому x швидкість буде найбільшою?

814. Витрати електропровідника на кілометр записуються рівнянням $W = Ar + \frac{B}{r}$, де r — опір в омах; A і B — сталі. При якому опорі провідник буде найбільш економічним?

815. Залежність основних витрат R на підприємстві від вартості продукції p виражається формулою $R = ap + \frac{b}{c+p} + d$, де a, b, c, d — сталі. Показати, що R досягає мінімуму при $p = \sqrt{\frac{b}{a}} - c$.

816. Визначити, яким має бути опір r електронагрівного приладу, ввімкненого в коло струму опору R, для того, щоб у ньому виділялась максимальна кількість теплоти, якщо $Q = \frac{rE^2}{(R+r)^2}$.

817. Опір f шляху руху автомобіля при швидкості v км/год виражається формулами: 1) на доброму шосе $f = 24 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{30}v^2$; 2) на поганому шосе $f = 28 - 0{,}25v + 0{,}02\,v^2$; 3) на бруківці $f = 29 - \frac{2}{3}v + \frac{1}{15}v^2$; 4) на м'якій грунтовій дорозі $f = 36{,}5 - \frac{3}{4}v + \frac{1}{30}v^2$. Визначити швидкість, при якій опір буде найменшим, і значення цього опору.

6.3. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Якщо $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) для $x \in (a;\ b)$, то графік функції на цьому інтервалі опуклий (вгнутий). У точці перегину друга похідна обертається на нуль або не існує і, проходячи через цю точку, змінює знак.

818. Показати, що графік функції $y = x \operatorname{arcctg} x$ скрізь опуклий.

819. Показати, що графік функції $y = \frac{1}{(x+2)^2}$ скрізь угнутий.

820. Показати, що графік функції $y = x \operatorname{sh} x$ скрізь угнутий.

821. З'ясувати, опукла чи угнута лінія $y = x^6 - 6x^3 + 3x + 1$ в околі точок $A\,(-1;\ 5)$ і $B\,(1;\ -2)$.

822. З'ясувати, опукла чи вгнута лінія $y = xe^{(x-1)^2}$ околі точок $O\,(0;\ 0)$ і $A\,(1;\ 1)$.

823. Довести, що коли графік функції, яка має неперервну другу похідну, скрізь опуклий або вгнутий, то функція не може мати більше одного екстремуму.

824. З'ясувати вигляд графіка функції $y = f(x)$, коли відомо, що в інтервалі $(a;\ b)$:

1) $y > 0,\ y' > 0,\ y'' > 0$. 2) $y > 0,\ y' < 0,\ y'' < 0$.
3) $y < 0,\ y' < 0,\ y'' > 0$. 4) $y < 0,\ y' > 0,\ y'' < 0$.

825. Знайти точки перегину графіка функції $y = x + \sin x$.

Знайти точки перегину та інтервали опуклості і вгнутості графіка функції.

826. $y = x^3 - 3x^2 + 6x$. **827.** $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 2x - 1$.
828. $y = x^5 - 3x + 1$. **829.** $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 6x + 1$.
830. $y = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 4x - 3$.
831. $y = 2x^3 - x^4 + 36x^2 - 100$.
832. $y = 3 + \sqrt[3]{x+2}$. **833.** $y = \ln(4 + x^2)$.
834. $y = 1 - \sqrt[3]{(x-4)^5}$. **835.** $y = (x+1)\,e^{x+1}$.

836. $y=(x-2)^{\frac{13}{7}}+3$. **837.** $y=\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$. **838.** $y=\operatorname{arctg} x^2$.

839. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$. **840.** $y=\sqrt{(x-2)^5}+\sqrt{(x-2)^3}$.

841. $y=|x^5-32|$. **842.** $y=x^2\ln|x|$. **843.** $y=\frac{x}{\ln x}$.

844. $y=\frac{x^2}{x+a}$. **845.** $y=\frac{x^3}{(x-2)^2}$.

846. Показати, що лінія $y=\frac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину які лежать на одній прямій.

847. Переконатися в тому, що графіки функцій $y=\pm e^{-x}$ і $y=e^{-x}\sin x$ мають спільні дотичні в точках перегину лінії $e^{-x}\sin x$.

848. Довести, що абсциса точки перегину графіка функції не може збігатися з точкою екстремуму цієї функції.

849. Довести, що в будь-якої двічі диференційовної функції між двома точками екстремуму лежить принаймні одна абсциса точки перегину графіка функції.

850. Які умови мають задовольняти коефіцієнти a і b, щоб лінія $y=ax^4+bx^3+ax^2+3x-1$ мала точки перегину.

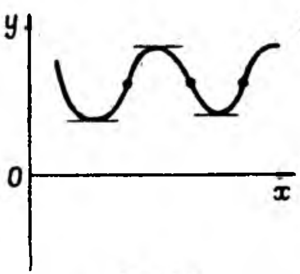


Рис. 5.3

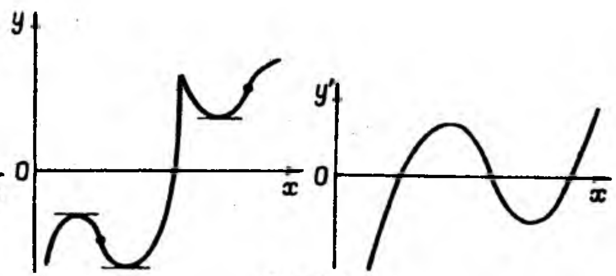


Рис. 5.4

851. При яких значеннях a лінія $y=2x^4+2ax^3+3x^2-2x$ скрізь вгнута?

852. При яких значеннях a лінія $y=3ax^4-x^3-\frac{x^2}{2}+2x$ скрізь опукла?

853. При якому значенні a точка $A\,(1;\,0)$ є точкою перегину лінії $y=ax^4-8x^3+6x^2-x$? Чи будуть ще точки перегину?

854. Знайти точки перегину лінії $x=t^2$, $y=3t+t^3$.

855. Знайти точки перегину лінії $x=e^t$, $y=\sin t$.

856. За графіком функції (рис. 5.3) встановити вигляд графіків її першої і другої похідних.

857. Встановити вигляд графіка функції за графіком її похідної (рис. 5.4).

6.4. Асимптоти кривої

Вертикальна асимптота графіка функції $y=f(x)$ має вигляд

$$x=a,$$

де a — те значення аргументу, при якому функція $f(x)$ обертається на нескінченність. Рівняння похилої асимптоти

$$y=kx+b,$$

де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx),$$

якщо ці границі існують і скінченні.

Знайти асимптоти ліній.

858. $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$. **859.** $y=\frac{1}{x^2-4}$. **860.** $y=\frac{2x^2+3}{x^2+5}$.

861. $4x^2-y^2-8x-4y-1=0$. **862.** $y=\frac{x^2+2}{x+1}$.

863. $y=\frac{2x^3}{x^2-2x-3}$. **864.** $y=3\sqrt{x^2+1}$.

865. $y=x+1+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. **866.** $y=x\operatorname{arctg}2x$.

867. $y=2x+\frac{\sin 2x}{x}$. **868.** $y^3=1+2x-x^3$.

869. $y=x+\operatorname{arcctg}x$. **870.** $y=2x\ln\left(e-\frac{1}{2x}\right)$.

871. $y=xe^{\frac{2}{x^2}}+2$. **872.** $y=\sqrt{2+x^2}\sin\frac{2}{x}$.

873. $y=2+\ln\frac{x+1}{x-2}$.

874. 1) $y=x\operatorname{sh}\frac{1}{x}$; 2) $y=\operatorname{th}3x$; 3) $y=\operatorname{cth}3x$.

875. $\begin{cases} x=\frac{1}{t}, \\ y=\frac{t}{t+1}. \end{cases}$ **876.** $\begin{cases} x=\frac{2e^t}{t-1}, \\ y=\frac{te^t}{t-1}. \end{cases}$ **877.** $\begin{cases} x=\frac{2t}{1-t^2}, \\ y=\frac{t^2}{1-t^2}. \end{cases}$

878. $\begin{cases} x=\frac{3at}{1+t^3}, \\ y=\frac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$ **879.** $\begin{cases} x=\frac{t-8}{t^2-4}, \\ y=\frac{3}{t(t^2-4)}. \end{cases}$ **880.** $\rho=\frac{a}{\varphi}$.

881. Показати, що лінії $y=\sqrt[3]{x^6+3x^2-1}$ та $y=\frac{x^3+1}{x+2}$ асимптотично наближаються одна до одної при $x\to\infty$.

6.5. Схема дослідження функції та побудова її графіка

Схема дослідження:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність;

4) знайти точки розриву та дослідити їх;

5) знайти інтервали монотонності, точки екстремумів та значення функції у цих точках;

6) знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти графіка функції;

8) на основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Дослідити функцію і побудувати її графік.

882. $y = \frac{(x^2-4)^2}{16}$. **883.** $y = \frac{1}{4}(x-1)^2(x+5)$.

884. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$. **885.** $y = x(x^2-5)^2$. **886.** $y = \frac{2x}{x^2+1}$.

887. $y = \frac{1}{5}x^3(x^2-15)$. **888.** $y = \frac{x^4}{8}(x^4-16)$.

889. $y = \frac{x^2}{2(x-1)}$. **890.** $y = \frac{x^3}{x^2+1}$. **891.** $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.

892. $y = \frac{x^2-2x}{x-1}$. **893.** $y = \frac{2x}{x^3-8}$. **894.** $y = \frac{5x}{x^2-4}$.

895. $y = \frac{x^2-2}{x-1}$. **896.** $y = \frac{x^2}{x^3+8}$. **897.** $y = \frac{x^2-4}{2x+1}$.

898. $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$. **899.** $y = \ln(x^2+2x)$. **900.** $y = \operatorname{arctg} x^2$.

901. $y = x - e^{\frac{1}{x-1}}$. **902.** $y = (x+1)^2 + \frac{2}{x+1}$.

903. $y = \frac{x^4}{x^3-1}$. **904.** $y = \frac{x^5}{x^5+1}$. **905.** $y = x + \ln|x+1|$.

906. $y = \ln|x^2-2x|$. **907.** $y = \ln \operatorname{ch} x$. **908.** $y = \arcsin\frac{1}{4x}$.

909. $y = \arccos x^2$. **910.** $y = \frac{x^2}{2} + \ln x$. **911.** $y = 2x^2e^{-\frac{x}{2}}$.

912. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$. **913.** $y = \ln\sin x$. **914.** $y = x - \cos x$.

915. $y = \frac{1}{x}\ln x$. **916.** $y = (3x+2)e^{\frac{x}{3}}$.

917. $y = \sqrt[3]{x+8} - \sqrt[3]{x-8}$. **918.** $y = \sqrt[3]{x^2-8x}$.

919. $y = \sqrt[3]{(x+8)^2} - \sqrt[3]{(x-8)^2}$. **920.** $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

921. $y = \sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{x-8}$. **922.** $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

923. $y = \frac{3x^2}{\sqrt[3]{x^2+8}}$. **924.** $y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{x^3+1}$. **925.** $y = \frac{2x}{\sqrt[3]{8x^3+1}}$.

926. $y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$. **927.** $y = \frac{\sqrt[4]{x^4+1}}{x}$. **928.** $y = \frac{x}{\sqrt[4]{x^4+1}}$.

929. $y = \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{x}$. **930.** $y = \frac{x}{\sqrt[3]{|x^3-1|}}$. **931.** $y = x\operatorname{arcctg} x$.

932. $y = 2x + \operatorname{arctg} 2x$. **933.** $y = x^2e^{-\frac{1}{x}}$. **934.** $y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

935. $y = \frac{1}{x^2}e^{-x^2}$. **936.** $y = 3(x+1)e^{-\frac{x}{3}}$. **937.** $y = \frac{\ln 3x}{x}$.

938. $y = x^3\ln x$. **939.** $y = x\ln^2 x$. **940.** $y = \sqrt[3]{|x^4-1|}$.

941. $y = \sqrt{|x^2-4|}$. **942.** $y = 2x\ln\sqrt{x}$. **943.** $y = x^2e^{-\frac{x^2}{3}}$.

944. $y^3 = 6x^2 - x^3$. **945.** $x^2y + xy^2 = 2$.

946. $y = \sin x + \cos x$. **947.** $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$.

948. $y = \cos x - \cos^2 x$. **949.** $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$.

950. $y = 2x - \operatorname{tg} x$. **951.** $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

952. $y = \cos x - \ln\cos x$. **953.** $\begin{cases} x = a(\operatorname{sh} t - t), \\ y = a(\operatorname{ch} t - 1), \end{cases}$ $a > 0$.

954. $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = t^2 + 2t. \end{cases}$ **955.** $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1. \end{cases}$

956. $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $(a > 0)$. **957.** $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi, \\ y = t^3 - 6\operatorname{arctg} t. \end{cases}$

958. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$ **959.** $\rho = a\sin 3\varphi$ (трипелюсткова роза).

960. $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (кардіоїда). **961.** $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$.

Дослідити і побудувати лінії, попередньо записавши їхні рівняння в полярних координатах.

962. $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. **963.** $x(x^2+y^2) = a^2y$.

964. $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$.

§ 7. ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДО ДЕЯКИХ ЗАДАЧ АЛГЕБРИ, ГЕОМЕТРІЇ, ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕНЬ

7.1. Диференціал довжини дуги

Диференціал дуги плоскої кривої $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.
Якщо крива задана у вигляді

$$y = f(x), \text{ то } dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2}\, dx.$$

При параметричному заданні

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) - dl = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\, dt.$$

Якщо лінія задана в полярній системі координат, то

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

Знайти диференціал дуги ліній:

965. $y = 2\sqrt{x}$. **966.** $y = \ln(1 - x^2)$. **967.** $x^2 + y^2 = 9$.

968. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. **969.** $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (ланцюгова лінія).

970. $y = \ln\cos x$. **971.** $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

972. $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$. **973.** $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ (циклоїда).

974. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ (астроїда).

975. $x = a(\cos t + t\sin t),\ y = a(\sin t - t\cos t)$ (еволюта кола).

976. $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$.

977. $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),\ y = a\sin t$ (трактриса).

978. $\rho = a\varphi$ (архімедова спіраль).

979. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гіперболічна спіраль).

980. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ (кардіоїда).

981. $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. **982.** $\rho = \frac{a}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.

7.2. Кривина плоскої кривої

Кривину плоскої кривої $y = f(x)$ обчислюють за формулою

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Якщо лінія задана параметрично $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, то

$$K = \frac{|x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t|}{(x'^2_t + y'^2_t)^{3/2}}.$$

У полярних координатах кривина лінії $\rho = f(\varphi)$ обчислюється за формулою

$$K = \frac{|\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Радіусом кривини лінії є величина, обернена до кривини, тобто

$$R = \frac{1}{K}.$$

Точка, в якій кривина набуває екстремального значення, називається *вершиною кривої*.

Координати центра кривини обчислюють за формулами

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Коло, центр якого збігається з центром кривини лінії в даній точці M_0, і з радіусом, що дорівнює радіусу кривини, називається *колом кривини лінії* в цій точці. *Еволютою лінії* називається геометричне місце центрів її кривини.

Знайти кривини ліній.

983. $y = x^4 - 8x^3 + 20x - 12$ в точці $(1;\ 1)$.

984. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ у вершинах. **985.** $x^2 - y^2 = 1$ у точці $(\sqrt{5};\ 2)$.

986. $y = \ln(1 + x^2)$ у початку координат.

987. $y = \ln\cos x$ у початку координат.

988. $x^3 + y^3 = 2$ у точці $(1;\ 1)$.

989. $y^2 - x^2 + 2y = 2$ у точці $(1;\ 1)$.

990. $x = 6\cos t - 3\cos 2t,\ y = 6\sin t - 3\sin 2t$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

991. $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t$ при $t = 1$.

992. $x = t^2,\ y = t - \frac{t^3}{3}$ при $t = 2$.

993. $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ при $\varphi = \frac{\pi}{3}$. **994.** $\rho = ae^{\varphi}$ при $\varphi = 0$.

Знайти радіус кривини ліній.

995. $xy = 1$ у точці $(1;\ 1)$. **996.** $y^2 = 3x$ у точці $(4/3;\ 2)$.

997. $y = 2\operatorname{ch}\frac{x}{2}$ у довільній точці. **998.** $x^2 - y^2 = 4$ у довільній точці.

999. $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

1000. $x = a(3\cos t + \cos 3t)$, $y = a(3\sin t + \sin 3t)$ у довільній точці.

1001. $\rho = a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ у довільній точці.

1002. В якій точці кривої $y = \sqrt{x}$ радіус кривини дорівнює $2{,}5\sqrt{5}$?

1003. Знайти радіус кривини еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, у тій його точці, в якій відрізок дотичної між осями координат ділиться точкою дотику навпіл.

1004. Довести, що радіус кривини ланцюгової лінії $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ в довільній точці дорівнює довжині відрізка нормалі в тій самій точці.

1005. Довести, що радіус кривини циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ в довільній точці вдвічі більший довжини нормалі в цій самій точці.

1006. Довести, що радіус кривини лемніскати $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ обернено пропорційний відповідному полярному радіусу.

1007. Знайти координати центра кривини лінії $ay^2 = x^3$ у точці $(a;\ a)$.

1008. Знайти координати центра кривини лінії $y = \operatorname{tg} x$ у точці $\left(\frac{\pi}{4};\ 1\right)$.

1009. Знайти коло кривини гіперболи $xy = 4$ у точці $(2;\ 2)$.

1010. Знайти коло кривини лінії $y = x^3$ у точці $(1;\ 1)$.

1011. Знайти коло кривини параболи $y = x^2 - 4x + 5y$ у точці $(2;\ 1)$.

1012. Знайти коло кривини лінії $y = \ln x$ у точці $(1;\ 0)$.

1013. Знайти коло кривини цисоїди $(x^2 + y^2)x - 2ay^2 = 0$ у точці $(a;\ a)$.

1014. Знайти вершину лінії $y = \ln|x + 2|$.

1015. Знайти вершину лінії $y = e^{x-1}$.

1016. Знайти вершину лінії $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

1017. Знайти вершину лінії

$$x = a(3\cos t + \cos 3t),\ y = a(3\sin t + \sin 3t).$$

1018. Знайти найменше значення радіуса кривини параболи $y^2 = 2px$.

1019. Знайти найбільше значення радіуса кривини лінії $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Знайти координати центра кривини і рівняння еволюти для ліній.

1020. Парабола $y = x^n$. **1021.** Гіпербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1022. Астроїда $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

1023. Півкубічна парабола $y^3 = ax^2$.

1024. Парабола $x = 3t$, $y = t^2 - t$.

1025. $x = a(1 + \cos^2 t)\sin t$, $y = a\sin^2 t\cos t$.

1026. Довести, що еволютою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ є зміщена циклоїда.

1027. Показати, що еволюта трактриси

$$x = -a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right),\ y = \sin t \text{ є ланцюгова лінія.}$$

1028. Показати, що лінія $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ є еволютою кола $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

1029. Довести, що еволютою логарифмічної спіралі $\rho = e^{k\varphi}$ є також логарифмічна спіраль.

1030. Перехідною кривою називається відрізок залізниці, на якому відбувається сполучення прямолінійного відрізка з колом чи двома суміжними колами різних радіусів. Перехідною кривою є кубічна парабола $y = \frac{x^3}{6q}$ $(q = \text{const})$. Визначити радіус кривини перехідної кривої.

7.3. Векторна функція скалярного аргументу

Векторна функція скалярного аргументу

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},\ \text{де } t \in R.$$

Похідна функції $\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$. Швидкість руху $\vec{v} = \vec{r}'(t)$, прискорення $\vec{w} = \vec{r}''(t)$. Рівняння дотичної в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ при $t = t_0$

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}.$$

Рівняння нормальної площини

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

Кривина просторової кривої

$$K = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

1031. Дано: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Знайти похідні:

а) $\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)$; б) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$; в) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$;

г) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$.

1032. Дано: $\vec{r}=\vec{a}\cos\omega t+\vec{b}\sin\omega t$, $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — сталі вектори. Довести, що:

1) $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega\vec{a}\times\vec{b}$. 2) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\omega^2\vec{r}=0$.

1033. Довести, що коли $\vec{r}=\vec{a}e^{\omega t}+\vec{b}e^{-\omega t}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — сталі вектори, то $\vec{r}''(t)-\omega^2\vec{r}=0$.

1034. Визначити, які лінії є годографами векторних функцій:

а) $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{c}$; б) $\vec{r}=\vec{a}t^2+\vec{b}t$;

в) $\vec{r}=\vec{a}\cos t+\vec{b}\sin t$; г) $\vec{r}=\vec{a}\,\mathrm{ch}\,t+\vec{b}\,\mathrm{sh}\,t$,

де $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — сталі вектори, причому $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1035. Рівняння руху $\vec{r}=4\cos t\vec{i}+2\sin t\vec{j}$, де t — час. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення руху. Побудувати вектори швидкості і прискорення, якщо $t=0$, $t=\frac{\pi}{3}$ і $t=\frac{\pi}{2}$.

1036. Рівняння руху $\vec{r}=2\cos t\,\vec{i}+3\sin t\vec{j}+3\vec{k}$. Визначити його траєкторію, а також коли швидкість і прискорення будуть екстремальними.

1037. Рівняння руху $\vec{r}=3\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+5t\vec{k}$. Визначити його траєкторію, швидкість і прискорення.

1038. Рівняння руху $\vec{r}(t)=2\sin^2 t\vec{i}+2\cos^2 t\vec{j}+\sin 2t\,\vec{k}$. Визначити його швидкість і прискорення, якщо $t=\frac{\pi}{4}$.

1039. Рівняння руху $\vec{r}(t)=\ln(t-3)\,\vec{i}-t\vec{j}+t^2\vec{k}$. Визначити його швидкість і прискорення, якщо $t=4$.

1040. Скласти рівняння дотичної і нормальної площини до лінії

$$\vec{r}=\cos 2t\vec{i}-3\sin 2t\vec{j}+2\,\mathrm{ctg}\,t\vec{k}\ \text{при}\ t=\frac{\pi}{4}.$$

1041. Написати рівняння дотичної і нормальної площини до лінії

$$\vec{r}=(t^3-3)\vec{i}+(t^4+3)\vec{j}+\ln t\vec{k}\ \text{при}\ t=1.$$

1042. Написати рівняння дотичної і нормальної площини до лінії

$$\vec{r}=e^t\vec{i}+e^t\cos t\vec{j}+e^t\sin t\vec{k}\ \text{при}\ t=0.$$

1043. Написати рівняння дотичної і нормальної площини до лінії

$$\vec{r}=2\cos t\vec{i}+3\sin t\vec{j}+2t\vec{k}\ \text{при}\ t=\frac{\pi}{2}.$$

1044. Знайти кривину лінії

$$\vec{r}=\cos 2t\vec{i}-3\sin 2t\vec{j}+2\,\mathrm{ctg}\,t\vec{k}\ \text{при}\ t=\frac{\pi}{4}.$$

1045. Знайти кривину лінії

$$\vec{r}=t^2\vec{i}-e^{-t}\vec{j}+e^t\vec{k}\ \text{при}\ t=0.$$

1046. Знайти радіус кривини лінії

$$\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j}+\sqrt{3}\,t\vec{k}\ \text{при}\ t=\frac{\pi}{2}.$$

1047. Знайти кривину лінії

$$\vec{r}=(t-\sin t)\vec{i}+(1-\cos t)\vec{j}+2\sin t\vec{k}\ \text{при}\ t=-\frac{\pi}{2}.$$

1048. Знайти радіус кривини лінії

$$\vec{r}=e^{-t}\vec{i}+e^t\vec{j}+t\vec{k}\ \text{при}\ t=0.$$

1049. Знайти кривину і радіус кривини конічної гвинтової лінії

$$x=t\cos t,\quad y=t\sin t,\quad z=3t$$

в початку координат.

1050. Знайти радіус кривини лінії

$$x=2\,\mathrm{ch}\,t\cos t,\quad y=2\,\mathrm{ch}\,t\sin t,\quad z=2t$$

у довільній точці.

1051. Знайти кривину і радіус кривини лінії

$$x=\frac{\cos t}{\mathrm{ch}\,t},\quad y=\frac{\sin t}{\mathrm{ch}\,t},\quad z=1-\mathrm{th}\,t$$

у точці A (1; 0; 0).

7.4. Наближене розв'язання рівнянь. Інтерполяція

Інтерполяційна формула Лагранжа має вигляд

$$\Phi_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}y_0+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}y_1+\dots+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

Введемо позначення: $\Delta x_i = h,\ i = \overline{1, n}$ (h — крок);

$$q = \frac{x - x_0}{h};\quad \Delta y_0 = y_1 - y_0,\quad \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \ldots .$$

Тоді інтерполяційну формулу Ньютона можна записати у вигляді

$$\Phi_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \cdots +$$

$$+ \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Наближені методи розв'язування рівнянь подано в навчальному посібнику: Дубовик В. П., Юрик І. І. «Вища математика» (в розділі 7.1).

1052. Показати, що рівняння $x^3 - 6x^2 + 15x - 11 = 0$ має єдиний дійсний простий корінь, який належить інтервалу (1; 2) і знайти цей корінь, користуючись методом проб, з точністю до 0,1.

1053. Показати, що рівняння $x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 11x + 3 = 0$ має тільки два простих корені, розміщені в інтервалах (0; 1) і (1; 2), і знайти ці корені методом проб з точністю до 0,1.

1054. Методом хорд знайти дійсний корінь рівняння $x^2 - 2x + 1 - \frac{e^x}{2} = 0$ з точністю до 0,01.

1055. Методом хорд знайти дійсний корінь рівняння $x^3 + 4{,}1x^2 + 6{,}1x + 1{,}6 = 0$ з точністю до 0,0005.

1056. Методом дотичних знайти дійсний корінь рівняння $x^3 + 3x^2 + 53x - 9 = 0$ з точністю до 0,01.

1057. Методом дотичних знайти дійсний корінь рівняння $x^3 - 5x^2 + 10x - 11 = 0$ з точністю до 0,0001.

1058. Показати, що рівняння $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 2x - 1 = 0$ має тільки два дійсних простих корені, розміщених в інтервалах (—1; 0) і (0; 1). Знайти їх з точністю до 0,01, комбінуючи метод хорд з методом дотичних.

1059. Знайти дійсний корінь рівняння $\lg(x - 1) + x - 3 = 0$ з точністю до 10^{-5}, комбінуючи метод хорд з методом дотичних.

1060. Комбінованим методом знайти з точністю до 0,005 значення кореня рівняння $x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$ на відрізку [0, 1].

1061. Методом ітерацій з точністю до 10^{-5} знайти дійсний корінь рівняння $x^3 - 6x^2 + 17x - 2 = 0$.

1062. Методом ітерацій з точністю до 0,001 знайти дійсний корінь рівняння $4x - 1 - 4\sin x = 0$.

1063. Стрілу провисання телеграфного проводу визначають з рівняння $f^3 - 2241f - 146\,600 = 0$ (см). Розв'язати його методом хорд з точністю до 0,01.

1064. На яку глибину x занурена дерев'яна куля, що плаває у воді, якщо її діаметр $2r = 40$ см і питома вага $\gamma = 0{,}75^{-2}/см^2$? Використати метод дотичних.

1065. Знайти мінімум функції $y = x^4 + x^2 + 1$ з точністю до 0,001.

1066. Знайти максимум функції $y = x + \ln x - x^2$ з точністю до 0,001.

1067. Знайти координати точки перегину лінії $y = 6x^2 \ln x + 2x^3 - 9x^2$ з точністю до 0,01.

1068. Знайти з точністю до 0,001 кривину лінії $y = \frac{1}{x^2}$ в точці її перетину з прямою $y = x - 1$.

1069. Скласти інтерполяційний многочлен Ньютона для функції, заданої таблицею

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

1070. Функція задана таблично:

x	—2	1	2	4
y	25	—8	—15	—23

Скласти інтерполяційний многочлен Лагранжа і знайти значення y при $x = 0$.

1071. Задана таблиця величин x і y:

x	0	1	3	4	5
y	1	—3	25	129	381

Обчислити значення y для $x = 0{,}5$: а) за допомогою лінійного інтерполювання; б) за формулою Лагранжа.

1072. Задана таблиця функції Бесселя $y = J_0(x)$ з кроком $h = 0{,}02$. Обчислити похідні y' і y'' в точці $x = 1$, коли відомо, що при такому кроці (поблизу точки $x = 1$) можна знехтувати різницями вище третього порядку:

x	0,96	0,98	1,00	1,02	1,04
y	0,7825366	0,7739332	0,7651977	0,7563321	0,7473390

Глава 6

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

§ 1. ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1. Функція багатьох змінних. Область визначення. Лінії та поверхні рівня

Нехай D — множина упорядкованих чисел $(x;\ y)$. Якщо кожній парі $(x;\ y) \in D$ за певним законом відповідає число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію від двох змінних x і y, і записують $z = f(x,\ y)$.

Множину пар $(x,\ y)$, для яких функція $z = f(x,\ y)$ визначена, називають *областю визначення функції* і позначають $D\,(f)$ або просто D.

Множину значень z позначають $E\,(f)$ або E. Аналогічно означається поняття функції трьох і більшого числа змінних.

Лінією рівня функції $z = f(x,\ y)$ називається лінія $f(x,\ y) = C$, в точках якої функція зберігає стале значення $z = C$, $C \in E\,(f)$.

Поверхнею рівня функції $u = f(x,\ y,\ z)$ називається поверхня $f(x,\ y,\ z) = C$, в точках якої функція зберігає стале значення $u = c$, $C \in E\,(f)$.

1. Дано функцію $f(x,\ y) = \dfrac{x+3y}{x-3y}$. Знайти:

а) $f(1;\ 0)$; б) $f(0;\ 1)$; в) $f(3;\ -1)$;
г) $f(1;\ -3)$; д) $f(-x;\ -y)$; е) $f\left(\dfrac{1}{x};\ \dfrac{1}{y}\right)$.

2. Дано функцію $f(x;\ y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Знайти:

а) $f\left(\dfrac{1}{x};\ \dfrac{1}{y}\right)$; б) $f(kx;\ ky)$, $k \neq 0$;
в) $f(\cos t;\ \sin t)$.

3. Дано функцію $f(x,\ y) = \sin\dfrac{y}{x}$. Знайти:

а) $f(1;\ 0)$; б) $f\left(1;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;
в) $(4,\ \pi)$; г) $f\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

4. Дано функцію $f(x,\ y) = \operatorname{tg}(\pi x - y)$. Знайти:
а) $f(0;\ 0)$; б) $f\left(\dfrac{1}{4};\ 0\right)$;
в) $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$; г) $f\left(1;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

5. Дано функцію $f(x;\ y) = \operatorname{tg}\dfrac{x-y}{x+y} + e^{\frac{x}{y}}$. Знайти:

а) $f(tx;\ ty)$; б) $f\left(1;\ \dfrac{y}{x}\right)$.

6. Знайти $f(x)$, якщо $f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x > 0)$.

7. $z = x + y + f(x-y)$, причому $z = x^2$ при $y = 0$. Знайти функції f і z.

8. Знайти $f(x,\ y)$, якщо $f\left(x+y,\ \dfrac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$.

9. Знайти $f(x,\ y)$, якщо $f(x-y,\ x+y) = -\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

10. Функція $z = f(x,\ y)$ називається однорідною функцією k-го порядку, якщо виконується тотожність

$$f(\lambda x,\ \lambda y) \equiv \lambda^k f(x,\ y)$$

для довільного $\lambda \neq 0$.

Показати, що однорідна функція k-го порядку $z = f(x,\ y)$ може бути зображена у вигляді

$$z = x^k F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Дослідити на однорідність дані функції і визначити порядок їх однорідності.

11. $z = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+y}$. **12.** $z = \ln x - \ln y$.

13. $z = \dfrac{x^2+3xy+5y^2}{2x+3y}$. **14.** $z = x^2y + xy^2 + 2x^3$.

15. Підібрати такі функції $\varphi(x)$ і $g(x)$, щоб виконувались тотожності:

а) $\varphi(x+y) = \varphi(x)\,g(y) + \varphi(y)\,g(x)$;
б) $\varphi(x-y) = \varphi(x)\,g(y) - g(x)\,\varphi(y)$;
в) $\varphi(x+y) = \dfrac{\varphi(x)+g(y)}{1-\varphi(x)\,g(y)}$; г) $\varphi(x+y) = \varphi(x)\,\varphi(y)$.

Знайти та зобразити області визначення функцій двох змінних.

16. $z = x + \sin y$. **17.** $z = \dfrac{x-y}{e^{x-y}}$. **18.** $z = \dfrac{1}{x-y}$.

19. $z = \dfrac{x\sin y}{x^2-y^2}$. **20.** $z = \sqrt[3]{-x-y}$. **21.** $z = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-x-y}}$.

22. $z = \sqrt{x-y}$. **23.** $z = \dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$. **24.** $z = \sqrt{x^2-y^2}$.

25. $z = \sqrt{y^2-x^2}$. **26.** $z = \ln(R^2 - x^2 - y^2)$.

27. $z = \dfrac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$. **28.** $z = \ln x - \ln y$. **29.** $z = \ln\dfrac{x}{y}$.

30. $z = \ln(R^2 - x^2 - y^2) + \ln(4R^2 - x^2 - y^2)$.

31. $z = \ln[(R^2 - x^2 - y^2)(4R^2 - x^2 - y^2)]$. **32.** $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

33. $z = \arccos \frac{x}{x+y}$. **34.** $z = \arcsin[2y(1 + x^2) - 1]$.

35. $z = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$. **36.** $z = \operatorname{ctg} \pi (x + y)$.

37. $z = \sqrt{\sin \pi (x^2 + y^2)}$. **38.** $z = \sqrt{\sin \pi \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}$.

39. $z = \sqrt{\sin \pi (x^2 + y^2)} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

40. $z = \operatorname{ctg} \pi (x + y) + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2}$. **41.** $z = \frac{\ln(1 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$.

42. $z = \sqrt{\min(x, y)}$. **43.** $z = \sqrt{\max(x, y)}$. **44.** $z = \frac{1}{\min(x, y)}$.

45. $z = \frac{1}{\max(x, y)}$. **46.** $z = \frac{1}{\min(x, y) + \max(x, y)}$.

47. $z = \frac{1}{\min(x, y) - \max(x, y)}$.

Знайти області визначення функцій трьох змінних.

48. $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$. **49.** $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$.

50. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$. **51.** $u = \ln x + \ln y + \ln z$.

52. $u = \ln xy + \ln z$. **53.** $u = \arcsin(x + y + z)$.

54. $u = \sqrt{31 + 32x + 16y + 2z - 16x^2 - 4y^2 - z^2}$.

55. $u = \ln(13 + 4y - 2z - 4x^2 - 2y^2 - z^2)$.

Підібрати функції, що мають такі області визначення:

56. Площина з вилученою точкою $(-3; 1)$.

57. Площина з вилученим колом $x^2 + y^2 = 25$.

58. Площина з вилученими параболою $y^2 = 4x$ та колом $x^2 + y^2 = 8$.

59. Площина з вилученими внутрішніми точками її частини, обмеженої колом радіуса 1 з центром у точці $(1; 0)$.

60. Внутрішні точки кільця, утвореного концентричними колами з центрами у початку координат та радіусами 1 і 2, з долученням точок кіл.

61. Внутрішні точки частини площини між прямими $x + y = 1$ та $x + y = -1$ з долученням точок прямих.

62. $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$.

63. Частина простору, обмеженого сферами $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ та $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, з вилученими точками сфер.

Знайти лінії рівня функцій і побудувати їхні графіки.

64. $z = x + y$. **65.** $z = x^2 + y^2$. **66.** $z = x^2 - y^2$. **67.** $z = \frac{y}{x}$.

68. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$. **69.** $z = \sqrt{xy}$. **70.** $z = e^{xy}$. **71.** $z = \min(x, y)$.

72. $z = \min(x, y) + \max(x, y)$. **73.** $z = \frac{1}{\ln x + \ln y}$.

Знайти поверхні рівня таких функцій.

74. $u = x + y + z$. **75.** $u = x^2 + y^2 + z^2$. **76.** $u = x^2 - y^2 - z^2$.

77. $u = \ln \frac{1 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{1 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. **78.** $u = e^{x^2 + y^2 + z^2}$. **79.** $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

1.2. Границя та неперервність функції

Нехай $\rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — відстань між точками $M(x; y)$ та $M_0(x_0; y_0)$, де $M_0 \in D$ або $M_0 \notin D$, проте в довільному околі точки M_0 міститься хоча б одна точка множини D, відмінна від M_0.

Число A називається *границею функції* $z = f(M)$ у точці M_0, якщо для кожного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x; y) \in D$, які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність $|f(M) - A| < \varepsilon$. При цьому пишуть:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \text{ або } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$$

Функція $z = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функція $f(x, y)$ називається *неперервною на множині* D, якщо вона неперервна в кожній точці $(x; y)$ цієї множини. Точки, в яких неперервність функцій порушується, називаються *точками розриву функції*. Точки розриву можуть бути ізольовані, утворювати лінії розриву, поверхні розриву і т. д.

80. Показати, що функція $u = \frac{y}{x + y}$ при $x \to 0$, $y \to 0$ не має границі. Вказати приклади такої зміни x і y, щоб:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u = \frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u = 3$.

81. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 - y^3}{x^3 + y^3}$ не існує.

82. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 + y^2}$ не існує.

83. Показати, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$.

Знайти границі функцій:

84. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} f(x, y)$, де $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy-2}{x^2y^2-3xy+2}, & xy \neq 2; \\ 1, & xy = 2. \end{cases}$

85. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{1+xy}-\sqrt{1-xy}}{\sin xy}$. 86. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)}$.

87. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, де $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x+y)}{(x+y)^2}, & y \neq -x, \\ \dfrac{1}{2}, & y = -x. \end{cases}$

88. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$. 89. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

90. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x, y)$, де $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy-3y^2}{x^3-y^3}, & x \neq y, \\ \dfrac{4}{3}, & x = y. \end{cases}$

91. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2+y^4)^2}$. 92. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$.

93. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4+y^4}$.

Знайти точки розриву функцій.

94. $z = \dfrac{x^2+y^2}{y-2x}$. 95. $z = \dfrac{x+1}{y^2-2px}$. 96. $z = \dfrac{1}{1-e^{x+y}}$.

97. $z = \dfrac{1}{1-e^{xy}}$. 98. $z = 2^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$. 99. $z = \dfrac{1}{\ln(x^2+y^2)}$.

100. $z = \dfrac{x}{x^4-y^4}$. 101. $z = \dfrac{1}{(x^2+y^2-4)(y^2-4x)}$.

102. $z = \dfrac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y}$. 103. $z = \dfrac{1}{\sin \pi x} + \dfrac{1}{\sin \pi y}$.

104. $z = \dfrac{1}{\sin x \sin y}$. 105. $z = \operatorname{ctg}\pi(x^2+y^2)$. 106. $u = \dfrac{1}{xyz}$.

107. $u = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-4}$.

108. $u = \dfrac{1}{32-x^2-4y^2-8z^2}$. 109. $u = \dfrac{1}{x^2+y^2-z^2}$.

§ 2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Частинні похідні першого порядку

Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y)+f(x,\ y)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною функції* $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ по змінній x і позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z'_x,\ f'_x.$$

Зазначена вище границя обчислюється при умові, що змінна y вважається сталою. Аналогічно означається частинна похідна по змінній y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

Щоб знайти частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, досить обчислити звичайну похідну функції u по змінній x_i, вважаючи решту змінних сталими.

110. Тонка, пружна, плоска нитка (струна) виведена із стану рівноваги. Відхилення u довільної точки струни від положення рівноваги є функцією двох змінних: $u = u(x, t)$, де x — відстань точки від початку струни, t — час. Який геометричний чи фізичний зміст мають частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$? Який зміст мають умови $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, $\left.\dfrac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$?

111. Температура T точки нагрітого стержня, що охолоджується, є функцією $T = T(x, t)$ двох змінних — відстані x точки від початку координат і часу t. Вказати фізичний зміст частинних похідних $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

112. Температура T повітря у деякій точці земної поверхні є функцією трьох змінних: довготи λ точки, її широти Θ і часу t. Вказати фізичний зміст частинних похідних $\dfrac{\partial T}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial T}{\partial \theta}$, $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

113. Довжина сторони a трикутника визначається за формулою

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A},$$

де b і c — довжини двох інших сторін, A — протилежний кут. Який зміст мають частинні похідні $\dfrac{\partial a}{\partial b}$, $\dfrac{\partial a}{\partial c}$, $\dfrac{\partial a}{\partial A}$?

114. Дано дві функції: $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ ($a = \text{const}$) та $z = \sqrt{y^2 - x^2}$. Знайти $\frac{du}{dx}$ і $\frac{\partial z}{\partial x}$. Порівняти результати.

Знайти частинні похідні першого порядку по кожній незалежній змінній від функцій:

115. $z = x^2y - x + y + 5$. **116.** $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

117. $z = \frac{y}{x}$. **118.** $z = \frac{x-y}{x+y}$.

119. $z = \frac{x^2+y^2}{5}$. **120.** $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

121. $z = \frac{1}{x^2+y}$. **122.** $z = \sqrt[3]{x^2+y^3}$.

123. $z = (3x^2y + 4xy^2 + 5)^2$. **124.** $z = \ln\frac{x}{y}$.

125. $z = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$. **126.** $z = \ln\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}}{\sqrt{x+y}}$.

127. $z = \ln\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$. **128.** $z = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

129. $z = x^y$. **130.** $z = e^{-\frac{x}{y}}$.

131. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$. **132.** $z = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$.

133. $z = \ln\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **134.** $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

135. $z = \arcsin\frac{x-y}{x+y}$. **136.** $z = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y}$.

137. $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$. **138.** $z = xy\ln(x+y)$.

139. $z = \ln(e^y\cdot\cos x + e^{-y}\cdot\sin x)$. **140.** $z = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

141. $z = x + y + \sqrt{x^2+y^2}$ у точці (3; 4).

142. $z = \ln\left(x + \frac{y}{2x}\right)$ у точці (1; 2).

143. $z = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{xy}}{1+\sqrt{xy}}}$.

144. $z = \frac{\operatorname{tg}(x-y)}{\operatorname{tg}(x+y)}$ у точці $\left(\frac{\pi}{4};\ \pi\right)$.

145. $z = \frac{x\cos y - y\cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ у точці (0; 0).

146. $z = \ln(x+y) - \frac{2y^2}{(x+y)^2}$ у точці (0; 1).

147. $z = \frac{e^{xy}+1}{xy}$. Знайти $\frac{z'_x}{z'_y}$ у точці (1; 1).

148. $z = \ln\operatorname{tg} e^{x+y^2}$. Обчислити z'_x у точці $\left(\ln\frac{\pi}{4};\ 0\right)$

149. $u = x^2yz + xy^2z + xyz^2$.

150. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Показати, що $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

151. $u = \operatorname{tg}\frac{xy}{z}$. **152.** $u = x^{y^z}$. **153.** $u = x^{\frac{y}{z}}$.

154. $u = \ln\operatorname{tg} xyz$. **155.** $u = \left(\frac{y}{x}\right)^z$.

156. $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$. Знайти u'_x у точці $\left(0;\ 0;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Відомо, що для однорідних функцій $z = f(x, y)$ порядку k (див. № 10) вірна теорема Ейлера:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = kz.$$

З'ясувати, чи вірна теорема Ейлера для функцій, наведених у № 157—164. Якщо так, то вказати k.

157. $z = \frac{y}{x}$. **158.** $z = x^3y + y^3x - x^4$.

159. $z = \sin\frac{y}{x}$. **160.** $z = \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

161. $z = \ln\frac{x}{y}$. **162.** $z = \frac{x^2}{x+y}$.

163. $z = x^2y - xy + 2$. **164.** $z = \ln(x^2+y^2)$.

165. $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$. Показати, що $xz'_x + yz'_y = \frac{z}{2}$.

166. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$. Показати, що $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

167. $z = x^y$. Показати, що $\frac{x}{y}z'_x + \frac{1}{\ln x}z'_y = 2z$.

168. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Показати, що $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}$.

169. $z = (x+a)(y+b)$, a і b — сталі. Показати, що $\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

170. $z = \ln(e^x + e^y)$. Показати, що $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

171. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

172. $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Показати, що $l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0$.

173. $u = e^{-\frac{1}{x+y+z}}$. Показати, що $u'_x = u'_y = u'_z = u\ln^2 u$.

174. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Показати, що $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}$.

175. $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$ Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

176. $\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi, \end{cases}$ a і b — сталі. Обчислити $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

177. $\begin{cases} x = \rho^2\cos\varphi, \\ y = \rho^2\sin\varphi. \end{cases}$ Обчислити $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$.

178. $u = \frac{x-y}{z-t} + \frac{t-x}{y-z}$. Показати, що $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

179. Який кут утворює з додатним напрямом осі абсцис дотична до лінії $\begin{cases} z = \frac{x^2+y^2}{4}, \\ y = 4 \end{cases}$ у точці (2; 4; 5)?

180. Який кут утворює з додатним напрямом осі ординат дотична до лінії $\begin{cases} z = \sqrt{1+x^2+y^2}, \\ x = 1 \end{cases}$ у точці $(1; 1; \sqrt{3})$?

2.2. Повний диференціал функції та його застосування до обчислення значень функцій та похибок

Функція $f(x, y)$ називається *диференційовною в точці* M, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A та B — дійсні числа, що не залежать від Δx та Δy, α і β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$ функції. *Повним диференціалом* dz *функції* $z = f(M)$ називається головна лінійна частина приросту функції, яка обчислюється за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

де $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$.

Аналогічна формула вірна для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Для наближеного обчислення значення функції, наприклад, двох змінних користуються наближеною рівністю

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

Максимальна абсолютна похибка $|\Delta^* u|$ змінної $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обчислюється за формулою

$$|\Delta^* u| = \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right||\Delta^* x_i|,$$

де $|\Delta^* x_i|$ — максимальна абсолютна похибка змінної x_i.

Максимальну відносну похибку $|\delta^* u|$ зручно оцінювати за формулою $|\delta^* u| = |\Delta^* \ln|f||$.

Знайти повні диференціали першого порядку функцій.

181. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. 182. $z = \ln\sqrt{xy}$.

183. $z = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$. 184. $z = \ln\operatorname{tg} xy$.

185. $z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$. 186. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

187. $z = \ln\cos\frac{x}{y}$. 188. $u = (xy)^z$.

Обчислити наближено.

189. $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$. 190. $0{,}98^{3{,}03}$.

191. $\sqrt{5e^{0{,}02} + 2{,}03^2}$. 192. $\ln(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1)$.

193. $\sqrt{11{,}96^2 + 9{,}02^2 + 7{,}98^2}$. 194. $\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98}\sqrt[4]{1{,}05^3}}$.

195. $\sqrt{1{,}04^{1{,}99} + \ln 1{,}02}$.

196. Тіло важить у повітрі $(4{,}1 \pm 0{,}1)$ г, а у воді $(1{,}8 \pm 0{,}2)$ г. Знайти питому вагу тіла і вказати абсолютну похибку підрахунку.

197. Вимірювання радіуса r основи та висоти h циліндра дали такі резул тати: $r = (3 \pm 0{,}1)$ м; $h = (5 \pm 0{,}2)$ м. З якою абсолютною та відносною похибкою може бути обчислений об'єм циліндра?

198. Центральний кут сектора $\alpha = 60°$ збільшили на $\alpha = 1°$. На скільки слід зменшити радіус сектора $R = 20$ см, щоб площа сектора не зменшилась?

199. Сторони трикутника $a = (200 \pm 2)$ м, $b = (300 \pm 5)$ м і кут між ними $C = (60 \pm 1)$ °. З якою абсолютною похибкою може бути обчислена третя сторона c трикутника?

200. Радіус r основи циліндра має довжину 2 м і зменшується із швидкістю 5 см/с, висота h циліндра має довжину 3 м і збільшується із швидкістю 10 см/с. Як та з якою швидкістю змінюється об'єм циліндра?

201. Момент інерції плоскої фігури, обмеженої еліпсом $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, відносно осі ординат обчислюють за формулою

$$I = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

(поверхнева щільність фігури дорівнює одиниці). Піввісь a дорівнює 4 м і зменшується із швидкістю 5 см/с, піввісь b дорівнює 2 м і збільшується із швидкістю 5 см/с. Як та з якою швидкістю змінюється момент інерції фігури?

202. Вимірювання півосей еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ дали такі результати: $a = 4$ м $\pm 0{,}2$ м; $b = 2$ м $\pm 0{,}1$ м.

З якою абсолютною та відносною похибками буде обчислений момент інерції плоскої фігури, обмеженої еліпсом, відносно осі ординат (див. № 201)?

203. Сторона трикутника має довжину 2,4 м і збільшується із швидкістю 10 см/с; друга сторона має довжину 1,5 м і зменшується із швидкістю 5 см/с. Кут між сторонами дорівнює 60° і збільшується із швидкістю 2° за секунду. Як та з якою швидкістю змінюється площа трикутника?

204. Для обчислення площі S трикутника за стороною a і кутами B і C користуються формулою

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Знайти відносну похибку δ_S при обчисленні S, якщо відносні похибки вимірювань a, B і C дорівнюють відповідно δ_a, δ_B, δ_C.

2.3. Похідні та диференціали вищих порядків

Частинними похідними другого порядку функцій $z = f(x, y)$ називаються їх частинні похідні від частинних похідних першого порядку. Позначення частинних похідних другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}.$$

Аналогічно означаються і позначаються похідні вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} \text{ і т. д.}$$

Частинні похідні, які відмінні одна від одної лише порядком диференціювання, називаються *мішаними похідними*; вони є рівними між собою при умові, що вони неперервні в деякому околі точки M. Наприклад,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Якщо $z = f(x, y)$ є функцією незалежних змінних x і y, то диференціал n-го порядку функції $d^n z$ означається згідно з формулою

$$d^n z = d(d^{n-1} z).$$

Наприклад,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Зручно користуватися символічною формулою

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n z.$$

Знайти повні диференціали другого порядку таких функцій.

205. $z = x^4 + 3x^2 y^2 + y^4$. **206.** $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

207. $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$. **208.** $z = \frac{y^3}{x^3}$.

209. $z = x \ln \frac{y}{x}$. **210.** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

211. $z = e^{xy}$. **212.** $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

213. $z = \frac{2x + 3y}{x - y}$. **214.** $z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

215. $f(x, y) = \frac{x}{x - y}$. Знайти $d^2 f(2; 1)$.

216. $f(x, y) = x^2 + \frac{x}{y}$. Знайти $d^2 f(0; 1)$.

217. $z = 2x^3 + x^2 y + xy^2 + 2y^3$. Знайти частинні похідні третього порядку.

218. $z = x^4 + x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 + y^4$. Знайти частинні похідні четвертого порядку.

219. $z = \sin(x + \cos y)$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

220. $u = \cos(as + e^t)$. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial s \partial t^2}$.

221. $u=\frac{8s^4+27st^3}{2s+3t}$. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial s^2 \partial t}$.

222. $u=\frac{s^4-8st^3}{st-2t^2}$. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$ у точці $(-1;\ 1)$.

223. $z=x\ln(xy)$. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

224. $z=x^3\sin y+y^3\sin x$. Знайти $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3}$.

225. $u=\operatorname{arctg}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

226. $z=\frac{y-x}{xy-x-y+1}$. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

227. $z=(x-a)^n(y-a)^m$; n і m — натуральні числа. Знайти $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}$.

228. $z=e^{ax+by}$. Знайти $\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}$.

229. $z=\frac{\cos(2x+2y)}{\cos(x+y)+\sin(x+y)}$. Знайти $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ та $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$.

230. Показати, що функція $z=\frac{\cos y^2}{x}$ задовольняє рівняння

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

231. Показати, що $(x^3 z''_{xx})^2+\left(\frac{x^2}{y}z''_{xy}\right)^2=4$, коли $z=\frac{\cos y^2}{x}$.

232. 1. Показати, що рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ задовольняють такі функції:

а) $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$; б) $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

в) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$; г) $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, де a і b — сталі.

2. Показати, що функція $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ задовольняє рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.

3. Функція $u=u(x,y)$ називається гармонічною у деякій області, якщо у цій області вона задовольняє рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Для яких значень сталих a і b функція $u=a(x^3-3xy^2)+b(3x^2y-y^3)$ є гармонічною?

233. Для якого значення сталої a функція $u=e^x\cos y+a(x^2+y^2)$ є гармонічною?

234. Для якого значення сталої a функція $u=x^4+ax^2y^2+y^4$ є гармонічною?

235. Для яких значень сталих a і b функція $v=ax^3y+bxy^3$ є гармонічною?

236. Показати, що функція $u=A\sin\lambda x\cos a\lambda t$, де A, λ, a — сталі, задовольняє рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

237. Нехай функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ задовольняють рівняння коливань струни (див. № 236). Показати, що функція C_1u+C_2v (сталі — C_1, C_2) також задовольняє це рівняння.

238. Показати, що функція

$$u(x,t)=Ae^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda x$$

задовольняє рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (A,\ \lambda,\ a\text{ — сталі}).$$

239. Показати, що функція $u(x,t)=e^{-\lambda a^2t}(A\sin\lambda x+B\cos\lambda x)$ (A, B, λ, a — сталі) задовольняє рівняння теплопровідності.

240. Показати, що функція $u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}$ задовольняє рівняння теплопровідності (№ 238).

241. Показати, що функція $z=\varphi(x)g(y)$ задовольняє рівняння

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

242. Показати, що функція $z=g(x)+yg'(x)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

243. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Показати, що

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{u}.$$

244. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Показати, що

$$\frac{\partial^2(\ln u)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\ln u)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(\ln u)}{\partial z^2}=\frac{1}{u^2}.$$

245. $v=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}$. Показати, що

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\right)=0.$$

246. $z=\sin\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)$. Довести, що $\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 z$.

247. $z=\sqrt[3]{ax+by}$. Довести, що $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z=-\frac{27}{9}$.

248. $u=xe^{-\frac{y}{x}}$. Показати, що $xu''_{xy}+2(u'_x+u'_y)=yu''_{yy}$.

2.4. Похідні складених функцій

Нехай $z=f(x, y)$ — функція двох змінних x, y, які також залежать від змінних u та v:

$$x=x(u, v), \quad y=y(u, v),$$

тоді функція $z=f(x(u, v), y(u, v))$ є складеною функцією незалежних змінних u та v.

Якщо всі зазначені функції диференційовні, то мають місце формули

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Зокрема, якщо $x=x(t)$, $y=y(t)$, то

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Знайти $\frac{dz}{dt}$.

249. $z=e^x+y^2$, де $x=\ln t$, $y=\sin t$.
250. $z=\operatorname{arctg} x+\ln y$, де $x=\cos 2t$, $y=e^t$.
251. $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$, де $x=\operatorname{tg} t$, $y=-\operatorname{ctg} t$.
252. $z=\ln(x+y)$, де $x=e^t$, $y=e^{-t}$.
253. $z=e^{2x-3y}$, де $x=\operatorname{tg} t$, $y=t^2-1$.
254. $z=x^2-xy+y^2$, де $x=e^{-3t}$, $y=\cos 2t$.
255. $z=\arcsin(x-y)$, де $x=3t$, $y=4t^3$.
256. $z=x^y$, де $x=\ln t$, $y=\sin t$.
257. $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, де $x=e^{2t}+1$, $y=e^{2t}-1$.
258. $z=\frac{yu}{x}$, де $x=e^t$, $y=\ln t$, $u=t^2-1$.
259. $z=\frac{1}{2}\ln\frac{u}{v}$, де $u=\operatorname{tg}^2 t$, $v=\operatorname{ctg}^2 t$.
260. $z=\ln(e^t+e^y)$, $y=t^3$. 261. $z=\operatorname{arctg}(ty)$, де $y=e^t$.
262. $z=\frac{e^{at}(y-u)}{a^2+1}$, де $y=a\sin t$, $u=\cos t$.
263. $z=\frac{t^2-y}{t^2+y}$, $y=3t+1$.

264. $z=\ln\frac{t-\sqrt{t^2-y^2}}{t+\sqrt{t^2-y^2}}$, $y=t\cos\alpha$; $\alpha=\text{const}$.
265. $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=t^3$, $y=1-t^3$.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial u}$ та $\frac{\partial z}{\partial v}$.

266. $z=x^2y^2$, $x=ue^v$, $y=ve^u$.
267. $z=x^2+y^2$, $x=\sqrt{uv}$, $y=e^{u+v}$.
268. $z=x^2\ln y$, $x=\frac{v}{u}$, $y=u^2+v^2$.
269. $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$.
270. $z=f(x, y)$, $x=\frac{2v}{u+v}$, $y=u^2-3v$.
271. $z=f(x, y)$, $x=e^{uv}$, $y=\ln(u^2+v^2)$.

Знайти dz.

272. $z=f(u, v)$, $u=\cos xy$, $v=x^5-7y$.
273. $z=f(u, v)$, $u=\sin\frac{x}{y}$, $v=\sqrt{\frac{x}{y}}$.
274. $z=f(x, y, t)$, $x=u+v$, $y=u^2+v^2$, $t=uv$.
275. $z=xy(x+y)^{-1}\operatorname{arctg}(xy+x+y)$.
276. $z=(x^2+y^2)e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$
277. Спростити вираз

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z},$$

де $u=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+f(y-x, z-x)$.

278. Спростити вираз $\sec x\frac{\partial z}{\partial x}+\sec y\frac{\partial z}{\partial y}$, де $z=\sin y+f\times(\sin x-\sin y)$.

Перевірити наступні рівності.

279. $y\frac{dz}{dx}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$, де $z=\varphi(x^2+y^2)$.
280. $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=nz$, де $z=x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$.
281. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$, де $z=yf(x^2-y^2)$.
282. $xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^2\frac{\partial z}{\partial y}=yz$, де $z=x\varphi(x^2+y^2)$.
283. а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, де $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$;

б) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, де $u=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$.

Послідовним диференціюванням вилучити довільні функції φ та ψ.

284. а). $z = x + y + \varphi(x+y)$; б) $z = x^2 + y^2 + \varphi(x^2+y^2)$.
285. $z = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$. 286. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$.
287. $z = \varphi(x) + \psi(y)$. 288. $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.
289. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, якщо $z = z(x, y)$.
290. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, якщо $z = z(x, y)$.
291. Розв'язати рівняння $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0$, якщо $u = u(x, y, z)$.
292. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$, якщо $z(x, x^2) = 1$.
293. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, якщо $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$.
294. Знайти розв'язок $z = z(x, y)$ рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$, якщо $z(x, 0) = x$, $z(0, y) = y^2$.
Визначити y як функцію від x з таких рівнянь.
295. $y^2 - 2y\cos x - \sin^2 x = 0$. 296. $e^{x^2+y} + \sin x - 2 = 0$.
297. $y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0$. 298. $\sin(x^2y + y^2) + 3x = 1$.

2.5. Похідні неявно заданих функцій

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$, де F — диференційовна функція змінних x і y, визначає y як функцію x. Перша похідна цієї функції може бути обчислена за формулою

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} \quad (F'_y \neq 0).$$

Похідні вищих порядків знаходять послідовним диференціюванням останньої формули, розглядаючи при цьому y як функцію від x.
Аналогічно частинні похідні неявної функції $z = \varphi(x, y)$, заданої рівнянням $F(x, y, z) = 0$, де $F(x, y, z)$ — диференційовна функція змінних x, y та z, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0\right).$$

У завданнях 299—308 знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ від функцій, заданих неявно.

299. $x^2y + xy^2 - y^3 - 1 = 0$. 300. $x^4y + x^3y^2 - y^5 - 5 = 0$.
301. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$. 302. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
303. $xy - \ln y = \ln a$. 304. $yx^2 = e^y$.
305. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$. 306. $x^2\ln y - y^2\ln x = 0$.
307. $\ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 308. $y^x = x^y$ $(x \neq y)$.
309. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^2 + y^2 = 10y$ у точці перетину її з прямою $x = 3$.
310. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x^3 + y^3 - 2axy = 0$ у точці $x = y = a$.
Знайти y''.
311. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$. 312. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
313. $y - \varepsilon\sin y = x$ $(0 < \varepsilon < 1)$. 314. $y = 2x\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
Знайти z'_x та z'_y.
315. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
316. $x^3 + y^3 + z^3 - 2x - 3y - 2z - 4 = 0$.
317. $z^3 + 3xyz = a^3$ 318. $\sin z + e^{xyz} - 1 = 0$.
319. $z^3 - 4xz - y^2 = 4$. Знайти z'_x та z'_y у точці $(1; -2; 2)$.
320. $e^z = x + y + z$. Знайти z'_x та z'_y у точці $(1; 1; 1)$.
Знайти повні диференціали функцій $z(x, y)$.
321. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$. 322. $z^3 - 3xyz = a^3$.
323. $\frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y}$. 324. $yz = \operatorname{arctg}(xz)$.
325. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.
326. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $x + y + z = e^z$.
327. $xyz = a^3$. Показати, що $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = -2z$.
328. Показати, що функція z, визначена рівнянням $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$, де φ — довільна диференційовна функція двох змінних, задовольняє рівняння

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

329. Показати, що функція z, визначена рівнянням

$$(x - a\cos\alpha)^2 + (y - a\sin\alpha)^2 = \left(\frac{z-a}{m}\right)^2,$$

де a, α, m — сталі, задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = m^2.$$

330. Показати, що неявна функція $z(x\ y)$, визначена рівнянням $z = yf\left(\frac{z}{x}\right)$, задовольняє рівняння

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

§ 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай поверхню задано рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить поверхні. Рівняння дотичної площини до поверхні у M_0 має вигляд

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0, \qquad (1)$$

а рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (2)$$

Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то рівняння (1) і (2) набувають відповідно вигляду

$$z - z_0 = f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0)$$

та

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,\ y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Скласти рівняння дотичної площини та рівняння нормалі до заданих поверхонь у вказаних точках.

331. $z = 3 + x^2 - y^2$ у точці $(1; 2; 0)$.
332. $z = 2 + (x - 1)^2 + (y - 2)^2$ у точці $(2; 3; 4)$.
333. $z = xy$ у точці $(1; 1; 1)$.
334. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ у точці $\left(1; 1; \frac{\pi}{4}\right)$.
335. $z = \sin x \cos y$ у точці $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{1}{2}\right)$.
336. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ у точці $(3; 4; -7)$.
337. $2x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 5 = 0$ у точці $(1; 1; -1)$.
338. $x^3 + xy^2 + x^2y - z^3 = 7$ у точці $(2; 0; 1)$.
339. $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ у точці $(2; 3; 6)$.
340. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$ у точці $(2; 2; 1)$.

341. Показати, що рівняння дотичної площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ у довільній його точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

342. Показати, що рівняння дотичної площини до однопорожнинного гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ у довільній його точці $(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1.$$

343. Знайти дотичну площину до поверхні $9x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 36$, паралельну площині $x - y - z + 1 = 0$.

344. Знайти дотичну площину до поверхні $9x^2 + 16y^2 - 16z^2 = 144$, паралельну площині $x + y + z = 0$.

345. До еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести дотичну площину, що відтинає на додатних півосях координат рівні відрізки.

346. Показати, що дотичні площини до поверхні $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ відтинають на координатних осях відрізки, сума яких дорівнює a.

347. Показати, що поверхні $x + 2y - \ln z + 4 = 0$ та $x^2 - xy - 8x + z + 5 = 0$ дотикаються одна до одної (мають спільну дотичну площину) у точці $(2; -3; 1)$.

348. У якій точці еліпсоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ нормаль до нього утворює рівні кути з осями координат?

349. Знайти рівняння дотичної площини до поверхні $xyz = a^3$ у точці (x_0, y_0, z_0).

350. Показати, що дотичні площини до поверхні $xyz = a^3$ утворюють з координатними площинами піраміди сталого об'єму та вказати цей об'єм.

3.2. Похідна за напрямом та градієнт функції

Нехай скалярне поле визначено функцією $u = u(x, y, z)$, а $\vec{l}$ — вектор, напрямні косинуси якого є $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Тоді похідна функції u за напрямом l вектора $\vec{l}$ обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градієнтом grad u функції $u\ (x,\ y,\ z)$ є вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт є вектор швидкості найбільшої зміни скаляра $u\ (x,\ y,\ z)$.

Знайти похідну скалярного поля $u\ (x,\ y,\ z)$ у точці M у напрямі вектора $\vec{l}$.

351. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$; $M\,(2;\ 3;\ 6)$.

352. $u = \sin \pi x + \sin \pi y + \sin \pi z$; $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 12\vec{k}$; $M\,(1;\ 2;\ 3)$.

353. $u = x^2yz + \operatorname{arctg} z$; $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$; $M\,(-1;\ -1;\ 1)$.

354. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$; $\vec{l} = 4\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $M\left(2;\ -1;\ \frac{1}{2}\right)$.

355. $u = x + \ln (y^2 + z^2)$; $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $M\,(2;\ 1;\ 1)$.

356. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$; $\vec{l} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$; $M\,(2;\ 1;\ 1)$.

357. $u = x^2 \operatorname{arctg} y + x \ln (x + z^2)$; $\vec{l} = 6\vec{j} + \vec{k}$; $M\,(1;\ 3;\ -3)$.

358. $u = \ln (x^2 + y^2) + xyz$; $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$; $M\,(1;\ -1;\ 2)$.

359. Знайти похідну функції $z = x\sqrt{x} - \sqrt{y}$ у точці $M\ (3;\ 1)$ за напрямом l, що утворює кут $\alpha = 30°$ з додатним напрямом осі Ox.

360. Знайти похідну функції $z = \operatorname{arctg} xy$ у точці $M\ (1;\ 1)$ за напрямом бісектриси першого координатного кута.

361. Знайти похідну функції $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ у точці $(2;\ 1)$ за напрямом від цієї точки до початку координат.

362. Знайти похідну функції $u = y \ln (1 + x^2) + \operatorname{arctg} z$ у точці $M\ (0;\ 1;\ 1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N\ (-1;\ -1;\ 3)$.

363. Знайти похідну функції $u = \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{8y}{2 + \sqrt{z}}$ у точці $M\ (4;\ 1;\ 4)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{MN}$, де $N\ (7;\ -3;\ 4)$.

364. Знайти похідну функції $z = \ln (x + y)$ у точці $M\ (1;\ 2)$ параболи $y^2 = 4x$ за напрямом цієї параболи.

365. Знайти похідну функції $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ у точці $(a;\ b;\ c)$ за напрямом радіуса-вектора цієї точки.

366. Знайти похідну функції $z = x^2 - xy + y^2$ у точці $M\ (1;\ 1)$ за напрямом l, що утворює кут α з додатним напрямом осі Ox.
Знайти напрями, де ця похідна має: а) найбільше значення; б) найменше значення; в) дорівнює 0.

367. Знайти похідну функції $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ у точці $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}};\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ за напрямом внутрішньої нормалі у цій точці до кривої $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

368. Довести, що похідна функції $z = \frac{y^2}{x}$ у довільній точці еліпса $2x^2 + y^2 = 1$ за напрямом нормалі до еліпса дорівнює нулю.

Знайти похідну скалярного поля $u\ (x,\ y,\ z)$ у точці M за напрямом нормалі до поверхні S, що утворює гострий кут з додатним напрямом Oz.

369. $u = 4 \ln (3 + x^2) - 8xyz$, $S : x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1$, $M\ (1;\ 1;\ 1)$.

370. $u = -2 \ln (x^2 - 5) - 4xyz$, $S : x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1$, $M\ (1;\ 1;\ 1)$.

371. $u = x\sqrt{y} - yz^2$, $S\colon x^2 + y^2 = 4z$, $M\ (2;\ 1;\ -1)$.

372. $u = \ln (1 + x^2) - xy\sqrt{z}$, $S : 4x^2 - y^2 + z^2 = 16$, $M\ (1;\ -2;\ 4)$.

373. $z = x^2 + y^2$. Побудувати лінії рівня функції z. Знайти grad z у довільній точці та у точці $M\ (3;\ 4)$. Побудувати grad z у точці M та знайти $|\operatorname{grad} z\ (M)|$.

374. Знайти величину та напрям градієнта поля $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 6}$ у точці $(3;\ 1)$.

375. Знайти величину та напрям градієнта поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ у точках: а) $O\ (0;\ 0;\ 0)$; б) $A\ (2;\ 0;\ 1)$. В якій точці градієнт дорівнює нулю?

376. В яких точках $|\operatorname{grad} z| = 1$, де $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$?

377. В яких точках простору $Oxyz$ градієнт поля

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz:$$

а) перпендикулярний до осі Oz; б) дорівнює нулю?

378. $z = xy$. Знайти кут між градієнтами z у точках $A\ (3;\ 4)$ і $B\ (-4;\ 3)$.

379. Знайти кут між градієнтами поля $u = x^2 + y^2 - z^2$ у точках $A\ (\varepsilon;\ 0;\ 0)$ і $B\ (0;\ \varepsilon;\ 0)$.

380. Знайти кут φ між градієнтами поля $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ у точках $A\ (1;\ 2;\ 2)$ і $B\ (-3;\ 1;\ 0)$.

Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u(x,\ y,\ z)$ та $v(x,\ y,\ z)$ у точці M.

381. $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}\,z^3$; $u = \frac{yz^2}{x^2}$; $M\left(\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

382. $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$; $u = xyz$; $M\left(1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

383. Довести, що похідна функції $u = f(x, y, z)$ за напрямом її градієнта дорівнює модулю градієнта.

384. Знайти похідну функції $u = \frac{1}{r}$, де $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, за напрямом її градієнта.

3.3. Формула Тейлора. Локальні екстремуми функцій двох змінних

Нехай функція $f(x, y)$ в області D має неперервні частинні похідні до $(n+1)$-го порядку включно і точки $M_0(x_0; y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ такі, що відрізок M_0M належить області D. Тоді має місце формула

$$\Delta f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0, y_0)}{n!} + R_{n+1},$$

де

$$R_{n+1} = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Цю формулу називають *формулою Тейлора* для функції двох змінних із залишковим членом R_{n+1} у формі Лагранжа. Якщо $x_0 = y_0 = 0$, то формулу називають *формулою Маклорена*.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D, а точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Якщо існує окіл точки M_0, який належить області D і для всіх відмінних від M_0 точок M цього околу виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$), то точку M_0 називають *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $f(x, y)$, а число $f(M_0)$ — *локальним максимумом (мінімумом)* цієї функції. Точки максимуму та мінімуму функції називають *точками екстремуму*.

Необхідні умови існування екстремуму функції $z = f(x, y)$: функція $f(x, y)$ може мати екстремум лише у точках, в яких $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ (стаціонарні точки) та у точках, де похідні не існують.

Для з'ясування достатніх умов існування екстремуму функції $f(x, y)$ введемо позначення

$$f''_{xx}(x_0, y_0) = A, \; B = f''_{xy}(x_0, y_0), \; C = f''_{yy}(x_0, y_0), \; \Delta = AC - B^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, то у точці $(x_0; y_0)$ існує екстремум, причому максимум при $A < 0$ і мінімум при $A > 0$;

2) якщо $\Delta < 0$, то точка $(x_0; y_0)$ не є точкою екстремуму;

3) якщо $\Delta = 0$, то екстремум може бути, а може і не бути (сумнівний випадок, потрібні додаткові дослідження).

385. Розвинути за формулою Маклорена до членів третього порядку включно функцію $f(x, y) = e^y \cos x$.

386. Розвинути за формулою Маклорена до членів четвертого порядку включно функцію $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$.

387. Розвинути за формулою Маклорена до членів четвертого порядку включно функцію $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Дослідити на екстремум функції.

388. $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

389. $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x - 8y + 1$.

390. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

391. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

392. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

393. $z = 2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 3$.

394. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 2z$. **395.** $z = x^3 + y^3 - 3axy$.

396. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$. **397.** $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

398. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$. **399.** $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

400. $z = 2 - \sqrt[3]{x^2 + y^2}$. **401.** $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

402. $z = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$.

Дослідити на екстремум неявно задані функції.

403. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

404. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z - 7 = 0$.

3.4. Найбільше та найменше значення функції

Щоб знайти найбільше та найменше значення диференційовної функції в замкненій та обмеженій області D, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки, що належать області D, і обчислити значення функції у цих точках;

2) знайти найбільше та найменше значення функції на лініях, які утворюють межу області;

3) з усіх знайдених значень вибрати найбільше та найменше.

405. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ у крузі $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

406. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

407. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

408. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = xy + x + y$ у квадраті, обмеженому прямими $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

409. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ у замкненій області, обмеженій прямими $x = 0$, $y = 0$ та $x + y + 3 = 0$.

410. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z =$

$= \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ у прямокутнику $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

411. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ у трикутнику, обмеженому прямими $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 1$.

412. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$ в області $0 \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{3\pi}{2}$.

413. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = \cos x \cos y \cos(x + y)$ в області $0 \leqslant x \leqslant M$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

414. Знайти найбільше M та найменше m значення функції $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в крузі $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

3.5. Умовний екстремум

Нехай задано функцію $z = f(x, y)$, стосовно якої ставиться вимога знайти її екстремуми при умові, що $\varphi(x, y) = 0$ — рівняння зв'язку.

Ця задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

де F — функція Лагранжа; λ — множник Лагранжа.

Стаціонарні точки знаходять із системи рівнянь

$$\begin{cases} f'_x + \lambda\ '_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Характер умовного екстремуму можна встановити за знаком диференціала другого порядку функції Лагранжа: якщо у стаціонарній точці $d^2F > 0$ $(d^2F < 0)$, то це є точка умовного мінімуму (максимуму).

415. Визначити екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

416. Визначити екстремум функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо $x + y + 3 = 0$.

417. Визначити екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $x + y = 2$.

418. Визначити екстремум функції $z = xy$, якщо $x + y = 1$.

419. Визначити екстремум функції $u = x + y + z$, якщо $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

420. Відрізок довжиною a поділити на три частини так, щоб сума площ квадратів, побудованих на відрізках, була найменшою.

421. З усіх прямокутних трикутників даної площі S знайти той, гіпотенуза якого має найменше значення.

422. На площині $3x - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстані якої від точок A (1; 1; 1) та B (2; 3; 4) є найменшою.

423. На площині $x + y - 2z = 0$ знайти точку, сума квадратів відстані якої від площин $x + 3z = 6$ та $y + 3z = 2$ є найменшою.

424. Довести, що добуток трьох невід'ємних чисел заданої суми є найбільшим тоді і лише тоді, коли ці числа рівні між собою.

425. Довести, що сума кількох додатних чисел, які мають заданий добуток, є найменшою тоді і лише тоді, коли ці числа рівні.

426. На основі трикутника знайти точку, добуток відстані якої від двох інших сторін є найбільшим.

427. З усіх прямокутних трикутників з даною висотою h знайти той, що має найменшу площу.

428. З усіх трикутників з даним кутом при вершині та з даною сумою бічних сторін знайти той, що має найменшу основу.

429. Вікно має форму прямокутника і рівностороннього трикутника, побудованого на верхній основі прямокутника. При заданому периметрі p вікна визначити такі його розміри, при яких воно пропускає найбільше світла.

430. Знайти прямокутний паралелепіпед даного об'єму V, що має найменшу поверхню.

431. Знайти прямокутний паралелепіпед даної поверхні S, що має найбільший об'єм.

432. З усіх прямокутних паралелепіпедів, сума ребер яких є $12a$, знайти паралелепіпед найбільшого об'єму.

433. Знайти прямокутний паралелепіпед з довжиною діагоналей d, що має найбільший об'єм.

434. З усіх трикутників з основою a та кутом α при вершині знайти трикутник найбільшої площі.

435. З усіх трикутників, які мають периметр $2p$, знайти той, що має найбільшу площу.

436. З усіх трикутників, вписаних у коло, знайти той, площа якого найбільша.

437. Намет має форму циліндра, завершеного прямою конічною верхівкою. При заданому об'ємі намету визначити його розміри так, щоб для його виготовлення було витрачено найменше матеріалу.

438. Переріз каналу має форму рівнобічної трапеції даної площі a. Нехай бічні сторони дорівнюють l, основа — b, а α — кут нахилу бічної сторони до основи. Визначити розміри каналу, при яких його поверхня буде найменшою.

439. Знайти найменшу відстань між параболою $y = x^2$ і прямою $x - y - 2 = 0$.

440. На параболі $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $3x - 6y + 4 = 0$.

441. На параболі $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x - y = 0$ знайти точку, найменш віддалену від прямої $9x - 7y + 16 = 0$.

442. Вказати зовнішні розміри відкритого ящика форми прямокутного паралелепіпеда зі заданою товщиною стінок α і об'ємом V, при яких на його виготовлення витратять найменше матеріалу.

443. Всередині трикутника знайти точку, добуток відстаней якої від сторін трикутника був би найбільшим.

Глава 7

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

§ 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття про комплексні числа

Комплексним числом z в алгебраїчній формі називається вираз $z = a + bi$, де a та b — дійсні числа, а символ i — уявна одиниця, яка визначається умовою $i^2 = -1$. Числа a і b називаються відповідно *дійсною* і *уявною частинами комплексного числа* z і позначаються $a = \mathrm{Re}\, z$, $b = \mathrm{Im}\, z$. Два комплексні числа $z = a + bi$ і $z = a - bi$, які відрізняються лише знаком уявної частини, називаються *спряженими*.

Комплексне число $z = a + bi$ зображається на площині, якщо користуватись декартовою системою координат, точкою M (a; b) або вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 7.1). Така площина умовно називається *комплексною площиною змінної* z, вісь Ox — *дійсною віссю*, а Oy — *уявною*.

Полярні координати точки M (a; b) на комплексній площині називаються *модулем* і *аргументом комплексного числа* і позначаються

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \mathrm{Arg}\, z.$$

Модуль $|z| = \rho$ комплексного числа визначається однозначно, а аргумент φ — з точністю до $2\pi k$:

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z \pm 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Тут під $\mathrm{Arg}\, z$ розуміють загальне значення аргументу, а під $\arg z$ — головне значення аргументу, яке обчислюється за формулою

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \mathrm{arctg}\, \dfrac{y}{x} \pm \pi, & x < 0. \end{cases}$$

При $x = 0$, $y > 0$ $\arg z = \frac{\pi}{2}$, при $x = 0$, $y < 0$ $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$ (рис. 7.1), то комплексне число $z = a + bi$ можна записати за допомогою виразу

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

який називається тригонометричною формою комплексного числа. Використовуючи формулу Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

дістаємо показникову форму комплексного числа:

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, заданими в алгебраїчній формі, виконуються за правилами:

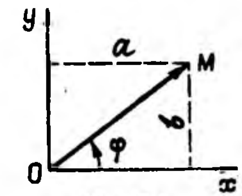


Рис. 7.1

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$;
2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$;
3) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\, i$;
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i$.

При множенні комплексних чисел у тригонометричній формі

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ та } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються:

5) $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Це правило поширюється на довільне скінченне число множників. Зокрема, якщо всі n множників рівні, то

6) $z^n = [\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Ця формула називається *формулою Муавра*.

При діленні комплексних чисел маємо:

7) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Добування кореня цілого додатного степеня з комплексного числа виконується за правилом:

8) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$.

Тут під коренем $\sqrt[n]{\rho}$ потрібно розуміти його арифметичне значення. Надаючи k значень $0, 1, 2, \ldots, n - 1$, дістанемо n різних значень кореня з комплексного числа.

1. Знайти x і y, вважаючи їх за дійсні, якщо:
а) $(3 - i)\, x + (1 + 3i)\, y = 1 - 7i$;
б) $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$;

в) $12\,((2x+1)(1+i)+(x+y)(3-2i)) = 17+6i$;
г) $(x-iy)(a-ib) = i^5,\ a,\ b\in R,\ |a|\neq|b|$.

Розв'язати рівняння.

2. а) $4x^2+9=0$; б) $(x+1)^4-16=0$; в) $(x+1)^4+16=0$.
3. а) $5x^2+8x+4=0$; б) $4x^2-2x+1=0$.
4. $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$.
5. $x^2-(3+7i)x-(10-11i)=0$.
6. $(3+i)x^2+(1-i)x-6i=0$.
7. а) $x^4+5x^2-36=0$; б) $x^4-(1+i)x^2+2(1+i)=0$.

Зобразити комплексні числа в тригонометричній формі.

8. а) 1; б) i; в) $-i$; г) $1+\sqrt{3}i$.
9. а) $\sqrt{3}-i$; б) $-1+i$; в) $-1-i$; г) $-1-\sqrt{3}i$.
10. а) $\cos\varphi-i\sin\varphi$; б) $-\cos\varphi+i\sin\varphi$; в) $-\cos\varphi-i\sin\varphi$; г) $1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

Обчислити вирази.

11. а) $(2+3i)(3-i)+(1+2i)^2$; б) $(1-2i)(2+i)^2+5i$; в) $(1-i)^3-(1+i)^3$; г) $(2i-i^2)^2+(1-3i)^3$.
12. а) $\frac{2-i}{1+i}$; б) $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$; в) $\frac{(1+i)(3+i)}{3-i}-\frac{(1-i)(3-i)}{3+i}$.
13. а) $\frac{(-3+2i)^2}{(1-i)^2}+2i-5$; б) $\frac{(-1+i)^3-(2+i)^3}{(1-2i)^2}$.
14. а) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; б) $(3-\sqrt{3}\,i)^6$; в) $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1-i}\right)^{20}$.
15. а) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$; б) $\frac{(-1+\sqrt{3}\,i)^{15}}{(1-i)^{18}}+\frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{18}}$.

Знайти всі значення коренів.

16. а) $\sqrt{-i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[6]{-27}$.
17. а) $\sqrt{1-i}$; б) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3+4i}$.
18. а) $\sqrt[3]{-2+2i}$; б) $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$; в) $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.
19. а) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$; б) $\sqrt[5]{(2-2i)^4}$.
20. а) $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$; б) $\sqrt[7]{1+\frac{\sqrt{3}-i}{2}}$.

1.2. Метод безпосереднього інтегрування

Функція $F(x)$ називається *первісною функції* на проміжку $\langle a;b\rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a;b\rangle$ і $F'(x)=f(x)$ для всіх $x\in\langle a;b\rangle$.

Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a;b\rangle$ і C — довільна стала, то множина $\{F(x)+C\}$ всіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)\,dx$. Отже, за означенням,

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,\ \text{якщо}\ F'(x)=f(x),\ x\in\langle a;b\rangle.$$

Властивості невизначеного інтеграла.

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
2. $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = F(x)+C$.
3. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.
4. $\int Cf(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$.
5. $\int [f(x)\pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.
6. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ і $u=\varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то $\int f(u)\,du = F(u)+C$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq-1$.
2. $\int\frac{du}{u} = \ln|u|+C$. 3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a}+C$.
4. $\int e^u du = e^u+C$. 5. $\int\sin u\,du = -\cos u+C$.
6. $\int\operatorname{sh}u\,du = \operatorname{ch}u+C$. 7. $\int\cos u\,du = \sin u+C$.
8. $\int\operatorname{ch}u\,du = \operatorname{sh}u+C$. 9. $\int\operatorname{tg}u\,du = -\ln|\cos u|+C$.
10. $\int\operatorname{ctg}u\,du = \ln|\sin u|+C$. 11. $\int\frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg}u+C$.
12. $\int\frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th}u+C$. 13. $\int\frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg}u+C$.
14. $\int\frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth}u+C$. 15. $\int\frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right|+C$.

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right| + C.$

17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C.$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \ln|u+\sqrt{u^2+A}| + C.$

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C.$

20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{u^2+A}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}\ln|u+\sqrt{u^2+A}| + C.$

Показати (за допомогою диференціювання і без нього), що задані функції є первісними однієї функції.

21. $y = \ln ax$ і $y = \ln x$.

22. $y = 2\sin^2 x$ і $y = -\cos 2x$.

23. $y = (e^x + e^{-x})^2$ і $y = (e^x - e^{-x})^2$.

24. $y = \frac{1}{2}e^{2x}$, $y = e^x \operatorname{sh} x$ і $y = e^x \operatorname{ch} x$.

25. Показати, що функція

$$y = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right) - \cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

є константою (тобто не залежить від x). Знайти значення цієї константи.

26. Показати, що функція

$$y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$$

є константа при $x \geqslant 1$. Знайти значення цієї константи.

Користуючись методом безпосереднього інтегрування, обчислити невизначені інтеграли.

27. $\int (3x^2+6x+8)\,dx.$ 28. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)dx.$

29. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx.$ 30. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

31. $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$ 32. $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}}\,dx.$

33. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$ 34. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

35. $\int 5^x e^x dx.$ 36. $\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}\,dx.$

37. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}\,dx.$ 38. $\int \frac{\sin^2 x + 2\sin x - 5}{\sin^2 x}\,dx.$

39. $\int \operatorname{tg}^2 x dx.$ 40. $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$

41. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}.$ 42. $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin 2x}.$

43. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - \cos 2x}.$ 44. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx.$

Користуючись інваріантністю формули інтегрування (підведенням під знак диференціала), обчислити інтеграли.

45. $\int (x+9)^{13} dx.$ 46. $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}.$

47. $\int \sqrt{3-2x}\,dx.$ 48. $\int \sqrt[5]{(7-3x)^4}\,dx.$

49. $\int (1-x^2)^7 x dx.$ 50. $\int x\sqrt{5x^2+2}\,dx.$

51. $\int x^2\sqrt[5]{x^2+2}\,dx.$ 52. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{3+2x^5}}.$

53. $\int \frac{(6x-5)\,dx}{2\sqrt{3x^2-5x+6}}.$ 54. $\int 3^{2x} dx.$

55. $\int 2e^{-3x} dx.$ 56. $\int e^{2-x^3}\cdot x^2 dx.$

57. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$ 58. $\int \cos(2x-3)\,dx.$

59. $\int \sin(4-5x)\,dx.$ 60. $\int e^x \sin(e^x)\,dx.$

61. $\int e^{\cos x}\sin x dx.$ 62. $\int \sin^5 x\cos x dx.$

63. $\int \cos(\ln x)\frac{dx}{x}.$ 64. $\int \cos(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}.$

65. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$ 66. $\int \cos^3 x\sin 2x dx.$

67. $\int \left[\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{-2} dx.$ 68. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}}{\cos^2 x}\,dx.$ 69. $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}\,dx.$

70. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}.$ 71. $\int \frac{dx}{(\arccos 3x)^2\sqrt{1-9x^2}}.$

72. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x}}.$ 73. $\int \frac{dx}{e^{-x}+1}.$ 74. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+25}.$

75. $\int \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx.$ 76. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx.$ 77. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}.$

78. $\int \frac{dx}{1+25x^2}.$ 79. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}.$ 80. $\int \frac{dx}{9x^2+25}.$

81. $\int \frac{xdx}{x^4+4}$. **82.** $\int \frac{x^2dx}{x^6+9}$. **83.** $\int \frac{\sin t\,dt}{25+\cos^2 t}$.

84. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^4}}$. **85.** $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{16-x^8}}$. **86.** $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$.

87. $\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\,dx$. **88.** $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

89. $\int \left(3-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$. **90.** $\int \frac{e^{\arccos x}+x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

91. $\int \operatorname{ch} x\sqrt{5-3\operatorname{sh} x}\,dx$. **92.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-9\ln x}}$.

93. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-9\ln^2 x}}$. **94.** $\int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{25-\operatorname{tg}^2 x}}$

95. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}$ **96.** $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^4 x+4}}$.

97. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. **98.** $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$.

99. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$. **100.** $\int \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$.

1.3. Метод підстановки (заміни змінної)

Метод заміни змінної застосовується одним із таких двох способів.

1. Інтеграл $\int g(x)\,dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx,$$

в якому для функції $f(x)$ відома первісна $F(x)$. Тоді

$$\int g(x)\,dx = \int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{matrix}\varphi(x)=u\\ \varphi'(x)\,dx = du\end{matrix}\right| =$$

$$= \int f(u)\,du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$$

У цьому разі йдеться про «введення функції під знак диференціала»: $\varphi'(x)\,dx = d(\varphi(x)) = du$.

2. Інтеграл $\int f(x)\,dx$ зображають у вигляді

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt,$$

де функція $x=\varphi(t)$ має обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$ і для функції $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ відома первісна $F(t)$. Тоді

$$\int f(x)\,dx = \left|\begin{matrix}x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt\end{matrix}\right| = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(t)+C = F(\varphi^{-1}(x))+C.$$

У цьому разі йдеться про «виведення функції з-під знака диференціала»:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt.$$

Застосовуючи потрібну заміну змінної, обчислити інтеграли.

101. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+3}\,dx$. **102.** $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$. **103.** $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}}$.

104. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$. **105.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. **106.** $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$.

107. $\int \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}\,dx$. **108.** $\int \frac{x+2}{\sqrt{x+1}+1}\,dx$.

109. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$. **110.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$.

111. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$. **112.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$. **113.** $\int \frac{dx}{e^x+7}$.

114. $\int \frac{e^{2x}}{e^x+5}\,dx$. **115.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+e^x}}$. **116.** $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}$.

117. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$. **118.** $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$.

119. $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$. **120.** $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\,\sin 2x\cos 2x dx$.

121. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$. **122.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt{x+1}}$.

1.4. Метод інтегрування частинами

Якщо $u(x)$ та $v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні, то справедлива така формула інтегрування частинами:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Методом інтегрування частинами зручно обчислювати такі типи інтегралів:

1) інтеграли виду $\int P(x)\,a^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, де $P(x)$ — многочлен, а k — дійсне число. У цих інтегралах за u слід взяти множник $P(x)$, а за dv — вираз, що залишився;

2) інтеграли виду $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\times$ $\times \arccos xdx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} xdx$, де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)\,dx$; 3) інтеграли виду $\int a^{\alpha x}\sin\beta xdx$,

$\int a^{\alpha x}\cos\beta x dx$, де α, β — дійсні числа. Тут після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять інтеграл.

Обчислити інтеграли.

123. $\int x\sin 2x dx$. 124. $\int x\cos 5x dx$. 125. $\int x^2\sin x dx$.

126. $\int x^3\sin x dx$. 127. $\int x\cos^2 x dx$. 128. $\int x^2\cos^2 x dx$.

129. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx$. 130. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$. 131. $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

132. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$. 133. $\int x\,\mathrm{arctg}\,x dx$. 134. $\int x\arcsin x dx$.

135. $\int \arccos x dx$. 136. $\int x^n\ln x dx\ (n\neq -1)$.

137. $\int xe^x dx$. 138. $\int x3^x dx$. 139. $\int x^2e^{3x}dx$.

140. $\int x^3e^{-\frac{x}{3}}dx$. 141. $\int \ln(x^2+1)dx$. 142. $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$.

143. $\int \mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$. 144. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}dx$. 145. $\int (\arcsin x)^2 dx$.

146. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx$. 147. $\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

148. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$. 149. $\int \ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})dx$.

150. $\int e^{ax}\cos bx dx$. 151. $\int e^{ax}\sin bx dx$.

152. $\int e^{2x}(\sin 3x-\cos 3x)dx$. 153. $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

154. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. 155. $\int \frac{xe^x dx}{(x+1)^2}$. 156. $\int x^2\ln(1+x)dx$.

157. $\int x^3e^{-x^2}dx$. 158. $\int x\,\mathrm{tg}^2 2x dx$. 159. $\int \frac{x^3dx}{(1+x^2)^2}$.

160. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+x^2}}$. 161. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{9-x^2}}$. 162. $\int \frac{x^2e^x}{(x+2)^2}dx$.

163. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$. 164. $\int \sin(\ln x)dx$.

165. $\int \cos^2(\ln x)dx$. 166. $\int e^{\arccos x}dx$.

1.5. Найпростіші інтеграли, які містять квадратний тричлен

Інтеграли виду $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{(Mx+N)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ зводяться до табличних за допомогою *підстановки* $x+\frac{b}{2a}=t$ або *виділенням повного квадрата в квадратному тричлені*.

167. $\int \frac{dx}{x^2+4x-5}$. 168. $\int \frac{dx}{x^2-8x}$.

169. $\int \frac{(3x-6)\,dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$. 170. $\int \frac{xdx}{x^4-5x^2+6}$.

171. $\int \frac{5^xdx}{5^{2x}-4\cdot 5^x+3}$. 172. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+5}$.

173. $\frac{dx}{x^2+2x+10}$. 174. $\int \frac{xdx}{x^4+6x^2+25}$.

175. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-6\sin x+12}$. 176. $\int \frac{dx}{\sqrt{10x-x^2}}$.

177. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. 178. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{17-2x+x^2}}$. 180. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

181. $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$. 182. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$.

183. $\int \frac{xdx}{x^2-5x+4}$. 184. $\int \frac{xdx}{x^2-3x+3}$.

185. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{x^2-2x+6}$. 186. $\int \frac{(3x-2)\,dx}{x^2-4x+5}$.

187. $\int \frac{x+4}{\sqrt{2-x-x^2}}dx$. 188. $\int \frac{(8x-11)\,dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

189. $\int \frac{(x-3)}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$. 190. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

191. $\int \frac{(2x+5)\,dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}}$. 192. $\int \frac{(2-5x)\,dx}{\sqrt{4x^2+9x+1}}$.

1.6. Інтегрування раціональних функцій

Якщо підінтегральний дріб неправильний, то необхідно виділити з нього цілу частину.

Знаменник правильного дробу розкладається на множники виду $(x-a)^m$ і $(x^2+px+q)^n$, де m та n — цілі додатні числа. Тоді правильний дріб записується у вигляді суми елементарних дробів таким чином:

$$\frac{P(x)}{(x-a)^m (x^2+px+q)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}.$$

Тут $P(x)$ — многочлен, який має степінь, нижчий від степеня знаменника, $A_1, \ldots, A_m$, $M_1, \ldots, M_n$, $N_1, \ldots, N_n$ — деякі дійсні числа.

Обчислити інтеграли.

а) Знаменник має тільки дійсні різні корені.

193. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$. 194. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x(x+1)(x-1)}$.

195. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$. 196. $\int \frac{x^3dx}{x^2-4}$.

197. $\int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx$. 198. $\int \frac{(2x^2-1)\,dx}{x^3-5x^2+6x}$.

199. $\int \frac{x^3+2}{x^3-4x}\,dx$. 200. $\int \frac{x^3-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

201. $\int \frac{(5x^3+2)\,dx}{x^3-5x^2+4x}$. 202. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$.

203. $\int \frac{(2x^2-5)\,dx}{x^4-5x^2+6}$. 204. $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}\,dx$.

б) Знаменник має тільки дійсні корені, деякі з них кратні.

205. $\int \frac{dx}{x^2(x-1)}$. 206. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

207. $\int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)^2(x+2)}\,dx$. 208. $\int \frac{x^4+3x^3+3x^2-5}{x^3+3x^2+3x+1}\,dx$.

209. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$. 210. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.

211. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$. 212. $\int \frac{(x^2-8x+7)\,dx}{(x^2-3x-10)^2}$.

213. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$. 214. $\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx$.

215. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\,dx$. 216. $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$.

217. $\int \frac{x^5dx}{(x-1)^2(x^2-1)}$. 218. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx$.

в) Знаменник має комплексні різні корені.

219. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$. 220. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)}$.

221. $\int \frac{(3x^2+2x+1)\,dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$. 222. $\int \frac{(3x^2+x+3)\,dx}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

223. $\int \frac{dx}{x^3+8}$. 224. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

225. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}\,dx$. 226. $\int \frac{(2x^2-3x-3)\,dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$.

227. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^3-x^2+x-1}$. 228. $\int \frac{(x^3-6)\,dx}{x^4+6x^2+8}$.

229. $\int \frac{x^3+2x^2+4x+4}{x^4+2x^3+2x^2}\,dx$. 230. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,dx$. 231. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

г) Знаменник має комплексні кратні корені.

232. $\int \frac{dx}{x^4+2x^2+1}$. 233. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

234. $\int \frac{2xdx}{(x+1)(x^2+1)^2}$. 235. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}$.

236. $\int \frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$. 237. $\int \frac{(5x^2-12)\,dx}{(x^2-6x+13)^2}$.

238. $\int \frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}$. 239. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

240. $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+2x+2)^3}$. 241. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$.

1.7. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграли виду

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

зводяться до інтегралів від раціональної функції змінної t за допомогою підстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k,$$

де k — спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$.

242. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3x-\sqrt[3]{x^2}}$. 243. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})\,x}$.

244. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$. 245. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{2x-3}+1}\,dx$.

246. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$. 247. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

248. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$. **249.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

250. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,\frac{dx}{(x-1)^3}$.

1.8. Інтегрування диференціальних біномів

Вираз виду $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p — сталі раціональні числа, а a і b — довільні сталі числа, називається *диференціальним біномом*. Справедлива така теорема Чебишева.

Теорема. *Інтеграл від диференціального бінома*

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

виражається через інтеграл від раціональної функції відносно нової змінної, якщо:

1) p *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $x=t^s$, *де* s *— найменший спільний знаменник дробів* m *і* n;

2) $\frac{m+1}{n}$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $a+bx^n=t^r$, *де* r *— знаменник дробу* p;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ *— ціле число (додатне, від'ємне чи 0) і виконано підстановку* $ax^{-n}+b=t^r$, *де* r *— знаменник дробу* p.

В інших випадках інтеграл від диференціального бінома через елементарні функції не виражається.

Обчислити інтеграл.

251. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^2}$. **252.** $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$.

253. $\int\frac{dx}{x\,(1+\sqrt[3]{x})^3}$. **254.** $\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$.

255. $\int x^7\sqrt{x^4+1}\,dx$. **256.** $\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx$.

257. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$. **258.** $\int\frac{dx}{x\sqrt[4]{x^3+1}}$.

259. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt[4]{x^2+1}}$. **260.** $\int x\sqrt{x^4+1}\,dx$

261. $\int\frac{dx}{x^2\,(2+x^3)^{5/3}}$. **262.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

1.9. Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли виду $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, де $R(u,v)$ — раціональна функція двох змінних, приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$, яка називається *універсальною*. При цьому використовуються формули

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Універсальна тригонометрична підстановка, раціоналізуючи інтеграл $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$, часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках користуються іншими підстановками. Наведемо деякі з них.

а) $\int R(\sin x)\cos x\,dx$ раціоналізується підстановкою $\sin x=t$;

б) $\int R(\cos x)\sin x\,dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x=t$;

в) $\int R(\operatorname{tg}x)\,dx$ раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg}x=t$;

г) $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$ раціоналізується підстановкою $\cos x=t$, якщо функція R непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, або підстановкою $\sin x=t$, якщо функція R непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, або підстановкою $\operatorname{tg}x=t$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ одночасно: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$;

д) $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ знаходиться підстановкою $\sin x=t$, якщо n — ціле додатне непарне число, або підстановкою $\cos x=t$, якщо m — ціле додатне непарне число, а також за допомогою формули пониження степеня

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2},$$

якщо m та n — цілі додатні парні числа; коли ж m і n — цілі парні числа, але хоч одне з них від'ємне, то даний інтеграл раціоналізується підстановкою $\operatorname{tg}x=t$; така сама підстановка використовується у випадку, коли m і n — цілі непарні і від'ємні;

е) інтеграли $\int\sin ax\cos bx\,dx$, $\int\sin ax\sin bx\,dx$, $\int\cos ax\cos bx\,dx$ обчислюються за допомогою тригонометричних формул

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Обчислити інтеграли.

263. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$. 264. $\int \cos^3 x \sin x dx$.

265. $\int \sin^3 x dx$. 266. $\int \cos^7 x dx$.

267. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx$. 268. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$.

269. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$. 270. $\int \frac{dx}{\cos^5 4x}$.

271. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2} dx$. 272. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

273. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$. 274. $\int \sin^4 x dx$.

275. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$. 276. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

277. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$. 278. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$.

279. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$. 280. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}$.

281. $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^6 x}$. 282. $\int \mathrm{ctg}^3 x dx$.

283. $\int \mathrm{tg}^4 x dx$. 284. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

285. $\int \mathrm{ctg}^8 x dx$. 286. $\int \cos^{\frac{3}{5}} x \sin^5 x dx$.

287. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$. 288. $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^7 x}} dx$.

289. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{3} \sin^3 \frac{x}{3}}$. 290. $\int \left(\mathrm{ctg}^3 \frac{x}{2} + \mathrm{ctg}^4 \frac{x}{2}\right) dx$.

291. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}$. 292. $\int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^3}$.

293. $\int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}$. 294. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

295. $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$. 296. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$.

297. $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2}$. 298. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$.

299. $\int \frac{dx}{3 + 2 \sin x + \cos x}$. 300. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$.

301. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$. 302. $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$.

303. $\int \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx$. 304. $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$.

305. $\int \frac{dx}{1 + \mathrm{tg}\, x}$. 306. $\int \frac{1 + \mathrm{ctg}\, x}{1 - \mathrm{ctg}\, x} dx$.

307. $\int \frac{dx}{4 \sin^2 x - 7 \cos^2 x}$. 308. $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$.

309. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 2 \cos x + 5}$. 310. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5}$.

311. $\int \cos 5x \cos 4x dx$. 312. $\int \sin 4x \sin 3x dx$.

313. $\int \sin 3x \cdot \cos 5x dx$. 314. $\int \cos x \cos^2 3x dx$.

315. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$. 316. $\int \cos x \cos 3x \cos 5x dx$.

317. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. 318. $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos^2 x}$.

319. $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$. 320. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$.

1.10. Інтегрування гіперболічних функцій

Інтегрування гіперболічних функцій виконується аналогічно інтегруванню тригонометричних функцій. При цьому використовуються такі формули:

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \quad \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x = \frac{1}{2} \mathrm{sh}\, 2x,$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{2} (\mathrm{ch}\, 2x + 1), \quad \mathrm{sh}^2 x = \frac{1}{2} (\mathrm{ch}\, 2x - 1),$$

$$1 - \mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}, \quad \mathrm{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

Обчислити інтеграли.

321. $\int \mathrm{sh}^2 3x dx$. 322. $\int \mathrm{ch}^2 5x dx$.

323. $\int \mathrm{sh}^3 2x dx$. 324. $\int \mathrm{ch}^3 x dx$.

325. $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^3 x dx$. 326. $\int \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x dx$.

327. $\int \mathrm{ch}^4 x dx$. 328. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{ch}^2 x}$.

329. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x}$. 330. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x - 9\, \mathrm{ch}^2 x}$.

331. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\, 3x}$. 332. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}\, x - 1}$.

333. $\int \mathrm{th}^2 5x dx$. 334. $\int \mathrm{cth}^2 3x dx$.

335. $\int \mathrm{cth}^3 x dx$. 336. $\int \mathrm{th}^4 x dx$.

337. $\int \frac{dx}{(1 + \mathrm{ch}\, x)^2}$. 338. $\int \frac{x dx}{\mathrm{ch}^2 x}$.

339. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x dx}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}}$. 340. $\int \sqrt{\mathrm{th}\, x}\, dx$.

1.11. Тригонометричні та гіперболічні підстановки

Інтеграл виду $\int R\,(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ за допомогою підстановки $x = t - \frac{b}{2a}$ зводиться до одного з таких інтегралів:

а) $\int R\,(t,\ \sqrt{t^2+m^2})\,dt$; б) $\int R\,(t,\ \sqrt{t^2-m^2})\,dt$;

в) $\int R\,(t,\ \sqrt{m^2-t^2})\,dt$, де $m \in R$.

Останні інтеграли тригонометричною або гіперболічною підстановкою відповідно

а) $t = m\,\mathrm{tg}\,z$, або $t = m\,\mathrm{sh}\,z$;

б) $t = \frac{m}{\cos z}$, або $t = m\,\mathrm{ch}\,z$;

в) $t = m\sin z$, або $t = m\,\mathrm{th}\,z$

зводяться до інтегралів виду $\int R\,(\sin t,\ \cos t)\,dt$, або $\int R\,(\mathrm{sh}\,t,\ \mathrm{ch}\,t)dt$.

Обчислити інтеграли

341. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. 342. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

343. $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}\,dx$. 344. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

345. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. 346. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$.

347. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$ 348. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}\,dx$.

349. $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 350. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

351. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}}$. 352. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

353. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. 354. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$.

355. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$. 356. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

357. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$. 358. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$.

359. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$. 360. $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$.

361. $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx$. 362. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}$.

1.12. Підстановки Ейлера

Інтеграли виду $\int R\,(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ виражаються через раціональні функції також за допомогою так званих підстановок Ейлера:

1) якщо $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm x\sqrt{a} + t$;

2) якщо $c > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$;

3) якщо $b^2 - 4ac > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$, де α — корінь тричлена ax^2+bx+c.

Обчислити інтеграли.

363. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}$. 364. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$.

365. $\int \frac{(2x^2-3x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$. 366. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

367. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$. 368. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}$.

369. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. 370. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$.

1.13. Різні приклади на інтегрування функцій

371. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$. 372. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$.

373. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{\cos^4 x+\sin^4 x}$. 374. $\int \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

375. $\int \frac{dx}{(x^2+9)\sqrt{16-x^2}}$. 376. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{(1+x)^2}$.

377. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos x}$. 378. $\int \frac{\sec x\,\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{5-\sec^2 x}}\,dx$.

379. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$. 380. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

381. $\int x\ln(1+x^3)\,dx$. 382. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$.

383. $\int \frac{dx}{(\mathrm{tg}\,x+1)\sin^2 x}$. 384. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}$.

385. $\int \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x^2}\,dx$. 386. $\int x^3\arcsin\frac{1}{x}\,dx$.

387. $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx$. 388. $\int x^2\ln\sqrt{1-x}\,dx$.

389. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$. 390. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$.

391. $\int \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}\,dx$. 392. $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\,dx$.

393. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4}\,dx$. 394. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$.

395. $\int \frac{\operatorname{tg} x\,dx}{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x}$. 396. $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

397. $\int e^{\arcsin x}\,dx$. 398. $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

399. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\cdot\frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$. 400. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)}\,dx$.

§ 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a;\ b]$, $a<b$ і $a = x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ — довільне розбиття цього відрізка на n частин. Тоді *інтегральною сумою функції* $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ називається сума виду

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

де ξ_i — довільна точка частинного відрізка $\xi_i \in [x_{i-1};\ x_i]$ і $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина відрізка $[x_{i-1};\ x_i]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми σ_n при умові, що найбільша із різниць Δx_i прямує до нуля, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;\ b]$ на частинні відрізки, ні від вибору точок ξ_i, то ця границя називається *визначеним інтегралом функції* $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)\,dx$. Отже, згідно з означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

В цьому випадку функція $f(x)$ називається *інтегровною* на відрізку $[a;\ b]$. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Виходячи з означення визначеного інтеграла і розбиваючи проміжок інтегрування на n рівних частин, обчислити інтеграли.

401. $\int_0^5 (3+x)\,dx$. 402. $\int_{-1}^{2} x^2 dx$. 403. $\int_2^3 e^x dx$. 404. $\int_0^1 3^x dx$.

405. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$. 406. $\int_0^{\pi} \sin \alpha x\,dx$.

Розбиваючи проміжок інтегрування на n частин так, щоб абсциси точок поділу утворювали геометричну прогресію, обчислити інтеграли.

407. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. 408. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$. 409. $\int_1^a \ln x\,dx$. 410. $\int_a^b \frac{\ln x}{x}\,dx$.

411. Для інтеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ скласти інтегральну суму, розбивши проміжок інтегрування на n рівних частин. Порівнюючи з результатами задачі 408, обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

2.2. Формула Ньютона—Лейбніца

Якщо $F(x)$ є якою-небудь первісною від неперервної функції $f(x)$, $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, то справедлива формула Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Користуючись формулою Ньютона — Лейбніца, обчислити інтеграли.

412. $\int_{-2}^{1} x^3 dx$. 413. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. 414. $\int_2^3 (1+2x+3x^2)\,dx$.

415. $\int_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx$. 416. $\int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3}\,dx$. 417. $\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$.

418. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. 419. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

420. $\int_0^2 3^x dx$. 421. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx$. 422. $\int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

423. $\int_1^4 \frac{dx}{3x-2}$. 424. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}\,dx$. 425. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

426. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. 427. $\int_0^{\pi/8} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)dx$. 428. $\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\,d\varphi$.

429. $\int\limits_0^{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha$. 430. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \sec^2 \alpha d\alpha$. 431. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \operatorname{ctg} 3x dx$.

432. $\int\limits_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$. 433. $\int\limits_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$. 434. $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x^2+2x+10}$.

435. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. 436. $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. 437. $\int\limits_1^2 \frac{e^{1/x^2} dx}{x^3}$.

438. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. 439. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx$.

440. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^3-x^2} dx$. 441. $\int\limits_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$.

2.3. Заміна змінної у визначеному інтегралі (метод підстановки)

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, а функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$, причому $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, то справджується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Обчислити інтеграли.

442. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}$. 443. $\int\limits_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$.

444. $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$. 445. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

446. $\int\limits_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt{(x+3)^3}}$. 447. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$.

448. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^3 x \sin 2x dx$. 449. $\int\limits_{-\pi/2}^0 \frac{\sin 2x dx}{\sin^2 x + 2}$.

450. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$. 451. $\int\limits_{\alpha}^{\pi/4} \operatorname{ctg}^4 \varphi d\varphi$.

452. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$. 453. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

454. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\frac{1}{6}\sin^2 x}$. 455. $\int\limits_0^{\pi/4} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$.

456. $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$. 457. $\int\limits_0^3 x^2\sqrt{9-x^2} dx$.

458. $\int\limits_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$. 459. $\int\limits_{2,5}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx$.

460. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^3 \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. 461. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$.

462. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x^2+3)^{5/2}}$. 463. $\int\limits_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

464. $\int\limits_{2/\sqrt{3}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$. 465. $\int\limits_2^{4/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$.

466. $\int\limits_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. 467. $\int\limits_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$.

468. $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{3-2x-x^2} dx$. 469. $\int\limits_0^a \sqrt{ax-x^2} dx$.

2.4. Метод інтегрування частинами

Якщо функції $u = u(x)$, $v = v(x)$ та їхні похідні $u'(x)$ і $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a; b]$, то справедлива формула інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

470. $\int\limits_0^1 xe^{-x} dx$. 471. $\int\limits_0^1 xe^{3x} dx$. 472. $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1) dx$.

473. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx$. 474. $\int\limits_1^2 x \cdot \log_2 x dx$. 475. $\int\limits_e^{e^2} x^2 \ln x dx$.

476. $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$ **477.** $\int\limits_0^\pi x\sin\frac{x}{2}\,dx.$ **478.** $\int\limits_0^{\pi/4} x^2\cos 2x\,dx.$

479. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\cos^2 x}.$ **480.** $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$ **481.** $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x\,dx.$

482. $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\,dx.$ **483.** $\int\limits_0^1 x\arcsin x\,dx.$ **484.** $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x\,dx}{\sqrt{1+x}}.$

485. $\int\limits_0^{1/2} \frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^2}\,dx.$ **486.** $\int\limits_0^{\pi/4} e^{3x}\sin 4x\,dx.$ **487.** $\int\limits_0^{\pi/2} e^{2x}\cos x\,dx.$

488. $\int\limits_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx.$ **489.** $\int\limits_0^{a\sqrt{7}} \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}.$

490. Довести, що для інтеграла

$$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{-x}\,dx,$$

де n — ціле додатне число, має місце формула

$$I_n = -\frac{1}{e} + nI_{n-1}.$$

Обчислити I_4.

491. Довести, що для інтеграла

$$I_n = \int\limits_1^e \ln^n x\,dx,$$

де n — ціле додатне число, має місце формула $I_n = e - nI_{n-1}$. Обчислити I_5.

2.5. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \geqslant 0$ $(a < b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

2. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \leqslant g(x)$ $(a < b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

(монотонність визначеного інтеграла).

3. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$ $(a < b)$, то

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

4. Якщо m і M — відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ $(a < b)$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)$$

(оцінка інтеграла по області).

5. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

(теорема про середнє значення функції). Число

$$\mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

називається *середнім значенням функції* $f(x)$ на відрізку $[a; b]$.

6. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то інтеграл із змінною верхньою межею

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$$

є первісною для функції $f(x)$, тобто похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

7. Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ диференційовні в точці $x \in (a; b)$ і $f(t)$ неперервна при $\varphi(a) \leqslant t \leqslant \varphi(b)$, то

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt\right) = f(\psi(x))\,\psi'(x) - f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

У задачах 492—496 знайти середнє значення функції.

492. $y = \frac{1}{x^2 + x}$ на проміжку (1; 3/2).

493. $y = \frac{2}{e^x + 1}$ на проміжку (0; 2).

494. $y = \ln x$ на проміжку (1; 2).

495. $y = \sin^2 x$ на проміжку $(0; \pi)$.

496. $y = \cos^3 x$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

497. Сила змінного струму змінюється за законом

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right), \text{ де } T \text{ — період.}$$

Знайти середнє значення сили струму за половину періоду.

Оцінити інтеграли.

498. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{8 + x^3}$. **499.** $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{8 + x^3}\, dx$. **500.** $\int\limits_{1,5}^{2} \frac{x}{\ln x}\, dx$.

501. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x}$. **502.** $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$. **503.** $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\, dx$.

Обчислити похідні заданих функцій.

504. $y = \int\limits_{0}^{x} \frac{\sin t}{t}\, dt$. **505.** $y = \int\limits_{x}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$.

506. $y = \int\limits_{2}^{e^x} \frac{\ln t}{t}\, dt$. **507.** $y = \int\limits_{x^2}^{1} \ln t\, dt$.

508. $y = \int\limits_{x}^{2x} \ln^2 t\, dt$. **509.** $y = \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\, dt$.

510. Знайти точку екстремуму функції

$$y = \int\limits_{0}^{x} (t - 1)(t - 2)^2\, dt.$$

2.6. Невласні інтеграли

Інтеграли з нескінченними межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду). Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[0; +\infty)$ і інтегровна на будь-якому відрізку $[a; b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Тоді, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$, її

називають *невласним інтегралом першого роду* і позначають $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx$.

Таким чином, за означенням

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

У цьому випадку інтеграл називають *збіжним*, а підінтегральну функцію $f(x)$ — *інтегровною на проміжку* $[a; +\infty)$. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл називається також *невласним*, але *розбіжним*.

Аналогічно означається невласний інтеграл на проміжку $(-\infty; b]$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

а також

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{c}^{b} f(x)\, dx + \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{c} f(x)\, dx,$$

де c — довільне дійсне число.

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду.

1. Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні і задовольняють умову $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$, а із розбіжності інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)\, dx$ (ознака порівняння).

2. Якщо існує границя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, \quad 0 < k < +\infty, \quad (f(x) > 0,\ g(x) > 0),$$

то інтеграли $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx$ і $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\, dx$ або одночасно обидва збігаються, або одночасно розбігаються (гранична ознака порівняння).

3. Якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\, dx$ збігається, то збігається і інтеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\, dx$, причому в цьому випадку він називається абсолютно збіжним.

Обчислити інтеграли з нескінченними межами або встановити їх розбіжність.

511. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}$. **512.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+7}$. **513.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$.

514. $\int\limits_1^{\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)} dx$. **515.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+17}$. **516.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-kx}dx \ (k>0)$.

517. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **518.** $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. **519.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

520. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$. **521.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$. **522.** $\int\limits_0^{+\infty} x\cos xdx$.

523. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-ax}dx \quad (a>0)$. **524.** $\int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

525. $\int\limits_0^{\infty} x^3e^{-x^2}dx$. **526.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$. **527.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\sin xdx$.

528. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$. **529.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. **530.** $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

531. $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$. **532.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos bxdx$.

Дослідити на збіжність подані нижче інтеграли.

533. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{5+2x^2+3x^4}$. **534.** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{3x^2+\sqrt{(x+1)^3}}{2x^3+\sqrt[3]{x^5}+1} dx$.

535. $\int\limits_{\pi/2}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$. **536.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{5+\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$. **537.** $\int\limits_1^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}} dx$.

538. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}+\cos^2 x}$. **539.** $\int\limits_0^{\infty} \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$. **540.** $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln(\ln x)}$.

Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду). Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a;\ b)$. Точку $x = b$ назвемо особливою точкою функції $f(x)$, якщо $f(x) \to \infty$ при $x \to b - 0$. Нехай функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a;\ b-\varepsilon]$

при довільному $\varepsilon > 0$ такому, що $b - \varepsilon > a$. Тоді якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

то її називають *невласним інтегралом другого роду* і позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

У цьому випадку кажуть, що *інтеграл існує*, або *збігається*. Якщо границя нескінченна або не існує, то інтеграл також називають *невласним інтегралом*, але *розбіжним*.

Аналогічно якщо $x = a$ — особлива точка, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Якщо $f(x)$ необмежена в околі якої-небудь внутрішньої точки $c \in (a;\ b)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx.$$

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду аналогічні подібним ознакам для інтегралів першого роду.

Обчислити інтеграли від необмежених функцій або встановити їх розбіжність.

541. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{2x^2+x^4}$. **542.** $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{(x^2-1)^{4/5}}$. **543.** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

544. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$. **545.** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^3 x}$. **546.** $\int\limits_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

547. $\int\limits_0^2 \ln xdx$. **548.** $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x\ln x}$. **549.** $\int\limits_0^1 \ln^2 xdx$. **550.** $\int\limits_0^1 x\ln xdx$.

551. $\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$. **552.** $\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^3} dx$. **553.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

554. $\int\limits_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos\frac{1}{x^2}\,\frac{dx}{x^3}$. 555. $\int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{ctg} x\,dx$. 556. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{x\,dx}{\sin x^2}$.

557. $\int\limits_0^5 \frac{5\,dx}{\sqrt{25-x^2}}$. 558. $\int\limits_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$. 559. $\int\limits_{1/3}^{2/3} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$.

560. $\int\limits_0^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$. 561. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. 562. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

563. $\int\limits_3^5 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$. 564. $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Дослідити на збіжність інтеграли.

565. $\int\limits_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. 566. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$. 567. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$.

568. $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{\sin x}-1}$. 569. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2})}{e^x-1}\,dx$. 570. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$.

571. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$. 572. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Використавши формули $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (інтеграл Пуассона) та $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл Діріхле), обчислити подані нижче інтеграли.

573. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}dx$, де $a>0$. 574. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$. 575. $\int\limits_0^{\infty} x^2e^{-x^2}dx$.

576. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$. 577. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin ax\cos bx}{x}\,dx$, де $a>0$, $b>0$.

578. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$. 579. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx$. 580. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx$.

2.7. Наближене обчислення визначених інтегралів

Формула прямокутників

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

де

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Формула трапецій

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right),$$

де

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

Формула Сімпсона

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k-1})\right],$$

де

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}\cdot k, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Користуючись формулами прямокутників, трапецій та Сімпсона, обчислити наближено подані нижче інтеграли.

581. $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$. 582. $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$. 583. $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1}$.

584. $\int\limits_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. 585. $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$. 586. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

587. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$. 588. $\int\limits_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}\,dx$. 589. $\int\limits_2^3 \frac{dx}{\ln x}$.

590. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$. 591. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{x}$. 592. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

593. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$. 594. $\int\limits_0^{\pi/6} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-0{,}5\sin^2\varphi}}$.

595. $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\, d\varphi$.

596. Знайти значення числа π, користуючись інтегралом

$$\pi = 4\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

обчисленим наближено за формулою Сімпсона при $n = 10$.

597. Знайти значення числа π, користуючись інтегралом

$$\pi = 4\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

обчисленим наближено за формулою Сімпсона при $n = 10$.

598. Обчислити $\ln 10 = \int\limits_1^{10} \frac{dx}{x}$, користуючись формулою Сімпсона при $n = 10$.

599. Обчислити за формулою Сімпсона $\int\limits_{1,05}^{1,35} f(x)\, dx$, якщо значення функції $f(x)$ задані таблицею

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

600. Пряма лінія дотикається до берега річки в точках A та B. Відрізок AB має довжину 60 м. Для вимірювання площі ділянки між річкою і прямою AB проведені 11 перпендикулярів до прямої AB від берега річки через кожні 5 м. Довжини цих перпендикулярів послідовно дорівнюють (у метрах): 3,28; 4,02; 4,64; 5,26; 4,98; 3,62; 3,82, 4,68; 5,26; 3,82; 3,24. Обчислити наближено значення площі ділянки.

§ 3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1. Обчислення площ плоских фігур

Якщо на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і $f(x) \geqslant 0$, то площу криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, знаходять за формулою

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ скінченне число разів змінює знак, то

$$S = \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

Площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$ та $x = b$ за умови, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$, знаходять за формулою

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx.$$

Коли криволінійна трапеція обмежена кривою, заданою параметрично

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \end{cases}$$

прямими $x = a$, $x = b$ і віссю Ox, то її площа обчислюється за формулою

$$S = \int\limits_\alpha^\beta y(t)\, x'(t)\, dt,$$

де $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ і $y(t) \geqslant 0$ на відрізку $[\alpha; \beta]$.

Площа криволінійного сектора, обмеженого кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho(\varphi)$ і променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

601. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2$, прямими $x = 3$, $x = 6$ і віссю абсцис.

602. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ і віссю абсцис.

603. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 4x + 5$, прямими $x = 3$, $x = 5$ і віссю абсцис.

604. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{4}(x^2 - 3x)$, віссю абсцис та прямою $x = 5$.

605. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 2x$ і прямою $y = x + 2$.

606. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ і прямою $y = -x$.

607. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 - 2x + 2$, дотичною до неї в точці M (3; 5) і координатними осями.

608. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до неї в точках M_1 (0; —3) і M_2 (3; 0).

609. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2x + 1$ і прямою $x - y - 1 = 0$.

610. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $(y - 2)^2 = x - 1$, дотичною до неї в точці з ординатою $y_0 = 3$ і віссю абсцис.

611. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y^2 = 2px$ та нормаллю до неї, нахиленою до осі абсцис під кутом 135°.

612. Знайти площу фігури, обмеженої параболами $y^2 = 4x$ і $x^2 = 4y$.

613. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2 + 8x = 16$ і $y^2 - 24x = 48$.

614. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \ln x$ і прямими $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

615. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \frac{27}{x^2 + 9}$ та $y = \frac{1}{6} x^2$.

616. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = e^x - 1$, $y = e^{2x} - 3$ і віссю ординат.

617. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \arcsin x$ і прямими $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

618. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \ln (x + 2)$, $y = 2 \ln x$ і віссю абсцис.

619. Обчислити площу фігури, обмеженої однією половиною хвилі синусоїди $y = \sin x$ і віссю абсцис.

620. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = \operatorname{tg} x$ та прямими $y = 0$ і $x = \frac{\pi}{3}$.

621. Знайти площу, що міститься між локоном Аньєзі $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ і віссю абсцис.

622. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = e^x$, $y = e^{-x}$ і прямою $x = 1$.

623. Знайти площу фігури, обмеженої гіперболою $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ і прямою $x = 2a$.

624. Знайти площу, що міститься між кривою $y = x^2 e^{-x}$ та віссю абсцис при $x \geqslant 0$.

625. Знайти площу, що міститься між кривою $y = x^3 e^{-\frac{3}{8} x^2}$ та її асимптотою $y = 0$.

626. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ та віссю абсцис між двома послідовними точками перетину кривої з віссю.

627. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = \arccos x$ та координатними осями.

628. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ і віссю абсцис.

629. Коло $x^2 + y^2 = 8$ поділене параболою $y = \frac{1}{2} x^2$ на дві частини. Знайти площі обох частин.

630. Знайти площі фігур, на які парабола $y^2 = 6x$ ділить коло $x^2 + y^2 = 16$.

631. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = x (x - 1)^2$ і віссю абсцис.

632. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = \ln x$ і $y = \ln^2 x$.

633. Обчислити площу криволінійного трикутника, обмеженого віссю ординат і лініями $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \frac{2}{3} \cos x$.

634. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$.

635. Знайти площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a (t - \sin t)$, $y = a (1 - \cos t)$ і віссю абсцис.

636. Знайти площу фігури, обмеженої однією віткою трохоїди $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$ $(0 < b \leqslant a)$ і дотичною до неї в її найнижчих точках.

637. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою

$$x = a (2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a (2 \sin t - \sin 2t).$$

638. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$.

639. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = a (t^2 - 1)$, $y = b (4t - t^3)$ $(a > 0,\ b > 0)$.

640. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = \frac{1}{3} t (3 - t^2)$, $y = t^2$.

641. Знайти площу фігури, обмеженої петлею декартового листа $x = \frac{3at}{1 + t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1 + t^3}$.

642. Знайти площу фігури, обмеженої цисоїдою Діоклеса $x = 2a \sin t$, $y = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}$ та її асимптотою $x = 2a$.

643. Знайти площу фігури, обмеженої трактрисою $x = a \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + a \cos t$, $y = a \sin t$ та її асимптотою $y = 0$.

644. Знайти площу фігури, обмеженої петлею кривої $x = \frac{a \sin 3t}{\sin t}$, $y = \frac{a \sin 3t}{\cos t}$.

645. Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \sin \varphi)$.

646. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \sin 2\varphi$.

647. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \sin 5\varphi$.

648. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

649. Знайти площу фігури, обмеженої колом $\rho = \sqrt{3} \sin \varphi$ і кардіоїдою $\rho = 1 - \cos \varphi$ (ззовні кардіоїди).

650. Обчислити площу фігури, обмеженої першим та другим витками спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ і полярною віссю.

651. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho^2 = a^2 \sin 4\varphi$.

652. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \sin 3\varphi$.

653. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\rho = 2a \cos \varphi + b$, $b > 2a$.

654. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $\rho = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ і променями $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

655. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бута

$$\rho^2 = a^2 \cos^2 \varphi \pm b^2 \sin^2 \varphi.$$

656. Знайти площу фігури, обмеженої дугою гіперболічної спіралі $\rho = \frac{a}{\varphi}$ та двома променями $\varphi = \varphi_1$ і $\varphi = \varphi_2$.

657. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ і колом $\rho = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

658. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

659. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ $(a > 0)$ і променем $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

660. Знайти площу тієї частини фігури, обмеженої лінією $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, яка лежить зовні лінії $\rho = 2 + \sin \varphi$.

661. Знайти площу фігури, обмеженої першими двома витками логарифмічної спіралі $\rho = e^{\varphi}$ і полярною віссю.

662. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$, прямою $\rho = \frac{a}{\cos \varphi}$ і полярною віссю.

663. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $\rho = a \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi$, $\rho = 2a \cos \varphi$ і полярною віссю.

664. Обчислити площу фігури, обмеженої однією петлею кривої $\rho^2 \cos \varphi = a^2 \sin 3\varphi$.

665. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

666. Знайти площу тієї частини фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$.

667. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$.

668. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$.

669. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

670. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 2ax$ та $x^2 + y^2 = 2ay$.

3.2. Довжина дуги

Коли гладка крива задана рівнянням $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то довжина її дуги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо ж крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

Якщо гладка крива задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ в полярних координатах, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi.$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

обчислюють за формулою

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt.$$

671. Обчислити довжину дуги параболи $y = 2\sqrt{x}$ від $x = 0$ до $x = 1$.

672. Знайти довжину дуги кривої $y = e^x$ від точки $A(0;\ 1)$ до точки $B(1;\ e)$.

673. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

674. Знайти довжину дуги кривої $y = \arcsin(e^{-x})$ від $x = 0$ до $x = 1$.

675. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ від $y = 1$ до $y = e$.

676. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ від $x = 0$ до $x = b$.

677. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ між точками її перетину з віссю абсцис.

678. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = \frac{2}{3}(x - 1)^3$, яка лежить усередині параболи $y^2 = \frac{x}{3}$.

679. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $5y^3 = x^2$, яка лежить усередині кола $x^2 + y^2 = 6$.

680. Знайти периметр одного із криволінійних трикутників, утворених віссю абсцис і лініями $y = \ln\cos x$ і $y = \ln\sin x$.

681. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln(1 - x^2)$ від $x = 0$ до $x = \frac{1}{2}$.

682. Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{2}{\pi}\ln\sin\frac{\pi x}{2}$ від $x = \frac{1}{2}$ до $x = \frac{3}{2}$.

683. Знайти довжину дуги півкубічної параболи $y^2 = \frac{5}{p}(x - p)^3$, яку відтинає пряма $x = 2p$.

684. Обчислити довжину дуги кривої $x = \ln\sec y$ від $y = 0$ до $y = \frac{\pi}{3}$.

685. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\left(\mathrm{cth}\,\frac{x}{2}\right)$ від $x = a$ до $x = b$ $(0 < a < b)$.

686. Знайти довжину дуги правої вітки трактриси

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right|$$

від $y = a$ до $y = b$ $(0 < b < a)$.

687. Знайти довжину дуги кривої $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

688. Знайти довжину дуги кривої $e^{\frac{y}{a}}\left|\cos\frac{x}{a}\right| = 1$ між точками $x = -\frac{\pi a}{4}$ і $x = \frac{\pi a}{4}$.

689. Знайти довжину дуги лінії $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ від $x = a$ до $x = b$.

690. Знайти довжину лінії $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

691. Знайти довжину петлі лінії $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

692. Знайти довжину замкнутої кривої $8a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

693. Знайти довжину астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

694. Знайти довжину дуги кривої $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$ від $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

695. Знайти довжину дуги кривої $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ від $t = 0$ до $t = 1$.

696. Знайти довжину дуги кривої $x = \frac{1}{6}t^6$, $y = 2 - \frac{1}{4}t^4$ між точками її перетину з осями координат.

697. На циклоїді $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ знайти точку, яка ділила б першу арку циклоїди по довжині у відношенні $1:3$ (рахуючи від початку координат).

698. Задано астроїду $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ і точки на ній $A(R; 0)$, $B(0; R)$. На дузі AB знайти таку точку M, щоб довжина дуги AM становила одну четверту частину дуги AB.

699. Знайти довжину дуги кривої Рібокура $x = 3a\left(\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right)$, $y = a\sin^3 t$ від $t = 0$ до $t = t_1$.

700. Знайти довжину дуги кривої $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$, яка лежить над віссю абсцис.

701. Знайти довжину лінії $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

702. Знайти довжину дуги трактриси $x = a\left(\cos t + \ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ від точки $A(0; a)$ до точки $B(x; y)$.

703. Знайти довжину дуги евольвенти кола $x = R(\cos t + t\sin t)$, $y = R(\sin t - t\cos t)$ від $t = 0$ до $t = \pi$.

704. Знайти довжину петлі кривої $x = a(t^2 + 1)$, $y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t)$.

705. Знайти довжину петлі кривої $x = t^2$, $y = t - \frac{1}{3}t^3$.

706. Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1 - \cos\varphi)$, яка лежить усередині кола $\rho = 1$.

707. Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка лежить усередині кола $\rho = 10\pi$.

708. Знайти довжину дуги параболи $\rho = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, яку відтинає пряма, що проходить через полюс перпендикулярно до полярної осі.

709. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$, яка лежить усередині кола $\rho = a$.

710. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від $\varphi = \frac{3}{4}$ до $\varphi = \frac{4}{3}$.

711. Знайти периметр лунки, утвореної колами $x^2 + y^2 = 2ax$ і $x^2 + y^2 = 2by$ $(a > b > 0)$.

712. Обчислити довжину лінії $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

713. Обчислити довжину лінії $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$.

714. Знайти довжину дуги просторової кривої $x = at^2, y = a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $z = a\left(t - \frac{1}{3}t^3\right)$ від $t = 0$ до $t = \sqrt{3}$.

715. Знайти довжину дуги кривої $x = a\sqrt{t}\cos t, y = a\sqrt{t}\sin t$, $z = at$ від $t = 0$ до довільного $t > 0$.

716. Знайти довжину дуги кривої $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $z = 4\cos\frac{t}{2}$ між двома точками перетину кривої з площиною Oxz.

717. Знайти довжину дуги кривої $x = e^t\cos t, y = e^t\sin t, z = e^t$ між площинами $z = 0$ і $z = a$ $(a > 0)$.

3.3. Об'єм тіла

Якщо площа $S(x)$ перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, є неперервною функцією на відрізку $[a; b]$, то об'єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Ця формула називається *формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів*.

Нехай криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $y = f(x) \geqslant 0$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$. Об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Ox, знаходять за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y) \geqslant 0$ і прямими $y = c$, $y = d$, $x = 0$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної трапеції навколо осі Oy, знаходять за формулою

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)\,dy.$$

718. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої віссю Ox і параболою $y = ax - x^2$ $(a > 0)$.

719. Знайти об'єм еліпсоїда, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Ox.

720. Симетричний параболічний сегмент, основа якого $2a$, висота h, обертається навколо основи. Обчислити об'єм тіла обертання, яке при цьому утворюється («лимон» Кавальєрі).

721. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням симетричного параболічного сегмента з основою $2a$ і висотою h навколо висоти.

722. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $2y = x^2$ і $2x + 2y - 3 = 0$.

723. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ і $y = 2$.

724. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої півкубічною параболою $y^2 = x^3$, віссю абсцис і прямою $x = 1$, навколо осі Ox.

725. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням тієї самої фігури, що і в задачі 724, навколо осі Oy.

726. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболами $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$.

727. Фігура, обмежена гіперболою $x^2 - y^2 = a^2$ і прямою $x = a + h$ $(h > 0)$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

728. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис, навколо осі ординат.

729. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею нескінченного веретена, утвореного обертанням лінії $y = \frac{1}{1 + x^2}$ навколо її асимптоти.

730. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $x = \pm a$ та $y = 0$.

731. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$, $x = 0$.

732. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, навколо осі абсцис.

733. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням тієї самої фігури, що і в задачі 732, навколо осі ординат.

734. Фігура, обмежена лінією $y = e^{-x^2}$ і її асимптотою, обертається навколо осі ординат. Обчислити об'єм тіла обертання.

735. Така сама фігура, як і в задачі 734, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

736. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється при обертанні лінії $y = x^2 e^{-x^2}$ навколо своєї асимптоти.

737. Лінія $y^2 = 2xe^{-2x}$ обертається навколо своєї асимптоти. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється при такому обертанні.

738. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y = xe^x$ і прямими $x = 1$, $y = 0$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

739. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною при обертанні навколо осі абсцис кривої $y = \sin^2 x$ в проміжку від $x = 0$ до $x = \pi$.

740. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні фігури, обмеженої лініями $y = x^{3/4}$ і $y = x$, навколо осі абсцис.

741. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = \arcsin x$, $x = 1$, $y = 0$.

742. Знайти об'єм тора, утвореного обертанням кола $x^2 + (y - b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ навколо осі абсцис.

743. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ і віссю абсцис, навколо осі абсцис.

744. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням тієї самої фігури, що і в задачі 743, навколо осі ординат.

745. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ навколо осі ординат.

746. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням трактриси $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ навколо її асимптоти.

747. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, навколо осі абсцис.

748. Фігура, обмежена лінією $y = \frac{\sin x}{x}$ і віссю абсцис, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

749. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої петлею кривої $y^2 = x^2(2 - x)$, навколо осі абсцис.

750. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2}$ і площиною $z = 1$.

751. Обчислити об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - z^2 = 1$ і площинами $z = -2$, $z = 1$.

752. Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$.

753. Знайти об'єми тіл, обмежених параболоїдом $z = x^2 + 2y^2$ та еліпсоїдом $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$.

754. Знайти об'єм тіла, обмеженого конічною поверхнею $(z - 2)^2 = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2}$ і площиною $z = 0$.

755. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ і конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

3.4. Площа поверхні обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої, заданої функцією $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, обчислюється за формулою

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо дуга задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$Q = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

756. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2 = 4ax$ навколо осі абсцис, від вершини до точки $x = 3a$.

757. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $y = \frac{1}{3}x^3$ навколо осі абсцис, від $x = 0$ до $x = a$.

758. Обчислити площу поверхні кулі, утвореної обертанням кола $x^2 + y^2 = R^2$ навколо діаметра.

759. Обчислити площу поверхні тора, утвореної обертанням кола $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ навколо осі абсцис.

760. Знайти площу поверхні подовженого еліпсоїда обертання, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо великої осі $(a > b)$.

761. Знайти площу поверхні вкороченого еліпсоїда обертання, утвореного обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо малої осі $(a > b)$.

762. Обчислити площу поверхні катеноїда, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ навколо осі абсцис, від $x = 0$ до $x = a$.

763. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі абсцис.

764. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ навколо осі ординат.

765. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ навколо осі абсцис.

766. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кардіоїди $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ навколо осі абсцис.

767. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = e^{-x}$, від $x = 0$ до $x = +\infty$.

768. Дуга тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $O(0; 0)$ до точки $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ обертається навколо осі абсцис. Обчислити площу утвореної поверхні.

769. Обчислити площу веретеноподібної поверхні, утвореної обертанням однієї півхвилі синусоїди $y = \sin x$ навколо осі абсцис.

770. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис петлі лінії $9ay^2 = x(3a - x)^2$.

3.5. Обчислення роботи

771. Яку роботу треба виконати, щоб тіло масою m віддалити у нескінченність з поверхні Землі, вважаючи, що силу земного тяжіння тіла можна визначити за формулою $F = mg\frac{R^2}{r^2}$, де m — маса тіла; R — радіус Землі; r — віддаль від тіла до центра Землі?

772. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 1 Н розтягує її на 1 см?

773. Яка робота виконується під час стискання гвинтової пружини на 10 см, якщо для стискання пружини на 1 см витрачається сила 2 Н?

774. Циліндр з рухомим поршнем наповнений парою об'єму $V_0 = 0{,}2$ м³ під тиском $p_0 = 10\,330$ Па. Яку роботу треба виконати, щоб при сталій температурі (ізотермічний процес) об'єм пари зменшити в 2 рази?

775. Визначити роботу, виконану при адіабатичному стискуванні повітря, яке має початковий об'єм $V_0 = 8$ м³ при тиску 10 кПа, до об'єму $V_1 = 2$ м³.

776. Яку роботу треба виконати, щоб викачати рідину із вертикальної циліндричної бочки, яка має радіус основи R і висоту H? Питома вага рідини γ.

777. Обчислити роботу, яку необхідно виконати, щоб насипати купу піску конічної форми з радіусом основи R і висотою H. Питома вага піску γ.

778. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду із казана, який має форму параболоїда обертання, повернутого вершиною вгору. Радіус основи казана R, висота H.

779. Яку роботу треба виконати при будуванні правильної чотирикутної піраміди, якщо висота піраміди H, сторона основи a, питома вага будівельного матеріалу γ?

780. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати мастило через верхній отвір із цистерни, яка має форму циліндра з горизонтальною віссю, якщо питома вага мастила γ, довжина цистерни H і радіус основи R.

781. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати рідину з питомою вагою γ із резервуара, який має форму повернутого вершиною вниз конуса, висота якого дорівнює H, а радіус основи R. Як зміниться результат, якщо конус буде повернутий вершиною вгору?

782. Обчислити роботу, яку треба виконати, щоб викачати воду із півсферичного казана радіуса R.

3.6. Обчислення тиску рідини на вертикальну пластину

783. Знайти силу тиску води на вертикальну трикутну пластину з основою a і висотою h, занурену в воду так, що її основа міститься на рівні поверхні води. Як зміниться результат, якщо пластину перевернути так, що на поверхні води буде вершина, а основа буде паралельна поверхні води?

784. Знайти силу, з якою рідина питомої ваги γ тисне на вертикальну пластину, яка має форму половини еліпса, більша вісь якого перебуває на рівні поверхні рідини. Велика вісь еліпса — $2a$; мала — $2b$.

785. Знайти силу тиску рідини питомої ваги γ, яка заповнює циліндр, на бічні стінки циліндра, якщо радіус його основи R, а висота H.

786. Вертикальна гребля має форму трапеції. Обчислити силу тиску води на греблю, якщо її верхня основа a, нижня основа b і висота h.

787. Квадратна пластина занурена вертикально у воду так, що одна із вершин квадрата знаходиться на поверхні води, а одна із діагоналей паралельна поверхні. Сторона квадрата дорівнює a. З якою силою вода тисне на сторони пластини?

788. Знайти силу тиску рідини, питома вага якої γ, на вертикальну пластину у формі еліпса з осями $2a$ і $2b$, центр якого занурений у рідину на глибину h так, що велика вісь $2a$ еліпса паралельна поверхні рідини $(h \geqslant b)$.

789. Прямокутна пластина із сторонами a і b $(a > b)$ занурена в рідину під кутом α до поверхні рідини. Більша сторона прямокутника паралельна поверхні рідини і міститься на глибині h. Обчислити тиск рідини на сторони пластини, якщо питома вага рідини γ.

790. Знайти силу тиску води на бічну поверхню конуса з радіусом основи R і висотою H, зануреного у воду вершиною вниз так, що його основа лежить на поверхні води.

3.7. Різні задачі

791. Швидкість прямолінійного руху тіла виражається формулою $v = 2t + 3t^2$ (м/с). Знайти шлях, який пройде тіло за 5 с від початку руху.

792. Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, без урахування опору повітря дорівнює $v = v_0 - gt$, де t — час; g — прискорення вільного падіння. На яку максимальну висоту піднімається тіло?

793. Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, з урахуванням опору повітря задається формулою $v = c \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{g}{c}t + \operatorname{arctg}\frac{V_0}{c}\right)$, де t — час; g — прискорення вільного падіння; c — стала величина. На яку максимальну висоту підніметься тіло?

794. Швидкість руху тіла $v = 0{,}1\, e^{-0{,}02t}$ (м/с). Знайти шлях, який тіло пройде від початку руху до повної зупинки.

795. Знайти масу шворня довжини $l = 100$ см, якщо лінійна густина матеріалу шворня на відстані x см від одного з його кінців дорівнює $\gamma = 2 + 0{,}001\, x^2$ (г/см).

§ 4. ІНТЕГРАЛИ, ЗАЛЕЖНІ ВІД ПАРАМЕТРА. ГАММА- І БЕТА-ФУНКЦІЇ

Якщо при кожному фіксованому значенні y з деякої множини функція $f(x; y)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то визначений інтеграл

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

є функцією параметра y і називається інтегралом, залежним від параметра. Від параметра може залежати не тільки підінтегральна функція, але й межі інтегрування, тобто

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx.$$

Ці інтеграли можуть бути і невласними.

Якщо функція $f(x, y)$ та її похідна $f'_y(x, y)$ — неперервні по x і y при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то для всякого $y \in [c; d]$ справедлива формула Лейбніца

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) = \int_a^b f'_y(x, y)\, dx.$$

Якщо межі інтегрування також залежать від параметра, то формула Лейбніца набирає вигляду

$$I'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)\, dx\right) = f(b(y), y)\, b'(y) -$$
$$- f(a(y), y)\, a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y)\, dx.$$

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна по x і y при $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, то справедлива формула

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx,$$

або

$$\int_c^d dy \int_a^b (x, y)\, dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Бета-функція, або *інтеграл Ейлера першого роду*, визначається формулою

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0.$$

Гамма-функцією, або *інтегралом Ейлера другого роду*, називається інтеграл

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha > 0.$$

Бета- і гамма-функції пов'язані між собою співвідношенням

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Обчислити границі.

796. $\lim\limits_{y\to 0} \int_1^2 x^3 \cos xy\, dx$. **797.** $\lim\limits_{y\to 0} \int_0^1 \sqrt[3]{x^4 + y^2}\, dx$.

798. $\lim\limits_{y\to 0} \int_{-(1+y)}^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$.

799. $\lim\limits_{h\to 0} \int_0^{x_0} [f(x+h) - f(x)]\, dx$, якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ $(a < 0 < x_0 < b)$ і $f(0) = 0$.

Знайти похідні заданих функцій.

800. $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx$. **801.** $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}\, dx$.

802. $I(\alpha) = \int_0^1 \ln(x^2 + \alpha^2)\, dx$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$. **803.** $I(\alpha) = \int_1^2 \frac{e^{\alpha x}}{x}\, dx$.

804. Знаючи, що $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\ln(1+\alpha)$, обчислити $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(1+\alpha x)^2}$, диференціюючи по α.

805. Знаючи, що $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{1}{a}$, обчислити $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Диференціюючи або інтегруючи по параметру, обчислити інтеграли.

806. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

807. $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

808. $\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\alpha x dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. **809.** $\int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx \quad (|\alpha| \leqslant 1)$.

810. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$. **811.** $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

812. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x}dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

813. $\int\limits_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha x}}{xe^x}dx \quad (\alpha > -1)$. **814.** $\int\limits_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}dx \quad (\alpha \geqslant 0)$.

815. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0,\ m \neq 0)$.

Використовуючи гамма- та бета-функції, обчислити інтеграли.

816. $\int\limits_0^1 x\sqrt[3]{1-x^3}\,dx$. **817.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2(1-x)}}$.

818. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **819.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{\frac{3}{2}}x\sin^{\frac{5}{2}}x dx$.

820. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1}x\cdot\cos^{q-1}x dx \quad (p > 0,\ q > 0)$.

Глава 8

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

§ 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1. Загальні поняття та означення. Геометричний зміст диференціального рівняння

Диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну.

Розв'язком диференціального рівняння (1) на деякому інтервалі $(a; b)$ називається диференційовна на цьому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння (1) перетворює його в тотожність по x на $(a; b)$.

Функція $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від аргументу і довільної сталої C, називається *загальним розв'язком* рівняння (1) в області G, якщо вона задовольняє дві умови:

1) функція $\varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-якому значенні сталої C з деякої множини;

2) для довільної точки $(x_0, y_0) \in G$ можна знайти таке значення $C = C_0$, що функція $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову:

$$\varphi(x_0, C_0) = y_0.$$

Частинним розв'язком рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x, C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при певному значенні сталої $C = C_0$.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді, тобто у вигляді рівняння $\Phi(x, y, C) = 0$, то такий розв'язок називають *загальним інтегралом диференціального рівняння* (1). Рівність $\Phi(x, y, C_0) = 0$ називають *частинним інтегралом рівняння*.

Перевірити, чи задовольняють диференціальні рівняння вказані функції.

1. $xy' = 2y$, $y = 5x^2$. **2.** $y'' = x^2 + y^2$, $y = \frac{1}{x}$.

3. $y' = y\operatorname{ctg}x + 2\operatorname{ctg}x$, $y = 3 + 4\operatorname{tg}x$.

4. $y'\sin x = y\ln y$, $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$. **5.** $y'' + 16y = 0$, $y = C_1\cos 4x$.

6. $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y = e^{-2x}\sin x$.

7. $y' = xe^{x^2}(1 + y^2)$, $y = e^{-x^2}$. 8. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y = xe^x$.
9. $y' + 2y = y^2e^x$, $y = (Ce^{2x} + e^x)^{-1}$.
10. $xy^2y' = x^2 + y^3$, $y = x^3$.

Показати, що для заданих диференціальних рівнянь функції $f(x, y) = 0$ є інтегралами.

11. $(x - 2y)\,y' = 2x - y$, $x^2 - xy + y^2 - C^2 = 0$.
12. $(xy - x)\,y'' + x(y')^2 + yy' - 2y' = 0$, $y - \ln xy = 0$.
13. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\,dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$, $\operatorname{tg} y \operatorname{tg} x - C = 0$.
14. $2yy' + 3x^2 + \sin 2x = 0$, $x^3 + \sin^2 x + y^2 - C = 0$.
15. $(2 + x\sqrt{y})\,y' + 2y(\sqrt{x} + e^x) = 0$, $\ln y + x\sqrt{y} + e^x - C = 0$.
16. $y'(x^2 + \cos y) = -\left(\frac{1}{x} + 2xy\right)$, $x^2y + \sin y + \ln x - C = 0$.
17. $\left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$,
$\operatorname{tg} xy - \cos x - \cos y - C = 0$.
18. $y'x(1 + ye^y) + y(3x^3 + 1) = 0$, $x^3 + \ln xy + e^y - C = 0$.
19. $(3x^2 + x\cos xy)\,dy + (2xy^3 + y\cos xy + 1)\,dx = 0$,
$x^2y^3 + \sin(xy) + x - C = 0$.
20. $y' = e^{2x}\ln y$, $y(\ln y - 1) - \frac{1}{2}e^{2x} - C = 0$.

Скласти диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих, де C_1, C_2, C_3, C — сталі, що підлягають вилученню.

21. $y = Cx$. 22. $x^3 = C(x^2 - y^2)$.
23. $\operatorname{tg} y = \arcsin x + C$. 24. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$.
25. $y = (C_1 + C_2x)\,e^{3x}$. 26. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x$.
27. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + 3xe^{4x}$.
28. $y^2 = 2Cx + C^2$. 29. $x\operatorname{tg}(x + C) - y = 0$.
30. $y = \arcsin^2 x + C_1\arcsin x + C_2$.

31. Знайти диференціальне рівняння сім'ї парабол, вершини яких проходять через точку $M(3; 2)$ і мають за вісь симетрії пряму $y = 2$.

32. Написати диференціальне рівняння всіх кіл на площині.

33. Скласти диференціальне рівняння всіх кіл, що дотикаються до осі ординат.

34. Скласти диференціальне рівняння прямих, що проходять через задану точку з координатами $(a; b)$.

35. Скласти диференціальне рівняння сім'ї парабол, вершини яких проходять через точку $M(-1; 3)$ і мають за вісь симетрії пряму $x = -1$.

36. Знайти диференціальне рівняння гармонічного коливного руху, який описується формулою $x = A\cos(\omega t + \alpha)$, де A, ω, α — довільні сталі.

37. Знайти диференціальне рівняння сім'ї циклоїд

$$x = C(t - \sin t), \quad y = C(1 - \cos t).$$

38. Скласти диференціальне рівняння сім'ї співфокусних кривих другого порядку $\frac{x^2}{a^2 + C} + \frac{y^2}{b^2 + C} = 1$, де C — параметр.

39. Скласти диференціальне рівняння сім'ї цисоїд

$$(2C - x)\,y^2 = x^3.$$

40. Скласти диференціальне рівняння сім'ї еліпсів з даною більшою віссю $2a$.

41. Побудувати ізокліни $y' = \mathrm{const}$ для таких диференціальних рівнянь:

а) $y' = x^2 + y^2$, $y' = 0$, $y' = 1$, $y' = 9$;
б) $y' = x^2 - y^2$, $y' = \pm 1$, $y' = \pm 4$, $y' = 0$;
в) $y' = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y' = 0$, $y' = 1$, $y' = \sqrt{3}$.

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$y' = f(x)\,\varphi(y), \tag{1}$$

де $f(x)$ і $\varphi(y)$ — задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Рівняння виду

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx \quad (\varphi(y) \neq 0) \tag{2}$$

називається *диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.*

Загальний інтеграл диференціального рівняння (2) має вигляд

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Диференціальне рівняння (1) є окремим випадком рівняння виду

$$f_1(x)\,\varphi_1(y)\,dx + f_2(x)\,\varphi_2(y)\,dy = 0.$$

Для відокремлення змінних у цьому рівнянні досить обидві його частини поділити на функцію $\varphi_1(y)\,f_2(x) \neq 0$. При цьому втрачаємо розв'язки $\varphi_1(y) = 0$, $f_2(x) = 0$.

Знайти загальні інтеграли або загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

42. $xy' - y = 0$. 43. $y^2dx + xdy = 0$.
44. $\ln|\cos x|\,y' + y\operatorname{tg} x = 0$. 45. $xdx + 2y\sec xdy = 0$.
46. $2y\sin\frac{1}{x^2} + x^3y' = 0$. 47. $xy' - y\ln y = 0$.
48. $(x^2y - x^2)\,dy = (xy^2 + y^2)\,dx$.

49. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

50. $(y^2 + 3)\,dx - \frac{e^x}{x}\,y\,dy = 0$. **51.** $y' = (2y + 1)\operatorname{tg} x$.

52. $\sin x \operatorname{tg} y\,dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$. **53.** $5^{x^2+y}dy + x\,dx = 0$.

54. $e^{x^2}dy + 3x^2\sqrt{1 - y^2}\,dx = 0$.

55. $2x\,dy + (1 + x)\sin^2 y \operatorname{tg} y\,dx = 0$. **56.** $(y + 1)\,y' = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$.

57. $y' = \frac{xy^3 + x}{-x^2y^2 + y^2}$. **58.** $(xy - x)^2\,dy + y(1 - x)\,dx = 0$.

59. $(1 + x^2)\,y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

60. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1 + e^x)\sec^2 y\,dy = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

61. $(y^2 - 2)\,y' + e^{x-y}(x^3 - 6x) = 0$, $y(0) = 0$.

62. $(1 - e^{y^2})\,dy = \frac{dx}{2y}$, $y(0) = 0$.

63. $y^{-3}\ln\ln x\,dx + xe^{y^2}dy = 0$, $y(e) = 0$.

64. $3x^2(y + 1)\,dx + (x^3 + 1)\,dy = 0$, $y(0) = 1$.

65. $x(y + 1)\,dy + y(2x^2 + 1)\,dx = 0$, $y(1) = 1$.

66. $\frac{y}{y'} = \ln y$, $y(2) = 1$.

67. $(1 + e^{2x})\,y^2dy = e^x dx$, $y(0) = 0$.

68. $y'\left(\sqrt{1 - e^{2y}} + e^y\right) + x^3\sqrt{1 - e^{2y}} = 0$, $y(0) = 0$.

69. $\sin x\,dy - (\cos x - \sin x)(y + 1)\,dx = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

70. Швидкість розмноження бактерій пропорційна наявній масі їх, яка у початковий момент часу дорівнює M_0. Знайти масу бактерій через час t, якщо коефіцієнт пропорційності дорівнює k.

71. Чан циліндричної форми з вертикальною віссю заввишки 6 м і діаметром 4 м має в дні отвір радіуса 1/12 м. Знайти час t, за який вода витече із заповненого чана.

72. Швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Нагріте до $T = 100$ °С тіло охолодилось до 60 °С при температурі навколишнього повітря 20 °С за 20 хв. Через скільки хвилин температура тіла зменшиться до 25 °С?

73. Куля входить у дошку завтовшки h м із швидкістю v_0 м/с і вилітає, пробивши її, із швидкістю v_1 м/с. Знайти час руху кулі через дошку, якщо сила опору руху пропорційна квадрату швидкості.

74. У культурі пивних дріжджів швидкість приросту діючого ферменту пропорційна наявній його кількості. Якщо ця кількість подвоюється протягом години, то у скільки разів вона збільшиться протягом 2,5 год.

75. Знайти лінію, яка проходить через точку $M(2; 0)$, якщо відрізок дотичної між точкою дотику і віссю ординат має сталу довжину $l = 2$.

76. Матеріальна точка маси m лежить на кривій L, яка обертається навколо вертикальної осі із сталою кутовою швидкістю ω. Знайти рівняння кривої L, якщо матеріальна точка перебуває у рівновазі у будь-якому положенні на кривій.

77. Знайти криву, яку утворює канат ланцюгового містка.

78. Водень розширюється при сталій температурі і при зовнішньому тиску, який мало відрізняється від початкового тиску водню P_0. Знайти виконану воднем роботу розширення залежно від об'єму V, якщо початковий об'єм дорівнює V_0.

79. Моторний човен рухається в стоячій воді із швидкістю $v_0 = 20$ км/год. Через 40 с після того, як двигун вимикають, швидкість човна зменшується до $v_1 = 8$ км/год. Опір води пропорційний швидкості руху човна. Визначити швидкість човна v через 2 хв після зупинки двигуна.

80. Маса пілота з парашутом становить 80 кг. Опір повітря при опусканні парашута пропорційний квадрату його швидкості ($k = 400$). Визначити швидкість опускання залежно від часу і встановити максимальну швидкість опускання.

81. Сила опору руху диска, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Знайти залежність кутової швидкості від часу, якщо його початкова швидкість 3,3 $с^{-1}$, а через хвилину швидкість була 2 $с^{-1}$.

82. Посудина місткістю a літрів наповнена водним розчином деякої солі. У посудину неперервно вливається b літрів чистої води за одиницю часу і така сама кількість розчину виливається з неї. За яким законом змінюється вміст солі в посудині залежно від часу протікання рідини?

83. Знайти криві, для яких відрізок, що його відтинає дотична на осі Ox, пропорційний квадрату абсциси точки дотику.

1.3. Однорідні диференціальні рівняння

Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією n-го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y). \qquad (1)$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Підстановкою

$$y = ux, \quad \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}, \quad t = \frac{1}{x},$$

де $u\ (x)$ — невідома функція, рівняння (2) зводиться до рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{du}{f(1, u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2},$$

де $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ — задані сталі, зводиться до однорідного рівняння заміною $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, якщо $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$. Числа α і β знаходять із систем рівнянь

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

84. $y' = \frac{x - y}{x - 2y}$. **85.** $y' = -\frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2 + xy}$.

86. $y'x = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$.

87. $(y + \sqrt{x^2 - y^2})\,dx - xdy = 0$.

88. $(x^2 + 2xy)\,dx + xydy = 0$.

89. $xy' \sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$. **90.** $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

91. $\left(x\,\mathrm{ctg}\frac{y}{x} - y\right)dx + xdy = 0$. **92.** $x^2y' = 4(x^2 + y^2) + yx$.

93. $y - xy' = x\sec\frac{y}{x}$. **94.** $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$.

95. $xy' = y + (x + y)\ln\frac{x + y}{x}$. **96.** $ydx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0$.

97. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)\,y'$. **98.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

99. $yy' + 2\sqrt{xy} - x = 0$. **100.** $xy' + y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0$.

101. $xy' - y\cos\ln\frac{y}{x} = 0$. **102.** $(x^2 + y^2)\,dx + 2xydy = 0$.

103. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

104. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0$, $y(0) = \sqrt{5}$.

105. $xy' = xe^{y/x} + y$, $y(1) = 0$.

106. $xy' = y + x\sin\frac{y}{x}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

107. $(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0$.

108. $(2\sqrt{xy} - y)\,dx + xdy = 0$, $y(1) = 0$.

109. $y^2 + x^2y' = xyy'$, $y(1) = 1$.

110. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$, $y(1) = 0$.

111. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$, $y(1) = 0$.

112. $(y^2 - 2xy)\,dx - x^2dy = 0$, $y(1) = 3$.

113. $y' = \frac{y}{x} - 1$, $y(1) = 0$. **114.** $y' = \frac{3x - y + 1}{x + y - 5}$.

115. $(x - 2y + 3)\,dy + (2x + y - 1)\,dx = 0$, $y(1) = 1$.

116. Знайти рівняння поверхні дзеркала, яке збирає всі паралельні промені в одну точку.

117. Визначити криву, всі дотичні до якої проходять через початок координат.

118. Знайти криву, якщо в кожній її точці довжина відрізка дотичної дорівнює довжині відрізка, який відтинає дотична на осі Ox.

119. Знайти криву, дотична до якої в довільній точці відтинає на осі ординат відрізок, рівний абсцисі точки дотику.

120. Знайти криву, знаючи, що відношення відрізка, утвореного її нормаллю на осі Ox, до радіуса-вектора є величина стала і дорівнює K.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння, звідні до лінійних

Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду

$$y' + p(x)\,y = f(x), \tag{1}$$

де $p\ (x)$ і $f\ (x)$ — задані і неперервні на деякому проміжку функції.

Розв'язок рівняння (1) знаходять у вигляді

$$y = uv, \tag{2}$$

де $u = u\ (x)$, $v = v\ (x)$ — невідомі функції, причому одна з цих функцій довільна (але не дорівнює тотожно нулю).

Рівнянням Бернуллі називається рівняння виду

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha}, \quad \alpha \in R,\ \alpha \neq 0,\ 1. \tag{3}$$

При $\alpha = 0$ це рівняння лінійне, а при $\alpha = 1$ — з відокремлюваними змінними. Заміною $z = y^{1-\alpha}$ рівняння (3) зводиться до лінійного рівняння відносно функції z.

На практиці розв'язок рівняння зручніше шукати у вигляді $y = uv$, не зводячи його до лінійного рівняння.

Рівняння виду

$$y' + p(x)\,y + q(x)\,y^{\alpha} = r(x), \qquad (4)$$

де $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — задані функції, називаються *рівнянням Ріккаті*.

Коли $q(x) \equiv 0$, рівняння (4) стає лінійним, а у разі $r(x) = 0$ — рівнянням Бернуллі. У загальному випадку рівняння (4) не інтегрується в квадратурах. Якщо відомий частинний розв'язок $y_1 = y_1(x)$ рівняння (4), то заміною $y = y_1 + z$ рівняння Ріккаті зводиться до рівняння Бернуллі.

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

121. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^3}$. **122.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{1}{x^6+1}$.

123. $y' + 2\operatorname{ctg} x \cdot y = \frac{1}{\sin x}$. **124.** $y' + \frac{2x^2}{x^3+1}\,y = x^2$.

125. $y' + \frac{e^x \cdot y}{e^x + 1} = x$. **126.** $(1+x^2)\,y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

127. $(1+x^2)\,y' + y = \operatorname{arctg} x$.

128. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

129. $x \ln x y' - y = x(\ln x - 1)$.

130. $(2xy + 3)\,dy - y^2dx = 0$.

131. $x \cos x y' + y(x \sin x + \cos x) = 1$.

132. $(y^4 + 2x)\,y' = y$. **133.** $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$; $y(0) = 1$.

134. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

135. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$. **136.** $y' = \frac{x}{y}\,e^{2x} + y$.

137. $\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{y} - 2x\right)dy$. **138.** $xdx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

139. $yx' + x = -yx^2$.

140. $y' \operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$, $y(0) = 0$.

141. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

142. $y' + x\sqrt[3]{y} = 2y$, $y(0) = 6^{-\frac{3}{2}}$.

143. $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0$, $y(0) = 1$.

144. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

145. $y' + \frac{3x^2y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$, $y(0) = 1$.

146. $x^2y' - x^2y^2 + 5xy - 3 = 0$. **147.** $y' + y^2 = 2x^{-4}$.

Розв'язати рівняння Ріккаті.

148. а) $(1+x^2)\,y' + 2\frac{1-x^2}{x}\,y + 3 = y^2$; $y_1(x) = \frac{1}{x}$;

б) $y' + xy^2 + \frac{y}{x} = x^3 + 2$, $y_1(x) = x$;

в) $x^3y' - y^2 - x^2y = -x^2$, $y_1(x) = x$;

г) $y' - y^2 - \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$, $y_1(x) = -\frac{1}{x}$;

д) $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$, $y_1(x) = 2x$;

е) $(x - x^4)\,y' - x^2 - y + 2xy^2 = 0$, $y_1(x) = x^2$.

149. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного віссю Ox, дотичною і радіусом-вектором точки дотику, стала і дорівнює a^2.

150. Площа трапеції, утвореної дотичною до деякої кривої, осями координат та ординатою точки дотику, є стала і дорівнює — a^2. Знайти цю криву.

151. На тіло маси $m = 1$ діє сила, пропорційна часу, і сила опору середовища, яка пропорційна швидкості. Знайти закон руху тіла $S(t)$, якщо коефіцієнти пропорційності відповідно дорівнюють k_1 і k_2.

152. Сила струму I в електричному колі з опором R і коефіцієнтом самоіндукції L задовольняє рівняння $L\frac{dI}{dt} + RI = E$, де E — електрорушійна сила. Знайти залежність сили струму $I(t)$ від часу, якщо $E = E_0 \sin \omega t$ і $I(0) = 0$.

153. Початкова температура $0_0^0\,C$ тіла дорівнює температурі навколишнього середовища. Тіло дістає теплоту від нагрівача із швидкістю $C\varphi(t)$ і віддає теплоту навколишньому середовищу із швидкістю охолодження, яка пропорційна різниці між температурами тіла і середовища. Знайти залежність температури тіла від часу, який відраховується з моменту початку досліду.

154. Знайти криву, кожна дотична до якої перетинає пряму $y = 1$ у точці з абсцисою, що дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

155. Знайти криву, дотична до якої в точці $(x; y)$ проходить через точку $(x^2; y^2)$.

1.5. Рівняння в повних диференціалах

Рівняння виду

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy.$$

Загальний інтеграл рівняння (1) має вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Для того щоб рівняння (1) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Функцію $u(x, y)$ знаходять за формулою

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

Якщо ліва частина рівняння (1) не є повним диференціалом і задовольняє умови теореми Коші, то існує така функція $\mu = \mu(x, y)$, що $\mu(P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy) = du = 0$. Функція $\mu(x, y)$ називається інтегрувальним множником і задовольняє умову

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

156. $(3x^2y + 2)\,dx + (x^3 + 3y^2)\,dy = 0.$

157. $(2xy\cos x^2y + 1)\,dx + (x^2\sin x^2y - \sin y)\,dy = 0.$

158. $(2x\cos x^2 + e^y)\,dx + (e^yx + \cos y)\,dy = 0.$

159. $\left(\frac{1}{x} + \frac{y}{\cos^2 xy}\right)dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + 2y\right)dy = 0.$

160. $\left(\frac{1}{1+x^2} + 3x^2e^y\right)dx + (x^3e^y + 1)\,dy = 0.$

161. $\sin 2x + 3x^2y + \left(x^3 + \frac{1}{1+y^2}\right)y' = 0.$

162. $(3x^2 + 2y^2)\,dx + (4yx - \sin 2y)\,dy = 0.$

163. $yx^{y-1}dx + x^y\ln x\,dy = 0.$

164. $\left(\frac{1}{1+x^2} + 3x^2y + \frac{y}{x^2}\sin\frac{y}{x}\right)dx + \left(x^3 - \frac{1}{x}\sin\frac{y}{x}\right)dy = 0.$

165. $\left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{e}e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} + 2y - \frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0.$

166. $\left(\frac{2y}{x^3} + y\cos xy\right)dx + \left(\frac{1}{x^2} + x\cos xy\right)dy = 0, \quad y(1) = 0.$

167. $(y^3 + 1 - 2xy\sin x^2y)\,dx + (1 + 3y^2x - x^2\sin x^2y)\,dy = 0,$ $y(0) = -1.$

168. $3^{xy}y\ln 3dx + (x3^{xy}\ln 3 - 3)\,dy = 0, \quad y(0) = 0.$

169. $(x + y^2)\,dx - 2xydy = 0.$ **170.** $y(1 + xy)\,dx - xdy = 0.$

171. $2xydx + (y^2 - 3x)\,dy = 0.$ **172.** $\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right)dy = \frac{y}{x^3}\,dx.$

173. $(y^2e^x + y)\,dx - xdy = 0.$ **174.** $(\ln y + 2x - 1)\,y' = 2y.$

175. $xy' + (\sin y - 3x^2\cos y)\cos y = 0.$

176. Знайти інтегрувальний множник рівняння Бернуллі

$$y' + P(x)\,y = y^nQ(x).$$

177. Знайти умови, при яких рівняння

$$X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$$

має інтегрувальний множник виду $\mu = \mu(x + y)$.

Розв'язати рівняння за допомогою множника $\mu = \mu(x \mp y)$.

178. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)\,dx + (y^2 + xy^2 + 2xy - x^2 - x^3)\,dy = 0.$

179. $\left(y - \frac{ay}{x} + x\right)dx + ady = 0.$

180. $dx + x\,\mathrm{ctg}\,(x + y)\,(dx + dy) = 0.$

181. Знайти умови, при яких рівняння $X(x, y)\,dx + Y(x, y)\,dy = 0$ має інтегрувальний множник виду $\mu = \mu(x, y)$.

182. $y^2dx + (xy - 1)\,dy = 0.$

183. $(2x^2y + x)\,dy + (y + 2xy^2 - x^2y^3)\,dx = 0.$

1.6. Диференціальні рівняння, нерозв'язні відносно похідної

Нехай маємо рівняння виду

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

яке важко або неможливо розв'язати відносно похідної y'.

1. Нехай рівняння (1) залежить лише від y'

$$F(y') = 0.$$

Якщо алгебраїчне рівняння $F(x) = 0$ має хоча б один дійсний корінь $x = k$, то рівняння (1) має загальний інтеграл

$$F\left(\frac{y - C}{x}\right) = 0,$$

де C — довільна стала.

2. Рівняння (1) не залежить від x:

$$F(y, y') = 0. \tag{2}$$

Якщо ввести заміну $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$, $t \in [t_0; t_1]$ таким чином, щоб виконувалась умова $F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0$, $t \in [t_0; t_1]$, то

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}. \tag{3}$$

Після інтегрування (3) розв'язок рівняння (2) запишеться в параметричній формі:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C, \quad y = \varphi(t).$$

3. Рівняння (1) не залежить від y:

$$F(x, y') = 0.$$

Його розв'язок знаходять у параметричній формі:

$$x = \varphi(t), \quad y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C,$$

де

$$x = \varphi(t), \quad y' = \psi(t), \quad F(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t \in [t_0; t_1].$$

4. Рівняння виду

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'), \tag{4}$$

де φ, ψ — відомі функції, називається *рівнянням Лагранжа*. Якщо $\varphi(y') \equiv y'$, то рівняння (4) набирає вигляду

$$y = xy' + \psi(y') \tag{5}$$

і називається *рівнянням Клеро*.

Рівняння (4) зводиться до лінійного рівняння

$$(t - \varphi(t)) \frac{dx}{dt} = x\varphi'(t) + \psi'(t)$$

за допомогою підстановки

$$t = y', \quad y = x\varphi(t) + \psi(t).$$

Рівняння (5) рівнозначне рівнянню

$$(x + \psi'(t)) \frac{dt}{dx} = 0,$$

де $y' = t$, $y = xt + \psi(t)$.

Розв'язати рівняння.

184. $x(y')^2 + 2xy' - y = 0$. **185.** $\arcsin \frac{x}{y'} = y'$.

186. $y = e^{y'}(y' - 1)$. **187.** а) $y(y')^2 - (xy + 1)y' + x = 0$;
б) $(y')^2 + 2y' + 1 = 0$; в) $(y')^2 + 5y' + 6 = 0$;
г) $(y')^2 + y' - 2 = 0$; д) $(y')^2 = y^3 - y$;
е) $y - (y')^3 - (y')^2 = 0$; є) $y = y' \sin y' + \cos y'$;
ж) $(y')^2 + 2xy' - 3x^2 = 0$; з) $x^2 + (y')^3 - 3xy' = 0$.

188. $x = y'(1 + e^{y'})$. **189.** $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$.

190. $(y')^2 + (x + 3)y' - y + 1 = 0$.

191. $x(y')^2 - yy' + 3 = 0$.

192. $(3x + 1)(y')^2 - 3(y + 2) + 9 = 0$.

193. $y = xy' + \sin y'$. **194.** $y - 2xy' = \sqrt{1 + (y')^2}$.

195. $x = y' \sin y'$. **196.** $2y(y' + 1) = x(y')^2$.

197. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$.

198. $(y')^3 + xy' - y = 0$.

199. $2yy' = x[(y')^2 + 4]$. **200.** $xy' - y = \ln y'$.

201. Відстань від заданої точки до довільної дотичної до деякої кривої є величина стала. Знайти цю криву.

202. Знайти лінію, дотичні до якої відтинають на осях координат відрізки, сума яких дорівнює $2a$.

203. Знайти лінію, якщо добуток відстаней довільної дотичної до двох заданих точок є величина стала.

204. Знайти лінію, якщо відрізок довільної її дотичної, яка лежить між осями координат, має сталу довжину l.

§ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЯКІ ДОПУСКАЮТЬ ПОНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

1. Загальний розв'язок рівняння

$$y^{(n)} = f(x), \tag{1}$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, знаходять n-кратним послідовним інтегруванням.

2. Рівняння

$$x = f(y^{(n)}) \tag{2}$$

підстановкою $y^{(n)} = t$ зводиться до рівняння виду (1):

$$y^{(n-1)} = \int tf'(t) + C.$$

3. Порядок диференціального рівняння

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

можна понизити на k одиниць, якщо покласти $z = y^{(k)}(x)$.

4. Порядок диференціального рівняння

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

яке не містить явно незалежної змінної x, можна понизити на одиницю за допомогою підстановки $z' = z(y)$.

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь

205. $y'' = x + \sin x$. **206.** $y'' = \cos 2x + \frac{1}{x}$.

207. $y''' = e^{2x} + x^3$. **208.** $y'' = \sin^2 x + x \sin 2x$.

209. а) $y'' = (x^2 + 3x + 1)e^x$; б) $(y'')^3 - 2y'' - x = 0$;
в) $(y'')^4 + y'' - x = 0$; г) $y'' + \ln y'' - x = 0$.

210. $y''' = 2\ln x + x + 2$. **211.** $y'' = 1 - (y')^2$. **212.** $yy'' = (y')^2$.

213. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$. **214.** $2yy'' - (y')^2 = 1$. **215.** $xy'' = y' \ln \frac{y}{x}$.

216. $y' + \frac{1}{4}(y'')^2 = xy''$. **217.** $x^2y'' + xy' = 1$.

218. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$. **219.** $(y''')^2 + (y'')^2 = 1$.

220. $yy'' - y'(2\sqrt{yy'} - y') = 0$.

221. $y''(y - 1) - 2(y')^2 = 0$. **222.** $xy'' - 2y' = -\frac{x^4}{\sqrt{16 - x^2}}$.

223. $xy'' - 3y' = -\frac{x^5}{\sqrt{1 - x^2}}$. **224.** $xy'' + y' = \frac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$.

225. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$. 226. $xy'' - 2y' = \frac{x^4}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$

227. $x^3y'' + x^2y' = 1$. 228. $xy'' - y' = x^2e^x$.

229. $xy'' = y' + x \sin\frac{y'}{x}$. 230. $x^2y''' = (y'')^2$.

231. $y'y''' = 3(y'')^2$. 232. $(y'')^2 - y'y''' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2$.

233. $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$. 234. $y''' + y'' \operatorname{tg} x = \sec x$.

235. $y'''x \ln x = y''$. 236. $y''(x^2+1) = 2xy'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

237. $xy'' + y' = \ln x$, $y(1) = -2$, $y'(1) = -1$.

238. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

239. $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

240. $y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

241. $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

242. $xy'' - 3y' = -\frac{x^5}{\sqrt{9-x^2}}$, $y(3) = 0$, $y'(3) = 0$.

243. $2yy'' + y^2 - (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

244. $x^4y'' - (y - xy')^3 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$.

245. $y'' = 2 - y$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

§ 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння

$$y^{(n)} + \alpha_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_n(x) y = f(x), \qquad (1)$$

де $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$, $f(x)$ — задані функції.

Якщо функції $\alpha_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ є сталі числа $\alpha_i(x) = a_i$, то рівняння (1) називається *лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку із сталими коефіцієнтами*. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (1) називається однорідним, якщо $f(x) \not\equiv 0$, то неоднорідним. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$\bar{y} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x),$$

де $y_i(x)$ його лінійно незалежні частинні розв'язки, а C_i — довільні сталі.

Сукупність будь-яких n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_i(x)$ однорідного рівняння називається фундаментальною системою.

Загальним розв'язком $y = y(x)$ лінійного неоднорідного рівняння (1) є сума будь-якого його частинного розв'язку y^* та загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння, тобто

$$y = \bar{y} + y^*.$$

Якщо відома фундаментальна система розв'язків $y_i(x)$ однорідного рівняння, то загальний розв'язок неоднорідного рівняння (1) можна записати за формулою

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \cdots + C_n(x) y_n,$$

де функції $C_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ визначаються з такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \cdots + C_n'(x) y_n = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \cdots + C_n'(x) y_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}$$

У випадку, коли порядок рівняння (1) дорівнює двом, система має вигляд

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Цей метод знаходження загального розв'язку рівняння (1) називається *методом варіації довільних сталих*.

246. Дослідити лінійну залежність таких систем функцій:
а) x^2, $x^2 + x$; б) x, $-3x$, $+2x$; в) $\ln x$, x, 1; г) $\sin x$, $\cos x$;
д) $x^2 + 3x$, $x^2 - 1$, $x + 3$; е) $\ln x^4$; $\ln 5x$, 11.

247. Побудувати лінійне однорідне диференціальне рівняння, якщо фундаментальна система розв'язків має вигляд:
а) $y_1 = x$, $y_2 = e^x$; б) $y_1 = xe^{2x}$, $y_2 = x$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = 3x - 2$;
г) $y_1 = (x-2)e^x$, $y_2 = x + 2$.

248. Нехай $y_1(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ — нетривіальний частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0,$$

де $p_1(x)$, $p_2(x)$ — неперервні функції при $x \in (a, b)$. Довести, що загальний розв'язок рівняння можна знайти за формулою Абеля:

$$y = C_1y_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2(x)} dx + C_2y_1(x).$$

249. Нехай $y_1(x) \neq 0$, $y_2(x) \neq 0$ $(x \in (a, b))$ — два лінійно незалежних розв'язки рівняння

$$y''' + p_1(x) y'' + p_2(x) y' + p_3(x) y = 0,$$

де $p_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ — неперервні при $x \in (a, b)$. Показати, що третій лінійно незалежний розв'язок рівняння можна знайти за формулою

$$y_3 = y_2 \int \frac{y_1 e^{-\int p_1(x)dx}}{w^2[y_1, y_2]} dx - y_1 \int \frac{y_2 e^{-\int p_1(x)dx}}{w^2[y_1, y_2]} dx, \quad (x \in (a, b)),$$

де $w[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

Розв'язати дані лінійні рівняння, якщо один або два із частинних розв'язків цих рівнянь відомі ($y_1 = f_1(x)$, $y_2(x) = f_2(x)$).

250. $y'' + \frac{2y'}{x} - \frac{2y}{x^2} = 0, \; y_1(x) = \frac{1}{x}$.

251. $y'' + \frac{x \operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y' + \frac{\operatorname{tg} x}{x - \operatorname{tg} x} y = 0, \; y_1(x) = \sin x$.

252. $y'' + (2 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) y' + 2y \operatorname{tg}^2 x = 0, \; y_1(x) = \cos^2 x$.

253. $(1 - \ln x) x^2 y'' + xy' - y = 0, \; y_1(x) = x$.

254. $y'' - \frac{2y}{x^2} = 0, \; y_1(x) = \frac{1}{x}$.

255. $(x^2 - 2x) y'' - (x^2 - 2) y' + 2(x - 1) y = 0, \; y_1(x) = x^2$.

256. $(2x + 1) y'' + (4x - 2) y' - 8y = 0, \; y_1(x) = e^{-2x}$

257. $x(1 - x)^2 y'' - 2y = 0, \; y_1(x) = \frac{x}{1 - x}$.

258. $x^2 y'' - 2xy' + (4x + 2) y = 0, \; y_1(x) = x \cos 2x$.

259. $y'' - \frac{6y}{x^2} = 0, \; y_1(x) = x^3$.

260. $y'' - \frac{x(1 + 2 \operatorname{ctg} x)}{1 + x \operatorname{ctg} x} y' + \frac{1 + 2 \operatorname{ctg} x}{1 + x \operatorname{ctg} x} y = 0, \; y_1(x) = x$.

261. $xy'' + 2y' + xy = 0, \; y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

262. $(2x^3 - 3x^2) y'' - 2(2x^3 - 3x) y' + 12x(x - 1) y = 0$, $y_1(x) = x^3$.

263. $y'' + y' \operatorname{tg} x - y \cos^2 x = 0, \; y_1(x) = e^{\sin x}$.

264. $xy''' - y'' - xy' + y = -2x^3, \; y_1(x) = e^x; \; y_2(x) = x$.

265. $x^2(2x - 1) y''' + (4x - 3) xy'' - 2xy' + 2y = 0, \; y_1(x) = x$, $y_2(x) = \frac{1}{x}$.

266. $xy''' - y'' + xy' - y = x^2 - 3, \; y_1(x) = x, \; y_2(x) = \cos x$.

267. $(4x^3 - 6x^2 + 3) y''' - (8x^3 - 6x + 3) y'' + 12x(2x - 1) y' - 12(2x - 1) y = 0, \; y_1(x) = x, \; y_2(x) = e^{2x}$.

268. $(x^2 + 2) y''' - 2xy'' + (x^2 + 2) y' - 2xy = 0, \; y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = x^2$.

269. $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0, \; y_1(x) = x, \; y_2(x) = \frac{1}{x}$.

§ 4. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ІЗ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Фундаментальна система розв'язків $y_i(x)$ однорідного лінійного рівняння із сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n = 0 \tag{1}$$

грунтується на характері коренів характеристичного рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{2}$$

Тут можуть бути такі випадки:

1) якщо дійсне число $k = k_0$ є m-кратним коренем рівняння (2), то йому відповідає m лінійно незалежних розв'язків рівняння (1):

$$y_1 = e^{k_0 x}, \; y_2 = xe^{k_0 x}, \; \ldots, \; y_m = x^{m-1} e^{k_0 x};$$

2) якщо $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексних m-кратних коренів рівняння (2), то їм відповідає $2m$ лінійно незалежних розв'язків рівняння (1):

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_3 = xe^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$y_4 = xe^{\alpha x} \sin \beta x, \; \ldots, \; y_{2m-1} = x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$y_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння із сталими коефіцієнтами можна знайти методом варіації довільних сталих.

Якщо порядок рівняння (1) дорівнює двом: $y'' + py' + gy = 0$, то загальний розв'язок набуває одного з таких виглядів:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, якщо k_1 і k_2 дійсні і $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$, якщо $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, якщо $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

Частинний розв'язок y^* неоднорідного рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

можна знайти методом невизначених коефіцієнтів при спеціальних видах функції $f(x)$.

1. Якщо $f(x) = e^{ax} P_n(x)$, де $P_n(x)$ — многочлен степеня n і a не є коренем характеристичного рівняння

$$k^2 + pk + q = 0, \tag{3}$$

то частинний розв'язок y^* шукають у вигляді $y^* = e^{ax} Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ — многочлен степеня n з невідомими коефіцієнтами. Якщо a — корінь рівняння (3), то $y^* = x^r e^{ax} Q_n(x)$, де r — кратність кореня a ($r = 1$ або $r = 2$).

2. Якщо $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x]$, де $P_n(x)$, $R_m(x)$ — многочлени степенів n та m і $\alpha \pm \beta i$ не є коренем рівняння (3), то

$$y^* = e^{\alpha x}[Q_s(x) \cos \beta x + L_s(x) \sin \beta x],$$

де $Q_s(x)$, $L_s(x)$ — многочлени степеня $S = \max\{n, m\}$.
Якщо $\alpha \pm \beta i$ є коренем рівняння (3), то

$$y^* = xe^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + L_s(x)\sin\beta x].$$

Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь:

270. $y'' + 2y' - 3y = 0$. 271. $y'' + 3y' - 4y = 0$.
272. $y'' - 4y' + 3y = 0$. 273. $y'' + 4y = 0$.
274. $y'' + 6y' + 9y = 0$. 275. $4y'' + 12y' + 9y = 0$.
276. $y'' + 4y' + 5y = 0$. 277. $y'' + 2y = 0$.
278. $y'' + 3y' = 0$. 279. $6y'' + y' - y = 0$.
280. $9y'' - 12y' + 4y = 0$. 281. $y''' - 5y'' + 9y' - 5y = 0$.
282. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$.
283. $8y''' - 12y'' + 6y' - y = 0$. 284. $y''' - 7y'' + 9y' + 17y = 0$.
285. $2y''' + 3y'' - y = 0$. 286. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$.
287. $y^{IV} - 3y''' = 0$. 288. $y^{IV} - 8y' = 0$.
289. $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0$.

Визначити і записати структуру частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння по вигляду функції $f(x)$.

290. $3y'' + 2y' = f(x)$:
а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = \sin 2x$; в) $f(x) = xe^{-\frac{2}{3}x}$; г) $f(x) = e^x + x$.
291. $3y'' + 2y' - y = f(x)$:
а) $f(x) = x^3 + 1$; б) $f(x) = \cos 3x$; в) $f(x) = e^{-x}$;
г) $(x) = x^2e^{\frac{x}{3}} + 2x$.
292. $y'' + 6y' + 10y = f(x)$:
а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = \cos x + x^2$; в) $f(x) = x$;
г) $f(x) = e^{-3x}\sin x$.
293. $y'' + 10y' + 25y = f(x)$:
а) $f(x) = e^{-5x}$; б) $f(x) = e^{5x} + x$; в) $f(x) = \cos 5x$; г) $f(x) = xe^{-5x}$.
294. $y'' + 9y = f(x)$:
а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = x^3$; в) $f(x) = \cos 3x + x$;
г) $f(x) = x\sin 3x$.
295. $y'' + 2y' = f(x)$:
а) $f(x) = x\cos 2x$; б) $f(x) = x^3 + x$; в) $f(x) = x^2e^{-2x}$;
г) $f(x) = e^{2x} + 3x$.
296. $y'' + 10y' + 26y = f(x)$:
а) $f(x) = xe^{-5x}$; б) $f(x) = \cos x$; в) $f(x) = xe^{-5x}\sin x$;
г) $f(x) = x + e^{5x}$.
297. $y'' + 6y' - 7y = f(x)$:
а) $f(x) = e^x$; б) $f(x) = 3e^{2x} + x^2$; в) $f(x) = 2xe^x$; г) $f(x) = x^2e^{-7x}$
298. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$:
а) $f(x) = 3xe^{4x}$; б) $f(x) = (2x^2 + 1)e^{4x}$; в) $f(x) = 2e^{4x}$;
г) $f(x) = 3\sin 4x + x$.
299. $y'' + 16y = f(x)$:
а) $f(x) = xe^{4x}$; б) $f(x) = x\sin 4x$; в) $f(x) = \cos 4x$;
г) $f(x) = 2x^2 - x + \cos^2 x$.
300. $2y''' - 5y'' + 4y' - y = f(x)$:
а) $f(x) = x$; б) $f(x) = xe^x$; в) $f(x) = 3e^{x/2}$; г) $f(x) = \sin x + x$.
301. $y''' - 7y' + 6y = f(x)$:
а) $f(x) = 2xe^x$; б) $f(x) = 4x^2e^{-3x}$; в) $f(x) = 3e^{2x}$; г) $f(x) = x + \sin^2 x$.
302. $y''' - 3y'' - 9y' - 5y = f(x)$:
а) $f(x) = 3x^2e^{-x}$; б) $f(x) = 2xe^{-x}$; в) $f(x) = 4e^{5x}$;
г) $f(x) = 5x^2 - 1 + \cos^2 x$.
303. $y''' - 6y' + 12y' - 8y = f(x)$:
а) $f(x) = 3e^x$; б) $f(x) = \cos 2x$; в) $f(x) = (4x + 1)e^{2x}$;
г) $f(x) = x^2e^{2x} + 2$.
304. $y''' + y'' - 2y = f(x)$:
а) $f(x) = xe^{-x}\sin x$; б) $f(x) = e^{-x}$; в) $f(x) = 3xe^x$;
г) $f(x) = \cos x$.
305. $y^{IV} + y'' = f(x)$:
а) $f(x) = 3x + 1$; б) $f(x) = 2e^x\sin x$; в) $f(x) = 3\cos x$;
г) $f(x) = 4e^x + \sin^2 x$.
306. $y^{IV} - y = f(x)$:
а) $f(x) = 2xe^x$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = 3x\sin x$; г) $f(x) = e^{-x}$.
307. $y^{IV} + 8y'' + 16y = f(x)$:
а) $f(x) = e^{2x}$; б) $f(x) = xe^{-2x}$; в) $f(x) = 3x^2e^{2x}$; г) $f(x) = 3\sin 2x$.

Знайти загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

308. $y'' + y' = 2x - 1$.
309. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$.
310. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$. 311. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.
312. $y'' + y = 2\cos x - 4(x + 4)\sin x$. 313. $y'' + 3y' = 20e^{2x}$.
314. $y'' + 4y' + 5y = 52e^{3x}$. 315. $y'' - 3y' + 2y = x^3$.
316. $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$.
317. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$. 318. $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$.
319. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$. 320. $y'' + y' = \sin^2 x$.
321. $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$.
322. $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$.
323. $y'' + 16y = 8\cos 4x$. 324. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.
325. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$. 326. $y'' + 3y' = 16 - 6x$.

327. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)\ e^{-x}$.
328. $4y'' + 3y' - y = 11 \cos x - 7 \sin x$.
329. $3y''' + 5y'' + y' - y = -8e^{-x}$.
330. $y''' - 7y'' + 9y' + 17y = 32 \cos x + 16 \sin x$.
331. $27y''' - 27y'' + 9y' - y = 162\ e^{x/3}$.
332. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = -6e^{x} + 2 \cos x + 14 \sin x$.
333. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = -7xe^{-x}$.
334. $y''' + 3y'' + 4y' + 2y = e^{-x} + 2 \cos x - 4 \sin x$.
335. $y''' - 2y' + 4y = e^{x} \sin x$. 336. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^{x} + \cos x$.
337. $y^{\mathrm{IV}} - y = 5e^{x} \sin x$. 338. $y^{\mathrm{IV}} - 8y' = xe^{2x}$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

339. $y'' + 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.
340. $y'' - 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 7$.
341. $4y'' - 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$.
342. $y'' + 2y' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \sqrt{2}$.
343. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$.
344. $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
345. $y'' - 2y' + y = -2 + x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.
346. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.
347. $y'' + y' - 12y = (16x + 22)\ e^{4x},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5$.
348. $y'' - 2y' + 37y = 36e^{x} \cos 6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.
349. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2$.
350. $y'' - 4y = 8e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -8$.
351. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
352. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.
353. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.
354. $y'' + y = 2x \cos x \cos 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \frac{13}{32}$.
355. $y''' - y'' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1$.
356. $y''' - 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4$.
357. $y''' - 13y'' + 12y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 133$.
358. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0$.
359. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -6$.
360. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = -9$.
361. $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 6e^{3x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = 9$.
362. $y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$.
363. $y''' - 5y'' + 4y' + 10y = 18 \cos x + 12 \sin x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

364. $y''' + y'' - 2y = -4 \cos x - 2 \sin x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$.
365. $y''' + y'' + 4y' + 4y = -4 \cos 2x - 12 \sin 2x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 5$.
366. $y''' + 3y'' - 4y = -6e^{-2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 3$.
367. $y^{\mathrm{IV}} - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -4$.
368. $y^{\mathrm{IV}} - 10y'' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 8,\ y'''(0) = 24$.
369. $y^{\mathrm{IV}} + 10y'' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -9,\ y'''(0) = -27$.
370. $y^{\mathrm{IV}} + 8y'' + 16y = \cos x,\ y(0) = \frac{1}{9},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -\frac{1}{9},\ y'''(0) = 0$.
371. $y^{\mathrm{IV}} - y = xe^{x} + \cos x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{3}{8},\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = -\frac{3}{8}$.

Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь.

372. $y'' + y = \mathrm{ctg}\, x$. 373. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$. 374. $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$.
375. $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos x}$. 376. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}$.
377. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x^3}$. 378. $y'' + y = -\mathrm{ctg}^2 x$.
379. $y'' - y' = e^{2x} \sin (e^x)$. 380. $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$.
381. $y'' - 6y' + 9y = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}$. 382. $y'' + y = \frac{\sqrt{2}}{\sin^2 x \sqrt{\sin 2x}}$.
383. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$. 384. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.
385. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$. 386. $y'' - 2y' + 5y = e^x (3 + \mathrm{tg}\, 2x)$.
387. $y'' + 8y' + 17y = \frac{1}{e^{2x} \sin^3 x}$. 388. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.
389. $xy'' + y' = x^2$. 390. $x^2 y'' - xy' = 3x^3$.
391. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$.

Розв'язати системи лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами зведенням їх до однорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку.

392 $\begin{cases} x_t' = y, \\ y_t' = -x. \end{cases}$ 393. $\begin{cases} x_t' = -2x - 3y, \\ y_t' = -x. \end{cases}$ 394. $\begin{cases} x_t' = -2x, \\ y_t' = y. \end{cases}$

395. $\begin{cases} x'_t = -2x + y, \\ y'_t = -3x + 2y. \end{cases}$ 396. $\begin{cases} x'_t = 5x + 8y, \\ y'_t = 3x + 3y. \end{cases}$

397. $\begin{cases} x'_t = 6x + 3y, \\ y'_t = -8x - 5y. \end{cases}$ 398. $\begin{cases} x'_t = x - y, \\ y'_t = x + 3y. \end{cases}$ 399. $\begin{cases} x'_t = x - 2y, \\ y'_t = x + 3y. \end{cases}$

400. $\begin{cases} x'_t = x - 5y, \\ y'_t = 2x - y. \end{cases}$ 401. $\begin{cases} x'_t = 3x - y, \\ y'_t = 4x - y. \end{cases}$ 402. $\begin{cases} x'_t = 8y - x, \\ y'_t = x + y. \end{cases}$

403. $\begin{cases} x'_t = y - 7x, \\ y'_t = -2x - 5y. \end{cases}$ 404. $\begin{cases} x'_t = -x + y, \\ y'_t = 3x - 3y + 20\sin 2t. \end{cases}$

405. $\begin{cases} x'_t = 7x + y, \\ y'_t = -x + 5y + 14e^{6t}. \end{cases}$ 406. $\begin{cases} x'_t = -x + y, \\ y'_t = 25x - y + 6\cos 3t - 33\sin 3t. \end{cases}$

407. $\begin{cases} x'_t = 2x + 8y, \\ y'_t = -5x - 2y + \frac{1}{4}(18 + 33t - 18t^2). \end{cases}$

408. $\begin{cases} x'_t = 5x - 5y + 16(\sin 2t - \cos 2t), \\ y'_t = 3y + x. \end{cases}$

409. $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = -10x - 5y + 10 - 6t. \end{cases}$

410. $\begin{cases} x'_t = 3x + y, \\ y'_t = -6x - 4y + (6t + 1)e^{3t}. \end{cases}$

411. $\begin{cases} x'_t = -3x - 25y + 20e^{2t}, \\ y'_t = x + 3y. \end{cases}$

412. $\begin{cases} x'_t = 1 - \dfrac{2x}{t}, \quad x(1) = \dfrac{1}{3}, \\ y'_t = x + y - 1 + \dfrac{2x}{t}, \quad y(1) = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

413. $\begin{cases} x'_t = 4x + y - 36t, & x(0) = 0, \\ y'_t = -2x + y - 2e^t, & y(0) = 1. \end{cases}$

414. $\begin{cases} x'_t = -3x - 4y + 2t, & x(0) = 0, \\ y'_t = x + y + t, & y(0) = 0. \end{cases}$

415. $\begin{cases} x'_t = x - 2y - z, \\ y'_t = -x + y + z, \\ z'_t = x - z. \end{cases}$ 416. $\begin{cases} x'_t = 2x + y, \\ y'_t = x + 3y - z, \\ z'_t = 2y + 3z - x. \end{cases}$

417. $\begin{cases} x'_t = z + y - x, & x(0) = 1, \\ y'_t = z + x - y, & x(0) = 0, \\ z'_t = x + y + z, & z(0) = 0. \end{cases}$ 418. $\begin{cases} x'_t = y + z, & x(0) = 1, \\ y'_t = z + x, & y(0) = 1, \\ z'_t = x + y, & z(0) = 0. \end{cases}$

Глава 9

РЯДИ

§ 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття. Необхідна умова збіжності ряду

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ називають *рядом*, а u_n — *загальним членом ряду*; $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ — *частинною сумою ряду*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *збіжний* і S — *сума* цього ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — *розбіжний*.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$ збіжний при $|q| < 1$ і $S = \frac{a}{1-q}$ і розбіжний при $|q| > 1$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, то $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. (*Необхідна умова збіжності*).

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний. (*Достатня умова розбіжності*).

Написати найпростішу формулу n-го члена ряду.

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \cdots$. 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$

3. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$. 4. $\frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{7}{8} + \frac{10}{11} + \cdots$

5. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{5}{10} + \frac{7}{17} + \cdots$. 6. $\frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \frac{6}{3^6} + \frac{8}{3^8} + \cdots$

7. $\frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \cdots$.

8. $\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{2}{3 \cdot 2^3} + \frac{3}{5 \cdot 2^4} + \frac{4}{7 \cdot 2^5} + \cdots .$

9. $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 11} + \cdots .$

10. $\frac{2}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} + \frac{5}{\sqrt{3 \cdot 3^3}} + \frac{9}{\sqrt{4 \cdot 3^4}} + \cdots .$

Написати кілька перших членів ряду.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$. 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$. 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n+1)!}$. 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n^2+1}\right)^n$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$.

Користуючись означенням збіжності числового ряду, встановити, які ряди збігаються, і знайти їхні суми.

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n-1}}$. 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}$. 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$. 24. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$. 26. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. 29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$. 30. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+1)(3n+1)}{n(3n+4)}$.

Перевірити, чи виконується необхідна умова збіжності.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$. 32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n}$. 33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$. 35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n^2+1}}{4n^2-1}$. 36. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^{n/2}$. 38. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n^2+n+1}{5n^2+3n+2}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^{n^2}$. 40. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}$.

1.2. Знакододатні ряди. Достатні ознаки збіжності

Ознака порівняння. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні і $u_n \leqslant v_n$, $n = 1, 2, \ldots$, тоді якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Гранична ознака порівняння. Нехай ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ знакододатні, причому існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = a \neq 0$, тоді ряди або одночасно збіжні, або одночасно розбіжні.

Ознака Д'Аламбера. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Ознака Коші. Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то ряд збіжний при $l < 1$ і розбіжний при $l > 1$.

Інтегральна ознака Коші. Нехай задано ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots,$$

причому $f(x)$ додатна, неперервна і монотонно спадна функція на проміжку $[1; \infty)$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збіжний, якщо збіжний невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, і розбіжний, якщо цей інтеграл розбіжний.

Використовуючи ознаку порівняння, дослідити на збіжність.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}}{n^2+4}$. 42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3n^3+2}$. 43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(3n-2)^2}$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$. 45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$. 46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^n}$.

47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{2}{n+3}$. 48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 50. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}+2}{n\sqrt{n}+3}$.

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n+2)\cdot 2^n}$. 52. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+2)!}$. 53. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3^n}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$. 55. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n-4}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$.

56. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7\cdot 13\cdot 19\cdot\ \ldots\ \cdot(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\cdot\ \ldots\ \cdot n^3}$. 57. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^{n+1}}$.

58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ \ldots\ \cdot(2n)^2}$. 59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{5^n\cdot n!}$.

60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n!)^2}$. 61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n!}$. 62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(2n)!}$.

Використовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність.

63. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$. 64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3n^n}$. 65. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

66. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\ln^n(n+1)}$. 67. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{5^{n+1}}$. 68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{2n^2+1}{5n^2+3}\right)^n}$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{5^n}$. 70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$. 71. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^3}$.

72. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.

Використовуючи інтегральну ознаку Коші, дослідити на збіжність.

73. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n+5}$. 74. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+4}}$. 75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^4+4}$.

76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n^2+3}$. 77. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$. 78. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

79. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt[3]{n})}$. 80. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 3^{\frac{1}{n}}$.

Дослідити ряди на збіжність.

81. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n-1)!\cdot 5^n}$. 82. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n!}$. 83. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{(2n^2+3n+1)^2}$.

84. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\cdot\ln\ln n}$. 85. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}+3}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$. 86. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3n^2}$.

87. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{\pi}{n}$. 88. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{3}{n+1}\right)$.

89. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{2^n}$. 90. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-3}}{2n}$.

91. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^2\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. 92. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$. 93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\mathrm{arctg}\,n}}{n^2+1}$.

94. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{2n^2+4n+3}{2n^2+3n+1}\right)$. 95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{(2n)!}$. 96. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}^n\,\frac{2n-1}{2n+1}$.

97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+\cos n}{n}$. 98. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n-1}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$.

99. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^3\frac{2\pi}{\sqrt{n+1}}$. 100. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n^2}}{(2n)!}$. 101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3\sqrt{n}}$.

102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$. 103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\arcsin^3\frac{1}{2^n}$. 104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}}{n^3}$.

105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n/3}$. 106. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3^n}{(\ln n)^n}$ 107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$. 109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin^n\frac{n+1}{n+3}$. 110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$.

111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n^n}}$. 112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n^2+n}-\sqrt{4n^2-1}}{n^2}$.

113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+4}{n\cdot 4^n}}$. 114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(3n-1)\sqrt[3]{n^2+1}}$.

115. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n} (n!)^2}{(3n)!}$. 116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (5n-3)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n-3)}$.

117. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$. 118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^4 n+1)}$. 119. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n^5}$.

120. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[4]{e}-1)$.

Довести.

121. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \ (a > 0)$. 122. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{a^{n!}} = 0, \ (a > 1)$.

123. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$. 124. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

125. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n^2}}{[(3n)!]^n} = 0$. 126. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0$.

127. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$. 128. $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2^n)!} = 0$.

129. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n!}} = 0$. 130. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}} = 0$.

1.3. Знакозмінні ряди

Розглянемо ряд, знаки членів якого чергуються, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots$, де $u_n > 0$.

Ознака Лейбніца. Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$, ($u_n > 0$) виконуються умови:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$,
2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

тоді цей ряд збігається, його сума додатна і не перевищує першого члена цього ряду.

Абсолютна і умовна ознаки збіжності. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — знакозмінний ряд, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ утворений з модулів цього ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, причому абсолютно. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називають умовно збіжним.

У наступних задачах встановити, які ряди збігаються абсолютно, умовно чи розбігаються.

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 132. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$.

133. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n+1}$. 134. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{2n+1}}$.

135. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$. 136. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$.

137. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+2}}$. 138. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 3^n}{(n+1) \cdot 5^n}$.

139. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}$. 140. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}$.

141. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n$. 142. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$.

143. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$. 144. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3n^2+4}$.

145. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$. 146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+1}}$.

147. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$. 148. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)!!}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

149. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4^{n+1}}$. 150. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n n!}{(2n+2)!!}$.

151. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1^n)(2n-1)}{5^n+1}$. 152. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n^n}$.

153. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{(2n-1)\pi}{4}$. 154. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\ln \frac{n}{n+1}\right)^n$.

155. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n}$. 156. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{2^n}$.

157. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+2}$. 158. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

159. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt{n^3}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. 160. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n}{5^n}$.

1.4. Ряди з комплексними членами

Вираз вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$, де $z_n = x_n + iy_n$ — комплексні числа, називають *числовим рядом з комплексними членами.*

Для того щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *був збіжним, необхідно і достатньо, щоб ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *були збіжними.*

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$, *де* $|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ *збіжний, то збіжний, причому абсолютно, і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Дослідити на збіжність ряди з комплексними членами.

161. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{3^n}$. **162.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)}{2^n}$.

163. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{n+1}$. **164.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

165. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$. **166.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(n+i)}$.

167. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2+1}$. **168.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+i)}{5^n}$.

169. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i+1}{n+1}$. **170.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{4^n} + \frac{i}{n^2+1}\right]$.

171. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n}{2n-1} + \frac{ni}{3n^2+1}\right]$. **172.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n+(2n-1)i}\right]^2$.

173. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(3+i)^n}$. **174.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \frac{i}{2^n}\right]$.

175. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+in}{4n^2+1}$. **176.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3}\right]^n$.

177. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-i}{5}\right)^n$. **178.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(n-i)-n(n-1)}{n(2n+i)+n^2}\right]^n$.

179. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^{2n}}{3^n}$. **180.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{3^n} + \frac{(-1)^n i}{n^2}\right]$.

§ 2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Функціональні ряди. Ознака Вейєрштрасса

Вираз виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називають *функціональним рядом,* якщо $u_n(x)$ — функції.

Ознака Вейєрштрасса. Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ абсолютно і рівномірно збіжний на відрізку $[a; b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ такий, що $|u_n(x)| \leqslant \alpha_n$, $x \in [a; b]$.

Знайти область збіжності функціонального ряду.

181. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$. **182.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

183. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+x)^n}$. **184.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$.

185. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. **186.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

187. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$. **188.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$.

189. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x+2)^n}$. **190.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

191. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n$. **192.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{3^n}$.

193. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{x}{7^n}$. **194.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$.

195. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x-3)^n}$. **196.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n (1+x^2)$.

197. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{x}{3^n}$. **198.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x-4)^n}{5^n}$.

Довести рівномірну збіжність у зазначених проміжках таких функціональних рядів.

199. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$, $(-\infty; \infty)$. **200.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+x^2)}$, $(-\infty; \infty)$.

201. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}\sqrt{1+(2n-1)x}}$, $(0;\ \infty)$.

202. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n^3+1}}$, $(-\infty;\ \infty)$.

203. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\cos^2 x}$, $(-\infty;\ \infty)$. 204. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$, $(0;\ \infty)$.

205. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{5^n}$, $(-\infty;\ \infty)$. 206. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n\sqrt{1+nx}}$, $(0;\ \infty)$.

207. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2x}{3n^2+1}$, $(-\infty;\ \infty)$. 208. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(2n)!}$, $(-\infty;\ \infty)$.

209. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{(2n+1)!}$, $(-\infty;\ \infty)$.

210. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+2n-1)(x+2n+1)}$, $(0;\ \infty)$.

2.2. Поняття степеневого ряду. Теорема Абеля

Функціональний ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ називають *степеневим рядом*.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = x_0$, то він абсолютно збіжний для всіх значень x, що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$. Якщо при $x = x_1$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ розбіжний, то він розбіжний всюди, де $|x| > |x_1|$.*

Для визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневого ряду складемо ряд з модулів членів ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, тобто $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Припустимо, що для коефіцієнтів степеневого ряду існує границя

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R \text{ або } \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

Число R називається *радіусом збіжності степеневого ряду*, а інтервал $(-R;\ R)$ — його *інтервалом збіжності*. Питання збіжності ряду при $x = \pm R$ розв'язується для кожного ряду окремо. Якщо $R = +\infty$, то ряд є збіжним на всій числовій осі, а при $R = 0$ ряд збігається лише в точці $x = 0$.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ визначається за тими самими формулами, що й ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Але інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R;\ x_0 + R)$.

Знайти область збіжності поданих нижче степеневих рядів.

211. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)!}$. 212. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

213. $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. 214. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n\cdot 3^n}$.

215. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x^n}{n!}$. 216. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n x^n$.

217. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$. 218. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{(n+1)^2}$.

219. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$. 220. $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}$.

221. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 x^n}{(2n)!}$. 222. $\sum_{n=1}^{\infty} 7^n x^n$.

223. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\,x^{n+1}}{n^{n+1}}$. 224. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^n+1}$.

225. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(2n+1)!}$. 226. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{\sqrt{(4n+3)\cdot 5^n}}$.

227. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$. 228. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{4n^2+1}}$.

229. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n+1)\cdot 7^n}$. 230. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}\left(\frac{x}{3}\right)^n$.

231. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(n^2+3)\cdot 3^n}$. 232. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

233. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$. 234. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

235. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. 236. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{4^n}$.

237. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{\sqrt{n}\,(n^2+1)}$. 238. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3x+2)^n}{(n^2+1)\,2^n}$.

239. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-3x)^n}{\sqrt{n+1}\cdot 5^n}$. 240. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,(2-x)^n$.

241. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3-2x)^n}{n^2}$. 242. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2x)^n}{(2n-1)\sqrt{n}}$.

243. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$. 244. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{3n+2}$.

245. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{2^n\sqrt{n}\,(n+1)}$. 246. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+2}{n+3}$.

247. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+2x)^n}{(2n)!}$. 248. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+1)^n\operatorname{tg}\frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

249. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^{n^2}}{(n+1)^n}$. 250. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+x)^n\operatorname{arctg}^n\frac{n^2+1}{n^2+2}$.

Знайти суми поданих рядів.

251. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n(n+1)}$. 252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

253. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 4^{2n-1}}$. 254. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n3^n}$.

255. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. 256. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 5^n}$.

257. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n-3}$. 258. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)\cdot 2^n}$.

259. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2n+1)}{2^{n+2}}$. 260. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

261. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}}$. 262. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-2}$.

263. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{3^{2n}(2n+1)}$. 264. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

265. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(3n+1)\,x^{3n}$. 266. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^{2n+1}$.

267. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2+1)^{n+1}}{n+1}$. 268. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n\,(x-3)^{n-1}$.

269. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)x^n$. 270. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+n)\,x^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Дослідити на збіжність степеневі ряди в комплексній області.

271. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}i^n z^n$. 272. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{n\cdot 5^n}$.

273. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+ni)\,z^n$. 274. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{4^n}$.

275. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$. 276. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

277. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n\,(2i+1)^n}$. 278. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n^2(3+4i)}$.

279. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{n!}$. 280. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2z+1)^n}{n+i}$.

281. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n\sqrt{n}+2i}$. 282. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n^2+i}$.

283. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+i}{1+ni}\right)^n(z+i)^n$. 284. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+3n}{1+n}\right)^{2n}(z+1)^{2n}$.

285. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i+n}{i+3n}\right)^n(z-1)^n$. 286. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n+i}$.

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4z+i)^n}{(2n+i)^2}$. 288. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{(4+3i)^n}$.

289. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i)^{2n}}{n^3(2+i)^{2n}}$. 290. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(n^2+i)(1+i)^{2n}}$.

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n^2 2^n}$. 292. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-3i)^n}{(n^3+1)\cdot 3^n}$.

2.3. Розвинення елементарних функцій у ряди Тейлора і Маклорена. Наближені обчислення

Ряд Тейлора має вигляд:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

При $a = 0$ маємо ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \cdots .$$

Розвинення деяких функцій у ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (x \in (-\infty;\ \infty));$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \quad (x \in (-\infty;\ \infty));$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \quad (x \in (-\infty;\ \infty));$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{n!}x^n \cdots \quad (x \in (-1;\ 1));$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots x^n + \cdots \quad (x \in (-1;\ 1));$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots +$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad (x \in (-1;\ 1]);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad (x \in [-1;\ 1]);$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!\cdot 5}x^5 +$$

$$+ \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n (n-1)!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in (-1;\ 1));$$

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 2\left\{x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\right\} \quad (x \in (-1;\ 1)).$$

Розвинути в ряд Тейлора функції.

293. $f(x) = \ln x$ за степенями $(x-1)$.

294. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ за степенями $(x+1)$.

295. $f(x) = e^x$ за степенями $(x+2)$.

296. $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$ за степенями $(x+2)$.

297. $f(x) = \cos^2 x$ за степенями $\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

298. $f(x) = \frac{1}{x}$ за степенями $(x-1)$.

299. $f(x) = \sqrt{x^3}$ за степенями $(x-1)$.

300. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ за степенями $(x-1)$.

301. $f(x) = \frac{1}{4+3x}$ за степенями $(x+2)$.

302. $f(x) = \frac{1}{5+2x}$ за степенями $(x-3)$.

303. $f(x) = \ln(5x+3)$ за степенями $(x-1)$.

304. $f(x) = \ln\frac{1}{x^2-2x+2}$ за степенями $(x-1)$.

Розвинути в ряд Маклорена функції.

305. $f(x) = xe^{-2x}$. **306.** $f(x) = \cos^2 x$.

307. $f(x) = \sin\frac{x}{3}$. **308.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

309. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **310.** $f(x) = e^{-x}(1+x)$.

311. $f(x) = e^x \sin x$. **312.** $f(x) = x^3 e^x$.

313. $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$. **314.** $f(x) = x^2\ln(1+x)$.

315. $f(x) = \sin 2x$. **316.** $f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$.

317. $f(x) = 3^x$. **318.** $f(x) = x^2\ln(1+x^2)$.

319. $f(x) = \frac{\sin 3x}{x}$. **320.** $f(x) = \operatorname{ch}^2 2x$.

Розвинувши функції в ряд Маклорена, знайти такі границі.

321. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(\operatorname{tg} x - \sin x) - x^3}{x^5}$. **322.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right)$.

323. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **324.** $\lim\limits_{x\to 0}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

325. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3 \sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$. 326. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$.

327. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1+x^2}\cos x}{\operatorname{tg}^4 x}$. 328. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)e^{-x}-(1-x)e^{x}}{\arcsin x-\operatorname{arctg} x}$.

Обчислити з точністю до 0,0001.

329. $\sqrt[5]{15}$. 330. $\sqrt[5]{250}$. 331. $\sin 18°$.
332. $\cos 10°$. 333. $\ln 1{,}3$. 334. $\ln 3$.
335. $\arcsin\frac{1}{5}$. 336. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 337. $\cos 3°$.
338. $\sqrt[3]{66}$. 339. e^{-1}. 340. $\sqrt[3]{e}$.

Знайти первісну і обчислити інтеграли з точністю до 0,001.

341. $\int\limits_0^{1/4} e^{-x^2}dx$. 342. $\int\limits_0^{1/4}\sin x^2 dx$.

343. $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$. 344. $\int\limits_0^{2}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{x^2}dx$.

345. $\int\limits_0^{1}\sqrt[3]{x}\sin x\,dx$. 346. $\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

347. $\int\limits_{0,1}^{1/3}\frac{dx}{1+x^4}$. 348. $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

349. $\int\limits_{0,1}^{0,2}\frac{e^{-x}}{x^3}dx$. 350. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\cos x}{x}dx$.

Знайти три перших (відмінних від нуля) члени розвинення в ряд розв'язку рівняння, які задовольняють початкові умови.

351. $y' = xy + \ln(x+y)$, $y(1) = 0$.
352. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$.
353. $2y' - (x+y)\ y - e^{x} = 0$, $y(0) = 2$.
354. $y' - 4y + 2xy^2 - e^{3x} = 0$, $y(0) = 2$.
355. $y' + y\cos x - 3e^{x}y^2 - \sin x = 0$, $y(0) = 1$.
356. $y'' = y\cos y' + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{\pi}{3}$.
357. $y'' = x^2 + y^2$, $y(-1) = 0$, $y'(-1) = 0$.
358. $y'' = (y')^2 + xy - 2x$, $y(2) = 0$, $y'(2) = 2$.
359. $y'' = x\sin y' + \cos y'$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.
360. $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Знайти п'ять перших членів розвинень у ряд розв'язків рівнянь, які задовольняють початкові умови.

361. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$.
362. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$. 363. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$.
364. $y' = 2x - y$, $y(0) = 2$. 365. $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$.
366. $y'' = y\cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
367. $y'' = (2x-1)\ y - 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
368. $y'' + y\cos x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
369. $y'' + y' = x^2 y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
370. $y'' - xy' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

2.4. Рівняння і функції Бесселя

Рівняння Бесселя має вигляд

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)\,y = 0, \text{ де } \nu - \text{const}.$$

Якщо ν — не ціле число, то загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

Якщо ν — ціле, то

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 K_\nu(x),$$

де

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)};$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k-\nu+1)};$$

$$K_\nu(x) = J_\nu(x)\ln x + x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Розв'язати рівняння Бесселя.

371. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.
372. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0$.
373. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{4}{9}\right)y = 0$.
374. $x^2y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$.
375. $y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{9}y = 0$. 376. $y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0$.
377. $x^2y'' - 2xy + 4(x^4 - 1)\,y = 0$. 378. $xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0$.
379. $y'' + \frac{5}{x}y' + y = 0$. 380. $y'' + \frac{3}{x}y' + 4y = 0$.

§ 3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Тригонометричні ряди

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ функція. Тоді ряд Фур'є цієї функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна на $[-\pi;\ \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx; \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$ непарна на $[-\pi;\ \pi]$, то її ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Для довільної інтегровної 2π-періодичної функції $\varphi(x)$ виконується рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx,$$

де a — довільне число.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-l;\ l]$, має період $2l$ і на відрізку $[-l;\ l]$ кусково-диференційовна. Тоді

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Якщо функція $f(x)$ парна на $[-l;\ l]$, то маємо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l},$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l}\,dx,$$

а якщо $f(x)$ непарна на $[-l;\ l]$, то

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l},$$

де

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

Розвинути в ряд Фур'є функції.

381. $f(x) = x - \pi\ (-\pi;\ \pi]$. **382.** $f(x) = x + \pi,\ (-\pi;\ \pi]$.

383. $f(x) = \begin{cases} -1, & (-\pi;\ 0), \\ 1, & [0;\ \pi] \end{cases}$ та знайти суму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

384. $f(x) = \begin{cases} 1, & (-\pi;\ 0), \\ 3, & [0;\ \pi]. \end{cases}$

385. $f(x) = |x|$ на $(-\pi;\ \pi]$. Користуючись результатом, знайти суму ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

386. $f(x) = x^2$ на проміжку: а) $(-\pi;\ \pi]$; б) $(0;\ 2\pi]$. Користуючись здобутим результатом, знайти суму рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{та} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

387. $f(x) = x(\pi - x)$ на $(0;\ \pi]$ по синусах та знайти $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$.

388. $f(x)=\begin{cases}\pi, & (-\pi;\ 0)\\ \pi-x, & [0;\ \pi]\end{cases}$ на $(-\pi;\ \pi]$.

389. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ на $(0;\ 2\pi]$.

390. $f(x)=\begin{cases}2, & \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\\ 0, & \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]\end{cases}$ на $(0;\ \pi]$ по синусах.

391. $f(x)=\begin{cases}x, & \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\\ \pi-x, & \left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]\end{cases}$ на $(0;\ \pi]$ по косинусах.

392. $f(x)=\cos 2x$ на $(0;\ \pi]$ по синусах.

393. $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ на $(0;\pi]$ по косинусах та знайти $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

394. $f(x)=x^2$ на $(0;\ \pi]$ по синусах.

395. $f(x)\begin{cases}0, & (-2;\ 0),\\ 2, & [0;\ 2]\end{cases}$ на $(-2;\ 2]$.

396. $f(x)=x$ на $(-1;\ 1]$.

397. $f(x)=\begin{cases}-x, & (-2;\ 0),\\ 0, & [0;\ 2]\end{cases}$ на $(-2;\ 2]$.

398. $f(x)=4-x^2$ на $(-2;\ 2]$.

399. $f(x)=\begin{cases}1, & (-1;\ 0),\\ 1-x, & [0;\ 1]\end{cases}$ на $(-1;\ 1]$.

400. $f(x)=e^x$ на $(-2;\ 2]$. 401. $f(x)=|x|$ на $(-2;\ 2]$.

402. $f(x)=1-x$ на $(0;\ 1]$ по косинусах.

403. $f(x)=x(2-x)$ на $(0;\ 2]$ по синусах.

404. Проінтегрувавши почленно розвинення

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n},$$

розвинути в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi;\ \pi]$ функції:
а) $f(x)=x^2$, б) $f(x)=x^3$, в) $f(x)=x^4$.

405. $f(x)=4-x$ на $(2;\ 6]$, $T=4$.

406. $f(x)=x-4\pi$ на $(4\pi;\ 5\pi]$ по синусах.

407. $f(x)=|\sin 3x|$ на $(-\pi;\ \pi]$.

3.2. Комплексна форма ряду Фур'є

Комплексна форма ряду Фур'є на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{inx},$$

де $C_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\,e^{-inx}\,dx,\ n=0,\ \pm1,\pm2,\ldots$ — комплексні коефіцієнти Фур'є.

Аналогічно комплексна форма ряду Фур'є на відрізку $[-l;\ l]$ має вигляд

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{\frac{\pi nx}{l}i},$$

$$C_n=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,e^{-\frac{\pi nx}{l}i}\,dx,\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots.$$

Розвинути в комплексний ряд Фур'є функції.

408. $f(x)=e^x$ на $[-\pi;\ \pi]$. 409. $f(x)=\begin{cases}1, & [-1;\ 0),\\ 0, & [0;\ 1]\end{cases}$ на $[-1;\ 1]$.

410. $f(x)=1-e^{-x}$ на $[-1;\ 1]$. 411. $f(x)=\begin{cases}0, & [-\pi;\ 0),\\ e^{-x}, & [0;\ \pi]\end{cases}$ на $[-\pi;\ \pi]$.

412. $f(x)=x^2$ на $[-\pi;\ \pi]$.

413. $f(x)=e^x$ на $[-2;\ 2]$.

414. $f(x)=x$ на $[-\pi;\ \pi]$.

415. $f(x)=\begin{cases}0, & (-1;\ 0),\\ 1, & [0;\ 0{,}5]\\ 0, & (0{,}5;\ 1)\end{cases}$ на $[-1;\ 1]$.

416. $f(x)=|x|$ на $[-\pi;\ \pi]$.

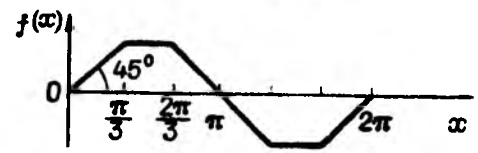


Рис. 9.1

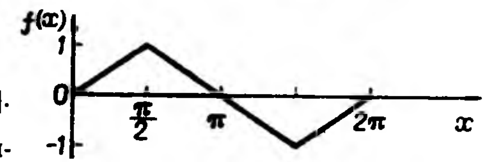


Рис. 9.2

Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x+2\pi)=f(x)$.

417. Рис. 9.1. 418. Рис. 9.2. 419. Рис. 9.3. 420. Рис. 9.4.
421. Рис. 9.5. 422. Рис. 9.6. 423. Рис. 9.7.

Розвинути в ряд Фур'є функцію.

424. $f(x+6)=f(x)$. Рис. 9.8. 425. $f(x+4)=f(x)$. Рис. 9.9.
426. $f(x+4)=f(x)$. Рис. 9.10.

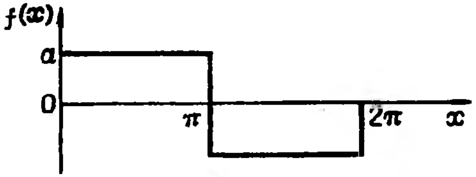


Рис. 9.3

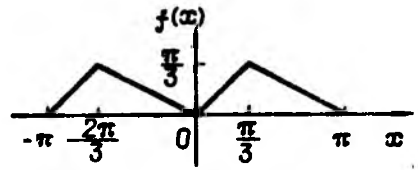


Рис. 9.4

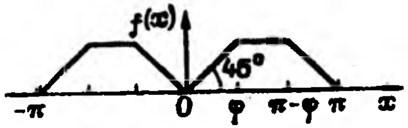


Рис. 9.5

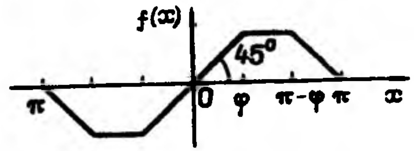


Рис. 9.6

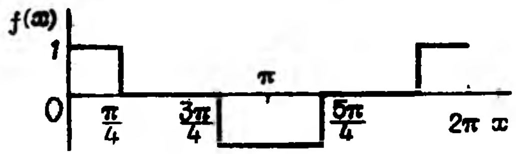


Рис. 9.7

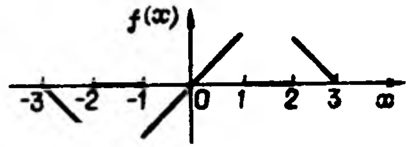


Рис. 9.8

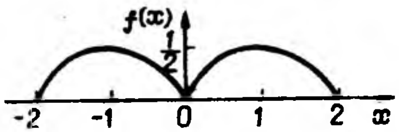


Рис. 9.9

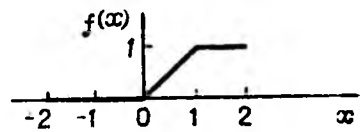


Рис. 9.10

3.3. Ортогональність системи функцій

Система функцій $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на $[a;\ b]$, якщо $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n)$.

Система функцій $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна на $[a;\ b]$ з вагою $\rho(x) \geqslant 0$, якщо $\int\limits_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n)$.

Довести, що система функцій ортогональна.

427. $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0;\ \pi]$. **428.** $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $[0;\ \pi]$.

429. $\{\sin nx \cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ на $[-\pi;\ \pi]$. **430.** $\left\{\sin \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на $[-l;\ l]$.

431. $\left\{\cos \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на $[-l;\ l]$.

432. $\left\{\cos \frac{\pi n x}{l},\ \sin \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на $[-l;\ l]$.

433. $\{\sin(2n+1)\,x\}_{n=0}^{\infty}$ на $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

434. $\left\{\sin \frac{(2k+1)\,\pi x}{2}\right\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0;\ l]$.

435. $\left\{\cos \frac{(2k+1)\,\pi x}{2}\right\}_{k=0}^{\infty}$ на $[0;\ l]$.

Довести, що система функцій ортогональна з вагою $\rho(x) \geqslant 0$.

436. $\left\{\frac{1}{x} \sin \frac{\pi n x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на проміжку $[0;\ l]$, $\rho(x) = x^2$.

437. $\left\{\frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ на проміжку $[-1;\ 1]$, $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$.

§ 4. ІНТЕГРАЛ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Вираз

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} (A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x)\,d\alpha$$

називається *інтегралом Фур'є*, де

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt \quad \text{і} \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Якщо функція $f(x)$ — парна, то

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} A(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha, \text{ де } A(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt.$$

Якщо функція $f(x)$ — непарна, то

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} B(\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha, \text{ де } B(\alpha) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt.$$

Функцію $F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos\alpha t\,dt$ — називають *косинус-перетворенням*, а $F_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t\,dt$ — *синус-перетворенням* функції $f(x)$.

Комплексна форма інтеграла Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha x}d\alpha.$$

Функцію $F(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\alpha t}\, dt$ називають *перетворенням Фур'є* функції $f(x)$, а $|F(\alpha)|$ — *амплітудним спектром.*

Зобразити за допомогою інтеграла Фур'є такі функції.

438. $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$

439. $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -1, & -1 \leqslant x < 0 \end{cases}$ та обчислити $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t}\, dt.$

440. $f(x) = e^{-x^2}, \quad (-\infty, \infty).$

441. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \quad f(-x) = f(x).$

442. $f(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty, \quad f(-x) = -f(x).$

443. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

444. $f(x) = \begin{cases} 2, & |x| < 2, \\ 1, & x = 2, \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$ та обчислити $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$

445. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Зобразити за допомогою комплексного інтеграла Фур'є такі функції.

446. $f(x) = e^{-2|x|}.$ **447.** $f(x) = xe^{-|x|}.$

448. $f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, \quad a > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ **449.** $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Знайти косинус- та синус-перетворення функцій.

450. $f(x) = e^{-x}, \quad (0;\ \infty).$ **451.** $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < -\frac{1}{2}, \\ 0, & -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

452. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \pi, \\ 0, & x \geqslant \pi. \end{cases}$ **453.** $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$

Знайти перетворення Фур'є функцій.

454. $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{x}{2}, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$ **455.** $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$

456. $f(x) = xe^{-|x|}.$ **457.** $f(x) = e^{-k^2|x|}.$

458. $f(x) = \begin{cases} -e^{x}, & -1 \leqslant x < 0, \\ e^{-x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

459. Знайти спектральну густину та її модуль прямокутного імпульсу

$$f(x) = \begin{cases} B, & 0 \leqslant x \leqslant \tau, \\ 0, & x < 0,\ x > \tau. \end{cases}$$

460. Знайти спектральну густину та її модуль експоненціального імпульсу

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-ax}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

461. Знайти спектральну густину зміщеного прямокутного імпульсу

$$f(x) = \begin{cases} A, & \frac{\tau}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\tau}{2}, \\ 0, & x < \frac{\tau}{2},\ x > \frac{3\tau}{2}. \end{cases}$$

Глава 10

КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ ТА ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

§ 1. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Обчислення подвійного інтеграла

Якщо область D правильна в напрямі осі Oy, тобто

$$D = \{(x;\ y) \mid \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ a \leqslant x \leqslant b\},$$

е $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ — неперервні на сегменті $[a;\ b]$ функції, то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)\, dy.$$

Якщо область D правильна в напрямі осі Ox, тобто

$$D = \{(x;\ y) \mid \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\quad c \leqslant y \leqslant d\},$$

де $\psi_1(y)$ і $\psi_2(y)$ — неперервні на сегменті $[c;\ d]$ функції, то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,\ y)\, dx.$$

Якщо неперервно диференційовні функції $x = x(u;\ v)$, $y = y(u,\ v)$ взаємно однозначно відображають область D в область D_1 і якобіан

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x(u,\ v),\ y(u,\ v))\,|J|\,dudv.$$

Зокрема, при переході до полярних координат ρ і φ за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ якобіан $J = \rho$ і якщо $D_1 = \{(\varphi;\ \rho) \mid \rho_1(\varphi) \leqslant \rho \leqslant \rho_2(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\}$, то

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\,dxdy = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho d\rho.$$

У задачах 1—23 обчислити повторні інтеграли.

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 (x - y)\,dy$. 2. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,dx$. 3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \sqrt{xy}\,dx$.

4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-1}^0 ye^{xy}dx$. 5. $\int\limits_2^3 dx \int\limits_1^2 \sqrt{x - y}\,dy$. 6. $\int\limits_2^4 dy \int\limits_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

7. $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x + y)^2}$. 8. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{1 + y^2}$. 9. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{ydx}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$.

10. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\pi/2} x\sin(x + y)\,dy$. 11. $\int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 x^2ye^{xy}dx$.

12. $\int\limits_0^{\pi/2} dx \int\limits_0^2 x^2y\cos(xy^2)\,dy$. 13. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^5 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{24 + \rho^2}}$.

14. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\sin^2\varphi d\rho$. 15. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (3x + 2y)\,dy$.

16. $\int\limits_{-4}^1 dx \int\limits_{3x}^{4-x^2} (y - x)\,dy$. 17. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{x} \frac{xdy}{x^2 + y^2}$.

18. $\int\limits_0^{2\pi} dy \int\limits_0^{2+\sin y} \frac{x}{2}\,dx$. 19. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dx$.

20. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dy$. 21. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \rho\sin\varphi d\rho$.

22. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2\sin^2\varphi d\rho$. 23. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^3 d\rho$.

У задачах 24—30 обчислити повторним інтегруванням подвійні інтеграли, якщо D — прямокутник:

$$D = \{(x;\ y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}.$$

24. $\iint\limits_D (x + y)\,dxdy$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $1 \leqslant y \leqslant 2$.

25. $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,dxdy$; $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

26. $\iint\limits_D xy(x - y)\,dxdy$; $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

27. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x - y)^2}$; $1 \leqslant x \leqslant 2$, $3 \leqslant y \leqslant 4$.

28. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x + 2y)^2}$; $2 \leqslant x \leqslant 5$, $1 \leqslant y \leqslant 3$.

29. $\iint\limits_D y\cos^2 x\,dxdy$; $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant a$.

30. $\iint\limits_D \ln(x + y)\,dxdy$; $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

У задачах 31—45 для зазначених областей D записати подвійні інтеграли від функції $f(x,\ y)$ у вигляді повторних, взятих у різних напрямах.

31. D — прямокутник з вершинами $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(4;\ 3)$, $E(4;\ 1)$.

32. D — прямокутник з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 0)$, $B(3;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

33. D — трикутник з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$.

34. D — трапеція з вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0,\ 1)$.

35. D — паралелограм з вершинами $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$, $C(2;\ 7)$, $E(1;\ 5)$.

36. D — фігура, обмежена лініями $y = 0$, $y = x$, $x = 5$.

37. D — фігура, обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 5$.

38. D — фігура, обмежена лініями $y = x$, $y = x - 4$, $y = 0$, $y = 2$.

39. D — фігура, обмежена кривою $x^2 + y^2 - 8x = 0$.

40. D — фігура, що міститься в першому квадранті і обмежена лініями $y = x$, $x^2 + y^2 = 2$, $y = 0$.

41. D — фігура, що міститься в першому квадранті і обмежена лініями $x = 0$, $2y + x^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$.

42. D — фігура, обмежена лініями $x = 0$, $y = x^3$, $y = 2 - x^2$.

43. D — круговий сектор, зображений на рис. 10.1.

44. D — заштрихована фігура, зображена на рис. 10.2 (обмежена дугою кола і прямими).

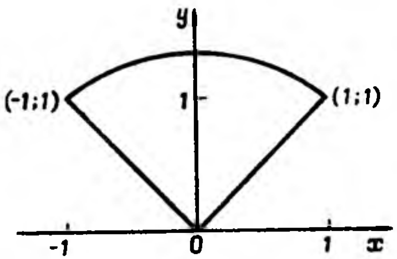


Рис. 10.1

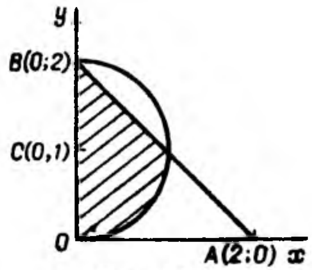


Рис. 10.2

45. D — заштрихована фігура, зображена на рис. 10.3 (обмежена півколом, параболою і прямою).

У задачах 46—68 змінити порядок інтегрування.

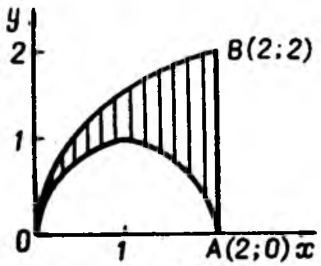


Рис. 10.3

46. $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)\, dx$.

47. $\int_0^4 dx \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy$.

48. $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx$.

49. $\int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx$.

50. $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} f(x, y)\, dy$. **51.** $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\, dy$.

52. $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y)\, dy$. **53.** $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}} f(x, y)\, dy$.

54. $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy$. **55.** $\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y)\, dy$.

56. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx$. **57.** $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y)\, dy$.

58. $\int_{-6}^2 dy \int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\, dx$. **59.** $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx$.

60. $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y)\, dy$. **61.** $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y)\, dy$.

62. $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$. **63.** $\int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

64. $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$.

65. $\int_{-3}^0 dx \int_{-x}^3 f(x, y)\, dy + \int_0^3 dx \int_x^3 f(x, y)\, dy$.

66. $\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int_{-\sqrt{2}/2}^{0} dy \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx$.

67. $\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\, dy + \int_2^4 dx \int_0^{10-x} f(x, y)\, dy + \int_4^7 dx \int_{x-4}^{10-x} f(x, y)\, dy$.

68. $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y)\, dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y)\, dy$.

У задачах 69—83 обчислити задані інтеграли.

69. $\iint_D (x + y)\, dxdy$, де область D обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

70. $\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$, де область D обмежена прямими $y = 0$, $y = x$, $x = 1$.

71. $\iint_D (x + y)\, dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x$, $y^2 = x$.

72. $\iint_D (x - y)\, dxdy$, де область D обмежена прямими $y = 0$, $y = x$, $x + y = 2$.

73. $\iint\limits_D xydxdy$, де область D обмежена лініями $y^2 = 2x$, $x = 2$.

74. $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, де область D обмежена лініями $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

75. $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\, dxdy$, де область D обмежена лініями $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$.

76. $\iint\limits_D \cos(x + y)\, dxdy$, де область D обмежена прямими $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.

77. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{ax - x^2}}$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$.

78. $\iint\limits_D \sqrt{xy - y^2}dxdy$, де область D — трапеція з вершинами A (1; 1), B (5; 1), C (10; 2), E (2; 2).

79. $\iint\limits_D \frac{x}{x^2 + y^2}\, dxdy$, де область D обмежена лініями $y = x \operatorname{tg} x$, $y = x$.

80. $\iint\limits_D \sqrt{a^2 + x^2}\, dxdy$, де область D обмежена лініями $y^2 - x^2 = a^2$, $x = a$, $x = 0$, $y = 0$ $(y > 0)$.

81. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$, де область D — частина круга $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ радіуса a з центром у точці $O(0;\ 0)$.

82. $\iint\limits_D xydxdy$, де область D обмежена віссю Ox і верхнім півкругом $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

83. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{2a - x}}$, де область D — круг радіуса a, який дотикається до осей Ox і Oy і лежить у першому квадранті.

У задачах 84—88 знайти середні значення функції $f(x,\ y)$ в заданих областях D.

84. $f(x,\ y) = 3x + 2y$, D — трикутник з вершинами O (0; 0), A (1; 0), B (0; 1).

85. $f(x,\ y) = 12 - 2x - 3y$, область D обмежена прямими $12 - 2x - 3y = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

86. $f(x,\ y) = x + 6y$, D — трикутник, обмежений прямими $y = x$, $y = 5x$, $x = 1$.

87. $f(x,\ y) = \cos^2 x \cos^2 y$, D — прямокутник $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

88. $f(x,\ y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, D — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

89. У квадратній пластинці густина пропорційна відстані точки від однієї з вершин пластинки. Знайти середнє значення густини пластинки, якщо її сторона дорівнює 3, а в точці, віддаленій від зазначеної вершини на $2\sqrt{2}$, густина дорівнює 5.

У задачах 90—97 оцінити інтеграли.

90. $I = \iint\limits_D (4 + \cos xy)\, dxdy$, якщо D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

91. $I = \iint\limits_D (1 + x + y)\, dxdy$, якщо D — прямокутник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

92. $I = \iint\limits_D (x^2 + 4y^2 + 9)\, dxdy$, якщо D — круг $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

93. $I = \iint\limits_D xy\,(x + y)\, dxdy$, якщо D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

94. $I = \iint\limits_D (1 + x)^y\, dxdy$, якщо D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

95. $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} + 2)\, dxdy$, якщо D — квадрат $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

96. $I = \iint\limits_D (x + xy - x^2 - y^2)\, dxdy$, якщо D — прямокутник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.

97. $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2 - 4x - 4y + 10)\, dxdy$, якщо D обмежена еліпсом $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$.

У задачах 98—107 перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування.

98. $\iint\limits_D f(x,\ y)\, dxdy$, де область D — круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

99. $\iint\limits_D f(x,\ y)\, dxdy$, де область D — кільце $r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$.

100. $\iint\limits_D f(x,\ y)\, dxdy$, де область D обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$ і $x^2 + y^2 = 8x$.

101. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2+y^2})\,dy$.

102. $\iint\limits_D f\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$, де область D — трикутник, обмежений прямими $y=x$, $y=-x$, $y=1$.

103. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} f(x, y)\,dy$. 104. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\,dy$.

105. $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$, де область D — спільна частина двох кругів $x^2+y^2 \leqslant ax$ і $x^2+y^2 \leqslant by$.

106. $\iint\limits_D f(x^2+y^2)\,dxdy$, де область D обмежена лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

107. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$.

У задачах 108—117 перейти до полярних координат і обчислити інтеграли.

108. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D — круг $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

109. $\iint\limits_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dxdy$, D — верхнє півкільце між колами з радіусами e і e^2 і центром у початку координат.

110. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$, D — круг $x^2+y^2 \leqslant 1$.

111. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D — круг $x^2+y^2 \leqslant 2ax$.

112. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$, D — круг $x^2+y^2 \leqslant ax$.

113. $\iint\limits_D \rho d\rho d\varphi$, де область D обмежена кардіоїдою $\rho = a(1+\cos\varphi)$ і колом $\rho = a$ (полюс не належить області).

114. $\iint\limits_D y\,dxdy$, D — верхній півкруг радіуса R з центром у точці $(R;\ 0)$.

115. $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D — круг $x^2+(y+2)^2 \leqslant 4$.

116. $\iint\limits_D \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dxdy$, D — частина кільця $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant x\sqrt{3}$.

117. $\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, D — пелюстка лемніскати $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

У задачах 118—121 перейти до нових змінних і обчислити інтеграли.

118. $\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, якщо область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, переходячи до узагальнених полярних координат ρ і φ за формулами $\frac{x}{a} = \rho\cos\varphi$; $\frac{y}{b} = \rho\sin\varphi$.

119. $\iint\limits_D xy\,dxdy$, якщо область D обмежена лініями $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$, переходячи до нових змінних за формулами $x+y=u$, $xy=v$.

120. $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, якщо область D обмежена кривими $y^2=ax$, $y^2=bx$, $xy=p$, $xy=q$ $(0<a<b,\ 0<p<q)$, переходячи до нових змінних за формулами $y^2=ux$, $xy=v$.

121. $\iint\limits_D e^{k(x+y)^2}\,dxdy$, якщо область D визначається нерівностями $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x+y \leqslant 1$, переходячи до нових змінних за формулами $x = u-uv$, $y = uv$.

122. Показати, що заміна змінних $x+y=u$, $y=uv$ переводить трикутник $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1-x$ в одиничний квадрат $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$.

123. При якій заміні змінних криволінійний чотирикутник, обмежений лініями $xy=1$, $xy=2$, $x-y+1=0$, $x-y-1=0$ $(x>0,\ y>0)$, перейде в прямокутник, сторони якого паралельні осям координат?

1.2. Геометричні застосування подвійного інтеграла

Площа S плоскої області D обчислюється за формулою

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

Об'єм циліндричного тіла V, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y) \geqslant 0$, знизу — замкненою обмеженою областю D площини $z = 0$, з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz, дорівнює

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Площа P поверхні, яка проектується на площину Oxy в область D і задається функцією $z = f(x, y) \geqslant 0$ (f, f'_x, f'_y — неперервні функції в області D), знаходиться за формулою

$$P = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

У задачах 124—140 обчислити площі областей, обмежених заданими лініями.

124. $4y = x^2 - 4x,\ x - y - 3 = 0.$
125. $y^2 = 10x + 25,\ y^2 = -6x + 9.$
126. $y^2 = 4ax + 4a^2,\ x + y = 2a\ (a > 0).$
127. $xy = a^2,\ xy = b^2,\ y = m,\ y = n\ (a > b,\ m > n).$
128. $xy = 4,\ x + y = 5.$
129. $2xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ 2y = x,\ y = 2x.$
130. $xy = 1,\ xy = 8,\ y^2 = x,\ y^2 = 8x.$
131. $\rho \cos \varphi = 1,\ \rho = 2$ (не містить полюса).
132. $\rho = a(1 + \cos \varphi),\ \rho = a \cos \varphi\ (a > 0).$
133. $\rho = a(1 - \cos \varphi),\ \rho = a$ (зовні круга).
134. $\rho = 4(1 + \cos \varphi),\ \rho \cos \varphi = 3$ (справа від прямої).
135. $\rho = a(1 - \cos \varphi),\ \rho = a$ (зовні кардіоїди).
136. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$
137. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),\ x^2 + y^2 = 2ax.$
138. $(x^2 + y^2)^3 = a^2(x^4 + y^4).$
139. $x^3 + y^3 = 2xy$ (петля). 140. $(x + y)^5 = x^2y^2$ (петля).

У задачах 141—186 обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

141. $x + y + z = 4,\ x = 2,\ y = 3,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
142. $x + y + z = 6,\ x + 2y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
143. $x - y + z = 6,\ x + y = 2,\ x = y,\ y = 0,\ z = 0.$
144. $x + y + z = 5,\ 3x + y = 5,\ 3x + 2y = 10,\ y = 0,\ z = 0.$
145. $x + y + z = 6,\ x = y,\ y = 0,\ x = 3,\ z = 0.$
146. $x + y + z = 6,\ 3x + y = 6,\ 3x + 2y = 12,\ y = 0,\ z = 0.$
147. $z = x + y + 1,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
148. $x + y + z = 3,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0.$
149. $x + y + z = a,\ x^2 + y^2 = r^2,\ z = 0.$
150. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1,\ x = 2y^2,\ z = 0.$
151. $z = x^2 + y^2 + 1,\ x = 4,\ y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
152. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = \frac{b}{a}x,\ y = 0,\ z = 0,\ x \geqslant 0.$
153. $2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - ax = 0,\ z = 0.$
154. $x^2 + y^2 = 2ax,\ z = x,\ z = 3x.$
155. $x = y^2 + z^2,\ x = y,\ z \geqslant 0.$
156. $z = x^2 + y^2,\ y = x^2,\ z = 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$
157. $z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ z = 0.$
158. $az^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = bx,\ z \geqslant 0.$
159. $az = x^2 + y^2,\ x + z = 2a.$
160. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y.$
161. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
162. $z = x^2 + y^2,\ y = 6 - x,\ y = 2x,\ y = 1,\ z = 0.$
163. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0.$
164. $2z = y^2,\ 2x + 3y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$
165. $z = 9 - y^2,\ 3x + 4y = 12,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (y > 0).$
166. $z = 4 - x^2,\ 2x + y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ x > 0.$
167. $x^2 + y^2 = 4,\ z = y,\ z = 0.$
168. $x^2 + 4y^2 = 4,\ z = 12 - 3x - 4y,\ z = 1.$
169. $x^2 + y^2 = R^2,\ x^2 + z^2 = R^2.$
170. $z = 4 - y^2,\ 2y = x^2,\ z = 0.$
171. $x^2 + y^2 = R^2,\ za^2 = x^3,\ z = 0\ (x \geqslant 0).$
172. $z = x^2 - y^2,\ z = 0,\ x = 3.$
173. $z = xy,\ y = \sqrt{x},\ x + y = 2,\ y = 0,\ z = 0.$
174. $y = x^2,\ z = y,\ z + y = 2.$
175. $2z = 4 - x^2 - 4y^2,\ z = 0.$
176. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ z = e^2 - y^2,\ z = 0.$
177. $y = \ln x,\ y = \ln^2 x,\ z = 0,\ z = 1 - y.$
178. $z^2 = xy,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1,\ z = 0.$
179. $x^2 + y^2 = 4,\ z = x + y + 10,\ z = 0.$
180. $x^2 + y^2 = 2x,\ 2x - z = 0,\ 4x = z.$
181. $x^2 + y^2 = R^2,\ Rz = 2R^2 + x^2 + y^2,\ z = 0.$
182. $x^2 + y^2 = 2ax,\ za = x^2 + y^2,\ z = 0.$
183. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = ax.$
184. $za = xy,\ x^2 + y^2 = ax,\ z = 0\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0).$
185. $x^2 + y^2 = x,\ x^2 + y^2 = 2x,\ z = x^2 + y^2,\ x + y = 0,\ y = x,\ z = 0.$
186. $x^2 + y^2 = 2x,\ x^2 + y^2 = 2y,\ z = x + 2y,\ z = 0.$
187. В якому відношенні гіперболоїд $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ ділить об'єм кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

188. Довести, що об'єм, обмежений площиною $z = mx + ny + p$ і параболоїдом $z = x^2 + y^2$, дорівнює половині площі круга $x^2 + y^2 = mx + ny + p$, помноженій на різницю величин $x^2 + y^2$ і $mx + ny + p$, взяту в центрі цього круга.

189. Довести, що об'єм сегмента, який відтинається площиною від еліптичного параболоїда, дорівнює площі основи сегмента, помноженій на половину висоти сегмента.

190. Від кругового конуса з радіусом основи R і висотою H відтинається частина площиною, паралельною осі конуса. Довести, що об'єм цієї частини

$$V = \frac{1}{3} R^2 H \left[\alpha - \sin 2\alpha + \cos^3\alpha \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

якщо сегмент в основі відповідає центральному кутові 2α.

191. Правильна чотирикутна призма з основою a^2 і висотою H перетинається круговим конусом так, що слід його на одній основі є вписане в основу коло, а на другій основі — описане навколо неї коло. Довести, що зовні конуса лежить

$$\frac{1}{2} V = a^2 H (\sqrt{2} + 1)\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{24} + \frac{1}{6} \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}\right)$$

об'єму V призми.

У задачах 192—227 задано поверхні. Знайти їхні площі.

192. Частина поверхні $z^2 = 2xy$ при $z > 0$, $0 < x < a$, $0 < y < b$.

193. Частина поверхні $x^2 = 2pz$ при $4x > y > x$, $0 < x < a$.

194. Частина площини $6x + 3y + 2z - 12 = 0$, що лежить у першому октанті.

195. Частина площини $x + y + z = a$, що вирізається циліндром $y^2 = ax$ і площиною $x = a$.

196. Частина поверхні циліндра $2z = x^2$, вирізана площинами $2y = x$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

197. Частина поверхні конуса $z^2 = 2xy$, що вирізана площинами $x = a$, $y = a$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

198. Частина поверхні кулі $x^2 + y^2 + z^2 = 100$, розміщена між площинами $x = -8$ і $x = 6$.

199. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вирізана площиною $z = \sqrt{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ при $z \geqslant 0$.

200. Частина поверхні циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, розміщена між площинами $z = mx$ і $z = nx$ при $m > n > 0$.

201. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 - y^2$, розміщена в першому октанті і обмежена площиною $y + z = a$.

202. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, обмежена площинами $z = 1$ і $z = 2$.

203. Частина поверхні циліндра $z^2 = 2px$, вирізана поверхнями $y^2 = 2qx$, $x = a$.

204. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вирізана циліндром $z^2 = 2py$.

205. Частина поверхні циліндра $z^2 = 4x$, вирізана циліндром $y^2 = 4x$ і площиною $x = 1$.

206. Частина поверхні циліндра $x^2 + z^2 = a^2$, вирізана циліндром $y^2 = a(a - x)$.

207. Частина поверхні конуса $x^2 + z^2 = y^2$, вирізана циліндром $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

208. Повна поверхня тіла, обмежена циліндрами $x^2 = ay$, $z^2 = ay$ і площиною $y = 2a$ $(a > 0)$.

209. Частина поверхні конуса $x^2 - z^2 = y^2$, вирізана площинами $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

210. Частина поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$, вирізана циліндром $z^2 = 2a(2a - x)$.

211. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, вирізана циліндром $z^2 = 4y$.

212. Частина певерхні $z^2 = 2xy$, що розміщена між площинами $x = 2$ та $y = 1$ $(z \geqslant 0)$.

213. Частина поверхні циліндра $x^2 + y^2 = ax$, вирізана сферою $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

214. Частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізана циліндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

215. Частина поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$, що міститься між площиною $z = 0$ і конусом $z^2 = x^2 + y^2$.

216. Частина поверхні конуса $x^2 - y^2 = z^2$, що лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

217. Частина поверхні параболоїда $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, вирізана циліндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$.

218. Частина поверхні конуса $y^2 + z^2 = x^2$, розміщена всередині циліндра $x^2 + y^2 = a^2$.

219. Частина поверхні гіперболічного параболоїда $z = xy$, вирізана циліндром $x^2 + y^2 = R^2$.

220. Частина поверхні еліпсоїда $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, вирізана циліндром $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

221. Частина поверхні гіперболічного параболоїда $az = xy$, що розміщена всередині циліндра $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$.

222. Частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, що розміщена всередині конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

223. Частина поверхні параболоїда $z = x^2 - y^2$, що розміщена між параболоїдами $z = 3x^2 + y^2 - 2$ і $z = 3x^2 + y^2 - 4$.

224. Частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізана циліндром з твірними, паралельними осі Oz, напрямною якого є трипелюсткова роза $\rho = a \sin 3\varphi$.

225. Частина гвинтової поверхні $z = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, вирізана циліндром $x^2 + y^2 = a^2$.

226. Частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$, вирізана циліндром з твірними, паралельними осі Oz, напрямною якого є кардіоїда $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

227. Частина поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вирізана циліндром $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

228. Довести, що площа поверхні тіла, утвореного перпендикулярним перетином двох циліндрів однакового радіуса R, дорівнює $16R^2$.

229. Довести, що частини поверхонь параболоїдів $x^2 + y^2 = 2az$ і $x^2 - y^2 = 2az$, вирізаних циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, рівновеликі.

230. Знайти тілесний кут ω, під яким видно з початку координат прямокутник $x = a > 0$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$. Інакше кажучи, знайти площу частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, на яку променями з початку координат проектуються точки даного прямокутника.

1.3. Деякі механічні застосування подвійного інтеграла

Якщо пластинка займає область D площини Oxy і має змінну поверхневу густину $\gamma = \gamma(x, y)$, то маса пластинки

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy.$$

Статичні моменти M_x і M_y пластинки відносно осей Ox і Oy визначаються так:

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy.$$

Координати x_c і y_c центра мас пластинки знаходять за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy}.$$

Моменти інерції I_x, I_y, I_o пластинки відносно осей Ox, Oy і початку координат (полярний момент інерції) відповідно дорівнюють

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\, dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\, dxdy,$$

$$I_o = I_x + I_y = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,\gamma(x, y)\, dxdy.$$

Якщо пластинка однорідна, то вважають $\gamma(x, y) = 1$.

231. Знайти масу прямокутної пластинки $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, якщо густина в кожній точці дорівнює кубу абсциси, помноженому на квадрат ординати цієї точки.

232. Обчислити масу круглої пластинки радіуса 2, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює одиниці на краю пластинки.

233. Обчислити масу круглої пластинки радіуса R, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра і дорівнює δ на краю пластинки.

234. Знайти масу квадратної пластинки із стороною $2a$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і в вершинах квадрата дорівнює одиниці.

235. Плоске кільце обмежене двома концентричними колами, радіуси яких r і R $(r < R)$. Знайти масу кільця, якщо його густина обернено пропорційна відстані точки від центра кіл і на колі радіуса r дорівнює одиниці.

236. На пластинці, обмеженій еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, маса розподілена так, що густина її пропорційна відстані від осі абсцис, причому при $y = 1$ густина дорівнює δ. Знайти масу пластинки.

У задачах 237—243 визначити статичні моменти даних однорідних плоских фігур.

237. Прямокутника із сторонами a і b відносно сторони a.

238. Півкруга радіуса R відносно діаметра.

239. Чверті круга $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ відносно координатних осей.

240. Фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 0$, відносно координатних осей.

241. Круга радіуса R відносно дотичної.

242. Фігури, обмеженої кривою $y = \sin x$ і прямою, що проходить через точки $O(0;\ 0)$ і $A\left(\frac{\pi}{2};\ 1\right)$ $(y \geqslant 0)$, відносно осей Ox і Oy.

243. Фігури, обмеженої кардіоїдою $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ і полярною віссю, відносно координатних осей.

244. Довести, що статичний момент трикутника з основою a і висотою h відносно основи залежить лише від h.

245. Пластинка має форму прямокутного трикутника з катетами $OB = a$ і $OA = b$, причому густина її в довільній точці дорівнює відстані точки від катета OA. Знайти статичні моменти трикутника відносно катетів.

У задачах 246—260 знайти центр маси однорідних фігур, обмежених даними лініями.

246. $x = 0$, $y = 0$, $x + y = a$.

247. $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = x_0$.

248. $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
249. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
250. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geqslant 0$. **251.** $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.
252. $y^2 = x^2 - x^4$, $x \geqslant 0$.
253. $x^2 + y^2 = R^2$, $y = x \operatorname{tg} \alpha$, $y \geqslant 0$.
254. $x^2 + y^2 = r^2$, $x^2 + y^2 = R^2$ $(r < R,\ y \geqslant 0)$.
255. $y = 2x^3$, $y^2 = 2x$. **256.** $x^2 + y^2 = 13$, $xy = 6$, $x > 0$.
257. $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$. **258.** $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.
259. $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $(x > 0)$.
260. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $y = 0$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

261. Знайти центр маси кругового сектора радіуса R з центральним кутом 2α (рис. 10.4).

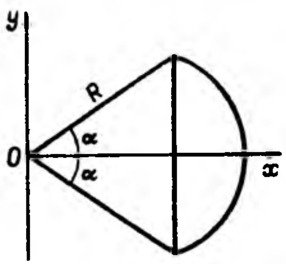


Рис. 10.4

262. Знайти центр маси кругового сегмента, що відповідає центральному кутові 2α кола радіуса R.

У задачах 263—274 знайти моменти інерції даних однорідних фігур.

263. Прямокутника із сторонами a і b відносно його сторін.

264. Фігури, обмеженої прямими $y = 2x$, $x = 1$, $y = 0$, відносно точки $O(0;\ 0)$.

265. Трикутника, обмеженого прямими $x + y = 1$, $x + 2y = 2$, $y = 0$, відносно координатних осей.

266. Круга радіуса R відносно дотичної.

267. Квадрата із стороною a відносно вершини.

268. Фігури, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, відносно осей Ox, Oy і початку координат.

269. Прямокутника із сторонами a і b відносно точки перетину діагоналей.

270. Рівнобедреного трикутника з основою a і висотою h відносно вершини.

271. Круга радіуса R відносно точки на колі.

272. Сегмента параболи з хордою, перпендикулярною до осі, відносно осі параболи, якщо довжина хорди a, а стріла параболи h.

273. Сектора з радіусом R і центральним кутом 2α відносно осі симетрії.

274. Сегмента з радіусом R і центральним кутом 2α (рис. 10.4) відносно осі симетрії.

275. Довести, що момент інерції кругового кільця відносно центра вдвічі більший моменту інерції відносно довільної осі, що проходить через центр кільця і лежить у його площині.

276. Довести, що сума моментів інерції плоскої фігури відносно довільної пари взаємно перпендикулярних осей, що лежать у площині фігури і проходять через нерухому точку, є величина стала.

§ 2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Обчислення потрійного інтеграла

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій області G, яка визначається нерівностями

$$z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y), \quad y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

де $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ — неперервні функції, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Якщо неперервно диференційовні функції

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w)$$

взаємно однозначно відображають область G на область G_1, причому якобіан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \times$$
$$\times |J|\,dudvdw.$$

Зокрема, в циліндричних координатах ρ, φ, z, де $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, якобіан $J = \rho$, тому

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho d\rho d\varphi dz.$$

У сферичних координатах ρ, φ і θ, де $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$, якобіан $J = \rho^2\sin\theta$, тому

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{G_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

У задачах 277—280 розставити межі інтегрування, якщо інтегрувати в послідовності: а) x, y, z; б) y, x, z; в) z, x, y.

277. $\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz$, де область G обмежена площинами $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

278. $\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz$, де область G обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

279. $\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$.

280. $\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz$, де область G обмежена поверхнями $z=x^2+y^2$, $z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

У задачах 281—285 обчислити повторні інтеграли.

281. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 (x+y+z)\,dz$. 282. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz$.

283. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}} zdz$. 284. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{2\cos\varphi}\rho^2 d\rho\int\limits_0^a zdz$.

285. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{\cos\theta}\rho^3 d\rho$.

У задачах 286—306 обчислити потрійні інтеграли.

286. $\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydz$, G — область, обмежена площинами $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

287. $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $y=x^2$, $x=y^2$, $z=xy$, $z=0$.

288. $\iiint\limits_G y\cos(x+z)\,dxdydz$, G — область, обмежена циліндром $y=\sqrt{x}$ і площинами $y=0$, $z=0$, $x+z=\frac{\pi}{2}$.

289. $\iiint\limits_G xdxdydz$, G — область, обмежена циліндром $x^2+y^2=1$ і площинами $z=0$, $z=3$.

290. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz$, G — куб, $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 1$.

291. $\iiint\limits_G (x+yz)\,dxdydz$, G — прямокутний паралелепіпед $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1$, $0\leqslant z\leqslant 2$.

292. $\iiint\limits_G (x-y)\,dxdydz$, G — піраміда, утворена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

293. $\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, G — прямокутний паралелепіпед $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$, $0\leqslant z\leqslant c$.

294. $\iiint\limits_G (1-y)\,dxdydz$, G — область, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1-x-y$.

295. $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$.

296. $\iiint\limits_G xdxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $z=1$, $z=x^2+y^2$.

297. $\iiint\limits_G zdxdydz$, G — область, що визначається нерівностями $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, $x\leqslant y\leqslant 2x$, $0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2}$.

298. $\iiint\limits_G (2x+3y-z)\,dxdydz$, G — область, обмежена площинами $z=0$, $z=a$, $x=0$, $y=0$, $x+y=b$ $(a>0,\ b>0)$.

299. $\iiint\limits_G (x+y+1)\,dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=1$, $z=x^2+y^2$.

300. $\iiint\limits_G xy^2z^3dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$.

301. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, G — область, обмежена площинами $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

302. $\iiint\limits_G (x+y+z)^2\,dxdydz$, G — область, що задовольняє умови $2az\geqslant x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 3a^2$.

303. $\iiint\limits_G z^2dxdydz$, G — область, що задовольняє умови $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$.

304. $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, G — область, обмежена площиною $z=0$ і верхньою половиною еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

305. $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dxdydz$, G — область, обмежена еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

306. $\iiint\limits_G z\,dxdydz$, G — область, обмежена конусом $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ і площиною $z=h$.

У задачах 307—311 обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат.

307. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz$.

308. $\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$.

309. $\iiint\limits_G dxdydz$, G — область, обмежена поверхнями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$, що містить точку $(0;\ 0;\ R)$.

310. $\iiint\limits_G (x^2+z^2)\,dxdydz$, G — область, обмежена параболоїдом $2y=x^2+z^2$ і площиною $y=2$.

311. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)^{3/2}\,dxdydz$, G — область, обмежена параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площиною $z=1$.

У задачах 312—318 обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат.

312. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz$.

313. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz$.

314. $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz$, G — область, визначена нерівностями $r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$, $z\geqslant 0$.

315. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}$, G — куля $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

316. $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, G — область, обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=z$.

317. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$, G — область, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і частиною сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, що міститься в першому октанті.

318. $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, G — область, обмежена кульовим сектором з центром у точці $O(0;\ 0;\ 0)$, радіусом R і кутом $2\alpha\ (0<\alpha<\pi)$ при вершині.

319. Знайти середнє значення $f(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$ в області $x^2+y^2+z^2\leqslant x+y+z$.

2.2. Деякі застосування потрійного інтеграла

Об'єм просторового тіла, обмеженого областю G,

$$V=\iiint\limits_G dxdydz.$$

Маса m тіла із змінною густиною $\gamma=\gamma(x,\ y,\ z)$, що займає просторову область G, визначається за формулою

$$m=\iiint\limits_G \gamma(x,\ y,\ z)\,dxdydz.$$

Статичні моменти тіла відносно координатних площин:

$$M_{yz}=\iiint\limits_G x\gamma(x,\ y,\ z)\,dxdydz,$$

$$M_{xz}=\iiint\limits_G y\gamma(x,\ y,\ z)\,dxdydz,$$

$$M_{xy}=\iiint\limits_G z\gamma(x,\ y,\ z)\,dxdydz.$$

Координати центра мас тіла:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{M_{zx}}{m},\quad z_c=\frac{M_{xy}}{m}.$$

Моменти інерції тіла відносно осей координат:

$$I_x=\iiint\limits_G (y^2+z^2)\,\gamma(x,\ y,\ z)\,dxdydz,$$

$$I_y = \iiint\limits_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\,dxdydz,$$

$$I_z = \iiint\limits_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)\,dxdydz.$$

Якщо тіло однорідне, то вважають, що $\gamma(x, y, z) = 1$.

У задачах 320—334 обчислити об'єми тіл, обмежених заданими поверхнями.

320. $z = x^2 + y^2,\ z = x^2 + 2y^2,\ y = x,\ y = 2x,\ x = 1$.

321. $z = xy,\ z = x + y,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$.

322. $y = x^2 + z^2,\ y = 1$.

323. $y^2 + z^2 = 2ax,\ y^2 + z^2 = 2az,\ x = 0\ (a > 0)$.

324. $y^2 + z^2 = 3x,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (внутрішній щодо параболоїда).

325. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = ax,\ y = 0\ (a > 0)$ (внутрішній щодо циліндра).

326. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z^2 = x^2 + y^2\ (a > 0)$ (зовнішній щодо конуса).

327. $z = 4 - y^2,\ z = y^2 + 2,\ x = -1,\ x = 2$.

328. $z = x^2 + y^2,\ z = 2x^2 + 2y^2,\ y = x^2,\ y = x$.

329. $z = \ln(x + 2),\ z = \ln(6 - x),\ x = 0,\ x + y = 2,\ x - y = 2$.

330. $z = (x - 1)^2 + y^2,\ 2x + z = 2$.

331. $z = x^2 + y^2,\ z = x + y$. **332.** $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$.

333. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$. **334.** $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2z^4$.

У задачах 335—343 задано неоднорідні тіла. Обчислити їхню масу.

335. Куб $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$, густина $\gamma = x + y + z$.

336. Тіло обмежене поверхнями $z^2 = x^2 + y^2,\ z = h$, густина в кожній його точці дорівнює аплікаті цієї точки.

337. Тіло обмежене поверхнями $2x + z = 2a,\ x + z = a,\ y^2 = ax,\ y = 0\ (y > 0)$, густина в кожній його точці дорівнює ординаті цієї точки.

338. Півкуля $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9,\ z \geqslant 0$, густина в кожній її точці дорівнює відстані від цієї точки до центра кулі.

339. Тіло обмежене конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, площиною $z = 0$ і циліндром $x^2 + y^2 = 1$, густина в кожній його точці дорівнює відстані від цієї точки до осі Oz.

340. Циліндр радіуса R і висоти h, густина пропорційна висоті і на нижній основі дорівнює одиниці.

341. Куля $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, густина в кожній її точці дорівнює відстані цієї точки від початку координат.

342. Шар між поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$, густина в кожній його точці обернено пропорційна відстані цієї точки від початку координат.

343. Тіло обмежене параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ і сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2\ (z > 0)$, густина в кожній його точці дорівнює сумі квадратів координат точки.

344. Куля $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, густина в кожній її точці дорівнює квадрату відстані цієї точки від початку координат.

У задачах 345—349 задано однорідні тіла. Знайти їхні статичні моменти.

345. Прямокутний паралелепіпед з ребрами a, b і c (відносно його граней).

346. Тіло обмежене параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площинами $z = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ (відносно площини Oyz).

347. Тіло обмежене конусом $z^2 = y^2 - x^2$ і площиною $y = 1$ (відносно площини Oxz).

348. Конус з радіусом основи R і висотою H (відносно площини, що проходить через вершину паралельно основі).

349. Тіло обмежене еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ і площиною $z = 0$ (відносно цієї площини).

У задачах 370—374 визначити центр мас однорідних тіл, обмежених заданими поверхнями.

350. $x + y + z = 8,\ x = 2,\ y = 4,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

351. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

352. $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = 0$. **353.** $y = 3 - x^2 - z^2,\ y = 0$.

354. $z = \frac{y^2}{2},\ 2x + 3y - 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

355. $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$.

356. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

357. $4x = y^2 + 2z^2,\ x = 2$. **358.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2},\ z = c$.

359. $x^2 = 2pz,\ y^2 = 2px,\ x = \frac{p}{2},\ z = 0$.

360. $z = \frac{h}{a^2}(y^2 - x^2),\ z = 0,\ y = a,\ y = 0\ (a > 0,\ h > 0)$.

361. $y = \frac{b}{a^2}x^2,\ z = \frac{h}{b}(b - y),\ z = 0\ (a > 0,\ b > 0,\ h > 0)$.

362. $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2),\ z = H\ (H > 0,\ R > 0)$.

363. $z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2 + y^2},\ z = H\ (H > 0,\ R > 0)$.

364. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z = 0\ (z > 0)$.

365. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0\ (x > 0,\ y > 0, z > 0)$.

366. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0, z = 0\ (x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

367. $x^2 + z^2 = a^2,\ y^2 + z^2 = a^2\ (z > 0)$.

368. $x^2 + y^2 = 2z, \quad x + y = z.$

369. $z = x^2 + y^2, \ z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \ x + y = \pm 1, \ x - y = \pm 1.$

370. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ z = h \quad (0 < h < a).$

371. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \ x^2 + y^2 = ax \quad (a > 0).$

372. $2az = x^2 + y^2, \ x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2 \quad (z \geqslant 0).$

373. $z \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{x^2 + y^2}, \ x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (кульовий сектор).

374. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$

У задачах 375—386 знайти моменти інерції відносно осі Oz однорідних тіл, обмежених заданими поверхнями.

375. $x = 0, \ x = a, \ y = 0, \ y = b, \ z = 0, \ z = c.$

376. $x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ y = a, \ x + z = a.$

377. $x + y + z = a\sqrt{2}, \ x^2 + y^2 = a^2, \ z = 0.$

378. $z^2 = 2ax, \ z = 0, \ x^2 + y^2 = ax.$

379. $h^2 (x^2 + y^2) = a^2 z^2, \ 0 < z < h.$

380. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$

381. $z = 0, \quad y = \frac{b}{a^2} x^2, \quad z = \frac{h}{b}(b - y).$

382. $z = x^2 + y^2, \ x + y = \pm 1, \ x - y = \pm 1, \ z = 0.$

383. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \ x^2 + y^2 = z^2 \ (z > 0).$

384. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z.$

385. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$ **386.** $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1.$

У задачах 387—392 знайти моменти інерції відносно координатних площин однорідних тіл, обмежених такими поверхнями.

387. $x^2 = y^2 + z^2, \ x = h \quad (h > 0, \ x \geqslant 0).$

388. $\frac{y}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$

389. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

390. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c \quad (c > 0).$

391. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$

392. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

У задачах 393—400 задано однорідні тіла. Знайти їхні моменти інерції.

393. Прямокутний паралелепіпед масою M з ребрами a, b і c (відносно кожного з ребер і відносно центра мас).

394. Тіло обмежене параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 4$ (відносно початку координат).

395. Сегмент параболоїда обертання з радіусом основи R і висотою H (відносно його осі обертання).

396. Куля маси M і радіуса R (відносно дотичної прямої).

397. Еліпсоїд $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ маси M (відносно кожної з його осей).

398. Прямий круговий циліндр з радіусом основи R і висотою H (відносно його осі).

399. Куля радіуса R (відносно її діаметра).

400. Сегмент параболоїда обертання з радіусом основи R і висотою H (відносно осі, що проходить через центр його маси, перпендикулярно до осі обертання).

401. Знайти момент інерції кулі радіуса R відносно її діаметра, якщо густина в кожній її точці обернено пропорційна відстані цієї точки від центра кулі, а на поверхні кулі дорівнює γ_0.

402. Знайти ньютонів потенціал однорідного тіла, обмеженого еліпсоїдом обертання $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $(b > a)$, в його центрі, якщо відомо, що ньютоновим потенціалом тіла в точці (x_0, y_0, z_0) називається інтеграл $U = \iiint\limits_G \gamma(x, y, z) \frac{dxdydz}{r}$, де $\gamma(x, y, z)$ — густина тіла і $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

403. Знайти ньютонів потенціал у точці (0; 0; H) однорідного циліндра $x^2 + y^2 = a^2, \ 0 \leqslant z \leqslant H \ (a > 0)$.

404. Знайти силу, з якою одиниця маси, що лежить у центрі основи циліндра радіуса R і висоти h, притягується цим циліндром, якщо відомо, що коли в точці $(x_0; y_0; z_0)$ розміщена маса $m = 1$, то проекції F_x, F_y, F_z сили притягання її тілом V на координатні осі дорівнюють

$$F_x = \iiint\limits_V \gamma \frac{x - x_0}{r} \, dxdydz, \quad F_y = \iiint\limits_V \gamma \frac{y - y_0}{r} \, dxdydz,$$

$$F_x = \iiint\limits_V \gamma \frac{z - z_0}{r} \, dxdydz.$$

405. Знайти силу, з якою одиниця маси, що міститься у вершині конуса радіуса R і висоти h, притягується цим конусом.

§ 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

3.1. Криволінійні інтеграли першого роду

Якщо $f(x, y, z)$ — функція, неперервна в точках гладкої кривої L, яку задано параметричними рівняннями

$$x = x(t), \ y = y(t), \ z = z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

і dl — диференціал дуги, то криволінійний інтеграл першого роду $\int\limits_L f(x, y, z)\,dl$ зводиться до визначеного інтеграла:

$$\int\limits_L f(x, y, z)\,dl = \int\limits_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt.$$

Зокрема, якщо плоску криву L у площині Oxy задано функцією $y = \varphi(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\,dx;$$

якщо криву L задано функцією $x = \psi(y)$ $(c \leqslant y \leqslant d)$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl = \int\limits_c^d f(\psi(y), y)\sqrt{1 + \psi'^2(y)}\,dy;$$

якщо криву L задано полярним рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ $(\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$, то

$$\int\limits_L f(x, y)\,dl = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

Довжину l кривої L знаходять за формулою $l = \int\limits_L dl$.

Нехай $f(x, y) \geqslant 0$, тоді інтеграл $\int\limits_L f(x, y)\,dl$ чисельно дорівнює площі σ частини циліндричної поверхні, у якої напрямна L лежить у площині Oxy, а твірні перпендикулярні до неї, причому зверху ця циліндрична поверхня обмежена поверхнею $z = f(x, y)$, а знизу — площиною $z = 0$:

$$\sigma = \int\limits_L f(x, y)\,dl.$$

Якщо вздовж кривої L розподілено певну масу з лінійною густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то:

а) маса кривої L $m = \int\limits_L \gamma dl$;

б) координати центра маси кривої L знаходять за формулами

$$x_c = \frac{\int\limits_L x\gamma dl}{m}; \quad y_c = \frac{\int\limits_L y\gamma dl}{m}; \quad z_c = \frac{\int\limits_L z\gamma dl}{m};$$

в) моменти інерції кривої L відносно осей Ox, Oy, Oz і початку координат відповідно дорівнюють

$$I_x = \int\limits_L (y^2 + z^2)\gamma dl; \quad I_y = \int\limits_L (x^2 + z^2)\gamma dl;$$

$$I_z = \int\limits_L (x^2 + y^2)\gamma dl; \quad I_0 = \int\limits_L (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dl.$$

Якщо крива однорідна, то вважають $\gamma = 1$.

У задачах 406—427 обчислити задані криволінійні інтеграли першого роду вздовж зазначених ліній L.

406. $\int\limits_L \frac{dl}{x - y}$, де L — відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$ між точками $A(0, -2)$ і $B(4, 0)$.

407. $\int\limits_L (x - 2y)\,dl$, де L — відрізок прямої між точками $A(1; 1)$ і $B(0; -2)$.

408. $\int\limits_L xydl$, де L — контур прямокутника з вершинами $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$, $D(0; 2)$.

409. $\int\limits_L ydl$, де L — дуга параболи $y^2 = 2px$, відсічена параболою $x^2 = 2py$.

410. $\int\limits_L ydl$, де L — дуга синусоїди $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$.

411. $\int\limits_L (x^2 + y^2)^n\,dl$, де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$.

412. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, де L — коло $x^2 + y^2 = ax$ $(a > 0)$.

413. $\int\limits_L y^2dl$, де L — арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

414. $\int\limits_L xydl$, де L — чверть еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

415. $\int\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}\,dl$, де L — дуга кривої $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

416. $\int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}\,dl$, де L — половина лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(x \geqslant 0)$.

417. $\int\limits_L \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dl$, де L — частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, що міститься всередині круга радіуса R з центром у полюсі.

418. $\int\limits_L xy\,dl$, де L — дуга кривої $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$ $(0 \leqslant t \leqslant \ln 2)$.

419. $\int\limits_L \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) dl$, де L — астроїда $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

420. $\int\limits_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,dl$, де L — контур, обмежений лініями $\rho = a$, $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

421. $\int\limits_L \frac{dl}{y^2}$, де L — ланцюгова лінія $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

422. $\int\limits_L \frac{dl}{x + 2y + 3z}$, де L — відрізок прямої $x = 2t$, $y = 2t - 2$, $z = -t + 2$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

423. $\int\limits_L (x + 2y^2 - 3z)\,dl$, де L — відрізок прямої від точки $A(0;\ 1;\ 2)$ до точки $B(2;\ -1;\ 0)$.

424. $\int\limits_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L — перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$.

425. $\int\limits_L xyz\,dl$, де L — чверть кола $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.

426. $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$, де L — перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

427. $\int\limits_L \sqrt{2y^2 + z^2}\,dl$, де L — коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = x$.

У задачах 428—432 знайти довжини дуг заданих кривих (параметри додатні).

428. $y = \operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant \ln 2)$.

429. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

430. $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ від точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до $A(3;\ 3;\ 2)$.

431. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

432. $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

У задачах 433—440 обчислити площі заданих циліндричних поверхонь, розміщених між площиною Oxy і зазначеними поверхнями.

433. $y = \frac{3}{8}x^2$, $x = 0$, $y = 6$, $z = x$. 434. $x^2 + y^2 = 4$, $4z = xy$.

435. $x^2 + y^2 = R^2$, $z = R + \frac{x^2}{R}$.

436. $y^2 = 2px$, $z = \sqrt{2px - 4x^2}$. 437. $y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3$, $z = 2 - \sqrt{x}$.

438. $x^2 + y^2 = R^2$, $2Rz = xy$. 439. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $z = kx$ $(z \geqslant 0)$.

440. $y = 2px$, $x = \frac{8}{9}p$, $z = y$.

У задачах 441—450 задано криві. Обчислити їхні маси.

441. Гвинтова лінія $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 4t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, якщо густина в кожній її точці дорівнює $4z$.

442. Півколо $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, якщо густина його в точці $(x;\ y)$ дорівнює y.

443. Дуга кривої $y = \ln x$, $1 \leqslant x \leqslant 3$, якщо густина її в кожній точці дорівнює квадрату абсциси цієї точки.

444. Дуга ланцюгової лінії $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant a$, якщо густина її в кожній точці обернено пропорційна ординаті цієї точки, причому густина в точці $(0;\ a)$ дорівнює δ.

445. Еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, якщо густина його в кожній точці $(x;\ y)$ дорівнює $|y|$.

446. Перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$, якщо густина її в кожній точці дорівнює радіусу-вектору цієї точки.

447. Дуга лінії $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, якщо густина її в кожній точці обернено пропорційна квадрату полярного радіуса і в точці $(1;\ 0;\ 1)$ дорівнює одиниці.

448. Астроїда $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, якщо густина її $\gamma(x,\ y) = |xy|$.

449. Кардіоїда $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, якщо її густина в кожній точці пропорційна радіусу-вектору цієї точки (коефіцієнт пропорційності k).

450. Лемніската $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$, якщо її густина в кожній точці пропорційна квадрату радіуса-вектора цієї точки (коефіцієнт пропорційності k).

У задачах 451—459 визначити координати центра маси однорідних кривих.

451. $x^2 + y^2 = 4$, $y \geqslant 0$.

452. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$.

453. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ $(y \geqslant 0)$.

454. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant a)$. 455. $y^2 = ax^3 - x^4$.

456. $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ $(0 \leqslant x \leqslant b,\ \ a \leqslant y \leqslant h)$.

457. $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt\ \ (0 \leqslant t \leqslant \pi)$.
458. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ \ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$.
459. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t\ (-\infty < t \leqslant 0)$.

460. Визначити центр маси кривої $x = t,\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2,\ z = \frac{1}{3}t^3$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, якщо густина $\gamma = xyz$.

461. Знайти статичний момент першого витка конічної гвинтової лінії $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$ відносно площини Oxy, якщо густина лінії $\gamma = 2z^2$.

462. Знайти моменти інерції відносно осей координат і початку координат відрізка однорідної прямої $y + 2x - 1 = 0\ (y \geqslant 0,\ x \geqslant 0)$.

463. Знайти моменти інерції відносно осей координат і початку координат однорідної дуги кола $x^2 + y^2 = 4\ \ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

464. Знайти моменти інерції відносно координатних осей першого витка однорідної гвинтової лінії

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = \frac{h}{2\pi}t \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Спираючись на закон Біо — Савара, розв'язати задачі 465—468.

465. Знайти силу, з якою струм I у нескінченному прямолінійному провіднику діє на точкову магнітну масу m, що міститься на відстані a від провідника.

466. По контуру, що має форму квадрата із стороною a, проходить струм сили I. Знайти силу, з якою цей струм діє на точкову магнітну масу m, що лежить у центрі квадрата.

467. З якою силою струм сили I, який проходить по контуру еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, діє на точкову магнітну масу m, що лежить у фокусі еліпса?

468. Довести, що струм сили I, який проходить по дузі лінії, полярне рівняння якої $\rho = \rho(\varphi)\ (\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2)$, діє на точкову магнітну масу m, що лежить у полюсі, з силою

$$f = mI\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\rho}.$$

469. Обчислити притягання, з яким однорідне півколо діє на одиницю маси, вміщену в його центрі.

470. З якою силою маса M, розподілена із сталою густиною по колу $x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0$, діє на масу m, що міститься у точці $A\ (0;\ 0;\ b)$?

3.2. Криволінійні інтеграли другого роду

Якщо криву L задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, то криволінійний інтеграл другого роду $\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$ зводиться до визначеного інтеграла за формулою

$$\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),\ y(t))\,x'(t) + Q(x(t),\ y(t)) \times \times\, y'(t)]\,dt.$$

Зокрема, якщо криву L задано рівнянням $y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_a^b [P(x,\ y(x)) + Q(x,\ y(x))\,y'(x)]\,dx.$$

Якщо криву L задано функцією $x = x(y)\ (c \leqslant y \leqslant d)$, то

$$\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy = \int\limits_c^d [P(x(y),\ y)\,x'(y) + Q(x(y),\ y)]\,dy.$$

Криволінійний інтеграл другого роду

$$\int\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz$$

вздовж просторової кривої L, заданої параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$, знаходять так:

$$\int\limits_L P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz = \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t) + Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t) + R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)]\,dt.$$

Якщо вираз $P(x, y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$ є повним диференціалом деякої функції (первісної) $u(x, y)$, тобто $du(x, y) = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, то криволінійний інтеграл $\int\limits_L P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$ не залежить від шляху інтегрування L і справедлива формула Ньютона — Лейбніца

$$\int\limits_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = u(x_2; y_2) - u(x_1; y_1),$$

де $(x_1; y_1)$ — початкова, а $(x_2; y_2)$ — кінцева точка шляху інтегрування.

Якщо контур інтегрування L цілком лежить у деякій однозв'язній області D і функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в цій області, то необхідною і достатньою умовою існування первісної $u(x, y)$ є тотожне виконання в області D рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

При цьому функцію $u(x, y)$ можна знайти за формулою

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + C, \quad (x_0, y_0) \in D.$$

Якщо $Pdx + Qdy + Rdz = du$, де функція $u = u(x, y, z)$ визначена в однозв'язній області V, функції P, Q і R мають у цій області неперервні частинні похідні і тотожно виконуються рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

то $u(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,dy +$

$$+ \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,dz + C.$$

Якщо L — межа замкненої області D і функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в цій області, то справедлива формула Гріна

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

де обхід контура L обирається так, щоб область D залишалась ліворуч.

Застосування криволінійних інтегралів другого роду. Площа S, обмежена замкненим контуром L,

$$S = -\oint\limits_L ydx = \oint\limits_L xdy = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx,$$

де обхід контура L обирається проти годинникової стрілки.

Роботу A сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вздовж шляху L знаходять за формулою

$$A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Якщо сила має потенціал $u = u(x, y, z)$, тобто $Pdx + Qdy + Rdz = du$, то робота не залежить від шляху інтегрування L і дорівнює

$$A = \int\limits_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} Pdx + Qdy + Rdz,$$

де $(x_1; y_1; z_1)$ — початкова, а $(x_2; y_2; z_2)$ — кінцева точка шляху.

У задачах 471—488 обчислити подані криволінійні інтеграли другого роду вздовж заданих ліній інтегрування.

471. $\int\limits_L (x + y^2)\,dx + ydy$, де L — відрізок прямої $y = x - 1$ від точки A (1; 0) до точки B (—1; —2).

472. $\int\limits_L (2x^3 - x^2y)\,dx + 2x^2dy$, де L — відрізок прямої від точки A (0; 1) до точки B (2; 5).

473. $\int\limits_L (2x - y^2)\,dx + 8ydy$, де L — верхня половина еліпса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$ і обхід здійснюється за годинниковою стрілкою.

474. $\oint\limits_L x^2dx - 2xydy$, де L — еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, і обхід здійснюється проти годинникової стрілки.

475. $\int\limits_{OA} (x^2 - y)\,dx - y^2dy$ від точки O (0; 0) до A (1; 1), що сполучені між собою:

а) відрізком OA прямої $y = x$; б) дугою параболи $y = x^2$; в) дугою параболи $y^2 = x$; г) ламаною OBA, де B (0; 1); д) ламаною OCA, де C (1; 0).

476. $\int\limits_{OA} 2xydx + x^2dy$, де лінії OA — ті самі, що й у задачі 475.

477. $\int\limits_L xdy$, де L — права половина кола $x^2 + y^2 = a^2$ від точки A (0; $-a$) до точки B (0; a).

478. $\int\limits_{OA} -x\cos y\,dx + y\sin x\,dy$, де OA — відрізок між точками O (0; 0) і A (π; 2π).

479. $\int_L y\,dx + x\,dy$, де L — чверть кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

480. $\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2+y^2}$, де L — верхня половина кола $x^2+y^2=a^2$ від точки $(a;\ 0)$ до точки $(-a;\ 0)$.

481. $\int_L (2a-y)\,dx-(a-y)\,dy$, де L — перша арка циклоїди $x = a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

482. $\int_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, де L — чверть астроїди $x=R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ від точки $(R;\ 0)$ до точки $(0;\ R)$.

483. $\int_{OA} 4x\sin^2 y\,dx + y\cos^2 2x\,dy$, де OA — відрізок між точками $O(0;\ 0)$ і $A(3;\ 6)$.

484. $\int_{AB}\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, де AB — відрізок прямої між точками $A(1;\ 1;\ 1)$ і $B(4;\ 4;\ 4)$.

485. $\int_L ydx+zdy+xdz$, де L — а) відрізок, що сполучає точки $O(0;\ 0;\ 0)$ і $C(a;\ a;\ a)$; б) ламана $OABC$, що сполучає точки O, $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(a;\ a;\ 0)$ і C.

486. $\int_L yzdx + z\sqrt{R^2-y^2}\,dy + xydz$, де L — дуга гвинтової лінії $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z=0$ до точки її перетину з площиною $z=a$.

487. $\oint_L y^2dx+z^2dy+x^2dz$, де L — лінія перетину сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ і циліндра $x^2+y^2=Rx$ $(R>0,\ z\geqslant 0)$, причому обхід здійснюється проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат.

488. $\int_{OA} xydx+yzdy+zxdz$, де OA — дуга кола $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $z=x$, розміщена по той бік площини Oxz, де $y>0$.

Упевнитися, що інтеграли в задачах 489—504 не залежать від шляху інтегрування, і обчислити їх.

489. $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy+ydx$. 490. $\int_{(0;1)}^{(3;4)} xdx+ydy$.

491. $\int_{(0;0)}^{(1;1)} (x+y)(dx+dy)$. 492. $\int_{(3;4)}^{(5,12)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$.

493. $\int_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$.

494. $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)\,dx+(6x^2y^2-5y^4)\,dy$.

495. $\int_{(1;\pi)}^{(2;\pi)} \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$.

496. $\int_{(0;1)}^{(1;1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$.

497. $\int_{(0;0)}^{(1;\pi)} e^x(\cos ydx - \sin ydy)$. 498. $\int_{(x_1;y_1)}^{(x_2;y_2)} \varphi(x)\,dx+\psi(y)\,dy$.

499. $\int_{(1;0;-3)}^{(0;4;8)} xdx+ydy-zdz$. 500. $\int_{(1;-1;2)}^{(2;1;3)} xdx-y^2dy+zdz$.

501. $\int_{(1;1;1)}^{(a;b;c)} yzdx+zxdy+xydz$. 502. $\int_{(7;2;3)}^{(5;3;1)} \frac{zxdy+xydz-yzdx}{(x-yz)^2}$.

503. $\int_{(0;0;0)}^{(2;4;5)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. 504. $\int_{(x_1;y_1;z_1)}^{(x_2;y_2;z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$.

Переконатися, що вирази у задачах 505—520 є повними диференціалами деяких функцій, і знайти ці функції.

505. $(3x^2-2xy+y^2)\,dx-(x^2-2xy+3y^2)\,dy$.

506. $4(x^2-y^2)(xdx-ydy)$. 507. $\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$.

508. $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. 509. $e^{xy}[(1+xy)\,dx+x^2dy]$.

510. $e^{x-y}[(1+x+y)\,dx+(1-x-y)\,dy]$.

511. $\frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}dx-\frac{x^2+\sqrt{x^2+y^2}}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}dy$.

512. $\left[\frac{x-2y}{(y-x)^2}+x\right]dx+\left[\frac{y}{(y-x)^2}-y^2\right]dy$.

513. $(2x\cos y - y^2\sin x)\,dx+(2y\cos x-x^2\sin y)\,dy$.

514. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

515. $\left[24x^2\sin 2y + \frac{4\sqrt{1+y^2}}{(1+x)^2}\right]dx + \left[16x^3\cos 2y - \frac{4y}{(1+x)\sqrt{1+y^2}} - 10y\right]dy.$

516. $\frac{dx+dy+dz}{x+y+z}$. **517.** $\frac{yzdx+xzdy+xydz}{1+x^2y^2z^2}$.

518. $\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}$.

519. $\frac{dx-3dy}{z} + \frac{3y-x+z^3}{z^2}\,dz.$

520. $e^{\frac{y}{z}}dx + \left(\frac{e^{y/z}(x+1)}{z} + ze^{yz}\right)dy + \left(-\frac{ye^{y/z}(x+1)}{z^2} + ye^{yz} + e^{-z}\right)dz.$

521. Підібрати число n так, щоб вираз

$$\frac{(x-y)\,dx+(x+y)\,dy}{(x^2+y^2)^n}$$

був повним диференціалом, і знайти відповідну первісну.

522. Підібрати числа a і b так, щоб вираз

$$\frac{(y^2+2xy+ax^2)\,dx-(x^2+2xy+by^2)\,dy}{(x^2+y^2)^2}$$

був повним диференціалом, і знайти відповідну первісну.

Довести, що задані в задачах 523—530 інтеграли дорівнюють нулю незалежно від виду функцій, які входять в підінтегральний вираз, і форми замкненої кривої L.

523. $\oint\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy.$ **524.** $\oint\limits_L f(xy)(ydx+xdy).$

525. $\oint\limits_L f\left(\frac{y}{x}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2}$.

526. $\oint\limits_L [f(x+y)+f(x-y)]\,dx + [f(x+y)-f(x-y)]\,dy.$

527. $\oint\limits_L \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy + \chi(z)\,dz.$

528. $\oint\limits_L f(x+y+z)(dx+dy+dz).$

529. $\oint\limits_L f(x^2+y^2+z^2)(xdx+ydy+zdz).$

530. $\oint\limits_L f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})(xdx+ydy+zdz).$

У задачах 531—534 за допомогою формули Гріна звести задані криволінійні інтеграли до подвійних.

531. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y\,[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy.$

532. $\oint\limits_L \frac{\ln x}{x}y^2dx + (x^2\ln y + \ln^2 x)\,dy.$

533. $\oint\limits_L \frac{3}{4}y^2(x^2-2)\,dx + \frac{x^2}{2}(1+xy)\,dy.$

534. $\oint\limits_L (e^{xy}+2x\cos y)\,dx + (e^{xy}-x^2\sin y)\,dy.$

У задачах 535—543 обчислити криволінійні інтеграли: 1) за допомогою формули Гріна; 2) безпосереднім інтегруванням.

535. $\oint\limits_L xdy$, де L — контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $3x+2y-6=0$.

536. $\oint\limits_L (x^2+y^2)\,dy$, де L — контур чотирикутника з вершинами в точках $O\,(0;\,0)$, $A\,(2;\,0)$, $B\,(4;\,4)$, $C\,(0;\,4)$.

537. $\oint\limits_L y^2dx+(x+y)^2dy$, де L — контур трикутника з вершинами $A\,(a;\,0)$, $B\,(a;\,a)$, $C\,(0;\,a)$.

538. $\oint\limits_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)\,dy$, де L — контур трикутника з вершинами $A\,(1;\,1)$, $B\,(3;\,2)$, $C\,(2;\,5)$.

539. $\oint\limits_L (1-x^2)\,ydx+(1+y^2)\,xdy$, де L — коло $x^2+y^2=R^2$.

540. $\oint\limits_L (xy+x+y)\,dx+(xy+x-y)\,dy$, де L:

1) еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;

2) коло $x^2+y^2=ax$.

541. $\oint\limits_L y\cos xdx+(\cos y+\sin x)\,dy$, де L — еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

542. $\oint\limits_L e^x[(1-\cos y)\,dx-(y-\sin y)\,dy]$, де L — контур, який обмежує область $0\leqslant x\leqslant\pi$, $0\leqslant y\leqslant\sin x$.

543. $\oint\limits_L e^{y^2-x^2}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$, де L — коло $x^2+y^2=R^2$.

544. За допомогою формули Гріна довести, що

1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy = \frac{1}{3}\oint\limits_L x^3dy+y^3dx;$

2) $\oint\limits_L [x\cos(\widehat{x,\vec{n}})+y\sin(\widehat{x,\vec{n}})]\,dl = 2S;$

3) $\oint\limits_L (2xy - y)\,dx + x^2dy = S,$

де $\vec{n}$ — напрям зовнішньої нормалі до кривої L, $(x, \widehat{\vec{n}})$ — кут між додатним напрямом осі Ox і нормаллю $\vec{n}$, S — площа області D, обмеженої кривою L.

545. Довести, що

1) $\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L Pdy - Qdx;$

2) $\iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \oint\limits_L [P\cos(\widehat{x, \vec{n}}) + Q\sin(\widehat{x, \vec{n}})]\,dl;$

3) $\iint\limits_D \left(P\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial P}{\partial x}\right) dxdy = \oint\limits_L PQdy;$

4) $\iint\limits_D \left(P\frac{\partial Q}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\oint\limits_L PQdx;$

5) $\oint\limits_L \varphi(y)\,dx + [x\varphi'(y) + x^3]\,dy = 3I_y,$

де $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ — неперервні функції, які в області D, обмеженій контуром L, мають неперервні частинні похідні першого порядку, I_y — момент інерції області D.

У задачах 546—555 обчислити за допомогою криволінійних інтегралів площі фігур, якщо їх обмежують такі лінії.

546. Еліпс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

547. Астроїда $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

548. Парабола $(x + y)^2 = ax$ $(a > 0)$ і вісь Ox.

549. Кардіоїда $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

550. Петля декартового листка $x^3 + y^3 = 3axy$ $(a > 0)$.

551. Лемніската $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

552. Петля кривої $(x + y)^3 = xy$. **553.** Петля кривої $(x + y)^4 = x^2y$.

554. Крива $y^2 = x^2 - x^4$.

555. Крива $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ і осі координат.

556. Знайти роботу сили $\vec{F} = xy\vec{i} + (x + y)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з початку координат по кривій $y = x^3$ в точку $A(1;\ 1)$.

557. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F} = x^2y\vec{i} + (y - x)\vec{j}$. Обчислити роботу при переміщенні точки з початку координат у точку $A(1;\ 1)$: 1) по прямій $y = x$; 2) по параболі $y = x^2$; 3) по кубічній параболі $y = x^3$; 4) по ламаній, що сполучає точки $O(0;\ 0)$, $C(1;\ 0)$, $A(1;\ 1)$; 5) по ламаній, що сполучає точки $O(0;\ 0)$, $B(0;\ 1)$, $A(1;\ 1)$.

558. Обчислити роботу сили $\vec{F} = x^2\vec{i} - \vec{j} - zy\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(1; -1; 2)$ в точку $B(2; 0; 3)$ вздовж відрізка AB.

559. Показати, що робота сили $\vec{F} = \frac{x + 2y}{(x + y)^2}\vec{i} + \frac{y}{(x + y)^2}\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки з точки $A(1;\ 1)$ в точку $B(3;\ 1)$ не залежить від форми кривої, що сполучає ці точки. Знайти роботу.

560. Обчислити роботу сили тяжіння при переміщенні маси m з точки $(x_1;\ y_1;\ z_1)$ в точку $(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

561. Сила за величиною обернено пропорційна відстані точки її прикладання від площини Oxy і напрямлена до початку координат (коефіцієнт пропорційності k). Обчислити роботу при переміщенні точки під дією цієї сили вздовж прямої $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ від точки $(a;\ b;\ c)$ до точки $(2a;\ 2b;\ 2c)$.

562. Сила за величиною обернено пропорційна відстані точки її прикладання від осі Oz (коефіцієнт пропорційності k), перпендикулярна до цієї осі і напрямлена до неї. Обчислити роботу сили при переміщенні точки під дією цієї сили по колу $x = \cos t$, $y = 1$, $z = \sin t$ від точки $(1;\ 1;\ 0)$ до точки $(0;\ 1;\ 1)$.

563. Довести, що робота сили притягання двох точкових мас, яка виконується при переміщенні однієї з них, не залежить від форми шляху, коли відомо, що сила притягання F визначається законом Ньютона $F = \frac{km_1m_2}{r^2}$, де k — гравітаційна стала; r — відстань між точками; m_1 і m_2 — маси, зосереджені в цих точках.

§ 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Поверхневі інтеграли першого роду

Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна на гладкій поверхні σ, що задана рівнянням $z = z(x, y)$ і однозначно проектується на площину Oxy в область D_{xy}, то поверхневий інтеграл першого роду $\iint\limits_\sigma f(x, y, z)\,d\sigma$ можна обчислити за формулою

$$\iint\limits_\sigma f(x, y, z)\,d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Аналогічно можна записати формули, що виражають інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проекціями на площини Oxz та Oyz.

За допомогою поверхневого інтеграла першого роду можна обчислювати:

а) площу P поверхні σ : $P = \iint\limits_\sigma d\sigma$;

б) масу m матеріальної поверхні σ : $m = \iint\limits_{\sigma} \gamma d\sigma$, де $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — поверхнева густина маси поверхні; якщо поверхня однорідна, то $\gamma = 1$;

в) статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} поверхні відносно координатних площин Oxy, Oxz, Oyz:

$$M_{xy} = \iint\limits_{\sigma} z\gamma d\sigma; \quad M_{xz} = \iint\limits_{\sigma} y\gamma d\sigma; \quad M_{yz} = \iint\limits_{\sigma} x\gamma d\sigma;$$

г) координати x_c, y_c, z_c центра мас поверхні:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m};$$

д) моменти інерції I_x, I_y, I_z, I_0 поверхні відповідно відносно осей Ox, Oy, Oz і початку координат:

$$I_x = \iint\limits_{\sigma} (y^2 + z^2)\gamma d\sigma; \quad I_y = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + z^2)\gamma d\sigma;$$

$$I_z = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\gamma d\sigma; \quad I_0 = \iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma d\sigma;$$

е) нехай m — маса, зосереджена в деякій фіксованій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$, що не лежить на поверхні σ. Тоді сила $\vec{F}$, з якою матеріальна поверхня σ притягує матеріальну точку M_0 масою m, обчислюється за формулою

$$\vec{F} = km \iint\limits_{\sigma} \gamma(x, y, z) \frac{\vec{r}}{r^3} d\sigma,$$

де k — гравітаційна стала; $\vec{r} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$;

є) сумарний заряд E поверхні σ, в кожній точці якої розподілені електричні заряди з поверхневою густиною заряду $e = e(x, y, z)$, визначається інтегралом

$$E = \iint\limits_{\sigma} e(x, y, z)\, d\sigma.$$

У задачах 564—576 обчислити поверхневі інтеграли першого роду.

564. $\iint\limits_{\sigma} (2x + y + z - 1)\, d\sigma$, де σ — частина площини $3x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті.

565. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + z)^2}$, де σ — частина площини $x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті.

566. $\iint\limits_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) d\sigma$, де σ — частина площини $6x + 4y + 3z = 12$, розміщена в першому октанті.

567. $\iint\limits_{\sigma} x^2yzd\sigma$, де σ — частина площини $x + y + z = 1$, розміщена в першому октанті.

568. $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, де σ — півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

569. $\iint\limits_{\sigma} xd\sigma$, де σ — частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщена в першому октанті.

570. $\iint\limits_{\sigma} yd\sigma$, де σ — півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

571. $\iint\limits_{\sigma} x^2y^2d\sigma$, де σ — півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

572. $\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma$, σ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

573. $\iint\limits_{\sigma} (x^2 + y^2)\, d\sigma$, де σ — частина конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, розміщена між площинами $z = 0$ і $z = 1$.

574. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^2}$, де σ — частина циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, обмежена площинами $z = 0$ і $z = h$, а r — відстань від точки поверхні до початку координат.

575. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^2}$, де σ — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а r — відстань від точки сфери до фіксованої точки $A(0; 0; a)$ $(a > r)$.

576. $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r}$, де σ — частина гіперболічного параболоїда $z = xy$, що відтинається циліндром $x^2 + y^2 = R^2$, а r — відстань від точки поверхні до осі Oz.

577. Довести, що $\iint\limits_{\sigma} \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{Oz}})\, d\sigma = 0$, де σ — довільна замкнена поверхня, а $\vec{n}$ — нормаль до неї.

578. Довести формулу Пуассона

$$\iint\limits_{\sigma} f(ax + by + cz)\, d\sigma = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2})\, dt,$$

де σ — поверхня сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

У задачах 579—582 задано поверхні. Знайти їхні маси.

579. Куб $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, якщо в точці $M(x, y, z)$ поверхнева густина $\gamma(x, y, z) = xyz$.

580. Частина поверхні гіперболічного параболоїда $2az = x^2 - y^2$, що відтинається циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, якщо поверхнева густина в кожній точці поверхні $\gamma(x, y, z) = 15|z|$.

581. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

582. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, якщо поверхнева густина в кожній її точці дорівнює квадрату відстані цієї точки до деякого фіксованого діаметра сфери.

583. Обчислити площу частини поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщеної всередині циліндра $x^2 + y^2 = Rx$ (верхня і нижня основи тіла Вівіані).

584. Обчислити бічну поверхню тіла Вівіані (див. задачу 583).

У задачах 585—592 задано поверхні. Обчислити координати центрів мас цих поверхонь.

585. Однорідна поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмеженої площиною $z = 1$.

586. Однорідна поверхня частини конуса $\frac{R^2 z^2}{H^2} = x^2 + y^2$, обмеженої площиною $z = H$.

587. Однорідна поверхня частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, розміщеної в першому октанті.

588. Однорідний сегмент сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $0 < h \leqslant z \leqslant R$.

589. Однорідна частина циліндричної поверхні $x^2 = 2(1 - x)$, обмеженої площинами $y = x$, $y = 0$, $z = 0$.

590. Однорідна частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, обмеженої площинами $x + y = \pm R$, $x - y = \pm R$.

591. Частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = z^2$ при $0 \leqslant z \leqslant 1$, якщо її густина в кожній точці дорівнює відстані цієї точки від осі конуса.

592. Півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, якщо її густина в кожній точці дорівнює відстані цієї точки від радіуса, перпендикулярного до основи півсфери.

У задачах 593—597 задано однорідні поверхні. Знайти їхні моменти інерції.

593. Частина поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$ при $0 \leqslant z \leqslant h$ (відносно осі Oz).

594. Півсфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (відносно: а) площини основи; б) осі симетрії).

595. Сегмент сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $0 < h \leqslant z \leqslant R$ (відносно осі Oz).

596. Частина поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 2az$ при $0 \leqslant z \leqslant a$ (відносно осі Oz).

597. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (відносно діаметра).

598. З якою силою притягує однорідна частина зрізаного конуса $z^2 = x^2 + y^2$ при $0 < b \leqslant z \leqslant a$ матеріальну точку маси m, розміщену у вершині конуса?

599. Визначити сумарний електричний заряд, розподілений на частині поверхні $z^2 = x^2 + y^2 + a^2$ при $a \leqslant z \leqslant a\sqrt{2}$, якщо густина заряду в кожній точці поверхні дорівнює $e = z$.

600. Визначити сумарний електричний заряд, розподілений на частині поверхні параболоїда $2z = x^2 + y^2$, що відтинається від нього циліндром $x^2 + y^2 = 1$, якщо густина заряду $e = \sqrt{z}$.

4.2. Поверхневі інтеграли другого роду

Нехай σ — гладка орієнтовна поверхня, що однозначно проектується на координатні площини Oxy, Oxz і Oyz відповідно в області D_{xy}, D_{xz} і D_{yz}, тобто може бути задана рівняннями $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$ і $x = x(y, z)$. Якщо $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси нормалі до обраної сторони поверхні σ і $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ і $R = R(x, y, z)$ — неперервні функції, задані на цій поверхні, то криволінійний інтеграл другого роду $\iint\limits_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$ зводиться до суми трьох подвійних інтегралів:

$$\iint\limits_\sigma P(x, y, z)\,dydz + Q(x, y, z)\,dxdz + R(x, y, z)\,dxdy =$$
$$= \iint\limits_\sigma [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]\,d\sigma =$$
$$= \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y, z), y, z]\,dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q[x, y(x, z), z]\,dxdz \pm$$
$$\pm \iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\,dxdy,$$

де знаки перед подвійним інтегралом беруться відповідно ті самі, що й у $\cos\alpha$, $\cos\beta$ і $\cos\gamma$.

Зв'язок між поверхневим інтегралом другого роду по замкненій поверхні σ і потрійним інтегралом по області G, обмеженій цією поверхнею, встановлює формула Остроградського — Гаусса:

$$\iint\limits_\sigma Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz.$$

Поверхневий інтеграл другого роду називають також *потоком* вектора $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ через поверхню σ. Його можна розглядати як кількість рідини або газу, що протікає в заданому напрямі через поверхню σ за одиницю часу із швидкістю $\vec{a}$. Формула Остроградського — Гаусса дає змогу обчислювати потік вектора через замкнену поверхню.

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру L, що обмежує поверхню σ, виражається через поверхневий інтеграл другого роду за допомогою формули Стокса:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx dz.$$

При цьому нормаль до поверхні σ напрямлена так, щоб видимий з її кінця обхід контура L відбувався проти годинникової стрілки.

Інтеграл $\oint_L P dx + Q dy + R dz$ називають циркуляцією вектора $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ вздовж замкненого контура L. Його розглядають як роботу, що її виконує сила $\vec{a}$ вздовж кривої L. Формула Стокса виражає циркуляцію заданого вектора через потік іншого вектора, що залежить від заданого.

У задачах 601—616 обчислити поверхневі інтеграли другого роду.

601. а) $\iint_\sigma z dx dy$; б) $\iint_\sigma x dx dz$, де σ — зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x - y + z = 1$ з координатними площинами.

602. $\iint_\sigma x z^2 dx dy$, де σ — зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, розміщена в першому октанті.

603. $\iint_\sigma 2x dy dz - y dx dz$, де σ — зовнішня сторона частини поверхні циліндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

604. $\iint_\sigma yz dy dz + xz dx dz + xy dx dy$, де σ — зовнішня сторона поверхні трикутника, утвореного перетином площини $x + y + z = a$ з координатними площинами.

605. $\iint_\sigma x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де σ — зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить у першому октанті.

606. $\iint_\sigma x dy dz + y dx dz + z dx dy$, де σ — зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

607. $\iint_\sigma (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$, де σ — зовнішня сторона конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, де $0 \leqslant z \leqslant h$.

608. $\iint_\sigma xz dx dy + xy dy dz + yz dx dz$, де σ — зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

609. $\iint_\sigma x^2 y^2 z dx dy$, де σ — нижня сторона нижньої половини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R$.

610. $\iint_\sigma x^3 dy dz$, де σ — верхня сторона верхньої половини еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

611. а) $\iint_\sigma z dx dy$; б) $\iint_\sigma z^2 dx dy$, де σ — зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

612. $\iint_\sigma yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$, де σ — зовнішня сторона поверхні, розміщеної в першому октанті і обмеженої циліндром $x^2 + y^2 = R^2$ і площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.

613. $\iint_\sigma y^2 z dx dy + xz dy dz + x^2 y dx dz$, де σ — зовнішня сторона поверхні, розміщеної в першому октанті і обмеженої параболоїдом $z = x^2 + y^2$, циліндром $x^2 + y^2 = 1$ і координатними площинами.

614. $\iint_\sigma x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, де σ — зовнішня повна поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{b^2}$ $(0 \leqslant z \leqslant b)$.

615. $\iint_\sigma x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, де σ — зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

616. $\iint_\sigma \frac{dy dz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, де σ — зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

У задачах 617—619 обчислити інтеграли за допомогою формули Остроградського — Гаусса.

617. $\iint_\sigma (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) d\sigma$, де σ — зовнішня поверхня еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

618. $\iint\limits_{\sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy$, де σ — повна зовнішня поверхня циліндра $x^2 + y^2 = a^2$, $-H \leqslant z \leqslant H$.

619. Використати умови задач 606, 608, 611—616.

620. Знайти потік вектора $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$ через частину циліндричної поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant H \leqslant z$, у напрямі зовнішньої нормалі.

621. Знайти потік вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}$ через усю зовнішню поверхню тіла $\frac{H}{R^2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant H$.

622. Знайти потік вектора $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через частину поверхні гіперболоїда $z = \frac{H}{R^2}(x^2 - y^2)$, що відтинається площинами $x = 0$, $z = 0$, $x = R$ і орієнтована в напрямі орта $\vec{k} = (0;\ 0;\ 1)$.

623. Знайти потік вектора $\vec{a} = 2x^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ через усю поверхню тіла $\sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}$ у напрямі зовнішньої нормалі.

624. Довести, що потік радіуса-вектора $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через довільну гладку замкнену поверхню дорівнює потроєному об'єму тіла, обмеженого цією поверхнею.

625. Знайти потік вектора $\vec{a} = x^2\vec{i} + x\vec{j} + xz\vec{k}$ через частину поверхні параболоїда $y = x^2 + z^2$, що відтинається площинами $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$ і орієнтована в напрямі зовнішньої нормалі.

626. Знайти потік вектора $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$, де $\vec{r}$ — радіус-вектор точки $(x;\ y;\ z)$ через усю поверхню сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ у напрямі зовнішньої нормалі.

627. Застосовуючи формулу Остроградського — Гаусса, довести, що

$$\iint\limits_{\sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma = 0,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси зовнішньої нормалі до поверхні σ.

628. Довести, що

$$\iint\limits_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma = \iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) dxdydz,$$

де σ — гладка поверхня, що обмежує тіло V, u — неперервна функція разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — похідна в напрямі зовнішньої нормалі до поверхні σ.

Застосовуючи формулу Стокса, обчислити інтеграли в задачах 629—634. Результати перевірити безпосереднім обчисленням криволінійних інтегралів.

629. $\oint\limits_{L} y^2dx + z^2dy + x^2dz$, де L — контур $\triangle ABC$ з вершинами $A\ (a;\ 0;\ 0)$; $B\ (0;\ a;\ 0)$; $C\ (0;\ 0;\ a)$.

630. $\oint\limits_{L} x^2y^3dx + dy + zdz$, де L — коло $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

631. $\oint\limits_{L} xdx + (x + y)\, dy + (x + y + z)\, dz$, де L — крива $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

632. $\oint\limits_{L} (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz$, де L — коло $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x + y + z = 0$.

633. $\oint\limits_{L} y^2dx - x^2dy + z^2dx$, де L — контур, який дістали при перетині параболоїда $x^2 + z^2 = 1 - y$ з координатними площинами.

634. $\oint\limits_{L} (y - x)\, dx + (2x - y)\, dy + zdz$, де L — контур, що складається з відрізків осей Ox, Oy і дуги кола $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 0$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

У задачах 635—641 обчислити циркуляцію вектора $\vec{a}$ вздовж контура L двома способами: безпосередньо і за формулою Стокса.

635. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$, $L: \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$.

636. $\vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, $L: \{x^2 + z^2 = R^2,\ y = 1\}$.

637. $\vec{a} = (z^2 + y)\vec{i} + z\vec{j} + (x^2 - y)\vec{k}$, $L: \left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0\right\}$.

638. $\vec{a} = z\vec{i} - y\vec{k}$, $L: \{x^2 + y^2 = 4,\ \ x + 2z = 5\}$.

639. $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$, $L: \{x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$.

640. $\vec{a} = (z^2 - x^2)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + (y^2 - z^2)\vec{k}$, $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = z^2\}$.

641. $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $L: \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ x + y + z = R\}$.

642. Перевірити формулу Стокса для функцій $P = y^2 + z^2$, $Q = z^2 + x^2$, $R = x^2 + y^2$, якщо σ — поверхня, яку вирізає циліндр $x^2 + y^2 = 2rx$ із сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ $(R > r,\ z > 0)$.

ВІДПОВІДІ

Глава 1

§ 1. 1. 10. 2. —20. 3. —4. 4. —6. 5. 0. 6. 8. 7. 2. 8. $\frac{3}{4}$. 9. 2. 10. $2(2-\sqrt{2})$. 11. $\frac{1}{2}$. 12. $\frac{1}{2}$. 13. 35. 14. 12. 15. 4. 16. —8. 17. 120. 18. 118. 19. —9. 20. 40. 21. 32. 22. 2; —5. 23. 1; 4. 24. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. 25. πn, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. 26. 1; —3. 27. 1. 28. $\left[-\frac{5}{2}; -2\right]$. 29. $(-\infty; -5) \cup (-1; \infty)$. 30. $-\frac{1}{2}$; 1. 31. 1. 32. $(-\infty; \infty)$. 33. $[-2; -1] \cup [1; 2]$. 34. $-2a^3$. 35. 0. 36. $a(b-d)(c-d)(c-b)$. 37. 0. 38. $-\cos 2\alpha$. 39. 3. 52. —10. 53. $a(1-a)$. 54. $-2b$. 55. 4. 56. 900. 57. —160. 58. 16. 59. 174. 60. $3a+2c+d-b$. 61. $4d-a-b-c$. 62. $2a-b-c-d$. 63. $9a+12b+3d-9c$. 64. $8a+15b+12c-19d$. 65. $2a-8b+c+5d$. 66. $4a$. 67. a. 68. $5a$. 69. $3c$. 70. —3. 71. $a^2(b^2-a^2)$. 72. —24. 73. $b^2(a^3+b^3)$. 74. 54. 75. 20. 76. 48. 77. 1. 78. 160. 79. x^2z^2. 80. 394. 81. 150. 82. 360. 86. а) 24; б) 120. 87. *Вказівка.* Помножити перший стовпчик на 1000, другий — на 100, третій — на 10 і суму знайдених стовпчиків скласти з четвертим стовпчиком. 90. —7. 91. 24. 92. 14. 93. 1. 94. $(-1)^{n-1}(2n+1)$. 95. $(-1)^{n-1}$. 96. $(-1)^{n-1}$. 97. $(-1)^{n-1}n!$ 98. $(-1)^n(n-1)!$. 99. $2^{n(n-1)}n(n-1)$. 100. $x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}$ *Вказівка.* Елементи, що стоять не на головній діагоналі, записати у вигляді $a_i=0+a_i$ і знайдений визначник подати у вигляді суми визначників. 101. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\ldots(x_n-a_n)\left(1+\frac{a_1}{x_1-a_1}+\frac{a_2}{x_2-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{x_n-a_n}\right)$ при $x_i \neq a_i$; 0 при $x_i=a_i$, $i=1, 2, \ldots, k$, $k \geqslant 2$. *Вказівка.* Покласти $x_i=(x_i-a_i)+a_i$.

§ 2. 103. 1) $\begin{pmatrix}5 & -4\\ 3 & -15\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 8\\ 7 & -3\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1{,}5 & -1\\ -0{,}5 & 6\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}4 & 8\\ 6 & -7\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. 104. $\begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 9 & 8 & 9\end{pmatrix}$. 105. (3 4 15 2). 107. $A=\frac{1}{2}(A-A^*)+\frac{1}{2}(A+A^*)$.

109. $\begin{pmatrix}1 & 3 & -\frac{5}{2}\\ 3 & 5 & 1\\ -\frac{5}{2} & 1 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 2\\ -\frac{1}{2} & -2 & 0\end{pmatrix}$. 110. $\begin{pmatrix}-9 & 13\\ 15 & 4\end{pmatrix}$. 111. $\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix}$.

112. $\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$. 113. $\begin{pmatrix}31\\ 12\\ 9\end{pmatrix}$. 114. $\begin{pmatrix}56\\ 69\\ 17\end{pmatrix}$. 115. $\begin{pmatrix}12 & 0 & -6 & 9 & 3\\ 4 & 0 & -2 & 3 & 1\\ -4 & 0 & 2 & -3 & -1\\ 20 & 0 & -10 & 15 & 5\\ 8 & 0 & -4 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

116. (34). 117. а) $\begin{pmatrix}4 & -8\\ 12 & -4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}4 & 1 & 9\\ -2 & -6 & 3\\ -8 & -9 & 2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. 118. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

119. $\begin{pmatrix}3 & 4 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$. 120. $\begin{pmatrix}a^3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & b^3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c^3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d^3\end{pmatrix}$. 121. $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & abc\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

123. $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, $a^2=-bc$. 124. $\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix}$, $a^2=1-bc$.

125. $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$. a, b — довільні числа. 126. $\begin{pmatrix}a & 2b\\ 3b & a+3b\end{pmatrix}$, a, b — довільні числа.

127. $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. 128. $\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. 129. $\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. 130. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{pmatrix}$.

131. $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$. 132. $\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$. 133. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 31 & -19 & 3 & -4\\ -23 & 14 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

134. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. 135. $\begin{pmatrix}5 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. 136. $\varnothing$. 137. $\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$.

138. $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$. 139. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. 140. $\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$. 141. 1. 142. 2. 143. 2. 144. 2. 145. 2. 146. 3. 147. 2. 148. 4. 149. 3. 150. 5.

§ 3. 151. $x=16$, $y=7$. 152. $x=2$, $y=3$. 153. $x=5$, $y=-4$. 154. $x=0$, $y=2$. 155. $x=2$, $y=-1$, $z=1$. 156. $x=1$, $y=3$, $z=5$. 157. $x=2$, $y=-1$, $z=-3$. 158. $x=1$, $y=-1$, $z=2$. 159. $x=1$, $y=1$, $z=1$. 160. $x=2$, $y=3$, $z=4$. 161. $x=2z-1$, $y=z+1$, $z \in R$. 162. Система розв'язків не має. 163. Система розв'язків не має. 164. Система має нескінчене число розв'язків. 165. $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1$. 166. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$. 167. $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$. 168. $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=5$. 169. $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$. 170. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-1$, $x_4=-2$. 171. $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=-3$, $x_4=3$. 172. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=1$, $x_4=-1$. 173. $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$. 174. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=2$. 175. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=1$. 176. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=1$. 177. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$, $x_4=0$, $x_5=3$. 178. $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=-2$, $x_4=-2$, $x_5=1$. 179. $x=1$, $y=-1$, $z=2$. 180. $x=1$, $y=0$, $z=3$. 181. $x=-1$, $y=2$, $z=0$. 182. $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=4$. 183. $x=2$, $y=-1$, $z=1$. 184. $x=-1$, $y=2$, $z=1$. 185. $x=1$, $y=2$, $z=-2$. 186. $x=-1$, $y=1$, $z=-2$. 187. $x=1$, $y=-1$, $z=2$. 188. $x=0$, $y=-1$, $z=2$. 189. $x=1$, $y=0$, $z=3$. 190. Система несумісна. 191. $x=\frac{1}{4}(9-z)$, $y=\frac{1}{2}(3z+3)$. 192. Система несумісна. 193. $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$, $z=\frac{1}{2}$.

194. $x=\frac{5}{3}t$, $y=1-\frac{t}{3}$, $z=t$, $t\in R$. 195. $x_3=-x_1+2x_2$, $x_4=1$. 196. $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=-2$. 197. $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_3=-1$, $x_4=1$. 198. $x_1=6-x_5$, $x_2=-5-x_5$, $x_3=3$, $x_4=-1-x_5$. 199. Система несумісна. 200. $x_1=-1+x_3+2x_4$, $x_2=-3+x_3+2x_4$. 201. $x=0$, $y=0$, $z=0$. 202. $x=-t$, $y=5t$, $z=3t$, $t\in R$. 203. $x=0$, $y=0$, $z=0$. 204. $x=7t$, $y=8t$, $z=13t$, $t\in R$. 205. $x=2t$, $y=t$, $z=-4t$. 206. $x=3t$, $y=t$, $z=5t$. 207. $x=0$, $y=0$, $z=0$. 208. $x=4t$, $y=t$, $z=-5t$. 209. $x=0$, $y=0$, $z=0$. 210. $x=-t$, $y=13t$, $z=5t$. 211. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. 212. $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. 213. $x_1=\frac{7}{6}x_5-x_3$, $x_2=\frac{5}{6}x_5+x_3$, $x_4=\frac{x_5}{3}$. 214. $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=x_5$. 215. $\lambda=0$; 7. 216. $\lambda\neq 1$; -2. 218. $x_1=1+\sqrt{3}t$, $x_2=t$. 219. Система несумісна. 220. Система несумісна. 221. $x_1=-1+2t$. $x_2=1+t$, $x_3=t$. 222. $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$, $x_4=2$. 223. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=-\frac{3}{2}$. 224. $x_1=-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}x_3-\frac{9}{11}x_4$, $x_2=\frac{10}{11}-\frac{5}{11}x_3+\frac{1}{11}x_4$. 225. Система несумісна. 226. $x_1=t$, $x_2=-13+3t$, $x_3=-7$, $x_4=0$. 227. $x_1=-\frac{6}{7}+\frac{8}{7}x_4$, $x_2=\frac{1}{7}-\frac{13}{7}x_4$, $x_3=\frac{15}{7}-\frac{6}{7}x_4$. 228. Якщо $\lambda\neq 0$, то $x=1-\lambda$, $y=\lambda$, $z=0$. Якщо $\lambda=0$, то $x=1$, $z=0$, y — довільна. 229. Якщо $(\lambda-1)(\lambda+3)\neq 0$, то $x_1=x_2=x_3=x_4=\frac{1}{\lambda+3}$; якщо $\lambda=-3$, то система несумісна; якщо $\lambda=1$, то $x_1=1-x_2-x_3-x_4$. 230. Якщо $\lambda(\lambda+3)\neq 0$, то $x_1=x_2=x_3=\frac{1}{\lambda+3}$; якщо $\lambda=-3$, то система несумісна; якщо $\lambda=0$, то $x_1=1-x_2-x_3$. 231. При $\lambda\neq 1$; 3 система має єдиний розв'язок $x_1=\frac{2}{3-\lambda}$, $x_2=x_3=0$, $x_4=\frac{3-7\lambda}{(\lambda-1)(3-\lambda)}$. При $\lambda=1$ система несумісна. При $\lambda=3$ система має загальний розв'язок $x_1=-\frac{17}{9}-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{9}x_4$, $x_2=2$.

Глава 2

§ 1. 3. $|\vec{a}-\vec{b}|=22$. 4. $|\vec{a}+\vec{b}|=20$. 5. $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$. 6. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}\approx 11{,}4$, $|\vec{a}-\vec{b}|=7$. 7. 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$; 2) $\widehat{\vec{a}\vec{b}}<\frac{\pi}{2}$; 3) $\widehat{\vec{a}\vec{b}}>\frac{\pi}{2}$. 8. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. 10. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$, $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$. 11. $|\vec{R}|=15$. 13. $\overrightarrow{AM}=\vec{c}+\frac{\vec{a}}{2}$, або $\overrightarrow{AM}=\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}$; $\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CP}=\vec{b}+\frac{\vec{c}}{2}$. 14. $\overrightarrow{AM}=-\left(\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BN}=\vec{a}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$. 15. $\overrightarrow{D_1A}=-\left(\vec{c}+\frac{1}{5}\vec{a}\right)$, $\overrightarrow{D_2A}=-\left(\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{a}\right)$, $\overrightarrow{D_3A}=-\left(\vec{c}+\frac{3}{5}\vec{a}\right)$, $\overrightarrow{D_4A}=-\left(\vec{c}+\frac{4}{5}\vec{a}\right)$. 16. $\vec{r}_4=\vec{r}_1-\vec{r}_2+\vec{r}_3$. 17. $\vec{r}_4=\vec{r}_1-\vec{r}_2+\vec{r}_3$,

$\vec{r}\,'_2=\vec{r}\,'_1-\vec{r}_1+\vec{r}_2$, $\vec{r}\,'_3=\vec{r}\,'_1-\vec{r}_1+\vec{r}_3$, $\vec{r}\,'_4=\vec{r}\,'_1-\vec{r}_2+\vec{r}_3$. 18. $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\vec{m}+\frac{1}{2}\vec{n}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{m}+\vec{n}$, $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{m}+\frac{\vec{n}}{2}$, $\overrightarrow{EF}=-\frac{\vec{m}}{2}-\frac{\vec{n}}{2}$. 19. $\overrightarrow{AB}=\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD}=-\frac{\vec{a}}{2}+\frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{DA}=-\frac{\vec{a}}{2}-\frac{\vec{b}}{2}$. 20. $\overrightarrow{BC}=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\frac{|\vec{b}|-|\vec{a}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\frac{|\vec{a}|-|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$. 21. $\overrightarrow{AD}=\frac{m}{m+n}\vec{b}+\frac{n}{m+n}\vec{c}$. 22. $|\vec{Q}|=|\vec{P}|$, $|\vec{T}|=\sqrt{2}|\vec{P}|$. 23. Введемо базис $\{\vec{a},\vec{b}\}$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$. Маємо $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}=\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{a}$. $\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}=\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$, $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{BM}=\mu\overrightarrow{BL}$. Знайдемо невідомі λ і μ. Оскільки $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{a}+\lambda\left(\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{a}\right)=\left(1-\frac{3}{5}\lambda\right)\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\mu\left(\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}\right)=\mu\vec{a}+\left(1-\frac{5}{8}\mu\right)\vec{b}$, то, прирівнявши коефіцієнти при $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дістанемо систему рівнянь, з якої знайдемо $\lambda=\frac{3}{5}$, $\mu=\frac{16}{25}$. Отже, $DM:MK=3:2$, $BM:ML=16:9$. 24. 1) Додавши рівності $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BD}$, дістанемо $3\overrightarrow{BO}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}$. Оскільки $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (доведіть), то $\overrightarrow{BO}=\left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$. 2) Вектор $\overrightarrow{KL}$ є вектором медіани $\triangle KDB$. Маємо $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KB})$, $\overrightarrow{KO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{KD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OD}$, тому $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{KO}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}(2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})$, отже, $\overrightarrow{KL}=\left\{-\frac{1}{2};\ 1;\ 0\right\}$.

§ 2. 29. (4; 3), (—5; 2), (4; —3). 30. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 31. 1) У I і III; 2) у II і IV; 3) у I і III; 4) у II і IV. 32. 1) $X=x-3$, $Y=y-4$; 2) $X=x+2$, $Y=y-1$; 3) $X=x+3$, $Y=y-5$. 33. $A(4;\ -1)$, $B(0;\ -4)$, $C(2;\ 0)$. 34. (11; —12). 35. $d=5$. 36. $A(3;\ -2)$, $B(0;\ 0)$, $C(-1;\ 2)$. 37. $A(3\sqrt{3};\ 1)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}\right)$, $C(3;\ -\sqrt{3})$. 38. $A\left(\frac{3}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$, $M\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}};\ \frac{y-x}{\sqrt{2}}\right)$. 39. $M_1(1;\ 5)$, $M_2(2;\ 0)$, $M_3(16;\ -5)$. 40. $2x=(X-Y)\sqrt{2}+1$, $2y=(X+Y)\sqrt{2}+1$. 43. 1) На одиничному колі з центром у полюсі; 2) на промені, що виходить з полюса під кутом $\frac{\pi}{6}$ до Ox. 44. *Вказівка*. Використати формули переходу $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. $M_1(0;\ 6)$, $M_2(5;\ 0)$, $M_3(\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $M_4(5;\ -5\sqrt{3})$, $M_5(-4;\ 4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3};\ -6)$. 45. *Вказівка*. Використати форму-

ли переходу від декартових до полярних координат: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$. $M_1\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\ \pi)$, $M_3\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(2;\ -\frac{3}{4}\pi\right)$, $M_5\left(2;\ -\frac{\pi}{3}\right)$.
46. 1) $\left(1;\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3;\ \frac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $(\rho;\ \varphi+\pi)$; 2) $\left(1;\ \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(3;\ \frac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$, $(\rho;\ 2\pi-\varphi)$. **48.** $A(1;\ \sqrt{3};\ -1)$; $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 5;\ 3)$.
49. $A\left(\sqrt{2};\ \frac{3\pi}{4};\ 2\right)$, $B\left(2;\ \frac{\pi}{2};\ 3\right)$, $C(5;\ 0;\ 1)$. **50.** $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ 1\right)$.
51. $A\left(9;\ -\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right);\ \arcsin\frac{1}{9}\right)$; $B\left(3;\ -\frac{3\pi}{4};\ \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; $C\left(5;\ -\frac{\pi}{2};\ \arcsin\frac{3}{5}\right)$; $D\left(\sqrt{3};\ -\frac{\pi}{4};\ \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$; $E\left(1;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$.
52. $r \arccos[\cos(\varphi_2-\varphi_1)\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2]$.

§ 3. 54. $N(4;\ 1;\ 1)$. **55.** $(-1;\ 2;\ 3)$. **56.** $|\vec{a}| = 7$. **57.** $z = \pm 3$. **58.** $a_x = 2\sqrt{2}$, $a_y = 2$, $a_z = -2$. **59.** $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$. **60.** $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$. **61.** Одиничні вектори, напрямлені по вказаних променях, мають відповідно координати: $\vec{a}_1^0 = (\cos\alpha_1;\ \cos\beta_1;\ \cos\gamma_1)$, $\vec{a}_2^0 = (\cos\alpha_2;\ \cos\beta_2;\ \cos\gamma_2)$. Сума цих векторів $\vec{a}_1^0 + \vec{a}_2^0 = (\cos\alpha_1+\cos\alpha_2;\ \cos\beta_1+\cos\beta_2;\ \cos\gamma_1+\cos\gamma_2)$ є вектор, напрямлений по бісектрисі кута між вказаними променями ($|\vec{a}_1^0| = |\vec{a}_2^0|$, діагональ ромба ділить кут ромба пополам). Знайдемо спочатку довжину цього вектора

$$|\vec{a}_1^0+\vec{a}_2^0| = \sqrt{(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)^2+(\cos\beta_1+\cos\beta_2)^2+(\cos\gamma_1+\cos\gamma_2)^2} = \sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}.$$

Тоді напрямні косинуси цього вектора будуть:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\alpha_1+\cos\alpha_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}},$$
$$\cos\beta = \frac{\cos\beta_1+\cos\beta_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}},$$
$$\cos\gamma = \frac{\cos\gamma_1+\cos\gamma_2}{\sqrt{2(1+\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2)}}.$$

62. 1) Може; 2) не може. **63.** 1) Не може; 2) може. **64.** Якщо A, B, C — точки перетину площини з осями Ox, Oy, Oz, а P — основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину ABC, то напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{OP}$ дорівнюють: $\cos\alpha = \frac{p}{a}$, $\cos\beta = \frac{p}{b}$, $\cos\gamma = \frac{p}{c}$. Сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці: $\frac{p^2}{a^2}+\frac{p^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2} = 1$. Розділивши почленно цю рівність на P^2, дістанемо потрібне співвідношення $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{1}{p^2}$.

65. $\vec{a} = \{1;\ -1;\ \sqrt{2}\}$. **66.** $M(3;\ 3;\ 3)$. **67.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\sqrt{26}$; 3) $-\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4) $-\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
68. 1) 10; $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$; 2) 6; $\alpha = 135°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$.
69. $\vec{a}-\vec{b} = \{5;\ -3;\ 6\}$, $\vec{a}+3\vec{b} = \{1;\ 5;\ 10\}$. **70.** Колінеарні, $\vec{b} = -3\vec{a}$. **71.** $\alpha = 3$; $\beta = -8$. **72.** Можуть. **73.** $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$, напрямлені в один бік. **74.** $\vec{a}_0 = \left\{\frac{6}{7};\ -\frac{2}{7};\ -\frac{3}{7}\right\}$. **75.** $|\vec{a}+\vec{b}| = 6$, $|\vec{a}-\vec{b}| = 14$. **76.** $\vec{c} = \{-3;\ 15;\ 12\}$.
77. $\overrightarrow{AM} = \{3;\ 4;\ -3\}$, $\overrightarrow{BN} = \{0;\ -5;\ 3\}$, $\overrightarrow{CP} = \{-3;\ 1;\ 0\}$. **78.** $(2;\ -1)$. **79.** $Q(5;\ 6)$.
80. $(4;\ -2;\ 5)$, $(2;\ 1)$, $(1;\ -3;\ 5)$. **81.** $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$. **82.** $N(3;\ -3)$. **83.** $(0;\ -3)$, $(2;\ 1)$, $(-6;\ 7)$. **84.** $(-2;\ -6)$, $(8;\ 2)$, $(-6;\ 10)$. **85.** $D(-2;\ 2)$. **86.** $(-5;\ -2)$.
87. $C\left(10\frac{1}{2};\ 10\right)$, $D(4;\ -3)$. **88.** $(6;\ -3)$, $(2;\ -5)$. **89.** 13. **90.** $(3;\ 0)$, $(4;\ 2)$.
91. $(7{,}2;\ 5{,}4)$. **92.** $\left(\frac{196}{65};\ \frac{112}{65}\right)$. **93.** $\left(\frac{7}{2};\ -1\right)$. **94.** $\frac{14}{3}\sqrt{2}$. **95.** $(-2;\ 1)$. **96.** $(7;\ 0)$.
97. $(5;\ -7)$. **98.** $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2$; $\lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3$; $\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$. **99.** $A(3;\ -1)$, $B(0;\ 8)$. **100.** $M(0;\ 2)$. **101.** *Вказівка*. Центр мас має лежати у точці перетину медіан $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **102.** $M(4{,}5;\ 4{,}75)$. **104.** $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$. **105.** $(5;\ 3)$. **106.** $x_c = \frac{a(x_2+x_3)+b(x_1+x_3)+c(x_1+x_2)}{2(a+b+c)}$, $y_c = \frac{a(y_2+y_3)+b(y_1+y_3)+c(y_1+y_2)}{2(a+b+c)}$, де a, b, c — довжини сторін. **107.** Якщо вершину взяти за початок координат, то $x_c = \frac{m^2}{2(m+n)}$, $y_c = \frac{n^2}{2(m+n)}$.
108. $(48/17;\ 40/17)$. *Вказівка*. Розбити чотирикутник на два трикутники.
109. $M(0;\ -1)$, $C(2;\ 0)$. **110.** *Вказівка*. Використати результат задачі 101.
111. $(5;\ 5)$.

§ 4. 112. 1) -6; 2) 16; 3) 13; 4) -61. **113.** 1) -62; 2) 162. **114.** $\vec{a}\cdot\vec{b} = -5$.
115. $|\vec{a}| = 10$. **116.** $|\vec{a}+\vec{b}| = 30$; $|\vec{a}-\vec{b}| = 2\sqrt{593} \approx 48{,}7$. **117.** $|\vec{R}| = \sqrt{37}$.
118. $|\vec{d}| = 10$. **119.** $\alpha = \pm\frac{3}{5}$. **120.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **121.** $\frac{\pi}{4}$. **122.** $|\vec{R}| = 5$. **123.** $\varphi = \frac{\pi}{3}$.
124. $\alpha = \arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$. **125.** $\varphi = \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. **127.** 1) 22; 2) 3; 3) 249; 4) -496.
128. 1) -524; 2) 3; 3) $\{-70;\ 70;\ -350\}$. **129.** 17. **130.** 62. **131.** 24. **132.** 8 Дж; $\cos\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{15}$. **135.** 1) $\cos\varphi = \frac{5}{21}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{4}{9}$; 4) 0; 5) $\frac{11}{\sqrt{5}}$.
136. Довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює $|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$. Орт вектора $\vec{c}$ дорівнює орту вектора $\vec{a}$, тобто величині $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Отже, вектор $\vec{c}$ можна зобразити як одиничний вектор, помножений на його довжину, тобто $\vec{c} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} =$

$= \dfrac{\vec a \cdot \vec b}{\vec a \cdot \vec a} \cdot \vec a$. **137.** $\arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **138.** 45°. **139.** $\arccos\left(-\dfrac{4}{9}\right)$. **140.** $\arccos \dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **142.** arccos 0,8. **143.** 90°. **144.** $\vec x = \{1;\ 1/2;\ -1/2\}$. **145.** $\vec x = \{-3;\ 3;\ 3\}$. **146.** $\vec x = \{-4;\ -6;\ 12\}$. **147.** $\vec x = \{2;\ -3;\ 0\}$. **148.** 1) 6; 2) 0; 3) 9/5; 4) $-\dfrac{7}{3}$. **149.** −6. **150.** −4. **151.** $-6\dfrac{5}{7}$. **152.** 6. **153.** −8. **154.** 10. **155.** −22. **156.** −3. **157.** −5. **158.** $\sqrt{3}$. **159.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **160.** $X = -\dfrac{14}{3}$, $Y = -\dfrac{14}{3}$, $Z = -\dfrac{7}{3}$.

§ 5. 161. 1) 6; 2) 15. **162.** 1) $38\vec i - 26\vec j - 21\vec k$; 2) $-12\vec i + 23\vec j - 8\vec k$; 3) $20\vec i - 20\vec j - 10\vec k$; 4) $18\vec i + 3\vec j - \vec k$. **163.** $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{|\vec a \times \vec b|}{\vec a \cdot \vec b}$. **164.** 16. **165.** $\vec a \cdot \vec b = \pm 30$. **166.** 60. **167.** 1) 3; 2) 300. **171.** 1) $\{-3;\ 5;\ 7\}$; 2) $\{12;\ -20;\ -28\}$. **172.** 1) $\{6;\ -4;\ -6\}$; 2) $\{-12;\ 8;\ 12\}$. **173.** 1) $18\sqrt{2}$. **174.** 1) $\dfrac{1}{2}\sqrt{78}$; 2) $2\sqrt{6}$. **175.** C (0; 0; 2). **176.** $\pm\dfrac{1}{3}(\vec i - 2\vec j + 2\vec k)$. **177.** 5. **178.** $\{-4;\ 3;\ 4\}$. *Вказівка.* Якщо вектор $\vec F$ зображає силу, прикладену до точки M, а вектор $\vec a$ напрямлений від деякої точки C в точку M, то вектор $\vec a \times \vec F$ є моментом сили $\vec F$ відносно точки C. **179.** $|\vec M| = 28$, $\cos\alpha = \dfrac{-3}{7}$, $\cos\beta = -\dfrac{6}{7}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{7}$. **180.** $|\vec M| = 15$, $\cos\alpha = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{15}$, $\cos\gamma = \dfrac{11}{15}$. **181.** $|\vec M| = \sqrt{66}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{66}}$, $\cos\beta = -\dfrac{4}{\sqrt{66}}$, $\cos\gamma = -\dfrac{7}{\sqrt{66}}$. **182.** $\vec H = \dfrac{K}{r^2}(\vec I \times \vec r)$. *Вказівка.* Відомо, що величина напруженості $H = K\dfrac{I}{r}$, де K — коефіцієнт пропорційності; r — відстань від провідника до даної точки. При розв'язанні задачі треба силу струму, напружність магнітного поля та напрямлену відстань від осі до точки розглядати відповідно як вектори $\vec I$, $\vec H$ та $\vec r$. **183.** а) $\vec H = \dfrac{KI(y\vec k - z\vec j)}{y^2 + z^2}$; б) $\vec H = \dfrac{KI(-x\vec k + z\vec i)}{x^2 + z^2}$. **184.** $\vec H = \dfrac{3k}{25}(4\vec i + 3\vec j)$. **185.** 1) $\sin\varphi = \dfrac{5\sqrt{17}}{21}$; 2) $\dfrac{\sqrt{65}}{9}$. **186.** $\vec x = \{-3;\ -12;\ 4\}$. **187.** $\vec c = \{15;\ 8;\ 0\}$. **188.** $\vec x = \{7;\ 5;\ 1\}$. **189.** 1) 1; 2) −1; 3) 46; 4) −30; 5) 18; 6) −9. **190.** 1) Правою; 2) лівою; 3) правою; 4) лівою; 5) компланарні. **191.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **192.** 1) Лін. зал.; 2) лін. зал.; 3) лін. зал. **193.** 1) 51; 2) 13; 3) 76; 4) 12. **194.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **195.** 1) $\vec d = 5\vec a + 6\vec b + 2\vec c$; 2) $\vec d = -\vec b - \vec c$; 3) $\vec d = \vec a + \vec b + \vec c$; 4) $\vec d = 2\vec a + \vec b - \vec c$. **196.** 24. **202.** $\sqrt{74}$. **204.** Ні. **206.** 1) 6; 2) 3; 3) 23/3; 4) 62/3. **207.** $3\sqrt{2}$. **208.** 11. **209.** D_1 (0; 8; 0), D_2 (0; −7; 0). **210.** D_1 (0; 0; 1), D_2 (0; 0; 9). **211.** Об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих трьох векторах, $V = |\vec a\,\vec b\,\vec n|$, з

іншого боку цей об'єм дорівнює добутку $|\vec n|$ на площу перпендикулярного перерізу паралелепіпеда площиною, перпендикулярною до $\vec n$, $V = |\vec n| \cdot S$. Згадана площа перпендикулярного перерізу дорівнює шуканій площі ортогональної проекції паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ і $\vec b$ (переконайтесь). Тому з рівності $S \cdot |\vec n| = |\vec a\,\vec b\,\vec n|$ знаходимо $S = \dfrac{|\vec a\,\vec b\,\vec n|}{|\vec n|} = \left| \dfrac{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ A & B & C \end{vmatrix}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$. **212.** Розкладемо вектор $\vec x$ за базисом $\vec b \times \vec c$, $\vec c \times \vec a$, $\vec a \times \vec b$: $\vec x = \lambda_1(\vec b \times \vec c) + \lambda_2(\vec c \times \vec a) + \lambda_3(\vec a \times \vec b)$. З умови $\vec a \cdot \vec x = \alpha \Rightarrow \lambda_1 \vec a \cdot (\vec b \times \vec c) + 0 + 0 = \alpha \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{\alpha}{\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c}$. Аналогічно з умови $\vec b \cdot \vec x = \beta \Rightarrow \lambda_2 = \dfrac{\beta}{\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c}$ і з умови $\vec c \cdot \vec x = \gamma \Rightarrow \lambda_3 = \dfrac{\gamma}{\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c}$. Отже, $\vec x = \dfrac{\alpha(\vec b \times \vec c) + \beta(\vec c \times \vec a) + \gamma(\vec a \times \vec b)}{\vec a \cdot \vec b \cdot \vec c}$.

Глава 3

§ 1. 1. 1) (0; −5), (0; 5); 2) (−3; −4), (−3; 4); 3) (5; 0); 4) такої точки немає; 5) (−4; 3), (4; 3); 6) (0; −5); 7) такої точки немає. Рівняння визначає коло з центром O (0; 0) і радіусом $R = 5$. **2.** Точки A і C лежать на лінії, точка B — ні. **3.** Так. **4.** Через початок координат проходять лінії б) і д). **5.** 1) *а*) (7; 0), (−7; 0); б) (0; 7), (0; −7); 2) *а*) (0; 0), (6; 0); б) (0; 0), (0; −8); 3) *а*) (−10; 0), (−2; 0); б) лінія з віссю Oy не перетинається; 4) лінія з осями координат не перетинається; 5) *а*) (0; 0), (12; 0); б) (0; 0); (0; −16); 6) *а*) лінія з віссю Ox не перетинається; б) (0; −1), (0; −7); 7) лінія з осями координат не перетинається. **6.** 1) (2; 2), (−2; −2); 2) (1; −1), (9; −9); 3) (3; −4), $\left(1\dfrac{2}{5};\ -4\dfrac{4}{5}\right)$; 4) лінії не перетинаються. **7.** а) $a^2 < c$, b — довільне; б) $a^2 > c$, b — довільне; в) $a^2 = c$, b — довільне. **8.** 1) Бісектриса першого та третього координатних кутів; 2) бісектриса другого та четвертого координатних кутів; 3) сукупність бісектрис координатних кутів; 4) початок координат; 5) коло з центром у початку координат і радіусом R; 6) пряма паралельна осі Ox, якщо $b \neq 0$, і вісь Ox, якщо $b = 0$; 7) сукупність двох прямих, паралельних осі Oy; 8) осі Ox і Oy; 9) сукупність трьох прямих: осі ординат і двох прямих, паралельних їй; 10) сукупність двох прямих, з яких одна паралельна осі ординат ($x + a = 0$), а інша — осі абсцис ($y - b = 0$); 11) не визначає ніякого геометричного образу. **9.** $x - y - 3 = 0$, C і D лежать на лінії. **10.** $y + 4 = 0$. **11.** $x - 5 = 0$. **12.** $x^2 + y^2 = 8$. **13.** $x^2 + y^2 = 9$. **14.** $xy = 2$. **15.** $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{27} = 1$. **16.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{20} = 1$. **17.** $y^2 + 8x - 6y + 25 = 0$, парабола (рис. 3. 41). **18.** $x^2 + y^2 + 24x - 180 = 0$, коло. *Вказівка.* На відрізку завдовжки P, як на основі, побудувати трикутники з бічними сторонами, що відносяться між собою, як 2 : 3. За початок координат слід вибрати точку прикладання сили, а її напрям — за додатний напрям осі абсцис. **19.** $y^2 = 12x$. **20.** $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$. *Вказівка.* Вибрати за вісь абсцис пряму, на якій лежать точки P і Q, а за початок координат — середину відрізка PQ. **21.** $x^2 + y^2 = a^2$. *Вказівка.* Вибрати за вісь абсцис пряму AB, а за початок координнат — середину відрізка AB. 22. $x - y = \frac{a-b}{2}$, якщо за осі координат вибрати траєкторії рухомих точок, напрям руху — за додатний напрям відповідної осі, а початкові точки позначити $A(a;\ 0)$ і $B(0;\ b)$. 23. 1), 2), 3) — на колах з центрами в полюсі і радіусами, що відповідно дорівнюють 1, 5 і a; 4), 5), 6), 7) — на променях, що виходять з полюса і утворюють з полярною віссю кути 30°, 60°, 90° і φ. 24. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 25. $\rho\cos\varphi = 2$. 26. $\rho = \frac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$.

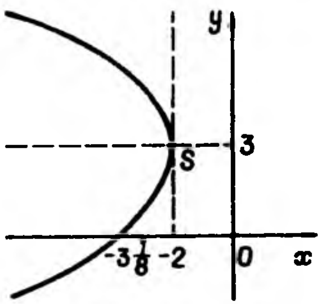


Рис. 3.41

27. $\rho = 5$. 28. $\rho = 3\sin\varphi$. 29. $\rho = -6\cos\varphi$. 30. $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. 31. $x^2 + y^2 = 16$. 32. $x + y = 0$. 33. $x = 2$. 34. $y = 3$. 35. $x - y - 1 = 0$. 36. $xy = a^2$. 37. $\rho\cos\varphi = 3$. 38. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. 39. $\operatorname{tg}\varphi = 1$. 40. $\rho = \frac{b}{\sin\varphi}$. 41. *Вказівка*. Скласти таблицю значень параметра ρ, надаючи значення куту φ через проміжок $\frac{\pi}{8}$, починаючи з $\varphi = 0$. 42. *Вказівка*. Скласти таблицю значень ρ для φ, надаючи значення через $\frac{\pi}{15}$ з інтервалу $[0;\ 2\pi)$. 1) Рис. 3.42; 2) рис. 3.43; 3) рис. 3.44; 4) рис. 3.45; 5) рис. 3.46. 43. *Вказівка*. Визначити спочатку кути, при яких маємо ρ_{max} і ρ_{min}. 1) $\rho_{max} = a$ при $\varphi = 30°$; 150°, 270°; $\rho_{min} = 0$ при $\varphi = 0°$, 60°, 120°, 180°; 240°, 300° (рис. 3.47); 2) $\rho_{max} = a$ при $\varphi = 45°$, 225°; $\rho_{min} = 0$ при $\varphi = 0°$, 90°, 180° (рис. 3.48). 45. 1) $\rho = -6\cos\varphi$; 2) $\rho = 6\sin\varphi$. 46. Спіраль Архімеда $\rho = \frac{v}{\omega}\varphi$. 47. $\varphi = 2R\cos^3\varphi$ або $(x^2 + y^2)^2 = 2Rx^3$. *Вказівка*. Скласти рівняння лінії спочатку в полярних координатах. 48. $\rho = a\sin 2\varphi$ або $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$. Крива складається з двох пелюсток, що виходять з початку координат. *Вказівка*. Скласти рівняння лінії спочатку в полярних координатах. 49. Равлик Паскаля $\rho = b + a\cos\varphi$ або $(x^2 + y^2 - ax)^2 = b^2(x^2 + y^2)$. *Вказівка*. За початок координат вибрати дану нерухому точку, за додатний напрям осі — напрям променя, що йде з цієї точки в центр кола. 50. Лемніската Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$ або $\rho = c\sqrt{2\cos 2\varphi}$. *Вказівка*. За початок координат вибрати середину відрізка F_1F_2, а за вісь абсцис — пряму F_1F_2. 51. Кардіоїда $\rho = 4a\cos^2\frac{\varphi}{2} = 2a(1 + \cos\varphi)$ або $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$. 52. а) пряма $x + 2y - 3 = 0$; б) парабола $y^2 = x$; в) парабола $y = 4x^2$. 53. а) коло $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$; б) еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) коло $x^2 + y^2 = R^2$. 54. а) права гілка гіперболи $x^2 - y^2 = 4$; б) коло $x^2 + y^2 - 10x = 0$; в) коло $x^2 + y^2 - 6y = 0$. 55. Ліва гілка гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. 56. а) $x = \frac{a}{\varphi}\cos\varphi$, $y = \frac{a}{\varphi}\sin\varphi$; б) $x = R\sin 2\varphi$, $y = 2R\sin^2\varphi$; в) $x = 2R\cos^2\varphi$, $y = R\sin 2\varphi$. 57. $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $-\infty < t < \infty$. *Вказівка*. За початок декартової прямокутної системи координат вибрати дану точку C, а кут нахилу відрізка

CM до осі абсцис вважати таким, що дорівнює параметру t. 58. $x = v_0t\cos\alpha$, $y = v_0t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$.

59. а) $x = 1 + \frac{t}{\sqrt{5}}$, $y = 1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}$, $t \in [0,\ \sqrt{5}]$; б) $x = 2 - \frac{t}{\sqrt{5}}$, $y = 3 - \frac{2t}{\sqrt{5}}$, $t \in [0,\ \sqrt{5}]$. 60. а) $x = R(1 + \cos 2t)$, $y = R\sin 2t$,

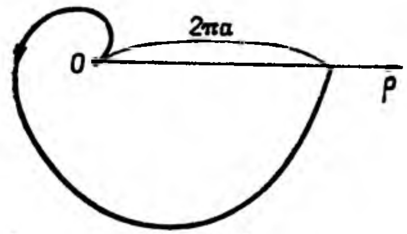


Рис. 3.42

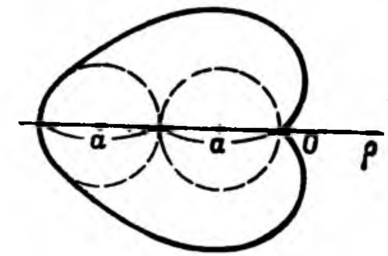


Рис. 3.43

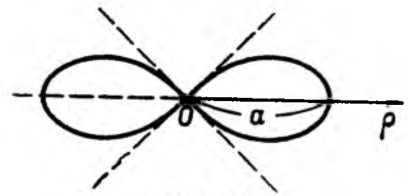


Рис. 3.44

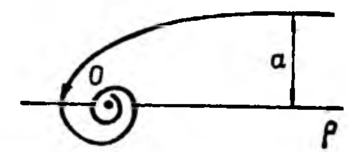


Рис. 3.45

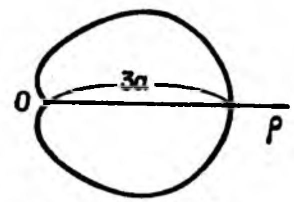


Рис. 3.46

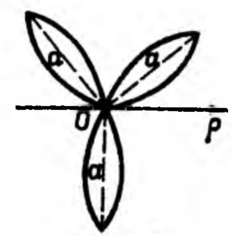


Рис. 3.47

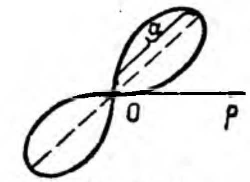


Рис. 3.48

$t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$; б) $x = R(1 + \cos t)$, $y = R\sin t$, $t \in [0,\ 2\pi)$.

61. $x = \frac{ab\cos t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$, $y = \frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t}}$, $t \in [0,\ 2\pi)$.

62. $x = \frac{ab\cos t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}}$, $y = \frac{ab\sin t}{\sqrt{b^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}}$, $t \in \left\{\left(-\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right) \cup \left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)\right\}$. 63. а) $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$,

$t \in (-\infty, \infty)$; б) $x = 2p \operatorname{ctg}^2 t$, $y = 2p \operatorname{ctg} t$, $t \in \left\{\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right\}$; в) $x = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}$, $y = p\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$, $t \in (0, 2\pi)$. **64.** $y^2 = \frac{2v^2 x}{g}$. *Вказівка.* За законом інерції кулька далі має рухатись у напрямі дотичної із сталою швидкістю v, тобто через t секунд повинна віддалитися на vt метрів праворуч. Крім того, на кульлу діє сила тяжіння, що змушує її знижуватися вертикально із сталим прискоренням $g = 9{,}8$ м/с², тобто через t секунд кулька має бути на $\frac{gt^2}{2}$ нижче, ніж у початковий момент падіння. Скласти рівняння траєкторії спочатку в параметричній формі. **65.** $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$. *Вказівка.* Позначити гострий кут між діагоналлю прямокутника і віссю Ox параметром t. **66.** $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$. **67.** $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$. *Вказівка.* До змотуваная кінець нитки міститься в точці Q. При змотуванні натягнута нитка збігається з дотичною до кола, причому довжина дотичної $PM = \smile PQ = at$. **68.** 1) $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ не колінеарні; 2) $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ колінеарні, а $\vec{a}_1$ і $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ не колінеарні; 3) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ колінеарні. **69.** Перпендикуляр $\left(\vec{r} - \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}\right)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$, що проходить через середину відрізка M_1M_2. **70.** *а*) $\vec{r} = \lambda\vec{i}$; б) $\vec{r} = \lambda\vec{j}$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$. **71.** $\vec{r}\cdot(\vec{i} + 3\vec{j}) = 5$. **72.** A і D. **73.** $\vec{r}^2 = 2\vec{r}\cdot(2\vec{i} + 2\vec{j})$ або $\vec{r}\cdot(\vec{r} - 4\vec{i} - 4\vec{j}) = 0$. **74.** $\vec{r}^2 - \vec{r}\cdot(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) + \vec{r}_1\cdot\vec{r}_2 = 0$. **75.** $\vec{r}^2 - 6\vec{r}\cdot\vec{i} = 16$. **76.** 1) Пряма, що проходить через точку (0; —5) перпендикулярно до осі Oy; 2) пряма, що проходить через точку (6; 0) перпендикулярно до осі Ox. **77.** 1) $(\vec{r} - \vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0$; 2) $(\vec{r} - \vec{r}_2)\cdot\left(\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2} - \vec{r}_2\right) = 0$; 3) $\vec{r}\cdot(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = \frac{1}{2}(\vec{r}_3^{\,2} - \vec{r}_2^{\,2})$.

§ 2. 80. 1) (1; 2; 2) і (1; 2; —2); 2) немає такої точки; 3) (2; 1; 2) і (2; —1; 2); 4) немає такої точки. **81.** Площина Oxz. **82.** Площина, паралельна координатній площині Oyz, що проходить через точку (2; 0; 0). **83.** Площина з нормальним вектором $\vec{n} = (4; -2; 1)$. **84.** Сфера з радіусом 3 і центром у точці (0; 0; 0). **85.** Сфера з радіусом 2 і центром у точці (1; 2; 0). **86.** Початок координат. **87.** Пуста множина. **88.** Пара площин $y = 2x$ і $y = -2x$, які паралельні осі Oz і перетинаються між собою. **89.** Пара координатних площин Oyz і Oxy. **90.** Три координатні площини. **91.** Пара паралельних площин Oyz і $x = 4$. **92.** Пара площин $z = 0$ і $y + z = 0$. **93.** Вісь Ox. **94.** $(x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 81$. **95.** $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 18$. **96.** Площина $20y + 53 = 0$, паралельна площині Oxz. **97.** $x + 2z = 0$. **98.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. **99.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$. **100.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1$. **101.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, де $a = MA$, $b = MB$, $c = MC$. *Вказівка.* Нехай точка A лежить на площині Oyz, тому проекція сталого відрізка $AM = a$ на вісь абсцис дорівнює абсцисі точки M, тобто $x = a\cos\alpha$. Аналогічно проектуємо відрізки $BM = b$ і $CM = c$ відповідно на осі Oy і Oz. Використавши рівність $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, матимемо шукане рівняння. **102.** $y(x + z - a) = xz$. *Розв'язання.* Позначимо через точку $M(x; y; z)$ довільну точку шуканої поверхні. Ця точка має ту властивість, що вона лежить на одній прямій з трьома точкими, які належать

відповідно трьом ребрам куба, а саме: з $A(a; y_1; 0)$, $B(x_2; a; a)$ і $C(0; 0; z_3)$. Інакше умову можна виразити так: прямі MA, MB і MC мають один і той самий напрям, тобто $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = (x - a) : (y - y_1) : z = (x - x_2) : (y - a) : (z - a) = x : y : (z - z_3)$. Звідси маємо рівності: $\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = \frac{y - a}{z - a}$, $\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{z}{x - a}$ і $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{x}{y}$. Перемноживши їх, матимемо $\frac{x(y - a)z}{y(x - a)(z - a)} = 1$. Після відповідних перетворень одержимо шукане рівняння. **104.** Точки M_1 і M_3. **105.** 1) (3; 2; 6) і (3; —2; 6); 2) (3; 2; 6) і (—3; 2; 6); 3) такої точки немає на лінії. **106.** а) пряма, паралельна осі Oy, що проходить через точку (5; 0; —2); б) коло в площині Oxz з центром у точці (0; 0; 0) і радіусом $R = 7$; в) коло в площині $z = 2$ з центром у точці $C(0; 0; 2)$ і радіусом $R = 4$; г) коло в площині $z = 6$ з центром у точці $C(0; 0; 6)$ і радіусом $R = \sqrt{13}$. **107.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $y = 0$. **108.** Коло $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 36$, $z - 3 = 0$ і точка (1; —2; —3). **109.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36$, $2x - z - 1 = 0$. **110.** $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in (-\infty, \infty)$, b — коефіцієнт пропорційності. *Вказівка.* Вісь Oz напрямити вздовж осі переміщення, кут нахилу проекції рухомого відрізка на площину Oxy вибрати за параметр t (рис. 3.49).

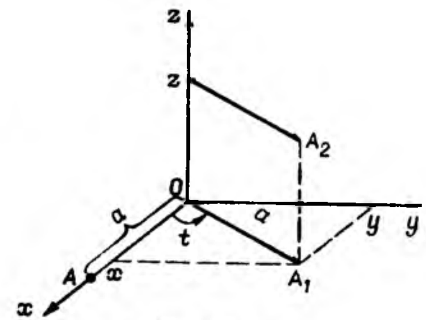


Рис. 3.49

§ 3. 111. а) $2(x + 1) + 2(y - 2) = 0$. Загальне рівняння: $x + y - 1 = 0$, у відрізках на осях $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $2(x - 2) = 0$. Загальне рівняння; $x - 2 = 0$, у відрізках на осях для даної прямої не існує; відстань 2; в) $2(x - 1) - (y - 1) = 0$. Загальне рівняння: $2x - y - 1 = 0$, у відрізках на осях $\frac{x}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **112.** а) $\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{-1}$. Загальне рівняння: $x + 3y - 5 = 0$, у відрізках на осях $\frac{x}{5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} = 1$, відстань $\frac{5}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 1}{-1}$. Загальне рівняння: $x - 1 = 0$, у відрізках на осях для даної прямої не існує, відстань 1; в) $\frac{x + 1}{2} = \frac{y - 1}{0}$. Загальне рівняння: $y - 1 = 0$, у відрізках на осях не існує, відстань 1. **113.** а) $\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{-2}$. Загальне рівняння: $x - y + 1 = 0$, у відрізках на осях $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$, відстань $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 1}{-3}$. Загальне рівняння:

$x-1=0$, у відрізках на осях не існує, відстань 1; в) $\frac{x-2}{-2}=\frac{y-2}{0}$. Загальне рівняння: $y-2=0$, у відрізках на осях не існує, відстань 2. **114.** а) $x=1-2t$, $y=2-2t$, $t\in(-\infty,\infty)$, $\vec{s}=(-2;-2)$; б) $x=1$, $y=1-3t$, $t\in(-\infty,\infty)$, $\vec{s}=(0;-3)$; в) $x=2-2t$, $y=2$, $t\in(-\infty,\infty)$, $\vec{s}=(-2;0)$. **115.** $2x+3y+2=0, x-3y-2=0$, $5x+3y+2=0$. Точка перетину $(2;\ 0)$. **116.** $C_1(3;\ 2)$ і $C_2\left(\frac{27}{37};\ \frac{14}{37}\right)$. **117.** $3x-y-5=0$. **118.** $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ або $-\frac{x}{4}+\frac{y}{\frac{3}{2}}=1$. **119.** $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}=1$. **120.** $A=\pm 8$. **121.** Так. *Вказівка.* Якщо для точок $M_1(x_1;\ y_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2)$ вирази $Ax_1+By_1+C_1$ і $Ax_2+By_2+C_2$ мають однакові знаки, то точки M_1 і M_2 лежать по один бік від прямої $Ax+By+C=0$, в противному разі — по різні. Точка перетину $(1;\ -7/3)$. **122.** Так, $B(2;\ 2)$. **123.** 1) $k=\frac{2}{3}$, $b=-2$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $b=0$; 3) k — не існує, $b=-3$; 4) $k=-3/4$, $b=3$. **124.** 1) $k=5$, $b=3$; 2) $k=-\frac{2}{3}$, $b=2$; 3) $k=-\frac{5}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$; 4) $k=-\frac{3}{2}$, $b=0$; 5) $k=0$, $b=3$. **125.** $(2;\ -1)$, $(-1;\ 3)$, $(2;\ 4)$. **126.** $(1;\ -3)$, $(-2;\ 5)$, $(5;\ -9)$ і $(8;\ -17)$. **127.** $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$. **128.** $a=-\frac{1}{3}$. **129.** 1) $y-4=0$; 2) $x+2=0$. **130.** 1) $a=-2$, $5y-33=0$; 2) $a_1=3$, $5x+8=0$, $a_2=-3$, $x-56=0$; 3) $a_1=1$, $3x-8y=0$, $a_2=\frac{5}{3}$, $33x-56y=0$. **131.** $m=-4$, $n=2$, $x-5=0$. **132.** $25x+29y-21=0$. **133.** 1) $4x-y=0$; 2) $11y-16=0$; 3) $11x-4=0$; 4) $17x-40y+52=0$. **134.** $2x-y-5=0$. **135.** $2x-5y-2=0$. **136.** $y=0$, $x-3=0$. **137.** а) $x+2y-3=0$, $2x-y+4=0$, $3x+y+1=0$ і $x-3y+7=0$; б) $x-1=0$, $y=0$, $x-y-1=0$ і $x+y-1=0$; в) $x-y-1=0$, $x+y+1=0$, $y-1=0$ і $x=0$; г) $3x-2y-4=0$; $2x+3y-7=0$, $x-5y+3=0$ і $5x+y-11=0$. **138.** $(-2;\ -1)$. **139.** $Q(11;\ -11)$. **140.** $(-12;\ 5)$. **141.** $M_1(10;\ -5)$. **142.** $(1;\ -1)$, $(8/3;\ -2)$. **145.** $2x+7y+22=0$, $7x+2y-13=0$, $x-y+2=0$. **146.** $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$. *Вказівка.* Сторони кута лежать симетрично щодо його бісектриси. Тому точки, симетричні з точкою A щодо бісектрис кутів B і C, лежать на прямій BC. Знайшовши рівняння прямої BC, вершини B і C визначаємо як точки перетину прямої BC з бісектрисами кутів. **147.** $2x+y-8=0$, $x-3y+10=0$, $x+4y-4=0$. **148.** $5x-y-26=0$, $x+5y=0$. **149.** $2x+y-16=0$, $2x+y+14=0$, $x-2y-18=0$. **150.** Рівняння сторін; $4x+3y+1=0$, $3x-4y+32=0$, $4x+3y-24=0$, $3x-4y+7=0$; рівняння діагоналі $x+7y-31=0$. **151.** $3x-4y+15=0$, $4x+3y-30=0$, $3x-4y-10=0$, $4x+3y-5=0$. **152.** $x+3y-9=0$, $68x-17y+57=0$, $65x-26y+72=0$. **153.** $x-y-3=0\ (BC)$; $4x+5y-20=0\ (AC)$; $3x-12y-1=0\ (CH)$. **154.** $14x-7y+32=0$ і $7x+21y-75=0$. **155.** $t=-\frac{1}{2}$. **156.** $\frac{4}{\sqrt{5}}$. **157.** 5 кв. од. **158.** 4. **159.** 25 кв. од. **160.** $5x+12y-6=0$, $5x+12y+46=0$. **161.** $4x+y-6=0$, $3x+2y-7=0$. **162.** $3x-y-12=0$ і $x+3y-4=0$. **163.** $h=\frac{18}{\sqrt{34}}$. **164.** $(7;\ 6)$ або $(-3;\ -2/3)$. **165.** $(3;\ 5)$ або $(-37;\ 45)$.

166. $x=3$, $y=-1$ або $3x+4y-5=0$, $4x-3y-15=0$. **167.** $x+7y-6=0$, $x-y-6=0$, $7x+y-10=0$. **168.** $x+3y-13=0$. **169.** $x+3y+2=0$. **170.** $6x+12y+13=0$.

§ 4. 171. $2x-y-z-6=0$. **172.** $x-y-3z+2=0$. **173.** 1) $y-2z+7=0$; 2) $x+3z+11=0$; 3) $x-4y-8=0$. **174.** 1) $3y+z=0$; 2) $5x-z=0$; 3) $3x-2y=0$. **175.** 1) $z+1=0$; 2) $y+1=0$; 3) $x+3=0$. **176.** а) $x-2y+3z+3=0$; б) $2x-2y-z+1=0$. **177.** а) $x-2y-z=0$; б) $x-y-2z+5=0$. **178.** а) $x+y-3=0$; б) $2x-y-1=0$. **179.** 8 куб. од. **180.** $\vec{n}=(12;\ 10;\ -9)$, $\cos\alpha=\frac{12}{5\sqrt{13}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\gamma=-\frac{9}{5\sqrt{13}}$. **181.** $3x-6y+7z-6=0$. **182.** $x+y+z-2=0$, $x-y+z-4=0$, $x-y-z-2=0$. **183.** $2x+y+z-4=0$, $2x-y+z-10=0$, $2x+y-z+6=0$. **184.** $\frac{40}{21}$. **185.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **186.** 3. **187.** а) $x+3y+6=0$ та $3x-y+10z-16=0$; б) $x+2y-z+1=0$ та $2x-y-2=0$. **188.** $(0;\ 0;\ 3)$ і $(0;\ 0;\ -5/2)$. **189.** $13\sqrt{13}$. **190.** $3x-6y-2z+35=0$ і $3x-6y-2z-7=0$. **191.** $x+5y-2z-1=0$. **192.** $x+2y+3z-11=0$. **193.** $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, $y=1$; $\frac{4}{9}$. **194.** $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}-\frac{z}{3}=1$, $x=1$; $\frac{21}{8}$. **195.** $x=0$, $z=0$, $y=2$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$, $3x-4y=0$; $\frac{17}{9}$. **196.** $z=0$, $z=3$, $x-y=0$, $x-2y=0$, $x+2y-6=0$; $\frac{5}{8}$. **197.** $y=0$, $y=3$, $z=2$, $x-z=0$, $2x-z=0$; 3. **198.** $x=0$, $y=0$, $z=0$, $y=2$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$; $\frac{104}{27}$. **199.** $x=0$, $z=0$, $\frac{x}{2}+\frac{z}{3}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1$; 10. **200.** $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$; 1. **201.** 1) Перетинаються, $\cos\varphi=\frac{1}{2\sqrt{15}}$; 2) паралельні, $\cos\varphi=1$; 3) перетинаються, $\cos\varphi=\frac{1}{2}$; 4) збігаються, $\cos\varphi=-1$. **202.** 1) $2x-y+3z+1=0$; 2) $2x-y-8z-6=0$; 3) $3x+3y+z-2=0$; 4) $17x+9y+8z-9=0$. **203.** а) $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\cos\varphi=\frac{\sqrt{6}}{6}$. **204.** а) $y+z=0$, $y-z=0$; б) $x+z=0$, $x-z=0$. **205.** $7x+14y+24=0$. **206.** $11x+7y-2z-9=0$. **207.** $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=1$, $z=-2$, $x=1$; 2. **208.** $x=1$, $x=3$, $y=0$, $z=0$, $2y+3z-6=0$; 6. **209.** $x=0$, $z=0$, $z=3$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$; 3.

§ 5. 210. а) $\frac{x}{-3}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$, $x=-3t$, $y=2+4t$, $z=3+5t$; б) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{7}=\frac{z+1}{5}$, $x=t$, $y=1+7t$, $z=-1+5t$. **211.** а) $\frac{x-1}{2}=$

$= \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$; б) $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$. **212.** а) (5; 4; 0) і (7; 0; 2); б) (0. —4; 0) і (2; 0; 2). *Вказівка*. Покласти в рівняннях прямої: а) $z = 0$; б) $y = 0$. **213.** 1) $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{0}$; 2) $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$; 3) $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. **214.** $x = 4 + 2t$, $y = -3 + 3t$, $z = 1 + t$ — координати точки M; $\frac{x-4}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{1}$. **215.** $v = 13$. **216.** 21. **217.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-3}$; $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$; $\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{-1}$, $\frac{x-2}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{0}$; $\frac{x}{-1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+3}{1}$. **218.** $11x - 4y + 6 = 0$; $9x - z + 7 = 0$ і $36y - 11z + 23 = 0$. **219.** $2x + 3y + 4 = 0$, $z = 0$; $5y + 2z + 2 = 0$, $x = 0$; $5x - 3z + 7 = 0$, $y = 0$. **220.** 1) Ні; 2) так, на прямій $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. **221.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$. **222.** $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **223.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{\pi}{2}$. **224.** $\varphi = \frac{\pi}{2}$. **227.** а) $\cos\varphi = \frac{20}{21}$; б) $\cos\varphi = \frac{98}{195}$. **228.** а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; в) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; г) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$; д) $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{8} = \frac{z+3}{10}$; е) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-\frac{1}{2}}$.

229. $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-3}$. **230.** $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$. *Вказівка*. Рівняння шукаємо у вигляді $\frac{x-2}{m} = \frac{y-3}{n} = \frac{z-1}{p}$, а з умови перпендикулярності прямих маємо рівняння $2m - n + 3p = 0$. З умови перетину прямих маємо друге рівняння $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$ або $8m - 11n - 9p = 0$. **231.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{4}$. *Вказівка*. Використати умови перпендикулярності та перетину прямих. **232.** $\frac{x-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+7}{\frac{16}{3}}$. **233.** $\frac{x-3}{0} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$.

234. $2x + 15y + 7z + 7 = 0$. **235.** а) $x - 2y + z = 0$; б) $2x + y - 1 = 0$; в) $\frac{18}{\sqrt{30}}$; г) $\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}; -1\right)$. **236.** а) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; б) M (1; —6; —4); в) $3x - y + 2z - 1 = 0$. **237.** $A = -2$. **238.** $A = -6$, $B = -18$. **239.** а) $2x - 16y - 13z + 31 = 0$; б) $6x - 20y - 11z + 1 = 0$. **240.** $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

241. (—2; 5; —3). **242.** (—5; 1; 0). **243.** (0; —2; 1). **244.** (—1; 15; 13). **245.** $\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **246.** $\left(-\frac{3}{10}; 1; \frac{1}{10}\right)$. **247.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$; 3. **248.** (0; 1; —3). **249.** $\frac{1}{3}\sqrt{78}$. **250.** $\sqrt{\frac{1945}{2}}$. **251.** $\frac{x-4}{-1} = y - 1 = \frac{z+2}{3}$. **252.** (—5; —4; 6). **253.** $\sqrt{14}$. **254.** 25. *Вказівка*. Беремо точку на одній прямій і шукаємо відстань від неї до іншої прямої. **255.** $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-7} = \frac{z-2}{1}$. **256.** $5x + 7y + 9z - 44 = 0$. **257.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{9}$; $x + 5z - 9 = 0$, $z = 0$. **258.** $\sqrt{\frac{5}{9}}$. **259.** $\arccos\sqrt{\frac{5}{7}}$. **260.** $\frac{x}{0} = y - 1 = \frac{z+2}{2}$; $\frac{\pi}{2}$. **261.** $-\arcsin\frac{\sqrt{91}}{91}$. **262.** $\frac{5}{9}\sqrt{17}$. **263.** $5x + y + 2z - 3 = 0$. **264.** $x + y + 2z + 5 = 0$. **265.** $2x + z - 1 = 0$. **266.** $\frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+1}{-1}$; $0{,}2\sqrt{101}$. **267.** $x = 0$, $z = 1$, $y - 2x = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$; $\approx 2{,}3$. **268.** $x = 0$, $z = 0$, $3y + z - 3 = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$; $\frac{4}{3}$. **269.** $z = 0$, $y = 0$, $3x - z - 3 = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 1$; $\frac{4}{3}$.

270. $x = 0$, $y = 0$, $2y + 3z - 6 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$; $\frac{1}{2}$. **271.** $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$, $x - z = 0$, $x + z = 2$; 3. **272.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + z = 2$, $2y + 3z - 6 = 0$; 4. **273.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $3x + 2z = 6$; 4. **274.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x - 2z = 1$, $y - z = 3$; 6. **275.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$; $\frac{21}{4}$. **276.** $y = 0$, $z = 0$, $y = 3$, $\frac{x}{2} + \frac{z}{3} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{z}{3} = 1$; 9.

277. $x = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$, $\frac{x}{2} + y + \frac{z}{3} = 1$; 2. **278.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{2} = 1$, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$; 2. **279.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y - 3 = 0$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1$; $\frac{15}{2}$.

§ 6. 280. 1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 49$; 2) $(x-6)^2 + (y+8)^2 = 100$; 3) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$; 4) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$; 5) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10$; 6) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 7) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ або $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **281.** $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20$. **282.** $x^2 + y^2 + 8y = 0$. **283.** $x^2 + y^2 - 4x = 0$. **284.** а) C (2; —3), $R = 4$; б) C (4, 0), $R = 4$; в) C (0; —2), $R = 2$; г) C (3; —1/4), $R = \frac{11}{4}$; д) $C\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{9}{14}$. **285.** $2x - 5y + 19 = 0$. **286.** $\operatorname{tg}\theta = -2{,}4$. **287.** $\theta = 90°$. **288.** 1) Півколо з центром O (0; 0) та $R = 3$ (рис. 3.50); 2) півколо з центром O (0; 0) та $R = 5$ (рис. 3.51); 3) півколо з центром O (0; 0) та $R = 2$ (рис. 3.52); 4) півколо з центром O (0; 0) та $R = 4$ (рис. 3.53); 5) півколо з центром C (0; 15) та $R = 8$ (рис. 3.54); 6) півколо з центром C (0; 15) та $R = 8$ (рис. 3.55); 7) півколо з центром C (—2; 0) та $R = 3$ (рис. 3.56);

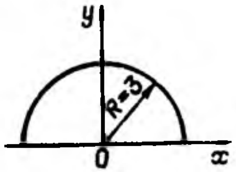


Рис. 3.50

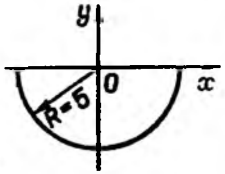


Рис. 3.51

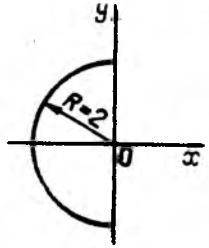


Рис. 3.52

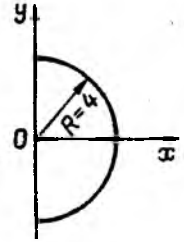


Рис. 3.53

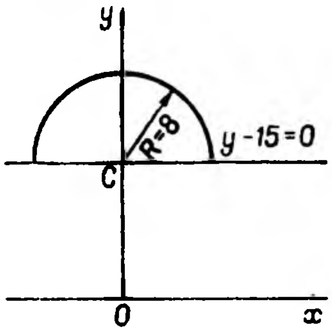


Рис.3.54

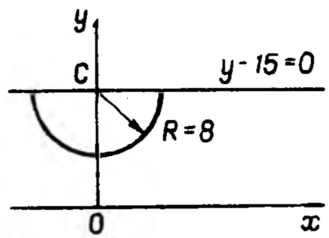


Рис. 3.55

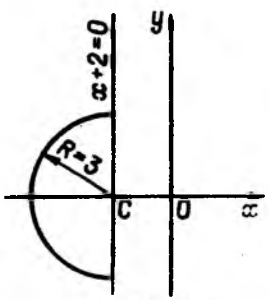


Рис. 3.56

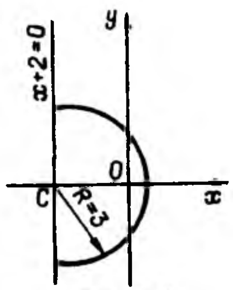


Рис. 3.57

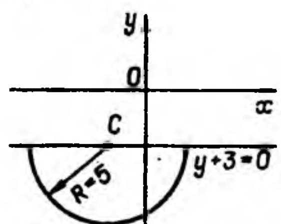


Рис. 3.58

8) півколо з центром $C(-2;\ 0)$ та $R=3$ (рис. 3.57); 9) півколо з центром $C(-2;\ -3)$ та $R=5$ (рис. 3.58); 10) півколо з центром $C(-5;\ -3)$ та $R=7$ (рис. 3.59). **289.** 1) $|k|<\frac{3}{4}$; 2) $k=\pm\frac{3}{4}$; 3) $|k|>\frac{3}{4}$. **290.** $7x-4y=0$. **291.** 2. **292.** 10. **293.** $y=\frac{4}{3}x$ і $y=0$. **294.** а) $x-2y-5=0$; б) $y=7x+5$ і $y=-x+5$. *Вказівка*. Рівняння дотичних шукаємо у вигляді $y=kx+5$. **295.** 7. **296.** $\sqrt{10}$. **297.** 3. **298.** $2x+y-1=0$ і $2x+y+19=0$.

299. $2x+y-5=0$ і $2x+y+5=0$. **300.** 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$; 2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$; 4) $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; 5) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 6) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **301.** 1) $2a=26$, $2b=10$; 2) $F_1(0;\ -12)$, $F_2(0;\ 12)$; 3) $\varepsilon=\frac{12}{13}$; 4) $M_1\left(\frac{13}{12};\ \frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$ і $M_2\left(\frac{13}{12};\ -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$. **302.** 1) $2a=2\sqrt{5}$, $2b=6$; 2) $F_1(0;\ -2)$, $F_2(0;\ 2)$; 3) $\varepsilon=\frac{2}{3}$. **303.** 16 кв. од. **304.** $\frac{4\sqrt{5}}{45}$ кв. од. **305.** $\varepsilon\approx 0{,}08$. **306.** $a=150\,000\,000$ км, $\varepsilon=1/60$. **307.** Частина прямої $18x-25y=0$, що лежить у середині еліпса. **308.** $y=3\pm\frac{x}{2}$. **309.** $\left(-\frac{15}{4};\ \pm\frac{\sqrt{63}}{4}\right)$. **310.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. **311.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. **312.** а) $C(3;\ -1)$, $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$; б) $C(-1;\ 2)$; $a=5$, $b=4$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$; в) $C(1;\ -2)$, $a=4$, $б=2\sqrt{3}$, $\varepsilon=\frac{1}{2}$. **313.** 1) Половина еліпса $\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+7)^2}{4}=1$, розміщена над прямою $y+7=0$ (рис. 3.60);

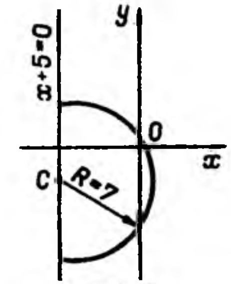


Рис. 3.59

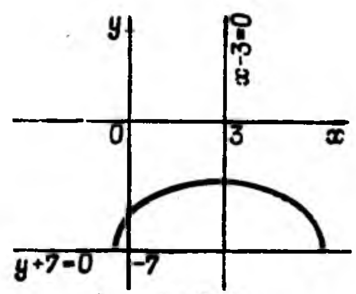


Рис.3.60

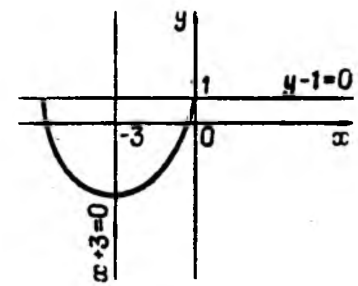


Рис. 3.61

2) половина еліпса $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{16}=1$, розміщена під прямою $y-1=0$ (рис. 3.61); 3) половина еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$, розміщена в лівій півплощині (рис. 3.62); 4) половина еліпса $\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$, розміщена праворуч від прямої $x+5=0$ (рис. 3.63). **314.** 1) при $|m|<5$ перетинає

еліпс; 2) при $m=\pm 5$ дотикається до еліпса; 3) при $|m|>5$ не має спільних точок. **315.** $3x+2y-10=0$ і $3x+2y+10=0$. **316.** $x+y-5=0$ і $x+y+5=0$. **317.** $4x-5y-10=0$. **318.** 18. **320.** а) $a=3$, $b=4$; б) $F_1(-5;\ 0)$, $F_2(5;\ 0)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{3}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$. **321.** а) $a=4$, $b=3$; б) $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$; в) $\varepsilon=\frac{5}{4}$; г) $y=\pm\frac{4}{3}x$. **322.** 1) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; 2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 4) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$; 5) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$.

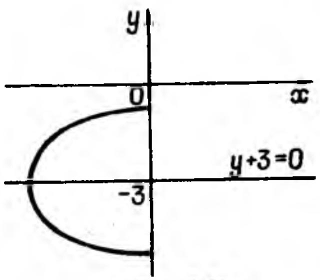


Рис. 3.62

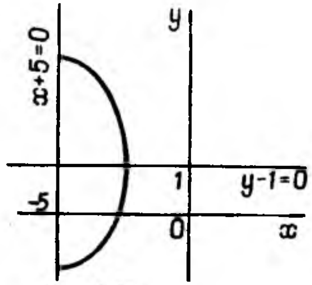


Рис. 3.63

323. 1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{324}=-1$; 2) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1$; 3) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{576}=-1$. **324.** $2x-3y+5=0$ та $2x+3y-1=0$. **325.** $y=-\frac{3}{2}x$. **326.** $k=-4$. **327.** $(-6;\ \pm 4\sqrt{3})$. **328.** 120°. **329.** $\left(\frac{48}{5};\ \pm\frac{3\sqrt{119}}{5}\right)$. **330.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **331.** 12 кв.од. **332.** $x-4\sqrt{5}y+10=0$ і $x-10=0$. **333.** $2\frac{1}{12}$ і $26\frac{1}{12}$. **335.** 1) $C(2;\ -3)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $4x-3y-17=0$, $4x+3y+1=0$, 2) $C(-5;\ 1)$, $a=8$, $b=6$, $\varepsilon=1{,}25$, $3x+4y+11=0$ і $3x-4y+19=0$; 3) $C(2;\ -1)$, $a=3$, $b=4$, $\varepsilon=1{,}25$, $4x+3y-5=0$ і $4x-3y-11=0$; 4) $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right)$, $a=4$, $b=3$, $\varepsilon=1{,}25$, $3x-4y=0$ і $3x+4y-2=0$.

336. Дві прямі, що перетинаються: а) $3\sqrt{5}\,x-6y-(2+3\sqrt{5})=0$ і $3\sqrt{5}\,x+6y-(3\sqrt{5}-2)=0$; б) $x+y-5=0$ і $x-y+1=0$. **337.** 1) частина гіперболи $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{4}=1$, розміщеної над прямою $y+1=0$ (рис. 3.64); 2) вітка гіперболи $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-7)^2}{9}=-1$, розміщеної під прямою $y-7=0$ (рис. 3.65); 3) вітка гіперболи $\frac{(x-9)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$, розміщеної ліворуч від прямої $x-9=0$ (рис. 3.66); 4) частина гіперболи $\frac{(x-5)^2}{9}-\frac{(y+2)^2}{16}=-1$, розміщеної ліворуч від прямої $x-5=0$

(рис. 3.67). **338.** 1) $C(0;\ 0)$, $a=b=6$, $x=0$ і $y=0$; 2) $C(0;\ 0)$, $a=b=3$, $x=0$ і $y=0$; 3) $C(0;\ 0)$, $a=b=5$, $x=0$ і $y=0$. **339.** 1) при $|m|>4{,}5$ — перетинає; 2) при $m=\pm 4{,}5$ — дотикається; 3) при $|m|<4{,}5$ — не має спільних точок з гіперболою. **340.** $10x-3y-32=0$, $10x-3y+32=0$. **341.** $3x-4y-10=0$, $3x-4y+10=0$. **342.** $5x-3y-16=0$, $13x+5y+48=0$. **343.** $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. **344.** $F(2;\ 0)$, $x=-2$, $d=4$. **345.** 1) $y^2=16x$; 2) $x^2=$

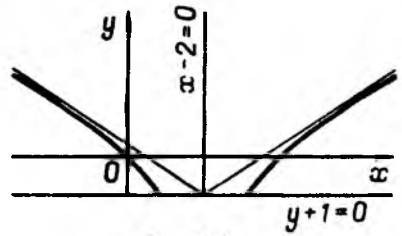


Рис. 3.64

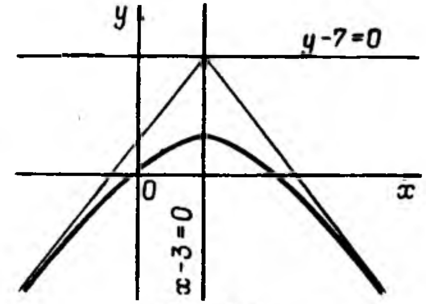


Рис. 3.65

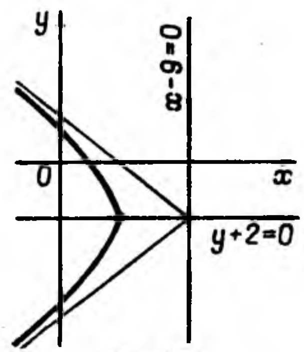


Рис. 3.66

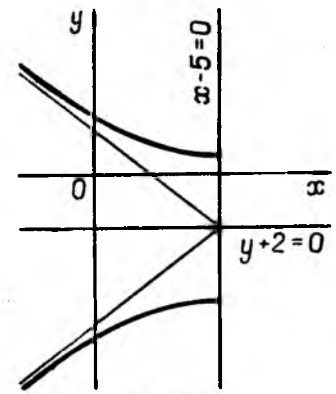


Рис. 3.67

$=24y$; 3) $y^2=4x$; 4) $x^2=25y$. **346.** 1) $(y-2)^2=10(x+2)$; 2) $(y-2)^2=-10(x+2)$; 3) $(x+2)^2=10(y-2)$; 4) $(x+2)^2=-10(y-2)$. **347.** 4. **348.** $x-2=0$. **349.** а) $C(2;\ 0)$, $p=2$; б) $C(0;\ 2)$, $p=\frac{1}{2}$; в) $C(1;\ 3)$, $p=\frac{1}{8}$; г) $C(6;\ -1)$, $p=3$; д) $C(1;\ 2)$, $p=2$; е) $C(-4;\ 3)$, $p=\frac{1}{4}$.

350. 1) частина параболи $y^2=4x$, розміщена у першій чверті (рис. 3.68); 2) частина параболи $y^2=-18x$, розміщена у третій чверті (рис. 3.69); 3) частина параболи $x^2=5y$, розміщена у першій чверті (рис. 3.70); 4) частина параболи $x^2=-25y$, розміщена у третій чверті (рис. 3.71); 5) частина параболи $(y-3)^2=16(x-1)$, розміщена під прямою $y-3=0$ (рис. 3.72); 6) частина

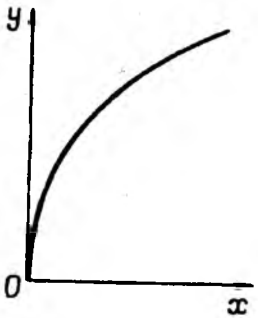


Рис. 3.68

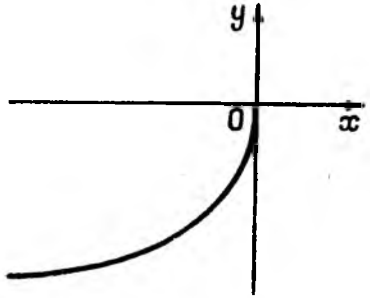


Рис. 3.69

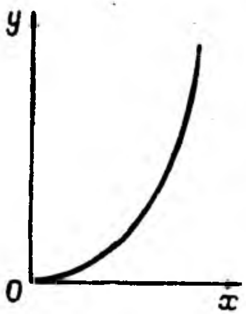


Рис. 3.70

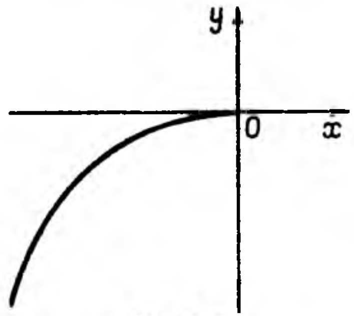


Рис. 3.71

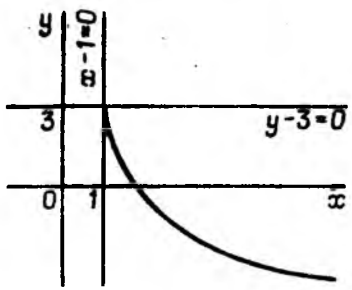


Рис. 3.72

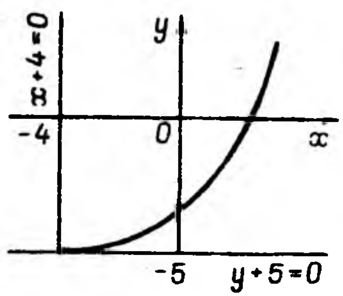


Рис. 3.73

параболи $(x+4)^2=9(y+5)$, розміщена праворуч від прямої $x+4=0$ (рис. 3.73); 7) частина параболи $(x-2)^2=-2(y-3)$, розміщена ліворуч від прямої $x-2=0$ (рис. 3.74); 8) частина параболи $(y+5)^2=-3(x+7)$, розміщена під прямою $y+5=0$ (рис. 3.75). **351.** 1) $k<\frac{1}{2}$; 2) $k=\frac{1}{2}$; 3) $k>\frac{1}{2}$. **352.** 1) $x+y+3=0$ у точці (3; —6) і $x-y+3=0$ у точці (3; 6); 2) $y=3x+1$; 3) $x-2y+12=0$;

4) $3x+y+1=0$. **353.** $\rho=2\frac{2}{3}$. **354.** $8\sqrt{2}$. **355.** 30 кв. од. **356.** 1) пара прямих $y=\pm 2x$; 2) точка (0; 0); 3) уявне коло; 4) точка (3; 4); 5) пара прямих $x=0$, $y=-x$; 6) пара прямих $y=\pm 4$; 7) пара прямих $y=x$ і $y=\frac{x}{2}$. **357.** Коло $(x+1)^2+(y-3)^2=4$. **358.** Коло $(x-R)^2+y^2=R^2$. **359.** Коло $x^2+(y-4)^2=16$. **360.** Еліпс $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$. **361.** Права вітка гіперболи $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$. **362.** Права вітка гіперболи $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$. **363.** Верхня вітка гіперболи $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=-1$. **364.** Парабола $x^2=y$. **365.** Верхня час-

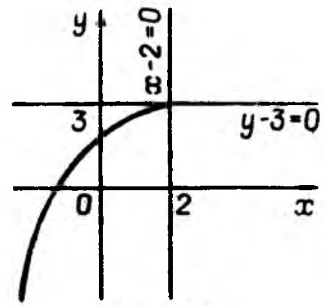


Рис. 3.74

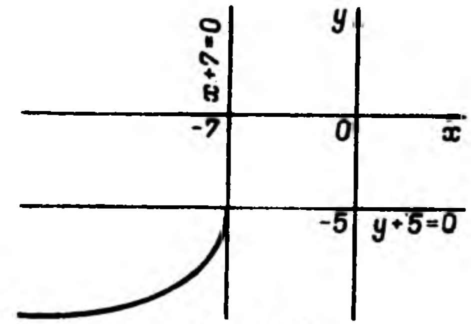


Рис. 3.75

тина параболи $y^2=10x$. **366.** а) $x=R(1+\cos 2t)$, $y=R\sin 2t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$; б) $x=R(1+\cos t)$, $y=R\sin t$, $t\in[0;2\pi)$. **367.** а) $x=\frac{t^2}{2p}$, $y=t$, $t\in(-\infty;\infty)$; б) $x=2p\,\mathrm{ctg}^2 t$, $y=2p\,\mathrm{ctg}\,t$, $t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ для верхньої вітки і $t\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$ для нижньої вітки; в) $x=\frac{p}{2}\mathrm{ctg}^2\frac{t}{2}$, $y=p\,\mathrm{ctg}\frac{t}{2}$, $t\in(0;2\pi)$. **368.** $x=-1+4\cos t$, $y=3+4\sin t$, $t\in[0;2\pi)$. **369.** 1) $x=-3+7\cos t$, $y=5+7\sin t$, $t\in[0;2\pi)$; 2) $x=-2+5\cos t$, $y=5\sin t$, $t\in[0;2\pi)$. **370.** $x=\frac{20\cos t}{\sqrt{25\sin^2 t+16\cos^2 t}}$, $y=\frac{20\sin t}{\sqrt{25\sin^2 t+16\cos^2 t}}$, $t\in[0;2\pi)$. **371.** $x=\frac{20\cos t}{\sqrt{16\cos^2 t-25\sin^2 t}}$, $y=\frac{20\sin t}{\sqrt{16\cos^2 t-25\sin^2 t}}$, $t\in\left(-\mathrm{arctg}\frac{4}{5};\mathrm{arctg}\frac{4}{5}\right)$ для правої вітки і $t\in\left(\pi-\mathrm{arctg}\frac{4}{5};\pi+\mathrm{arctg}\frac{4}{5}\right)$ для лівої вітки. **372.** 1) $\rho=5$; 2) $\rho=4\cos\varphi$; 3) $\rho=-3\sin\varphi$; 4) $\rho=2(\cos\varphi-\sin\varphi)$ або $\rho=\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $\rho^2+\rho(4\cos\varphi-3\sin\varphi)+1=0$ або $\rho^2+\frac{\rho}{5}\sin(\theta-$

$-\varphi)+1=0$, де $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$. **373.** 1) $\rho = 5$; 2) $\rho = 10\cos\varphi$; 3) $\rho^2 - 6\rho\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right) - 16 = 0$. **374.** 1) $\rho = \dfrac{2}{2-\sqrt{3}\cos\varphi}$; 2) $\rho = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}\cos\varphi}$. **375.** $\rho = -\dfrac{9}{4-\cos\varphi}$; $\rho = \dfrac{9}{4-\cos\varphi}$. **376.** $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{6}$; $c = \sqrt{2}$. **377.** $\rho = \dfrac{2}{\sin\left(\varphi - \dfrac{\pi}{4}\right)}$ і $\rho = \dfrac{2}{\sin\left(\varphi - \dfrac{3\pi}{4}\right)}$. **378.** $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$. **379.** $\rho = \dfrac{8\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$. **380.** $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$. **381.** 1) Коло $x^2+y^2=16$; 2) коло $x^2+(y-a)^2=a^2$; 3) коло $(x-a)^2+y^2=a^2$; 4) еліпс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 5) гіпербола $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; 6) парабола $y^2=6x$. **382.** а) $C(2;\ 0)$, $C(2;\ 0)$, $R=2$; б) $C\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(0;\ \dfrac{3}{2}\right)$, $R=\dfrac{3}{2}$; в) $C\left(\dfrac{5}{2};\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$, $C\left(0;\ -\dfrac{5}{2}\right)$, $R=\dfrac{5}{2}$; г) $C\left(3;\ \dfrac{\pi}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $R=3$; д) $C\left(4;\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$, $C(-2\sqrt{3};\ 2)$, $R=4$; е) $C\left(4;\ -\dfrac{\pi}{6}\right)$, $C(2\sqrt{3};\ -2)$, $R=4$.

§ 7. 383. $20y+53=0$. **384.** $x^2+y^2+z^2=25$. **385.** $\dfrac{x^2+y^2}{9}+\dfrac{z^2}{25}=1$. **386.** $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$. **387.** $\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z$. *Вказівка.* Позначимо віддаль від даної точки до даної площини через p. За вісь Oz візьмемо перпендикуляр, опущений з точки на площину. Площину Oxy проведемо через середину цього перпендикуляра. **388.** $(x-4)^2+y^2+z^2=16$. **389.** $y^2=2ax-x^2$. **390.** 1) Круговий циліндр з віссю, що паралельна осі Oz; 2) параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Ox; 3) круговий циліндр з віссю, що паралельна осі Ox, і напрямною $(y-2)^2+z^2=4$, $x=0$; 4) параболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oy, і напрямною $x^2=-(z-9)$, $y=0$; 5) круговий циліндр з напрямною, що паралельна осі Oy, і напрямною $(x-3)^2+z^2=9$, $y=0$; 6) гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oz. **391.** 1) Еліптичний циліндр з віссю, що паралельна осі Oz, і напрямною $\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{3}{2}}=1$, $z=0$; 2) гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oz, і напрямною $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, $z=0$; 3) гіперболічний циліндр з віссю, що паралельна осі Oy, і напрямною $\dfrac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}}-\dfrac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}=-1$; 4) дві площини $3x-5z=0$ і $3x+5z=0$, що перетинаються вздовж осі Oy; 5) дві паралельні площини $x=0$ і $x=4$; 6) дві площини $z=0$ і $y=z$; 7) вісь Ox. **392.** а) $y^2+z^2=a^2$; б) $x^2+z^2=2ax$; в) $x^2+y^2=2ax$. **393.** а) $x^2+5y^2-8y-12=0$; б) $4x^2+5z^2+4z-60=0$;

в) $2y-z-2=0$. **394.** а) $8x^2+4y^2-36x+16y-3=0$, $z=0$; б) $2x-2z-7=0$, $y=0$; в) $4y^2+8z^2+16y+36z-31=0$, $x=0$. **395.** $(3y-2z)^2=12(3x-z)$. **396.** $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$. **397.** Рис. 3.76. $x=4$, $z\pm y=2$. **398.** $y^2+z^2=1$. **399.** $x^2+y^2=2$. **400.** $x^2+y^2=4$. **401.** $(x-z+2)^2+(y-z+2)^2=4$. **402.** а) $z=x^2+y^2$; б) $\sqrt{y^2+z^2}=x^2$. **403.** а) $x^2+z^2=y^2$; б) $z^2=x^2+y^2$. **404.** а) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; б) $\dfrac{x^2+y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$; в) $\dfrac{x^2+y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$. **405.** $\dfrac{x^2+y^2}{2}-z^2=1$. *Вказівка.* Точка $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — довільна точка на прямій обертання. Тоді $x_0-1=y_0+1=z_0$. Крім того, нехай $M(x;\ y;\ z)$ — точка поверхні, що дістали обертанням точки M_0. В такому разі $z=z_0$ і $x_0^2+y_0^2=x^2+y^2$. Виключаючи із чотирьох рівнянь три параметри, здобудемо шукане рівняння поверхні. **406.** Конус $40(x-2)^2-9(y^2+z^2)=0$. *Вказівка.* Конус з вершиною у точці $M_0(2;\ 0;\ 0)$. **407.** а) Однопорожнинний гіперболоїд $z^2+y^2-x^2=1$; б) двопорожнинний гіперболоїд $x^2-y^2+z^2=-1$. **408.** Тор $(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+z^2)$. **409.** $x^2(y^2+z^2)=1$ і $y^2(x^2+z^2)=1$. **410.** а) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}=\dfrac{z^2}{h^2}$; б) $9(x^2+z^2)=16y^2$.

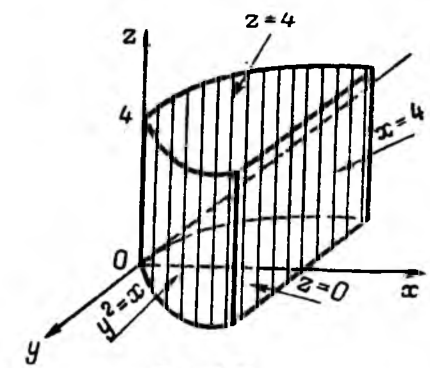


Рис. 3.76

411. а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$; б) $x^2+y^2-z^2=0$. **412.** а) $x^2=2z(y+z-1)$; б) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-(z-1)^2=0$. **413.** $25x^2-y^2-z^2=0$. **414.** 1) Еліптичний конус з віссю Oz; 2) круговий конус з віссю обертання Ox; 3) еліптичний конус з віссю Oy; 4) круговий конус з віссю обертання Ox. **415.** $2x^2+2y^2-z^2=0$. *Розв'язання.* Вершина конуса $O(0;\ 0;\ 0)$, тому рівняння твірної конуса має вигляд $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=\dfrac{z}{1}$ або $x=mz$, $y=nz$. Виключивши з цих рівнянь і рівнянь напрямної x, y, z, матимемо рівність $m^2+n^2=\dfrac{1}{2}$. Підставляючи в цю рівність $m=\dfrac{x}{z}$ і $n=\dfrac{y}{z}$, матимемо рівняння конуса $\left(\dfrac{x}{z}\right)^2+\left(\dfrac{y}{z}\right)^2=\dfrac{1}{2}$ або $2x^2+2y^2-z^2=0$. **416.** $2y^2+xz-8x=0$. *Вказівка.* Напрямна конуса має рівняння $y^2=4x$, $z=0$, а рівняння твірної $\dfrac{x}{m}=\dfrac{y}{n}=z-8$. Залежність між кутовими коефіцієнтами твірної $2n^2=-m$. **417.** $18y^2+50z^2+75xz+225x-450=0$. **418.** $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=0$. **419.** $x^2+y^2-(z-1)^2=0$. **420.** $(y-5x)^2-10(x^2+y^2+z^2)=0$. *Розв'язання.* Усяку пряму, що проходить через початок координат, можна записати рівняннями $x=mz$, $y=nz$. Ця пряма є дотичною, коли буде єдина точка перетину прямої і сфери (дискримінант здобутого при цьому квадратного рівняння дорівнюватиме нулю), тобто $(n-5m)^2-10(m^2+n^2+1)=0$. Підставляючи в цю рівність замість m і n їх вирази $\frac{x}{z}$ і $\frac{y}{z}$, матимемо рівняння конуса. **421.** $xy+xz+yz-2x-2y-2z+3=0$. **422.** а) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=25$; б) $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$; в) $x^2+(y-4)^2+z^2=25$. **423.** а) $C(-5;\ 4;\ 3)$, $R=4$; б) $C\left(-\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ -2\right)$, $R=\frac{5}{2}$; в) $C(0;\ 0;\ 2)$, $R=3$. **424.** 1) $x^2+y^2+z^2=49$; 2) $(x-1)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=121$; 3) $(x-6)^2+(y+8)^2+(z-3)^2=100$. **425.** $x^2+y^2+z^2=1$. **426.** $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=21$. **427.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49$. **428.** $(x+1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=1$. **429.** $x=-1+5t$, $y=3-t$, $z=-\frac{1}{2}+2t$. **430.** $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$. **431.** $x^2+y^2+z^2=8x$. **432.** $C(1;\ 7;\ 2)$, $R=4$. **433.** $2x-y+3z-7=0$. **434.** $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{18}=1$. **435.** $C\left(\frac{10}{3};\ -\frac{14}{3};\ \frac{5}{3}\right)$, $R=3$. **436.** Еліпсоїд. **437.** Однопорожнинний гіперболоїд. **438.** Двопорожнинний гіперболоїд обертання. **439.** Параболоїд обертання. **440.** Гіперболічний параболоїд. **441.** Еліптичний параболоїд. **442.** Параболоїд обертання з вершиною у точці $S(0;\ 0;\ 4)$. **443.** Однопорожнинний гіперболоїд обертання. **444.** 1) При $\lambda>0$ — еліпсоїд, при $\lambda=0$ — точка, при $\lambda<0$ — пуста множина; 2) при $\lambda>0$ — еліпсоїд, при $\lambda=0$ — еліптичний циліндр, при $\lambda<0$ — однопорожнинний гіперболоїд, 3) при $\lambda>0$ — еліпсоїд, при $\lambda=0$ — пряма, при $\lambda<0$ — двопорожнинний гіперболоїд; 4) при $\lambda>0$ — однопорожнинний гіперболоїд, при $\lambda=0$ — конус, при $\lambda<0$ — двопорожнинний гіперболоїд, 5) при $\lambda>0$ — двопорожнинний гіперболоїд, при $\lambda=0$ — конус, при $\lambda<0$ — однопорожнинний гіперболоїд; 6) при $\lambda>0$ — еліпсоїд, при $\lambda=0$ — пара паралельних площин, при $\lambda<0$ — двопорожнинний гіперболоїд; 7) при $\lambda\neq0$ — еліптичний параболоїд, при $\lambda=0$ — вісь Oz; 8) при $\lambda>0$ — еліптичний параболоїд, при $\lambda=0$ — параболічний циліндр, при $\lambda<0$ — гіперболічний параболоїд; 9) при $\lambda\neq0$ — еліптичний параболоїд, при $\lambda=0$ — площина Oxy; 10) при $\lambda>0$ — еліптичний циліндр, при $\lambda=0$ — вісь Oz, при $\lambda<0$ — пуста множина; 11) при $\lambda\neq0$ — гіперболічний циліндр, при $\lambda=0$ — пара площин, що перетинаються, 12) при $\lambda>0$ — еліптичний параболоїд, при $\lambda=0$ — пара паралельних площин, при $\lambda<0$ — гіперболічний параболоїд. **445.** 1) Еліпсоїд, $C(-1;\ -1;\ -1)$, $a=\sqrt{6}$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{2}$, $x=-1$, $y=-1$, $z=-1$; 2) еліпсоїд, $C(-1;\ -1;\ -1)$, $a=2$, $b=\sqrt{6}$, $c=2\sqrt{3}$, $x=-1$, $y=-1$, $z=-1$. Еліпсоїди подібні. **446.** 1) Двопорожнинний гіперболоїд, $C(-3;\ 1;\ 1)$, $A(-5;\ 1;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 1)$, вісь симетрії $y=1$, $z=1$, площини симетрії $x=-3$, $y=1$, $z=1$; 2) двопорожнинний гіперболоїд, $C(-1;\ 0;\ -1)$, $A(-1;\ 0;\ -1-\sqrt{3})$, $B(-1;\ 0;\ -1+\sqrt{3})$, вісь симетрії $x=-1$, $y=0$, площини симетрії $x=-1$, $x=0$, $z=-1$. **447.** а) Еліпс $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$, $z=0$; б) гіпербола $\frac{y^2}{18}-\frac{z^2}{9}=1$, $x=0$; в) гіпербола $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$, $y=0$; г) еліпс $\frac{x^2}{39}+\frac{y^2}{26}=1$, $z=2$; д) гіпербола $\frac{y^2}{12}-\frac{z^2}{6}=1$, $x=3$. **454.** Коло $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=2$. **455.** $x=-1+2\cos t$, $y=-1+2\sin t$, $z=3-2\cos t-2\sin t$. *Вказівка.* Виключивши z із заданих рівнянь, матимемо рівняння проекції еліпса на площину Oxy — рівняння кола $(x+1)^2+(y+1)^2=4$, $z=0$. За параметр t приймаємо кутовий параметр кола. **456.** 1) 4, 12, $\varepsilon=\sqrt{10}$; 2) 12, 4,

$\varepsilon=\frac{\sqrt{10}}{3}$. **457.** $p=10$, $A(0;\ 4;\ 1)$. **458.** а) $1<\alpha<\sqrt{2}$; б) $|\alpha|<1$. **459.** $\frac{x-1}{10}=\frac{y+1}{-16}=\frac{z-5}{-5}$. **460.** $2x-4y+z+4=0$. **461.** $2x-y+2z+2=0$. **462.** $6x+y+3z-3=0$, $6x+y+3z+3=0$. **463.** $x-10y+2z+21=0$; $\frac{x-21}{6}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-4}{-2}$ або $x=21+6t$, $y=5+t$, $z=4-2t$. **464.** Прямі $\sqrt{2}\,x=\pm(z+a)$, $\sqrt{2}\,y=\pm(z-a)$. **465.** $C_1(0;\ -12;\ 9)$, $R_1=15$; $C_2(0;\ 12;\ 9)$, $R_2=15$. **466.** $2x+y-14=0$, $10x-2y-z-21=0$ та $2x-y-6=0$, $10x-2y-z-21=0$. *Вказівка.* Виключаємо з рівнянь поверхні і площини, наприклад z. Здобуте рівняння зображає дві площини $2x+y-14=0$, $2x-y-6=0$, що проектують лінію перетину на площину Oxy. Перетинаючи їх даною площиною, дістанемо шукані прямі. **467.** $y+2z=0$, $x-5=0$; $2x-5z=0$, $y+4=0$. **468.** $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y+9}{12}=\frac{z+3}{2}$; $\varphi=\arccos\frac{45}{\sqrt{129}\sqrt{21}}$. **469.** $\frac{x}{2}+\frac{z}{3}=\frac{y+2}{3}$, $\frac{x}{2}-\frac{z}{3}=-\frac{y-2}{\frac{1}{3}}$; $\frac{x}{2}+\frac{z}{3}=-\frac{y-2}{1}$, $\frac{x}{2}-\frac{z}{3}=\frac{y+2}{1}$.

470. $3x+4y-24=0$, $3x-4y-12z=0$; $z=0$, $3x-4y=0$. **473.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\arccos\frac{h^2}{h^2+1}$. **474.** 1) Коло $x^2+y^2=1$, $z=0$; 2) пара прямих $y\pm x=0$, $z=0$; 3) парабола $16y^2=4x+3$, $z=-\frac{3}{8}$. **475.** $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

§. 8. 476. Так; $A=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$. **477.** Так; якщо $\vec{e}=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, то $A=\begin{pmatrix}\cos^2\alpha & \cos\beta\cos\alpha & \cos\gamma\cos\alpha\\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\gamma\cos\beta\\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma\end{pmatrix}$. **478.** Так; якщо $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_k\vec{k}$, то $A=\begin{pmatrix}0 & -a_z & a_y\\ a_z & 0 & -a_x\\ -a_y & a_x & 0\end{pmatrix}$. **479.** а) $\vec{y}$ з власним числом 3, $\vec{z}$ з власним числом 2; б) $\vec{x}$ з власним числом -3; в) $\vec{x}$ з власним числом 1, $\vec{y}$ з власним числом 5. **480.** а) $\lambda^2-5\lambda+6=0$; $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$; б) $\lambda^2-6\lambda+8=0$; $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$; в) $\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)=0$; $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$; г) $(\lambda-1)^2(\lambda+3)=0$; $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=1$; д) $(\lambda-4)^2(\lambda-5)=0$; $\lambda_1=4$, $\lambda_2=4$, $\lambda_3=5$. **481.** а) Дійсних власних чисел немає; б) $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$; в) $\lambda_1=1$; г) $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=4$. **485.** а) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; б) $-\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7 & 36\\ 24 & 37\end{pmatrix}$. **486.** а) $(1;\ 0)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$; б) $(1;\ 2)\,t$, $(1;\ 1)\,s$, $t,\ s\in\mathbf{R}$, $t\neq0$, $s\neq0$; в) $(1;\ 0;\ 0)\,t$, $(8;\ -2;\ 1)\,s$, $(9;\ -3;\ 1)\,k$, $t,\ s,\ k\in\mathbf{R}$, $t\neq0$, $s\neq0$, $k\neq0$; г) $(0;\ 0;\ 1)\,t$, $(5;\ 5;$

$-8)\,s$, t, $s\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$; д) $(0;\ 1;\ 0)\,t$, $(15;\ 8;\ -9)\,s$, $(11,\ 16;\ 11)\,k$, t, s, $k\in\mathbf{R}$, $t\neq 0$, $s\neq 0$, $k\neq 0$; е) $(t+s;\ t;\ s)$, $(1;\ 1;\ 1)\,k$, t, s, $k\in\mathbf{R}$, $|t|+|s|\neq 0$, $k\neq 0$. **488.** $\lambda=-1$; $(1;\ 1;\ -1)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$. **489.** $\lambda=2$; $(1;\ 2;\ 0)\,t+(0;\ 0;\ 1)\,s$, $|t|+|s|\neq 0$, t, $s\in\mathbf{R}$. **490.** $\lambda_1=1$; $(1;\ 1;\ 1)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$; $\lambda_2=0$; $(1;\ 2;\ 3)\,s$, $0\neq s\in\mathbf{R}$. **491.** $\lambda=1$; $(3;\ 1;\ 1)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$. **492.** $\lambda_1=3$; $(1;\ 2;\ 2)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$; $\lambda_2=-1$; $(1;\ 2;\ 1)\,s$, $0\neq s\in\mathbf{R}$. **493.** $\lambda=-1$; $(2;\ 1;\ 0)\,t+(1;\ 0;\ -1)\,s$, $|t|+|s|\neq 0$, t, $s\in\mathbf{R}$. **494.** $\lambda_1=1$; $(1;\ 1;\ -2)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$; $\lambda_2=3$; $(1;\ 1;\ 0)\,s$, $0\neq s\in\mathbf{R}$; $\lambda_3=-3$; $(5;\ -7;\ 6)\,k$, $0\neq k\in\mathbf{R}$. **495.** $\lambda_1=3$; $(1;\ 2;\ 2)\,t$, $0\neq t\in\mathbf{R}$; $\lambda_2=6$; $\left(1;\ \frac{1}{2};\ -1\right)s$, $0\neq s\in\mathbf{R}$; $\lambda_3=9$; $\left(-1;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right)s$, $0\neq s\in\mathbf{R}$. **496.** $\lambda_1=1$; $(1;\ 0;\ 0)\,t+(0;\ 1;\ 0)\,s$, t, $s\in\mathbf{R}$, $|t|+|s|\neq 0$; $\lambda_2=0$; $(0;\ 0;\ 1)\,k$, $0\neq k\in\mathbf{R}$. **497.** а) $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 0\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$; є) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. **498.** а) $(x_1x_2)\cdot\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$; б) $(x_1x_2)\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$;

в) $(x_1x_2)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$; г) $(x_1x_2x_3)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$; д) $(x_1x_2x_3)\times$

$\times\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$; е) $(x_1x_2x_3)\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -1\\ \frac{3}{2} & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$.

499. а) $x_1^2+3x_2^2-4x_1x_2$; б) $-3x_2^2+2x_1x_2$; в) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-2x_2x_3$; г) $3x_1^2-2x_2^2+x_3^2+4x_1x_3+2x_2x_3$; д) $-3x_2^2+10x_1x_2$. **500.** Відповідь не однозначна. а) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, $y_1^2+3y_2^2$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & \sqrt{2}\end{pmatrix}$, $4y_1^2-y_2^2$;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $y_1^2-y_2^2$; г) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$;

$4y_1^2+4y_2^2-2y_3^2$; д) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, $9y_1^2+6y_2^2+6y_3^2$;

е) $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$, $\sqrt{2}\,y_2^2-\sqrt{2}\,y_3^2$; є) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,

$-y_1^2+2y_2^2+2y_3^2$; ж) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $2y_2^2$; з) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, y_1^2. **501.** Гіперболічний нараболоїд $(x')^2-(y')^2=8z'$, $O'\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$; $\vec{j'}=\left(\frac{1}{3\sqrt{2}};\ \frac{1}{3\sqrt{2}};\ -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

502. Еліпсоїд $\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{1}+\frac{(z')^2}{\frac{2}{3}}=1$, $O'(1;\ 2;\ -1)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **503.** Гіперболічний параболоїд $\frac{(x')^2}{2}-\frac{(y')^2}{1}=-2z'$, $O'(1;\ 2;\ 3)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$. **504.** Двопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x')^2}{\frac{4}{5}}+\frac{(y')^2}{\frac{4}{15}}-\frac{(z')^2}{\frac{4}{25}}=-1$, $O'\left(0;\ 1;\ -\frac{2}{5}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$; $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$, $\vec{k'}=(0;\ 0;\ 1)$. **505.** Еліптичний параболоїд $\frac{(x')^2}{\frac{5\sqrt{2}}{4}}+\frac{(y')^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2z'$, $O'\left(-\frac{1}{40};\ -\frac{19}{40};\ \frac{1}{2}\right)$; $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\right.$

$\frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{2}{\sqrt{6}}\Big)$; $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$. **506.** Параболічний циліндр $(y')^2=\frac{4}{3}x'$, $O'(2;\ 1;\ -1)$, $\vec{i'}=\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; $\vec{j'}=\left(\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **507.** Еліптичний циліндр $\frac{(x')^2}{2}+\frac{(y')^2}{1}=1$, $O'(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{3}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{2}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $\vec{k'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **508.** Однопорожнинний гіперболоїд $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}}+\frac{(y')^2}{\frac{1}{6}}-\frac{(z')^2}{\frac{1}{2}}=1$, $O'\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **509.** Гіперболічний циліндр $\frac{(x')^2}{\frac{1}{3}}-\frac{(y')^2}{\frac{1}{3}}=1$; $O'\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ -\frac{5}{6}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\vec{k'}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. **510.** Еліпс $\frac{(x')^2}{8}+\frac{(y')^2}{32}=1$, $O'(-3;\ 5)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **511.** Еліпс $\frac{(x')^2}{2}+(y')^2=1$, $O'\left(-\frac{4}{5};\ \frac{2}{5}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **512.** Парабола $y'^2=4\sqrt{2}\,x'$, $O'(2;\ 1)$, $\vec{i'}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. **513.** Гіпербола $\frac{(x')^2}{4}-\frac{(y')^2}{9}=1$, $O'(1;\ 1)$, $\vec{i'}=\left(\frac{3}{\sqrt{13}};\ \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{2}{\sqrt{13}};\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. **514.** Паралельні прямі $x'=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$, $O'\left(-\frac{3}{5};\ -\frac{3}{10}\right)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, або $2x-y+1=0$, $2x-y-4=0$. **515.** Еліпс $\frac{(x')^2}{\frac{35}{6}}+\frac{(y')^2}{\frac{35}{36}}=1$, $O'\left(\frac{7}{6};\ \frac{1}{3}\right)$, $\vec{i'}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **516.** Парабола $(y')^2=\frac{1}{\sqrt{5}}x'$, $O'(3;\ 2)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}};\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\vec{j'}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. **517.** а) При $\lambda\in(-\infty;\ -1)$ — гіпербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, при $\lambda=-1$ — дві прямі $x-y=0$, $x+y+2=0$, що перетинаються, при $\lambda\in(-1;\ 0)$ — гіпербола $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, при $\lambda=0$ — парабола $x^2=2y$, при $\lambda\in(0;\ +\infty)$ — еліпс $(x-\lambda)^2+\lambda\left(y-\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{\lambda^3+1}{\lambda}$; б) при $\lambda\in(-\infty;\ -1)$ — гіпербола $(1-\lambda)\times(x')^2+(1+\lambda)(y')^2=1$, $O'(0;\ 0)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, при $\lambda=-1$ — дві паралельні прямі $x-y\pm1=0$, при $\lambda\in(-1;\ 0)$ — еліпс $(1-\lambda)(x')^2+(1+\lambda)(y')^2=1$, $O'(0;\ 0)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, при $\lambda=0$ — коло $x^2+y^2=1$, при $\lambda\in(0;\ 1)$ — еліпс $(1-\lambda)x'^2+(1+\lambda)y'^2=1$, $O'(0;\ 0)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, при $\lambda=1$ — дві паралельні прямі $x+y\pm1=0$, при $\lambda\in(1;\ +\infty)$ — гіпербола $(1-\lambda)(x')^2+(1+\lambda)(y')^2=1$, $O'(0;\ 0)$, $\vec{i'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{j'}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Глава 4

§ 1. 6. $\left\{-\frac{7}{4};\ -\frac{5}{4}\right\}$. **7.** $\{-1;\ 0\}$. **8.** $2\pm\sqrt{8}$. **9.** $\varnothing$. **10.** $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$. **11.** $\{0;\ 2\}$. **12.** $1/4$. **13.** $[-3;\ 1]$. **14.** $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ \infty)$. **15.** $(-1;\ 3]$. **16.** $(-\infty;\ -2]$. **17.** $[-6;\ 6]$. **18.** $(-1/2;\ \infty)$. **19.** $(-1/2;\ 1/2)$. **20.** $A=\{3/2;\ 2\}$. **21.** $A=\{1\}$. **22.** $A=\{-1;\ 0;\ 4\}$. **23.** $A=\left\{\frac{\pi}{18};\ \frac{5\pi}{18};\ \frac{13\pi}{18};\ \frac{17\pi}{18}\right\}$. **24.** $A=\{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$. **25.** $A=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **26.** $A=\{4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8\}$. **27.** $A=\left\{\frac{\pi}{8};\ \frac{5\pi}{8};\ \frac{9\pi}{8};\ \frac{13\pi}{8}\right\}$. **28.** $A=\{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$. **29.** Рис. 4.1. **30.** Рис. 4.2. **31.** Рис. 4.3 **32.** Рис. 4.4. **33.** Рис. 4.5. **34.** Рис. 4.6. **35.** Рис. 4.7. **36.** Рис. 4.8.

§ 2. 37. $a=\frac{4}{h}$. **38.** $c=\sqrt{25+a^2}$. **39.** $h=\frac{S}{2\pi r}-r$. **40.** $S=\frac{a^2-b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$. **41.** $v=a(t-t_0)$, $S=\frac{a}{2}(t-t_0)^2$, $S=\frac{v^2}{2a}$, де $t\geqslant t_0$. **42.** $v=\sqrt{s(s-18\pi)}$. **43.** $v=\frac{1}{4}\pi h(4R^2-h^2)$. **44.** а) $s=\frac{\pi l^2}{2R}\sqrt{4R^2-l^2}$; б) $s=4\pi R^2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$; в) $s=4\pi R^2\cos\beta\sin^2\beta$. **45.** $m(x)=0$, якщо $-\infty<x\leqslant0$; $m(x)=2x$, якщо $0<x\leqslant1$; $m(x)=2$, якщо $1<x\leqslant2$; $m(x)=3$, якщо $2<x\leqslant3$; $m(x)=4$, якщо $3<x<\infty$. **46.** 8; 3; $\frac{5}{4}$; 0; -1; 0; 3. **47.** $-\frac{1}{2}$; -2; 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; 1; 0; $\frac{1}{5}$. **48.** 0; 0; -8;

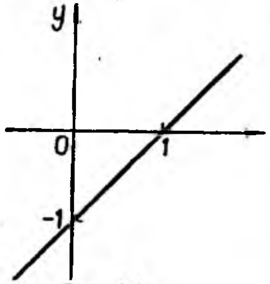


Рис. 4.1

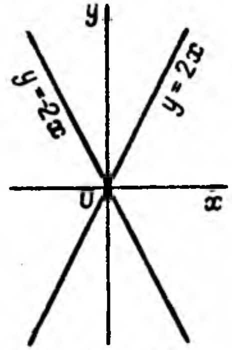


Рис. 4.2

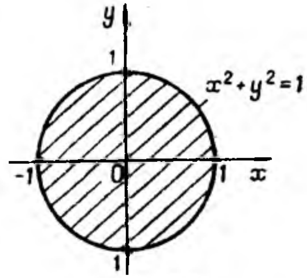


Рис. 4.3

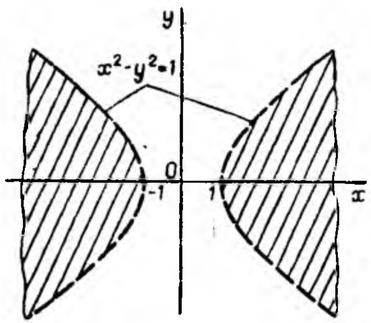


Рис. 4.4

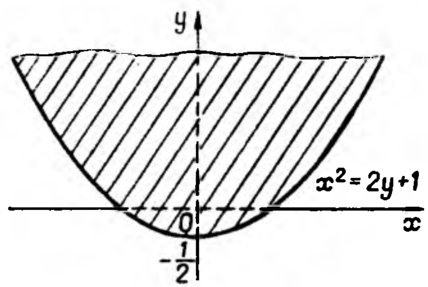


Рис. 4.5

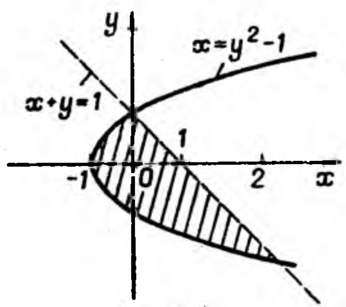


Рис. 4.6

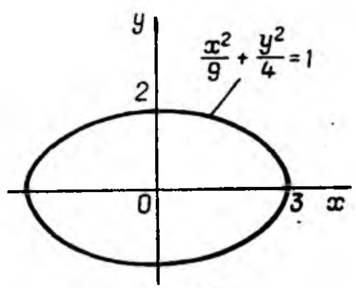


Рис. 4.7

—4; 4. **49.** 3; 3; 4; 4; 4; 5. **50.** 6; a^2+2; $\frac{1+2a^2}{a^2}$; a^2+2a+3; a^4-2a^2+3.

54. 1) $\{0; 2\}$; 2) $\{-1; 3\}$. **55.** $\left\{-2; -\frac{1}{2}; 5\right\}$. **56.** $\{-2; 2; 4; 10\}$. **57.** $\{-3; -2; 2; 3\}$.

58. $x \in (-\infty; -1] \cup [2; \infty)$. **59.** 1) $D_0 = \{-1\}$, $D_+ = (-1; +\infty)$, $D_- = (-\infty; -1)$; 2) $D_0 = \{-1; 2\}$, $D_+ = (-1; 2)$, $D_- = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 3) $D_0 = \left\{x \in \mathrm{R} \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\right\}$, $D_+ = \cup\left(\frac{1}{2n}; \frac{1}{2n+1}\right)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, $D_- = \cup\left(\frac{1}{2n+1}; \frac{1}{2(n+1)}\right)$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$; 4) $D_0 = \{1\}$, $D_+ = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$, $D_- = (0; 1)$. **60.** $y = x$. **61.** $y = \operatorname{tg} t$. **62.** $y = \sin 3x$.

63. $y = \frac{1}{\sin x}$. **64.** $y = \cos t$. **65.** $u = x$. **66.** $\left[-\frac{3}{2}; \infty\right)$.

67. $(-\infty; -4] \cup [4; \infty)$. **68.** $(-\infty; 3)$. **69.** $[-5; 5]$. **70.** $(-\infty; \infty)$. **71.** $[0; 5]$. **72.** $(-\infty; \infty)$. **73.** $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; \infty)$. **74.** $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$. **75.** $(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$. **76.** $[-1; 4]$. **77.** $[-4; 0]$. **78.** $[0; 1]$. **79.** $(2; 3)$. **80.** $[-1; 1]$. **81.** $[0; 2]$. **82.** $(-\infty; \infty)$. **83.** $[-2; 0) \cup (0; 1)$. **84.** $[-1; 1)$. **85.** $[-1; 0)$. **86.** $[1; 4)$. **87.** $(3-2\pi; 3-\pi) \cup (3; 4]$. **88.** $(4; 5) \cup (6; \infty)$. **89.** $\varnothing$. **90.** $\{4\}$. **91.** $(2; 3)$. **92.** $(1; 2]$. **93.** $x < 0$, $x \neq -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **94.** $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **95.** $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. **96.** Парна.

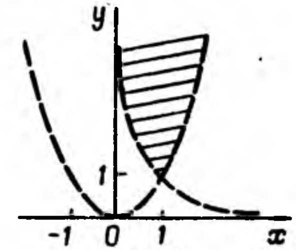


Рис. 4.8

97. Ні парна, ні непарна. **98.** Непарна. **99.** Парна. **100.** Парна. **101.** Непарна. **102.** Непарна. **103.** Ні парна, ні непарна. **104.** Ні парна, ні непарна. **105.** Непарна. **106.** Парна. **107.** Парна. **108.** Непарна. **109.** Парна. **110.** Парна. **111.** Непарна. **112.** $T = \frac{2\pi}{5}$. **113.** $T = \pi$. **114.** Неперіодична. **115.** $T = \frac{\pi}{2}$. **116.** Неперіодична. **117.** Неперіодична. **118.** $T = 6\pi$. **119.** $T = \pi$. **120.** $T = 2\pi$. **133.** 1) зростає при $a > 0$ і спадає при $a < 0$; 2) при $a > 0$ спадає в інтервалі $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ і зростає в інтервалі $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$; 3) зростає; 4) при $ad - bc > 0$ зростає в інтервалах $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ і $\left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$; 5) зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. **134.** 1) Обмежена; 2) необмежена; 3) обмежена; 4) обмежена зверху; 5) обмежена знизу; 6) необмежена; 7) обмежена; 8) необмежена; 9) обмежена знизу. **135.** 1) $y = \pm\sqrt{x^2-4}$; 2) $y^2 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; 3) $y = \sqrt[3]{a^3-x^3}$; 4) $y = \frac{c}{x}$; 5) $y = \frac{\log_3 4}{x}$; 6) $y = \frac{100}{x} - 1$; 7) $y = \log_5 \frac{x^2-7}{x^3+2} - x$; 8) $y = \arccos \frac{x^2}{1+x}$ **136.** $x = \frac{y-3}{2}$ $(-\infty < y < \infty)$.

137. а) $x = -\sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < \infty)$; б) $x = \sqrt{y}$ $(0 \leqslant y < \infty)$.

138. а) $x = -\sqrt{4-y}$ $(-\infty < y \leqslant 4)$; б) $x = \sqrt{4-y}$ $(-\infty < y \leqslant 4)$.

139. а) $x = -\sqrt{y+4} - 1$ $(-4 \leqslant y < \infty)$; б) $x = \sqrt{y+4} - 1$ $(-4 \leqslant y < \infty)$.

140. $x=\frac{1-y}{1+y}$ $(y\neq-1)$. 141. а) $x=-\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$; б) $x=\sqrt{1-y^2}$ $(0\leqslant y\leqslant 1)$. 142. $y=\sqrt[3]{x-8}$. 143. $y=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+1\right)$.

144. $y=\pm\sqrt{x^3-1}$. 145. $y=\log_3\frac{x}{4}$. 146. $y=5+10^{3-x}$. 147. $y=3^{\frac{1}{2x}}$.

148. $y=\log_2\frac{x}{1-x}$. 149. $y=\frac{1}{2}\lg\frac{x}{2-x}$. 150. $y=\frac{1}{3}\arccos\frac{x}{4}$.

151. $y=\pm\cos\frac{x}{4}$, $0\leqslant x\leqslant 2\pi$. 152. 1) $x^2-18x+9y=0$; 2) $y^2=4x^2(1-x^2)$; 3) $y^3=(x-1)^2$; 4) $x=\arccos(1-y)\mp\sqrt{2y-y^2}$; 5) $y=\frac{1+x-x^2}{1+x^2}$.

153. 1) Так; 2) ні. 154. 1) $(2k+1)\pi$, $k\in Z$; 2) 1; 3) $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$; 4) $\{-1; 1\}$.
155. Рис. 4.9. 156. Рис. 4.10. 157. Рис. 4.11. 158. Рис. 4.12. 159. Рис. 4.13.
160. $s=2{,}5t+10$; 31 с. 161. $F=\frac{8}{45}\omega$. 162. а) $p=0{,}727h$; б) 10,5 г/см^2; в) 36,4 см. 163. а) $V=100-0{,}35z$; б) 100 см^3. 164. $u=16-1{,}2t$; 7 с.
165. Рис. 4.14. 166. Рис. 4.15. 167. Рис. 4.16. 168. Рис. 4.17. 169. Рис. 4.18.

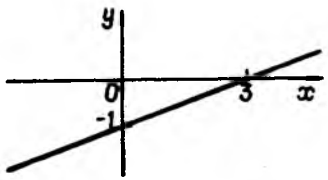


Рис. 4.9

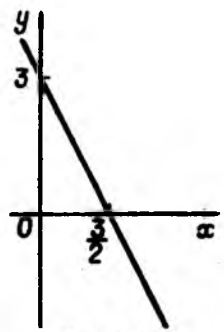


Рис. 4.10

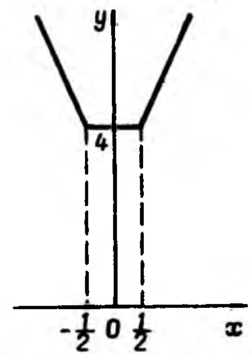


Рис. 4.11

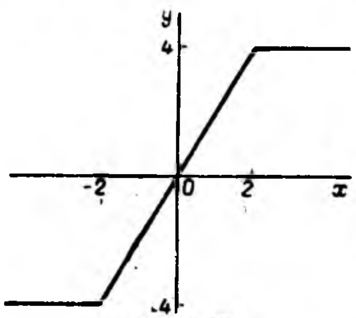


Рис. 4.12

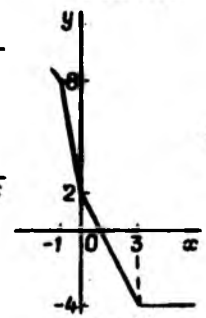


Рис. 4.13

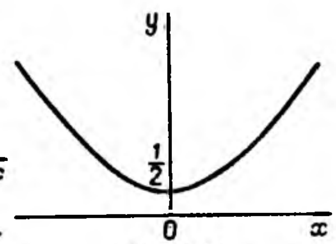


Рис. 4.14

170. Рис. 4.19. 171. Рис. 4.20. 172. Рис. 4.21. 173. $y(0)=5$. 174. $y\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{7}{8}$.

175. Немає. 176. $y(-2)=7$. 177. $y(a)=4a^2$. 178. $y\left(\frac{a^2}{2b^2}\right)=\frac{a^4}{4b^2}$.

179. $y(0)=-3$. 180. $y(-2)=-3$. 181. $y\left(-\frac{4}{3}\right)=y\left(\frac{4}{3}\right)=0$.

182. $y\left(\frac{5}{6}\right)=-\frac{37}{12}$. 183. $y\left(-\frac{1}{3}\right)=y(2)=0$. 184. $y\left(\frac{b}{2a}\right)=-\frac{9}{4}b^2$.

185. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 186. $a=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}$. 187. $\frac{l}{4}$. 188. $R=\frac{p}{8}$. 189. $R=\frac{p}{\pi+4}$.

190. $R_1=\frac{R_2}{2}$. 191. $R=\frac{p\sin\alpha_1}{2(1+2\sin\alpha_1)}$; $\frac{\pi p^2\sin\alpha_1}{4(1+2\sin\alpha_1)}$; $\alpha_1=\frac{\alpha}{2}$.
192. Рис. 4.22. 193. Рис. 4.23. 194. Рис. 4.24. 195. Рис. 4.25. 196. Рис. 4.26. 197. Рис. 4.27. 198. Рис. 4.28. 199. 1,465. 200. 14,26 см. 201. 6,8 см. 202. Рис. 4.29. 203. Рис. 4.30. 204. Рис. 4.31. 205. Рис. 4.32. 206. Рис. 4.33. 207. Рис. 4.34. 208. Рис. 4.35. 209. Рис. 4.36. 210. Рис. 4.37. 211. Рис. 4.38. 212. Рис. 4.39. 213. Рис. 4.40. 214. Рис. 4.41. 215. (1; 2); (3; 8); (3; 4/3); (−1,5; 0,3). 216. $n=15$. 217. $y\approx0{,}8$ при $x\approx0{,}4$. 219. Рис. 4.42. 220. Рис. 4.43. 221. Рис. 4.44. 222. Рис. 4.45. 223. Рис. 4.46. 224. Рис. 4.47. 225. Рис. 4.48. 226. Рис. 4.49. 227. Рис. 4.50. 228. Рис. 4.51. 229. Рис. 4.52. 230. Рис. 4.53.

231. $S=\frac{1}{2}ab\sin x$; $(0;\pi)$; $x=\frac{\pi}{2}$. 232. $x=R\sin\left(\frac{vt}{R}+\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{a}{R}\right)$.

233. $y=\sin\left[\frac{t-t_0}{t_1-t_0}(\arcsin y_1-\arcsin y_0)+\arcsin y_0\right]$; $T=\frac{2\pi(t_1-t_0)}{\arcsin y_1-\arcsin y_0}$; $\varphi=\frac{t_1\arcsin y_0-t_0\arcsin y_1}{t_1-t_0}$. 234. Рис. 4.54. 235. Рис. 4.45. 236. Рис. 4.56.
237. Рис. 4.57. 238. Рис. 4.58. 239. Рис. 4.59. 240. $-1\leqslant x\leqslant 1$. 241. $0\leqslant x\leqslant 1$. 242. $0\leqslant x\leqslant 1$. 243. $-1\leqslant x\leqslant 0$. 244. $0<x<\infty$. 245. $-\infty<x<0$.

246. $\omega=2\arcsin\frac{\alpha}{2\pi}$. 247. $\gamma=\operatorname{arctg}\frac{a(l\cos\varphi+b\sin\varphi)}{b^2+l^2+a(b\cos\varphi-l\sin\varphi)}$. 249. 1) $x\approx0{,}7$. 2) $x\approx0{,}4$; 3) $x_1=0$; $x_{2,3}\approx\pm1{,}9$; 4) $x\approx0{,}6$; 5) $x\approx3{,}8$; 6) $x_1=2$; $x_2\approx2{,}4$.

§ 3. 251. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$. 252. 0; $\frac{7}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{13}{4}$; $\frac{7}{6}$; ... .

253. $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{11}$; ... . 254. $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{26}$; ... .

255. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{26}$; $-\frac{1}{50}$; $\frac{1}{82}$; ... . 256. $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$; ... .

257. $x_n=\frac{2n-1}{2n}$. 258. $x_n=\frac{2n}{3^n}$. 259. $x_n=\frac{2n-1}{n!}$. 260. $x_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+4)}$.

261. $x_n=\frac{n+1}{(n+2)\cdot n}$. 262. $x_n=n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. 263. $x_n=\frac{2^{2n-1}}{(2n+1)!}$.

264. $x_n=\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n\cdot n!}$. 265. $x_n=\frac{2\cdot5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$.

266. $x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{(5n-4)(4n-1)}$. 267. 1; $n\geqslant 4$. 268. 0; $n>10$. 269. $n=59\,997$.

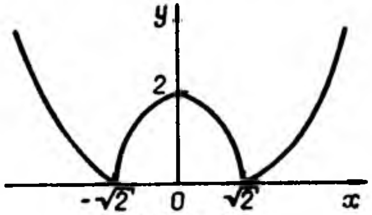


Рис. 4.15

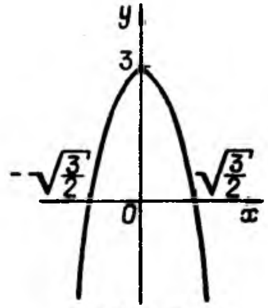


Рис. 4.16

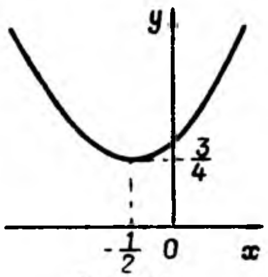


Рис. 4.17

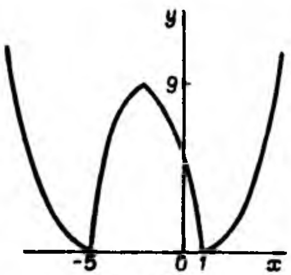


Рис. 4.18

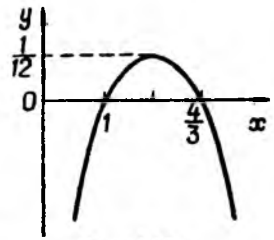


Рис. 4.19

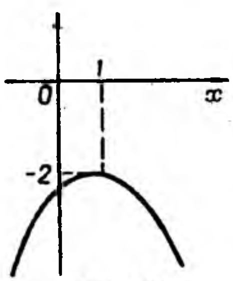


Рис. 4.20

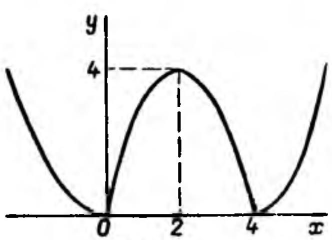


Рис. 4.21

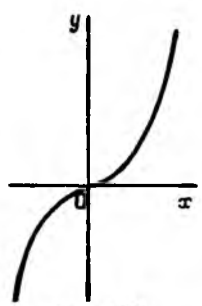


Рис. 4.22

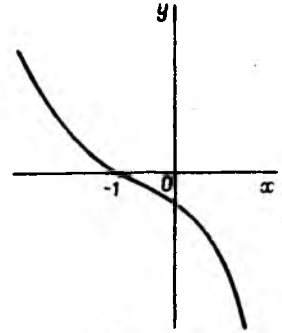


Рис. 4.23

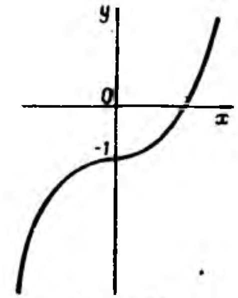


Рис. 4.24

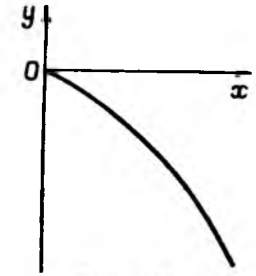


Рис. 4.25

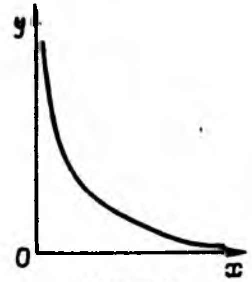


Рис. 4.26

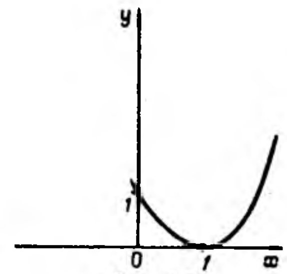


Рис. 4.27

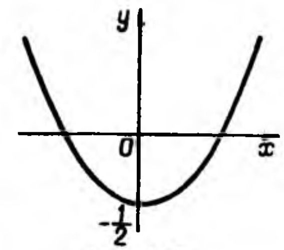


Рис. 4.28

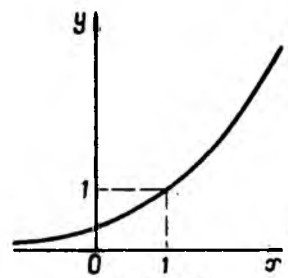


Рис. 4.29

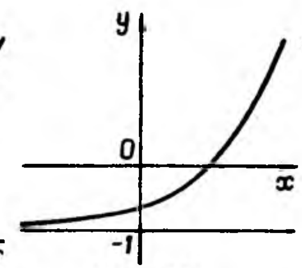


Рис. 4.30

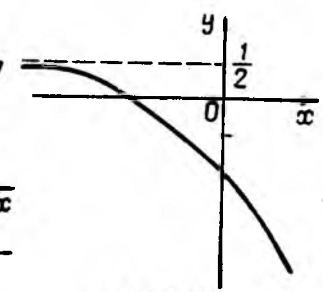


Рис. 4.31

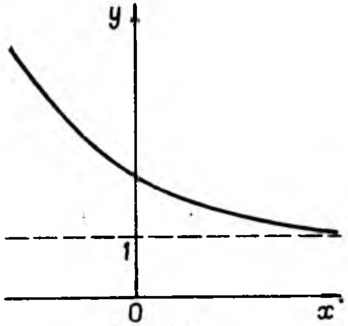


Рис. 4.32

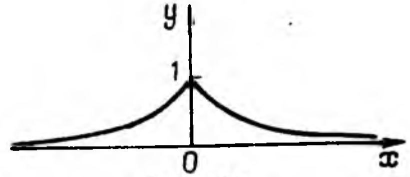


Рис. 4.33

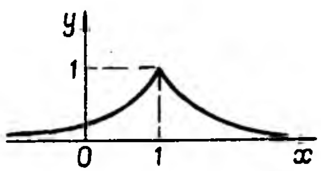


Рис. 4.34

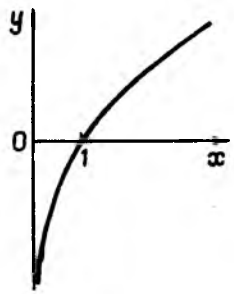


Рис. 4.35

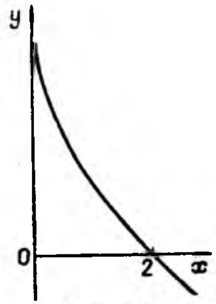


Рис. 4.36

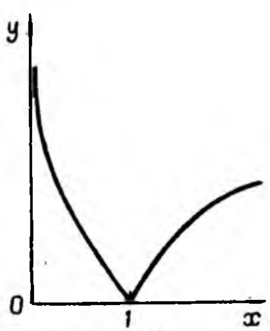


Рис. 4.37

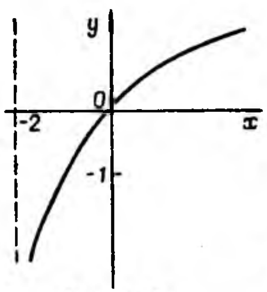


Рис. 4.38

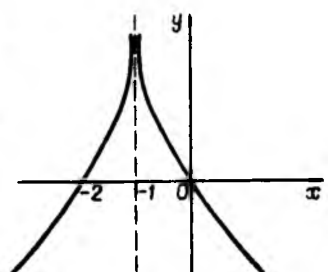


Рис. 4.39

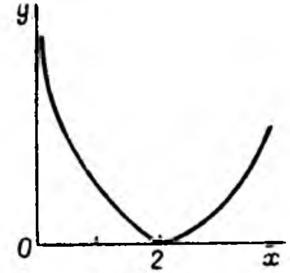


Рис. 4.40

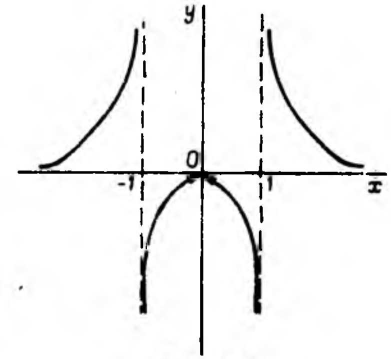


Рис. 4.41

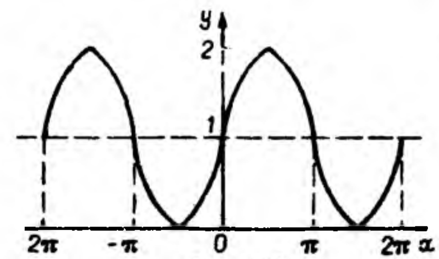


Рис. 4.42

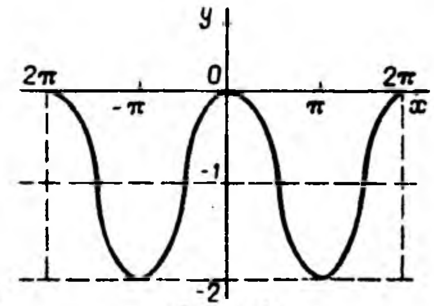


Рис. 4.43

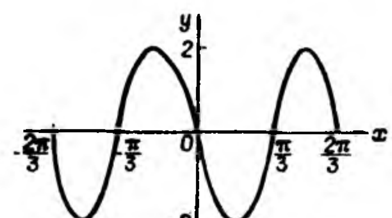


Рис. 4.44

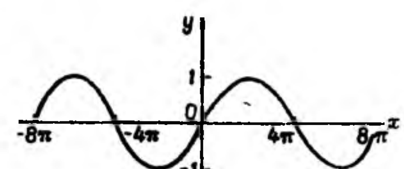


Рис. 4.45

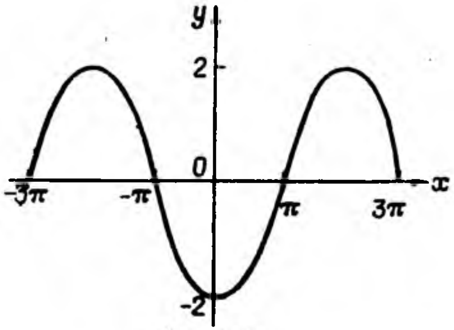


Рис. 4.46

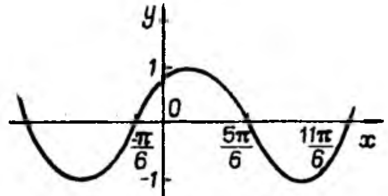


Рис. 4.47

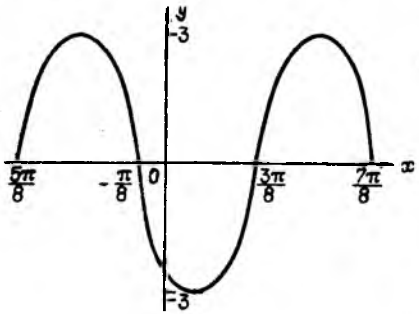


Рис. 4.48

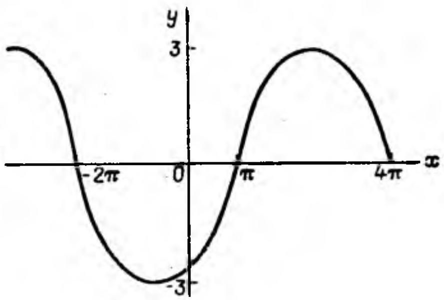


Рис. 4.49

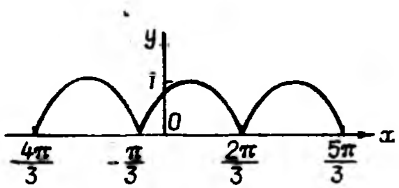


Рис. 4.50

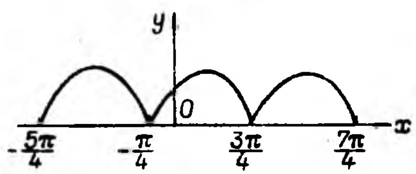


Рис. 4.51

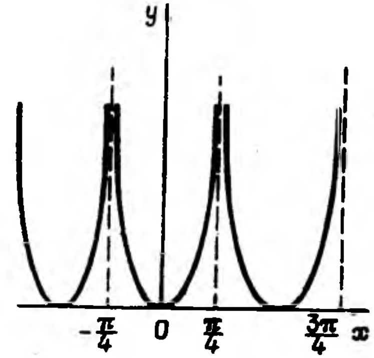


Рис. 4.52

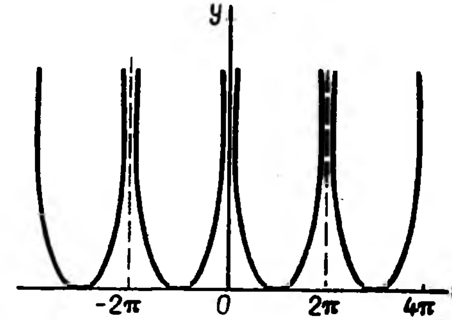


Рис. 4.53

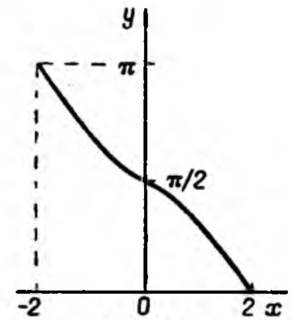


Рис. 4.54

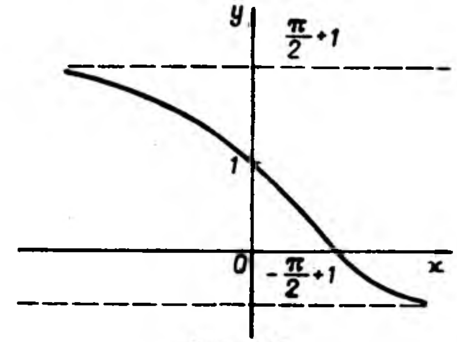


Рис. 4.55

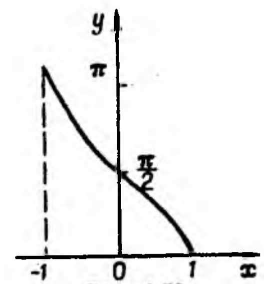


Рис. 4.56

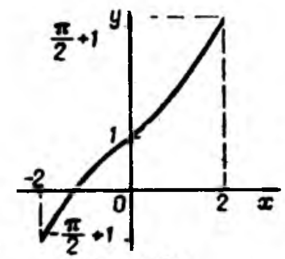
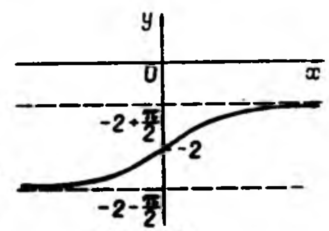


Рис. 4.57



Рс. 4.58

270. 1; $n \geqslant 33$. 271. $n \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{5-6\varepsilon}{\varepsilon}}$, якщо $\varepsilon \leqslant \frac{5}{6}$; $n = 0$, якщо $\varepsilon > \frac{5}{6}$. 272. $n \geqslant \frac{3}{\sqrt{\varepsilon(4+\varepsilon)}}$; послідовність x_n спадна. 274. $n > \frac{M-2}{3}$. 275. $n > 13$. 276. Так. 277. Ні. 278. Ні. 279. Так. 280. Порівняти x_n з сумою членів геометричної прогресії $\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \dots; \frac{1}{3^n}$. 282. 3. 283. 3/2. 284. —1/2. 285. —1/5. 286. 3. 287. ∞. 288. ∞. 289. 0. 290. 0. 291. 7/9. 292. ∞. 293. 0. 294. ∞. 295. 1/9. 296. ∞. 297. ∞. 298. 0. 299. 0. 300. 0. 301. 0. 302. ∞. 303. 1. 304. 1. 305. —1/4. 306. $-\infty$. 307. 0. 308. 1/2. 309. 6/5. 310. —1/2. 311. —1. 312. 1/2. 313. 1/2. 314. 1/3. 315. 4/3. 316. $\delta < \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta < 0{,}00025$. 317. $\delta < 2 - \sqrt{3}$. 318. $\delta < \frac{2}{13}$. 319. $N \geqslant 6$. 320. $N \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{\varepsilon} - 7}$, якщо $\varepsilon \leqslant \frac{6}{7}$; $N = 0$, якщо $\varepsilon > \frac{6}{7}$. 321. $-\frac{1}{10^4+2} < x < \frac{1}{10^4-2}$. 322. $\delta < \frac{1}{\sqrt{N}} = 0{,}01$. 323. $\lg 0{,}999 < x < \lg 1{,}001$. 324. $M \geqslant 1024$. 325. $\sin x$, $\cos x$ та всі обернені тригонометричні функції. 327. Ні; так. 328. $\frac{-1}{10001} < x < \frac{1}{9999}$. 329. $N \geqslant \left(\frac{3-\varepsilon^2}{2\varepsilon}\right)^2 - 1$. 330. 2. 331. —23/5. 332. 0. 333. 1. 334. —5/3. 335. 25/36. 336. ∞. 337. ∞. 338. —1/9. 339. —2/5. 340. ∞. 341. 6. 342. 1/3. 343. 1/2. 344. ∞. 345. 0. 346. 0. 347. 0. 348. 3/2. 349. —1. 350. ∞. 351. ∞. 352. 0. 353. 3/8. 354. —1/2. 355. 1. 356. —2. 357. ∞. 358. ∞. 359. 0. 360. 0. 361. 1/4. 362. 1/6. 363. 0. 364. 0. 365. 3/2. 366. ∞. 367. ∞. 368. —1/3. 369. 3/4. 370. ∞. 371. —1/2. 372. 144. 373. 4. 374. 5/12. 375. —1/2. 376. 4. 377. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

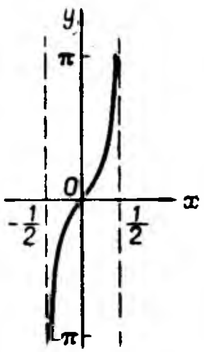


Рис. 4.59

378. —8. 379. 27/2. 380. 0. 381. 0, якщо $x \to +\infty$; ∞, якщо $x \to -\infty$. 382. 1/2, якщо $x \to +\infty$; $-\infty$, якщо $x \to -\infty$. 383. $\frac{a+b}{2}$, якщо $x \to +\infty$; ∞, якщо $x \to -\infty$. 384. ± 2. 385. 0. 386. 1/2. 387. 7. 388. $\frac{\alpha}{\beta}$. 389. k. 390. 4. 391. 9. 392. 2/5. 393. 5/3. 394. —7/4. 395. $\frac{\pi}{4}$. 396. 1/2. 397. —10. 398. 8. 399. $4\sqrt{3}$. 400. π. 401. —1/2. 402. $\frac{4}{\pi}$. 403. ∞. 404. 12. 405. —4. 406. —1. 407. 1/2. 408. ∞. 409. 2. 410. 1/2. 411. ∞. 412. —3/2. 413. 1. 414. 8. 415. 1/8. 416. —2. 417. 2. 418. $\frac{1}{2\pi}$. 419. 2π. 420. $\frac{3\pi}{2}$. 421. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 422. 6. 423. 3/2. 424. —1. 425. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. 426. $\frac{\pi}{128}$. 427. $-\frac{2\pi}{27}$. 428. 1/8. 429. 1/2. 430. 0. 431. $1/e$. 432. e^{km}. 433. 1. 434. 0, якщо $x \to +\infty$; ∞, якщо $x \to -\infty$. 435. ∞, якщо $x \to +\infty$; 0, якщо $x \to -\infty$. 436. ∞, якщо $x \to +\infty$; 0,

якщо $x \to -\infty$. 437. $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$. 438. e^6. 439. $\sqrt{e}$. 440. e. 441. $\frac{1}{e^3}$. 442. 1. 443. e^3. 444. $\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$. 445. $e^{\operatorname{tg} 2}$. 446. e. 447. e. 448. $\sqrt{e}$. 449. $1/\sqrt{e}$. 450. $1/e$. 451. k. 452. 2. 453. $\frac{1}{e}$. 454. $\ln a$. 455. —3/2. 456. e^3. 457. $1/e^4$. 458. 3/2. 459. 2. 460. 1. 461. $a - b$. 462. 1. 463. e^2. 464. $1/e^3$. 465. 5. 466. 1/2. 467. 4. 468. 1/8. 469. 1) $+\infty$; $-\infty$; 2) 1; —1; 3) $+\infty$; 0; 4) $-\infty$; $+\infty$; 5) $+\infty$; $+\infty$; 6) 0; 1; 7) 4; 3. 470. u_n нижчого порядку мализни. 471. u_n і v_n є еквівалентними нескінченно малими. 472. Ні. 473. Одного порядку. 474. Ні. 475. $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{2b^2}}$. 476. $a = k$. 480. 1. 481. 7. 482. 1/4. 483. 1/3. 484. Еквівалентна нескінченно мала. 485. Еквівалентна нескінченно мала. 486. 2. 487. 3. 488. 1. 489. 1) 10,25; 2) 30,2; 3) 16,125; 4) 40,4; 5) 0,558; 6) 0,145; 490. 1) 10,16; 2) 20,12; 3) 1,02; 4) 4,04. 491. $\ln 1{,}01 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}02 \approx 0{,}2$; $\ln 1{,}1 \approx 0{,}1$; $\ln 1{,}2 \approx 0{,}2$. 492. 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{18}{25}$; 3) $\frac{1}{6}$; 4) $\frac{25}{2}$; 5) 32; 6) $+\infty$; 7) $\frac{a}{b}$; 8) $\frac{1}{9}$; 9) $\frac{1}{2}$; 10) $-\frac{2}{3}$; 11) $-\frac{7}{8}$; 12) 1; 13) $-\frac{1}{2}$; 14) $\frac{3}{a}$; 15) 5; 16) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 17) $\ln a^3$; 18) $\sqrt{2}\ln a$; 19) $\frac{1}{4}$; 20) $\frac{2}{5}$.

§ 4. 493. Так. 494. $a = 1 + \frac{\pi}{2}$. 495. $A = 1$, $B = 2$. 496. $A = -(\pi + 1)$, $B = \frac{\pi}{4}$. 497. 8/3. 498. 1) $f(0) = 1$; 2) $f(0) = \frac{1}{2}$; 3) $f(0) = 2$; 4) $f(0) = 0$. 499. $x = \frac{1}{4}$; $x = \frac{1}{2}$. 500. $x = 0$ — точка розриву (т. р.), який можна усунути; $x = 1$, $x = 3$ — т. р. 2-го роду. 501. $x = 1/3$ — т. р. 2-го роду. 502. $x = 1$ — т. р. 2-го роду. 503. $x = 2$ — т. р. 2-го роду. 504. $x = -1$ — т. р. 2-го роду. 505. $x = -3$ — т. р. 2-го роду. 506. $x = \frac{2}{5}$ — т. р. 2-го роду. 507. $x = -\frac{2}{3}$ — т. р. 2-го роду. 508. $x = 1$ — т. р. 2-го роду. 509. $x = \frac{1}{2}$ — т. р. 2-го роду. 510. $x = -1$ — т. р. 1-го роду. 511. $x = -3$ — т. р. 2-го роду. 512. $x = \frac{1}{2}(3 + \log_5 2)$ — т. р. 2-го роду. 513. Неперервна. 514. $x = 2$ — т. р. 1-го роду. 515. $x = -1$ — т. р., який можна усунути; $x = -2$, $x = a$ — т. р. 2-го роду. 516. $x = \frac{3}{2}$ — т. р., який можна усунути; $x = 1$, $x = 2$ — т. р. 2-го роду. 517. $x = 2$ — т. р. 1-го роду. 518. $x = 1$ — т. р. 1-го роду, $x = 2$ — т. р. 2-го роду. 519. $x = -\frac{1}{2}$ — т. р. 1-го роду, $x = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\log_7 2} - 1\right)$ — т. р. 2-го роду. 520. $x = 2$ — т. р. 1-го роду, $x = 0$ — т. р. 2-го роду. 521. $x = 4$ — т. р. 1-го роду, $x = \frac{4\log_a 3}{5 + \log_9 3}$ — т. р. 2-го роду. 522. $x = \frac{\pi}{2}$ — т. р. 1-го роду. 523. $x = 1/2$ — т. р., який можна усунути. 524. $x = -\pi/2$ — т. р. 1-го роду. 525. Неперервна. 526. $x = 3$ — т. р. 2-го роду. 527. $x = 0$, $x = 1$ — т. р. 1-го роду, $x=3$ — т. р. 2-го роду. **528.** $x=-1$ — т. р. 1-го роду. **529.** $x=3$ — т. р. 1-го роду. **530.** $x=-1$ — т. р., який можна усунути; $x=\frac{1}{2}$ — т. р. 2-го роду. **531.** $x=-2$ — т. р. 1-го роду. **535.** Записати многочлен у вигляді $x^n\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)$ і дослідити його поведінку при $x\to\pm\infty$. **536.** Побудувати схематично графік функції $y=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$, дослідивши його поведінку в околах точок λ_1; λ_2; λ_3.

Глава 5

§ 1. **1.** 32,36343. **2.** $\approx 0{,}7071$. **3.** $\approx 0{,}04139$. **4.** $\approx 0{,}344$. **5.** 0,61. **6.** $\cos\Delta x-1$. **7.** $12\Delta x+6(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$. **8.** $e^3(e^{\Delta x}-1)$. **9.** $\log_5(1+\Delta x)$. **10.** $\frac{1}{3}(3^{\Delta x}-1)$. **11.** $\arcsin(\Delta x+0{,}5)-\frac{\pi}{6}$. **12.** 5,5. **13.** 5/21. **14.** $\frac{5}{2}(\sqrt[3]{1{,}4}-1)$. **15.** $100\ln 1{,}01$. **16.** $-\sin\frac{\pi}{180}$. **17.** 1) 3; 2) 2,5; 3) 2,1. **18.** а) 7 м/с; б) 40 м/с. **19.** а) 10; б) 7,75; в) 6,31; г) 6,0301; $y'(1)=6$. **20.** а) 5; б) 1/12. **21.** 2. **22*.** *Розв'язання.* $k=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, $x_0=1$, $f(x_0)=1$, $f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{x_0+\Delta x}=\frac{1}{1+\Delta x}$, звідки $\Delta y=\frac{1}{1+\Delta x}-1=-\frac{\Delta x}{1+\Delta x}$. Отже, $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-\frac{\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=-1$, $k=-1$. **23.** 53,9 м/с; 49,49 м/с; 49,25 м/с; 49,005 м/с; $v_5=49{,}0$ м/с; $v_{10}=98{,}0$ м/с; $v=9{,}8t$ м/с. **24.** а) 4 г/см; б) 40 г/см; в) $4l$ г/см, де l — довжина відрізка AM. **25.** 1) 95 г/см; 2) а) 35 г/см; б) 5 г/см; в) 195 г/см. **27.** а) $f'_-(-2)=-2$, $f'_+(-2)=0$; б) $f'_-(-3)=f'_+(-3)=-2$. **28.** $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=3$. **29.** $f'_-(1)=0$, $f'_+(1)=\frac{1}{\ln 2}$. **30.** $f'_-(1)=f'_+(1)=\frac{1}{3}$. **31.** $f'_-(4)=f'_+(4)=1$.

§ 2. **32.** $8x-3$. **33.** $5x^4-16x^3+9x^2-2x+2$. **34.** $x^3-x^2+10x-1$. **35.** x^6-4x^5+3. **36.** $-\frac{36}{x^5}$. **37.** $\frac{1}{a^2x^3}(2x^4+ax^3-a^2bx-2a^4)$. **38.** $\sqrt[4]{x}$. **39.** $x\sqrt[3]{x^2}$. **40.** $\frac{1}{3}(11x^2-32x+20)\sqrt[3]{x^2}$. **41.** $-\frac{3}{5x\sqrt[5]{x^3}}-\frac{1}{12\sqrt[4]{x^3}}$. **42.** $x^4(8x^3-25)$. **43.** $\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$. **44.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. **45.** $\frac{2a(ax^2+bx-c)+b^2}{(2ax+b)^2}$. **46.** $\frac{9x^2+60x+50}{x^2(3x+5)^2}$. **47.** $5(2x-3)(x^2-3x+1)^4$. **48.** $\frac{x^2+2x}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2-1)^2}}$. **49.** $15x^4(x^5-1)^2$. **50.** $\frac{5(x^2-2)}{3x\sqrt{x^2-5}}$. **51.** $\frac{2x-7}{(2x-3)\sqrt{3-2x}}$. **52.** $f'(0)=-12$; $f'(-1)=0$.

53. $S'(2)=-0{,}5$; $S'(4)=0{,}5$. **54.** $\varphi'(2)=36$. **55.** $\varphi'(1)=-\frac{1}{2}$. **56.** $x^2(\sin 3x+x\cos 3x)$. **57.** $\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$. **58.** $-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$. **59.** $x^2\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)-10$. **60.** $-\frac{1}{\sin^2 x}-2$. **61.** $12\frac{\sin^3 3x}{\cos^5 3x}$. **62.** $-12\frac{\operatorname{ctg}^2 4x}{\sin^2 4x}$. **63.** $-3\sin 3x$. **64.** $-10\sin 2x\cos^4 2x$. **65.** $-\frac{2(x+1)+\sin 2x}{2(x+1)^2\sin^2 x}$. **66.** $\cos x(\sin^4 x-1)$. **67.** $-\sin x$. **68.** $\operatorname{tg}3x+\frac{3x}{\cos^2 3x}$. **69.** $2\operatorname{ctg}(x+5)-\frac{2x-1}{\sin^2(x+5)}$. **70.** $3\left(\frac{1}{\cos^2 3x}+\frac{2\sin 4x}{\cos^3 4x}\right)$. **71.** $\frac{3(x^2+1)}{x^2\cos^2\frac{x^2-1}{x}}$. **72.** $\frac{\sqrt{x}}{8}\sin 4\sqrt{x}$. **73.** $2\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^3 x}$. **74.** $2\left(2x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$. **75.** $-\frac{\sin\sqrt[3]{x+1}}{6\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{\cos\sqrt[3]{x+1}}}$. **76.** $(4+x^2)\cos x$. **77.** $2x(1-2x^2+2\ln x)$. **78.** $\frac{3(2-x)}{x(3-x)}$. **79.** $-\frac{5}{\ln 10}\operatorname{tg}5x$. **80.** $\frac{3}{\ln 10}\operatorname{ctg}3x$. **81.** $x^4\left(\frac{1}{5}+\ln x\right)-x^7$. **82.** $-\frac{3}{x(x^3+1)}$. **83.** $\frac{3x(\ln x-1)-2}{x\ln x\lg x}$. **84.** $\frac{1}{\ln 3\cdot x\ln 5x}$. **85.** $-\frac{1}{\sin x}$. **86.** $\frac{x^3-2x^2-39x-104}{(x-5)(x-1)(x+2)(x+3)}$. **87.** $-\frac{8x^3}{x^4-1}$. **88.** $\frac{1}{\sin\frac{3x+2}{3}}$. **89.** $-\frac{1}{\sin x}$. **90.** $(4x+1)\operatorname{ctg}(2x^2+x-1)$. **91.** $\frac{2x^2(3\sqrt{16x^4+1}+16x)}{(2x^3+\sqrt{16x^4+1})\sqrt{16x^4+1}\ln 10}$. **92.** $-\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{(x^3+5)^2}}\arccos\sqrt[3]{x^3+5}}$. **93.** $\frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x$. **94.** $\frac{4}{x}\sin^2(\ln x)$. **95.** $e^x(\cos(x+1)-\sin(x+1))$. **96.** $2^{3x}3^{-2x}\ln\frac{8}{9}$. **97.** $-2(x^2+3x+3)e^{-2x}$. **98.** $\frac{3x^3+2}{3\sqrt[3]{x}}e^{\frac{x^3}{3}}$. **99.** $\frac{3}{2}e^{\sqrt{3x}}$. **100.** $3^{x-1}((x+1)\ln 3+1)$. **101.** $a^{3x+2}(1+3x\ln a)$. **102.** $\frac{2^{x-1}\ln 2+2x}{3\sqrt[3]{(2^{x-1}+x^2)^2}}$. **103.** $-4e^{-x}\sin^2 e^{-x}$. **104.** $-3e^{\cos^2 3x}\sin 6x\cos^2 3x$. **105.** $\frac{1}{\cos x\sqrt{\cos 2x}}$. **106.** $2\sqrt{a^2-x^2}$. **107.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\arccos\sqrt{x}$. **108.** $\arcsin\frac{x}{2}$. **109.** $-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **110.** $\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}$. **111.** $\frac{-x^2+2x+1}{(x-1)\sqrt{-x^4-x^2-2x}}$. **112.** $\arcsin 3^x+\frac{3^x x\ln 3}{\sqrt{1-3^{2x}}}$. **113.** $\frac{6x^2}{x^6+1}$. **114.** $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}+\frac{x(x-1)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+1}}$. **115.** $\frac{8}{x^2+16}$.

116. $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. 117. $\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}$. 118. $\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$. 119. $\frac{\operatorname{ch} 2x}{\sqrt{\operatorname{sh} 2x}}$.

120. $\frac{\operatorname{sh} 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. 121. $\frac{3\sin 3x}{\operatorname{sh}^2(\cos 3x)}$. 122. $-\frac{4x}{5(1+x^2)\sqrt[5]{(1+x^2)(1-x^2)^4}}$.

123. $\frac{9\sqrt[3]{x^2(x^2+\sqrt[3]{x})^2}+6x\sqrt[3]{x^2}+1}{27\sqrt[3]{(x(x^2+\sqrt[3]{x})(x+\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x}}))^2}}$. 124. $\frac{5-x}{5\sqrt[5]{(1-x)^3(1+x)^2}}$.

125. $-\sin 2x\cos\cos 2x$. 126. $-\frac{mn\cos nx}{\sin^{m+1} nx}$. 127. $\frac{8}{9x^2}\left(\frac{3}{2}\right)^x\left(\ln\frac{3}{2}-1\right)$.

128. $\frac{5}{x\ln 10\ln 4x}$. 129. $\frac{2\sqrt{30}}{15\ln 10\,(2x^2-3)}$. 130. $\frac{5\pi}{\ln 5}\operatorname{ctg}5\pi x$.

131. $\frac{2\cos x}{\sin^3 x\,(1+\operatorname{ctg}^4 x)}$. 132. $-\frac{1}{x\ln(e+1)\log^2_{e+1}5x}$. 133. $(\cos x\ln\cos x-\sin x\operatorname{tg}x)(\cos x)^{\sin x}$.

134. $\frac{\operatorname{th}x}{\ln 10}-\frac{\operatorname{ch}x}{5\operatorname{sh}^2 x}$. 135. $\left(\frac{\cos^2 x}{3x}-\frac{1}{3}\sin 2x\ln x\right)(\sqrt[3]{x})^{\cos^2 x}$.

136. $\frac{1}{2}\cos x\left(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}+\ln 5\right)5^{\sqrt{\sin x}}$.

137. $\frac{\operatorname{th}x}{\ln 10}+\frac{1}{2\operatorname{sh}^2 x}$. 138. $-\frac{1}{\operatorname{ch}2x}$. 139. $e^{-x}(5\operatorname{sh}5x-\operatorname{ch}5x)$.

140. $-\frac{\operatorname{cth}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x-1}}$. 141. $\frac{2}{(2x+5)\ln 10}$. 142. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{|x(x+2)|}}$.

143. $\sin(x+5)$. 144. $\frac{5}{1+25x^2}$. 145. $\frac{2x-17}{4(2+x)^2}\sqrt[4]{\frac{2+x}{(5-x)^3}}$.

146. $a_1(x-x_1)^{a_1-1}(x-x_1)^{a_1}\dots(x-x_n)^{a_n}+\dots+a_n(x-x_n)^{a_n-1}(x-x_1)^{a_1}\dots(x-x_{n-1})^{a_{n-1}}$. 147. $6x^5 5^{x^6}\ln 5$. 148. $-\frac{x}{\log_5 x\ln 5}(1+2\ln 5\log_5 x\ln\log_5 x)(\log_5 x)^{-x^2}$. 149. $-\sin x\sin(\cos x)\sin(\cos(\cos x))$.

150. $\frac{2}{x^3}x^{-\frac{2}{x^2}}(2\ln x-1)$. 151. $2^{-x}((1-\ln 2\lg 5)\cos x-(\ln 2+\lg 5)\sin x)$.

152. $\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}5^{\frac{1+\sin x}{\cos x}}\ln 5+\frac{1}{x^2-2x+2}$. 153. $\frac{x\cos\lg\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\ln 10}$.

154. $2x+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\left(1-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^2\frac{x}{3}\right)$. 155. $3\sin^2 x\cos 4x$. 156. $2\sin x\sin 3x$.

157. $5\cos^4 x\cos 6x$. 158. $-3\sin 4x\cos^2 x$. 159. $3\cos 3x\cos 4x-4\sin 3x\sin 4x=3\cos 7x-\sin 3x\sin 4x$. 160. $y'=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0,\\ -4^{-x}\ln 4, & x>0.\end{cases}$ 161. $y'=\begin{cases}5, & x<0,\\ \frac{4}{(4x+3)\ln 10}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 162. $y'=\begin{cases}(3x^2-2x^4)e^{-x^2}, & |x|\leqslant 5,\\ 0, & |x|>5.\end{cases}$ 163. $y'=\begin{cases}\frac{12x\lg(3x^2+1)}{(3x^2+1)\ln 10}, & x<0,\\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}, & x\geqslant 0.\end{cases}$

164. $-3\sin 6x-3^{1-x}\ln 3$. 165. $\frac{3}{\sin^2(2-3x)}+\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$. 166. $\frac{6}{(1-3x)^3}+\sin 2x$. 167. $-\frac{\alpha}{\pi-\alpha x}+\frac{12}{1+16x^2}$.

168. $-\frac{4\pi}{\cos^2(2-\pi x)}+\frac{4\operatorname{tg}4x}{\cos 4x}$. 169. $e^{\pi x}\left(\pi\sin\frac{x}{5}+\frac{1}{5}\cos\frac{x}{5}\right)$.

170. $\frac{10\cos\log_3(1-5x)}{(1-5x)\ln 3\cdot\sin^3\log_3(1-5x)}$. 171. $\frac{5\cdot 7^{-5x}\ln 7}{\sqrt{1-7^{-10x}}}$. 172. $\frac{1}{(3-4x\operatorname{tg}x)^2}\times\left(4(x-1)\operatorname{tg}x-\frac{4x}{\cos^2 x}-3\right)e^x+4\left(\operatorname{tg}x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$. 173. $3\operatorname{ctg}4^{-x}\left(\operatorname{ctg}4^{-x}+\frac{2x4^{-x}\ln 4}{\sin^2 4^{-x}}\right)$. 174. $\frac{5(3x+2)e^{-x}}{(1-3x)^2}$. 175. $-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}+\frac{5}{(5x+1)\ln 10}$.

176. $\frac{8\sin\frac{2}{3+\sqrt[3]{x}}\cos^3\frac{2}{3+\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x^2}(3+\sqrt[3]{x})^2}$. 177. $3\operatorname{tg}^2\frac{e^{ax}}{5x-1}\cdot\frac{(a(5x-1)-5)e^{ax}}{(5x-1)^2\cos^2\frac{e^{ax}}{5x-1}}$.

178. $5x^{5x}(\ln x+1)$. 179. $3^x x^{3^x}\left(\frac{1}{x}+\ln 3\ln x\right)$. 180. $\frac{2+\ln x}{6\sqrt{x}}x^{\frac{\sqrt{x}}{3}}$.

181. $\frac{5}{2x^2}\left(\frac{1}{\ln 10\lg x}-\ln\lg x\right)(\lg x)^{\frac{5}{2x}}$. 182. $\frac{2-\ln x}{4x\sqrt{x}}(\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

183. $3\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)x^{3\cos x}$. 184. $\frac{a}{2}(2+\ln x)x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}$.

185. $\left(\frac{5(x+2)}{(2x+1)(x+3)}+\ln\frac{2x+1}{x+3}\right)\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)^{x+2}$. 186. $\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\cos x-\operatorname{tg}x\arcsin x\right)(\cos x)^{\arcsin x}$. 187. $2\left(3(1+\ln x)\ln x+\frac{1}{x}\right)x^{2x^{3x}+3x}$.

188. $\left(\frac{3x^2\cos x}{x^3+5}-\sin x\ln(x^3+5)\right)(x^3+5)^{\cos x}$. 189. $\left(\frac{\ln(5x+4)}{(x+1)^2}+\frac{5x}{(x+1)(5x+4)}\right)(5x+4)^{\frac{x}{x+1}}$. 190. $4\left(\ln\lg x+\frac{1}{\ln 10\lg x}\right)(\lg x)^{4x}$.

191. $\frac{3(x-1)(x^2+16x-1)}{(x+5)^3}$. 192. $\frac{5-5x-4x^2}{3x^2\sqrt[3]{x^2(2x-1)^2(x+1)}}$.

193. $-\frac{27x^2+39x+94}{(3x-1)(x+3)\sqrt[3]{(3x-1)^2(x+3)}\sqrt[4]{(4x+5)^3}}$. 194. $x^3\left(\frac{3}{x}+2x\ln 3-5\operatorname{tg}5x\right)3^{x^2}\cos 5x$.

195. $\frac{78x^5-320x^4-539x^3+331x^2-65x+75}{6x(x-5)(2x-1)(3x+5)}\times\sqrt{\frac{x(2x-1)}{(3x+5)\sqrt[3]{(x-5)^2}}}$. 196. $\frac{x^5-5x^3-2x^2-2}{5x(x^3+1)(x^3-1)}\sqrt[5]{\frac{x^2(x^3+1)}{(x^3-1)^2}}$.

197. $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}-\operatorname{tg}x-\frac{e^x}{2(2-e^x)}\right)\sqrt[3]{x^2\cos x\sqrt{2-e^x}}$. 198. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2x}{x^2+1}+3\operatorname{tg}3x+2\operatorname{ctg}2x\right)\sqrt{\frac{(x-1)\sin 2x}{(x^2+1)\cos 3x}}$. 199. $x^2\left(\frac{2}{x}+\frac{\ln 5}{2\sqrt{x}}+\frac{2}{\sin 2x}\right)5^{\sqrt{x}}\operatorname{tg}x$. 200. 1) 1; 2) $2\operatorname{th}2x$; $2\operatorname{cth}2x\ (x>0)$; 3) $\operatorname{sh}2x$.

201. 1) $\frac{(1+2\sqrt{1+\sin^2x})\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2x}\,(\sin^2x+\sqrt{1+\sin^2x})\ln 10}$, 2) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\ln 10}+2\lg\arcsin x\right)$. 202. 1) $2xa^{-x^2}\left(\frac{a^{-x^2}}{\sqrt{1-a^{-2x^2}}}-\arccos a^{-x^2}\right)\ln a$, 2) $-\frac{6\ln 5\cdot 5^{3x}}{(1+5^{3x})^2}$. 203. 1) $3\operatorname{ch}3x\left(10\operatorname{sh}3x+\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}3x}}\right)$, 2) $\frac{3\ln 5}{5^{1,5x}}\left(\frac{1}{2}-\frac{5^{3x}}{1+5^{3x}}\right)$. 204. $a=6$, $b=0$. 205. $a=\frac{1}{196}$, $b=\frac{6}{49}$. 209. $x'_y=\frac{1}{2\operatorname{sh}2x}$.

210. $x'_y=\frac{\sqrt{x}\cos^3\sqrt{x}}{\sin\sqrt{x}}$. 211. $x'_y=-\frac{\sqrt{1-5^{2x}}}{5^x\ln 5}$. 212. $x'_y=\frac{\ln 10}{3}\operatorname{tg}3x$.

213. $x'_y=\frac{1}{2(5x-1)}$. 214. $x'_y=\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{2x}$. 215. $(\operatorname{arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\operatorname{arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$, $(\operatorname{arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. *Вказівка*. $\operatorname{arsh}x$, $\operatorname{arch}x$ і $\operatorname{arth}x$ — функції, обернені до гіперболічних функцій $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ і $\operatorname{th}x$. Для виведення формул похідних цих функцій скористаємося похідною від оберненої функції. Якщо $y=\operatorname{arsh}x$, то $x=\operatorname{sh}y$, а $x'_y=\operatorname{ch}y$. Використовуючи формулу $\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y=1$, матимемо $x'_y=\sqrt{1+\operatorname{sh}^2y}=\sqrt{1+x^2}$. Отже $y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Аналогічно знаходять похідну від $\operatorname{arch}x$. Якщо $y=\operatorname{arth}x$, то $x=\operatorname{th}y$ і $x'_y=\frac{1}{\operatorname{ch}^2y}=\frac{\operatorname{ch}^2y-\operatorname{sh}^2y}{\operatorname{ch}^2y}=1-\operatorname{th}^2y=1-x^2$. Тому $y'=\frac{1}{1-x^2}$.

216. *Розв'язання*. Знаходимо похідні від лівої і правої частин даної рівності і прирівнюємо їх: $4x^3+4y^3y'=4(y+xy')$. Звідки $(y^3-x)y'=y-x^3$ і $y'=\frac{y-x^3}{y^3-x}$. 217. $-4/3$. 218. 1) $y'=\frac{x^2-y}{x-y^2}$; 2) $y'=\frac{3x^2-2xy}{x^2-3y^2}$. 219. $y'=\frac{1-3^y}{3^x-1}3^{x-y}$. 220. $y'=2x\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$. 221. $y'=\frac{y(x\ln 10+y)}{x(2xy^3+x+1)\ln 10}$.

222. $y'=\frac{y\sqrt{1-(x+y)^2}-1}{1-x\sqrt{1-(x+y)^2}}$. 223. $y'=\frac{2\sqrt{1-9y^2}}{3+\sqrt{1-9y^2}}$. 224. $y'=\frac{y(-y+(x+y)\ln 10)}{y^2+x(x+y)\ln 10}$. 225. $y'=\frac{2(1-xy(1+(2x+y)^2))}{x^2(1+(2x+y)^2)-1}$. 226. $y'=\frac{1}{x-1}\left(\frac{\sin(\sqrt{x}+y)}{\sqrt{x}\cos^3(\sqrt{x}+y)}-y\right)$. 227. $y'=\frac{y\sin\frac{2\sqrt{x}}{y}}{2\left(x\sin\frac{2\sqrt{x}}{y}-5y^2\sqrt{x}\right)}$.

228. $y'=\frac{3y\left(\sqrt[3]{y}\,5^{\frac{y}{1-x}}\ln 5-(1-x)^2\right)}{(1-x)\left(2x(1-x)-3\sqrt[3]{y}\,5^{\frac{y}{1-x}}\ln 5\right)}$. 229. $y'=\frac{2y(\sqrt{3}\sqrt{4y^2-3x^2}+(x-\sqrt{y})^2)}{\sqrt{3y(4y^2-3x^2)}+2x(x-\sqrt{y})^2}$. 230. $y'=-\frac{\ln 10+2x^3y^2\ln y\sin\frac{1}{xy}}{x\left(\ln 10+x^3y\sin\frac{1}{xy}\right)}$.

231. $y'=\frac{y(y^2+3\cos^2(xy+5))}{(3x-1)\cos^2(xy+5)-xy^2}$. 232. $y'=\frac{5\cos(5x-2y)-\pi ye^{\pi xy}}{\pi xe^{\pi xy}+2\cos(5x-2y)}$.

233. $y'=\frac{y(2xy\sqrt{x}+1)-1}{2x(1-2xy\sqrt{x})}$. 234. $y'=-\frac{y(\ln y+\sin xy^2)}{x(1+2y\sin xy^2)}$. 235. $y'=\frac{5-yx^{y-1}}{1+x^y\ln x}$. 236. $y'=\frac{2y^2\sqrt{x}-2x+1}{2\sqrt{x}(y^2+2y-\sqrt{x})}$. 237. $y'=\frac{1-4x}{1-y\sin y}$.

238. $y'=\frac{y(x+y)}{y-x}$. 239. $y'=\frac{2(2xy+1)\sqrt{y}}{1-2x^2\sqrt{y}}$. 240. $y'=\frac{9(\sqrt[3]{y^2}-xy)}{2(x^2+3\sqrt{x}\sqrt[3]{y^2})}$.

241. $y'=\frac{4xy^2-5}{3\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^2y\right)}$. 242. $y'=-\frac{\sin y}{e^x+x\cos y}$. 243. $y'=\frac{\cos^2xy-y^3}{y(xy+\sin 2xy)}$. 244. $y'=\frac{y(1-y^23^{xy}\ln 3)}{x(1+y^23^{xy}\ln 3)}$. 245. $y'=\frac{y(1-y(x+6y))}{x(1+y(x+6y))}$.

246. $y'=\frac{y(1+2y(x-y))}{x(1-2y(x-y))}$. 247. $y'=\frac{2x+y^2\sin xy}{\cos xy-xy\sin xy}$. 248. $y'=\frac{2x\sqrt{xy}-y(x^2+2y)}{x(x^2+2y)-2\sqrt{xy}}$. 249. 1) $y^2=4x^2(1-x^2)$; 2) $y^3=(x-1)^2$. 252. 1) 1; 2) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) 0. 253. $\frac{\sin 3t+2\sin 2t}{\cos 3t-2\cos 2t}$. 254. $\frac{2\cos 3t-3\sin 3t}{2\sin 3t+3\cos 3t}$.

255. $\frac{\cos t}{1-\sin t}$. 256. $-\frac{(3+2t^3)(2+t^3)\ln 10}{3t^2(1+t^3)}$. 257. $-\frac{2}{3}(t\operatorname{ctg}t+1)$.

258. $\frac{10e^t}{(3-5t)^2(1-t)}$. 259. $-\frac{(9+(1-2\sqrt{t})^2)\operatorname{arctg}\frac{3}{1-2\sqrt{t}}+3\sqrt{t}}{3t^2(9+(1-2\sqrt{t})^2)\sin 2t^3\cdot 2^{\cos^2t^3}\ln 2}$.

260. $\frac{t(2-t\ln 3)(1+\sin t)^2}{(1+\sin t-\cos t)3^t}$. 261. $-\frac{\sqrt{1-t^4}}{4t}(2\sin\sqrt{t}+\sqrt{t}\cos\sqrt{t})$.

262. $\frac{\sqrt{t}}{\sin^2t}(\sin 2t-2t)\cos\sqrt{t}\operatorname{ctg}\sqrt{t}$. 263. $\frac{2t^3}{(2t-1)(t\sin t-2(1-\cos t))}$.

264. $\frac{2\sqrt{t}(1+\ln t)\cos^2t}{2\sqrt{t}(1-\sqrt{t})\sin t-\cos t}$. 268. 3 см/с; 83 см/с. 269. $(4t-8)$ рад/с; $t=2c$. 270. $75\cdot 10^3$ ерг. 271. 24π рад/с. 272. 48 кг · см/с. 273. 1) $4{,}192\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$;

2) $4{,}198\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$. **274.** $v=-km_0e^{-kt_0}$. **275.** $62A$. **276.** Зменшується зі швидкістю 0,4. **277.** $\sim 3{,}8$ см/с; 40 см²/с. **278.** $0{,}2\pi$ м²/с; $0{,}05\pi$ м³/с. **279.** $-\frac{p\ln 2}{5540}\approx -0{,}000125p$. **280.** $\pm\frac{4\sqrt{6}}{3}$ од/с, $(y_{1,2}=\pm 2\sqrt{6})$. **281.** $\pm\sqrt{5}$ см/с. **282.** $M_1\left(-\frac{4}{13}\sqrt{130}, -\frac{9}{13}\sqrt{130}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{13}\sqrt{130}, \frac{9}{13}\sqrt{130}\right)$. **283.** $4v$ і $10v$. **284.** $2\pi v$ і $2\pi Rv$. **285.** При $x=2\pi k$. **286.** n^2. **288.** $\frac{\ln 2}{2\pi}2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$. **289.** $2a\omega\varphi$. **290.** $v_x=2R\omega\cos 2\varphi$, $v_y=2R\omega\sin 2\varphi$. **291.** $v_x=v(1+\cos\varphi)$, $v_y=v\sin\varphi$ (φ — кут між віссю ординат і полярним радіусом точки). **292.** 0,2 мкФ. **293.** $\frac{dv}{dt}=9\pi$ дм³/с. **294.** $\frac{40\pi}{3}$ км/хв. **295.** $x'_t=\frac{3}{25}\sqrt{641}\approx 3{,}03$ (м/хв). **296.** (0; 0); (1; 1); (2; 0). **297.** $y=2x-2$; $y=2x+2$. **298.** $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$. **299.** а) 0; б) 3; в) 12. **300.** а) (1; −1); б) (2; 0). **301.** Ні. **302.** $y=2x$; $y=-\frac{1}{2}x$. **303.** $x-2y-1=0$; $2x+y-2=0$. **304.** $6x+2y-\pi=0$; $2x-6y+3\pi=0$. **305.** $y=x-1$; $y=1-x$. **306.** $2x+y-3=0$; $x-2y+1=0$ для точки (1; 1); $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$ для точки (−1; 1). **307.** $4x-y-2=0$; $x+4y-9=0$. **308.** $x+2y-4=0$. **309.** $A(1;3)$. **310.** $A(1;3)$; $B(-1;-3)$. **311.** $2x+y-2=0$. **312.** $2x-y+3=0$. **313.** $x+3y-11=0$. **314.** $3x+y-3=0$ і $3x+y+13=0$. **315.** $x+y=\pm 2\sqrt{2}$. **316.** $4x-4y-21=0$. **318.** $\frac{2}{5}\sqrt{5}$. **319.** $\frac{\sqrt{10}}{3}$; $\sqrt{10}$; $\frac{1}{3}$; 3. **320.** $\frac{a\,\mathrm{ch}^2 1}{\mathrm{sh}\,1}$; $a\,\mathrm{cth}\,1$; $a\,\mathrm{ch}^2 1$; $\frac{a}{2}\,\mathrm{sh}\,2$. **321.** $x-3y-8=0$; $3x+y-4=0$. **322.** $\begin{cases} x-7y-2=0;\ x+7y-3=0; \\ x-y-1=0;\ x+y+6=0. \end{cases}$ **323.** $18x-12y+17=0$. **324.** $5x-4y-16=0$. **325.** $2x-y+1=0$; $2x-y-1=0$. **326.** $9x+6y+8=0$; $9x+6y-8=0$. **327.** $x-3y-4=0$ і $3x+y-2=0$. **328.** $x+y=0$; $x-y-2=0$. **329.** $4x-y-28=0$. **330.** $S_T=S_N=2$; $T=N=2\sqrt{2}$. **332.** arctg 3.
333. Кутом між двома лініями називається кут між дотичними, проведеними до ліній у точці їхнього перетину. Тому кут між ними можна обчислити за формулою $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, де k_1 і k_2 — кутові коефіцієнти дотичних. Точкою перетину даних ліній є точка $M(1;2)$. Похідною від функції $y=2x^2$ є $y'=4x$, тому $k_1=4$. Похідною від функції $xy=2$ буде $y'=-\frac{2}{x^2}$ і $k_2=-2$. Отже, $\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{-2-4}{1-8}=\frac{6}{7}$, а $\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{6}{7}$. **334.** 1) $\mathrm{arctg}\,\frac{6}{7}$; 2) arctg 3. **335.** 45°. **336.** arctg 3. **340.** −1. **341.** 135°. **342.** $-\frac{\pi}{4}$. **343.** $\frac{3\pi}{4}$. **344.** $A\left(\ln 2;\ 1-\frac{\pi}{4}\right)$. **345.** $x-y-1=0$; $x+y-5=0$. **346.** $3x-2y-4=0$; $2x+3y-7=0$. **347.** $x-y=0$; $x+y-3a=0$. **348.** $\alpha_1=\alpha_2=\mathrm{arctg}\,\frac{41}{2}$. **349.** $\alpha_1=\alpha_2=30°$;

$\alpha_3=0°$. **350.** $T=2a\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$; $N=2a\sin\frac{t}{2}$; $S_t=2a\sin^2\frac{t}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}$, $S_n=a\sin t$. **351.** $\left|\frac{y}{\cos t}\right|$; $\left|\frac{y}{\sin t}\right|$; $|y\,\mathrm{tg}\,t|$; $|y\,\mathrm{ctg}\,t|$. **353.** $\theta=\varphi$; $\alpha=\pi-2\varphi$. **354.** 3, −3. **355.** 1) 0; 2) 0; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$. **357.** $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{k}$. **358.** 45°. **359.** Напрям підходу має продовжувати напрям дотичної до профілю моста на його кінці; $y'=0{,}1$. **360.** $\approx 170°50'$.

§ 3. 361. 0,84; 0,0804. **362.** $\Delta V=\frac{4}{3}\pi(3R^2+3R\Delta R+(\Delta R)^2)\Delta R$. 1) $\Delta R=0{,}2$; $\Delta V=\frac{8}{3}\pi\cdot 7{,}804\approx 65{,}3786$, $\delta=\frac{8}{3}\pi\cdot 0{,}304\approx 2{,}547$; 2) $\Delta R=0{,}1$; $\Delta V=\frac{4}{3}\pi\cdot 7{,}651\approx 32{,}048$, $\delta=\frac{4}{3}\pi\cdot 0{,}151\approx 0{,}6325$; 3) $\Delta R=0{,}02$; $\Delta V=\frac{8}{3}\pi\times 0{,}753004\approx 6{,}308$, $\delta=\frac{8}{3}\pi\cdot 0{,}003004\approx 0{,}0252$. **363.** $\Delta y=2{,}28832$, $dy=1{,}8$. **364.** $\Delta y=0{,}211202$, $dy=0{,}21$. **365.** $x_1=-\frac{\sqrt{15}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{15}}{3}$. **366.** $\Delta y=7{,}44$, $dy=7{,}4$; абсолютна похибка 0,04; відносна $\delta=\frac{0{,}04}{7{,}44}\approx 0{,}0055$. **367.** $\Delta y\approx 0{,}645602$; $dy\approx 0{,}066667$; абсолютна похибка $|\Delta y-dy|\approx 0{,}58$; $\delta\approx 0{,}9$. **368.** 1) $\Delta x=2$; $\Delta y=234$; $dy=2$; $\delta\approx 1$; 2) $\Delta x=0{,}2$; $\Delta y\approx 0{,}688$, $dy=0{,}2$, $\delta\approx 0{,}9$; 3) $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y\approx 0{,}011$, $dy=0{,}01$, $\delta\approx 0{,}1$. **369.** $\Delta y\approx 0{,}8$, $dy\approx 0{,}7$, $\delta\approx 0{,}125$. **370.** 1) $ds=20$ см², $\delta=5$ %; 2) $ds=8$ см², $\delta\approx(0{,}02)=2$ %; 3) $ds=1$ см², $\delta\approx 0{,}25$ %. **371.** 1) $dS=4{,}5$ см²; 2) $dS=7{,}2$ см²; 3) $dS=12{,}6$ см². **373.** $\Delta x\approx 0{,}0016$ см (x — ребро куба). **374.** 1) $\frac{du}{dt}=-u_0\alpha e^{-\alpha t}$; 2) $u=u_0e^{-\alpha t}$, $\frac{du}{dt}=-\alpha u$, $du=-u\alpha dt$. **375.** $\Delta r\approx dr=\frac{1}{10\pi}$. **376.** $\Delta n\approx dn=1/60$ с$^{-1}$. **377.** $\Delta V=4\pi\Delta r\left(r^2+r\Delta r+\frac{1}{3}(\Delta r)^2\right)$; $dV=4\pi r^2\Delta r$. **378.** $\Delta S=gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$; $dS=gt\Delta t=vdt$ ($v=gt$ — швидкість). **379.** $\frac{5}{2}x\sqrt{x}\,dx$. **380.** $(2acx+ad+bc)\,dx$. **381.** $\frac{dx}{x(2x+1)\ln 10}$. **382.** $-(5\sin x+2x\sin x+x^2\cos x)\,dx$. **383.** $-\frac{(1+\sin x(\sin x+\cos x))\,dx}{(\sin x+\cos x)\sqrt{(1+\mathrm{tg}\,x)^2-\cos^2 x}}$. **384.** $\left(5^{x-4}\ln 5+\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$. **385.** $\frac{9}{5}x^2\,\frac{\sin^2\frac{x^3}{5}}{\cos^4\left(\frac{x^3}{5}\right)}\,dx$. **386.** $\frac{3dx}{(x+1)(2x+5)\ln 10}$. **387.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\,dx$. **388.** $n(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n-1}\,dx$. **389.** $(n\cos x-m\sin x)\sin^{n-1}x\cos^{m-1}x\,dx$. **390.** $\frac{1}{2}(3\cos 3x-$

$- \cos x)\, 5^{\sin x \cos 2x} \ln 5 dx$. 391. $-\dfrac{4dx}{5(1+x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}}$.

392. $\dfrac{4 \cos \operatorname{tg} \sqrt[5]{x^4}\, dx}{5 \ln 10 \sqrt[5]{x} \cos^2 \sqrt[5]{x^4}}$. 393. $2\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{3x \arccos^2 x^2}{\sqrt{1-x^4}}\right) dx$.

394. $\dfrac{12x^2 \operatorname{arctg}^3 x^3}{1+x^6}\, dx$. 395. $-\dfrac{acdx}{\sqrt{c^2-(ax+b)^2}}$. 396. $\dfrac{9}{(x+1)^2} \sin \dfrac{12x}{x+1} \times$ $\times \sin \dfrac{6x}{x+1}\, dx$. 397. $-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)} \arccos x} + \dfrac{3 \cos^2 x}{\sin^4 x}\right) dx$.

398. $\dfrac{1+x^2-x \sin 2x}{(1+x^2)^2 \cos^2 x}\, dx$. 399. $2x\,(5^{x^2} \ln 5 + 5x^3)\, dx$. 400. $\dfrac{3x^2}{3y^2+1}\, dx$.

401. $\dfrac{2x\,(x^2+y^2) + y \sin \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}}{x \sin \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} - x^2 - y^2}\, dx$. 402. $\dfrac{2xdx}{1+2ye^{y^2}}$.

403. $\dfrac{y\left(\cos \dfrac{x}{y} - y^2 e^{xy}\right)}{x\left(y^2 e^{xy} + \cos \dfrac{x}{y}\right)}\, dx$. 404. $\dfrac{3 \sqrt[3]{x^2y^2} \cos^2 \sqrt[3]{xy} - 2y \operatorname{tg} \sqrt[3]{xy}}{2x \operatorname{tg} \sqrt[3]{xy} - 3 \sqrt[3]{x^2y^2} \cos^2 \sqrt[3]{xy}}\, dx$.

405. $\dfrac{x^2 \cdot 5^{x-y} \ln 5 + y \sin (y/x)}{x\,(x \cdot 5^{x-y} \ln 5 + \sin (y/x))}\, dx$. 406. $\dfrac{(1+y)\, dx}{2y - x - e^y}$. 407. $\dfrac{x - x^2y + 2y^2}{x^3 - 2xy + 1}\, dx$.

408. $\dfrac{x\sqrt{xy} - y}{x - y\sqrt{xy}}\, dx$. 409. $\dfrac{x^2-y}{x-y^2}\, dx$. 410. $\dfrac{\sqrt{y}-y}{x-\sqrt{x}}\, dx$.

411. $\dfrac{\cos (x+y) - y}{x - \cos (x+y)}\, dx$. 412. $-\pi$. 413. $\dfrac{\pi}{90}$. 414. $\dfrac{\pi}{15}$. 415. $\dfrac{4\pi}{135}$.

416. $\dfrac{7\pi}{36\,(2+\sqrt{2})}$. 417. $\Delta y \approx 0{,}001027$; $\sin 45°5' \approx 0{,}708134$. 418. $\Delta y \approx 0{,}00116$.

419. $\Delta y \approx 12{,}11$. 420. $d\rho = \dfrac{3a \cos 3\varphi}{2\sqrt{\sin 3\varphi}}\, d\varphi$. 421. $dy \approx 0{,}843$. 422. $\sin 45°20' \approx$ $\approx 0{,}711208$. 423. Задовольняє. 424. $\approx 0{,}937$. 425. $\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r$. 426. $\Delta V \approx -\dfrac{RT}{P^2}\, \Delta P$.

427. $\approx 0{,}8104$. 428. $\approx 0{,}7504$. 429. $\approx 0{,}2802$. 430. $\approx \dfrac{\pi}{4} \approx 0{,}7854$.

431. $\approx 18°10'$. 432. $\approx 83°59'$. 433. $\approx -0{,}04576$. 434. $\approx 0{,}4695$. 435. $\approx 9{,}055$.

436. $\approx 0{,}5150$. 437. $dy = \dfrac{(t^2-1)(2t^3-6t+13)}{\sqrt[3]{((t^3-3t+5)^2 + 3\,(t^3-3t+5))^2}}\, dt$.

438. $t^3 \sin \dfrac{t^4-1}{2}\, dt$. 439. $-dx$. 440. $\dfrac{2 \ln 2}{x \lg^3 x \ln 10}\, 2^{-\frac{1}{\lg^2 x}}\, dx$. 441. $\dfrac{dv}{\cos 2v}$.

442. $\dfrac{6t-5}{\ln 2}\,(3t^2-5t+2)^{\frac{1}{\ln 10}-1}\, dt$. 443. $\dfrac{2\,(t-1)\, dt}{(t^2-2t+3)\sqrt{2 \ln (2\,(t^2-2t+3))}}$.

444. $\dfrac{5 \sin e^{-(5x+4)}\, dx}{e^{5x+4}}$. 447. Неперервна і диференційовна. 448. Неперервна

і диференційовна. 449. При $x = k\pi$, $k \in Z$ функція не диференційовна. 450. Неперервна, але не диференційовна. 451. Диференційовна. 452. Неперервна, але не диференційовна. 453. Так; ні. 454. Так; ні.

§ 4. 455. $y'' = 2 \cos 2x$. 456. $-\dfrac{3x+1}{4x\,(1+x^2)\sqrt{x}}$. 457. $-\dfrac{2\,(x^2+1)}{3 \ln 5\,(x^2-1^2)}$.

458. $10\,(10x^2-1)\, e^{-5x^2}$. 459. $\dfrac{(1-x^2)(\sqrt{1-x^2}-3x) + 3x^2\sqrt{1-x^2} \arccos x}{(1-x^2)^3}$.

460. $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(2+\ln x) + (2+\ln x)^2\right) x^{2\sqrt{x}}$. 461. $-\dfrac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$.

462. $4 \ln x + 1$. 463. $2\,(2 \cos 2x - 2x \sin 2x - 3 \cos 3x)$. 464. $\dfrac{2\,(2-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$.

465. $\dfrac{3}{4\sqrt{x}} + \dfrac{8 \cos 2x}{\sin^3 2x}$. 466. $-\dfrac{2\sqrt[3]{x} \ln 10 + 9}{9x^2 \ln 10}$. 467. $4e^{2x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

468. $y''(0) = 12$; $y'''(0) = 46$. 469. $y'''(0) = \dfrac{16}{\ln 10}$.

470. $y^{(5)}(1) = 24$. 471. $y''(0) = -2\,(\cos 1 + \ln 2 \sin 1) \approx -2{,}247132$. 472. $y' =$ $= -\dfrac{4}{x^5} f'\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$; $y'' = \dfrac{4}{x^{10}}\left(5x^4 f'\left(\dfrac{1}{x^4}\right) + 4f''\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\right)$. 473. $y' =$ $= \dfrac{2^x \ln 2 f'(2^x)}{f(2^x) \ln 10}$; $y'' = \dfrac{2^x \ln^2 2}{f^2(2^x) \ln 10}\, ((f'(2^x) + 2^x f''(2^x))\, f(2^x) - 2^x (f'(2^x))^2)$.

474. $y' = \dfrac{2x f'(x^2)}{\cos^2 f(x^2)}$; $y'' = \dfrac{2}{\cos^4 f(x^2)}\, ((f'(x^2) + 2x f''(x^2)) \cos^2 f(x^2) +$ $+ 2x^2 \sin 2f(x^2)\,(f'(x^2))^2)$. 475. $y' = \dfrac{f'(\lg x)}{x \ln 10}\, e^{f(\lg x)}$; $y'' =$ $= \dfrac{(f'(\lg x) - \ln 10)\, f'(\lg x) + f''(\lg x)}{x^2 \ln^2 10}\, e^{f(\lg x)}$. 476. $y' = \dfrac{f'(\ln x)}{2x\sqrt{f(\ln x)}}$;

$y'' = \dfrac{2f(\ln x)\, f''(\ln x) - (2f(\ln x) + f'(\ln x))\, f'(\ln x)}{4x^2 f(\ln x)\sqrt{f(\ln x)}}$. 477. $y' =$

$$= \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\sqrt{1-f^2\left(\frac{1}{x}\right)}};$$

$$y'' = -\frac{\left[2x\left(1-f^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)+f\left(\frac{1}{x}\right)f'\left(\frac{1}{x}\right)\right] f'\left(\frac{1}{x}\right)+\left[1-f^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] f''\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4\sqrt{\left(1-f^2\left(\frac{1}{x}\right)\right)^3}}.$$

478. $y = u^v\ (u > 0)$, $y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'$; $y'' = v'u^{v-1}u' + v\,((v-1) \times$ $\times u^{v-2}u' + u^{v-1} \ln u \cdot v')\, u' + vu^{v-1}u'' + (vu^{v-1}u' + u^v \ln uv') \ln uv' + u^{v-1}u'v' +$ $+ u^v \ln uv''$. 479. $y' = \dfrac{2\,(uu' + vv')}{3\sqrt[3]{(u^2+v^2)^2}}$; $y'' = \dfrac{2}{9} \times$ $\times \dfrac{3\,(u^2+v^2)((u')^2 + (v')^2 + uu'' + vv'') - 2\,(uu'+vv')^2}{\sqrt[3]{(u^2+v^2)^5}}$. 480. $\dfrac{1}{\ln 10} \times$

$\times \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right)$; $\quad y'' = \frac{1}{\ln 10}\left(\frac{uu'' - (u')^2}{u^2} - \frac{vv'' - (v')^2}{v^2}\right)$. **481.** $y' = \frac{u^2(3(v^2+1)u' - 2u^3vv')}{(v^2+1)^2}$; $y'' = \frac{1}{(v^2+1)^3}\{[6u(v^2+1)(u')^2 - 4u^4u'v' + 3u^2(v^2+1)u'' - 2u^3((v')^2 + vv'')](v^2+1) - 4vv'\}$. **482.** $y' = 5^{uv}\ln 5\,(u'v + uv')$; $\quad y'' = 5^{uv}\ln 5\,((u'v+uv')^2\ln 5 + u''v + 2u'v' + uv'')$. **483.** $y' = \frac{u'v - (u+1)v'}{v^2\cos^2\frac{u+1}{v}}$; $\quad y'' = \frac{1}{v^4\cos^4\frac{u+1}{v}}\left[v^2(vu'' - (u+1)v'') \times \cos^2\frac{u+1}{v} - \left(vu' - (u+1)v'\right)\left(2vv'\cos^2\frac{u+1}{v} - \left(vu' - (u+1)v'\right) \times \sin\frac{2(u+1)}{v}\right)\right]$. **484.** $y^{(4n)} = \sin x$; $y^{(4n+1)} = \cos x$; $\quad y^{(4n+2)} = -\sin x$; $y^{(4n+3)} = -\cos x$. **485.** $y^{(n)} = \left(n + \frac{1}{m}\right)\left(n + \frac{1}{m} - 1\right)\cdots\left(\frac{1}{m} + 1\right)x^{\frac{1}{m}}$. **486.** $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n\ln 10}$ **487.** $y^{(n)} = (-1)^n\cdot 5^{-n}\ln^n 5$. **488.** $y^{(n)} = (-1)^n\frac{2(n-3)!}{x^{n-2}\ln 10}$. **489.** $y^{(n)} = a^ne^{ax}$. **490.** $y^{(4n+1)} = -5^{4n+1}\sin 5x$; $y^{(4n+2)} = -5^{4n+2}\cos 5x$; $y^{(4n+3)} = 5^{4n+3}\sin 5x$; $y^{(4n+4)} = 5^{4n+4}\cos 5x$. **491.** $y^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{5\cdot n!}{(x+5)^{n+1}}$. **492.** $y^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{(x-1)^{n+1}}$. **493.** $y^{(n)} = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$. **494.** $(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$. **495.** $y^{(n)} = 3^n\sin\left(3x + n\frac{\pi}{2}\right)$. **496.** $50!\frac{(x-1)^{51} - (x-3)^{51}}{(x^2-4x+3)^{51}}$. **497.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot 37\,(79-x)}{2^{20}(1-x)^{20}\sqrt{1-x}}$. *Вказівка:* $\quad y = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - \sqrt{1-x}$. **498.** $25(2x+3)\sin x + (x^2+3x-598)\cos x$. **499.** $(x^3 + 90x^2 + 2610x + 24\,361)\,e^x$. **500.** $32e^{-x}\sin x$. **501.** $\frac{4}{x^3}$. **502.** $50\,\mathrm{sh}\,x + x\,\mathrm{ch}\,x$. **503.** $y^{(n)}(1) = \frac{n}{5}[y^{(n-1)}(1) - (n-1)\,y^{(n-2)}(1)]$. *Вказівка.* Записати $(x^2 - 3x + 7)\,y = 2x + 3$ і продиференціювати n разів. **504.** $y^{(n)}(0) = -(n-1)!$. **505.** $(x^2 + 380)\,\mathrm{sh}\,x + 40x\,\mathrm{ch}\,x$. **506.** $(-x^5 + 125x^4 - 6000x^3 + 138\,000x^2 - 1\,518\,000x + 6\,375\,600)\,e^{-x}$. **507.** $5^x\left(\sin x - 40\ln 5\cos x - \frac{40\cdot 39}{2!}\ln^2 5\sin x + \frac{40\cdot 39\cdot 38}{3!}\ln^3 5\cos x + \frac{40\cdot 39\cdot 38\cdot 37}{4!}\ln^4 5\sin x - \cdots + \ln^{40} 5\sin x\right)$. **509.** $y^{(n)}(0) = \left(3 - \frac{5}{2^{n+1}}\right)n!$. **510.** $y^{(5)}(0) = 120\frac{c^4}{d^6}\times(ad - bc)$. **511.** $y^{(5)}(0) = 19\,800$. **522.** $y'' = -\frac{r^2}{y^3}$. *Розв'язання.* Знайдемо

спочатку y': $2x + 2yy' = 0$, $y' = -\frac{x}{y}$, а потім $y'' = -\left(\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{r^2}{y^3}$; $\quad y'' = -\frac{r^2}{y^3}$. **523.** $y' = \frac{e^y}{2-y}$. **524.** $\frac{\sin 2(x+y)\sin^2(x+y)}{(1+\sin^2(x+y))^3}$. **525.** 1) $\frac{2(y-1)}{(x-1)^2}$; 2) $-\frac{9a^2}{4y^3}$. **526.** $\frac{4\cdot 2^{x-y}\ln^2 2}{(2^{x-y}\ln^2 2 + 1)^3}$. **527.** $\frac{(e^y - y)^2 - x^2(e^y - 1)}{(e^y - y)^2}$. **528.** $-\frac{x+y}{(x+y-1)^3}$. **529.** $\frac{6}{(2x-y)^3}$. **530.** $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$. **531.** $-\frac{y}{(1+\sin(x+y))^3}$. **532.** $-\frac{8xy}{(2x+y^2)^3}$. **534.** $\frac{3}{8}$. **535.** $\frac{1}{e^2}$. **536.** $K = -\frac{p^2}{\sqrt{(y^2+P^2)^3}}$. **537.** $-\frac{3r^3x}{y^5}$. **538.** $\frac{3b^6x}{a^4y^5}$. **539.** $2[1 + 4(x+y)^2 + 3(x+y)^4]$. **540.** $\frac{2}{y^8}\times(3y^4 + 8y^2 + 5)$. **541.** 1/3. **542.** *Розв'язання.* $y' = \frac{(\ln(1+t^2))'}{(\mathrm{arctg}\,t)'} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = 2t$, $\quad y'' = \frac{(2t)'}{(\mathrm{arctg}\,t)'} = \frac{2}{\frac{1}{1+t^2}} = 2 + 2t^2$, $\quad y''' = (2 + 2t^2)'/(\mathrm{arctg}\,t)' = 4t(1+t^2)$. **543.** 1) $\frac{1}{\sin 3t\cos^3 3t}$; 2) $-\frac{2+t^2}{2(\sin t + t\cos t)^3}$. **544.** $\cos^3 t$. **545.** $\frac{2}{t^2-1}$. **546.** $\frac{2(t^2+1)(t^4+5t^2+2)}{(t^2+2)^3}$. **547.** $\frac{1}{3a\sin^4 t\cos t}$. **548.** $\frac{3}{8t^3}(\sin 2t\cos t + t(\sin 2t\sin t - 2\cos 2t\cos t))$. **549.** $\frac{((1+2t^2)\cos 2t + 2t\sin 2t)\,e^{t^2-1}}{2\cos^3 2t}$. **550.** $\frac{4}{\sin^3\frac{t}{2}}$. **555.** $10dx^2$. **556.** $\frac{1}{x^3}\left(\lg x - \frac{3}{\ln 10}\right)dx^2$. **557.** $(2 - 20x + 25x^2)\,e^{-5x}dx^2$. **558.** $5^{-x}\ln^2 5dx^2$. **559.** $-\frac{xdx^2}{\sqrt{(x^2+16)^3}}$. **560.** $-5\cos(x+1)\,dx^2$. **561.** $-4(\sin 2x + \cos 2x)\,dx^2$. **562.** $-\frac{4dx^2}{25x\sqrt[5]{x}}$. **563.** $4\left(10x^3 + \frac{1}{9\sqrt[3]{x^2}}\right)dx^2$. **564.** $\frac{1}{x^3}(2x\sin x + (2 - x^2)\cos x)\,dx^2$. **565.** $\frac{2\sin\frac{x}{5}}{5\cos^3\frac{x}{5}}dx^2$. **566.** $\left(4\cos\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2}\right)dx^2$. **567.** $-\frac{18}{(x+2y)^3}dx^2$. **568.** $\frac{25}{(3-y)^3}dx^2$. **569.** $\frac{56xy}{(x-3y^2)^3}dx^2$.

570. $\frac{x-y}{(1+5\sin y)^3}\,dx^2$. 571. $\frac{x^2+(1-y)^2}{(1-y)^3}\,dx^2$. 572. $\frac{y(2y-y^2-2)}{x^2(y-1)^3}\,dx^2$. 573. $\frac{4(y-x)}{(1+x-y)^3}\,dx^2$. 574. $\frac{y(2\cos y+y\sin y-2x)}{(\cos y-x)^2}\,dx^2$. 575. $-\frac{dx^2}{3}$. 576. $-\frac{dx^2}{4}$. 577. 0. 578. $\frac{3}{8}\,dx^2$. 579. $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\times x^{n-5}\,dx^5$. 580. $\frac{\ln 5}{8x^2\sqrt{x}}(x\ln^2 5-3\sqrt{x}\ln 5+3)\,5^{\sqrt{x}}\,dx^3$. 581. $16\times\frac{12x^2-1}{(1+4x^2)^3}\,dx^3$. 582. $\pm 2\sqrt{5}\,\frac{\sin^2\varphi+3\cos\varphi}{\sin^4\varphi}\,d\varphi^3$. 583. $576dx^3$. 584. $-\frac{3200}{81}\,dx^5$. 585. $-945\left(1+\frac{1}{243\sqrt{3}}\right)dx^6$. 586. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,dx^5$. 587. $12dx^4$. 588. $-16dx^3$; $\frac{176}{125}\,dx^3$. 589. 18 м/с. 590. В кінці першої і другої секунд. 593. $\frac{\pi^2}{9}$ см/с². 596. $-\frac{1}{8}$ м/с².

§ 5. 601. ± 4. 602. Ні. 607. Три корені, що лежать в інтервалах (3; 5); (5; 6); (6; 8). 610. $\sqrt[3]{b^5}-\sqrt[3]{a^5}=\frac{5}{3}(b-a)\sqrt[3]{c^2}$, $c\in(a;\ b)$. 611. $\ln\frac{x_2^2+1}{x_1^2+1}=\frac{2c(x_2-x_1)}{c^2+1}$, $x_1<c<x_2$. 612. $\operatorname{arctg}(x_0+h)-\operatorname{arctg}x_0=\frac{h}{(1+c^2)}$, $x_0<c<x_0+h$. 616. (3; 6). 618. $\frac{\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a}{b^3-a^3+3(b-a)}=\frac{1}{3(1+c^2)^2}$, $a<c<b$.

619. $\frac{\ln\frac{1+b^2}{1+a^2}}{\ln\frac{b+\sqrt{1+b^2}}{a+\sqrt{1+a^2}}}=\frac{2c}{\sqrt{1+b^2}}$, $a<c<b$. 620. $e^b+e^a=2e^c$, $a<c<b$. 623. $13=\frac{6c^2+5}{c}$, $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=\frac{5}{3}$. 625. 3/2. 626. 1/4. 627. ln 5. 628. $\frac{\alpha}{\beta}5^{\alpha-\beta}$. 629. $a^b\ln a$. 630. $\frac{\ln 3/2}{\ln 5/4}$. 631. 2/3. 632. —1. 633. —1/2. 634. ln 2. 635. 1/9. 636. 3/4. 637. 9/2. 638. 0. 639. $\frac{a^2}{b^2}$. 640. 3. 641. 1/2. 642. —4/125. 643. $\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$. 644. $\frac{m^2}{n^2\ln 2}$. 645. 1. 646. 1. 647. 0. 648. ∞. 649. $\sin a$. 650. 5. 651. 2. 652. 1/2. 653. $-\frac{a}{\pi}$. 654. 0. 655. $-\frac{4}{\pi}$. 656. 0. 657. 0. 658. ∞. 659. 1/2. 660. ∞. 661. 1/3. 662. ∞. 663. 0. 664. —1. 665. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 666. $e^{-\frac{2}{\pi}}$. 667. $e^{-\frac{9}{2}}$. 668. e. 669. e. 670. 1. 671. 1. 672. 1. 673. $1/e$. 674. $e^{-\frac{x^2}{2}}$. 675. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 676. $e\sqrt{e}$. 677. e^2. 678. 1. 680. 2/3. 681. Ні. 682. Значення x^x більше, ніж значення a^xx^a. 683. Значення $f(x)$ більше, ніж значення $\ln f(x)$. 686. $(x+2)^3-5(x+2)+8$. 687. $3(x-2)^4+29(x-2)^3+102(x-2)^2+152(x-2)+81$. 688. $(x-5)^4+11(x-5)^3+37(x-2)^2+21(x-5)-56$. 689. $(x+1)^6-9(x+1)^5+30(x+1)^4-45(x+1)^3+30(x+1)^2-9(x+1)+1$. 690. $f(x)=2-(x-3)+2(x-3)^2-3(x-3)^3$; $f(-2)=432$; $f'(0)=-94$; $f''(5)=-32$. 691. $f(0)=\frac{3}{4}$; $f'(2)=6$; $f''(3)=-8$. 692. $x-1-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{(x-1)^3}{3!}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n!}+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)!\,(1+\theta(x-1))^{n+1}}$, де $0<\theta<1$. 693. $3+\frac{x-9}{6}-\frac{(x-9)^2}{2^2\cdot 3^3}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n3^{2n-1}}\times\frac{(x-9)^n}{n!}+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot\ldots(2n-1)(x-9)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}(\sqrt{9+\theta(x-9)})^{2n+1}}$, де $0<\theta<1$.

694. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{\operatorname{sh}\theta x}{6!}x^6$, де $0<\theta<1$. 695. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{\operatorname{sh}\theta x}{5!}x^5$, де $0<\theta<1$. 696. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}(x-1)-\frac{2}{27}(x-1)^2+\frac{2}{81}(x-1)^3-\frac{2(x-1)^4}{(1+\theta(x-1))^5}$, $0<\theta<1$. 697. $56+182(x-2)+237(x-2)^2$; $f(1,9)\approx 40{,}17$; $f(1,9)=40{,}0159$, $\Delta=0{,}054$, $\delta=0{,}00135$. 698. $\approx 0{,}604$, $\Delta\leqslant 0{,}002$. 699. 0,966, 2 члени. 700. 2 члени; $\sin 20°\approx 0{,}342$. 701. 1) 0,54; 2) 1,39; 3) 0,03. 703. а) 1/4; б) 1/2; в) —1/6.

§ 6. 709. (—∞; —2), зростає; (—2; 1), спадає; (1; +∞), зростає. 710. (—∞; —2), спадає; (—2; 0), зростає; (0; 2), спадає; (2; +∞), зростає. 711. $y_{\max}=7$ при $x=-1$, $y_{\min}=3$ при $x=1$, (—∞; —1), зростає; (—1; 1), спадає; (1; +∞), зростає. 712. $y_{\min}=-1$ при $x=0$; $y_{\max}=3$ при $x=2$, (—∞; 0), спадає; (0; 2), зростає; (2; +∞), спадає. 713. $y_{\max}=0$ при $x=3$, (—∞; 3), зростає; (3; +∞), спадає. 714. $y_{\min}=0$ при $x=2$, (— ∞; 2), спадає; (2; +∞), зростає. 715. $y_{\min}=-1$ при $x=-1$, (—2; —1), спадає; (—1; +∞) зростає. 716. Функція спадає на (—1; 1). 717. $y_{\max}=4$ при $x=0$, $y_{\min}=3$ при $x=1$; (—∞; 0), зростає; (0; 1), спадає; (1; +∞), зростає. 718. $y_{\min}=-7$ при $x=2$; $y_{\max}=-5$ при $x=3$; (—∞; 2), спадає; (2; 3), зростає; (3; +∞), спадає. 719. $y_{\max}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ при $x=-\frac{2}{3}$; $y_{\min}=0$ при $x=0$; $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$, зростає; (—2/3; 0), спадає; (0; +∞), зростає. 720. $y_{\min}=0$ при $x=\pm 2$; $y_{\max}=2\sqrt[3]{2}$ при $x=0$; (—∞; —2), спадає; (—2; 0), зростає; (0; 2), спадає; (2; +∞), зростає. 721. $\left(-\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi;\ \frac{5}{6}\pi+k\pi\right)$, спадає. 722. $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, спадає; $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$, спадає; $y_{\max}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{3}{2}$; $y_{\min}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$; $y_{\max}\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{3}{2}$, $y_{\min}\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)=-3$, $k\in Z$. 723. $y_{\min}=0$ при $x=0$; $y_{\max}=\frac{1}{e^2}$ при $x=1$; (—∞; 0), спадає; (0, 1), зростає; (1; +∞), спадає. 724. Екстремуму немає, функція зростає на $(0; +\infty)$. **725.** $\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi; \frac{5\pi}{6}+2k\pi\right)$, спадає; $\left(\frac{5\pi}{6}+2k\pi; \frac{13\pi}{6}+2k\pi\right)$, зростає, $k \in Z$. **726.** $y_{min}=3$ при $x=2$; $(-\infty; 0)$, зростає; $(0; 2)$, спадає; $(2; +\infty)$, зростає. **727.** $y_{min}=\frac{3}{2}+\ln 2$ при $x=\pm\frac{1}{2}$; $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, спадає; $(-1/2; 0)$, зростає; $(0; 1/2)$, спадає; $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, зростає. **728.** $\left(-\frac{\pi}{3}+2k\pi; \frac{\pi}{3}+2k\pi\right)$, спадає; $\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi; \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)$, зростає, $k \in Z$. **729.** $y_{min}=2$ при $x=-1$; $y_{max}=\frac{1}{2}-\ln 4$ при $x=2$. $(-\infty; -2)$, зростає; $(-2; -1)$, спадає; $(-1; 0)$, зростає; $(0; 2)$, зростає; $(2; +\infty)$, спадає. **730.** $y_{min}=1-4\ln 2$ при $x=1$; $(-1; 1)$, спадає; $(1; +\infty)$, зростає. **731.** $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi; \frac{\pi}{3}+k\pi\right)$, спадає; $\left(\frac{\pi}{3}+k\pi; \frac{7\pi}{6}+k\pi\right)$, зростає, $k \in Z$. **732.** $y_{max}=1$ при $x=1$; $(-\infty; 0)$, спадає; $(0; 1)$ зростає; $(1; 2)$, спадає; $(2; +\infty)$, зростає. **733.** $\left(k\pi; \frac{\pi}{6}+k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi; (k+1)\pi\right)$, спадає, $k \in Z$. **734.** $\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{3}{4}\pi+k\pi\right)$, спадає, $k \in Z$. **735.** $y_{max}=\frac{1}{2e^{5/4}}$ при $x=\frac{1}{2}$; $y_{min}=\frac{1}{e^2}$ при $x=1$; $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ зростає; $(1/2; 1)$, спадає; $(1; +\infty)$, зростає. **736.** $y_{max}=\frac{\sqrt[3]{9}}{9}$ при $x=-2$; $y_{min}=0$ при $x=1$; $y_{max}=\frac{\sqrt[3]{4}}{24}$ при $x=3$; $(-\infty; -2)$, зростає; $(-2; 1)$, спадає; $(1; 3)$, зростає; $(3; +\infty)$, спадає. **737.** $y_{max}=2,5$ при $x=1$; $y_{min}=\frac{e(4-e)}{2}\approx 1,76$ при $x=e$; $(0; 1)$, зростає; $(1; e)$, спадає; $(e; +\infty)$, зростає. **738.** $y_{max}=\frac{1}{2}$ при $x=0$; $y_{min}=\frac{\pi}{8}$ при $x=1$; $(-\infty; 0)$, зростає; $(0; 1)$, спадає; $(1; +\infty)$, зростає. **739.** $y_{max}=0$ при $x=0$; $y_{min}=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$ при $x=\frac{1}{2}$; $(-1; 0)$, зростає; $(0; 1/2)$, спадає; $(1/2; 1)$, зростає. **740.** $y_{max}=0$ при $x=0$; $y_{min}=4$ при $x=2$; $(-\infty; 0)$, зростає; $(0; 1)$, спадає; $(1; 2)$, спадає; $(2; +\infty)$, зростає. **741.** $y_{max}=-2$ при $x=-3$; $y_{min}=2$ при $x=3$; $(-\infty; -3)$, зростає; $(-3; 0)$, спадає; $(0; 3)$, спадає; $(3; +\infty)$, зростає. **742.** $y_{min}=-\frac{3}{4}$ при $x=1$; $(0; 1)$, спадає; $(1; +\infty)$, зростає; **743.** $y_{max}=1$ при $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$, зростає; $\left(\frac{\pi}{4}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, спадає, $k \in Z$.

744. $y_{min}=-\frac{1}{2\sqrt{e}}$ при $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$; $\left(0; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, спадає; $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}; +\infty\right)$, зростає. **745.** $y_{max}=-6$ при $x=-3$; $y_{min}=2$ при $x=1$; $(-\infty; -3)$, зростає; $(-3; -1)$, спадає; $(-1; 1)$, спадає; $(1; +\infty)$; зростає. **746.** $y_{min}=0$ при $x=-0,5$; $(-\infty; -0,5)$, спадає; $(-0,5; +\infty)$, зростає. **747.** Функція зростає. **748.** Функція має максимум, $y_{max}=2$. **749.** Функція має мінімум, $y_{min}=-1$. **750.** Функція має максимум, $y_{max}=0$. **751.** Функція спадає. **752.** Функція зростає. **753.** Функція зростає. **763.** 21 і -31. **764.** -2 і -3. **765.** 33 і -12. **766.** 5 і 3. **767.** 1/2 і 0. **768.** 5 і 0. **769.** 1 і 0,5. **770.** $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$. **771.** Найбільше значення 1. Найменшого немає. **772.** $\sqrt[3]{9}$ і 0. **773.** $\frac{\pi}{4}$ і 0. **774.** 24 і 24. **775.** 8 і 8. **776.** 15 і 15. **777.** 10,5, 14 і 12 см. **778.** $\frac{\sqrt[3]{2V}}{\sqrt{3}}$. **779.** 6; 12 і 4. **780.** $h=2r$. **781.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ см. **782.** $\frac{4r\sqrt{5}}{5}$ і $\frac{r\sqrt{5}}{5}$. **783.** $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 293°56'$. **784.** $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. **785.** $\frac{4}{3}R$. **786.** $4R$. **787.** $\frac{4}{3}R$. **788.** $\approx 49°$. **789.** $(4; 4)$. **790.** $x=1,5$. **791.** $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{2}}; -\frac{1}{2}\right)$. **792.** $(2; 2)$ і $(-2; -2)$. **793.** 4 і 8. **794.** $2x+y-12=0$. **795.** $4\sqrt[4]{3}$ см. **796.** $(\pm\sqrt{5}; 1)$. **797.** $(2,5; 1)$ і $(-2,5; -1)$. **798.** Сторони $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ і $\frac{\sqrt{5}}{5}$ м, висота 5 м. **799.** Перетин жолоба має форму півкола. **801.** Через $1\frac{27}{43}\approx 1$ год 38 хв. **802.** $40\sqrt{2}$ см. **803.** Приблизно на 9 км. **804.** $AM=\frac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$. **805.** $AC=180$ км. **806.** 125 м. **807.** 2,4 м. **808.** $2b+\sqrt{\frac{sb}{a}}$ і $2a+\sqrt{\frac{sa}{b}}$. **809.** 60°. **810.** $x=66,7$ %; кількість кисню 33,3 %. **811.** $T=2T_0$. **812.** $v=\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\,v_{max}$. **813.** $x=e^{-0,5}$. **814.** $r=\sqrt{\frac{B}{A}}$. **816.** $r=R$. **817.** 1) $v=10$ км/год, $f_{min}=20\frac{2}{3}$; 2) $v=6,25$ км/год; $f_{min}=27\frac{7}{32}$; 3) $v=5$ км/год, $f_{min}=27\frac{1}{3}$; 4) $v=11,25$ км/год, $f_{min}=32\frac{9}{32}$.
821. В околі точки $A(-1; 5)$ вгнута, а в околі точки $B(1; -2)$ опукла. **822.** Опукла в околі точки $O(0; 0)$ і вгнута в околі точки $A(1; 1)$. **825.** $(k\pi; k\pi)$, $k \in Z$. **826.** $A(1, 4)$; $(-\infty; 1)$ — опуклий; $(1; +\infty)$ — вгнутий. **827.** $A(-1; -16)$; $B(3; -184)$; $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$ — інтервали вгнутості; $(-1; 3)$ — інтервал опуклості. **828.** $A(0; 1)$; $(-\infty; 0)$ — опуклий; $(0; +\infty)$ вгнутий **829.** $A(1; 6)$; $B(3; 10)$; $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$ — інтервали вгнутості; $(1; 3)$ — інтервал опуклості. **830.** Точок перегину немає; крива скрізь вгнута. *Вказівка.* $y''=30(x-1)^4$. **831.** $A(-2; 12)$; $B(3; 197)$; $(-\infty; -2)$ і $(3; +\infty)$ — інтервали опуклості; $(-2; 3)$ — інтервал вгнутості. **832.** $A(-2; 3)$; $(-\infty; -2)$ — інтервал вгнутості; $(-2; +\infty)$ — інтервал опуклості. **833.** $A(-2; \ln 8)$, $B(2; \ln 8)$; $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$ — інтервали опуклості; $(-2; 2)$ — інтервал вгнутості.

834. $A(4;\ 1)$; $(-\infty;\ 4)$ — інтервал вгнутості; $(4;\ +\infty)$ — інтервал опуклості. **835.** $A\left(-3;\ \frac{2}{e^2}\right)$; $(-\infty;\ -3)$ — опуклість; $(-3;\ +\infty)$ — вгнутість. **836.** $A(2;\ 3)$; $(-\infty;\ 2)$ — опуклість; $(2;\ +\infty)$ — вгнутість. **837.** $A(-2\sqrt{3};\ 4)$, $B(2\sqrt{3};\ 4)$; $(-\infty;\ -2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3};\ +\infty)$ — вгнутість; $(-2\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$ — опуклість. **838.** $A\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ +\infty\right)$ — опуклість; $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$ — вгнутість. **839.** $A\left(-1;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $B\left(1;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $(-\infty;\ -1)$; $(1;\ +\infty)$ — вгнутість; $(-1;\ 1)$ — опуклість. **840.** Скрізь вгнутий. **841.** $A(0;\ 32)$; $B(2;\ 0)$; $(-\infty;\ 0)$; $(2;\ +\infty)$ — вгнутість; $(0;\ 2)$ — опуклість. **842.** $A\left(-\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ -\frac{3}{2e^3}\right)$, $B\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ -\frac{3}{2e^3}\right)$; $\left(-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ +\infty\right)$ — вгнутість; $\left(-\frac{1}{\sqrt{e^3}};\ 0\right)$, $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$ — опуклість. **843.** $A\left(e^2;\ \frac{1}{2}e^2\right)$; $(0;\ 1)$; $(e^2;\ +\infty)$ — опуклість; $(1;\ e^2)$ — вгнутість. **844.** $(-\infty;\ -a)$ — опуклість; $(-a;\ +\infty)$ — вгнутість. **845.** $O(0;\ 0)$; $(-\infty;\ 0)$ — опуклість; $(0;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ — вгнутість. 850. $b^2 \geqslant \frac{8}{3}a^2$. **851.** $|a| \leqslant 2$. 852. $a \leqslant -0{,}25$. 853. При $a = 3$; ще одна точка перегину $A(1/3;\ 2/27)$. 854. $A(1;\ 4)$; $B(1;\ -4)$. 855. Точки перегину при $t = \frac{3\pi}{4} \pm k\pi$ $(k = 0;\ 1;\ 2;\ \ldots)$. 858. $x = 2$; $x = 3$; $y = 0$. **859.** $x = 2$; $x = -2$; $y = 0$. **860.** $y = 2$. **861.** $2x - y - 4 = 0$; $2x + y = 0$. **862.** $x = -1$, $y = x - 1$. **863.** $x = -1$; $x = 3$; $y = 2x + 4$. **864.** $y = \pm 3x$. **865.** $y = 2x + 1$; $y = 1$. **866.** $y = -\frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$; $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}$. **867.** $y = 2x$. **868.** $x + y = 0$. **869.** $y = x$; $y = x + \pi$. 870. $x = \frac{1}{2e}$; $y = 2x - \frac{1}{e}$. 871. $x = 0$; $y = x + 2$. 872. $y = \pm 2$. 873. $x = -1$; $x = 2$; $y = 2$. 874. 1) $x = 0$, $y = 1$; 2) $y = \pm 1$; 3) $x = 0$, $y = \pm 1$. 875. $x = -1$, $y = 0$. 876. $y = \frac{1}{2}x + e$. 877. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. 878. $x + y + a = 0$. 879. $x = 2$, $2x + 8y + 1 = 0$, $6x - 40y + 9 = 0$. 880. $y = a$. **882.** $x \in \mathbb{R}$; функція парна; $y_{max} = 1$ при $x = 0$; $y_{min} = 0$ при $x = \pm 2$; точки перегину $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}};\ \frac{4}{9}\right)$, асимптот немає. **883.** $x \in \mathbb{R}$; $y_{max} = 8$ при $x = 3$, $y_{min} = 0$ при $x = 1$; точка перегину $(-1;\ 4)$; асимптот немає. 884. $x \in R$; функція парна; $y_{min} = 1$ при $x = 0$; $y_{max} = \frac{3}{2}$ при $x = \pm 1$; точки перегину $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{23}{18}\right)$. 885. $x \in \mathbb{R}$; функція непарна; $y_{max}(-\sqrt{5}) = 0$, $y_{min}(-1) = -16$; $y_{max}(1) = 16$, $y_{min}(\sqrt{5}) = 0$; точки перегину $(0;\ 0)$ і $(\pm\sqrt{3};\ \pm 4\sqrt{3})$; асимптот немає. **886.** $x \in \mathbb{R}$; функція непарна; $y_{min} = -1$ при $x = -1$; $y_{max} = 1$ при $x = 1$; точки перегину $O(0;\ 0)$ і $\left(\pm\sqrt{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $y = 0$ — асимптота. **887.** $x \in \mathbb{R}$; функція непарна; $y_{max} = \frac{162}{5}$ при $x = -3$; $y_{min} = -\frac{162}{5}$ при $x = 3$; точки перегину: $(0;\ 0)$ і $\left(\pm\frac{3\sqrt{2}}{2};\ \mp\frac{567\sqrt{2}}{40}\right)$. **888.** $x \in \mathbb{R}$; функція парна; при $x = 0$ — максимум, $y_{max} = 0$; при $x = -\sqrt[4]{8}$ і $x = \sqrt[4]{8}$ — мінімуми, $y_{min} = -8$; $M_1\left(-\sqrt{\frac{24}{7}};\ \approx -0{,}17\right)$, $M_2\left(\sqrt{\frac{24}{7}};\ \approx -0{,}17\right)$ — точки перегину; асимптот немає. **889.** Визначена всюди, крім $x = 1$; $y_{max} = 0$ при $x = 0$, $y_{min} = 2$ при $x = 2$; $x = 1$, $y = \frac{x+1}{2}$ — асимптоти; точок перегину немає. **890.** $x \in \mathbb{R}$; функція непарна; екстремумів немає; $O(0;\ 0)$, $M_1\left(-\sqrt{3};\ -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, $M_2\left(\sqrt{3};\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ — точки перегину; $y = x$ — асимптота. **891.** $x \neq \pm 1$; функція непарна; $M_1\left(-\sqrt{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — максимум; $M_2\left(\sqrt{3};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — min; $O(0;\ 0)$ — точка перегину; $x = \pm 1$; $y = x$ — асимптоти. **892.** Визначена скрізь, крім $x = 1$; екстремумів і точок перегину немає; асимптоти $x = 1$ і $y = x - 1$. **893.** Визначена скрізь, крім $x = 2$; $y_{max} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ при $x = -\sqrt[3]{4}$; $\left(-2\sqrt[3]{2};\ \frac{\sqrt[3]{2}}{12}\right)$ — точка перегину; $x = 2$, $y = 0$ — асимптоти. **894.** Визначена скрізь, крім $x = \pm 2$; екстремумів немає; $(0;\ 0)$ — точка перегину; $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$ — асимптоти. **895.** Визначена скрізь, крім $x = 1$; екстремумів і точок перегину немає; $x = 1$, $y = x + 1$ — асимптоти. **896.** Визначена скрізь, крім $x = -2$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; $y_{max} = \frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ при $x = 2\sqrt[3]{2}$; $A(\approx 1{,}1;\ \approx 0{,}11)$, $B(\approx 3{,}8;\ \approx 0{,}26)$ — точки перегину; $x = -2$ і $y = 0$ — асимптоти. **897.** Визначена скрізь, крім $x = -0{,}5$; екстремумів і точок перегину немає; $x = -0{,}5$ і $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ — асимптоти. **898.** $x \in R$; функція парна; $y_{min} = -1$ при $x = 0$; $M_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\ -\frac{1}{2}\right)$ — точки перегину; $y = 1$ — асимптота. **899.** $x \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$; ексремумів і точок перегину немає; на інтервалі $(-\infty;\ -2)$ функція спадає, а на інтервалі $(0;\ +\infty)$ зростає; графік функції опуклий; $x = -2$ і $x = 0$ — асимптоти. **900.** $x \in \mathbb{R}$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{\pi}{6}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}};\ \frac{\pi}{6}\right)$ — точки перегину; $y = \frac{\pi}{2}$ — асимптота. **901.** Визначена скрізь, крім точки $x = 1$; екстремумів немає; функція зростає; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}\right)$ — точка перегину; $x = 1$ і $y = x - 1$ — асимптоти. **902.** Визначена скрізь, крім точки $x = -1$; $y_{min} = 3$ при $x = 0$; $(-1 - \sqrt[3]{2};\ 0)$ — точка перегину; $x = -1$ — асимптота. **903.** Визначена скрізь, крім $x = 1$; $y_{max} = 0$ при $x = 0$, $y_{min} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$ при $x = \sqrt[3]{4}$; $\left(-\sqrt[3]{2};\ -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ — точка перегину; $x =$

$= 1$ $y = x$ — асимптоти. **904.** Визначена скрізь, крім $x = -1$; екстремумів немає; $(0;\ 0)$ і $\left(\sqrt[5]{\frac{2}{3}};\ \frac{2}{5}\right)$ — точки перегину; $x = -1$ і $y = 1$ — асимптоти. **905.** Визначена скрізь, крім $x = -1$; $y_{max} = -2$ при $x = -2$; точок перегину немає; крива опукла; $x = -1$ — асимптота. **906.** Визначена скрізь, крім $x = 0$ і $x = 2$, $y_{max} = 0$ при $x = 1$; точок перегину немає; крива скрізь опукла; $x = 0$ і $x = 2$ — асимптоти. **907.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; скрізь вгнута. **908.** $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; екстремумів і точок перегину немає; на інтервалі $\left(-\infty;\ -\frac{1}{4}\right)$ функція спадає, а її графік опуклий; на інтервалі $\left(\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ функція також спадає, а її графік вгнутий; $y = 0$ — асимптота. **909.** $x \in [-1;\ 1]$; $y_{max} = \pi$ при $x = 0$; точок пепегнну асимптот немає. **910.** $x > 0$; екстремумів немає; функція зростає; $(1;\ 1/2)$ — точка перегину; $x = 0$ — асимптота. **911.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$, $y_{max} = 32e^{-2} \approx 4{,}33$ при $x = 4$; $C\ (\approx 1{,}2;\ \approx 1{,}65)$ і $D\ (\approx 6{,}8;\ \approx 3{,}1)$ — точки перегину; $y = 0$ — асимптота. **912.** Область існування: $|x| > 2$; функція непарна; екстремумів і точок перегину немає; $x = -2$; $x = 2$; $y = -1$; $y = 1$ — асимптоти. **913.** Область існування: $2\pi n < x < (2n + 1)\pi$; $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $y_{max} = 0$; точок перегину немає; асимптоти $-x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **914.** $x \in \mathbf{R}$; екстремумів немає; функція зростає; $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ — точки перегину; асимптот немає. **915.** $x > 0$; $y_{max} = \frac{1}{e}$ при $x = e$; $\left(e^{1,5};\ \frac{1,5}{e^{1,5}}\right)$ — точка перегину; $y = 0$ і $x = 0$ — асимптоти. **916.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{min} = -9e^{\frac{-11}{9}}$ при $x = -\frac{11}{3}$; $\left(-\frac{20}{3};\ -18e^{\frac{-20}{9}}\right)$ — точка перегину; $y = 0$ — асимптота. **917.** $x \in \mathbf{R}$; функція парна; $y_{max} = 4$ при $x = 0$; $(-8;\ 2\sqrt[3]{2})$ і $(8;\ 2\sqrt[3]{2})$ — точки перегину; $y = 0$ — асимптота. **918.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{min} = -2\sqrt[3]{2}$ при $x = 4$; $(0;\ 0)$ і $(8;\ 0)$ — точки перегину; асимптот немає. **919.** $x \in \mathbf{R}$; функція непарна; $y_{min} = -4\sqrt[3]{4}$ при $x = -8$; $y_{max} = 4\sqrt[3]{4}$ при $x = 8$; $(0;\ 0)$ — точка перегину; $y = 0$ — асимптота. **920.** $x > 1$; екстремумів і точок перегину немає; $y' < 0$ — функція спадає; $y'' > 0$ — графік вгнутий; $x = 1$ і $y = 0$ — асимптоти. **921.** $x \in \mathbf{R}$; функція непарна; $y' > 0$ при $x \in \mathbf{R}$ — функція зростає; $(-8;\ -2\sqrt[3]{2})$; $(0;\ 0)$; $(8;\ 2\sqrt[3]{2})$ — точки перегину; асимптот немає. **922.** $x \in \mathbf{R}$; функція непарна; $y' > 0$ — функція зростає, екстремумів немає; $(0;\ 0)$ — точка перегину; $y = -1$ і $y = 1$ — асимптоти. **923.** $x \in \mathbf{R}$; функція парна; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; $y'' > 0$ — графік вгнутий; асимптот немає. **924.** $x \neq 0$; екстремумів немає; $M_1\ (-1;\ 0)$, $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$ — точки перегину; $y = 1$ — асимптота. **925.** $x \neq -\frac{1}{2}$; при всіх $x \neq -\frac{1}{2}$ функція зростає; точок перегину немає; $y = 1$, $x = -\frac{1}{2}$ — асимптоти. **926.** $x > -1$; функція зростає; графік опуклий; $x = -1$ — асимптота. **927.** $x \neq 0$; функція непарна; на інтервалах $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ функція спадає, при $(-\infty;\ 0)$ графік опуклий; при $(0;\ +\infty)$ графік вгнутий; точок перегину немає; $x = 0$, $y = -1$, $y = 1$ — асимптоти. **928.** $x \in \mathbf{R}$; функція непарна; функція зростає; $(0;\ 0)$ — точка перегину; $y = -1$; $y = 1$ — асимптоти. **929.** $x \neq 0$; функція непарна; $y_{max} = 0$ при $x = -2$; $y_{min} = 0$ при $x = 2$; $\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{6};\ \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — точки перегину; $x = 0$; $y = -1$; $y = 1$ — асимптоти. **930.** $x \neq 1$; екстремумів і точок перегину немає; при $x < 1$ функція зростає, при $x > 1$ — спадає; $x = 1$; $y = -1$; $y = 1$ — асимптоти. **931.** $x \in \mathbf{R}$; екстремумів і точок перегину немає; функція зростає, графік опуклий; $y = 1$, $y = \Pi x + 1$ — асимптоти. *Вказівка.* $\operatorname{arcctg} x > \frac{x}{1 + x^2}$. **932.** $x \in \mathbf{R}$; функція непарна; $y' > 0$, функція зростає; $(0;\ 0)$ — точка перегину $\pm\frown$; $y = 2x \pm \frac{\pi}{2}$ — асимптоти. **933.** $x \neq 0$; $x = 0$ — точка розриву; $y_{min} = \frac{e^2}{4}$; при $x = -\frac{1}{2}$ точок перегину немає; $x = 0$ — асимптота. **934.** $x \neq 0$; $y_{min} = \frac{1}{4}e^{+2}$ при $x = \frac{+1}{2}$; точок перегину немає; $y'' > 0$, графік вгнутий; $x = 0$ — асимптота. **935.** $x \neq 0$; функція парна; екстремумів і точок перегину немає; $x = 0$ і $y = 0$ — асимптоти. **936.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{max} = 9e^{-\frac{2}{3}} \approx 4{,}62$ при $x = 2$; $(5;\ 18e^{-\frac{5}{3}})$ — точка перегину; $y = 0$ — асимптота. **937.** $x > 0$; $y_{max} = \frac{3}{e}$ при $x = \frac{e}{3}$; $\left(\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}};\ \frac{9}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ — точка перегину $\frown\pm$; $x = 0$; $y = 0$ — асимптоти. **938.** $x > 0$; $y_{min} = -\frac{1}{3e}$ при $x = e^{-\frac{1}{3}}$; точка перегину $(e^{-5/6};\ -5/6 \cdot e^{-5/2})$; асимптот немає. **939.** $x > 0$; $y_{max} = \frac{4}{e^2}$ при $x = e^{-2}$; $y_{min} = 0$ при $x = 1$; $\left(\frac{1}{e};\ \frac{1}{e}\right)$ — точка перегину; асимптот немає. **940.** $x \in \mathbf{R}$; функція парна; $y_{min} = 0$ при $x = -1$ і $x = 1$; $y_{max} = 1$ при $x = 0$; $(-\sqrt{3};\ 2)$; $(\sqrt{3};\ 2)$ — точки перегину; асимптот немає. **941.** $x \in \mathbf{R}$; функція парна; $y_{min} = 0$ при $x = -2$ і $x = 2$, $y_{max} = 2$ при $x = 0$; точок перегину немає; $y = -x$ і $y = x$ — асимптоти. **942.** $x > 0$; $y_{min} = -\frac{1}{e}$ при $x = \frac{1}{e}$; точок перегину немає; $y'' > 0$, графік вгнутий; асимптот немає. **943.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$, $y_{max} = \sqrt[3]{4}e^{-\frac{2}{3}} \approx 1{,}587$ при $x = \sqrt[3]{2}$; $M_1\ (\approx 0{,}7;\ \approx 0;\ 8)$; $M_2\ (\approx 1{,}8;\ \approx 0{,}45)$ — точки перегину; $y = 0$ — асимптота. **944.** $x \in \mathbf{R}$; $y_{max} = 2\sqrt[3]{4}$ при $x = 4$, $y_{min} = 0$ при $x = 0$; точка перегину $(6;\ 0)$; симптоти $y = 2 - x$. **945.** Визначена при $x \leqslant -2$ і при $x > 0$ двозначна. Графік симетричний відносно прямої $y = x$. $y_{max} = -2$ при $x = 1$; точок перегину немає; $x = 0$, $y = 0$ і $y = -x$ — асимптоти. **946.** Функція періодична з періодом 2π. $y_{min} = -\sqrt{2}$ при $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$; $y_{max} = \sqrt{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$; $M_k\left(\frac{3}{4}\pi + \right.$

$+k\pi;\ 0\Big)$ — точка перегину. **947.** Функція періодична з періодом 2π; $y_{\min}=-\frac{3}{4}\sqrt{3}$ при $x=\frac{5}{3}\pi+2k\pi$; $y_{\max}=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ при $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in Z)$; точки перегину — $M_k(k\pi;\ 0)$ і $N_k\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi;\ \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$. **948.** Функція періодична з періодом 2π. На відрізку $[-\pi;\ \pi]$ $y_{\max}=\frac{1}{4}$ при $x=\pm\frac{\pi}{3}$; $y_{\min}=-2$ при $x=\pm\pi$ і $y_{\min}=0$ при $x=0$; точки перегину $(\pm0{,}57;\ 0{,}13)$ і $(\pm2{,}20;\ -0{,}95)$. **949.** Періодична функція з періодом 2π. $y_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$; $y_{\max}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x=-\frac{3}{4}\pi+2k\pi$ $(k\in Z)$; асимптоти $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$. **950.** Функція непарна. $y_{\max}=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ при $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $y_{\min}=\frac{3}{2}\pi+1+2k\pi$ при $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$; точки перегину — $M_k(k\pi;\ 2k\pi)$; асимптоти $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k\in Z)$. **951.** $x\in R$. Екстремумів немає; точка перегину $(0{,}5;\ 1{,}59)$; асимптоти $y\approx0{,}21$ і $y\approx4{,}81$. **952.** $|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$; функція періодична з періодом 2π; $y_{\min}=1$ при $x=2k\pi$; асимптоти $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **953.** $y_{\min}=0$ при $t=0$. **954.** $x_{\min}=-1$ при $t=1$ $(y=3)$; $y_{\min}=-1$ при $t=-1$ $(x=3)$. **955.** $x(t)$ і $y(t)$ визначені при всіх t, а $y(x)$ — при всіх x; $(-3;\ 3)$ — максимум, $(5;\ -1)$ — мінімум, $(1;\ 1)$ — точка перегину. Асимптот немає. При $x\to\infty$ кут нахилу лінії до осі абсцис прямує до 45°. **956.** Щоб побудувати графік, достатньо змінювати t у межах від 0 до 2π; $x_{\min}=-a$ при $t=\pi$ $(y=0)$; $x_{\max}=a$ при $t=0$ $(y=0)$; $y_{\min}=-a$ — точка звороту при $t=+\frac{3\pi}{2}$ $(x=0)$; $y_{\max}=+a$ — точка звороту при $t=\frac{\pi}{2}$ $(x=0)$; точки перегину при $t=\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}$ $\left(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}};\ y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **957.** $x(t)$ і $y(t)$ визначені при всіх t, а $y(x)$ — при всіх x. Асимптоти $y=x$ і $y=x+6\pi$. $\left(-1-3\pi;\ -1+\frac{3\pi}{2}\right)$ — максимум, $\left(1-3\pi;\ 1-\frac{3\pi}{2}\right)$ — мінімум, $(-3\pi;\ 0)$ — точка перегину. **958.** $x(t)$ і $y(t)$ визначені при всіх t. Функція $y(x)$ при $x<-\frac{1}{e}$ не визначена, при $-\frac{1}{e}<x<0$ ця функція двозначна, при $x>0$ — однозначна. Лінія симетрична відносно прямої $x+y=0$. Максимум — $\left(e;\ \frac{1}{e}\right)$. Є дві точки перегину. Координатні осі є асимптоти. **959.** Замкнута трипелюсткова роза. Функція визначена в інтервалах

$\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$; $\left[\frac{2}{3\pi};\ \pi\right]$; $\left[\frac{4}{3\pi};\ \frac{5}{3\pi}\right]$. Екстремуми при $\varphi=\frac{\pi}{6}$; $\varphi=\frac{5\pi}{6}$ і $\varphi=\frac{3\pi}{2}$. **960.** Існує при всіх значеннях φ. При $\varphi=0$ максимум дорівнює $2a$, при $\varphi=\pi$ мінімум дорівнює 0. Лінія замкнута, симетрична відносно полярної осі. Полюс — точка звороту. **961.** Функція визначена в інтервалах $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$. Графік функції симетричний відносно полюса. Прямі $x=a$ і $x=-a$ є асимптоти. **962.** Чотирипелюсткова роза. Початок координат — подвійна точка самодотику. **963.** Лінія цілком лежить у смузі $-\frac{a\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Симетрична відносно початку. Асимптота $x=0$; $(0;\ 0)$ — точка перегину з віссю абсцис у ролі дотичної. Є ще дві точки перегину. **964.** Симетрична відносно чотирьох осей: $x=0$; $y=0$; $y=x$; $y=-x$; замкнена лінія з чотирма точками звороту: $(a;\ 0)$; $(0;\ a)$; $(-a;\ 0)$ і $(0;\ -a)$. Початок координат — ізольована точка.

§ 7. 965. $\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$. **966.** $\frac{1+x^2}{1-x^2}\,dx$. **967.** $\frac{3}{|y|}\,dx$. **968.** $\sqrt{\frac{2+x^2}{1+x^2}}\,dx$. **969.** $\operatorname{ch}\frac{x}{a}\,dx$. **970.** $\frac{dx}{\cos x}$. **971.** $\frac{dx}{\sqrt{x}}$. **972.** $\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx$. **973.** $2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$. **974.** $\frac{3}{2}a|\sin 2t|\,dt$. **975.** $a|t|\,dt$. **976.** $(1+t^2)\,dt$. **977.** $a|\operatorname{ctg} t|\,dt$. **978.** $a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$. **979.** $\frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$. **980.** $2a\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$. **981.** $a\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi$. **982.** $a\frac{d\varphi}{\sin^3\frac{\varphi}{2}}$. **983.** 36. **984.** $\frac{a}{b^2}$. **985.** $\frac{1}{27}$. **986.** 2. **987.** 1. **988.** $\sqrt{2}$. **989.** $\frac{3\sqrt{5}}{25}$. **990.** $\frac{1}{4}$. **991.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **992.** 0,08. **993.** $\frac{3}{2a}$. **994.** $\frac{\sqrt{2}}{2a}$. **995.** $\sqrt{2}$. **996.** $\frac{125}{18}$. **997.** $2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}$. **998.** $\frac{1}{4}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$. **999.** $2a$. **1000.** $3a|\cos t|$.

1001. $\frac{2}{3}a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. **1002.** $(1;\ 1)$. **1003.** $\frac{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\,ab}$. **1007.** $\left(-\frac{11}{2}a;\ \frac{16}{3}a\right)$. **1008.** $\left(\frac{\pi-10}{4};\ \frac{9}{4}\right)$. **1009.** $(x-4)^2+(y-4)^2=8$. **1010.** $(x+4)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{250}{9}$. **1011.** $(x-2)^2+(y-1{,}5)^2=0{,}25$. **1012.** $(x-3)^2+(y+2)^2=8$. **1013.** $\left(x+\frac{7}{3}a\right)^2+\left(y-\frac{8}{3}\right)^2=\frac{125}{9}a^2$. **1014.** $\left(-2\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **1015.** $\left(1-\frac{1}{2}\ln 2;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **1016.** $\left(\frac{a}{4};\ \frac{a}{4}\right)$. **1017.** При $t=k\pi$. **1018.** P. **1019.** $\frac{3}{4}a$. **1020.** $\xi=x-\frac{(1+n^2x^{2(n-1)})\,x}{n-1}$, $\eta=x^n+\frac{1+n^2x^{2(n-1)}}{n(n-1)\,x^{n-2}}$.

1021. $\xi = \frac{(a^2+b^2)x^3}{a^4}$; $\eta = -\frac{(a^2+b^2)y^3}{b^4}$; $(a\xi)^{2/3} - (b\xi)^{2/3} = (a^2+b^2)^{2/3}$. **1022.** $\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}$; $\eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$; $(\xi+\eta)^{2/3} + (\xi-\eta)^{2/3} = 2a^{2/3}$. **1023.** $\xi = \pm\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y}{a}}(3y+a)$; $\eta = -\frac{9y^2+2ay}{2a}$. **1024.** $\xi = -\frac{4}{3}t^3$; $\eta = 3t^2 - \frac{3}{2}$; $\xi^2 = \frac{16}{243}\left(\eta + \frac{3}{2}\right)^2$. **1025.** $\xi^{2/3} + \eta^{2/3} = = (2a)^{2/3}$. **1030.** При $x = 0$ маємо: $y' = 0$ і $R \to \infty$, тобто при переході з прямолінійного відрізка на перехідну криву плавність руху не порушується. На практиці перехідна крива рідко буває довшою за 100 м, а q звичайно більше 10 000 м і дріб $\frac{x^4}{4q^2}$ досить малий. Тому $R = \frac{q}{x}\left(1 + \frac{x^4}{4q^2}\right)^{3/2} \approx \frac{q}{x}$.

1031. а) $2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = 2|\vec{r}|\frac{d|\vec{r}|}{dt}$; б) $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 + \vec{r}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; в) $\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$; г) $\left(\vec{r}\ \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right)$. **1034.** а) Пряма; б) парабола; в) еліпс; г) гіпербола. **1035.** Еліпс $x = 4\cos t$, $y = 2\sin t$; $\vec{v} = -4\sin t\vec{i} + 2\cos t\vec{j}$; $\vec{w} = -4\cos t\vec{i} - 2\sin t\vec{j}$; $\vec{v}(0) = 2\vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4\vec{i}$; $\vec{w}(0) = -4\vec{i}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j}$; $\vec{w}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\vec{j}$. **1036.** Еліпс $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 3$. При $t = 0$ і $t = \pi$ v_{max}, w_{min}. При $t = \frac{\pi}{2}$ і $t = \frac{3}{2}\pi$ v_{min}, w_{max}. **1037.** Гвинтова лінія; $\vec{v} = -3\sin t\vec{i} + 3\cos t\vec{j} + 5\vec{k}$. $\vec{w} = -3\cos t\vec{i} - 3\sin t\vec{j}$. **1038.** $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{w} = -4\vec{k}$. **1039.** $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$; $\vec{w} = 2\vec{k} - \vec{i}$. **1040.** $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{2}$; $x + 2z - 4 = 0$. **1041.** $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z}{1}$; $3x + 4y + z - 10 = 0$. **1042.** $x - 1 = y - 1 = z$; $x + y + z - 2 = 0$. **1043.** $\frac{x}{1} = = \frac{y-3}{0} = \frac{z-\pi}{-1}$; $x - z + \pi = 0$. **1044.** $\frac{7\sqrt{5}}{25}$. **1045.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1046.** 4. **1047.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **1048.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **1049.** 1/5 і 5. **1050.** $\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}^2 t}{4|\mathrm{sh}\, t|}$. **1051.** $K = R = 1$. **1052.** $1{,}1 < x < 1{,}2$. **1053.** $0{,}3 < x_1 < 0{,}4$; $1{,}8 < x_2 < 1{,}9$. **1054.** 0,21. **1055.** $-0{,}3295$. **1056.** 0,17. **1057.** 2,8438. **1058.** $-0{,}62 < x_1 < -0{,}61$; $0{,}24 < x_2 < 0{,}25$. **1059.** 2,75557. **1060.** 0,325. **1061.** 0,11323. **1062.** 1,172. **1063.** $f \approx 66{,}63$ см. **1064.** $x^2\pi\left(r - \frac{x}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3\gamma$; $x \approx 26{,}95$ см. **1065.** 0,785. **1066.** 0,073. **1067.** (0,57; —3,62). **1068.** 0,78. **1069.** $1 + x + x^2 + x^3$. **1070.** $y = x^2 - 10x + 1$; $y(0) = 1$. **1071.** а) $y(0{,}5) = -1$; б) $y(0{,}5) = -\frac{15}{16}$. **1072.** $y' = -0{,}440049$, $y'' = -0{,}3252$.

Глава 6

§ 1. а) 1; б) —1; в) 0; г) —0,8; д) $f(x, y)$; е) $\frac{y+3x}{y-3x}$. **2.** а) $-f(x, y)$; б) $f(x, y)$; в) $\cos 2t$. **3.** а) 0; б) 1; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 0. **4.** а) 0; б) 1; в) —1; г) —1. **5.** а) $f(x, y)$; б) $f(x, y)$. **6.** $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. **7.** $f(x) = x^2 - x$; $z = 2y + (x-y)^2$. **8.** $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$. *Вказівка.* Позначити: $x + y = u$; $\frac{y}{x} = v$ $(y \neq -1)$. **9.** $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. **10.** *Вказівка.* Покласти $\lambda = \frac{1}{x}$. **11.** Однорідна нульового порядку. **12.** Однорідна нульового порядку. **13.** Однорідна першого порядку. **14.** Однорідна третього порядку. **15.** а) $\sin(x+y)$; б) $\sin(x-y)$; в) $\mathrm{tg}(x+y)$; г) e^{x+y}. **16.** Уся площина. **17.** Уся площина. **18.** Уся площина, за винятком точок прямої $y = x$. **19.** Уся площина, за винятком точок прямих $y = x$ та $y = -x$. **20.** Уся площина. **21.** Уся площина, за винятком точок прямої $y = -x$. **22.** $y \leqslant x$. Півплощина під прямою $y = x$ з долученням точок цієї прямої. **23.** $y < x$. Півплощина під прямою $y = x$ з вилученням точок прямої. **24.** $|y| \leqslant |x|$. Внутрішня частина правого та лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = x$ та $y = -x$ з долученням точок цих прямих. **25.** $|y| \geqslant |x|$. Внутрішня частина верхнього та нижнього вертикальних кутів, утворених прямими $y = x$ та $y = -x$ з долученням точок цих прямих. **26.** $x^2 + y^2 < R^2$. Круг радіуса R з центром у початку координат, за винятком точок контура. **27.** $x^2 + y^2 < 1$; $x^2 + y^2 \neq 0$. Круг $x^2 + y^2 < < 1$, за винятком контура і початку координат. **28.** $x > 0$, $y > 0$. Внутрішні точки першого координатного кута. **29.** Внутрішні точки першого та третього координатних кутів. **30.** Область визначення $x^2 + y^2 < R^2$. **31.** $x^2 + y^2 < R^2$. $x^2 + y^2 > 4R^2$. Уся площина, за винятком внутрішніх точок кільця $R^2 < x^2 + y^2 < 4R^2$ і точок контурів. **32.** $\left|\frac{y-1}{x}\right| \leqslant 1$, $x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \leqslant y \leqslant 1 + x \ (x > 0), \\ 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - x \ (x < 0). \end{cases}$ Внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, з долученням точок цих прямих, але без точки їх перетину. **33.** Два тупі вертикальні кути, утворені прямими $y = 0$ і $y = -2x$, з долученням точок цих прямих без їх спільної точки (0; 0). **34.** Частина площини, обмежена лініями $y = \frac{1}{1+x^2}$ та $y = 0$, з долученням точок вказаних ліній. **35.** Частина площини, обмежена прямою $y = 2$ і параболами $y^2 = = \pm x$, з вилученням точки (0; 0). **36.** Уся площина, за винятком прямих $y + + x = n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. **37.** Круг $x^2 + y^2 < 1$ та кільця $2n \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2n + + 1$ (n — ціле число) з долученням контурів. **38.** Область, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, та еліптичні кільця $2n \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 2n + 1$ (n — ціле число) з долученням контурів. **39.** Круг $x^2 + y^2 < 1$ з долученням контура. **40.** Круг $x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$, за винятком точок прямої $y = -x$. **41.** Частина площини між параболою $y^2 = x$ та колом $x^2 + y^2 = 1$ всередині параболи з вилученням точок параболи і кола. **42.** Внутрішні точки першого квадранта з долученням меж. **43.** Уся площина, за винятком внутрішніх точок третього квадранта. **44.** Уся площина, за винятком додатних півосей координат з долученням початку координат. **45.** Уся площина, за винятком від'ємних півосей координат з долученням початку координат. **46.** Уся площина, за винятком точок прямої $y=-x$. **47.** Уся площина, за винятком точок прямої $y=x$. **48.** Внутрішні точки простору, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ з долученням межі. **49.** Внутрішні точки частини простору, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=1$ з вилученим початком координат. **50.** $x>0$, $y>0$, $z>0$. **51.** $x>0$, $y>0$, $z>0$. **52.** Сукупність внутрішніх точок октантів простору $\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z>0, \\ x<0,\ y<0,\ z<0. \end{cases}$ **53.** Точки частини простору, що лежать між площинами $x+y+z=1$ та $x+y+z=-1$, з долученням точок площин. **54.** Точки частини простору, обмеженого еліпсоїдом $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{16}+\frac{(z-1)^2}{64}=1$, з долученням точок еліпсоїда. **55.** Точки частини простору, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{8}+\frac{(z+1)^2}{16}=1$, з вилученням точок еліпсоїда.

Примітка. У № 56—63 вказано можливі варіанти відповідей. **56.** $z=\frac{1}{(x+3)^2+(y-1)^2}$. **57.** $z=\frac{1}{x^2+y^2-25}$. **58.** $z=\frac{1}{y^2-4x}+\frac{1}{x^2+y^2-8}$. **59.** $z=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2-y^2}}$. **60.** $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$. **61.** $z=\arcsin|x+y|$. **62.** $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-z^2}$. **63.** $z=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$. **64.** Сім'я прямих $x+y=C$, де $C=\mathrm{const}$. **65.** Концентричні кола $x^2+y^2=C$, для $C\neq 0$, початок координат для $C=0$. **66.** Сім'я гіпербол $x^2-y^2=C$ при $C\neq 0$, прямі $y=\pm x$ для $C=0$. **67.** Множина прямих з вершиною у початку координат, за винятком осі ординат. **68.** Сім'я еліпсів $x^2+2y=C$ $(C\neq 0)$. **69.** Сім'я гіпербол, розміщених у I і III квадрантах. **70.** Сім'я гіпербол $xy=C$ $(C\neq 0)$, осі координат для $C=0$. **71.** Сторони кутів, що паралельні додатним напрямам осей Ox і Oy, з вершинами на прямій $y=x$. **72.** Множина прямих $x+y=C$. **73.** Сім'я гіпербол $xy=C$, розміщених у I чверті площини з вилученою гіперболою $xy=1$. **74.** Сім'я площин $x+y+z=C$. **75.** Сім'я сфер $x^2+y^2+z^2=C$. **76.** Сім'я двопорожнинних гіперболоїдів для $C>0$; сім'я однопорожнинних гіперболоїдів для $C<0$, конус $x^2-y^2-z^2=0$ для $C=0$. **77.** Сфера $x^2+y^2+z^2=\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2$, де $C=e^u$. **78.** Сфери $x^2+y^2+z^2=C$, $C\geqslant 0$. **79.** Параболоїди обертання $x^2+y^2=Cz$. **80.** а) $y=x$, $x\to 0$ за довільним законом; б) $y=-2x$, $x\to 0$ за довільним законом. *Вказівка.* Покласти $y=kx$. **83.** *Вказівка.* $xy\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$. **84.** 1. **85.** 1. *Вказівка.* Покласти $xy=\alpha$. **86.** 1. **87.** $\frac{1}{2}$. **88.** e. **89.** 1. **90.** $\frac{4}{3}$. **91.** 0. **92.** 1. **93.** 0. **94.** Точки прямої $y=2x$. **95.** Точки параболи $y^2=2px$. **96.** Точки прямої $y=-x$. **97.** Точки осей координат Ox і Oy. **98.** Точки кола $x^2+y^2=1$. **99.** Точки кола $x^2+y^2=1$ і початок координат $(0; 0)$. **100.** Точки прямих $y=x$ та $y=-x$. **101.** Точки кола $x^2+y^2=4$ та параболи $y^2=4x$. **102.** Точки площини з цілочисловими координатами. **103.** Точки прямих $x=m$, $y=n$ (m і n — цілі числа). **104.** Точки прямих $x=m\pi$, $y=n\pi$ (m і n — цілі). **105.** Точки кіл $x^2+y^2=n$ ($n\geqslant 0$, ціле). **106.** Точки координатних площин $x=0$, $y=0$, $z=0$. **107.** Точки поверхні сфери $(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=4$. **108.** Точки поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1$. **109.** Точки поверхні конуса $z^2=x^2+y^2$.

§ 2. **115.** $z'_x=2xy-1$, $z'_y=x^2+1$. **116.** $z'_x=3x^2-3y$, $z'_y=3y^2-3x$. **117.** $z'_x=-\frac{y}{x^2}$, $z'_y=\frac{1}{x}$. **118.** $z'_x=\frac{2y}{(x+y)^2}$; $z'_y=\frac{-2x}{(x+y)^2}$. **119.** $z'_x=\frac{2}{5}x$, $z'_y=\frac{2}{5}y$. **120.** $z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **121.** $z'_x=-\frac{2x}{(x^2+y)^2}$; $z'_y=-\frac{1}{(x^2+y)^2}$. **122.** $z'_x=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}$; $z'_y=\frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^3)^2}}$. **123.** $z'_x=6(3xy+2y^2)(3x^2y+4xy^2+5)^2$; $z'_y=3(3x^2+8xy)\times(3x^2y+4xy^2+5)^2$. **124.** $z'_x=\frac{1}{x}$; $z'_y=-\frac{1}{y}$. **125.** $z'_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. **126.** $z'_x=\frac{x^2+4xy-3y}{6(x+y)(x^2+y^2)}$; $z'_y=\frac{y^2+4xy-3x^2}{6(x+y)(x^2+y^2)}$. **127.** $z'_x=\frac{y}{x^2-y^2}$; $z'_y=-\frac{x}{x^2-y^2}$. **128.** $z'_x=-\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $z'_y=\frac{2x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$. **129.** $z'_x=yx^{y-1}$, $z'_y=x^y\ln x$.

130. $z'_x=-\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}}$; $z'_y=\frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}$ **131.** $z'_x=\frac{y}{x^2+y^2}$; $z'_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$. **132.** $z'_x=-\frac{y}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}$; $z'_y=\frac{x}{(x^2+y^2)\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)^2}$. **133.** $z'_x=\frac{y}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$; $z'_y=-\frac{x}{(x^2+y^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}$. **134.** $z'_x=\frac{1}{1+x^2}$; $z'_y=\frac{1}{1+y^2}$. **135.** $z'_x=\frac{y}{|x+y|\sqrt{xy}}$; $z'_y=-\frac{x}{|x+y|\sqrt{xy}}$. **136.** $z'_x=-\frac{1}{1+x^2}$; $z'_y=\frac{1}{1+y^2}$. **137.** $z'_x=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\times\sin\frac{y}{x}$; $z'_y=-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}-\frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}$. **138.** $z'_x=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$; $z'_y=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$. **139.** $z'_x=\frac{\cos x-e^{2y}\sin x}{e^{2y}\cos x+\sin x}$; $z'_y=\frac{e^{2y}\cos x-\sin x}{e^{2y}\cos x+\sin x}$. **140.** $z'_x=-\frac{x}{x^2+y^2}$; $z'_y=\frac{x^2}{y(x^2+y^2)}$. **141.** $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$. **142.** 0; $\frac{1}{4}$. **143.** $z'_x=-\frac{y}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$; $z'_y=$

$= -\frac{x}{(1+\sqrt{xy})\sqrt{xy-x^2y^2}}$. **144.** 0, 0. **145.** 1; −1. **146.** 5; 1. **147.** 1.

148. $z'_x = \frac{2e^{x+y^2}}{\sin 2e^{x+y^2}}$; $z'_y = \frac{4ye^{x+y^2}}{\sin 2e^{x+y^2}}$. $z'_x\left(\ln\frac{\pi}{4}, 0\right) = \frac{\pi}{2}$. **149.** $u'_x = 2xyz + y^2z + yz^2$; $u'_y = x^2z + 2xyz + xyz^2$; $u'_z = x^2y + xy^2 + 2xyz$. **151.** $u'_x = \frac{y}{z}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{xy}{z}\right)$; $u'_y = \frac{x}{z}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{xy}{z}\right)$; $u'_z = -\frac{xy}{z^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{xy}{2}\right)$.

152. $u'_x = y^z x^{y^z-1}$; $u'_y = zy^{z-1}x^{y^z}\ln x$; $u'_z = y^z x^{y^z}\ln x\ln y$. **153.** $u'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $u'_y = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $u'_z = -\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$. **154.** $u'_x = \frac{2yz}{\sin 2xyz}$; $u'_y = \frac{2xz}{\sin 2xyz}$; $u'_z = \frac{2xy}{\sin 2xyz}$. **155.** $u'_x = -\frac{z}{x}\left(\frac{y}{x}\right)^z$; $u'_y = \frac{z}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^z$; $u'_z = \left(\frac{y}{x}\right)^z\ln\frac{y}{x}$. **156.** $\sqrt{2}/2$. **157.** Так, $k=0$. **158.** Так, $k=4$. **159.** Так, $k=0$. **160.** Так, $k=1$. **161.** Так, $k=0$. **162.** Так, $k=1$. **163.** Ні. **164.** Ні.

175. ρ. **176.** $ab\rho$. **177.** $2\rho^3$. **179.** $\frac{\pi}{4}$. **180.** $\frac{\pi}{6}$. **181.** $dz = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\times(xdx+ydy)$. **182.** $dz = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)$. **183.** $dz = -\left(\frac{y}{x^2}+\frac{1}{y}\right)dx + \left(-\frac{1}{x}+\frac{x}{y^2}\right)dx$. **184.** $dz = \frac{2}{\sin 2xy}(ydx+xdy)$. **185.** $dz = \frac{dx}{1+x^2}+\frac{dy}{1+y^2}$.

186. $du = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xdx+ydy+zdz)$. **187.** $dz = \frac{1}{y^2}\,\mathrm{tg}\frac{x}{y}(xdy-ydx)$.

188. $du = (xy)^z\left(\frac{z}{x}dx+\frac{z}{y}dy+\ln(xy)dz\right)$. **189.** $\approx 2{,}95$. **190.** $\approx 0{,}94$.

191. $\approx 3{,}037$. **192.** $\approx 0{,}005$. **193.** $\approx 16{,}97$. **194.** $\approx 1{,}055$. **195.** $\approx 1{,}05$. **196.** $1{,}8 \pm 0{,}2$. **197.** Абсолютна похибка ≈ 15 м³, відносна $\approx 11\%$. **198.** $\approx 1{,}7$ мм. **199.** $\approx 7{,}6$ м. **200.** Зменшується із швидкістю $\approx 0{,}628$ м³/с. **201.** Зменшується із швидкістю $\approx -1{,}256$ кг · м²/с. **202.** Абсолютна похибка $\approx 20{,}1$, відносна $\approx 20\ \%$. **203.** Зростає із швидкістю ≈ 444 см²/с. **204.** $\delta_S = 2\delta_a + \frac{\delta_B B\sin C}{\sin B\sin(B+C)} + \frac{\delta_C C\sin B}{\sin C\sin(B+C)}$. **205.** $d^2z = (12x^2+6y^2)dx^2 + 24xydxdy + (12y^2+6x^2)dy^2$. **206.** $d^2z = \frac{2xydx^2+(y^2-x^2)dxdy-2xydy^2}{(x^2+y^2)^2}$.

207. $d^2z = -2\left(\frac{xdx^2}{(1+x^2)^2}+\frac{ydy^2}{(1+y^2)^2}\right)$. **208.** $d^2z = \frac{2}{x^4}(3y^2dx^2 - 4xydxdy + x^2dy^2)$. **209.** $d^2z = -\frac{(ydx-xdy)^2}{xy^2}$. **210.** $d^2z = \frac{(ydx-xdy)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **211.** $d^2z = e^{xy}[y^2dx^2+2(1+xy)dxdy+x^2dy^2]$. **212.** $d^2z = \frac{(y^2-x^2)(dx^2-dy^2)-4xydxdy}{(x^2+y^2)^2}$.

213. $d^2z = \frac{5}{(x-y)^3}[2ydx^2-(x+y)yxdy+2xdy^2]$. **214.** $d^2z = -\frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}}\times(y^2dx^2-xydxdy+x^2dy)$. **215.** $d^2f(1,2) = 2dx^2-6dxdy+4dy^2$. **216.** $d^2z(0,1) =$

$= 2(dx-dy)dx$. **217.** 12, 2, 2, 12. **218.** $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}=24$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\partial y}=6$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}=4$; $\frac{\partial^4 z}{\partial x\partial y^3}=6$; $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}=24$. **219.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \sin y\cos(x+\cos y)$; **220.** $\frac{\partial^3 z}{\partial s\partial t^2} = ae^t[e^t\sin(as+e^t)-\cos(as+e^t)]$. **221.** −12. *Вказівка*. Попередньо скоротити дріб. **222.** 6. **223.** 0. **224.** $-6(\cos x+\cos y)$. **225.** 0. *Вказівка*. Попередньо знайти суму $\mathrm{arctg}\,x+\mathrm{arctg}\,y+\mathrm{arctg}\,z$. **226.** 0. *Вказівка*. Розкласти дріб на суму простих дробів. **227.** $n!\,m!$. **228.** $a^nb^me^{ax+by}$. **229.** $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \cos\left[\frac{n\pi}{2}+(x+y)\right] - \sin\left[\frac{n\pi}{2}+(x+y)\right]$. **232.** Для будь-яких a і b.

233. Для $a=0$. **234.** $a=-6$. **235.** $a=-b$. **249.** $\frac{dz}{dt} = 1+\sin 2t$. **250.** $\frac{dz}{dt} = 1-2\,\mathrm{tg}\,t$. **251.** $\frac{dz}{dt} = 2$. **252.** $\frac{dz}{dt} = \mathrm{th}\,t$. **253.** $\frac{dz}{dt} = e^{2x-3y}(2\sec^2 t - 6t + 3)$. **254.** $\frac{dz}{dt} = -6e^{6t}+3e^{-3t}\cos 2t+2e^{-3t}\sin 2t-2\sin 4t$. **255.** $\frac{dz}{dt} = \frac{3-12t^2}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}$. **256.** $\frac{dz}{dt} = (\ln t)^{\sin t}\left(\frac{\sin t}{t\ln t}+\ln\ln t\cdot\cos t\right)$.

257. $\frac{dz}{dt} = \frac{2e^{2t}}{e^{4t}+1}$. **258.** $\frac{dz}{dt} = \frac{t^2(\ln t+1)+\ln t-1}{te^t}$. **259.** $\frac{dz}{dt} = \frac{4}{\sin 2t}$.

260. $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t+3e^{t^3}t^2}{e^t+e^{t^3}}$. **261.** $\frac{dz}{dt} = \frac{e^t(t+1)}{1+t^2e^{2t}}$. **262.** $\frac{dz}{dt} = e^{at}\sin t$.

263. $\frac{dz}{dt} = \frac{2t(3t+2)}{(t^2+3t+1)^2}$. **265.** 0. **266.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uv^2(1+u)e^{2(u+v)}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 2u^2v(1+v)e^{2(u+v)}$. **267.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y+2e^{2(x+y)}$. $\frac{\partial z}{\partial y} = x+2e^{2(x+y)}$. **268.** $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2v^2}{u}\left(\frac{1}{u^2+v^2}-\frac{\ln(x^2+y^2)}{u^2}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{u^2}\left(\ln(u^2+v^2)+\frac{v^2}{u^2+v^2}\right)$.

269. $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2(v^4-1)}{v(v^4+1)}$. **270.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 2uf'_y(x,y) - \frac{2v}{(u+v)^2}f'_y\times(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2u}{(u+v)^2}f'_x(x,y) - 3f'_y(x,y)$. **271.** $\frac{\partial z}{\partial u} = ve^{uv}f'_x(x,y) + \frac{2u}{u^2+v^2}f'_y(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = ue^{uv}f'_x(x,y) + \frac{2v}{u^2+v^2}f'_y(x,y)$. **272.** $dz = [5x^4f'_v(u,v) - yf'_u(u,v)\sin xy]dx - [x\sin xy\, f'_u(u,v)] - 7f'_v(u,v)]dy$.

273. $dz = \frac{1}{y^2}\left[\cos\frac{x}{y}f'_u(u,v)+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}f'_v(u,v)\right](ydx-xdy)$. **274.** $dw = (f'_x+2uf'_y+vf'_z)du + (f'_x+2vf'_y+uf'_z)dv$. **275.** $dz = \frac{y^2dx+x^2dy}{(x+y)^2}\mathrm{arctg}(xy+x+y) + \frac{xy[(y+1)dx+(x+1)dy]}{(x+y)[1+(xy+x+y)^2]}$. **276.** $dz = \frac{e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}}{x^2y^2}[(y^4-x^4+2xy^3)\times xdy+(x^4-y^4+2x^3y)ydx]$. **277.** xyz. **278.** 1. **284.** а). $z'_x - z'_y = 0$;

б) $yz'_x - xz'_y = 0$. 285. $yz'_x - xz'_y = 0$. 286. $2xz'_x + yz'_y = 2z$. 287. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. 288. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. 289. $z = x\varphi(y) + \psi(y)$. 290. $z = \varphi(x) + \psi(y)$. 291. $u = f(x, y) + \varphi(x, z) + \psi(y, z)$. 292. $z = 1 + x^2y + y^2 - 2x^4$. 293. $z = 1 + xy + y^2$. 294. $z = x + y^2 + \frac{1}{2}xy(x + y)$. 295. $y_{1,2} = \cos x \pm 1$. 296. $y = \ln(2 - \sin x) - x^2$. 297. $y = \pm\sqrt{2x^2 \pm \sqrt{4x^2 - \sin x}}$. 298. $y = -\frac{x^2}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + \arcsin(1 - 3x)}$. 299. $y' = \frac{2xy + y^2}{3y^2 - x^2 - 2xy}$. 300. $y' = \frac{x^2y(4x + 3y)}{5y^4 - x^4 - 2x^3y}$. 301. $y' = \frac{ye^{xy} - ye^x - e^y}{xe^y + e^x - xe^{xy}}$. 302. $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 303. $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$. 304. $y' = \frac{2y}{x(y - 1)}$. 305. $y' = \frac{y\cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}$. 306. $y' = \frac{y^2 - 2x^2\ln y}{x^2 - 2y^2\ln x}$. 307. $y' = \frac{x + y}{x - y}$. 308. $y' = \frac{y^2(\ln x - 1)}{x^2(\ln y - 1)}$. 309. $\pm\frac{3}{4}$. 310. -1. 311. $y'' = \frac{2a^2}{(x - y)^3}$. 312. $y'' = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^3}$. 313. $y'' = -\frac{\varepsilon\sin y}{(1 - \varepsilon\cos y)^3}$. 314. $y' = \frac{y}{x}$; $y'' = 0$. 315. $z'_x = -\frac{c^2x}{a^2z}$; $z'_y = \frac{c^2y}{b^2z}$; 316. $z'_x = \frac{3x^2 - 2}{2 - 3z^2}$; $z'_y = \frac{3y^2 - 3}{2 - 3z^2}$. 317. $z'_x = -\frac{yz}{xy + z^2}$; $z'_y = -\frac{xz}{xy + z^2}$. 318. $z'_x = \frac{yz(\sin z - 1)}{\cos z + xy(1 - \sin z)}$; $z'_y = \frac{xz(\sin z - 1)}{\cos z + xy(1 - \sin z)}$. 319. $z'_x = 1$; $z'_y = \frac{1}{2}$. 320. $z'_x = z'_y = \frac{1}{2}$. 321. $dz = \frac{xdx + ydy}{1 - z}$. 322. $dz = \frac{yzdx + xzdy}{z^2 - xy}$. 323. $dz = \frac{yzdx + z^2dy}{y(x + z)}$. 324. $dz = \frac{zdx - z(1 + x^2z^2)\,dy}{y(1 + x^2z^2) - x}$. 325. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2 - x}{1 + z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{1 + z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2y(x - 2)}{(1 + z)^3}$. 326. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}$.

§ 3. 331. $2x - 4y - z + 6 = 0$; $\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-4} = \frac{z}{-1}$. 332. $2x + 2y - z - 6 = 0$; $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 3}{2} = \frac{z - 4}{-1}$. 333. $x + y - z - 1 = 0$; $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{-1}$. 334. $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$; $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - \pi/2}{2}$. 335. $x - y - 2z + 1 = 0$; $\frac{x - \pi/4}{1} = \frac{y - \pi/4}{-1} = \frac{z - 1/2}{-2}$. 336. $17x + 11y + 5z - 6 = 0$; $\frac{x - 3}{17} = \frac{y - 4}{11} = \frac{z + 7}{5}$. 337. $5x + 3y - 3z - 11 = 0$;

$\frac{x - 1}{5} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z + 1}{-3}$. 338. $12x + 4y - 3z - 21 = 0$; $\frac{x - 2}{12} = \frac{y}{4} = \frac{z + 3}{-3}$. 339. $5x + 4y + z - 28 = 0$; $\frac{x - 2}{5} = \frac{y - 3}{4} = \frac{z - 6}{1}$. 340. $x + y - 4z = 0$; $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z - 1}{-4}$. 343. $x - y - z = \pm 5$. 344. $x + y + z = \pm 4$. 345. $x + y + z = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 348. $\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ та $\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. 349. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$. 350. $\frac{9}{2}a^3$.

§ 3.2. 351. $-\frac{4}{21}$. 352. π. 353. 2. 354. 0. 355. 0. 356. $\frac{1}{25}$. 357. 0. 358. $-\frac{7\sqrt{3}}{9}$. 359. 2. 360. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 361. $-\sqrt{5}$. 362. $\frac{1}{3}$. 363. $\frac{3}{20}$. 364. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. 365. $\frac{6}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 366. $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos\alpha + \sin\alpha$; а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; в) $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$; $\alpha_2 = \frac{7\pi}{4}$. 367. $\frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab}$. 369. -12. 370. -6. 371. 4. 372. 6. 373. $\operatorname{grad} z = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}$, $\operatorname{grad} z|_M = 6\vec{i} + 8\vec{j}$; $|\operatorname{grad} z(M)| = 10$. 374. $|\operatorname{grad} z| = \frac{\sqrt{10}}{4}$; $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. 375. а) $\operatorname{grad} u(0) = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$; $|\operatorname{grad} u(0)| = 7$; $\cos\alpha = \frac{3}{7}$; $\cos\beta = -\frac{2}{7}$; $\cos\gamma = -\frac{6}{7}$. б) $\operatorname{grad} u(A) = 7\vec{i}$; $|\operatorname{grad} u(A)| = 7$; $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$; $\cos\gamma = 0$. $\operatorname{grad} u = 0$ у точці $M(-2; 1; 1)$. 376. На колі $x^2 + y^2 = 1$. 377. а) $z^2 = xy$; б) $x = y = z$. 378. $\frac{\pi}{2}$. 379. $\frac{\pi}{2}$. 380. $\cos\varphi = -\frac{8}{9}$. 381. $\frac{\pi}{4}$. 382. 0. 384. $\frac{1}{r^2}$. 385. $f(x, y) = 1 + y + \frac{1}{2!}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3!}(y^3 - 3x^2y) + 0(\rho^3)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 386. $f(x, y) = xy + \frac{1}{3!}(xy^3 - x^3y) + 0(\rho^4)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 387. $f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2 + 0(\rho)$, де $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 388. $z_{min}(1; 0) = -1$. 389. Екстремуму у точці $(3; -1)$ немає. 390. $z_{min}(-4; 1) = -2$. 391. $z_{max}(0; 0) = 10$. 392. $z_{max}(2; -2) = 8$. 393. Екстремуму у точці $(-1; 1)$ немає. 394. $z_{min}(3; 3) = 0$. У точці $(0; 0)$ екстремуму немає. 395. У точці $(0; 0)$ екстремуму немає. $z_{min}(a; a) = -a^3$, якщо $a > 0$, $z_{max}(a; a) = -a^3$, якщо $a < 0$. 396. $z_{min}\left(1; \frac{1}{2}\right) = 0$. У точці $(0; 0)$ екстремуму немає. 397. $z_{min}(-2; 0) = -\frac{2}{e}$. 398. $z_{min}(0, 0) = 0$. У точках $\left(-\frac{5}{3}; 0\right)$, $(1; 4)$, (1; —4) екстремуму немає. **399.** $z_{max}(0;\ 0)=1$. **400.** $z_{max}(0;\ 0)=2$. **401.** $z_{min}(-1;\ -1)=-2$; $z_{min}(1;\ 1)=-2$. У точці (0; 0) екстремуму немає. **402.** $z\left(\frac{2a}{3};\ \frac{2a}{3}\right)=\frac{a\sqrt{3}}{9}$. **403.** $z_{min}(1,\ -1)=-2$ та $z_{max}(1;\ -1)=6$. **404.** $z_{max}(-2;\ 1)=6$, $z_{min}(-2;\ 1)=-2$. **405.** Найбільше $z=4$ у точках (2; 0) та (—2; 0), найменше $z=-4$ у точках (0; 2) та (0; —2). **406.** $M=1$, $m=-1$. **407.** $M=16$, $m=-\frac{16}{3}$. **408.** $M=11$, $m=5$. **409.** $M=6$, $m=$ $=-1$. **410.** $M=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ у точці $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right)$, $m=0$ у точці (0; 0). **411.** $M=4$; $m=1$. **412.** $M=\frac{3}{2}$ у точці $\left(\frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right)$, $m=-3$ у точці $\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$. **413.** $M=1$, $m=-\frac{1}{8}$. **414.** $M=\frac{3}{e}$, $m=0$. **415.** $z_{min}=\frac{36}{13}$. **416.** $z_{min}\left(-\frac{3}{2};\ -\frac{3}{2}\right)=-\frac{19}{4}$. **417.** $z_{min}(1;\ 1)=2$. **418.** $z_{max}\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. **419.** $u_{min}(3;\ 3;\ 3)=9$. **420.** $\frac{a}{3}$. **421.** Рівнобедрений трикутник з катетами $\sqrt{2S}$. **422.** $\left(\frac{21}{13};\ 2;\ \frac{63}{26}\right)$. **423.** (3; —1,1). **426.** Точка є серединою основи. **427.** Рівнобедрений трикутник з площею h^2. **428.** Рівнобедрений трикутник. **429.** $\frac{p}{6-\sqrt{3}}$; $\frac{p(3-\sqrt{3})}{2(6-\sqrt{3})}$. **430.** Куб. **431.** Куб. **432.** Куб, ребро якого є a. **433.** Куб, ребро якого є $\frac{d}{\sqrt{3}}$. **434.** Рівнобедрений трикутник з бічною стороною $\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **435.** Рівносторонній трикутник. *Вказівка.* Див. № 424. **436.** Рівносторонній. **437.** Якщо R — радіус основи намету, H — висота циліндричної частини, h — висота конічної верхівки, то $R=\frac{h\sqrt{5}}{2}$, $H=\frac{h}{2}$. **438.** $L=B=\frac{2\sqrt{A}}{\sqrt[4]{3^3}}$; $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **439.** $\frac{7}{4\sqrt{2}}$. **440.** $\left(-\frac{5}{9};\ -\frac{1}{9}\right)$. **441.** (3; 5). **442.** Кожна сторона основи дорівнює $2a+\sqrt[3]{2V}$, висота — вдвічі менша. **443.** Точка перетину медіан. *Вказівка.* Нехай x, y, z — відстані шуканої точки відповідно від сторін з довжинами a, b, c трикутника, а S — площа трикутника. Рівняння зв'язку набере вигляду $ax+by+cz=2S$. Будуємо функцію Лагранжа: $F(x,\ y,\ z,\ \lambda)=xyz+$ $+\lambda(ax+by+cz-2S)$. Розв'язавши відповідну систему рівнянь, дістанемо: $x=\frac{2S}{3a}$, $y=\frac{2S}{3b}$, $z=\frac{2S}{3c}$. Засобами планіметрії легко показати, що шукана точка є точкою перетину медіан.

Глава 7

§ 1. 1. а) $x=1$, $y=-2$; б) $x=\frac{20}{17}$, $y=-\frac{36}{17}$, в) $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{1}{4}$; г) $x=-\frac{b}{a^2+b^2}$, $y=-\frac{a}{a^2+b^2}$. **2.** а) $\pm\frac{3}{2}i$; б) 1, -3, $-1\pm 2i$; в) $(-1+\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$, $(-1-\sqrt{2})\pm i\sqrt{2}$. **3.** а) $-\frac{4}{5}\pm\frac{2}{5}i$; б) $\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{3}}{4}i$. **4.** $2+i$, $1-3i$. **5.** $2+3i$, $1+4i$. **6.** $1+i$, $-\frac{1}{5}(6+3i)$. **7.** а) ± 2, $\pm 3i$; б) $\pm(1+i)$, $\pm\sqrt[4]{2}\ \cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\Big)$. **8.** а) $\cos 0+i\sin 0$; б) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; в) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **9.** а) $2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\right.$ $\left.+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$; б) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; в) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; г) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$. **10.** а) $\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$; б) $\cos(\pi-\varphi)+$ $+i\sin(\pi-\varphi)$; в) $\cos(\pi+\varphi)+i\sin(\pi+\varphi)$; г) $2\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{14}+i\sin\frac{\pi}{14}\right)$. **11.** а) $6+11i$; б) $11+3i$; в) $-4i$; г) $-29+22i$. **12.** а) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$; б) $\frac{5}{17}-$ $-\frac{3}{17}i$; в) $\frac{14}{5}i$. **13.** а) $-\frac{13}{4}+\frac{25}{4}i$; б) $\frac{9}{25}(4+3i)$. **14.** а) $-i$; б) -1728; в) $2^9(1-\sqrt{3}i)$. **15.** а) $-2^{19}(1-i\sqrt{3})$; б) 0. **16.** а) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\right.$ $\left.+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)$; $k=0,\ 1,\ 2$; в) ± 1, $\pm i$; г) $\sqrt{3}\times$ $\times\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$. **17.** а) $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$, $\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{8}+i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$; б) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i\sqrt{3})$; в) $\pm(2+i)$. *Вказівка.* $3+4i=(2+i)^2$. **18.** а) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(8k+3)\pi}{12}+i\sin\frac{(8k+3)\pi}{12}\right]$, $k=$ $=0,\ 1,\ 2$; б) $\sqrt{2}\left[\cos\frac{(12k+1)\pi}{24}+i\sin\frac{(12k+1)\pi}{24}\right]$, $k=0,\ 2,\ 3$; в) $\sqrt[10]{2}\times$ $\times\left[\cos\frac{(12k+1)\pi}{30}+i\sin\frac{(12k+1)\pi}{30}\right]$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **19.** а) $\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\times$ $\times\left[\cos\frac{(24k+19)\pi}{72}+i\sin\frac{(24k+19)\pi}{72}\right]$, $k=0,\ 1,\ \ldots,\ 5$; б) $2\sqrt[5]{2}\times$ $\times\left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{6}+i\sin\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$. **20.** а) $\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\times$

$\times\left[\cos\frac{24k+5}{96}\pi+i\sin\frac{24k+5}{96}\pi\right]$, $k=0, 1, \ldots, 7$; б) $\sqrt[14]{2+\sqrt{3}}\times$ $\times\left[\cos\frac{(24k-1)\pi}{84}+i\sin\frac{(24k-1)\pi}{84}\right]$, $k=0, 1, \ldots, 6$. *Вказівка.* $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\cos\frac{\pi}{12}$. 25. $\frac{3}{4}$. *Вказівка.* Константа дорівнює значенню функції при $x=0$. 26. π. 27. x^3+3x^2+8x+C. 28. $4\sqrt{x}+3\ln|x|-\frac{5}{x}+C$. 29. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+x+C$. 30. $\frac{3}{13}x^4\sqrt[3]{x}-\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x}+C$. 31. $\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}+C$. 32. $2\sqrt{ax}+2x+\frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+C$. 33. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}x\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}+C$. 34. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C$. 35. $\frac{5^xe^x}{\ln 5+1}+C$. 36. $3x-\frac{2(1,5)^x}{\ln(1,5)}+C$. 37. $x-\sin x+C$. 38. $x+2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+5\operatorname{ctg}x+C$. 39. $\operatorname{tg}x-x+C$. 40. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. 41. $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. 42. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C$. 43. $-\operatorname{ctg}x+C$.

44. $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}x+x)+C$. 45. $\frac{(x+9)^{14}}{14}+C$. 46. $-\frac{1}{18(3x-2)^6}+C$.

47. $-\frac{1}{3}\sqrt{(3-2x)^3}+C$. 48. $-\frac{5}{27}\sqrt[5]{(7-3x)^9}+C$. 49. $-\frac{1}{16}(1-x^2)^8+C$.

50. $\frac{1}{15}(5x^3+2)^{3/2}+C$. 51. $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$. 52. $\frac{1}{5}\sqrt{3+2x^5}+C$.

53. $\sqrt{3x^2-5x+6}+C$. 54. $\frac{3^{2x}}{2\ln 3}+C$. 55. $-\frac{2}{3}e^{-3x}+C$. 56. $-\frac{1}{3}e^{2-x^3}+C$. 57. $-e^{\frac{1}{x}}+C$. 58. $\frac{1}{2}\sin(2x-3)+C$. 59. $\frac{1}{5}\cos(4-5x)+C$.

60. $-\cos(e^x)+C$. 61. $-e^{\cos x}+C$. 62. $\frac{1}{6}\sin^6x+C$. 63. $\sin(\ln x)+C$.

64. $2\sin(\sqrt{x})+C$. 65. $3\sqrt[3]{\sin x}+C$. 66. $-\frac{2}{5}\cos^5x+C$. 67. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+C$. 68. $\frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5x}+C$. 69. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\ln^4x}+C$. 70. $-\frac{1}{2\ln^2x}+C$. 71. $\frac{1}{3\arccos 3x}+C$. 72. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\operatorname{tg}x)^2}+C$. 73. $\ln(1+e^x)+C$. 74. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{e^x}{5}+C$.

75. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}-2\sqrt{\ln x}+C$. 76. $-\ln(1+\cos^2x)+C$. 77. $\frac{1}{3}\arcsin 3x+C$.

78. $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}5x+C$. 79. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{5}+C$. 80. $\frac{1}{15}\operatorname{arctg}\frac{3x}{5}+C$.

81. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2}+C$. 82. $\frac{1}{9}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{3}+C$. 83. $-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}(\cos t)+C$.

84. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{3}+C$. 85. $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{4}+C$. 86. $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C$.

87. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$. 88. $\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$.

89. $3\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. 90. $-e^{\arccos x}-\sqrt{1-x^2}+2\arcsin x+C$. 91. $-\frac{2}{9}\sqrt{(5-3\operatorname{sh}x)^3}+C$. 92. $-\frac{2}{9}\sqrt{1-9\ln x}+C$.

93. $\frac{1}{3}\arcsin(3\ln x)+C$. 94. $\arcsin\left(\frac{\operatorname{tg}x}{5}\right)+C$. 95. $-2\sqrt{\cos^2x+4}+C$.

96. $-\ln(\cos^2x+\sqrt{\cos^2x+4})+C$. 97. $-2\sqrt{1-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}+C$.

98. $-\frac{1}{9}[\sqrt{1-9x^2}+(\arccos 3x)^3]+C$. 99. $-\ln|\sin x+\cos x|+C$.

100. $\frac{2}{3}[x^3-\sqrt{(x^2-1)^3}]-x+C$. 101. $2\sqrt{x}-2\sqrt{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{3}}+C$.

102. $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x})+C$. 103. $2[\sqrt{x+2}-3\ln(3+\sqrt{x+2})]+C$. 104. $\frac{2\sqrt{x-1}}{35}(5x^3+6x^2+8x+16)+C$

105. $\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$. 106. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C$.

107. $x+4\sqrt{1+x}+4\ln(\sqrt{1+x}-1)+C$. 108. $2\left[\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}-\frac{x+1}{2}+2\sqrt{x+1}-2\ln(\sqrt{x+1}+1)\right]+C$. 109. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+5)^2}-3\sqrt[3]{x+5}+3\ln(\sqrt[3]{x+5}+1)+C$. 110. $3\sqrt[3]{x}+3\ln|\sqrt[3]{x}-1|+C$. 111. $x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln|\sqrt[6]{x}-1|+C$. 112. $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+C$. 113. $-\frac{1}{7}\ln(1+7e^{-x})+C$. Підстановка $1+7e^{-x}=t$.

114. $e^x-5\ln(e^x+5)+C$. 115. $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\frac{\sqrt{3+e^x}-\sqrt{3}}{\sqrt{3+e^x}+\sqrt{3}}+C$.

116. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{e^x}{9}-1}+C$. 117. $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$.

118. $-2\sqrt{1-e^x}+\frac{2}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+C$. 119. $\frac{4}{21}(3e^x-4)\times\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$. 120. $0,4\sqrt{(1+\cos^2x)^3}\cdot(3-2\cos^2x)+C$. 121. $\sqrt{2x-1}+$

$+\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1}+3\sqrt[6]{2x-1}+3\ln|\sqrt[6]{2x-1}-1|+C.$ 122. $3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}+6\ln|\sqrt[6]{x+1}-1|+C.$ 123. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C.$ 124. $\frac{1}{5}x\sin 5x+\frac{1}{25}\cos 5x+C.$ 125. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$ 126. $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+C.$ 127. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$ 128. $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x+C.$ 129. $\frac{x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+C.$ 130. $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|+C.$ 131. $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+C.$ 132. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C.$ 133. $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C.$ 134. $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C.$ 135. $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$ 136. $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C.$ 137. $xe^x-e^x+C.$ 138. $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C.$ 139. $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)+C.$ 140. $-3e^{-\frac{x}{3}}(x^3+9x^2+54x+162)+C.$ 141. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C.$ 142. $-\frac{1}{2x^2}\lg(x\sqrt{e})+C.$ 143. $(x+1)\times\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$ 144. $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$ 145. $x(\arcsin x)^2+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C.$ 146. $2\sqrt{x}-2\sqrt{1-x}\cdot\arcsin\sqrt{x}+C.$ 147. $\sqrt{1+x^2}\times\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$ 148. $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C.$ 149. $x\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})+\frac{1}{2}(\arcsin x-x)+C.$ 150. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$ 151. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$ 152. $-\frac{e^{2x}}{13}(\sin 3x+5\cos 3x)+C.$ 153. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$ *Розв'язання.*

$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}},\quad \int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=\frac{xdx}{\sqrt{a^2+x^2}}, & v=\sqrt{a^2+x^2}\end{matrix}\right|=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+a^2}\,dx.$ Тоді $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=a^2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx.$ Отже, $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.$ 154. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C.$ 155. $\frac{e^x}{1+x}+C.$ *Вказівка.* $u=xe^x,\quad dv=\frac{dx}{(1+x)^2}.$

156. $\frac{1}{3}(x^3+1)\ln(1+x)-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x+C.$ 157. $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+C.$ *Вказівка.* $u=x^2,\ dv=xe^{-x^2}dx.$ 158. $\frac{1}{2}x\operatorname{tg}2x+\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|-\frac{1}{2}x^2+C.$ 159. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C.$ *Вказівка.* $u=x,\quad dv=\frac{xdx}{(1+x^2)^2}.$ 160. $x^2\sqrt{1+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C.$ 161. $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+C.$ 162. $\frac{x-2}{x+2}e^x+C.$ *Вказівка.* $u=x^2e^x,\ dv=\frac{dx}{(x+2)^2}.$ 163. $\ln x\,[\ln(\ln x)-1]+C.$ 164. $\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$ *Розв'язання.* $\int\sin(\ln x)\,dx=|t=\ln x,\ dx=e^tdt|=\int\sin te^tdt,\quad \int\sin te^tdt=\left|\begin{matrix}u=\sin t, & du=\cos tdt\\ dv=e^tdt, & v=e^t\end{matrix}\right|=e^t\sin t-\int\cos te^tdt=\left|\begin{matrix}u=\cos t, & du=-\sin tdt\\ dv=e^tdt, & v=e^t\end{matrix}\right|=e^t\sin t-e^t\cos t-\int\sin te^tdt.$ Тоді $\int\sin te^tdt=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C,$ отже, $\int\sin(\ln x)\,dx=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C.$ 165. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{10}[x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)]+C.$ 166. $\frac{1}{2}(x-\sqrt{1-x^2})e^{\arccos x}+C.$ 167. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1}{x+5}\right|+C.$ 168. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-8}{x}\right|+C.$ 169. $3\sqrt{x^2-4x+5}+C.$ 170. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-2}\right|+C.$ 171. $\frac{1}{2\ln 5}\ln\left|\frac{5^x-3}{5^x-1}\right|+C.$ *Вказівка.* $5^{2x}-4\cdot 5^x+3=(5^x-2)^2-1,\ 5^xdx=\frac{d(5^x-2)}{\ln 5}.$ 172. $\frac{1}{\sqrt{6}}\times\operatorname{arctg}\frac{2(x-1)}{\sqrt{6}}+C.$ 173. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{3}+C.$ 174. $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2+3}{4}+C.$ 175. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}+C.$ 176. $\arcsin\frac{x-5}{5}+C.$ 177. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$ 178. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C.$ 179. $-\ln|1-x+\sqrt{17-2x+x^2}|+C.$ 180. $\frac{1}{3}\ln|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}|+C.$ 181. $\ln\left(e^x+\frac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)+C.$ 182. $-\ln(\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1})+C.$ 183. $\frac{1}{2}\ln|x^2-5x+4|+\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x-1}\right|+C.$ 184. $\frac{1}{2}\ln(x^2-3x+3)+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{3}}+C.$ 185. $2\ln(x^2-2x+6)+\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{5}}+C.$ 186. $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5)+4\operatorname{arctg}(x-2)+C.$ 187. $-\sqrt{2-x-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x+1}{3}+C.$

188. $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$ 189. $-\sqrt{3-2x-x^2}-4\arcsin\frac{x+1}{2}+C.$ 190. $\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$
191. $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}|+C.$
192. $\frac{61}{16}\ln|8x+9+4\sqrt{4x^2+5x+1}|-\frac{5}{4}\sqrt{4x^2+9x+1}+C.$
193. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$ 194. $\ln\frac{x^2-1}{x}+C.$ 195. $\ln\left|\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}\right|+C.$
196. $\frac{x^2}{2}+2\ln(x^2-4)+C.$ 197. $\ln\frac{\sqrt{(x+1)(x-3)^5}}{(x-2)^2}+C.$ 198. $-\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{7}{2}\ln|x-2|+\frac{17}{3}\ln|x-3|+C.$ 199. $x-\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{3}{4}\ln|x+2|+\frac{5}{4}\ln|x-2|+C.$ 200. $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C.$ 201. $5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C.$ 202. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+C.$ 203. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$ 204. $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$ 205. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$ 206. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$ 207. $-\frac{4}{3(x-1)}+\frac{20}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C.$
208. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}+C.$ 209. $\frac{x^2}{2}-\frac{11}{(x-2)^2}-\frac{8}{x-2}+C.$
210. $\ln\left|\frac{x^4}{(x-1)^3}\right|-\frac{9}{x-1}+C.$ 211. $-\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$
212. $\frac{8}{49(x-5)}-\frac{27}{49(x+2)}+\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|+C.$ 213. $\frac{4}{x+2}+\ln|x+1|+C.$ 214. $-\frac{1}{3(x-2)^3}+\frac{1}{2(x-2)^2}+\ln|x-2|+C.$ 215. $x+\frac{1}{x}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.$ 216. $\frac{1}{8}x-\ln|x+1|-\frac{9x^2+12x+5}{3(x+1)^3}+C.$
217. $\frac{(x+2)^2}{2}-\frac{1}{4(x-1)^2}-\frac{9}{4(x-1)}+\frac{31}{8}\ln|x-1|+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C.$
218. $-\frac{x}{(x^2-1)^2}+C.$ 219. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2}+C.$ 220. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ 221. $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}-\frac{1}{x+1}+\operatorname{arctg}x+C.$ 222. $\frac{1}{4}\left[\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x-1|}+\operatorname{arctg}x-\frac{7}{(x-1)^2}\right]+C.$ 223. $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{\sqrt{3}}{12}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C.$
224. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ 225. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\operatorname{arctg}x+C.$ 226. $\ln\frac{\sqrt{(x^2-2x+5)^3}}{|x-1|}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C.$ 227. $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\operatorname{arctg}x+C.$ 228. $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$ 229. $\frac{x^2}{2}-2x-\frac{2}{x}+2\ln(x^2+2x+2)-2\operatorname{arctg}(x+1)+C.$
230. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C.$ *Вказівка.* $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2.$
231. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+C.$ 232. $\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ 233. $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$
234. $\frac{x-1}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+C.$ 235. $-\frac{3x^2+2}{2x(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x+C.$
236. $\frac{1}{16}\ln|x|+\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$
237. $\frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)}+\frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}+C.$ 238. $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C.$ 239. $\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$ 240. $\frac{x}{4(x^2+2x+2)^2}+\frac{3(x+1)}{8(x^2+2x+2)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x+1)+C.$
241. $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3}+\frac{15}{48}\operatorname{arctg}x+C.$ 242. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\operatorname{arctg}\sqrt[6]{27x}\right)+C.$ 243. $\ln\frac{x}{(1+\sqrt[10]{x})^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C.$ 244. $\frac{6}{5}[\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln(\sqrt[12]{x^5}-1)]+C.$ 245. $\frac{3}{7}\sqrt{(2x-3)^7}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x-3)^5}+\sqrt{2x-3}-3\sqrt[6]{2x-3}+3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{2x-3}+C.$ 246. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}\times(x-2)+\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C.$ 247. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$ 248. $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C.$
249. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right|-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$ 250. $\frac{3}{16}\sqrt{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C.$ 251. $3\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}-\frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}+C.$ 252. $\frac{x^2+1}{2\sqrt{1+2x^2}}+$

$+ C.$ **253.** $3\left[\ln \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2}\right] + C.$ **254.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5} + C.$ **255.** $\frac{1}{10}\sqrt{(x^4+1)^5} - \frac{1}{6}\sqrt{(x^4+1)^3} + C.$ **256.** $\frac{1}{4} \times \ln \frac{\sqrt{1-x^4}+1}{x^2} - \frac{1}{4}\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^4} + C.$ **257.** $\frac{1}{4}\ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.$ **258.** $\frac{1}{3}\ln \frac{\sqrt[4]{x^3+1}-1}{\sqrt[4]{x^3+1}+1} + \frac{2}{3}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^3+1} + C.$

259. $\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{x^2+1} + C.$ **260.** $\frac{1}{4}x^2\sqrt{x^4+1} + \frac{1}{4}\ln(x^2+\sqrt{x^4+1}) + C.$

261. $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{2/3}} + C.$ **262.** $-2\sqrt[3]{(x^{-\frac{3}{4}}+1)^2} + C.$ **263.** $\frac{1}{15} \times \cos^3 x(3\cos^2 x - 5) + C.$ **264.** $-\frac{\cos^4 x}{4} + C.$ **265.** $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

266. $\sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$ **267.** $\frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C.$

268. $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x| + C.$ **269.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C.$

270. $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x} + \frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x} + \frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$ *Розв'язання.*

$$\int \frac{dx}{\cos^5 4x} = \int \frac{\cos 4x\,dx}{(1-\sin^2 4x)^3} = |t = \sin 4x| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)^3} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^3} = \left|\begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = \frac{t\,dt}{(1-t^2)^3}, & v = \frac{1}{4(1-t^2)^2}\end{matrix}\right| = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} + \frac{t}{16(1-t^2)^2} - \frac{1}{16}\int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{t}{16(1-t^2)^2} + \frac{3}{16}\int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{3}{16} \times \int \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = \left|\begin{matrix} u = t, & du = dt \\ dv = \frac{t\,dt}{(1-t^2)^2}, & v = \frac{1}{2(1-t^2)}\end{matrix}\right| = \frac{t}{16(1-t^2)^2} + \frac{3}{16} \times \int \frac{dt}{1-t^2} + \frac{3t}{32(1-t^2)} - \frac{3}{32}\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x} + \frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x} + \frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

271. $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2} + C.$ **272.** $\frac{1}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$ **273.** $\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$ **274.** $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$ **275.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{16}\sin 2x + C.$ **276.** $\frac{1}{3} \times$

$\times \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$ **277.** $-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C.$ **278.** $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{ctg} x + C.$ **279.** $-8\operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x + C.$ **280.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C.$ **281.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x + C.$ **282.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x| + C.$

283. $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$ **284.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$

285. $x - \frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C.$ **286.** $-\frac{5}{8}\sqrt[5]{\cos^8 x} + \frac{5}{9}\sqrt[5]{\cos^{18} x} - \frac{5}{28}\sqrt[5]{\cos^{28} x} + C.$ **287.** $\frac{2}{3}\sqrt{\sin^3 x} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7 x} + C.$

288. $\frac{2}{5}\operatorname{tg}^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$ **289.** $3\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{3}} + C.$ **290.** $x + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2} - 2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C.$ **291.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$ **292.** $\frac{1}{\cos x - 1} + C.$ **293.** $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{ctg}^3\frac{x}{2} + C.$ **294.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{x}{2}\right)\right| + C.$

295. $-\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C.$ **296.** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3} + C.$ **297.** $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \ln\left|\frac{\sqrt{5}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$ **298.** $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$ **299.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right) + C.$

300. $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right| + C.$ **301.** $\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C.$ **302.** $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

303. $-x + 2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right| + C.$ **304.** $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x| + C.$

305. $\frac{1}{2}[x + \ln|\sin x + \cos x|] + C.$ **306.** $\ln|\sin x - \cos x| + C.$ **307.** $\frac{1}{4\sqrt{7}} \times \ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x - \sqrt{7}}{2\operatorname{tg} x + \sqrt{7}}\right| + C.$ **308.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg} x) + C.$ **309.** $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x - 1}{2}\right) + C.$ **310.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x} + C.$ **311.** $\frac{1}{18}\sin 9x + \frac{1}{2}\sin x + C.$ **312.** $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$ **313.** $-\frac{1}{16}\cos 8x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$ **314.** $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{20} \times$

$\times \sin 5x + \frac{1}{28}\sin 7x + C$. 315. $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x + C$. 316. $\frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{1}{28}\sin 7x + \frac{1}{36}\sin 9x + C$. 317. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C$. 318. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{1 + 2\,\mathrm{tg}^2 x}) + C$. 319. $-\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x) + C$. 320. $\ln\frac{|\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x} - 1|}{\sqrt[6]{\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x + 1}} - \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,x} + 1}{\sqrt{3}} + C$. 321. $\frac{1}{12}\,\mathrm{sh}\,6x - \frac{1}{2}x + C$. 322. $\frac{1}{20}\,\mathrm{sh}\,10x + \frac{1}{2}x + C$. 323. $\frac{1}{6}\,\mathrm{ch}^3 2x - \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}\,2x + C$. 324. $\mathrm{sh}\,x + \frac{1}{3}\,\mathrm{sh}^3 x + C$. 325. $\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}^3 x + \frac{1}{5}\,\mathrm{sh}^5 x + C$. 326. $-\frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4x + C$. 327. $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{sh}\,2x + \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4x + C$. 328. $-2\,\mathrm{cth}\,2x + C$. 329. $\mathrm{arctg}\,(\mathrm{th}\,x) + C$. 330. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\mathrm{th}\,x - 3}{\mathrm{th}\,x + 3}\right| + C$. 331. $\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,(\mathrm{sh}\,3x) + C$. 332. $-\frac{1}{\mathrm{sh}\,x} - \mathrm{cth}\,x + C$. 333. $x - \frac{1}{5}\,\mathrm{th}\,5x + C$. 334. $x - \frac{1}{3}\,\mathrm{cth}\,3x + C$. 335. $\ln|\mathrm{sh}\,x| - \frac{\mathrm{cth}^2 x}{2} + C$. 336. $x - \mathrm{th}\,x - \frac{1}{3}\,\mathrm{th}^3 x + C$. 337. $\frac{1}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\,\mathrm{th}^3\frac{x}{2} + C$. 338. $x\,\mathrm{th}\,x - \ln\mathrm{ch}\,x + C$. 339. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,x + \sqrt{\mathrm{ch}\,2x}) + C$. 340. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{\mathrm{th}\,x}}{1 - \sqrt{\mathrm{th}\,x}}\right| - \mathrm{arctg}\,\sqrt{\mathrm{th}\,x} + C$. *Розв'язання.* $\int\sqrt{\mathrm{th}\,x}\,dx = \left|t = \sqrt{\mathrm{th}\,x},\ dt = \frac{1 - \mathrm{th}^2 x}{2\sqrt{\mathrm{th}\,x}}dx,\ dx = \frac{2t\,dt}{1 - t^4}\right| = \int\frac{2t^2 dt}{1 - t^4} = \int\frac{dt}{1 - t^2} - \int\frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + \sqrt{\mathrm{th}\,x}}{1 - \sqrt{\mathrm{th}\,x}}\right| - \mathrm{arctg}\,\sqrt{\mathrm{th}\,x} + C$. 341. $\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$. 342. $-\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} - \arcsin x + C$. 343. $-\frac{\sqrt{(9 - x^2)^5}}{45x^5} + C$. 344. $\frac{x}{4}\times(x^2 - 2)\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$. 345. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1 - x^2}} + C$. 346. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{2}}\right| + C$. 347. $-\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C$. 348. $-\frac{\sqrt{(1 + x^2)^3}}{3x^3} + C$. 349. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} + C$. 350. $\ln\frac{|x|}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} + C$. 351. $\frac{x}{2}\sqrt{9 + x^2} - \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{9 + x^2}) + C$. 352. $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{3} - a^2\sqrt{a^2 - x^2} + C$. 353. $-\frac{1}{a}\times\arcsin\frac{a}{x} + C$. 354. $\frac{x}{9\sqrt{x^2 + 9}} + C$. 355. $\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{9x} + C$. 356. $-\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}} +$

$+ C$. 357. $\sqrt{x^2 - 1} - \arccos\frac{1}{x} + C$. 358. $\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C$. 359. $\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + C$. 360. $\frac{x - 2}{2}\sqrt{4x - x^2} + 2\arcsin\frac{x - 2}{2} + C$.

Розв'язання. $\int\sqrt{4x - x^2}\,dx = \int\sqrt{4 - (x - 2)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x - 2 = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt\end{matrix}\right| = 4\int\cos^2 t\,dt = 2\left(\int dt + \int\cos 2t\,dt\right) = 2t + \sin 2t + C = 2t + 2\sin t\cos t + C = 2\arcsin\frac{x - 2}{2} + \frac{x - 2}{2}\sqrt{4x - x^2} + C$. 361. $\frac{x - 3}{2}\sqrt{x^2 - 6x - 7} - 3\ln|x - 3 + \sqrt{x^2 - 6x - 7}| + C$. 362. $\frac{x - 1}{4\sqrt{x^2 - 2x + 5}} + C$. 363. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\times\ln\left|\frac{3 + 3x + 2\sqrt{3(x^2 + x + 1)}}{x - 1}\right| + C$. 364. $\frac{1 - \sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + \ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}) + C$. 365. $x\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 5\ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C$. 366. $\frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x} + C$. 367. $2\ln|x - \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2}\ln|2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2(2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1})} + C$. 368. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\times\left|\frac{\sqrt{2 + x - x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + C$. 369. $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2 - x + 3} - \sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right| + C$. 370. $\ln\left|\frac{2 + x - 2\sqrt{1 + x + x^2}}{x^2}\right| + C$. 371. $\mathrm{arctg}\,(2\sin^2 x - 1) + C$. 372. $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4 - x^2} - 2}{x}\right| - \frac{1}{8\sqrt{3}}\arcsin\frac{2(x + 1)}{x + 4} + C$. *Вказівка.* $\frac{1}{x^2 + 4x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 4}\right)$. 373. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\mathrm{tg}^2 x + \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x + 1}{\mathrm{tg}^2 x - \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x + 1} + C$. 374. $2\sqrt{e^x - 1} - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{e^x - 1}}{2} + C$. 375. $\frac{1}{15}\,\mathrm{arctg}\,\frac{5x}{3\sqrt{16 - x^2}} + C$. 376. $-\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} + C$. 377. $x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + C$. 378. $\arcsin\left(\frac{\sec x}{\sqrt{5}}\right) + C$. 379. $\ln\left|\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}\right| - \frac{\arcsin x}{x} + C$. 380. $3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 2) + C$. 381. $\frac{1}{2}x^2\ln(1 + x^3) - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}\ln(x^2 - x + 1) - \frac{1}{2}\ln(x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C$. 382. $\mathrm{arctg}\,\sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} + C$. 383. $\ln|1 + \mathrm{ctg}\,x| - \mathrm{ctg}\,x + C$. 384. $\frac{e^{-x}}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\ln|e^x - 2| + C$. 385. $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right| - \frac{\mathrm{arctg}\,x}{x} + C$. 386. $\frac{1}{4}\left(x^4\arcsin\frac{1}{x} + \frac{x^2 + 2}{3}\sqrt{x^2 - 1}\right) + C$. 387. $\frac{1}{2}\sqrt{x - x^2} +$

$+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}+C$. 388. $\frac{1}{3}x^3\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}+C$. 389. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. Використати підстановку $t=x+\frac{1}{x}$. 390. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}x}{x^2-1}\right|+C$. 391. $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+C$. 392. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+C$. 393. $\frac{1}{6}\ln\frac{1+x^2}{x^2}-\frac{\operatorname{arctg}x}{3x^3}-\frac{1}{6x^2}+C$. 394. $\frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x-\frac{\operatorname{arctg}x}{2(1+x^2)}+C$. 395. $x-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{1+2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}+C$. 396. $-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{ctg}2x)+C$. 397. $\frac{1}{2}e^{\arcsin x}(x+\sqrt{1-x^2})+C$. 398. $x-e^{-x}\arcsin(e^x)-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+C$. 399. $\frac{1}{2}(\arcsin x)^2-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\arcsin x+\ln|x|+C$. 400. $x-\ln(1+e^x)-2\frac{\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}}-(\operatorname{arctg}e^{\frac{x}{2}})^2+C$.

§ 2. 401. 27,5. 402. 3. 403. e^3-e^2. 404. $\frac{2}{\ln 3}$. 405. 1. Скористатись формулою $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 406. $\frac{1-\cos\alpha\pi}{\alpha}$. Скористатись формулою $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$.

407. $\frac{14}{3}$. 408. $\ln 2$. 409. $a\ln a-a+1$. 410. $\frac{(\ln b)^2-(\ln a)^2}{2}$. *Вказівка.* Вираз $q+2q^2+\cdots+nq^n$ знаходимо за допомогою диференціювання суми членів геометричної прогресії. 411. $\ln 2$. 412. $-\frac{15}{4}$. 413. $\frac{9}{2}$. 414. 25. 415. $\frac{19}{15}$. 416. $3\frac{57}{64}$. 417. $\frac{45}{4}$. 418. $\frac{7}{72}$. 419. $-5(\sqrt[5]{16}-1)$. 420. $\frac{8}{\ln 3}$. 421. $\frac{1}{5}(e-1)^5$. 422. $\sqrt{e}-\sqrt[3]{e}$. 423. $\frac{1}{3}\ln 10$. 424. $\frac{3}{2}$. 425. $\ln 2$. 426. 2. 427. $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$. 428. $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. 429. $\frac{\pi}{2}$. 430. $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

431. $\frac{2}{3}\ln 2$. 432. 2. 433. $\sin 1$. 434. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. 435. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 436. $\operatorname{arctg}e-\frac{\pi}{4}$. 437. $\frac{1}{2}(e-\sqrt[4]{e})$. 438. $\frac{\pi}{4}$. 439. $\frac{4}{3}$. 440. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 441. $\frac{\pi}{4}$. 442. $7+2\ln 2$. 443. $\frac{1}{6}$. 444. $2\left(\ln 2-\frac{1}{4}\right)$. 445. $3\ln 2-\frac{3}{2}$. 446. $\frac{\pi}{6}$. 447. $4-\pi$. 448. $\frac{2}{5}$. 449. $\ln\frac{2}{3}$. 450. $-0{,}083$.

451. $\frac{2}{3}+\frac{\pi}{4}-\alpha+\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha}{3}-\operatorname{ctg}\alpha$. 452. $\frac{\pi}{2}$. 453. $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. 454. $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$. 455. $\frac{\sqrt{2}}{4}[\pi+2\ln(\sqrt{2}-1)]$. 456. $1-\frac{\pi}{4}$. 457. $\frac{81}{16}\pi$. 458. $\frac{3\pi}{16}$. 459. $\frac{\pi}{3}$. 460. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 461. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 462. $\frac{\sqrt{3}}{24}$. 463. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 464. $\frac{\pi}{6}$. 465. $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}-\pi)$. 466. $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$. 467. $\frac{\pi}{4}$. 468. π. 469. $\frac{\pi a^2}{8}$. 470. $1-\frac{2}{e}$. 471. $\frac{2e^3+1}{9}$. 472. 1. 473. $e-2$. 474. $2-\frac{3}{4\ln 2}$. 475. $\frac{e^3}{9}(5e^3-2)$. 476. $1-\frac{2}{e}$. 477. 4. 478. $\frac{\pi^2-8}{32}$. 479. $\frac{1}{18}(5\pi\sqrt{3}-9\ln 3)$. 480. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 481. π. 482. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln 2$. 483. $\frac{\pi}{8}$. 484. $\pi\sqrt{2}-4$. 485. $\frac{\pi}{9}-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 486. $\frac{4}{25}(e^{\frac{3\pi}{4}}+1)$. 487. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$. 488. $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$. 489. $\frac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$. 490. $I_4=24-\frac{65}{e}$. 491. $I_5=120-44e$. 492. $\frac{20}{9}$. 493. $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$. 494. $2\ln 2-1$. 495. $\frac{1}{2}$. 496. $\frac{4}{3\pi}$. 497. $\frac{2}{\pi}I_0\cos\varphi$. 498. $\frac{2}{9}<I<\frac{2}{7}$. 499. $2\sqrt{7}<I<6$. 500. $\frac{1}{\ln 2}<I<\frac{0{,}75}{\ln(1{,}5)}$. 501. $\frac{2}{13}\pi<I<\frac{2}{7}\pi$. 502. $1<I<\frac{\pi}{2}$. 503. $0<I<\frac{\pi^2}{32}$. 504. $\frac{\sin x}{x}$. 505. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. 506. x. 507. $-4x\ln x$. 508. $2\ln^2 2x-\ln^2 x$. 509. $\frac{\sin x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x^2}$. 510. $y_{\min}=-\frac{17}{12}$ при $x=1$. 511. $\ln 2$. 512. Розбіжний. 513. $\frac{1}{3}$. 514. $1+\ln 2$. 515. $\frac{\pi}{4}$. 516. $\frac{1}{k}$. 517. $\frac{1}{2}$. 518. Розбіжний. 519. Розбіжний. 520. $\frac{1}{2}$. 521. $\frac{\pi^2}{8}$. 522. Розбіжний.

523. $\frac{1}{a^2}$. 524. 1. 525. $\frac{1}{2}$. 526. 2. 527. $\frac{1}{2}$. 528. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. 529. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 530. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$. 531. $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$. 532. $\frac{a^2}{a^2+b^2}$, якщо $a>0$, розбіжний, якщо $a\leqslant 0$. 533. Збіжний. 534. Розбіжний. 535. Збіжний. 536. Розбіжний. 537. Збіжний. 538. Розбіжний. 539. Розбіжний. 540. Розбіжний. 541. Розбіжний. 542. $\frac{5}{2}(\sqrt[5]{3}+1)$. 543. Розбіжний. 544. $\frac{8}{3}$. 545. Розбіжний. 546. $2\sqrt{2}$. 547. $2(\ln 2-1)$. 548. Розбіжний. 549. 2. 550. $-\frac{1}{4}$. 551. $-\frac{2}{e}$. 552. Розбіжний. 553. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{e-1}$. 554. Розбіжний. 555. Розбіжний. 556. Розбіжний. 557. $\frac{5}{2}\pi$. 558. π. 559. $\frac{\pi}{3}$. 560. $\frac{16}{3}$. 561. π. 592. $5-6\ln 2$. 563. $\frac{33\pi}{2}$. 564. $6-\frac{9}{2}\ln 3$. 565. Збіжний. 566. Збіжний. 567. Збіжний. 568. Збіжний. 569. Збіжний. 570. Розбіжний. 571. Розбіжний. 572. Збіжний. 573. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 574. $\sqrt{\pi}$. 575. $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$. 576. $\frac{\pi}{2}$, якщо $a>0$; 0, якщо $a=0$; $-\frac{\pi}{2}$, якщо $a<0$. 577. $\frac{\pi}{2}$, якщо $a>b$; $\frac{\pi}{4}$, якщо $a=b$; 0, якщо $a<b$. 578. $\frac{\pi}{2}$. 579. $\frac{\pi}{4}$. 580. $\frac{\pi}{4}$. 581. 1,750. 582. 0,118. 583. 0,196. 584. 0,524. 585. 0,837. 586. 0,497. 587. 0,747. 588. 0,665. 589. 1,118. 590. 0,173. 591. 1,371. 592. 0,608. 593. 0,916. 594. 0,536. 595. 1,530. 596. 3,127. 597. 3,1416. 598. 2,31. 599. 0,957. 600. 239 м².

§ 3. 601. 31,5. 602. $\frac{32}{3}$. 603. $10\frac{2}{3}$. 604. $\frac{13}{6}$. 605. $\frac{9}{2}$. 606. $\frac{9}{2}$. 607. $2\frac{7}{8}$. 608. $\frac{9}{4}$. 609. $\frac{16}{3}$. 610. 9. 611. $\frac{16}{3}p^2$. 612. $\frac{16}{3}$. 613. $\frac{32}{3}\sqrt{6}$. 614. e^2. 615. $\frac{3}{2}(3\pi-2)$. 616. $2\ln 2-\frac{1}{2}$. 617. 1. 618. $4\ln 2-1$. 619. 2. 620. $\ln 2$. 621. πa^2. 622. $2(\mathrm{ch}\,1-1)$. 623. $ab\,[2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})]$. 624. 2. 625. $\frac{32}{9}$. 626. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. 627. 1. 628. $\sqrt{2}-1$. 629. $2\pi+\frac{4}{3}$ і $6\pi-\frac{4}{3}$. 630. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ і $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$. 631. $\frac{1}{12}$. 632. $3-e$. 633. $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. 634. $\frac{3}{8}\pi ab$. 635. $3\pi a^2$. 636. $\pi(b^2+2ab)$. 637. $6\pi a^2$. 638. $\frac{8}{15}$. 639. $\frac{256}{15}ab$. 640. $\frac{8\sqrt{3}}{5}$. 641. $\frac{3a^2}{2}$. 642. $3\pi a^2$. 643. $\frac{\pi a^2}{2}$. 644. $3a^2\sqrt{3}$. 645. $\frac{3}{2}\pi a^2$. 646. $\frac{\pi a^2}{8}$. 647. $\frac{\pi a^2}{4}$. 648. a^2. 649. $\frac{3}{4}\sqrt{3}$. 650. $8\pi^3 a^2$. 651. a^2. 652. $\frac{\pi a^2}{4}$. 653. $\pi(2a^2+b^2)$. 654. $\frac{14-8\sqrt{2}}{3}a^2$.

655. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 656. $\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1}-\frac{1}{\varphi_2}\right)$. 657. $a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)$. 658. $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$. 659. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. 660. $\frac{51\sqrt{3}}{16}$. 661. $\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)$. 662. $\frac{\pi a^2}{4}$. 663. $\frac{a^2}{4}\left(\pi+\frac{4}{3}\right)$. 664. $\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln 2\right)$. 665. a^2. 666. $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 667. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 668. a^2. 669. $\pi\sqrt{2}$. 670. $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. 671. $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. 672. $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt{2}+1)}{e}$. 673. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 674. $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. 675. $\frac{1}{4}(e^2+1)$. 676. $a\,\mathrm{sh}\frac{b}{a}$. 677. $2\sqrt{3}$. 678. $\frac{8}{9}\times\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$. 679. $4\frac{26}{27}$. 680. $\frac{\pi}{2}+2\ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$. 681. $\ln 3-\frac{1}{2}$. 682. $\frac{4}{\pi}\ln\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{4}{\pi}\ln(1+\sqrt{2})$. 683. $\frac{134}{27}p$. 684. $\ln(2+\sqrt{3})$. 685. $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=\ln\frac{\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{sh}\,a}$. 686. $a\ln\frac{a}{b}$. 687. 2. 688. $a\ln\frac{\mathrm{tg}\frac{3\pi}{8}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}}$. 689. $\ln\frac{\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{sh}\,a}$. 690. 8. 691. $4a\sqrt{3}$. 692. $\pi a\sqrt{2}$. 693. $6a$. 694. $6a$. 695. $\sqrt{2}(e-1)$. 696. $\frac{13}{3}$. 697. При $t=\frac{2\pi}{3}$ $x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $y=\frac{3a}{2}$. 698. При $t=\frac{\pi}{6}$ $x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R$, $y=\frac{R}{8}$. 699. $3a\left(\frac{t_1}{2}-\frac{1}{4}\sin 2t_1\right)$. 700. $48a$. 701. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right]$. 702. $a\ln\frac{a}{y}$. 703. $\frac{1}{2}\pi^2 R$. 704. $4a\sqrt{3}$. 705. $4\sqrt{3}$. 706. $8(2-\sqrt{3})$. 707. $5\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{5}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. 708. $2a\,[\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)]$. 709. $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$. 710. $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}$. 711. $\pi a-2(a-b)\,\mathrm{arctg}\frac{a}{b}$. 712. $\frac{3}{2}\pi a$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 3\pi)$. 713. $\frac{16}{3}a$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 4\pi)$. 714. $2a\sqrt{6}$. 715. $\frac{1}{3}a\sqrt{t}(3+2t)$. 716. $8\sqrt{2}$. 717. $a\sqrt{3}$. 718. $\frac{\pi a^3}{30}$. 719. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 720. $\frac{16}{15}\pi h^2 a$. 721. $\frac{\pi a^2 h}{2}$. 722. $\frac{272}{15}\pi$. 723. $\frac{64}{3}\pi$. 724. $\frac{\pi}{4}$. 725. $\frac{4}{7}\pi$. 726. $\frac{3}{10}\pi$. 728. $\frac{8\pi}{3}$. 729. $\frac{1}{2}\pi^2$. 730. $\frac{\pi a^3}{4}(e^2+4-e^{-2})$. 731. $\frac{11}{4}\pi$. 732. $\frac{\pi}{2}$. 733. 2π. 734. π. 735. $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. *Вказівка.*

Скористатись інтегралом Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 736. $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. Див. вказівку до задачі 735. 737. $\frac{\pi e}{2}$. 738. $\frac{\pi}{4}(e^2-1)$. 739. $\frac{3}{8}\pi^2$. 740. $\frac{\pi}{15}$. 741. $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$. 742. $2\pi^2a^2b$. 743. $5\pi^2a^3$. 744. $6\pi^3a^3$. 745. $\frac{32}{105}\pi a^3$. 746. $\frac{2}{3}\pi a^3$. 747. $\frac{64}{3}\pi a^3$. 748. π^2. *Вказівка.* Скористатись інтегралом Діріхле $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. 749. $\frac{8\pi}{5}$. 750. $\pi\sqrt{2}$. 751. 72π. 752. $\pi a^3 \times \left(2\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)$. 753. $V_1 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}-\frac{11}{3}\right)$, $V_2 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6}+\frac{11}{3}\right)$. 754. $\frac{8\pi\sqrt{6}}{8}$. 755. 8π. 756. $\frac{56}{3}\pi a^2$. 757. $\frac{\pi}{9}(\sqrt{(1-a^4)^3}-1)$. 758. $4\pi R^2$. 759. $4\pi^2br$. 760. $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, де ε — ексцентриситет еліпса. 761. $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, де ε — ексцентриситет еліпса. 762. $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$. 763. $\frac{64}{3}\pi a^2$. 764. $16\pi^2a^2$. 765. $\frac{12}{5}\pi a$. 766. $\frac{128}{5}\pi a^2$. 767. $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 768. $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right)$. 769. $2\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$. 770. $3\pi a^2$. 771. mgR. 772. 0,125 Дж. 773. 1 Дж. 774. $2066\ln 2$ Дж. *Вказівка.* При ізотермічному процесі $pV = p_0V_0$. Робота $A = \int\limits_{V_1}^{V_2} pdV$, де V_1 і V_2 — початкове і кінцеве значення об'єму. 775. $\frac{p_0V_0}{k-1} \times \left(\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1}-1\right)$. *Вказівка.* При адіабатичному процесі $pV^k = p_0V_0^k$, де $k \approx 1{,}4$ (закон Пуассона). $A = \int\limits_{V_0}^{V_1}\frac{p_0V_0^k}{V^k}dV$. 776. $\frac{1}{2}\pi\gamma R^2H^2$. 777. $\frac{1}{12}\pi\gamma R^2H^2$. 778. $\frac{1}{3}\pi R^2H^2$. 779. $\frac{1}{12}\gamma a^2H^2$. 780. $\pi\gamma R^3H$. 781. $\frac{1}{12}\pi\gamma R^2H^2$, $\frac{1}{4}\pi\gamma R^2H^2$. 782. $\frac{1}{4}\pi\gamma R^4$. 783. $\frac{1}{6}ah^2$, $\frac{1}{3}ah^2$. 784. $\frac{2}{3}\gamma ab^2$. 785. $\pi\gamma RH^2$. 786. $\frac{1}{6}(a+2b)h^2$. 787. $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. 788. $\pi\gamma abh$. 789. $\gamma ab\left(h+\frac{b}{2}\sin\alpha\right)$. 790. $\frac{1}{3}\pi R^2H$. 791. 150 м. 792. $\frac{v_0^2}{2g}$. 793. $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1+\frac{v_0^2}{c^2}\right)$. 794. 250 м. 795. $533\frac{1}{3}$ г. 796. $\frac{15}{4}$. 797. $\frac{3}{7}$. 798. $\frac{\pi}{2}$. 799. $f(x_0)$. 800. $\frac{1}{\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}$. 801. $\frac{2}{\alpha}\ln(1+\alpha^2)$. 802. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}$. 803. $\frac{e^{2\alpha}-e^{\alpha}}{\alpha}$. 804. $\frac{1}{\alpha^2}\ln(1+\alpha)-\frac{1}{\alpha(1+\alpha)}$. 805. $\frac{1}{2\alpha^3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha^2(1+\alpha^2)}$. 806. $\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)$. 807. $\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$. 808. $\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})$. 809. $\pi\arcsin\alpha$. 810. $\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha)$. 811. $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 812. $\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$. 813. $\ln(1+\alpha)$. 814. $\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{\beta}$. 815. $\mathrm{arctg}\,\frac{\beta}{m}-\mathrm{arctg}\,\frac{\alpha}{m}$. 816. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$. 817. $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. *Вказівка.* Покласти $2t = 1 + x$. 818. $\frac{\Gamma^2(1/4)}{4\sqrt{2\pi}}$. *Вказівка.* Покласти $t = x^4$. 819. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{16}$. *Вказівка.* Покласти $t = \sin^2 x$. 820. $\frac{\Gamma(p/2)\,\Gamma(q/2)}{2\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$. *Вказівка.* Покласти $t = \sin^2 x$.

Глава 8

§ 1. 1. Так. 2. Ні. 3. Ні. 4. Так. 5. Так. 6. Так. 7. Ні. 8. Ні. 9. Так. 10. Ні. 21. $y - xy' = 0$. 22. $2xyy' = 3y^2 - x^2$. 23. $\sqrt{1-x^2}\,y' = \cos^2 y$. 24. $y'' + 9y = 0$. 25. $y'' - 6y' + 9y = 0$. 26. $y'' + 2y' - 3y = 0$. 27. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$. 28. $y(y')^2 + 2xy' - y = 0$. 29. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - xdy = 0$. 30. $(1-x^2)\,y'' - xy' = 2$. 31. $2(x-3)\,y' = y - 2$. 32. $y'''(1+(y')^2) - 3y'(y'')^2 = 0$. 33. $(1+(y')^2)^3 = (xy'' - y' - (y')^3)^2$. 34. $y - b = y'(x-a)$. 35. $y - 3 = \frac{1}{2}(x+1)\,y'$. 36. $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$. 37. $x = y[(1+(y')^2)\,\mathrm{arctg}\,y' - y']$. 38. $(xy' - y)(x + yy') + (b^2 - a^2)\,y' = 0$. 39. $2x^3y' - 3x^2y - y^3 = 0$. 40. $(a^2 - x^2)\,y' + xy = 0$. 42. $y = Cx$. 43. $\ln Cx - \frac{1}{y} = 0$. 44. $y = C\ln\cos x$. 45. $y^2 + x\sin x + \cos x = C$. 46. $\cos\frac{1}{x^2} + \ln y = 0$. 47. $y = e^{Cx}$. 48. $\frac{x+y}{xy} = \ln\frac{x}{y} + C$. 49. $2\sin x + \ln\left|\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right| = C$. 50. $\ln(y^2+3) = 2(C - xe^{-x} - e^{-x})$. 51. $\sqrt{2y+1} = C/\cos x$. 52. $\ln|\sin y| = C + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$. 53. $5^y = \frac{1}{2}5^{-x^2} + C\ln 3$. 54. $\arcsin y = e^{-x^2} + C$. 55. $\mathrm{ctg}^2\,y = \ln x + x + C$. 56. $y + \ln y = \arcsin x + \frac{x^2}{2} + C$. 57. $\sqrt[3]{y^3+1} = \frac{C}{\sqrt{x^2-1}}$. 58. $\frac{1}{2}y^2 - 2y + \ln|y| = \ln|x| + 1/x + C$. 59. $y = C\sqrt{1+x^2}\,(x - \sqrt{1+x^2})$. 60. $(1+e^x)^3\,\mathrm{tg}\,y = 8$. 61. $e^y(y^2 - 2y) + e^x(x^3 - 3x^2) = 2$. 62. $e^{y^2} - y^2 + x = 1$. 63. $\ln x(\ln\ln x - 1) + \frac{1}{2}e^{y^2}(y^2 - 1) = -\frac{3}{2}$. 64. $x^2y + x^3 + y = 1$. 65. $\ln|yx| + x^2 + y = 2$. 66. $2(x-2) =$

$= \ln^2 y$. **67.** $\frac{1}{3} y^3 + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} e^x$. **68.** $y + \arcsin e^y + \frac{x^4}{4} = \frac{\pi}{2}$. **69.** $\ln \left| \frac{y+1}{\sin x} \right| + x = \frac{\pi}{2}$. **70.** $\mu = \mu_0 e^{kt}$. **71.** $T \approx 17{,}7$ хв. **72.** 80 хв. **73.** $t = \frac{h(V_0 - V_1)}{V_0 V_1 \ln \frac{V_0}{V_1}}$. **74.** $x = x_0 \cdot 2^t$, $x = x_0 \cdot 2^{5/2} \approx 5{,}66\ x_0$. **75.** $y = \sqrt{4 - x^2} + 2 \ln \left| \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x} \right|$. **76.** $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$. **77.** $y = \frac{k}{2H} x^2 + C$. **78.** $A = P_0 V_0 \ln \frac{V}{V_0}$. **79.** 1,28 км/год. **80.** $V = \sqrt{\frac{mg}{k}}\, \frac{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{kg}{m}}t} + 1}$, $V_{max} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \approx 4{,}4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. **81.** $\omega = 200 \left(\frac{3}{5} \right)^t$. **82.** $x = Ce^{-\frac{b}{a}t}$. **83.** $y = \frac{Cx}{1 - kx}$.
84. $2y^2 - 2yx + x^2 = C$. **85.** $2y^2x^2 + 4yx^3 + x^4 = C$. **86.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 2 \ln |x| = C$. **87.** $\arcsin \frac{y}{x} - \ln |x| = C$. **88.** $\ln |x + y| + \frac{x}{x+y} = C$. **89.** $Cx = e^{\cos \frac{y}{x}}$. **90.** $y = xe^{1+Cx}$. **91.** $Cx = \cos \frac{y}{x}$. **92.** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - 4x = C$. **93.** $\sin \frac{y}{x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|$. **94.** $\sin \frac{y}{x} = Cx$. **95.** $\ln \left| 1 + \frac{y}{x} \right| = Cx$. **96.** $\sqrt{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = \ln |Cx|$. **97.** $\frac{y}{x} + 2 \ln \left| \frac{y}{x} \right| = \ln \left| \frac{C}{x} \right|$. **98.** $y^2 = 2x^2 \ln |Cx|$. **99.** $\sqrt{\frac{y}{x}} = -x + C$. **100.** $y = xe^{\frac{C}{x}}$. **101.** $\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{y}{x} \right| \right) = \ln |Cx|$. **102.** $y^2 = \frac{C}{3x} - \frac{x^2}{3}$.
103. $y = x \arcsin x$. **104.** $y^2 = 5 \pm 2\sqrt{5}x$. **105.** $y = -x \ln |1 - \ln x|$. **106.** $y = 2x \operatorname{arctg} x$. **107.** $x^2 + xy + x - y = C$. **108.** $y = x \ln^2 x$. **109.** $e^{\frac{y}{x}} = ey$.
110. $\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 - y$. **111.** $\arcsin \frac{y}{x} = \ln |x|$. **112.** $\frac{y - 3x}{y} = \ln^3 |x|$.
113. $y = -x \ln |x|$. **114.** $(y - 4)^2 + 2(y - 4)(x - 1) - 3(x - 1)^2 = C$. **115.** $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = 3$. **116.** $y^2 = 2C \left(x + \frac{1}{2} C \right)$. **117.** $y = Cx$. **118.** $x^2 + y^2 - Cy = 0$. **119.** $y = Cx - x \ln |x|$. **120.** $\rho = \frac{C}{1 - k \cos \varphi}$. **121.** $y = \frac{1}{x^2} (\ln |x| + C)$. **122.** $y = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + C \right)$. **123.** $y = \frac{1}{\sin^2 x} (C - \cos x)$. **124.** $y = (x^3 + 1)^{-2/3} [(x^3 + 1)^{1/3} + C]$. **125.** $y = \frac{1}{e^x + 1} \left[e^x (x + 1) + \frac{3}{2} x^3 + C \right]$.
126. $y = (x + C)(1 + x^2)$. **127.** $y = \operatorname{arctg} x - 1 + Ce^{-\operatorname{arctg} x}$. **128.** $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \times$

$\times \left[\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right]$. **129.** $y = C \ln |x| + x$. **130.** $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$. **131.** $y = \frac{1}{x} (C \cos x + \sin x)$. **132.** $x = Cy^2 + \frac{1}{2} y^4$. **133.** $y = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^x + 1 \right)^2$.
134. $xy (C + \ln^2 x) + 2 = 0$. **135.** $y = \frac{1}{4} x^4 (C + \ln x)^2$. **136.** $y = e^x \sqrt{C + x^2}$.
137. $x = \frac{y}{y^2 + C}$. **138.** $x = y\sqrt{C - y^2}$. **139.** $x = [y (C + \ln |y|)]^{-1}$. **140.** $y = \frac{1}{3 \cos x} (6 \sin x - 2 \sin^3 x)$. **141.** $y = \frac{1}{3} (\ln^5 |x| - \ln^2 |x|)$. **142.** $y = \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{6} \right)^{3/2}$. **143.** $y = [(x + 1) \cos x]^{-1}$. **144.** $y = \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2}$. **145.** $y = \sec x / (x^3 + 1)$. **146.** $y = \frac{Cx^2 + 3}{Cx^3 + x}$. **147.** $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x(xy - 1) + \sqrt{2}}{x(xy - 1) - \sqrt{2}} \right| + \frac{1}{x} = C$.
148. а) $y = \frac{1}{x} + \frac{1 + x^2}{C - x}$; б) $xy \left(C + \int e^{-\frac{2}{3}x^3} dx \right) = e^{-\frac{2}{3}x^3}$; в) $y \left(Ce^{\frac{2}{x}} - 1 \right) = x \left(Ce^{\frac{2}{x}} + 1 \right)$; г) $y = \frac{1}{Cx - x \ln x} - \frac{1}{x}$; д) $y = \frac{1 - Cx^2}{C - x}$; е) $y = \frac{Cx^2 - x}{C - x}$. **149.** $xy = Cy^2 + a^2$. **150.** $y = Cx^2 + \frac{2a^2}{3x}$. **151.** $S = S_0 + Ce^{-k_2 t} - \frac{k_1}{k_2^2} t + \frac{k_1}{2k_2} t^2$, де S_0 — початковий шлях. **152.** $I(t) = \frac{E_0}{L(\omega^2 + \alpha^2)} (\alpha \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\alpha t})$, $\alpha = \frac{R}{L}$. **153.** $\theta - \theta_0 = e^{-kt} \times \int_0 \varphi(t) e^{kt} dt$. **154.** $y = \frac{C}{x} + 1$. **155.** $y(2x - 1) + Cy(x - 1)^2 = x^2$. **156.** $x^3y + 2x + y^3 = C$. **157.** $\sin x^2 y + x + \cos y = C$. **158.** $\sin x^2 + xe^y + \sin y = C$.
159. $\ln |x| + \operatorname{tg} xy + y^2 = C$. **160.** $\operatorname{arctg} x + x^3 e^y + y = C$. **161.** $\sin^2 x + x^2 y + \operatorname{arctg} y = C$. **162.** $x^3 + 2y^2 x + \cos^2 y = C$. **163.** $x^y = C$. **164.** $\cos \frac{y}{x} + yx^3 + \operatorname{arctg} x = C$. **165.** $\sqrt{yx} + y^2 + e^{x/y} = C$. **166.** $\sin xy - \frac{y}{x} = 0$. **167.** $\cos x^2 y + xy^3 + x + y = 0$. **168.** $3^{xy} - 3y = 1$. **169.** $\ln |x| - \frac{y^2}{x} = C$. **170.** $\frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 = C$. **171.** $x^2 - y^2 = Cy^3$. **172.** $y^4 = 4xy + C$. **173.** $ye^x + x = Cy$.
174. $2x + \ln |y| = Cy$. **175.** $x \operatorname{tg} y - x^3 = C$. **176.** $\mu = y^{-n} e^{-(n+1)\int P(x) dx}$
177. Вираз $\frac{y'_x - x'_y}{x - y}$ має бути функцією від $(x + y)$. **178.** $xy + x + y = C(x + y)(x + y + 2)$. **179.** $x + a \ln \left| \frac{x + y}{x} \right| = C$. **180.** $x \sin (x + y) = C$.

181. Вираз $\frac{y'_x - x'_y}{xX - yY}$ має бути функцією від xy. 182. $y = Ce^{xy}$. 183. $4xy + 2x^2y^2 \ln x + 1 = Cx^2y^2$. 184. $(y - C)^2 = 4Cx$. 185. $x = p \sin p$, $y = (p^2 - 1) \sin p + p \cos p + C$. 186. $x = e^p + C$, $y = e^p (p - 1)$, або $y = (x - C) [\ln |x - C| - 1]$ 187. а) $\left(\frac{1}{2} x^2 - y + C\right)\left(x - \frac{1}{2} y^2 + C\right) = 0$; б) $\left(\frac{y - C}{x}\right)^2 + 2\frac{y - C}{x} + 1 = 0$; в) $(y - 2x - C)(y - 3x - C) = 0$; г) $(y - x - C)(y + 2x - C) = 0$; д) $y = \left[\cos \frac{C \pm x}{2}\right]^{-2}$; е) $x = \frac{3}{2} t^2 + 2t + C$, $y = t^2 + t^3$; є) $x = 4t^3 + \frac{1}{2} t^2 + C$, $y = 3t^4 + \frac{1}{t}$; ж) $(2y - x^2 - C)(2y + 3x^2 - C) = 0$; з) $x = \frac{3t}{1 + t^3}$, $y = \frac{3(4t^3 + 1)}{2(t^3 + 1)^2} + C$. 188. $x = p(1 + e^p)$, $y = \frac{1}{2} p^2 + (p^2 - p + 1) e^p + C$. 189. $y = Cx - \frac{1}{C}$ — загальний розв'язок; $y^2 = -4x$ — особливий розв'язок. 190. $y = (x + 3) C + C^2 + 1$ і $4y = 4 - (x + 3)^2$. 191. $y = Cx + \frac{3}{C}$ і $y^2 = 12x$. 192. $3Cy = 3C^2x + (C - 3)^2$ і $4y + y^2 - 12x = 0$. 193. $y = Cx + \sin C$. 194. $x = \frac{1}{2p^2} [\ln (p + \sqrt{p^2 + 1}) - p\sqrt{p^2 + 1} + C]$; $y = 2px + \sqrt{p^2 + 1}$. 195. $x = p \sin p$, $y = p^2 \sin p + p \cos p - \sin p + C$. 196. Загальний розв'язок $\begin{cases} x = C(p + 1), \\ y = \frac{1}{2} Cp^2, \end{cases}$ або $y = \frac{1}{2C} (x - C)^2$, особливі розв'язки $y = 0$, $y = -2x$. 197. $x = Cy + C^2$; $4x = -y^2$. 198. $y = Cx + C^2$ і $y = 2\left(-\frac{x}{3}\right)^{3/2}$, $x < 0$. 199. $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$; особливий інтеграл $y^2 - 4x^2 = 0$. 200. $y = Cx - \ln C$; особливий розв'язок $y = \ln x + 1$. 201. Коло і сімейство його дотичних. 202. $(y - x - 2a)^2 = 8ax$. 203. Еліпс і гіперболи. 204. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{2/3}$. § 2. 205. $y = -\sin x + \frac{1}{6} x^3 + C_1x + C_2$. 206. $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + \ln |x| + C_1x + C_2$. 207. $y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{1}{120} x^6 + \frac{1}{2} C_1x^2 + C_2x + C_3$. 208. $y = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C_1x + C_2$. 209. а) $y = (x^2 - x + 1) e^x + C_1x + C_2$; б) $x = t^3 - 2t$, $y = \frac{9}{28} t^7 - \frac{9}{10} t^5 + \frac{2}{3} t^3 + C_1x + C_2$; в) $x = t + t^4$, $y = \frac{16}{45} t^9 + \frac{7}{15} t^6 + \frac{1}{6} t^3 + C_1x + C_2$; г) $x = t + \ln |t|$, $y = \frac{1}{6} t^3 + \frac{3t^2}{4} + t + C_1x + C_2$. 210. $y = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{2} C_1x^2 + C_2x + C_3$. 211. $y = \ln |e^{2x} + C_1| - x + C_2$. 212. $y = C_1e^{C_2x}$. 213. $y \cos^2 (x + C_1) = C_2$. 214. $(x - C_2)^2 = 4C_1 (y - C_1)$. 215. $y = (C_1x - C_1^2) e^{1 + \frac{x}{C_1}} + C_2$. 216. $y = C_1x (x - C_1) + C_2$; $y = \frac{1}{3} \times x^3 + C$ (особливий розв'язок). 217. $y = \frac{1}{2} \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2$. 218. $y = \frac{2}{3C_1} \sqrt{(C_1x - 1)^3} + C_2$. 219. $y = \sin (C_1 + x) + C_2x + C_3$. 220. $\ln |y + C_1| + \frac{C_1}{y + C_1} = x + C_2$. 221. $(C_1x + C_2)(1 - y) = 1$. 222. $y = 32 \arcsin \frac{x}{4} - \frac{x}{4} (8 - x^2) \sqrt{16 - x^2} + \frac{1}{3} C_1x^3 + C_2$. 223. $y = \frac{1}{5} \sqrt{(1 - x^2)^5} - \frac{1}{3} \times \sqrt{(1 - x^2)^3} + \frac{1}{4} C_1x^4 + C_2$. 224. $y = -\ln |1 + \sqrt{1 - x^2}| + C_1 \ln |x| + C_2$. 225. $y = -\frac{1}{2} \sin 2x - x + C_1 \sin x + C_2$. 226. $y = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} x \times \sqrt{9 - x^2} + C_1x^3 + C_2$. 227. $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln |x| + C_2$. 228. $y = e^x (x - 1) + C_1x^2 + C_2$. 229. $C_1^2y = (C_1^2x^2 + 1) \operatorname{arctg} C_1x - C_1x + C_2$. 230. $y = \frac{1}{2} C_1x^2 + C_2x + C_3 - C_1^2 (x + C_1) \ln |x + C_1|$. 231. $x = C_1y^2 + C_2y + C_3$. 232. $y = C_2\left(xe^{C_1x} - \frac{1}{C_1} e^{C_1x}\right) + C_3$. 233. $y = \frac{1}{2} (x \ln |x| - x) + C_1x^3 + C_2x + C_3$. 234. $y = -\sin x - C_1 \cos x + C_2x + C_3$. 235. $y = \frac{1}{4} C_1x^2 (2 \ln |x| - 3) + C_2x + C_3$. 236. $y = x^2 + 3x + 1$. 237. $y = x \ln |x| - 2x$. 238. $y = \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{6} x^3$. 239. $\ln |y^2 - 1| = \pm \frac{1}{2} x^2$. 240. $y = 2x$. 241. $x = \ln |\ln |y| + \sqrt{\ln^2 |y| + 1}|$. 242. $y = \frac{1}{5} (9 - x^2)^{\frac{5}{2}} - 3(9 - x^2)^{3/2}$. 243. $y = \sin x + 1$. 244. $y = x$. 245. $y = 2 \sin x + 2$.

§ 3. 246. а), в), г), д) — незалежні системи функцій; б), е) — залежні системи. 247. а) $y'' - \frac{2x}{1 + x^2} y' + \frac{2y}{1 + x^2} = 0$; б) $y'' - \frac{2(1 + x)}{x} y' + \frac{2(1 + x)}{x^2} \times y = 0$; в) $y'' + \frac{3x - 2}{3x^2 - x} y' - \frac{3y}{3x^2 - x} = 0$; г) $y'' - \frac{x + 2}{x} y' + \frac{y}{x} = 0$. 250. $y = \frac{C_1}{x} + C_2x$. 251. $y = C_1 \sin x + C_2x$. 252. $y = C_1 \cos x + C_2 \cos^2 x$. 253. $y = C_1x + C_2 \ln |x|$. 254. $y = \frac{C_1}{x} + C_2x^2$. 255. $y = C_1x^2 + C_2e^x$. 256. $y = C_1e^{-2x} + C_2 (4x^2 + 1)$. 257. $y = C_1 \frac{x}{1 - x} + C_2 \frac{2x \ln |x| + 1 - x^2}{1 - x}$. 258. $y = C_1x \cos 2x + C_2x \sin 2x$. 259. $y = C_1x^3 + C_2 \frac{1}{x^2}$. 260. $y = C_1x + C_2 \frac{1}{\sin x}$.

261. $y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}$. 262. $y=C_1x^3+C_2e^{2x}$. 263. $y=C_1e^{\sin x}+C_2e^{-\sin x}$. 264. $y=C_1e^x+C_2x+C_3e^{-x}+x^3$. 265. $y=C_1x+C_2\frac{1}{x}+C_3\times(x\ln|x|+1)$. 266. $y=C_1x+C_2\cos x+C_3\sin x+x^2+1$. 267. $y=C_1x+C_2e^{2x}+C_3x^3$. 268. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3x^2$. 269. $y=C_1x+C_2\frac{1}{x}+C_3x\ln|x|$. 270. $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$. 271. $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$. 272. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$. 273. $y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. 274. $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$. 275. $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{3}{2}x}$. 276. $y=e^{-2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)$. 277. $y=C_1\sin\sqrt{2}x+C_2\times\cos\sqrt{2}x$. 278. $y=C_1+C_2e^{-3x}$. 279. $y=C_1e^{-\frac{1}{2}x}+C_2e^{\frac{1}{3}x}$. 280. $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{3}2x}$. 281. $y=C_1e^x+e^x(C_2\cos 2x+C_3\sin 2x)$. 282. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-x}$. 283. $y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1x^2+C_2x+C_3)$. 284. $y=C_1e^{-x}+e^{4x}(C_1\cos x+C_3\sin x)$. 285. $y=e^{-x}(C_1+C_2x)+C_3e^{\frac{1}{2}x}$. 286. $y=C_1e^{-x}+e^{-2x}(C_2\cos x+C_3\sin x)$. 287. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^{3x}$. 288. $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3\times\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x$. 289. $y=e^x(C_1+C_2x+C_3x^2)+C_4e^{-x}$. 290. а) $y=x(Ax^2+Bx+C)$; б) $y=A\sin 2x+B\cos 2x$; в) $y=x(Ax+B)e^{-\frac{2}{3}x}$; г) $y=Ae^x+(Bx+C)x$. 291. а) $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$; б) $y=A\sin 3x+B\cos 3x$; в) $y=Axe^{-x}$; г) $y=x(Ax^2+Bx+C)e^{\frac{1}{3}x}+Dx+E$. 292. а) $y=Ae^{-3x}$; б) $y=A\sin x+B\cos x+Cx^2+Dx+E$; в) $y=Ax+B$; г) $y=xe^{-3x}(A\sin x+B\cos x)$. 293. а) $y=Ax^2e^{-5x}$; б) $y=Ae^{5x}+Bx+C$; в) $y=A\sin 5x+B\cos 5x$; г) $y=x^2(Ax+B)e^{-5x}$. 294. а) $y=Ae^{-3x}$; б) $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$; в) $y=x(A\sin 3x+B\cos 3x)+Cx+D$; г) $y=x[(Ax+B)\sin 3x+(Bx+C)\cos 3x]$. 295. а) $y=(Ax+B)\sin 2x+(Bx+C)\cos 2x$; б) $y=x(Ax^3+Bx^2+Cx+D)$; в) $y=(Ax^2+Bx+C)xe^{-2x}$; г) $y=Ae^{2x}+(Cx+D)x$. 296. а) $y=(Ax+B)e^{-5x}$; б) $y=A\sin x+B\cos x$; в) $y=x[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x]e^{-5x}$; г) $y=Ax+B+Ce^{5x}$. 297. а) $y=Axe^x$; б) $y=Ae^{2x}+Bx^2+Cx+D$; в) $y=(Ax+B)xe^x$; г) $y=(Ax^2+Bx+C)xe^{-7x}$. 298. а) $y=x^2(Ax+B)e^{4x}$; б) $y=x^2(Ax^2+Bx+C)e^{4x}$; в) $y=Axe^{4x}$; г) $y=A\sin 4x+B\cos 4x+Cx+D$. 299. а) $y=(Ax+B)e^{4x}$; б) $y=x[(Ax+B)\times\sin 4x+(Cx+D)\cos 4x]$; в) $y=x(A\sin 4x+B\cos 4x)$; г) $y=Ax^2+Bx+C+D\cos 2x+E\sin 2x$. 300. а) $y=Ax+B$; б) $y=(Ax+B)x^2e^x$; в) $y=Axe^{\frac{1}{2}x}$; г) $y=A\sin x+B\cos x+Cx+D$. 301. а) $y=x(Ax+B)e^x$; б) $y=(Ax^2+Bx+C)xe^{-3x}$; в) $y=Ae^{2x}$; г) $y=Ax+B+C\cos 2x+D\sin 2x$. 302. а) $y=x^2(Ax^2+Bx+C)e^{-x}$; б) $y=x^2(Ax+B)e^{-x}$; в) $y=Axe^{5x}$; г) $y=Ax^2+Bx+C+D\sin 2x+E\cos 2x$. 303. а) $y=Ae^x$; $y=A\sin 2x+B\cos 2x$; в) $y=x^2(Ax+B)e^{2x}$; г) $y=x^3(Ax^2+Bx+C)e^{2x}+E$. 304. а) $y=x[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x]e^{-x}$; б) $y=Ae^{-x}$; в) $y=(Ax+B)xe^x$; г) $y=A\sin x+B\cos x$. 305. а) $y=(Ax+B)x^2$; б) $y=e^x(A\sin x+B\cos x)$; в) $y=x(A\sin x+B\cos x)$; г) $y=Ae^x+B\sin 2x+C\cos 2x+D$. 306. а) $y=x(Ax+B)e^x$; б) $y=Ax+B$; в) $y=x[(Ax+B)\sin x+(Cx+D)\cos x]$; г) $y=Axe^{-x}$. 307. а) $y=Ax^2e^{2x}$; б) $y=(Ax+B)x^2e^{-2x}$; в) $y=(Ax^2+Bx+C)e^{2x}$; г) $y=A\sin 2x+B\cos 2x$. 308. $y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x$. 309. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{4x}+3\cos 2x$. 310. $y=C_1e^{6x}+C_2xe^{6x}+7x^2e^{6x}$. 311. $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3e^{-x}$. 312. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2+2x$. 313. $y=C_1+C_2e^{-3x}+2e^{2x}$. 314. $y=e^{-2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+2e^{3x}$. 315. $y=C_1e^{2x}+C_2e^x+\frac{1}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+\frac{21}{4}x+\frac{45}{8}$. 316. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{15}e^{2x}-\frac{4}{9}$. 317. $y=e^{-4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+\frac{1}{5}e^{5x}$. 318. $y=C_1\cos 6x+C_2\sin 6x-x^3+2x+1$. 319. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x(\cos x-2\sin x)$. 320. $y=C_1+C_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos 2x-\sin 2x)$. 321. $y=(C_1+C_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}x^2e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$. 322. $y=e^{2x}(C_1\sin 5x+C_2\cos 5x)+5\cos 5x+\sin 5x$. 323. $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x+x\sin 4x$. 324. $y=(C_1+C_2x+3x^2)e^{-x}$. 325. $y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{1}{3}x}+e^{2x}$. 326. $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+3x^2e^{-2x}$. 327. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(2x^3-5x^2)e^{-x}$. 328. $y=C_1e^{\frac{1}{4}x}+C_2e^{-x}+2\sin x-\cos x$. 329. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{\frac{1}{3}x}+x^2e^{-x}$. 330. $y=e^{4x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+C_3e^{-x}+\cos x+\sin x$. 331. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^{\frac{1}{3}x}+x^3e^{\frac{1}{3}x}$. 332. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+C_3e^{3x}+xe^x+\cos x+\sin x$. 333. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}+(x^2-3x)e^{-x}$. 334. $y=C_1e^{-x}+e^{-x}\times(C_2\cos x+C_3\sin x)+xe^{-x}+\cos x+\sin x$. 335. $y=C_1e^{-2x}+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)-\frac{xe^x}{20}(3\cos x+\sin x)$. 336. $y=e^x\left(C_1+\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{8}x\right)+C_2e^{-x}+\left(C_3-\frac{1}{4}x\right)\sin x+C_4\cos x$. 337. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x-e^x\sin x$. 338. $y=C_1+C_2e^{2x}+e^{-x}(C_3\cos\sqrt{3}x+C_4\sin\sqrt{3}x)+\frac{1}{48}e^{2x}(x^2-2x)$. 339. $y=5e^{-x}-3e^{-3x}$. 340. $y=e^{2x}(\sin 5x+\cos 5x)$.

341. $y=2e^{\frac{1}{2}x}(1-x)$. 342. $y=e^{-x}\sin\sqrt{2}x$. 343. $y=\sin 2x$. 344. $y=1$. 345. $y=x(1-c^x)$. 346. $y=-6e^{3x}+22xe^{3x}+x^2-3x+5$. 347. $y=e^{3x}+e^{-4x}+(2x+1)e^{4x}$. 348. $y=e^x\sin 6x(1+3x)$. 349. $y=3-e^{-2x}+x^3-x^2$. 350. $y=3e^{-2x}+2e^{2x}(x-1)$. 351. $y=\cos 6x+8\sin 6x+2x^3-2x$. 352. $y=e^{2x}\left(\cos 4x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+xe^{2x}$. 353. $y=e^{-5x}(\cos 3x+2\sin 3x-1)$. 354. $y=\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}x^2\sin x-\frac{1}{8}x\cos 3x+\frac{3}{32}\sin 3x$. 355. $y=1+x-e^x$. 356. $y=e^{2x}-1$. 357. $y=10-11e^x+e^{12x}$. 358. $y=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{2x}\left(1-\frac{5}{4}x\right)$. 359. $y=-2e^x+\cos 2x+\sin 2x$. 360. $y=\cos 3x-\sin 3x$. 361. $y=e^{3x}(x^2+1)$.

362. $y=e^{-2x}(x+x^2)$. 363. $y=\sin x+\cos x$. 364. $y=e^x+\sin x+\cos x$. 365. $y=x(\sin 2x+\cos 2x)+e^{-x}$. 366. $y=x^2e^{-2x}+e^x$. 367. $y=e^{-x}-e^x+2\sin x$. 368. $y=-2e^x+e^{-x}+e^{3x}$. 369. $y=\sin 3x+\cos 3x$. 370. $y=\frac{1}{9}\cos x$. 371. $y=\cos x+\frac{1}{8}(x^2-3x)e^x-\frac{1}{4}x\sin x$. 372. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. 373. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$. 374. $y=\left[-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}\ln(e^x+1)+C_1\right]e^{-x}+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{e^x}{e^x+1}+C_2\right)e^x$. 375. $y=(\ln|\cos x|+C_1)e^{-x}\cos x+(x+C_2)e^{-x}\sin x$. 376. $y=e^x(C_1-\ln x+C_2x-1)$. 377. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2x}\right)e^{-2x}$. 378. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+2$. 379. $y=C_1+C_2e^x-\sin e^x$. 380. $y=C_1\cos x+C_2\sin x+2\cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|-2$. 381. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{1}{x}$. 382. $y=\left(C_1+\frac{4}{3}\sqrt{\operatorname{ctg}x}\right)\cos x+C_2\sin x$. 383. $y=\left(C_1-\frac{1}{2\cos^2 x}\right)\cos x+(C_2+\operatorname{tg}x)\sin x$. 384. $y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x\ln|x|-\frac{3}{4}x^2\right)e^{-2x}$. 385. $y=e^x\left(C_1+C_2x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+x\operatorname{arctg}x\right)$. 386. $y=e^x(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)+\frac{1}{4}e^x\left[3+\cos 2x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right|\right]$. 387. $y=e^{-2x}\sin x\times\left(C_1-\frac{1}{2\sin^2 x}\right)+e^{-2x}\cos x(C_2+\operatorname{ctg}x)$. 388. $y=e^x(C_1+C_2x+x\ln|x|)$. 389. $y=\frac{1}{9}x^3+C_1\ln|x|+C_2$. 390. $y=x^3+C_1x^2+C_2$. 391. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+\frac{1}{12}(4xe^{2x}+e^x-2)+\frac{1}{6}(e^{-x}-3e^x-2e^{2x})\ln(e^x+1)$. 392. $x=C_1\cos t+C_2\sin t$; $y=+C_2\cos t-C_1\sin t$. 393. $x=C_1e^{-3t}+C_2e^t$; $y=\frac{1}{3}C_1e^{-3t}-C_2e^t$. 394. $x=C_2e^{-2t}$, $y=C_1e^t$. 395. $x=C_1e^t+C_2e^{-t}$, $y=3C_1e^t+C_2e^{-t}$. 396. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{9t}$, $y=-\frac{3}{4}C_1e^{-t}+\frac{1}{2}C_2e^{9t}$. 397. $x=C_1e^{-2t}+C_2e^{3t}$, $y=-\frac{8}{3}C_1e^{-2t}-C_2e^{3t}$. 398. $x=(C_1+C_2t)e^{2t}$, $y=-(C_1+C_2+C_2t)e^{2t}$. 399. $x=[(C_1-C_2)\cos t-(C_1+C_2)\times\sin t]e^{2t}$, $y=(C_1\sin t+C_2\cos t)e^{2t}$. 400. $x=5C_1\cos 3t+5C_2\sin 3t$, $y=(C_1-3C_2)\cos 3t+(3C_1+C_2)\sin 3t$. 401. $x=(C_1+C_2t)e^t$, $y=(2C_1-C_2+2C_2t)e^t$. 402. $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$. 403. $x=e^{-6t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{-6t}((C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t)$. 404. $x=C_1+C_2e^{-4t}-\sin 2t-2\cos 2t$, $y=C_1-3C_2e^{-4t}+3\sin 2t-4\cos 2t$. 405. $x=(C_1+C_2t+7t^2)e^{6t}$, $y=(C_2-C_1-C_2t+14t-7t^2)e^{6t}$. 406. $x=C_1e^{-6t}+C_2e^{4t}+\sin 3t$, $y=-5C_1e^{-6t}+5C_2e^{4t}+3\cos 3t+\sin 3t$. 407. $x=C_1\cos 6t+C_2\sin 6t-t^3+2t+1$, $y=\frac{1}{8}[(6C_2-2C_1)\cos 6t-(6C_1+2C_2)\sin 6t+2t^3-3t^2-4t]$. 408. $x=e^{4t}[(C_1+2C_2)\cos 2t+(C_2-2C_1)\sin 2t]+2\cos 2t-3\sin 2t$, $y=e^{4t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)+\sin 2t$. 409. $x=C_1+C_2e^{-3t}-t^2+4t$, $y=-2C_1-5C_2e^{-3t}+2t^2-10t+4$. 410. $x=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}+(t-1)e^{3t}$, $y=-6C_1e^{-3t}-C_2e^{2t}+e^{3t}$. 411. $x=-e^{2t}-(4C_1+3C_2)\sin 4t+(4C_2-3C_1)\cos 4t$, $y=C_1\cos 4t+C_2\sin 4t+e^{2t}$. 412. $x=\frac{1}{3}t$, $y=-\frac{1}{3}t$. 413. $x=10e^{2t}-8e^{3t}-e^t+6t-1$, $y=-20e^{2t}+8e^{3t}+3e^t+12t+10$. 414. $x=14(1-e^{-t})-2t(3+4e^{-t})$, $y=-9(1-e^{-t})+t(5+4e^{-t})$. 415. $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. 416. $x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t)$, $y=e^{3t}[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t]$, $z=C_1e^{2t}+e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t+(C_2+2C_3)\sin t]$. 417. $x=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$, $y=\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{2}e^{-2t}$, $z=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$. 418. $x=e^{-t}$, $y=e^{-t}$, $z=0$.

Глава 9

§ 1. 1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2n}$. 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$. 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{3n-1}$. 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2+1}$. 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^{2n}}$. 7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)\cdot 2^{n+1}}$. 9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(4n-1)}$. 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$. 11. $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\cdots$. 12. $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{9}{8}+\cdots$. 13. $\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{3^2}{4!}+\cdots$. 14. $\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{13}\right)^2+\left(\frac{5}{28}\right)^3+\cdots$. 15. $\frac{2}{1\cdot\sqrt{2}}+\frac{4}{2\sqrt{5}}+\frac{2}{3\sqrt{10}}+\cdots$. 16. 1. 17. 1/3. 18. 1/12. 19. 6. 20. 1. 21. $\frac{3\pi}{4}$. 22. $1-\sqrt{3}$. 23. $\ln 2$. 24. $\frac{\pi}{4}$. 25. 1. 26. Розб. 27. $1-\sqrt{2}$. 28. 1/2. 29. 1. 30. $\ln\frac{4}{3}$. 31. Так. 32. Так. 33. Ні. 34. Так. 35. Ні. 36. Ні. 37. Так. 38. Ні. 39. Так. 40. Ні. 41. Розб. 42. Збіж. 43. Збіж. 44. Збіж. 45. Збіж. 46. Збіж. 47. Розб. 48. Збіж. 49. Розб. 50. Збіж. 51. Збіж. 52. Збіж. 53. Збіж. 54. Збіж. 55. Збіж. 56. Збіж. 57. Збіж. 58. Збіж. 59. Розб. 60. Збіж. 61. Збіж. 62. Збіж. 63. Збіж. 64. Збіж. 65. Збіж. 66. Збіж. 67. Збіж. 68. Збіж. 69. Збіж. 70. Збіж. 71. Розб. 72. Розб. 73. Збіж. 74. Розб. 75. Збіж. 76. Розб. 77. Розб. 78. Збіж. 79. Розб. 80. Збіж. 81. Розб. 82. Збіж. 83. Збіж. 84. Розб. 85. Розб. 86. Збіж.

87. Збіж. 88. Збіж. 89. Збіж. 90. Збіж. 91. Розб. 92. Розб. 93. Збіж. 94. Розб. 95. Збіж. 96. Збіж. 97. Розб. 98. Збіж. 99. Збіж. 100. Розб. 101. Розб. 102. Збіж. 103. Збіж. 104. Збіж. 105. Збіж. 106. Збіж. 107. Збіж. 108. Збіж. 109. Розб. 110. Збіж. 111. Збіж. 112. Збіж. 113. Збіж. 114. Збіж. 115. Збіж. 116. Розб. 117. Збіж. 118. Збіж. 119. Розб. 120. Розб. 131. Збіг. умов. 132. Збіг. абс. 133. Розб. 134. Збіг. абс. 135. Збіг. умов. 136. Збіг. умов. 137. Розб. 138. Збіг. абс. 139. Збіг. абс. 140. Збіг. абс. 141. Збіг. умов. 142. Збіг. абс. 143. Збіг. абс. 144. Збіг. умов. 145. Збіг. абс. 146. Збіг. абс. 147. Збіг. умов. 148. Збіг. абс. 149. Збіг. абс. 150. Розб. 151. Збіг. абс. 152. Збіг. абс. 153. Розб. 154. Збіг. абс. 155. Збіг. абс. 156. Збіг. абс. 157. Збіг. абс. 158. Збіг. абс. 159. Збіг. абс. 160. Збіг. абс. *Зауваження.* $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)$, $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)$. 161. Збіг. абс. 162. Збіж. 163. Розб. 164. Збіг. умов. 165. Розб. 166. Збіг. 167. Збіг. абс. 168. Збіг. абс. 169. Розб. 170. Збіж. 171. Розб. 172. Збіг. абс. 173. Збіг. абс. 174. Збіг. абс. 175. Розб. 176. Збіг. абс. 177. Розб. 178. Збіг. абс. 179. Розб. 180. Збіж.

§ 2. 181. $(-1;\ 1)$. 182. $(-\infty;\ \infty)$ 183. $(-\infty;\ -2)$. 184. $(-\infty;\ -1)\ (1;\ \infty)$. 185. $(-\infty;\ \infty)$. 186. $(e^{-1};\ e)$. 187. $(-\infty;\ \infty)$. 188. $(-2;\ 2)$. 189. $(-\infty;\ -3)\ (-1;\ \infty)$. 190. $x \neq \pm 1$. 191. $(-2;\ -\sqrt{2})\ (\sqrt{2};\ 2)$. 192. $(-\infty;\ \infty)$. 193. $(-\infty,\ \infty)$. 194. $(-1/5;\ 1/5)$. 195. $(-\infty;\ 2]\ (4;\ \infty)$. 196. $(-\sqrt{e-1};\ \sqrt{e-1})$. 197. $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)\cdot 3^n$. 198. $(-1/3;\ 3)$. 211. $(-\infty;\ \infty)$, 212. $[-1;\ 1)$. 213. $R=0$. 214. $[-3/2;\ 3/2)$. 215. $(-\infty;\ \infty)$. 216. $(-1;\ 1)$. 217. $(-1;\ 1)$. 218. $(-1;\ 1)$. 219. $(-1/e;\ 1/e)$. 220. $(-1/5,\ 1/5)$. 221. $(-4;\ 4)$. 222. $(-1/7;\ 1/7)$. 223. $(-\infty;\ \infty)$. 224. $(-2;\ 2)$. 225. $(-\infty;\ \infty)$. 226. $[-\sqrt{5}/2;\ \sqrt{5}/2)$. 227. $[-2;\ 2]$. 228. $(-1;\ 1]$. 229. $(-7;\ 7]$. 230. $[-3;\ 3]$. 231. $[-2;\ 4]$. 232. $[-2;\ 8)$. 233. $(-2;\ 4)$. 234. $[0;\ 4]$. 235. $[-4;\ -2]$. 236. $(-6;\ 2)$. 237. $[-1;\ 0]$. 238. $[-4/3;\ 0]$. 239. $(-4/3;\ 2]$. 240. $(1;\ 3)$. 241. $[1;\ 2]$. 242. $[0;\ 1]$. 243. $[-3;\ 5]$. 244. $[-1;\ 0)$. 245. $[-3;\ 1]$. 246. $[0;\ 2]$. 247. $(-\infty;\ \infty)$. 248. $[-2;\ 0]$. 249. $[-2;\ 0]$. 250. $\left(-\frac{4}{\pi}-1;\ \frac{4}{\pi}-1\right)$. 251. $(x+1)\ln(x+1)-x$. 252. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}$. 253. $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$. 254. $\ln 3/2$. 255. $\frac{\pi}{4}$. 256. $\ln\frac{5}{3}$. 257. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{4}\right]$. 258. $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$. 259. 7/2. 260. 3. 261. $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. 262. $\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 263. $9\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|$. 264. $\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$. 265. $\frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}$. 266. $\frac{x}{(1-x^2)^2}$. 267. $\frac{1}{x}$. 268. $\frac{1}{(x-4)^2}$. 269. $-\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1-x)-1$. 270. $\frac{16}{(2-x)^3}$. 271. $|z|<1$. 272. $|z-2i|<5$. 273. $|z|<1$. 274. $|z|<2$, 275. $|z+i|<3$. 276. $|z|<\frac{1}{2}$. 277. $|z+2i|<\sqrt{5}$. 278. $|z+1|<5$. 279. $\forall\ (x;\ y)$. 280. $|2z+1|<1$. 281. $|z+2|<1$. 282. $|z+1|<1$. 283. $|z+i|<\frac{1}{2}$. 284. $|z+1|<1/3$. 285. $|z-1|<3$. 286. $|z-i|<3$. 287. $|4z+i|<1$. 288. $|z+2i|<5$. 289. $|z+i|<\sqrt{5}$. 290. $|z-i|<2$. 291. $|z+2|<2$. 292. $|z-3i|<3$. 293. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0<x\leqslant 2)$. 294. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(x+1)^n$ $(-2<x<0)$. 295. $e^{-2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(-\infty;\ \infty)$. 296. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$ $(-2-\sqrt{3}<x<-2+\sqrt{3})$. 297. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^{n-1}}{(2n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}$ $(-\infty;\ \infty)$. 298. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$ $(0<x<2)$. 299. $1+\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-5)}{2^{n-1}}\frac{(x-1)^n}{n!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 300. $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ \ldots\ \cdot(3n-4)}{3^n n!}(x-1)^n$ $(-\infty;\ \infty)$. 301. $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n\times(x+2)^n$ $\left(-8/3<x<-\frac{4}{3}\right)$. 302. $\frac{1}{11}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n$ $\left(-\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}\right)$. 303. $\ln 8+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{5}{8}\right)^n(x-1)^n$ $\left(-\frac{3}{5}<x\leqslant\frac{13}{5}\right)$.

304. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$. 305. $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 306. $1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 307. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\times\frac{x^{2n-1}}{3^{2n-1}(2n-1)!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 308. $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ \ldots\ \cdot 2n}\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}}$ $(-2;\ 2)$. 309. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $(-1;\ 1)$. 310. $1+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty;\ \infty)$.

311. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2^n}\sin\frac{\pi n}{4}\frac{x^n}{n!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 312. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+3}}{n!}$ $(-\infty;\ \infty)$.

313. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{2^n n!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 314. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{n+2}}{n}$ $(-1;\ 1]$.

315. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 316. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 317. $\sum_{n=0}^{\infty}\ln^n 3\,\frac{x^n}{n!}$ $(-\infty;\ \infty)$. 318. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2(n+1)}}{n}$ $[-1;\ 1]$.

319. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot 3^{2n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-2}$ $(-\infty;\ \infty)$. 320. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}x^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(-\infty;\ \infty)$.

321. 0,25. 322. 2/3. 323. 1/3. 324. 0,5. 325. 1/60. 326. 1/6. 327. 1/3. 328. 4/3. 329. 1,7188. 330. 3,0173. 331. 0,3089. 332. 0,9848. 333. 0,2624. 334. 1,0986. 335. 0,2014. 336. 0,4636. 337. 0,9986. 338. 4,0412. 339. 0,3679. 340. 1,3956.

341. 0,245. 342. 0,005. 343. 0,098. 344. 3,239. 345. 0,391. 346. 0,487. 347. 0,232. 348. 0,497. 349. 32,831. 350. 0,323. 351. $y=\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(x-1)^3}{6}-\frac{(x-1)^4}{6}+\cdots$. 352. $y=x+x^2-\frac{x^3}{6}+\cdots$. 353. $y=2+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}x^2+\cdots$. 354. $y=2+9x+\frac{31}{2}x^2+\cdots$. 355. $y=1+2x+7x^2+\cdots$. 356. $y=1+\frac{\pi}{3}x+\frac{x^2}{4}+\cdots$. 357. $y=\frac{(x+1)^2}{2}-\frac{(x+1)^3}{3}+\frac{(x+1)^4}{12}+\cdots$. 358. $y=2(x-2)+\frac{(x-2)^3}{3}+\frac{(x-2)^4}{2}+\cdots$. 359. $y=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}+\cdots$. 360. $y=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\cdots$. 361. $y=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\cdots$. 362. $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{28x^4}{4!}+\cdots$. 363. $y=1+x+\frac{3x^2}{2!}+\frac{8x^3}{3!}+\frac{34x^4}{4!}+\cdots$. 364. $y=4\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)$. 365. $y=1+x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{6}+\frac{x^6}{45}+\cdots$. 366. $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{5x^6}{6!}+\cdots$. 367. $y=x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{24}-\frac{x^5}{24}+\cdots$. 368. $y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^4}{4!}-\frac{9x^6}{6!}+\frac{55x^8}{8!}+\cdots$. 369. $y=1+\frac{2x^4}{4!}-\frac{2x^5}{5!}+\frac{2x^6}{6!}-\frac{2x^7}{7!}+\cdots$. 370. $y=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{3x^6}{6!}+\frac{5x^8}{8!}+\frac{7x^{10}}{10!}+\cdots$.

371. $y=C_1J_{1/2}(x)+C_2J_{-1/2}(x)$. 372. $y=C_1J_{3/2}(x)+C_2J_{-3/2}(x)$. 373. $y=C_1J_{2/3}(x)+C_2J_{-2/3}(x)$. 374. $y=C_1J_{1/3}(2x)+C_2J_{-1/3}(2x)$. 375. $y=C_1J_0\left(\frac{x}{3}\right)+C_2K_0\left(\frac{x}{3}\right)$. 376. $y=C_1J_0(2x)+C_2K_0(2x)$. 377. $y=x^{3/2}[C_1J_{5/4}(x^2)+C_2J_{-5/4}(x^2)]$. 378. $y=\sqrt[4]{x}\,[C_1J_{1/2}(\sqrt{x})+C_2J_{-1/2}(\sqrt{x})]$. 379. $y=\frac{1}{x^2}[C_1J_2(x)+C_2K_2(x)]$. 380. $y=\frac{1}{x}[C_1J_1(2x)+C_2K_2(2x)]$.

§ 3. 381. $f(x)=-\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. 382. $f(x)=\pi+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. 383. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)}$, $S=\frac{\pi}{4}$. 384. $f(x)=2+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$. 385. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $S=\frac{\pi^2}{8}$. 386. $f_1(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$, $f_2(x)=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}$, $S_1=\frac{\pi^2}{6}$, $S_2=\frac{\pi^2}{12}$. 387. $f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$, $S=\frac{\pi^3}{32}$. 388. $f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n^2}\times\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx$. 389. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 390. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$. 391. $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 392. $f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{2^2-(2n-1)^2}$. 393. $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{4n^2-1}$, $S=\frac{1}{2}$. 394. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{\pi^2}{n}+\frac{2}{n^3}((-1)^n-1)\right]\sin nx$. 395. $f(x)=1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi(2n-1)x}{2}$. 396. $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\times\sin\pi nx$. 397. $f(x)=1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi nx}{2}-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\times\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$. 398. $f(x)=\frac{8}{3}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}$. 399. $f(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^2}\cos\pi(2n-1)x+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\pi nx$. 400. $f(x)=\operatorname{sh}2\left[\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2}{4+\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}-\frac{\pi n}{4+\pi^2n^2}\sin\frac{\pi nx}{2}\right]\right]$. 401. $f(x)=1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{\pi(2n-1)x}{2}$. 402. $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. 403. $f(x)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{\pi(2n+1)x}{2}$. 404. а) $f(x)=x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$. б) $f(x)=x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$. в) $f(x)=x^4=\frac{\pi^4}{5}+$

$+8\pi^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + 48 \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^4}$. **405.** $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}$. **406.** $f(x) = 2\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$. **407.** $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$. **408.** $f(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{inx}}{1-in}$.

409. $f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{i}{n} e^{-i\pi n x}$. **410.** $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^\infty \left(\frac{i\pi n - 1}{1+\pi^2 n^2}\operatorname{sh}(1+i\pi n) - \frac{i}{\pi n}\operatorname{sh}(i\pi n)\right)e^{i\pi n x}$. **411.** $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\frac{1-in}{1+n^2}e^{inx}$. **412.** $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}e^{inx}$. **413.** $f(x) = \frac{e^2-e^{-2}}{2}\left[\frac12 + \sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{2+i\pi n}{4+\pi^2 n^2}\times(-1)^n e^{\frac{i\pi n x}{2}}\right]$. **414.** $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n i}{n}e^{inx}$. **415.** $f(x) = \frac14 + \frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{e^{-\frac{i\pi n}{2}}-1}{n}e^{i\pi n x}$. **416.** $f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^\infty \frac{(-1)^n-1}{n^2}e^{inx}$.

417. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty \sin\frac{(2n+1)\pi}{3}\,\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **418.** $f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2}$. **419.** $f(x) = \frac{4a}{\pi}\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

420. $f(x) = \frac{\pi}{6} + \frac{3}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\sin\frac{\pi n}{3}}{n^2}\left(\cos\frac{\pi n}{3}\sin 2nx - \sin\frac{\pi n}{3}\cos 2nx\right)$.

421. $f(x) = \frac{\varphi(\pi-\varphi)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1-\cos\pi\varphi}{n^2}\cos 2nx$. **422.** $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{\sin(2n+1)\varphi}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x$. **423.** $f(x) = \frac34 + \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)}{\pi^2 n^2}\times\cos\frac{\pi n x}{2} + \left(\frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\pi^2 n^2} - \frac{(-1)^n}{2\pi n}\right)\sin\frac{\pi n x}{2}$. **424.** $f(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty (-1)^n \times \left(\frac{4}{\pi(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)\pi}{6} + \frac{12}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{3}$.

425. $f(x) = \frac13 - \frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\cos\pi n x$. **426.** $f(x) = \frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^\infty \sin\frac{(2n+1)\pi}{8}\times\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}$.

§ 4. 438. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\cos\alpha x\,d\alpha$. **439.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha x\,\frac{d\alpha}{\alpha}$, $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$. **440.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\cos\alpha x\,d\alpha$. **441.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha$, $x\in(0;\ \infty)$. **422.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha\cdot\sin\alpha x}{\alpha^2+1}\,d\alpha$, $x\in(0;\ \infty)$.

443. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha^2}\sin\alpha x\,d\alpha$. **444.** $f(x)=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\cos\alpha x\,d\alpha$, $\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$. **445.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos\frac{\alpha\pi}{2}\,\frac{\cos\alpha x}{1-\alpha^2}\,d\alpha$. **446.** $f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\alpha x}}{4+\alpha^2}\,d\alpha$. **447.** $f(x) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\alpha e^{i\alpha x}}{(1+\alpha^2)^2}\,d\alpha$. **448.** $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{i\alpha x}\frac{a-\alpha i}{a^2+\alpha^2}\,d\alpha$. **449.** $f(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin\alpha}{\alpha}e^{i\alpha x}\,d\alpha$. **450.** $F_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\alpha^2+1}$, $F_s(\alpha) = \sqrt{\frac2\pi}\,\frac{\alpha}{\alpha^2+1}$. **451.** $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$, $F_s(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{\cos\frac\alpha2-\cos\alpha}{\alpha}$. **452.** $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{1+\cos\alpha\pi}{1-\alpha^2}$, $F_s(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{\sin\alpha\pi}{1-\alpha^2}$. **453.** $F_c(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{\sin a\alpha}{\alpha}$, $F_s(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{1-\cos a\alpha}{\alpha}$. **454.** $F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{4}{1-4\alpha^2}\cos\pi\alpha$. **455.** $F(\alpha)=e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. **456.** $F(\alpha)=i\sqrt{\frac8\pi}\,\frac{\alpha}{(\alpha^2+1)^2}$.

457. $F(\alpha)=\sqrt{\frac2\pi}\,\frac{k^2}{\alpha^2+k^2}$. **458.** $F(\alpha)=\frac{2i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\alpha e-\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{e(1+\alpha^2)}$.

459. $F(\alpha)=\frac{B}{\alpha}(\sin\alpha\tau - i(1-\cos\alpha\tau))$, $|F(\alpha)|=\frac{2B}{\alpha}\left|\sin\frac{\alpha\tau}{2}\right|$.

460. $F(\alpha)=\frac{A(a-i\alpha)}{a^2+\alpha^2}$, $|F(\alpha)|=\frac{A}{\sqrt{a^2+\alpha^2}}$. **461.** $F(\alpha)=\frac{2A}{\alpha}\sin\frac{\alpha\tau}{2}$, $|F(\alpha)|=\frac{2A}{\alpha}\left|\sin\frac{\alpha\tau}{2}\right|$.

Глава 10

§ 1. 1. -1. **2.** $14/3$. **3.** $4/9$. **4.** $\frac{1}{e}$. **5.** $\frac{8}{15}(2\sqrt{2}-1)$. **6.** $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **7.** $\ln\frac{25}{24}$. **8.** $\frac{\pi}{12}$. **9.** $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. **10.** $\pi-2$. **11.** 2. **12.** $-\frac{\pi}{16}$. **13.** $\pi\left(\frac{7}{2}-\sqrt{6}\right)$. **14.** $\frac{\pi}{3}$. **15.** 2. **16.** $-137/12$. **17.** $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. **18.** $\frac{9\pi}{4}$. **19.** $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. **20.** $\frac{\pi}{6}$. **21.** $\frac{a^2}{6}$. **22.** $12/5$. **23.** $\frac{3\pi}{2}$. **24.** 2. **25.** $1/3$. **26.** $\frac{1}{6}a^2b^2(a-b)$. **27.** $\ln\frac{4}{3}$. **28.** $\frac{1}{2}\ln\frac{14}{11}$. **29.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **30.** $\ln\frac{8}{3}-1$. **31.** $\int_1^4 dx\int_1^3 f(x,y)\,dy=\int_1^3 dy\int_1^4 f(x,y)\,dx$. **32.** $\int_0^3 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^3 f(x,y)\,dx$. **33.** $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)\,dx$. **34.** $\int_0^1 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)\,dy$. **35.** $\int_1^2 dx\int_{2x}^{2x+3} f(x,y)\,dy=\int_2^4 dy\int_1^{y/2} f(x,y)\,dx+\int_4^5 dy\int_1^2 f(x,y)\,dx+\int_5^7 dy\int_{\frac{y-3}{2}}^2 f(x,y)\,dx$. **36.** $\int_0^5 dx\int_0^x f(x,y)\,dy=\int_0^5 dy\int_y^5 f(x,y)\,dx$. **37.** $\int_0^5 dx\int_0^{5-x} f(x,y)\,dy=\int_0^5 dy\int_0^{5-y} f(x,y)\,dx$. **38.** $\int_0^2 dx\int_0^x f(x,y)\,dy+\int_2^4 dx\int_0^2 f(x,y)\,dy+\int_4^6 dx\int_{x-4}^2 f(x,y)\,dy=\int_0^2 dy\int_y^{y+4} f(x,y)\,dx$. **39.** $\int_0^8 dx\int_{-\sqrt{8x-x^2}}^{\sqrt{8x-x^2}} f(x,y)\,dy=\int_{-4}^4 dy\int_{4-\sqrt{16-y^2}}^{4+\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx$. **40.** $\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy+\int_1^{\sqrt{2}} dx\int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$. **41.** $\int_0^1 dx\int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy=$

$=\int_0^{1/2} dy\int_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_{1/2}^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **42.** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\,dx$. **43.** $\int_0^1 dy\int_{-y}^{y} f(x,y)\,dx+\int_1^{\sqrt{2}} dy\times\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx=\int_{-1}^0 dx\int_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy$. **44.** $\int_0^1 dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{2-x} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$. **45.** $\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_{y^2/2}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^1 dy\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x,y)\,dx+\int_1^2 dy\int_{y^2/2}^{2} f(x,y)\,dx$. **46.** $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)\,dy$. **47.** $\int_0^2 dy\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$. **48.** $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy$. **49.** $\int_0^2 dx\int_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy$. **50.** $\int_{-1}^0 dy\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **51.** $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$. **52.** $\int_0^a dy\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{y} f(x,y)\,dx$. **53.** $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx$. **54.** $\int_0^{48} dy\int_{y/12}^{\sqrt{y/3}} f(x,y)\,dx$. **55.** $\int_2^3 dy\int_0^{\sqrt{y-2}} f(x,y)\,dx+\int_3^4 dy\int_0^{4-y} f(x,y)\,dx$. **56.** $\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy+\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)\,dy$. **57.** $\int_0^4 dy\int_0^{y/2} f(x,y)\,dx+\int_4^6 dy\int_0^{6-y} f(x,y)\,dx$. **58.** $\int_{-1}^0 dx\int_{-2\sqrt{1+x}}^{2\sqrt{1+x}} f(x,y)\,dy+\int_0^8 dx\int_{-2\sqrt{1+x}}^{2-x} f(x,y)\,dy$. **59.** $\int_0^{1/2} dx\int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,dy+\int_{1/2}^{\sqrt{2}} dx\int_0^1 f(x,y)\,dy+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)\,dy$. **60.** $\int_0^2 dy\int_0^{2-\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_0^2 dy\int_{2+\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx+\int_2^4 dy\int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx$. **61.** $\int_0^1 dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,dx+\int_{-1}^0 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f(x,y)\,dx$. **62.** $\int_0^{a/2} dy\int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx+$

$+\int\limits_{a/2}^{a} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx$. 63. $\int\limits_0^{a} dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x, y)\,dx$.

64. $\int\limits_0^{a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{a} dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x, y)\,dx$.

65. $\int\limits_1^{3} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x, y)\,dx$. 66. $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

67. $\int\limits_0^{3} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{y+4} f(x, y)\,dx + \int\limits_3^{8} dy \int\limits_{\sqrt[3]{y}}^{10-y} f(x, y)\,dx$. 68. $\int\limits_0^{R\sqrt{2}/2} dy \int\limits_y^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\,dx$.

69. 8/3. 70. 1/3. 71. 3/20. 72. 2/3. 73. 0. 74. 9/4. 75. 1/2. 76. —2. 77. $4a$.
78. 112/9. 79. $\frac{\pi^2}{32}$. 80. $\frac{4}{3}a^3$. 81. $\frac{\pi a}{2}$. 82. 4/3. 83. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. 84. 5/3.
85. 4. 86. 38/3. 87. 1/4. 88. $\frac{2}{3}R$. 89. 15/4. 90. $12\pi < I < 20\pi$. 91. $2 < I < 8$.
92. $36\pi < I < 100\pi$. 93. $0 < I < 64$. 94. $4 < I < 36$. 95. $4 < I < 8(5-2\sqrt{2})$.
96. $-8 < I < \frac{2}{3}$. 97. $4\pi < I < 22\pi$. 98. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

99. $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^{R} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$. 100. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

101. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2/\cos\varphi} \rho f(\rho)\,d\rho$. 102. $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} f(\mathrm{tg}\,\varphi)\,\rho\,d\rho$.

103. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2/\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho$. 104. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi/\cos^2\varphi}^{1/\cos\varphi} \rho f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,d\rho$.

105. $\int\limits_0^{\mathrm{arctg}\frac{a}{b}} d\varphi \int\limits_0^{b\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{\mathrm{arctg}\frac{a}{b}}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$.

106. $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho^2)\,d\rho + \int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho f(\rho^2)\,d\rho$. 107. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f(\rho\cos\varphi,$ $\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} f(\rho\cos\varphi,$ $\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$. 108. $\frac{\pi R^4}{2}$. 109. 3π. 110. $\frac{2\pi}{3}$. 111. $\frac{3}{2}\pi a^4$. 112. $\frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

113. $\left(\frac{22}{9} + \frac{\pi}{2}\right)a^3$. 114. $\frac{a^3}{12}$. 115. 24π. 116. $\frac{\pi^2}{6}$. 117. $\frac{2\sqrt{2}}{15}a^4$.
118. $J = ab\rho$; $\frac{2}{3}\pi ab$. 119. $\frac{165}{128} - \ln 2$. 120. $J = -\frac{1}{3u}$; $\frac{2}{9}(q^{3/2} - p^{3/2})\ln\frac{b}{a}$.
121. $\frac{1}{2k}(e^k - 1)$. 123. $u = xy$, $v = x - y$. 124. 8/3. 125. $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. 126. $\frac{64}{3}a^2$.
127. $\frac{1}{2}(15 - 16\ln 2)$. 128. $(a^2 - b^2)\ln\frac{m}{n}$. 129. $\frac{3a^2}{2}\ln 2$. 130. $7\ln 2$.
131. $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. 132. $\frac{5}{4}\pi a^2$. 133. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\right)a^2$. 134. $8\pi + 9\sqrt{3}$. 135. $\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$.
136. $2a^2$. 137. $(\pi - 1)a^2$. 138. $\frac{3}{4}a^2\pi$. 139. $\frac{2}{3}$. 140. $\frac{1}{1260}$. 141. 9.
142. 64/3. 143. 16/3. 144. 125/18. 145. 27/2. 146. 12. 147. 5/6. 148. 3π.
149. πab^2, $a > r\sqrt{2}$. 150. 81/5. 151. 560/3. 152. $\frac{abc}{3}$. 153. $\frac{3\pi a^4}{64}$.
154. $2\pi a^3$. 155. $\frac{\pi}{32}$. 156. 88/105. 157. $\frac{3\pi a^4}{32}$. 158. $\frac{4}{9}\frac{b^3}{\sqrt{a}}$. 159. $\frac{81}{32}\pi a^3$.
160. $\frac{\pi}{8}$. 161. 1/6. 162. $78\frac{15}{32}$. 163. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. 164. 16. 165. 45. 166. 40/3.
167. $\frac{16}{3}$. 168. 22π. 169. $\frac{16}{3}R^3$. 170. $12\frac{4}{21}$. 171. $\frac{4R^5}{15a^2}$. 172. 27.
173. 3/8. 174. 16/15. 175. 2π. 176. $\frac{2}{9}(9e^2 - 2e^3 - 1)$. 177. $3e - 8$. 178. 1/45.
179. 40π. 180. 2π. 181. $\frac{5}{2}\pi R^3$. 182. $\frac{3}{2}\pi a^3$. 183. $\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.
184. $\frac{a^3}{24}$. 185. $\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8} + 1\right)$. 186. $\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$. 187. $\frac{3\sqrt{3} - 2}{2}$.
192. $\frac{2}{3}(a + b)\sqrt{2ab}$. 193. $\frac{1}{p}[(a^2 + p^2)^{3/2} - p^3]$. 194. 14. 195. $\frac{4}{\sqrt{3}}a^2$.
196. 13. 197. $\frac{8\sqrt{2}}{3}a^2$. 198. 280π. 199. 8π. 200. $4(m - n)R^2$. 201. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$.
202. $3\sqrt{2}\pi$. 203. $\frac{4}{3}\sqrt{q}[(p + 2a)^{3/2} - p^{3/2}]$. 204. $2\sqrt{2}\pi p^2$. 205. $\frac{16}{3}(\sqrt{8} - 1)$.
206. $8\sqrt{2}a^2$. 207. $2\sqrt{2}\pi p^2$. 208. $\frac{76}{3}a^2$. 209. $\frac{8}{3}\sqrt{2}a^2$. 210. $16a^2$.
211. $8\sqrt{2}\pi$. 212. 4. 213. $4a^2$. 214. $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. 215. $8a^2$. 216. $3\pi a^2$.
217. $\frac{2\pi ab}{3}[(1 + c^2)^{3/2} - 1]$. 218. $2\pi a^2$. 219. $\frac{2\pi}{3}[(1 + R^2)^{3/2} - 1]$.
220. $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{8} - \frac{\pi}{3} + 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}\right]$. 221. $\frac{a^2}{9}(20 - 3\pi)$.
222. $4\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. 223. $\frac{\pi}{6}(27 - 5\sqrt{5})$. 224. $2a^2(\pi - 2)$. 225. $\pi a^2(\sqrt{2} +$ $+ \ln(1 + \sqrt{2}))$. 226. $3\sqrt{2}\pi a^2$. 227. $2a^2(\pi + 4 - 4\sqrt{2})$. 230. $\omega =$

$= \arcsin \dfrac{bc}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$. **231.** 36. **232.** 2π. **233.** $\frac{1}{2}\pi\delta R^2$. **234.** $\frac{4}{3}a^2$. **235.** $2\pi r(R-r)$. **236.** $\frac{4}{3}\delta ab^2$. **237.** $\frac{ab^2}{2}$. **238.** $\frac{2}{3}R^3$. **239.** $M_x = M_y = \frac{R^3}{12}$. **240.** $M_x = \frac{4}{15}$, $M_y = \frac{11}{12}$. **241.** πR^2. **242.** $M_x = \frac{\pi}{24}$; $M_y = 1 - \frac{\pi^2}{12}$. **243.** $M_x = \frac{4}{3}a^3$, $M_y = \frac{5}{8}\pi a^3$. **245.** $\frac{a^2b}{12}$; $\frac{a^2b^2}{24}$. **246.** $x_c = y_c = \frac{a}{3}$. **247.** $\left(\frac{3}{5}x_0;\ \frac{3}{8}y_0\right)$. **248.** $x_c = y_c = \frac{4r}{3\pi}$. **249.** $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$. **250.** $\left(0;\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **251.** $\left(\left(1-\frac{\pi}{4}\right)(\sqrt{2}+1);\ \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(2+\sqrt{2})\right)$.

252. $\left(\frac{3\pi}{16};\ 0\right)$. **253.** $\left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};\ \frac{4R\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\alpha}\right)$. **254.** $\left(0;\ \frac{4(R^2+Rr+r^2)}{3\pi(R+r)}\right)$. **255.** $\left(\frac{1}{5}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[10]{8}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{16}}\right)^{-1};\ \frac{5}{14}\sqrt[5]{\frac{1}{4}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[10]{8}} - \frac{1}{2\sqrt[5]{16}}\right)^{-1}\right)$. **256.** $x_c = y_c = \frac{3}{31}\left(\arcsin\frac{5}{13} - 6\ln\frac{3}{2}\right)$. **257.** $\left(\frac{2}{5};\ 0\right)$; **258.** $\left(\frac{5}{6}a;\ 0\right)$. **259.** $\left(\frac{\pi a\sqrt{2}}{8};\ 0\right)$. **260.** $\left(\pi a;\ \frac{5}{6}a\right)$. **261.** $\left(\frac{2R\sin\alpha}{3\alpha};\ 0\right)$. **262.** $\left(\frac{4R}{3}\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha-\sin 2\alpha};\ 0\right)$. **263.** $\frac{a^3b}{3}$; $\frac{ab^3}{3}$. **264.** 7/6. **265.** $I_x = \frac{1}{12}$, $I_y = \frac{7}{12}$. **266.** $\frac{5}{4}\pi R^4$. **267.** $\frac{2}{3}a^4$. **268.** $I_x = \frac{\pi ab^3}{4}$; $I_y = \frac{\pi a^3b}{4}$; $I_0 = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2)$. **269.** $\frac{ab(a^2+b^2)}{12}$. **270.** $\frac{ah}{48}(a^2+12h^2)$. **271.** $\frac{3\pi R^4}{2}$. **272.** $ah\left(\frac{2h^2}{7}+\frac{a^2}{30}\right)$. **273.** $\frac{1}{8}R^4(2\alpha-\sin 2\alpha)$. **274.** $\frac{1}{8}R^4(2\alpha-\sin 2\alpha) - \frac{1}{6}R^4\cos\alpha\sin^3\alpha$.

§ 2. 277. $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} dy \int\limits_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} f\,dz = \int\limits_0^b dy \int\limits_0^{a\left(1-\frac{y}{b}\right)} dx \int\limits_0^{c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)} f\,dz = \int\limits_0^c dz \int\limits_0^{a\left(1-\frac{z}{c}\right)} dx \int\limits_0^{b\left(1-\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)} f\,dy$. **278.** $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_{-\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} f\,dz = \int\limits_{-b}^{b} dy \int\limits_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} dx \int\limits_{-\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}}^{\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}} f\,dz = \int\limits_{-c}^{c} dz \int\limits_{-\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}}^{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-z^2}} dx \int\limits_{-\frac{b}{ac}\sqrt{a^2c^2-c^2x^2-a^2z^2}}^{\frac{b}{ac}\sqrt{a^2c^2-c^2x^2-a^2z^2}} f\,dy$.

279. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^1 f\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_0^1 f\,dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f\,dy$.

280. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{1} f\,dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{x^2+y^2}^{1} f\,dz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dx \int\limits_0^{\sqrt{z-x^2}} f\,dy$.

281. $\frac{3}{2}$. **282.** $\frac{a^6}{48}$. **283.** $\frac{1}{6}$. **284.** $\frac{8}{9}a^2$. **285.** $\frac{\pi}{10}$. **286.** $\frac{a^4}{8}$. **287.** $\frac{1}{96}$. **288.** $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$. **289.** 0. **290.** $\frac{2}{3}$. **291.** 2. **292.** 0. **293.** $\frac{abc}{3}(a^2+b^2+c^2)$. **294.** $\frac{1}{144}$. **295.** $\frac{1}{48}$. **296.** 0. **297.** $\frac{7}{192}$. **298.** $\frac{ab^2}{12}(10b-3a)$. **299.** $\frac{\pi}{8}+\frac{4}{15}$. **300.** $\frac{1}{364}$. **301.** $\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$. **302.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$. **303.** $\frac{59}{480}\pi R^5$. **304.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **305.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **306.** $\frac{\pi h^2R^2}{4}$. **307.** $\frac{8}{9}a^2$. **308.** $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **309.** πR^3. **310.** $\frac{16}{3}\pi$. **311.** $\frac{16}{77}\pi$. **312.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **313.** $\frac{\pi}{8}$. **314.** $\frac{4}{15}\pi(R^5-r^5)$. **315.** $\frac{2}{3}\pi$. **316.** $\frac{\pi}{10}$. **317.** $\frac{\pi^2a^2}{8}$. **318.** $2\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **319.** $\frac{6}{5}$. **320.** $\frac{7}{12}$. **321.** $\frac{7}{24}$. **322.** $\frac{\pi}{2}$. **323.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **324.** $\frac{19\pi}{6}$. **325.** $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$. **326.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^3$. **327.** 8. **328.** $\frac{3}{35}$. **329.** $4(4-3\ln 3)$. **330.** $\frac{\pi}{2}$. **331.** $\frac{\pi}{8}$. **332.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **333.** $\frac{\pi^2a^3}{4}$. **334.** $\frac{4\pi a^3}{21}$. **335.** $\frac{3}{2}$. **336.** $\frac{\pi h^4}{4}$. **337.** $\frac{a^4}{12}$. **338.** $\frac{81\pi}{2}$. **339.** $\frac{\pi}{2}$. **340.** $\frac{\pi R^2h(h+2)}{2}$. **341.** $\frac{8\pi}{5}$. **342.** $6k\pi r^2$ (k — коефіцієнт пропорційності). **343.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$. **344.** $\frac{32\pi R^5}{15}$. **345.** $\frac{a^2bc}{2}$, $\frac{ab^2c}{2}$, $\frac{abc^2}{2}$. **346.** $\frac{\pi}{15}$. **347.** $\frac{\pi}{4}$. **348.** $\frac{\pi R^2H^2}{4}$. **349.** $\frac{\pi abc^3}{4}$. **350.** $\left(\frac{14}{15};\ \frac{26}{15};\ \frac{8}{3}\right)$. **351.** $\left(\frac{a}{4};\ \frac{b}{4};\ \frac{c}{4}\right)$. **352.** $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{3}\right)$. **353.** (0; 1; 0). **354.** $\left(\frac{6}{5};\ \frac{12}{5};\ \frac{8}{5}\right)$. **355.** $\left(\frac{18}{7};\ \frac{15}{16}\sqrt{6};\ \frac{12}{7}\right)$. **356.** $\left(\frac{2}{5};\ \frac{2}{5};\ \frac{7}{30}\right)$. **357.** $\left(\frac{4}{3};\ 0;\ 0\right)$; **358.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{4}c\right)$. **359.** $\left(\frac{7}{18}p;\ 0;\ \frac{7}{176}p\right)$. **360.** $\left(0;\ \frac{4}{5}a;\ \frac{4}{15}h\right)$. **361.** $\left(0;\ \frac{3}{7}b;\ \frac{2}{7}h\right)$. **362.** $\left(0;\ 0;\ \frac{2}{3}H\right)$. **363.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{4}H\right)$. **364.** $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{8}a\right)$. **365.** $x_c = y_c = z_c = \frac{3a}{8}$.

366. $\left(\frac{3}{8}a;\ \frac{3}{8}b;\ \frac{3}{8}c\right)$. 367. $\left(0;\ 0;\ \frac{3a}{8}\right)$; 368. $\left(1;\ 1;\ \frac{5}{3}\right)$.

369. $\left(0;\ 0;\ \frac{7}{20}\right)$. 370. $\left(0;\ 0;\ \frac{3(a+h)^2}{4(2a+h)}\right)$. 371. $\left(\frac{12a}{5(3\pi-4)};\ 0;\ 0\right)$.

372. $\left(0;\ 0;\ \frac{5a}{83}(6\sqrt{3}+5)\right)$. 373. $\left(0;\ 0;\ \frac{3R}{8}(1+\cos\alpha)\right)$. 374. $\left(0;\ 0;\ \frac{9a}{20}\right)$.

375. $\frac{abc}{3}(a^2+b^2)$. 376. $\frac{a^5}{4}$. 377. $\frac{\pi a^5}{\sqrt{2}}$. 378. $\frac{32\sqrt{2}\,a^5}{135}$. 379. $\frac{\pi a^4 h}{10}$.

380. $\frac{abc}{60}(a^2+b^2)$. 381. $\frac{8}{21}bh\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^3}{3}\right)$. 382. 14/45. 383. $\frac{4\pi}{15}(4\sqrt{2}-5)$.

384. $\frac{9\pi a^6}{140}$. 385. $\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$. 386. $\frac{4\pi}{715}abc(a^2+b^2)$. 387. $I_{xy}=I_{xz}=\frac{\pi h^5}{20}$, $I_{yz}=\frac{\pi h^5}{5}$. 388. $I_{xy}=\frac{abc^3}{60}$; $I_{yz}=\frac{a^3bc}{60}$; $I_{zx}=\frac{ab^3c}{60}$.

389. $I_{xy}=\frac{4}{15}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{4}{15}\pi a^3bc$; $I_{zx}=\frac{4}{15}\pi ab^3c$. 390. $I_{xy}=\frac{1}{5}\pi abc^3$; $I_{yz}=\frac{1}{20}\pi a^3bc$; $I_{xz}=\frac{1}{20}\pi ab^3c$. 391. $I_{xy}=\frac{2}{225}abc^3(15\pi-16)$; $I_{xz}=\frac{2ab^3c}{1575}(105\pi-272)$; $I_{yz}=\frac{2}{1575}a^3bc(105\pi-92)$. 392. $I_{xy}=\frac{7}{2}\pi abc^3$; $I_{xz}=\frac{4}{3}\pi ab^3c$; $I_{yz}=\frac{4}{3}\pi a^3bc$. 393. $\frac{M}{3}(b^2+c^2)$; $\frac{M}{3}(c^2+a^2)$; $\frac{M}{3}(a^2+b^2)$; $\frac{M}{12}(a^2+b^2+c^2)$. 394. $\frac{224\pi}{3}$. 395. $\frac{1}{6}\pi HR^4$. 396. $\frac{7}{5}MR^2$.

397. $\frac{M}{5}(b^2+c^2)$; $\frac{M}{5}(c^2+a^2)$; $\frac{M}{5}(a^2+b^2)$. 398. $\frac{\pi HR^4}{2}$. 399. $\frac{8}{15}\pi R^5$.

400. $\frac{1}{36}\pi R^2H(3R^2+H^2)$. 401. $\frac{2}{3}\pi\gamma_0R^5$. 402. $\frac{2\pi\gamma a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$.

403. $\pi\left[(H\sqrt{a^2+H^2}-H^2)+a^2\ln\left|\frac{a}{H-\sqrt{a^2+H^2}}\right|\right]$. 404. $2\pi(R+h-\sqrt{h^2+R^2})$. 405. $\frac{2\pi h}{\sqrt{h^2+R^2}}(\sqrt{R^2+h^2}-h)$.

§ 3. 406. $\sqrt{5}\ln 2$. 407. $-\frac{3}{2}\sqrt{10}$. 408. 24. 409. $\frac{p^2}{3}(5\sqrt{5}-1)$.

410. $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}-1)$. 411. $2\pi R^{2n+1}$. 412. $2a^2$. 413. $\frac{256}{15}a^3$.

414. $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$. 415. $\frac{a^2}{3}[(1+4\pi^2)^{3/2}-1]$. 416. $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

417. $\frac{1}{12}[(R^2+4)^{3/2}-8]$. 418. $\frac{a^3}{96}(17\sqrt{17}-16)$. 419. $4a^{7/3}$. 420. $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$. 421. $\frac{\pi}{a}$. 422. $\ln\frac{5}{2}$. 423. $-\frac{8}{\sqrt{3}}$. 424. $\frac{8a\pi^3\sqrt{2}}{3}$.

425. $\frac{R^4\sqrt{3}}{32}$. 426. $\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+2\pi)^2)^{3/2}-1]$. 427. $2\pi a^2$. 428. $\frac{3}{4}$. 429. $8a$.

430. 5. 431. $2\pi a\sqrt{2}$. 432. $a\sqrt{3}(e^{\pi}-1)$. 433. $\frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1)$. 434. 2.

435. $3\pi R^2$. 436. $\frac{\pi p^2}{4}$. 437. $\frac{11}{3}$. 438. R^2. 439. $ka\left(a+\frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\times\ln\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{a+\sqrt{a^2-b^2}}\right)$. 440. $\frac{98}{81}p^2$. 441. $80\pi^2$. 442. 2. 443. $\frac{1}{3}(10\sqrt{10}-2\sqrt{2})$.

444. δa. 445. $2\left(b^2+\frac{a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$. 446. $a^2\sqrt{2}(\pi\sqrt{1+4\pi}+\frac{1}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi}))$. 447. $\sqrt{3}(1-e^{-\pi})$. 448. $\frac{9a^3\pi}{64}$. 449. $2k\pi a\sqrt{2a}$.

450. $k\pi a^2$. 451. $\left(0;\ \frac{4}{\pi}\right)$. 452. $\left(\frac{4}{3}a;\ \frac{4}{3}a\right)$. 453. $\left(0;\ \frac{2a}{5}\right)$. 454. $\left(\frac{a}{5};\ \frac{a}{5}\right)$.

455. $\left(\frac{5a}{8};\ 0\right)$. 456. $\left(b-a\sqrt{\frac{h-a}{h+a}};\ \frac{h}{2}+\frac{ab}{2\sqrt{h^2-a^2}}\right)$. 457. $\left(0;\ \frac{2a}{\pi};\ \frac{b\pi}{2}\right)$. 458. $\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4a}{3\pi};\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. 459. $\left(\frac{2}{5};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{2}\right)$. 460. $\left(\frac{567}{640};\ \frac{35\sqrt{2}}{88};\ \frac{77}{320}\right)$. 461. $\frac{16\sqrt{2}}{15}[(3\pi^2-1)(2\pi^2+1)^{3/2}+1]$. 462. $I_x=\frac{\sqrt{5}}{6}$, $I_y=\frac{\sqrt{5}}{24}$. 463. $I_x=I_y=2\pi$. 464. $I_x=I_y=\left(\frac{a^2}{2}+\frac{h^2}{3}\right)\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$; $I_z=a^2\sqrt{4\pi^2a^2+h^2}$. 465. $\frac{2Im}{a}$. 466. $\frac{8mI\sqrt{2}}{a}$. 467. $\frac{2\pi mIa}{b^2}$. 469. $f_x=0$; $f_y=\frac{2}{R}$. 470. $\frac{kMmb}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 471. $-\frac{2}{3}$. 472. 8. 473. $2\pi+\frac{4}{3}$. 474. 0.

475. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) -1; д) 0. 476. 1. 477. $\frac{1}{2}\pi a^2$.

478. 4π. 479. 0. 480. $-\frac{4}{3}a$. 481. πa^2. 482. $\frac{3}{16}\pi R\sqrt[3]{R}$. 483. 18. 484. $3\sqrt{3}$.

485. а) $\frac{3}{2}a^2$; б) a^2. 486. 0. 487. $-\frac{\pi R^3}{4}$. 488. $\frac{R^3}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$. 489. 8.

490. 12. 491. 2. 492. $\ln\frac{13}{5}$. 493. $\frac{5}{8}$. 494. 64. 495. $\pi+1$. 496. $\sqrt{2}+1$.

497. $-1-e$. 498. $\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\int_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. 499. -2. 500. $\frac{10}{3}$. 501. $abc-1$.

502. $-\frac{9}{2}$. 503. $5\sqrt{2}$. 504. $\int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2}f(t)\,dt$. 505. $u=x^3-x^2y+xy^2-y^3+c$.

506. $u=(x^2-y^2)^2+c$. 507. $u=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+c$. 508. $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+c$. 509. $u=xe^{xy}+c$. 510. $u=e^{x-y}(x+y)+c$. 511. $u=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+1}{y}+c$. 512. $u=$

$= \ln|x-y| + \frac{y}{x-y} + \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + c$. 513. $u = x^2\cos y + y^2\cos x + c$. 514. $u = \frac{e^y-1}{x^2+1} + y + c$. 515. $8x^3\sin^2 y - \frac{4\sqrt{1+y^2}}{1+x} - 5y^2 + c$. 516. $u = \ln|x+y+z| + c$. 517. $u = \mathrm{arctg}\,(xyz) + c$. 518. $u = \frac{2x}{x-yz} + c$. 519. $u = \frac{x-3y}{z} + \frac{z^2}{2} + c$. 520. $u = e^{\frac{y}{z}}(x+1) + e^{yz} - e^{-z} + c$. 521. $n = 1$; $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + c$. 522. $a = b = -1$; $u = \frac{x-y}{x^2+y^2} + c$. 531. $\iint\limits_D y^2dxdy$.

532. $\frac{1}{2}\iint\limits_D x\ln y\,dxdy$. 533. $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$. 534. $\iint\limits_D (y-x)\,e^{xy}dxdy$. 535. 3.

536. $\frac{112}{3}$. 537. $\frac{2}{3}a^3$. 538. $-\frac{140}{3}$. 539. $\frac{\pi R^4}{2}$. 540. 1) 0; 2) $-\frac{\pi a^3}{8}$.

541. 0. 542. $\frac{1}{5}(1-e^{\pi})$. 543. 0. 546. πab. 547. $\frac{3}{8}\pi a^2$. 548. $\frac{a^2}{6}$. 549. $6\pi a^2$.

550. $\frac{3}{2}a^2$. *Вказівка.* Покласти $y = tx$. 551. a^2. *Вказівка.* Покласти $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi$.

552. $\frac{1}{60}$. 553. $\frac{1}{210}$. 554. $\frac{4}{3}$. *Вказівка.* Параметризувати криву, поклавши $x = \sin t$.

555. $\frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$. 556. $\frac{17}{12}$. 557. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{8}{15}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0.

558. $\frac{5}{2}$. 559. $\frac{1}{4} + \ln 2$. 560. $mg(z_1 - z_2)$. 561. $\frac{k\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{c}\ln 2$.

562. $\frac{1}{2}k\ln 2$.

§ 4. 564. $-\frac{\sqrt{11}}{54}$. 565. $\sqrt{3}\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right)$. 566. $4\sqrt{61}$. 567. $\frac{\sqrt{3}}{360}$.

568. πR^3. 569. $\frac{\pi R^3}{4}$. 570. 0. 571. $\frac{2\pi R^6}{15}$. 572. $\frac{8\pi R^4}{3}$. 573. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

574. $2\pi\,\mathrm{arctg}\,\frac{h}{R}$. 575. $\frac{2\pi R}{a}\ln\frac{a+R}{a-R}$. 576. $\pi\left[R\sqrt{R^2+1} + \ln\left(R+\sqrt{R^2+1}\right)\right]$. 579. $\frac{3}{4}$. 580. $8a^3(\sqrt{2}+1)$. 581. π^2R^3. 582. $\frac{8}{3}\pi R^4$.

583. $2R^2(\pi-2)$. 584. $4R^2$. 585. $\left(0;\ 0;\ \frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}\right)$. 586. $\left(0;\ 0;\ \frac{2H}{3}\right)$.

587. $\left(\frac{R}{2};\ \frac{R}{2};\ \frac{R}{2}\right)$. 588. $\left(0;\ 0;\ \frac{R+h}{2}\right)$. 589. $x_c = 2y_c = \frac{3\left[5\sqrt{6} - \ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})\right]}{8(3\sqrt{3}-1)}$, $z_c = \frac{6\sqrt{3}}{5(3\sqrt{3}-1)}$. 590. $\left(0;\ 0;\ \frac{R}{\pi(\sqrt{2}-1)}\right)$.

591. $\left(0;\ 0;\ \frac{3}{4}\right)$. 592. $\left(0;\ 0;\ \frac{4R}{3\pi}\right)$. 593. $\frac{\pi h^4}{\sqrt{2}}$. 594. а) $\frac{2\pi R^4}{3}$; б) $\frac{4\pi R^4}{3}$.

595. $\frac{2\pi R}{3}(2R^3 - 3R^2H + H^3)$. 596. $\frac{4\pi a^4(6\sqrt{3}+1)}{15}$. 597. $\frac{8\pi R^4}{3}$.

598. $F_x = F_y = 0$, $F_z = \pi km\ln\frac{a}{b}$. 599. $\frac{\pi a^3}{3}(3\sqrt{3}-1)$. 600. $\frac{\pi}{4}\left[3\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}+1)\right]$. 601. а) $-\frac{1}{6}$; б) $-\frac{1}{6}$. 602. $\frac{2}{15}$. 603. $\frac{\pi}{4}$. 604. $\frac{a^4}{8}$.

605. $\frac{3\pi R^4}{8}$. 606. $4\pi a^3$. 607. 0. 608. $\frac{1}{8}$. 609. $\frac{2\pi R^7}{105}$. 610. $\frac{2}{5}\pi a^2bc$.

611. а) $-\frac{4}{3}\pi abc$; б) 0. 612. $R^2H\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right)$. 613. $\frac{\pi}{8}$. 614. $\frac{\pi a^2b^2}{2}$.

615. $\frac{12}{5}\pi R^5$. 616. $4\pi\left(\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}\right)$. 617. $4\pi abc$. 618. $3\pi a^2H$.

620. $\frac{\pi R^2H}{4}$. 621. $\frac{\pi R^2H}{3}$. 622. $-\frac{R^2H}{3}$. 623. πR^4. 625. $\frac{1}{15}$. 626. $4\pi R^2$.

629. $-a^2$. 630. $-\frac{\pi R^6}{8}$. 631. $-\pi a^2$. 632. 0. 633. $\frac{-31}{30}$. 634. $\frac{9\pi}{4}$. 635. 0.

636. $-2\pi R^2$. 637. 0. 638. -2π. 639. $-\pi$. 640. 0. 641. $\frac{2\pi R^2}{\sqrt{3}}$. 642. $2\pi Rr^2$.

ДОДАТОК

Формули з елементарної математики

1. Степені і корені

Якщо $a > 0$, $b > 0$, то:
$a^m a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$;
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $n \neq 0$; $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $n \neq 0$; $a^0 = 1$.
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbf{N}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $n \in \mathbf{N}$.

2. Формули скороченного множення

1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат суми або різниці;
2) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — різниця квадратів;
3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суми;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сума кубів;
5) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб різниці;
6) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — різниця кубів;
7) $(a + b)^n = a^n + \dfrac{n}{1}a^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 +$
$+ \cdots + b^n$ — біном Ньютона.

3. Квадратне рівняння

Якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

4. Логарифми

Якщо $y > 0$, $z > 0$, $a > 1$, $a \neq 1$, то:
1) $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$ — означення логарифма;
2) $a^{\log_a y} = y$ — основна логарифмічна тотожність;
3) $\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z$ — логарифм добутку;
4) $\log_a \left(\dfrac{y}{z}\right) = \log_a y - \log_a z$ — логарифм частки;

5) $\log_a (y^k) = k \log_a y$ — логарифм степеня;
6) $\log_a y = \dfrac{\log_c y}{\log_c a}$ $(c > 0,\ c \neq 1)$ — формула переходу;
7) $\log_a y = \dfrac{1}{\log_y a}$, $y \neq 1$; 8) $\log_a a = 1$; 9) $\log_a 1 = 0$.

5. Основні тригонометричні тотожності

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

4) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$;

6) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$; 7) $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$; 8) $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

6. Значення функцій деяких кутів

1) $\sin 0 = 0$, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$;

2) $\cos 0 = 1$, $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$;

3) $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ — не існ.;

4) $\operatorname{ctg} 0 =$ не існ., $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2} = 0$.

7. Формули додавання.

1) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
2) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
3) $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

8. Подвійні і потрійні аргументи

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;
3) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$; 4) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;
5) $\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; 6) $\sin 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$;
7) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

9. Формули пониження степеня

1) $\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; 2) $\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$.

10. Перетворення суми функцій в добуток

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

4) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 6) $\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

11. Перетворення добутку функцій в суму

1) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$;

2) $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$;

3) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$.

ЗМІСТ