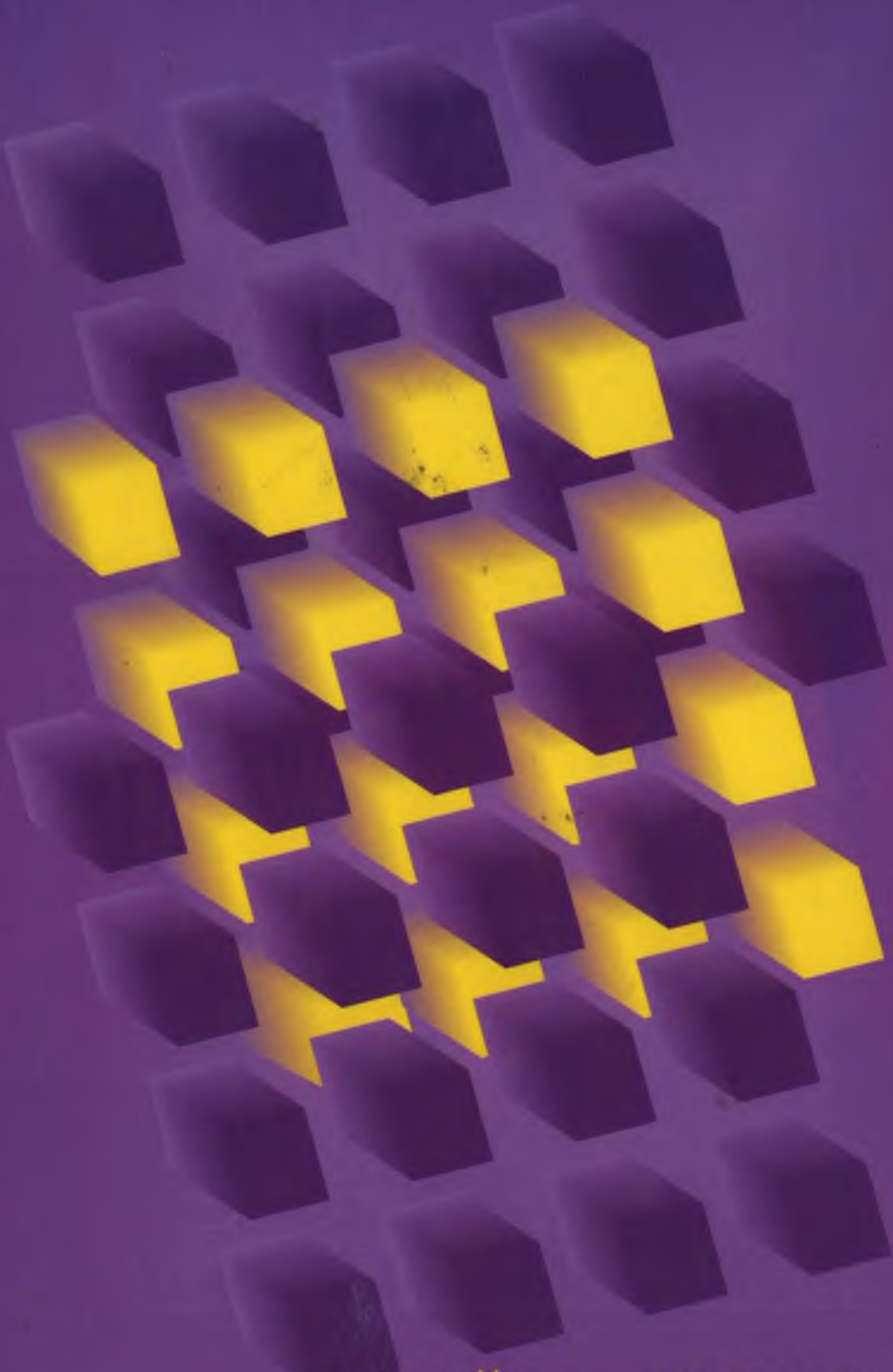
МАТЕМАТИКА ДЛЯ ІНЖЕНЕРІВ



ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ЗМІСТУ І МЕТОДІВ НАВЧАННЯ
Національний університет «Львівська політехніка»

Ю.К. Рудавський, П.П. Костробій,
Х.П. Луник, Д.В. Уханська

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ТА
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний підручник
для студентів базових напрямків
інженерно-технічних спеціальностей

Львів
Видавництво «Бескид Біт»
2002

УДК 516

Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Луник Х.П., Уханська Д.В.
Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. підручник – Львів: Видавництво “Бескид Біт”, 2002. – 262 с.
ISBN 966-96071-2-4

У навчальному підручнику викладена лінійна алгебра та аналітична геометрія в обсязі програми цього курсу для студентів базових напрямків інженерно-технічних спеціальностей.

Підручник містить відомості про матриці і визначники, лінійні системи рівнянь, елементи векторної алгебри та аналітичної геометрії на площині і у просторі, лінійні простори, лінійні оператори, квадратичні форми і їх зведення до канонічного вигляду. Викладення супроводжується прикладами розв’язування достатньої кількості задач.

Іл. 78. Бібл. 15

Рецензенти: **Каленюк П.І.** – проф., докт. фіз-мат. наук,
Національний університет «Львівська політехніка»
Копич І.М. – проф., канд. фіз-мат. наук,
Львівська комерційна академія

ISBN 966-96071-2-4

Зміст

Вступ

Навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій. які автори читали протягом багатьох років на перших курсах інженерно-технічних спеціальностей НУ ”Львівська політехніка“, і містить викладення лінійної алгебри та аналітичної геометрії в обсязі програми цього курсу.

Викладення лінійної алгебри починається з вивчення матриць і визначників, причому визначник n-го порядку вводиться через визначник $(n-1)$-го порядку за допомогою розкладу за першим рядком.

Описуючи лінійні системи, ми знайомимо читача не лише із звичайною, але і з матричною формою запису системи та матричним способом розв'язування систем і правилом Крамера. Розглядається загальна теорія систем лінійних рівнянь. доводиться теорема Кронекера-Капеллі й досліджується зв'язок розв'язків однорідної та неоднорідної систем рівнянь.

Досить детально викладається векторна алгебра. Вводиться поняття лінійної залежності векторів і на його основі встановлюється можливість однозначного розкладу вектора за базисом. Відрізняється від загальноприйнятого доведення розподільної властивості векторного добутку.

Розглядаються також основні розділи лінійної алгебри: лінійні та евклідові простори, лінійні оператори, ортогональні перетворення, спряжені оператори, квадратичні форми і зведення їх до канонічного вигляду.

Викладаючи аналітичну геометрію, ми ділимо її на дві частини: аналітичну геометрію на площині, де досліджуються плоскі геометричні форми засобами векторної алгебри й методу координат, та аналітичну геометрію в просторі, в якій характеризуються просторові геометричні форми.

Загальна теорія ліній другого порядку, яка займає центральне місце в традиційних курсах аналітичної геометрії, увійшла в розділ, який присвячений лінійній алгебрі як застосуванню теорії квадратичних форм.

РОЗДІЛ 1

Матриці та визначники

§ 1. МАТРИЦІ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1. Визначення матриці. Окремі види матриць

Означення 1.1 *Матрицею розмірів m на n називається сукупність $m \cdot n$ чисел, які розміщені у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців.*

Ми будемо записувати матрицю у вигляді

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

або скорочено

$$A = \|a_{ij}\|, \quad \left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right); \quad \text{а також} \quad A = \|a_{ij}\|_{m,n}.$$

Числа a_{ij}[1], які утворюють дану матрицю, називаються її елементами. Перший індекс елемента вказує номер рядка, а другий — номер стовпця, на перетині яких знаходиться даний елемент.

Якщо дві матриці мають однакову кількість рядків і стовпців, то вони називаються матрицями однакового розміру.

Для матриць однакового розміру встановлюється поняття їх рівності: якщо $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, то рівність $A = B$ означає, що $a_{ij} = b_{ij}$ при всіх i, j.

Матриця, яка складається з одного рядка, називається однорядковою матрицею, або вектор-рядком. Матриця, що має один стовпець називається, одностовпцевою або вектор-стовпцем.

---

[1] Елементами матриці можуть бути не тільки числа, а й деякі інші величини, наприклад, функції

Матриця, яка складається з одного числа, ототожнюється з цим числом, тобто будь-яке число можна розглядати як матрицю, що має один рядок і один стовпець.

Матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулеві, називають нульовою матрицею і позначають через O.

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається квадратною. Квадратну матрицю, яка складається з n рядків і n стовпців, називають матрицею n-го порядку і позначають $A = \|a_{ij}\|_n$.

Сукупність елементів квадратної матриці, які розташовані на лінії, що сполучає лівий верхній кут з правим нижнім, називається головною діагоналлю.

Квадратні матриці, у яких відмінні від нуля лише елементи головної діагоналі, називаються діагональними матрицями і записуються так:

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{matrix}\right\| =$$

$$= \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

Якщо всі елементи a_{ii} діагональної матриці дорівнюють один одному, то матриця називається скалярною. Вона має вигляд:

$$A = \left\|\begin{matrix} a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{matrix}\right\|.$$

Якщо $a = 1$, то скалярна матриця називається одиничною і позначається буквою E. Іноді для запису елементів одиничної матриці використовують символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j, \end{cases}.$$

Тоді $E = \|\delta_{ij}\|$.

Квадратна матриця називається трикутною, якщо всі елементи, що знаходяться вище (або нижче) від головної діагоналі, дорівнюють нулеві.

Зокрема, матриця

$$B = \left\|\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{matrix}\right\|$$

називається правою, або верхньою трикутною матрицею, а матриця

$$C = \left\|\begin{matrix} c_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{matrix}\right\|$$

називається лівою, або нижньою трикутною матрицею.

2. Транспонування матриць

Матриця $A^{\top} = \|a_{ij}^{\top}\|$ називається транспонованою щодо матриці $A = \|a_{ij}\|$, якщо її елементи $a_{ij}^{\top} = a_{ji}$. Операція переведення матриці A в її транспоновану $A^{\top}$ називається транспонуванням. Отже, транспонування матриці — це переміна місцями рядків і стовпців зі збереженням їх нумерації.

Якщо $A = A^{\top}$, то матриця A називається симетричною. Наприклад, матриця

$$\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{matrix}\right\|$$

симетрична.

3. Лінійні операції над матрицями

До лінійних операцій над матрицями належить їх додавання і множення матриці на число.

Нехай матриці $A = \|a_{ij}\|$ і $B = \|b_{ij}\|$ однакового розміру.

Сумою двох матриць A та B називається матриця $C = \|c_{ij}\|$, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів

матриць A і B, тобто

$$C = A + B = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Добутком матриці $A = \|a_{ij}\|$ на число α називається матриця, елементи якої отримуються із відповідних елементів матриці A множенням на число α:

$$\alpha A = \begin{Vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{Vmatrix} = \|\alpha a_{ij}\|.$$

Матриця $(-1)A = -A$ є протилежною до матриці A. Вона має ту властивість, що $A + (-A) = O$.

Сума матриць A і $-B$ називається різницею матриць A і B та позначається $A - B$.

Легко перевірити, що операції додавання матриць і множення на число мають такі властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A + (-A) = O$;
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
8. $1 \cdot A = A$.

4. Множення матриць

Добуток $A \cdot B$ матриці A на матрицю B визначається тільки за умови, що кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Нехай дані матриця A розміру $m \times n$ і матриця B розміру $n \times p$:

$$A = \|a_{ij}\|, \quad B = \|b_{jk}\|,$$

де $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,p}$.

Добутком AB матриць $A = \|a_{ij}\|$ та $B = \|b_{jk}\|$, записаних у визначеній послідовності (A — перша, B — друга), називається матриця $C = \|c_{ik}\|$, елементи c_{ik} якої визначаються за таким співвідношенням:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk},$$

де $i = \overline{1,m}$; $k = \overline{1,p}$.

Отже, елементи матриці-добутку визначаються так: елемент c_{ik}, що знаходиться на перетині i-го рядка і k-го стовпця матриці C, дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B.

Відзначимо, що добуток двох прямокутних матриць — це прямокутна матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців дорівнює кількості стовпців другої матриці.

Наприклад, якщо

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 3 & 4 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

то добутком $A \cdot B$ цих матриць буде матриця

$$C = \begin{Vmatrix} 2{\cdot}3+(-1){\cdot}5 & 2{\cdot}4+(-1){\cdot}2 & 2{\cdot}5+(-1){\cdot}0 & 2{\cdot}(-2)+(-1){\cdot}1 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 6 & 10 & -5 \\ 15 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & -2 \end{Vmatrix}.$$

З означення добутку матриць зрозуміло, що з можливості множення матриці A на B не випливає можливість множення B на A. Так, в розглянутому прикладі не можна утворити добуток $B \cdot A$, тому що кількість стовпців матриці B не дорівнює кількості рядків матриці A.

Добутки AB і BA одночасно існують, якщо A і B — квадратні матриці одного і того ж порядку.

Відзначимо ще одну важливу властивість: множення матриць не комутативне. Це означає, що для довільних матриць A і B порядку $n > 1$

$$AB \neq BA.$$

Наведемо приклад. Нехай

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}, \quad BA = \begin{Vmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Проте для матриць A та B можливо, що $A \cdot B = B \cdot A$. Такі матриці назвемо **переставними**. Наприклад, матриці E і O переставні з будь-якою матрицею того ж порядку. Маємо $E \cdot A = A \cdot E = A$, $O \cdot A = A \cdot O = O$. Це означає, що одинична матриця E і нульова матриця O з усіх квадратних матриць даного порядку відіграють в операції множення таку ж роль, як одиниця чи нуль у множенні чисел.

Множення матриць має такі властивості:

$$\begin{aligned} &1.\ \ A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C; \\ &2.\ \ \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B); \\ &3.\ \ C(A + B) = CA + CB; \\ &4.\ \ (A + B)C = AC + BC, \end{aligned}$$

де A, B, C — матриці, а α — число.

При цьому ми припускаємо, що всі написані добутки матриць визначені.

Перевіримо першу властивість. Для цього ознайомимось спочатку зі скороченим записом сум та їх властивостями.

Скорочене позначення сум. У математиці часто трапляється сума великої (але скінченної) кількості доданків $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, які відрізняються між собою тільки індексами. Для спрощення запису такої суми використовується символ $\sum\limits_{k=1}^{n}$, після якого стоїть деякий вираз зі змінним індексом k. Такий символ означає суму таких виразів для всіх значень індексу k від 1 до n. Наприклад, символ вигляду $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ із змінним індексом k (читається так: ”сума за k від 1 до n”) скорочено позначає таку суму:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Зауважимо, що вираз $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ означає те саме, що й $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, тобто змінний індекс можна позначати довільною буквою.

Додаючи елементи з подвійними індексами, суми досить часто скорочено позначають так:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} &= \sum_{i=1}^{m}(a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}) = (a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n}) + \\ &+ (a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n}) + \cdots + (a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn}). \end{aligned}$$

якщо $m = n$, то вираз $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}$ часто записують коротко $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}$.

Всі ці види скорочених позначень сум мають прості властивості, які випливають з відомих властивостей додавання, а саме:

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} ca_i = c\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$,

бо спільний множник можна виносити за знак суми;

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} a_i, \quad m < n$,

оскільки для додавання справедливий асоціативний закон;

3. $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik}$,

тому що для додавання справедливий комутативний закон;

4. $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$,

на підставі одночасного застосування законів асоціативності та комутативності додавання.

Доведемо тепер першу властивість (асоціативність) операції множення матриць, тобто рівність $(AB)C = A(BC)$.

Нехай $A = \|a_{ij}\|_{m,n}$, $B = \|b_{jk}\|_{n,p}$, $C = \|c_{ks}\|_{p,r}$.

Позначимо $AB = G = \|q_{ik}\|_{m,p}$, де $q_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Тоді елемент добутку $(AB)C = GC$ має вигляд

$$\sum_{k=1}^{p} q_{ik}c_{ks} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{ks}. \tag{1.1}$$

Аналогічно вводячи позначення $BC = H = \|h_{js}\|_{n,r}$ отримаємо $h_{js} = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{jk}c_{ks}$ і елемент добутку $A(BC) = AH$ матиме вигляд

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_{js} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{ks}\right). \tag{1.2}$$

Суми (1.1) і (1.2) відрізняються лише послідовністю додавання і тому рівні. Отже, $(AB)C = A(BC)$, тобто асоціативність множення доведена.

Доведення інших властивостей операції множення матриць пропонуємо як самостійну вправу.

Існує таке правило транспонування добутку двох матриць:

$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

Справді, елемент добутку матриць A і B

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Тоді

$$c_{ik}^\top = c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^\top a_{jk}^\top,$$

а цей вираз є елементом добутку $B^\top A^\top$.

§ 2. ВИЗНАЧНИК МАТРИЦІ. ВЛАСТИВОСТІ ВИЗНАЧНИКІВ І СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ

1. Визначник матриці

Визначник, або **детермінант квадратної матриці** — це число, яке ставиться у відповідність матриці і може бути виражене через її елементи. Визначник матриці A будемо позначати $\det A$ або $|A|$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Означення 1.2 *Детермінантом матриці* $A = \|a_{ij}\|$ *n-го порядку* $(n > 1)$ *називається число*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k}, \tag{2.1}$$

де M_{1k} — *детермінант матриці порядку* $n-1$, *утвореної з матриці* A *викреслюванням першого рядка і* k*-го стовпця.*

Число M_{1k} називається **мінором** елемента a_{1k} матриці A.

Матриця порядку 1 складається з одного числа і її детермінант вважається таким, що дорівнює цьому числу.

Застосуємо введене означення визначника до матриць 2-го і 3-го порядків. Для матриці

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\right\|$$

маємо $M_{11} = a_{22}$, $M_{12} = a_{21}$. Тому її визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Для матриці третього порядку

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 31 & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\|$$

$$\det A = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_{1k}M_{1k},$$

де $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.
Значить,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається детермінант матриці, утвореної з матриці A викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця, тобто

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці A називається добуток $(-1)^{i+j}M_{ij}$, де M_{ij} — мінор елемента a_{ij}.

Отже, детермінант матриці — це число, яке дорівнює сумі добутків елементів першого рядка на їх алгебраїчні доповнення [2], тобто

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}. \qquad (2.2)$$

Отже, детермінант матриці 3-го порядку визначається таким способом:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

---

[2] Якщо елементи a_{ij} не числа, а деякі інші величини, наприклад, функції, то і визначник — функція. Правила знаходження визначника в цьому випадку є такими ж, що і для числових матриць.

Покажемо на прикладі визначника 3-го порядку, що

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}, \quad i = \overline{1,n}. \qquad (2.3)$$

Справді

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + \\ &+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - \\ &- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \\ &= a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + \\ &+ a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + \\ &+ a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) = \\ &= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}. \end{aligned}$$

2. Властивості визначників

Доведемо властивості визначників для матриць другого порядку.

1°. При транспонуванні матриці значення її визначника не змінюється:

$$\det A = \det A^{\top}.$$

Нехай

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}. \end{matrix} \right\|$$

Тоді

$$\det A^{\top} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22}. \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A.$$

Внаслідок цієї властивості всі твердження, які будуть доведені далі, однаково справедливі як для рядків, так і для стовпців матриці.

2°. При перестановці двох рядків (стовпців) матриці знак її визначника змінюється на протилежний, а його абсолютне значення не змінюється.

Справді,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3°. Визначник матриці, що має два однакові рядки (стовпці), дорівнює нулю.

Справді, якщо поміняти місцями ці два однакові рядки (стовпці), то визначник не зміниться. З іншого боку, після перестановки двох рядків (стовпців) визначник змінює знак. Отже, маємо

$$\det A = -\det A.$$

Звідси випливає, що

$$\det A = 0.$$

4°. Якщо всі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника помножити на одне і те ж число m, то визначник помножиться на це число.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ma_{11} & a_{12} \\ ma_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= ma_{11}a_{12} - ma_{12}a_{21} = m(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= m\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Цю властивість інколи формулюють так: якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник m, то його можна винести за знак визначника.

5°. Якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.

Ця властивість випливає з рівності (2.3).

6°. Якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників за формулою

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Доводиться перевіркою.

7°. Визначник не зміниться, якщо до елементів деякого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на деяке число.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{21} & a_{12} + \alpha a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

8°. Сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення дорівнює визначнику, а сума добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} \det A, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases} \tag{2.4}$$

Якщо $i = j$, то формула (2.4) збігається з формулою (2.3). Якщо $i \neq j$, то розглянемо матрицю A', яку отримуємо з матриці A заміною i-го рядка j-м, залишаючи j-й рядок без зміни. Тоді матриця A' має два однакові рядки, а тому її визначник дорівнює нулеві. Ліва частина (2.4) є розкладом визначника за рядком з номером i. Звідси і випливає потрібна нам рівність.

9°. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добуткові визначників цих матриць.

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Нехай

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{matrix} \right\|.$$

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \times \\ &\times (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} + \\ &+ a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} - \\ &- a_{11}b_{12}a_{22}b_{21} - a_{12}b_{22}a_{21}b_{11} - a_{12}b_{22}a_{22}b_{21} = \\ &= a_{11}a_{22}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) - a_{12}a_{21}(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) = \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

3. Деякі методи обчислення визначників

1. *Перетворення в нуль усіх елементів рядка (стовпця), крім одного.*

Властивості 7 і 8 дають можливість перетворити в нуль усі елементи рядка (стовпця), крім одного, і тим самим звести обчислення визначника n-го порядку до визначника $(n-1)$-го порядку і т.д.

• **Приклад 2.1**

Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

◀ Додамо до другого рядка перший, помножений на -2; до третього — перший, помножений на -3, а до четвертого — перший, помножений на -4. Отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

Тепер розкладемо визначник за елементами першого стовпця

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -7 \\ -2 & -8 & -10 \\ -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник елементів другого рядка і другого стовпця:

$$\Delta = (-2) \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 5 \\ -7 & 5 & -13 \end{vmatrix}.$$

У новому визначнику легко отримати нулі в першому стовпці. Додамо перший рядок до другого, а до третього — перший, помножений на -7. Тоді визначник набере вигляду:

$$\Delta = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 36 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за елементами першого стовпця, отримаємо:

$$\Delta = 4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 36 \end{vmatrix} = -4 \cdot (-36 - 4) = 160. \blacktriangleright$$

2. *Метод зведення до трикутного вигляду*

Цей метод полягає в перетворенні визначника до такого вигляду, коли всі елементи, що розміщені по один бік від головної діагоналі, дорівнюють нулю. Отриманий так трикутний визначник дорівнює добуткові елементів головної діагоналі.

Справді, нехай

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо даний визначник за елементами першого стовпця. Отримаємо, що він дорівнює добуткові елемента a_{11} на трикутний визначник $(n-1)$-го порядку

$$\Delta_n = a_{11} \cdot \Delta_{n-1},$$

де

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник Δ_{n-1} знову за елементами першого стовпця. Одержимо

$$\Delta_{n-1} = a_{22}\Delta_{n-2},$$

де Δ_{n-2} — трикутний визначник $(n-2)$-го порядку. Продовжуємо цей процес доти, доки не одержимо визначника першого порядку (числа a_n). Тоді матимемо, що

$$\Delta_n = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

• **Приклад 2.2**

Обчислити визначник п'ятого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

◀ Додамо до кожного рядка, починаючи з другого, перший рядок. Отримаємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120. \blacktriangleright$$

РОЗДІЛ 2

Системи лінійних рівнянь

§ 3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

1. Матриці системи

Система m лінійних рівнянь з n невідомими — це система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Коефіцієнти a_{ij} при невідомих x_j $(j = \overline{1,n})$ називаються **коефіцієнтами системи** і мають два індекси. Перший індекс вказує порядковий номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, другий індекс — номер невідомого, біля якого стоїть цей коефіцієнт. Величини b_i $(i = \overline{1,m})$ називаються **вільними членами**.

Поставимо у відповідність системі (3.1) дві матриці: матрицю $A = \|a_{ij}\|$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$, яку назвемо **основною матрицею системи**, або **матрицею системи**, і матрицю

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{Vmatrix},$$

яку назвемо **розширеною матрицею системи**.

Очевидно, що основна матриця системи має n стовпців і m рядків, а розширена матриця цієї ж системи містить $n+1$ стовпців і m рядків.

2. Матрична форма запису системи

Використовуючи операцію множення матриць, систему (3.1) можна записати у вигляді

$$A \cdot X = B, \tag{3.2}$$

де A — основна матриця системи,

$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|$ — вектор-стовпець з невідомих;

$B = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|$ — вектор-стовпець з вільних членів.

Рівність (3.2) називається **матричною формою запису системи (3.1)**.

3. Розв'язок системи

Розв'язком системи (3.1) називається сукупність чисел c_1, c_2, $\ldots$, c_n, яка, після підставляння в систему (3.1) замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перетворює всі рівняння системи в рівності (тотожності).

Якщо $c_1, c_2, \ldots, c_n$ є розв'язком системи, то його можна записати у вигляді вектор-стовпця

$$C = \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{matrix} \right\| = \left\| c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n \right\|^{\mathsf{T}}$$

і тоді $A \cdot C = B$.

Так, наприклад, розв'язком системи

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 1 \end{cases}$$

є вектор-стовпець

$$C = \left\| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Зауважимо, що не кожна система лінійних рівнянь має розв'язок. Наприклад, система

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

не має жодного розв'язку, оскільки ліві частини рівнянь пропорційні, а праві — ні.

Система рівнянь (3.1) називається **сумісною**, якщо вона має розв'язок. Система, яка не має розв'язку, називається **несумісною**.

Сумісна система, яка має тільки один розв'язок, зветься **визначеною**; система, що має більше, ніж один розв'язок — **невизначеною**.

У випадку, коли система невизначена, то кожен її розв'язок називають **частинним розв'язком** системи. Множина всіх частинних розв'язків системи називається **загальним розв'язком**.

Нехай, наприклад, потрібно розв'язати систему, яка складається з одного рівняння і двох невідомих:

$$x_1 - x_2 = 2.$$

Система невизначена. Її частинними розв'язками, як легко переконатись, є вектор-стовпці

$$C_1 = \left\| \begin{matrix} 2 \\ 0, \end{matrix} \right\|, \quad C_2 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1, \end{matrix} \right\|, \quad C_3 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ -2, \end{matrix} \right\|, \text{ і т.д.}$$

Але, $x_2 = x_1 - 2$. Тому, якщо покласти $x_1 = a$, то $x_2 = a - 2$ і тоді $X = \left\| \begin{matrix} a \\ a - 2 \end{matrix} \right\|$, де a — довільна стала, є загальним розв'язком.

§ 4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАТРИЧНИМ СПОСОБОМ ТА ЗА ПРАВИЛОМ КРАМЕРА

1. Обернена матриця

Квадратна матриця A називається **невиродженою** або **неособливою**, якщо її визначник відмінний від нуля, тобто $\det A \neq 0$.

Квадратна матриця B зветься оберненою до квадратної матриці A, якщо виконується рівність $AB = BA = E$, де E — одинична матриця того ж порядку, що A та B.

Далі матрицю, обернену до матриці A, позначатимемо символом A^{-1}.

Покажемо, що для невиродженої матриці A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{4.1}$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Обчислимо добутки AA^{-1} і $A^{-1}A$.

Маємо

$$AA^{-1} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\ldots a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+\cdots+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+\cdots+a_{2n}A_{1n}\ldots a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+\cdots+a_{2n}A_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{11}+a_{n2}A_{12}+\cdots+a_{nn}A_{1n}\ldots a_{n1}A_{n1}+a_{n2}A_{n2}+\cdots+a_{nn}A_{nn} \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A}\begin{Vmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{Vmatrix} = E.$$

Аналогічно доводиться, що $A^{-1}A = E$. Отже, A^{-1} — матриця, обернена до матриці A.

Значить, для побудови оберненої матриці треба замінити елементи a_{ij} їх алгебраїчними доповненнями, поділеними на det A, і результат транспонувати.

- **Теорема 4.1**

Для того, щоб для матриці A існувала обернена матриця A^{-1}, необхідно і достатньо, щоб $\det A \neq 0$.

Доведення. *Необхідність.*

Нехай матриця A має обернену A^{-1}. Тоді $AA^{-1} = E$. Згідно з теоремою про визначник добутку двох матриць маємо:

$$\det(AA^{-1}) = \det\ \mathrm{A}\det A^{-1} = \det\ \mathrm{E} = 1,$$

а тому $\det A \neq 0$.

Достатність. Якщо $\det A \neq 0$, то матрицю A^{-1} можна побудувати за формулою (4.1). Теорема доведена.

- **Приклад 4.1**

Знайти обернену матрицю до матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

◄ Обчислимо $\det A$. Маємо

$$\det A = 2 - 1 + 2 - 1 - 1 + 4 = 5.$$

Тоді $A_{11} = 1$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 1$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -2$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = 3$.

Згідно з формулою (4.1) отримаємо, що

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{Vmatrix}. ►$$

Довести такі рівності

1. $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{-1}$.

2. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь

Нехай в системі (3.1) $m = n$. Тоді A — квадратна матриця порядку n. У матричному записі система (3.1) має вигляд

$$AX = B.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1} до матриці A. Помножимо останню рівність зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B. \tag{4.2}$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то (4.2) набере вигляд

$$X = A^{-1}B.$$

Покажемо, що вектор-стовпець $C_0 = A^{-1}B$ є розв'язком системи (3.2).

Дійсно,

$$AC_0 = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

Отже, підставивши вектор-стовпець C_0 замість вектор-стовпця X з невідомих в систему рівнянь (3.2), одержимо тотожність. Отже, вектор-стовпець C_0 є розв'язком даної системи. Отриманий розв'язок єдиний. Справді, якщо вектор-стовпець $C \neq C_0$ — інший розв'язок системи $AX = B$, то справедлива тотожність $AC = B$.

Помножимо обидві частини цієї тотожності зліва на матрицю A^{-1}:

$$A^{-1}(AC) = A^{-1}B, \quad (A^{-1}A)C = A^{-1}B = C_0; \quad C = C_0.$$

Отже, будь-який розв'язок системи збігається з розв'язком $X = C_0 = A^{-1}B$ і якщо $\det A \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $X = A^{-1}B$.

• **Приклад 4.2**

Розв'язати матричним способом систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20. \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці A

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & -7 & 8 \\ 4 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 440 \neq 0,$$

то матриця A невироджена і має обернену

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix};$$

де A_{ij} — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij}.

У нашому прикладі

$$A^{-1} = \frac{1}{440} \begin{Vmatrix} 9 & 41 & 52 \\ 67 & -37 & -4 \\ 53 & -3 & -36 \end{Vmatrix}.$$

Тому

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \frac{1}{440} \begin{Vmatrix} 9 & 41 & 52 \\ 67 & -37 & -4 \\ 53 & -3 & -36 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 4 \\ 20 \\ -8 \end{Vmatrix} = \frac{1}{440} \begin{Vmatrix} 440 \\ -440 \\ 440 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Звідси отримуємо:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1. \blacktriangleright$$

3. Матричні рівняння

Матричним рівнянням будемо називати рівняння вигляду

$$AX = B, \tag{4.3}$$

чи

$$XA = B, \tag{4.4}$$

де A та B — задані квадратні матриці n-го порядку, а X — невідома матриця того ж порядку.

Розв'язком матричного рівняння називається кожна матриця відповідного порядку, яка, будучи підставлена в матричне рівняння замість матриці X, перетворює рівняння в тотожність.

Якщо $\det A \neq 0$, то матричні рівняння (4.3) і (4.4) мають єдиний розв'язок. Справді, якщо помножити ці рівняння відповідно зліва і справа на матрицю A^{-1}, то отримаємо

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad \text{або} \quad X = A^{-1}B, \tag{4.5}$$

і

$$XAA^{-1} = BA^{-1}, \qquad \text{або} \quad X = BA^{-1}. \tag{4.6}$$

Очевидно, що матриця $A^{-1}B$ є розв'язком рівняння (4.3), а матриця BA^{-1} — рівняння (4.4).

Зауваження. Якщо матриці A^{-1} та B є переставні, то розв'язком обидвох матричних рівнянь буде одна і та ж матриця

$$X = A^{-1}B = BA^{-1}.$$

- **Приклад 4.3**

Розв'язати матричне рівняння

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot X = \begin{Vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

◀ У даному випадку маємо:

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Визначник матриці A відмінний від нуля ($\det A = -1$), отже, матриця A — неособлива і існує $A^{-1} = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix}$. Тоді

$$X = A^{-1}B = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}. \ ▶$$

4. Правило Крамера

Виведемо явні формули для розв'язання системи n рівнянь з n невідомими.

Нехай

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.7}$$

— система n рівнянь з n невідомими. Визначник основної матриці A системи (4.7) позначимо через Δ, тобто

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Замінимо у визначнику Δ будь-який стовпець, наприклад, i-й, стовпцем з вільних членів. Отриманий таким способом визначник будемо позначати через Δ_i, тобто

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} \dots a_{1n} \\ a_{21} \dots a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пояснимо це на прикладі. Нехай дана система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Тоді

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

- **Теорема 4.2**

Правило Крамера:

Якщо визначник основної матриці системи (4.7) відмінний від нуля, то система сумісна і має единий розв'язок, який знаходять за формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.8}$$

Формули (4.8) називаються **формулами Крамера**.

Доведення. Запишемо систему (4.7) у матричному вигляді

$$AX = B, \tag{4.9}$$

де A — матриця системи, X — вектор-стовпець з невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$, B — вектор-стовпець із вільних членів.

Оскільки $\det A \neq 0$, то система (4.9) має єдиний розв'язок

$$X = A^{-1}B.$$

Згідно з правилом множення матриць маємо

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \left\| \begin{matrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n \end{matrix} \right\|.$$

Враховуючи, що

$$\begin{gathered} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n = \Delta_1, \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n = \Delta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n = \Delta_n, \end{gathered}$$

то розв'язком системи буде вектор-стовпець

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{matrix} \right\|, \quad \text{тобто} \quad , x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

що і треба було довести.

- **Приклад 4.4**

Розв'язати за допомогою формул Крамера систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6. \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

◄ Визначник основної матриці цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Обчислимо визначники Δ_i, які отримуємо із визначника системи Δ, замінивши в ньому i-й стовпець стовпцем із вільних членів. Маємо:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 11 & 1 & 2 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1. \blacktriangleright$$

§ 5. ЗАГАЛЬНА ТЕОРІЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

1. Ранг матриці та його основні властивості

Нехай A — матриця розміру $m \times n$. Виберемо в ній довільно k рядків і k стовпців. Елементи, які знаходяться на перетині вибраних рядків і стовпців, утворюють квадратну матрицю k-го порядку.

Означення 2.1 *Мінором порядку k матриці A називаеться визначник квадратної матриці, елементи якої знаходяться на перетині вибраних довільно k рядків та k стовпців.*

Наприклад, у матриці

$$B = \left\| \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{matrix} \right\|$$

виберемо перший, другий і третій рядки та перший, третій і четвертий стовпці. Визначник $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ є одним із мінорів 3-го порядку матриці B. Мінором 2-го порядку є, наприклад, визначник $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$. Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку.

Очевидно, що матриця A розміру $m \times n$ має мінори будь-якого порядку від 1-го до k-го, де $k = \min(m, n)$. Серед усіх відмінних від нуля мінорів матриці A є хоча б один мінор, порядок якого буде найбільшим.

Означення 2.2 *Рангом матриці називаеться найбільший із порядків її мінорів, відмінних від нуля.*

Якщо ранг матриці A дорівнює r, то це означає, що матриця A має відмінний від нуля мінор порядку r, але будь-який мінор, порядок якого більший за r, дорівнює нулю.

Ранг матриці A позначимо символом: $\mathrm{Rg}A$. Очевидно, що завжди виконується співвідношення

$$0 \leq \mathrm{Rg}A \leq \min(m, n).$$

Наприклад, матриця

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

має єдиний мінор четвертого порядку, який дорівнює нулю. Серед мінорів третього порядку є мінор

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

який відмінний від нуля. Отже, $\mathrm{Rg}A = 3$.

Розглянемо тепер ті властивості рангу матриці, які спрощують його обчислення.

- **Властивість 1.** При транспонуванні матриці її ранг не змінюється.
- **Властивість 2.** Ранг матриці не зміниться, якщо переставити її рядки (стовпці).
- **Властивість 3.** Ранг матриці не зміниться, якщо помножити всі елементи її рядка (стовпця) на відмінне від нуля число.
- **Властивість 4.** Ранг матриці не зміниться, якщо до одного з її рядків (стовпців) додати інший рядок (стовпець), помножений на деяке число.
- **Властивість 5.** Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), що дорівнює нулю.

Перш ніж сформулювати наступну властивість, введемо поняття лінійної комбінації вектор-стовпців (вектор-рядків).

Розглянемо k вектор-стовпців вигляду

$$X_i = \left\| \begin{array}{c} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{array} \right\|, \quad (i = \overline{1,k}).$$

Помножимо кожен вектор-стовпець X_i на деяке число λ_i $(i = \overline{1,k})$ і додамо їх. Тоді отримаємо вектор-стовпець

$$Y = \left\| \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{array} \right\| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left\| \begin{array}{c} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{array} \right\|.$$

або

$$Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k. \qquad (5.1)$$

Одержаний вектор-стовпець Y називається **лінійною комбінацією** вектор-стовпців X_i $(i = \overline{1,k})$, а числа λ_i $(i = \overline{1,k})$ коефіцієнтами лінійної комбінації.

Рівність (5.1) еквівалентна системі рівнянь

$$y_s = \lambda_1 x_{s1} + \lambda_2 x_{s2} + \cdots + \lambda_k x_{sk}, \qquad (5.2)$$

де $s = \overline{1,n}$.

Вектор-стовпці $X_1, X_2, \ldots, X_k$ називаються **лінійно залежними**, якщо існують такі числа α_i $(i = \overline{1,k})$, що справджується рівність

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i X_i = O, \qquad (5.3)$$

де $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$, O — нульовий вектор-стовпець.

Вектор-стовпці, які не є лінійно залежними, називаються лінійно незалежними. Іншими словами, вектор-стовпці X_i $(i = \overline{1,k})$ лінійно незалежні, якщо рівність (5.3) можлива лише якщо $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i^2 = 0$, тобто всі коефіцієнти $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1,k})$.

Теорема 5.1 встановлює зв'язок між поняттями лінійної комбінації і лінійної залежності.

- **Теорема 5.1**

Для того щоб вектор-стовпці X_i $(i = \overline{1,n})$ були лінійно залежними, необхідно і достатньо, щоб один із них був лінійною комбінацією інших.

Доведення. *Необхідність.* Нехай вектор-стовпці X_i $(i = \overline{1,n})$ лінійно залежні. Тоді згідно з означенням існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які не всі одночасно дорівнюють нулеві, що

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n = O.$$

Припустимо, що відмінним від нуля є коефіцієнт α_1. Помноживши обидві частини останньої рівності на число $-\dfrac{1}{\alpha_1}$, отримаємо

$$-X_1 + \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) X_n = O,$$

або

$$X_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) X_2 + \cdots + \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right) X_n,$$

а це співвідношення означає, що вектор-стовпець X_1 є лінійною комбінацією решти вектор-стовпців.

Достатність. Нехай, наприклад, вектор-стовпець X_1 є лінійною комбінацією решти вектор-стовпців, тобто

$$X_1 = \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \cdots + \beta_n X_n.$$

Звідси отримуємо:

$$O = (-1) X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_n X_n,$$

а це означає, що вектор-стовпці лінійно залежні $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2 \neq 0 \right)$.

- **Приклад 5.1**

Довести, що вектор-стовпці

$$X_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad X_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad X_3 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

лінійно незалежні.

◀ Рівність $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 = O$ рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 + \alpha_3 \cdot 0 = 0, \\ \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

звідки отримаємо, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тобто задані вектор-стовпці є лінійно незалежні. ▶

Тепер сформулюємо таку властивість рангу матриці:

- **Властивість 6.** Ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї рядок (стовпець), який є лінійною комбінацією інших рядків (стовпців).

2. Елементарні перетворення матриці

Елементарними називаються такі перетворення матриць:

1) перестановка двох довільних рядків (стовпців);

2) множення рядка (стовпця) на відмінне від нуля число;

3) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) матриці відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на одне і те ж число.

Означення 2.3 *Дві матриці називаються еквівалентними, якщо одна з них отримується з іншої за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень.*

Якщо матриці A та B еквівалентні, то це записується так: $A \sim B$.

Враховуючи властивості 1-6 рангу матриці, бачимо, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці, тобто якщо $A \sim B$, то $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}B$.

Означення 2.4 *Канонічною називається матриця, в якій на початку головної діагоналі стоять підряд декілька одиниць (кількість яких може дорівнювати нулеві), а всі інші елементи дорівнюють нулеві.*

За допомогою елементарних перетворень кожну матрицю можна привести до канонічної. Ранг канонічної матриці дорівнює кількості одиниць на її головній діагоналі.

- **Приклад 5.2**

Звести до канонічного вигляду матрицю

$$A = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}$$

і знайти її ранг.

◀ Віднімемо від другого рядка матриці A перший рядок і поміняємо ці рядки місцями:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{Vmatrix}.$$

Тепер від другого та третього рядків віднімемо перший, помножений відповідно на 2 і 5:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Віднімемо від третього рядка другий. Отримаємо матрицю:

$$B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матриця B еквівалентна матриці A, оскільки одержана з неї за допомогою скінченної кількості елементарних перетворень.

Очевидно, що $\mathrm{Rg}B = 2$, а отже, і $\mathrm{Rg}A = 2$. Матрицю B легко привести до канонічної. Віднімаючи перший стовпець, помножений на відповідне число, від усіх наступних, перетворимо в нуль усі елементи першого рядка, крім першого: елементи інших рядків не зміняться. Потім, віднімаючи другий стовпець, помножений на відповідне число, від наступних, перетворимо в нуль усі елементи другого рядка, крім другого, і отримаємо канонічну матрицю

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| . \blacktriangleright$$

3. Теорема про базисний мінор

Нехай задана матриця $A = \|a_{ij}\|$ $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$ і $\mathrm{Rg}A = r$. Тоді згідно з визначенням рангу дана матриця має відмінний від нуля мінор r-го порядку. Кожен такий мінор будемо називати **базисним мінором** матриці A. Очевидно, що матриця A може мати декілька базисних мінорів. Виберемо і зафіксуємо один із них. Стовпці й рядки матриці, на перетині яких розміщені елементи вибраного базисного мінора, назвемо **базисними** стовпцями і рядками.

Для будь-якого базисного мінора справедлива

- **Теорема 5.2**

Будь-який стовпець матриці є лінійною комбінацією її базисних стовпців; самі базисні стовпці лінійно незалежні.

Цю теорему називають **теоремою про базисний мінор.**[1]

Без обмеження загальності можна вважати, що базисний мінор розміщений на перетині перших r стовпців і перших r рядків матриці A. Справді, якщо це не так, то, переставляючи стовпці та рядки, завжди можна перевести виділений мінор у лівий верхній кут матриці A, а потім відповідно змінити нумерацію елементів. Очевидно, що коли теорема справджується після перестановки стовпців і рядків, то вона справедлива і до їх перестановки.

---

[1] Доведення теореми (див. [5], [9]) не провадимо через громіздкість викладу.

4. Сумісність системи лінійних рівнянь. Теорема Кронекера-Капеллі

Нехай задана система m лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5.4}$$

Існує важлива теорема про сумісність системи лінійних рівнянь.

- **Теорема 5.3**

Теорема Кронекера-Капеллі:

Система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг розширеної матриці системи дорівнює рангу основної матриці системи.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що система (5.4) сумісна і $c_1, c_2, \dots, c_n$ один із її розв'язків. Підставимо $c_1, c_2, \dots, c_n$ замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ у систему (5.4). Отримаємо m рівностей

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2n}c_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mn}c_n = b_m. \end{cases} \tag{5.5}$$

Співвідношення (5.5) можна записати у такому вигляді

$$c_1 \left\|\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}\right\| + c_2 \left\|\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}\right\| + \dots + c_n \left\|\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right\| , \tag{5.6}$$

а це означає, що останній стовпець розширеної матриці $\tilde{A}$ є лінійною комбінацією її решти стовпців. Але згідно з властивістю 6 ранг матриці не зміниться, якщо вилучити з неї стовпець, який є лінійною комбінацією інших стовпців. Значить, $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\tilde{A}$, що і треба було довести.

Достатність. Нехай $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\tilde{A} = r$. Виділимо r базисних стовпців матриці A, які будуть і базисними стовпцями матриці $\tilde{A}$. Без обмеження загальності вважаємо, що базисними є перші r стовпців. Згідно з теоремою про базисний мінор останній стовпець матриці $\tilde{A}$ є лінійною комбінацією базисних стовпців. З цього випливає, що існують такі числа $c_1, c_2, \dots, c_r$, що

$$c_1 \left\| \begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} \right\| + c_2 \left\| \begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix} \right\| + \dots + c_r \left\| \begin{matrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|,$$

або

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1r}c_r = b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{2r}c_r = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \dots + a_{mr}c_r = b_r. \end{cases} \qquad (5.7)$$

Якщо в рівняннях системи (5.4) прийняти

$$x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_r = c_r, x_{r+1} = 0, \dots, x_n = 0, \qquad (5.8)$$

то рівняння системи (5.4) перетворяться в рівності (5.7). Звідси випливає, що сукупність значень невідомих (5.8) задовольняє усім рівнянням системи (5.4), тобто система має розв'язок. Теорема доведена.

Дослідимо тепер питання про кількість розв'язків сумісної системи лінійних рівнянь (5.4).

Нехай $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\tilde{A} = r$. Число r назвемо **рангом** даної системи. Зафіксуємо будь-який базисний мінор матриці $\tilde{A}$. Рівняння, які відповідають базисним рядкам, назвемо **базисними рівняннями** даної системи, невідомі, які відповідають базисним стовпцям, назвемо **головними**, а решту — **вільними**.

Справедливе таке твердження.

• **Теорема 5.4**

Система лінійних рівнянь еквівалентна системі своїх базисних рівнянь.

Доведення. Згідно з теоремою про базисний мінор будь-який рядок розширеної матриці $\tilde{A}$ є лінійною комбінацією r базисних рядків цієї матриці. Тому будь-яке рівняння даної системи можна отримати за допомогою лінійних операцій з базисних рівнянь. Значить, кожен розв'язок, який задовольняє базисну систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \qquad (5.9)$$

задовольняє і будь-яке рівняння системи (5.4). З іншого боку, очевидно, що кожен розв'язок системи (5.4) і водночас є розв'язком базисної системи (5.9). Отже, теорема доведена.

З доведеної теореми 5.4 випливає, що для дослідження питання про кількість розв'язків системи (5.4) досить дослідити систему (5.9), в якій кількість рівнянь r дорівнює її рангу.

Оскільки ранг матриці системи не може бути більшим від кількості її невідомих, тобто $r \le n$, то можливі два випадки: або $r = n$, або $r < n$.

1°. Нехай $r = n$, тобто кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих. Тоді визначник системи (5.9) є базисним мінором, а тому згідно з теоремою Крамера система (5.9), а отже, і система (5.4) має єдиний розв'язок.

Висновок 1. Якщо ранг сумісної системи дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

2°. Нехай $r < n$. Перенесемо в праві частини рівнянь всі члени, які містять вільні невідомі $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$. Тоді система (5.9) набирає вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (5.10)$$

Якщо вільним невідомим $x_{r+1}, \dots, x_n$ надати деякі числові значення $c_{r+1}, \dots, c_n$, то систему (5.10) можна розглядати як систему r рівнянь з r невідомими $x_1, x_2, \dots, x_r$. Оскільки визначник системи (5.10) — базисний мінор, то система (5.10) має єдиний розв'язок $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \dots, x_r = c_r$. Тоді вектор-стовпець

$\|c_1, c_2, \dots, c_r, c_{r+1}, \dots, c_n\|^{\top}$, який є розв'язком базисної системи (5.9), є також і розв'язком еквівалентної системи (5.4). Але значення вільних невідомих можна вибрати довільно. Тому різних розв'язків системи (5.4) буде безліч.

Висновок 2. Якщо ранг системи r менший від кількості невідомих n, то система має безліч розв'язків, а r головних невідомих лінійно виражаються через $n - r$ вільних невідомих.

Сформулюємо **правило розв'язування системи лінійних рівнянь**:

1. Обчислимо ранги основної та розширеної матриць і з'ясуємо сумісність системи. Якщо система сумісна, то знаходимо будь-який базисний мінор порядку r.

2. Беремо r рівнянь, з коефіцієнтів яких складений базисний мінор; решту рівнянь відкидаємо. Головні невідомі, коефіцієнти яких утворюють базисний мінор, залишаємо ліворуч, а решту $n - r$ вільних невідомих переносимо в праві частини рівнянь.

3. За правилом Крамера знаходимо головні невідомі через вільні. Отримані рівності є **загальним розв'язком системи**.

4. Надаючи вільним невідомим довільні числові значення знайдемо відповідні значення головних невідомих, тобто отримаємо **частинні розв'язки системи**.

• **Приклад 5.3**

Дослідити систему рівнянь і знайти її розв'язок, якщо вона сумісна

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

◄ Запишемо розширену матрицю системи, відділивши рискою стовпець вільних членів

$$\widetilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{array} \right\|.$$

Обчислимо ранг основної матриці системи. Мінор другого порядку, який знаходиться у лівому верхньому куті

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Мінор третього порядку

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, ранг основної матриці системи дорівнює 2, тобто $\mathrm{Rg}A = 2$. Для обчислення рангу розширеної матриці розглянемо мінор

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Значить, $\mathrm{Rg}\widetilde{A} = 2$, тобто $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\widetilde{A} = 2$. Система сумісна і має два незалежні рівняння, за які візьмемо перші два, оскільки вони містять базисний мінор. Тоді

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 - x_3, \\ x_1 + 3x_2 = 1 + x_3, \end{cases}$$

звідки $x_1 = \dfrac{11 - x_3}{5}$, $x_2 = \dfrac{2(x_3 - 1)}{5}$.

Значить, система має безліч розв'язків. Якщо, наприклад, взяти $x_3 = 1$, то отримаємо частинний розв'язок системи

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1. \quad ►$$

• **Приклад 5.4**

Дослідити систему рівнянь і розв'язати її, якщо вона сумісна

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 6. \end{cases}$$

◄ Зведемо розширену матрицю системи до канонічного вигляду. Віднімемо перший рядок, помножений на відповідні коефіцієнти, від другого, третього і четвертого рядків, а потім аналогічно зробимо з першим стовпцем. Отримаємо

$$\widetilde{A}=\left\|\begin{array}{rrr|r}1&1&1&6\\2&-1&1&3\\1&-1&2&5\\3&-6&5&6\end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&1&1&6\\0&-3&-1&-9\\0&-2&1&-1\\0&-9&2&-12\end{array}\right\|\sim$$

$$\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&-3&-1&-9\\0&-2&1&-1\\0&-9&2&-12\end{array}\right\|.$$

Поміняємо знаки в трьох останніх стовпцях і переставимо другий та третій стовпці. Після цього отримаємо

$$\widetilde{A}\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&3&9\\0&-1&2&1\\0&-2&9&12\end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&3&9\\0&0&5&10\\0&0&15&30\end{array}\right\|\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&3&3\end{array}\right\|.$$

Звідси остаточно матимемо

$$\widetilde{A}\sim\left\|\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right\|.$$

Отже, $\mathrm{Rg}A=\mathrm{Rg}\widetilde{A}=3$. Оскільки кількість невідомих дорівнює рангу, то система має єдиний розв'язок. Щоб його знайти, розглянемо базисну систему, яка складається з перших трьох рівнянь системи

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\2x_1-x_2+x_3=3,\\x_1-x_2+2x_3=5.\end{cases}$$

Визначник цієї системи відмінний від нуля. Тому, розв'язуючи її за правилом Крамера або матричним способом, отримаємо розв'язок

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3.$$ ►

• **Приклад 5.5**

Перевірити, чи сумісна система

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2.\\3x_1+x_2-x_3=0,\\-4x_1-3x_2+x_3=1.\end{cases}$$

◄ Ранг основної матриці даної системи $\mathrm{Rg}A=2$, оскільки мінор другого порядку

$$\begin{vmatrix}2&-1\\3&1\end{vmatrix}=5\neq0,$$

а мінор третього порядку

$$\begin{vmatrix}2&-1&-1\\3&1&-1\\-4&-3&1\end{vmatrix}=0.$$

Ранг розширеної матриці $\widetilde{A}$ системи дорівнює 3, оскільки мінор

$$\begin{vmatrix}2&-1&2\\3&1&0\\-4&-3&1\end{vmatrix}=-5\neq0.$$

Отже $\mathrm{Rg}A=2$, а $\mathrm{Rg}\widetilde{A}=3$. Тому система несумісна. ►

5. Системи однорідних лінійних рівнянь

Система однорідних лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}\tag{5.11}$$

або в матричному вигляді

$$A\cdot X=0.$$

Згідно з властивістю 5 рангу матриці $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}\tilde{A}$. Значить, система (5.11) сумісна. Кожна система однорідних лінійних рівнянь має **нульовий розв'язок**

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Нульовий розв'язок системи називається **тривіальним**.

- **Теорема 5.5**

Для того, щоб система однорідних лінійних рівнянь (5.11) мала нетривіальний розв'язок, необхідно й достатньо, щоб ранг цієї системи був менший від кількості невідомих.

Доведення. *Необхідність.* Припустимо, що система (5.11) має нетривіальний розв'язок. Ранг r системи не може бути більшим від кількості невідомих n (оскільки n — кількість стовпців основної матриці). Якщо $r = n$, то згідно з висновком 1 система мала б єдиний розв'язок і, значить, інших розв'язків, крім тривіального, не мала б. Отже, $r < n$.

Достатність. Припустимо, що ранг системи менший від кількості невідомих. Тоді згідно з висновком 2 система (5.11) має безліч розв'язків і, отже, має розв'язок, який відмінний від тривіального.

Наслідок. Будь-яка система однорідних лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь менша від кількості невідомих, має нетривіальний розв'язок.

Розглянемо систему однорідних лінійних рівнянь, в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (5.12)$$

З доведеної теореми 5.5 для системи (5.12) випливає така теорема

- **Теорема 5.6**

Для того, щоб система однорідних лінійних рівнянь (5.12), в якій кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих, мала нетривіальний розв'язок, необхідно й достатньо, щоб її визначник дорівнював нулю.

Розглянемо тепер питання про структуру загального розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь.

- **Теорема 5.7**

Якщо вектор-стовпці C_i $(i = \overline{1,n})$ є розв'язками однорідної системи $A \cdot X = 0$, то будь-яка їх лінійна комбінація

$$C = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$$

також є розв'язком цієї системи.

Доведення. Оскільки вектор-стовпці C_i $(i = \overline{1,n})$ є розв'язками системи $A \cdot X = 0$, то $A \cdot C_i \equiv 0$ $(i = \overline{1,n})$. Тоді, враховуючи властивості множення матриць, маємо

$$A \cdot C = A\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (AC_i) = 0.$$

Отже, вектор-стовпець C є розв'язком системи $A \cdot X = 0$. Теорема доведена.

Фундаментальною системою розв'язків для системи лінійних однорідних рівнянь називається лінійно незалежна система розв'язків, через яку лінійно виражається будь-який розв'язок цієї системи рівнянь.

Якщо ранг r системи лінійних однорідних рівнянь дорівнює кількості n невідомих, то фундаментальна система розв'язків складається з єдиного розв'язку — нульового.

Якщо $r < n$, то справедлива теорема 5.8

- **Теорема 5.8**

Якщо ранг r системи однорідних лінійних рівнянь менший від кількості невідомих n, то така система має безліч фундаментальних систем розв'язків, зокрема кожна з них складається з $n - r$ розв'язків.

Доведення. Нехай ранг системи (5.11) дорівнює r і x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n — вільні невідомі. Розглянемо довільний, але відмінний від нуля визначник порядку $n - r$, який запишемо у вигляді:

$$D = \begin{vmatrix} c_{r+11} & c_{r+12} & \dots & c_{r+1n-r} \\ c_{r+21} & c_{r+22} & \dots & c_{r+2n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn-r} \end{vmatrix}.$$

Якщо елементи одного із стовпців, наприклад, j-го визначника D взяти за значення вільних невідомих, то за правилом Крамера ми отримаємо єдиний розв'язок системи (5.11). Запишемо одержаний розв'язок у вигляді вектор-стовпця

$$C_j = \|c_{1j}, \dots, c_{rj}, c_{r+1j}, \dots, c_{nj}\|^{\top}.$$

Оскільки j може набирати значення $1, 2, \dots, n-r$, то отримаємо систему з $n - r$ лінійно незалежних вектор-стовпців. Їх лінійна незалежність випливає з того, що матриця, яка складена з цих вектор-стовпців, містить відмінний від нуля мінор D порядку $n-r$.

Нехай тепер вектор-стовпець

$$B = \| \, b_1 \dots b_r \quad b_{r+1} \dots b_n \, \|^{\top}$$

є довільним розв'язком системи (5.11). Покажемо, що вектор-стовпець B є лінійною комбінацією вектор-стовпців C_1, C_2, ..., C_{n-r}.

Позначимо через $\widetilde{C}_j$ $(j = \overline{1, n-r})$ j-й стовпець визначника D. Оскільки $D \neq 0$, то стовпці визначника D лінійно незалежні.

Тепер візьмемо вектор-стовпець

$$\widetilde{B} = \| \, b_{r+1} \quad b_{r+2} \quad \dots \quad b_n \, \|^{\top}$$

і приєднаємо його до системи вектор-стовпців $\widetilde{C}_j$. Отримана система вектор-стовпців

$$\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \dots, \widetilde{C}_{n-r}, \widetilde{B}$$

лінійно залежна, бо кількість вектор-стовпців дорівнює $n - r + 1$, а розмірність кожного з них $n - r$. Значить, вектор-стовпець $\widetilde{B}$ є лінійною комбінацією решти вектор-стовпців цієї системи, тобто

$$\widetilde{B} = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \widetilde{C}_i. \tag{5.13}$$

Розглянемо тепер вектор-стовпець

$$Y = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i C_i - B. \tag{5.14}$$

Оскільки C_i $(i = \overline{1, n-r})$ та B є розв'язками системи (5.11), то їх лінійна комбінація, тобто Y є розв'язком системи (5.11). Запишемо співвідношення (5.14) у вигляді

$$Y = \lambda_1 \left\| \begin{matrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{r1} \\ c_{r+11} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{matrix} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{matrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{r2} \\ c_{r+12} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{matrix} \right\| + \dots + \lambda_{n-r} \left\| \begin{matrix} c_{1n-r} \\ c_{2n-r} \\ \vdots \\ c_{rn-r} \\ c_{r+1n-r} \\ \vdots \\ c_{nn-r} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right\|. \tag{5.15}$$

Враховуючи співвідношення (5.13), отримаємо, що в співвідношенні (5.15) всі вільні невідомі вектор-стовпця Y дорівнюють нулю. Тому єдиний розв'язок системи (5.11), який одержується, якщо значення вільних членів дорівнюють нулеві, буде нульовим розв'язком. Отже, $Y = 0$, тобто

$$B = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i C_i.$$

Значить, система вектор-стовпців C_i ($i = \overline{1, n-r}$) є фундаментальною системою розв'язків для системи рівнянь (5.11). Але відмінних від нуля визначників $(n-r)$-го порядку існує безліч, тому і фундаментальних систем розв'язків системи (5.11) є безліч. Отже, теорема доведена.

З теорем 5.7 і 5.8 випливає теорема 5.9.

- **Теорема 5.9**

Загальний розв'язок однорідної системи з n невідомими рангу r має вигляд

$$X = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i C_i,$$

де C_i ($i = \overline{1, n-r}$) — довільні лінійно незалежні частинні розв'язки цієї системи, а λ_i ($i = \overline{1, n-r}$) — довільні дійсні числа.

Отриманий результат дає можливість сформулювати **правило для побудови фундаментальної системи розв'язків**.

1. Візьмемо будь-який відмінний від нуля визначник D порядку $n-r$. Для спрощення звичайно беремо визначник, у якого елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта — нулі.

2. Вільним невідомим надаємо почергово значення, які дорівнюють елементам першого, другого і т.д. стовпців визначника D, і кожен раз із загального розв'язку знаходимо відповідні значення головних невідомих.

3. Отримані $n-r$ розв'язки утворюють фундаментальну систему. Загальний розв'язок є лінійною комбінацією фундаментальної системи розв'язків.

- **Приклад 5.6**

Знайти загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків для системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0. \end{cases}$$

◄ Віднімемо перше рівняння системи від другого та четвертого рівнянь, а також від третього, попередньо помноживши його на 2. Маємо:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ \quad -x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ \quad 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

Тепер друге рівняння додаємо до третього, а також до четвертого, але попередньо множимо його на -2:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ \quad\quad x_4 = 0. \end{cases}$$

Вважаємо головними невідомими x_1, x_2, x_4, а вільними x_3 і x_5. З другого та третього рівнянь знаходимо

$$x_2 = -2x_3 - 3x_5.$$

Підставивши отримане значення x_2 в перше рівняння, знайдемо

$$x_1 = 3x_3 + 5x_5.$$

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 + 5x_5, \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_5, \\ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Надамо вільним невідомим по черзі значення, які дорівнюють елементам стовпців визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

і отримаємо вектор-стовпці

$$C_1 = \left\| \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad C_2 = \left\| \begin{matrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

які і утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Загальний розв'язок

$$Y = \lambda_1 \begin{Vmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix} + \lambda_2 \begin{Vmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{Vmatrix}.$$

Надаючи λ_1 та λ_2 різні числові значення, отримаємо різні частинні розв'язки. ▶

6. Зв'язок розв'язків однорідної та неоднорідної систем

Якщо в неоднорідній системі лінійних рівнянь (5.4) замінити всі вільні члени нулями, то отримаємо однорідну систему (5.11), яка називається **зведеною системою** для вихідної неоднорідної системи. Між розв'язками неоднорідної системи і відповідної їй зведеної системи існує зв'язок, який випливає з теореми 5.10.

- **Теорема 5.10**

Сума довільного розв'язку неоднорідної системи і довільного розв'язку її зведеної системи є розв'язком неоднорідної системи.

Доведення. Нехай вектор-стовпці

$$C = \| c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n \|^{\top}, \quad F = \| f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n \|^{\top}$$

є розв'язками відповідно систем (5.4) і (5.11), тобто

$$A \cdot C = B, \quad A \cdot F = 0.$$

Тоді

$$A(C + F) = AC + AF = B.$$

Значить, $C + F$ є розв'язком системи $A \cdot X = B$, що і треба було довести.

Аналогічно доводиться теорема 5.11.

- **Теорема 5.11**

Різниця двох довільних розв'язків неоднорідної системи є розв'язком її зведеної системи.

З теорем 5.10 і 5.11 випливає, що **загальний розв'язок неоднорідної системи можна отримати, якщо до будь-якого частинного розв'язку цієї системи додати загальний розв'язок її зведеної системи.**

РОЗДІЛ 3

Векторна алгебра

§ 6. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

1. Скалярні та векторні величини

У математиці, фізиці, електротехніці, механіці та інших прикладних науках доводиться мати справу з величинами двох видів: скалярними і векторними.

Скалярною величиною, або **скаляром**, називається величина, яка характеризується, за вибраної одиниці вимірювання лише числом.

Такими величинами є: час, температура, довжина, площа, об'єм, маса, густина, робота, опір провідника, електроємність тощо. Кожна з них цілком визначається одним числом, яке виражає відношення величини до відповідної одиниці вимірювання.

Для повної характеристики іншого роду величин (переміщення точки, швидкості, прискорення, моменту сили, напруги електричного або магнітного полів тощо) тільки числа недостатньо. Ці величини характеризуються ще і напрямом.

Векторною величиною називається величина, яка характеризується, крім числа, ще й напрямом у просторі.

Кожну векторну величину можна зобразити напрямленим відрізком, який називають **вектором**. Довжина його дорівнює числовому значенню векторної величини, а напрям такий, як і в цієї величини.

Зображення векторних величин напрямленими відрізками (векторами) дає можливість звести ряд дій з векторними величинами до відповідних операцій з векторами.

Розділ математики, в якому вивчаються операції з векторами, називається **векторним численням**. Воно було створене для потреб фізики і механіки, але швидко знайшло широке застосування і в математиці, особливо у геометрії.

Введемо тепер основні поняття, позначення і терміни векторного числення.

2. Вектори. Види векторів

Вектором називається напрямлений відрізок, тобто відрізок, початок і кінець якого вказані.

Вектор, початком якого є точка А, а кінцем – точка В, позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Крім такого позначення, дуже часто вживається позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту з рискою зверху, наприклад, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$.

Рис. 1

На рисунку вектор зображається відрізком, на якому стрілкою в кінці відзначається додатній напрям(рис. 1).

Довжиною, або **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB, яка позначається символами $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається **нульовим** і позначається через $\vec{0}$.

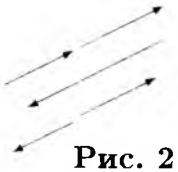


Рис. 2

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**.(рис. 2). Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Вектори вважаються **рівними**, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і довжини (рис. 3).

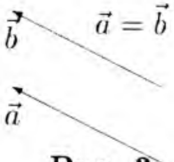


Рис. 3

З означення рівності векторів випливає таке твердження: **які б не були вектор $\vec{a}$ і точка P, існує єдиний вектор $\overrightarrow{PQ}$, що дорівнює вектору $\vec{a}$.**

Іншими словами, точка прикладання даного вектора $\vec{a}$ **може бути вибрана довільною**. Тому вектори, які вивчаються в геометрії, називаються **вільними**.

Два колінеарні вектори, які мають однакові довжини і протилежні напрямки, називаються **взаємно протилежними**.

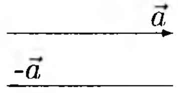


Рис. 4

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначається $-\vec{a}$ (рис. 4).

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним**, або **нормованим вектором**.

Три вектори називаються **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині.

3. Лінійні операції над векторами.

Над векторами можна виконувати певні математичні операції. Найпростішими з них є додавання векторів і множення вектора на число. Як відомо, ці операції називаються **лінійними.**

Означення 3.1 *Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, який з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 5). Це правило додавання векторів називають "правилом трикутника".*

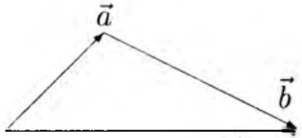


Рис. 5

Властивості додавання

Додавання векторів має такі властивості:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Властивості 3 і 4 випливають безпосередньо з означень нульового і протилежного векторів.

Доведемо властивість 1, тобто комутативність операції додавання.

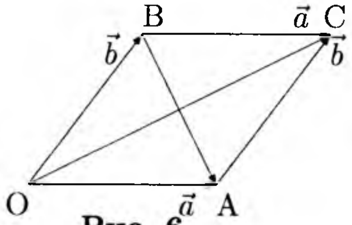


Рис. 6

Для цього віднесемо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до спільного початку, і побудуємо на них паралелограм (рис. 6). З трикутника OAC маємо, що $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$, а з трикутника OBC аналогічно маємо $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}$. Отже, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Доводячи цю властивість ми отримали другий спосіб побудови суми двох векторів, так зване "правило паралелограма": сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, відкладених від спільного початку 0, є вектор $\overrightarrow{OC}$, який збігається з діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах.

Залишається довести властивість 2, тобто асоціативність операції додавання.

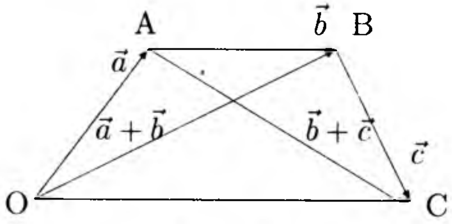


Рис. 7

Так, з чотирикутника OABC (рис. 7) очевидно, що

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$

і

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Отже,

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

Використовуючи послідовно правило трикутника, можна побудувати суму будь-якої скінченної кількості довільно розміщених в просторі векторів. Отже, правило додавання можна сформулювати так:

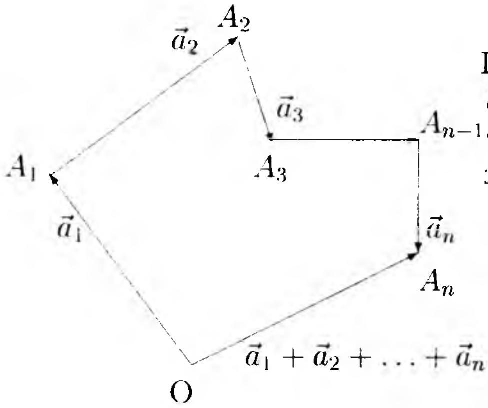


Рис. 8

Шоб побудувати суму векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ треба з довільної точки 0 відкласти вектор $\vec{a}_1$, з його кінця вектор $\vec{a}_2$ і т.д. до $\vec{a}_n$. Вектор $\overrightarrow{OA}_n$, що з'єднує початок 0 першого вектора $\vec{a}_1$ з кінцем останнього вектора доданка $\vec{a}_n$, і буде сумою даних векторів.

Кінець A_n останнього вектора доданка може суміститись з початком 0 першого. В цьому випадку сумою векторів є нульовий вектор $\vec{0}$.

Віднімання векторів. Правило трикутника додавання векторів дає можливість ввести й операцію віднімання векторів.

Означення 3.2 *Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ і вектора $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.*

(Очевидно, що $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$).

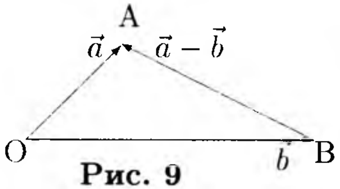


Рис. 9

Правило побудови різниці $\vec{a}-\vec{b}$ показано на рис. 9. Отже, для побудови різниці $\vec{a}-\vec{b}$ треба віднести вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до спільного початку 0 і провести вектор $\overrightarrow{BA}$ із кінцевої точки B вектора-від'ємника в кінцеву точку A вектора-зменшуваного.

- **Приклад 6.1**

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60^o. Обчислити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$.

◀ Побудуємо паралелограм OACB (рис. 6) на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Згідно з визначенням суми та різниці векторів маємо

$$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}, \quad \overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}.$$

З трикутника OAB за теоремою косинусів

$$|\overrightarrow{BA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cos\angle BOA.$$

Тому

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=25+64-2\cdot5\cdot8\cdot\cos60^o=49. \quad |\vec{a}-\vec{b}|=7.$$

З трикутника OAC

$$|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle OAC.$$

$$\angle OAC=180^o-60^o=120^o.$$

Значить, $|\vec{a}+\vec{b}|^2=25+64-80\cdot\cos120^o=129$,

$$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}\approx11,4. \quad ▶$$

Множення вектора на число

Означення 3.3 *Добутком $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ і числа $\alpha\neq0$ $\alpha\in\mathbf{R}$ називається вектор $\vec{b}$, який задовольняє такі умови:*

1) $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$,

2) $|\vec{b}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$.

3) вектори $\vec{b}$ і $\vec{a}$ однаково напрямлені, якщо $\alpha>0$. і протилежні, якщо $\alpha<0$.

З цього означення випливає. що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. то $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, і навпаки. Якщо $\vec{a}^o$ одиничний вектор того самого напряму. що і вектор $\vec{a}$, то $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^o$, і, навпаки, $\vec{a}^o=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Операція множення вектора на число (скаляр) має наступні властивості:

$$1.\ (\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$$

$$2.\ \alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b},$$

$$3.\ \alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}.$$

Ці властивості пропонуємо довести самостійно.

4. Лінійна залежність векторів. Розклад вектора по базису.

Розглянемо систему векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Означення 3.4 *Вектор $\vec{a}$ називається лінійною комбінацією системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, якщо існують такі скаляри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що*

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i.$$

Означення 3.5 *Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, що справджується рівність*

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}, \tag{6.1}$$

де $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \neq 0.$

(тобто серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є хоча б одне відмінне від нуля).

Означення 3.6 *Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається лінійно незалежною, якщо рівність*

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

можлива лише при $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0.$

Те, що система векторів лінійно залежна, рівносильно твердженню, що хоч би один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших, тобто лінійно виражається через інші вектори системи.

Справді, якщо задана система векторів лінійно залежна, то можна підібрати такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що буде справджуватись рівність

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0},$$

Нехай, для простоти доведення, $\alpha_n \neq 0$. Тоді маємо:

$$\vec{a}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} \vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \vec{a}_{n-1}.$$

а це означає, що вектор $\vec{a}_n$ лінійно виражається через інші вектори системи.

Навпаки, нехай тепер один з векторів системи, наприклад $\vec{a}_n$, буде лінійною комбінацією інших векторів:

$$\vec{a}_n = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_{n-1} \vec{a}_{n-1}.$$

Звідси отримаємо

$$\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_{n-1} \vec{a}_{n-1} - 1 \cdot \vec{a}_n = \vec{0},$$

тобто рівність вигляду (6.1). Через те, що серед коефіцієнтів $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, -1$ є -1, то не всі вони дорівнюють нулю, і тому система векторів лінійно залежна.

Два вектори лінійно залежні лише тоді, коли вони колінеарні. Справді, нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Тоді існує таке число α, що

$$\vec{b} = \alpha \vec{a},$$

а це означає, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні, і навпаки.

Три вектори лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли вони компланарні.

Дійсно, нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ лінійно залежні, тобто хоча б один з них, наприклад, вектор $\vec{c}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}, \vec{b}$:

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

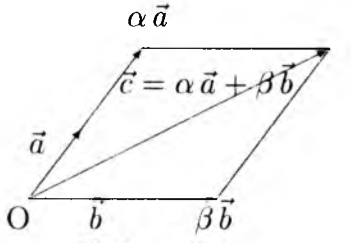


Рис. 10

Віднесемо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ до спільного початку. Очевидно, що вектори $\alpha \vec{a}$ і $\beta \vec{b}$ лежатимуть в площині векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Їх сума, тобто вектор $\vec{c}$, лежатиме в цій же площині. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні.

Навпаки, якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарні, то вони мають спільний початок і лежать в одній площині. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ непаралельні, то подання вектора $\vec{c}$ у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ показано на рис. 10. Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні. Якщо ж вектори $\vec a$ і $\vec b$ паралельні, то один з них, наприклад $\vec a$, лінійно виражається через другий вектор, тобто $\vec a = \beta\vec b$. Тоді

$$\vec a = \beta\vec b + 0\cdot\vec c,$$

тобто вектори $\vec a, \vec b, \vec c$ лінійно залежні.

- **Теорема 6.1**

Кожні чотири вектори в просторі є лінійно залежні.

Доведення. Віднесемо вектори $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ до спільного початку. Якщо вектори $\vec a, \vec b, \vec c$ компланарні, то вони лінійно залежні, тобто у співвідношенні $\alpha\vec a + \beta\vec b + \gamma\vec c = \vec 0$ хоча б один коефіцієнт відмінний від нуля. Але тоді і вектори $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ також лінійно залежні. Розглянемо тепер випадок, коли вектори $\vec a, \vec b, \vec c$ – некомпланарні.

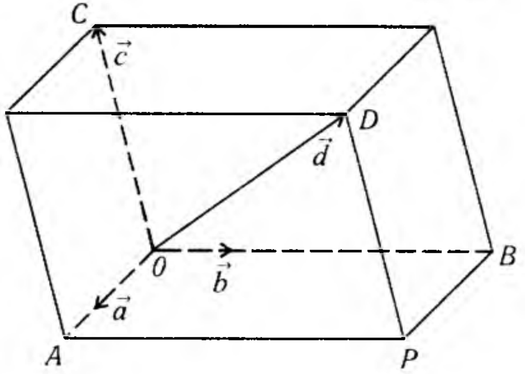


Рис. 11

Проведемо через кінець вектора $\vec d$ площини, паралельні попарно векторам $\vec a$, $\vec b, \vec c$ (рис. 11). Отримаємо паралелепіпед, діагоналлю якого є вектор $\overrightarrow{OD} = \vec d$. Діагональ OD замикає ламану лінію OAPD, тому згідно з правилом додавання векторів маємо: $\vec d = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PD}$.

Оскільки $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PD}$ колінеарні відповідно векторам $\vec a, \vec b, \vec c$, то існують такі числа α, β, γ, що $\overrightarrow{OA} = \alpha\vec a$, $\overrightarrow{AP} = \beta\vec b$, $\overrightarrow{PD} = \gamma\vec c$. Отже, отримаємо

$$\vec d = \alpha\vec a + \beta\vec b + \gamma\vec c, \qquad (6.2)$$

а це означає, що вектори $\vec a, \vec b, \vec c, \vec d$ лінійно залежні.

Співвідношення (6.2) називають розкладом вектора по трьох некомпланарних векторах. Такий розклад однозначний. Справді, припустивши, що можливі два розклади

$$\vec d = \alpha\vec a + \beta\vec b + \gamma\vec c,$$

$$\vec d = \alpha_1\vec a + \beta_1\vec b + \gamma_1\vec c$$

і порівнюючи їх праві частини, отримаємо:

$$(\alpha - \alpha_1)\vec a + (\beta - \beta_1)\vec b + (\gamma - \gamma_1)\vec c = \vec 0.$$

Ця рівність за умови, що $\vec a, \vec b, \vec c$ некомпланарні, можлива лише якщо одночасно

$$\alpha - \alpha_1 = 0, \quad \beta - \beta_1 = 0, \quad \gamma - \gamma_1 = 0,$$

бо в іншому випадку $\vec a, \vec b, \vec c$ були б лінійно залежні, і, отже, компланарні, що суперечить умові. Тому $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, тобто розклад (6.2) однозначний.

Означення 3.7 *Базою, або базисом в просторі називається будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів.*

Якщо в просторі заданий базис $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$, то будь-який вектор $\vec a$ можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді

$$\vec a = \alpha_1\vec e_1 + \alpha_2\vec e_2 + \alpha_3\vec e_3.$$

Отже, якщо заданий базис, то кожному вектору можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел коефіцієнтів розкладу цього вектора по базисних векторах. Навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ за допомогою базису можна поставити у відповідність вектор $\alpha_1\vec e_1 + \alpha_2\vec e_2 + \alpha_3\vec e_3$, де $\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3$ – базисні вектори.

Означення 3.8 *Базисом на площині називається впорядкована пара неколінеарних векторів.*

Якщо на площині вибраний базис, то кожному вектору однозначно відповідає впорядкована пара чисел, і навпаки, кожній впорядкованій парі чисел однозначно відповідає вектор.

Означення 3.9 *Якщо $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис і $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ відносно базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.*

Записують це так $\vec{a} = \{\, \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3 \,\}$.

5. Лінійні операції над векторами, що задані своїми координатами

- **Теорема 6.2**

Якщо вектор $\vec{a}$ множиться на число λ, його координати множаться на це число.

Доведення. Нехай $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$. Тоді

$$\lambda \vec{a} = \lambda (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) = (\lambda \alpha_1) \vec{e}_1 + (\lambda \alpha_2) \vec{e}_2 + (\lambda \alpha_3) \vec{e}_3.$$

- **Теорема 6.3**

Якщо вектори додаються, додаються і їх відповідні координати.

Доведення. Нехай $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, $\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$. Тоді

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) + (\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3.$$

- **Приклад 6.2**

Чи можуть вектори $\vec{a}_1 = \{\, 2; -3; 1 \,\}$, $\vec{a}_2 = \{\, 3; -1; 5 \,\}$ і $\vec{a}_3 = \{\, 1; -4; 3 \,\}$ утворювати базис?

◀ Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис тоді, коли вони лінійно незалежні. Згідно з формулою (6.1) маємо:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0},$$

тобто

$$\alpha_1 \{\, 2; -3; 1 \,\} + \alpha_2 \{\, 3; -1; 5 \,\} + \alpha_3 \{\, 1; -4; 3 \,\} = \vec{0},$$

або

$$\{\, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3;\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3;\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 \,\} = \vec{0}.$$

Для знаходження α_1, α_2 та α_3 отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta \neq 0$ (перевірити). Тому дана однорідна система має нульові розв'язки, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, згідно з означенням 3.6, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ лінійно незалежні і можуть утворювати базис. ▶

- **Приклад 6.3**

Знайти вектор $\vec{a} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$, якщо $\vec{a}_1 = \{\, 1; 2; 3 \,\}$ і $\vec{a}_2 = \{\, -1; 2; -5 \,\}$.

◀ Згідно з теоремою 6.2 вектори $2\vec{a}_1 = \{\, 2; 4; 6 \,\}$ і $3\vec{a}_2 = \{\, -3; 6; -15 \,\}$, а згідно з теоремою 6.3, вектор $\vec{a} = \{\, -1; 10; -9 \,\}$. ▶

6. Декартова прямокутна система координат

Зафіксуємо в просторі точку O і виберемо довільну точку M. Радіус-вектором точки M щодо точки O називається вектор $\overrightarrow{OM}$. Виберемо , крім того, деякий базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Тоді точці M можна поставити у відповідність впорядковану трійку чисел – координати її радіус-вектора.

Означення 3.10 *Системою координат в просторі називається сукупність точки O і базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.*

Якщо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, то **базис** називається **декартовим**. Сукупність точки O і декартового базису $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ називається **декартовою системою координат**.

Точка O називається початком координат: прямі, що проходять через початок координат в напрямі базисних векторів, називаються осями координат. Перша – віссю абсцис, друга – віссю ординат, третя – віссю аплікат. Площини, які проходять через осі координат, називаються координатними площинами.

Означення 3.11 *Координатами точки M у вибраній системі координат називаються координати радіус-вектора цієї точки.*

Перша координата називається абсцисою, друга – ординатою, а третя – аплікатою. Координати точки пишуть у дужках після букви, якою позначено точку.

Отже, якщо $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 = \{\,x; y; z\,\}$, то точка M має координати x, y, z, що записується так: $M(\,x, y, z\,)$.

Розрізняють ліву і праву системи координат. Розглянемо впорядковану трійку некомпланарних векторів. Ця трійка називається правою (лівою), коли поворот від першого вектора до другого і від другого до третього здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою). На рис. 12 зображено праву систему координат, а на рис. 13 – ліву.

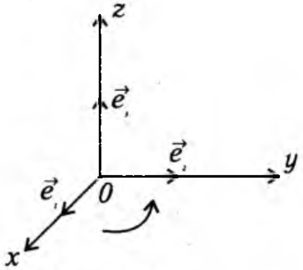


Рис. 12

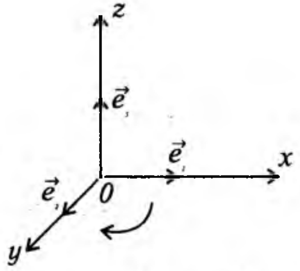


Рис. 13

Декартова система координат називається **прямокутною**, якщо базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – ортонормований, тобто $|\,\vec{e}_1\,| = |\,\vec{e}_2\,| = |\,\vec{e}_3\,| = 1$, і кути між базисними векторами прямі. В цьому випадку базисні вектори позначають через $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Тобто

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Координати будь-якого вектора $\vec{a}$ в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ будемо позначати a_x, a_y, a_z і тоді

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k} = \{\,a_x; a_y; a_z\,\}.$$

7. Координати вектора, заданого двома точками

Нехай в деякій декартовій системі координат дано дві точки $A(\,x_1, y_1, z_1\,)$ і $B(\,x_2, y_2, z_2\,)$. Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$. Маємо $\overrightarrow{OA} = \{\,x_1; y_1; z_1\,\}$, $\overrightarrow{OB} = \{\,x_2; y_2; z_2\,\}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (рис. 14).

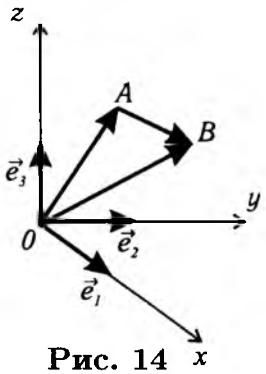


Рис. 14

Отже,

$$\overrightarrow{AB} = \{\,x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\,\}.$$

Отже, щоб знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, потрібно від координат його кінцевої точки B відняти координати початкової точки A.

• **Приклад 6.4**

Знайти точку $A(x, y, z)$, в якій знаходиться початок вектора $\vec{a} = \{\,2; 3; -1\,\}$, кінець якого збігається з точкою $B(\,1; 2; -1\,)$.

◄ Згідно з умовою задачі $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Вектор $\vec{a} = \{2; 3; -1\}$. $\overrightarrow{AB} = \{1 - x; 2 - y; -1 - z\}$. Враховуючи, що $1 - x = 2$, $2 - y = 3$, $-1 - z = -1$, маємо $x = -1$, $y = -1$, $z = 0$, тобто $A(-1, -1, 0)$. ►

8. Поділ відрізка в даному відношенні

Знайдемо координати точки M, яка ділить відрізок $[AB]$ у відношенні λ, тобто задовольняє умову

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \overrightarrow{MB}, \quad \lambda \neq -1$$

(рис.15). Позначимо через (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x, y, z) відповідно координати точок A, B, M.

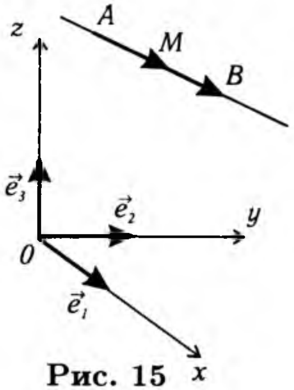


Рис. 15

Оскільки

$$\overrightarrow{AM} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\},$$
$$\overrightarrow{MB} = \{x_2 - x; y_2 - y; z_2 - z\},$$

то

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$
$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y),$$
$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Звідси

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{6.3}$$

Якщо $\lambda > 0$, то точка $M(x, y, z)$ знаходиться на прямій AB між точками A і B. Якщо $\lambda < 0$, то точка M розташована на тій же прямій, але не на відрізку $[AB]$.

Якщо відрізок AB ділиться навпіл, то $\lambda = 1$, і координати середини відрізка такі

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{6.4}$$

На площині задача про поділ відрізка розв'язується аналогічно, тільки базис складається з двох векторів, а тому з формул (6.3) залишаються тільки перші дві.

- **Приклад 6.5**

В точках $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ та $M_3(x_3, y_3)$ поміщені маси m_1, m_2 та m_3. Знайти координати центра мас.

◄ Знайдемо спершу координати центра мас $M'(x', y')$ системи двох мас m_1 і m_2. Згідно з відомим положенням механіки центр мас цієї системи ділить відрізок $[M_1, M_2]$ на частини, які обернено пропорційні масам m_1 і m_2, тобто у відношенні $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$. Тоді відповідно до формул (6.3) маємо

$$x' = \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1} x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}, \quad y' = \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1} y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Нехай $M(x, y)$ – центр мас системи трьох мас m_1, m_2 і m_3. Положення точки M не зміниться, якщо маси m_1 і m_2 будуть зосереджені в точці M', тобто точка M є центром мас системи двох мас: маси m_3, яка поміщена в точці M_3, і маси $m_1 + m_2$ в точці M'. Значить, ми можемо знайти точку M як точку, що ділить відрізок $[M', M_3]$ у відношенні $\lambda = \frac{m_3}{m_1+m_2}$. Застосовуючи формули (6.3), отримаємо:

$$x = \frac{x' + \frac{m_3}{m_1+m_2} x_3}{1 + \frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{\frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_3 x_3}{m_1+m_2}}{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$y = \frac{y' + \frac{m_3}{m_1+m_2} y_3}{1 + \frac{m_3}{m_1+m_2}} = \frac{\frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_3 y_3}{m_1+m_2}}{\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1+m_2}} = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Зауваження. Якщо в точках $M_i(x_i, y_i)$ $(i = \overline{1,n})$ поміщені маси m_i $(i = \overline{1,n})$, то координати центра мас цієї системи знаходять за формулами

$$x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}, \quad y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}.$$

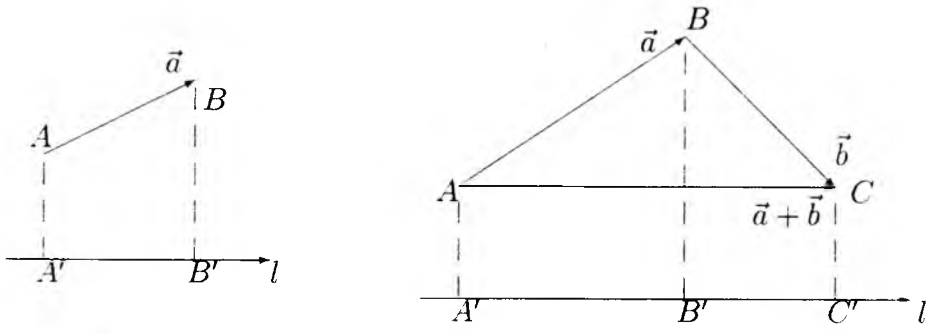
Для доведення цих формул потрібно використати формули (6.3) і метод математичної індукції. ►

9. Проекція вектора на вісь

Нехай дано вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ і вісь l. Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l ($\text{Пр}_l \vec{a}$) називається довжина відрізка $[A'B']$ між основами перпендикулярів, опущених з точок A і B, на вісь l, взята зі знаком "+", якщо напрями відрізка $[A'B']$ і осі l збігаються і зі знаком "-", якщо вони протилежні (рис.16, а).

Аналогічно визначається проекція одного вектора на інший. Легко показати, що

$$\text{Пр}_l\,\vec{a} = |\,\vec{a}\,|\cos(\widehat{\vec{a}, l}). \qquad (6.5)$$



а) б)

Рис. 16

Основні властивості проекції вектора на вісь полягають в тому, що лінійні операції над векторами приводять до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, а саме: якщо додаються два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їх проекції на довільну вісь теж додаються (рис. 16, б); якщо вектор $\vec{a}$ множиться на будь-яке число α, його проекція на довільну вісь також множиться на число α, тобто

$$\text{Пр}_l\,(\,\vec{a}+\vec{b}\,) = \text{Пр}_l\,\vec{a} + \text{Пр}_l\,\vec{b},$$

$$\text{Пр}_l\,(\,\alpha\,\vec{a}\,) = \alpha\cdot\text{Пр}_l\,\vec{a}.$$

- **Приклад 6.6**

Знайти $\text{Пр}_l\,(\,\vec{a}+\vec{b}\,)$, якщо $|\,\vec{a}\,| = 2$, $|\,\vec{b}\,| = 4$ і $\varphi = 30^o$.

◄ Маємо: $\text{Пр}_l\,(\,\vec{a}+\vec{b}\,) = \text{Пр}_l\,\vec{a} + \text{Пр}_l\,\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\cdot\cos\varphi + |\,\vec{b}\,|\cdot\cos\varphi =$

$$= 2\cdot\cos 30^o + 4\cdot\cos 30^o = 3\sqrt{3}. \quad ►$$

10. Геометричний зміст декартових прямокутних координат вектора

- **Теорема 6.4**

Декартові прямокутні координати a_x, a_y і a_z вектора $\vec{a}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy і Oz відповідно.

Доведення. Аналогічно до міркувань, які наведені при доведенні теореми 6.3, віднесемо вектор $\vec{a}$ до початку O прямокутної декартової системи і проведемо через кінець A цього вектора три площини, які паралельні координатним площинам O_{yz}, O_{xz} і O_{xy} (рис. 17). Точки перетину вказаних площин з осями Ox, Oy і Oz відповідно позначимо A_1, A_2 і A_3.

Тоді $\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$. Оскільки вектор $\overrightarrow{OA_1}$ колінеарний вектору $\vec{i}$, то $\overrightarrow{OA_1} = a_x\cdot\vec{i}$. Аналогічно, $\overrightarrow{OA_2} = a_y\cdot\vec{j}$ і $\overrightarrow{OA_3} = a_z\cdot\vec{k}$.

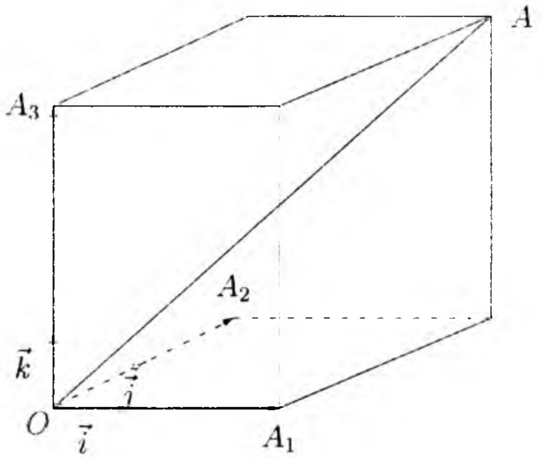


Рис. 17

На відміну від косокутного паралелепіпеда (рис. 11) у випадку декартової прямокутної системи паралелепіпед, побудований на базисних векторах $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, є прямокутним. Його діагональ — вектор $\vec{a}$. Тому $\text{Пр}_{Ox}\vec{a} = a_x$, $\text{Пр}_{Oy}\vec{a} = a_y$ і $\text{Пр}_{Oz}\vec{a} = a_z$.

§ 7. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

1. Скалярний добуток і його властивості

Означення 3.12 *Скалярним добутком двох векторів називається число, яке дорівнює добуткові довжин цих векторів на косинус кута між ними.*

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається символом $\vec{a}\cdot\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$. Отже, згідно з означенням, маємо:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{7.1}$$

де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто $\varphi = (\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Перш ніж сформулювати наступне твердження, уточнимо поняття кута φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приведемо довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ до спільного початку 0 (рис.18).

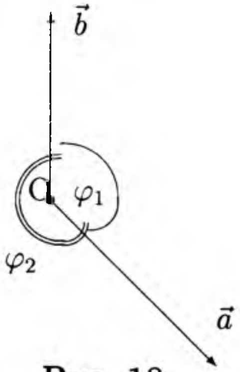


Рис. 18

Тоді за кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна взяти будь-який з двох вказаних на рис.18 кутів φ_1 і φ_2. Справді, сума кутів φ_1 і φ_2 дорівнює 2π і тому $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, а в означення скалярного добутку входить тільки косинус кута між векторами. З двох кутів φ_1 і φ_2 один менший за π (на рис.18 це кут φ_1). Тому домовимось, що надалі **кут між двома векторами** — це той кут, який не більший за π, тобто $0 \le \varphi \le \pi$.

Враховуючи, що $|\vec{a}|\cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ і $|\vec{b}|\cos\varphi = \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$, співвідношення (7.1) можна записати в такому вигляді:

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \tag{7.2}$$

Основні властивості скалярного добутку

1. Комутативність множення:

$$(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{b},\vec{a}).$$

Ця властивість випливає з означення скалярного добутку.

2. Асоціативність відносно множення на число:

$$(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda(\vec{a},\vec{b}).$$

Справді, згідно з (7.2) маємо: $(\lambda\vec{a},\vec{b}) = |\vec{b}|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda|\vec{b}|\cdot\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \lambda(\vec{a},\vec{b})$.

3. Дистрибутивність відносно додавання:

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

З огляду на (7.2) маємо:

$$(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = |\vec{c}|\,\text{Пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\,\text{Пр}_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\,\text{Пр}_{\vec{c}}\vec{b} = (\vec{a},\vec{c}) + (\vec{b},\vec{c}).$$

4. $(\vec{a},\vec{b}) = 0$, якщо $\vec{a}\perp\vec{b}$, і навпаки.

5. $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2$; звідси $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

2. Вираження скалярного добутку через координати співмножників

Нехай в прямокутній декартовій системі координат

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}, \qquad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\},$$

тобто

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \quad \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – одиничні попарно перпендикулярні базисні вектори, тобто $(\vec{i},\vec{i}) = (\vec{j},\vec{j}) = (\vec{k},\vec{k}) = 1, \quad (\vec{i},\vec{j}) = (\vec{j},\vec{k}) = (\vec{k},\vec{i}) = 0.$

Тоді

$$(\vec{a},\vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{7.3}$$

Дійсно,

$$(\vec{a},\vec{b}) = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) =$$

$$a_x b_x(\vec i,\vec i)+a_x b_y(\vec i,\vec j)+a_x b_z(\vec i,\vec k)+a_y b_x(\vec j,\vec i)$$

$$+a_y b_y(\vec j,\vec j)+a_y b_z(\vec j,\vec k)+a_z b_x(\vec k,\vec i)+a_z b_y(\vec k,\vec j)+a_z b_z(\vec k,\vec k)=$$

$$=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z.$$

Отже, **скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх однойменних координат**.

Оскільки $(\vec a,\vec a)=|\vec a|^2$, то

$$|\vec a|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \qquad (7.4)$$

3. Кут між двома векторами

$$\cos\varphi=\frac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a|\cdot|\vec b|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}. \qquad (7.5)$$

Якщо вектори $\vec a=\{a_x,a_y,a_z\}$ і $\vec b=\{b_x,b_y,b_z\}$ ортогональні, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}=0$ і

$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0. \qquad (7.6)$$

Якщо вектори $\vec a$ і $\vec b$ колінеарні, тобто $\vec a=\lambda\vec b$, то

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (7.7)$$

4. Напрямні косинуси вектора

Позначимо через α,β,γ кути між вектором $\vec a=\{a_x,a_y,a_z\}$ і векторами $\vec i,\vec j,\vec k$ відповідно. Тоді

$$\cos\alpha=\frac{(\vec a,\vec i)}{|\vec a|\cdot|\vec i|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \qquad (7.8)$$

$$\cos\beta=\frac{(\vec a,\vec j)}{|\vec a|\cdot|\vec j|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \qquad (7.9)$$

$$\cos\gamma=\frac{(\vec a,\vec k)}{|\vec a|\cdot|\vec k|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}. \qquad (7.10)$$

Косинуси кутів, які утворює вектор з осями координат, називаються його **напрямними косинусами**. Очевидно, що

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \qquad (7.11)$$

Вектор $\vec a^o=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$ одиничний і має напрям вектора $\vec a$. Але $\vec a^o=\frac{\vec a}{|\vec a|}$, або $\vec a=|\vec a|\vec a^o$, і тому в прямокутній системі координат координати одиничного вектора $\vec a^o$ є напрямними косинусами вектора $\vec a$, тобто $\vec a^o=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}$.

З іншого боку, $a_x=|\vec a|\cos\alpha=\text{Пр}_{\vec i}\,\vec a$, $a_y=\text{Пр}_{\vec j}\,\vec a$, $a_z=\text{Пр}_{\vec k}\,\vec a$. Отже, координати a_x,a_y,a_z вектора $\vec a$ є його проекціями на відповідні осі координат.

5. Відстань між двома точками

Відстань d між двома точками $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ – це довжина вектора $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$. Тому

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (7.12)$$

• **Приклад 7.1**

Знайти кут, який утворюють одиничні вектори $\vec e_1$ і $\vec e_2$, якщо вектори $\vec a=\vec e_1+2\vec e_2$ та $\vec b=5\vec e_1-4\vec e_2$ перпендикулярні.

◄ Позначимо через φ кут між векторами $\vec e_1$ і $\vec e_2$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec a$ та $\vec b$:

$$(\vec a,\vec b)=(\vec e_1+2\vec e_2,\,5\vec e_1-4\vec e_2)=5(\vec e_1,\vec e_1)-4(\vec e_1,\vec e_2)+10(\vec e_2,\vec e_1)-8(\vec e_2,\vec e_2)=$$

$$=5\cdot|\vec e_1|^2+6\cdot|\vec e_1|\cdot|\vec e_2|\cos\varphi-8\cdot|\vec e_2|^2.$$

Згідно з умовою задачі вектори $\vec e_1$ та $\vec e_2$ – одиничні, тобто $|\vec e_1|=|\vec e_2|=1$, а вектори $\vec a$ та $\vec b$ – перпендикулярні, тобто $(\vec a,\vec b)=0$.

Отже, для знаходження кута φ маємо рівняння

$$6\cos\varphi-3=0\Rightarrow\varphi=60^o. \qquad ►$$

- **Приклад 7.2**

Знайти проекцію вектора $\vec{a} = \{\sqrt{2}; -3; -5\}$ на вісь l, яка утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha = 45^o$, $\beta = 60^o$, а з віссю Oz – тупий кут.

◀Згідно з формулою (7.11) маємо

$$\cos^2 45^o + \cos^2 60^o + \cos^2\gamma = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2\gamma = \frac{1}{4}.$$

Оскільки γ – тупий кут, то $\cos\gamma = -\frac{1}{2}$. Позначимо через $\vec{e}$ одиничний вектор, який співнапрямлений з віссю l. Тоді $\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$ і

$\text{Пр}_l\,\vec{a} = \text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{e})}{|\vec{e}|} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2}}{1} = 2$, тобто $\text{Пр}_l\vec{a} = 2$. ▶

§ 8. ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

1. Векторний добуток і його властивості

Означення 3.13 *Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі умови:*

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3. Напрям вектора $\vec{c}$ вибирається так, щоб трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ була правою (рис.19, а).

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $[\vec{a}, \vec{b}]$ або $\vec{a}\times\vec{b}$. З означення випливає, що модуль векторного добутку чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на перемножуваних векторах. Тому, якщо через $\vec{c^o}$ позначити одиничний вектор, який колінеарний вектору $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ і має однаковий з ним напрямок (рис.19, а), то $\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\vec{c^o} = |[\vec{a}, \vec{b}]|\cdot\vec{c^o}$, тобто

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = S\cdot\vec{c^o}, \qquad (8.1)$$

де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

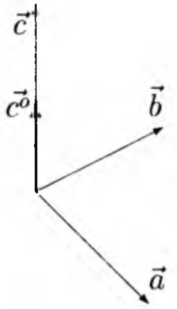


Рис. 19 а)

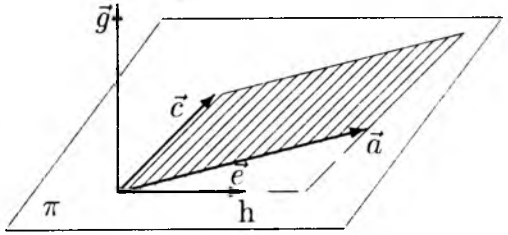


Рис. 19 б

Теорема 8.1 встановлює важливе співвідношення, яке буде використовуватись далі

- **Теорема 8.1**

Якщо $\vec{c}$ – довільний вектор, який лежить в площині π; $\vec{e}$ – одиничний вектор площини π, ортогональний вектору $\vec{c}$; $\vec{g}$ – одиничний вектор, ортогональний до площини π і спрямований так, що трійка векторів $\vec{e}, \vec{c}$ та $\vec{g}$ – права (рис.19, б), то для будь-якого вектора $\vec{a}$, який лежить в площині π, справедливе співвідношення

$$[\vec{a}, \vec{c}] = \text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}. \qquad (8.2)$$

Доведення. Достатньо довести, що вектори, які стоять в лівій і правій частинах (8.2), мають однакові довжини, колінеарні й однаково спрямовані. Маємо: $|[\vec{a}, \vec{c}]| = S$, де S – площа паралелограма, по будованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{c}$. Довжина вектора, який стоїть в правій частині співвідношення (8.2), дорівнює $|\vec{c}|\cdot|\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a}|$, тобто дорівнює S, бо якщо за основу паралелограма взяти вектор $\vec{c}$, то його висота h дорівнює $|\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a}|$.

Колінеарність векторів $[\vec{a}, \vec{c}]$ та $\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}$ випливає з того, що обидва ці вектори ортогональні до площини π.

Залишається перевірити, чи вектори $[\vec{a}, \vec{c}]$ та $\text{Пр}_{\vec{e}}\vec{a}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}$ однаково спрямовані. Справді, вектори $[\vec{a}, \vec{c}]$ і $\vec{g}$ однаково напрямлені (чи протилежно), якщо трійка $\vec{a}, \vec{c}$ і $\vec{g}$ — права (ліва), тобто коли вектори $\vec a$ та $\vec e$ лежать по один бік від $\vec c$ (по різні боки), і проекція $\text{Пр}_{\vec e}\vec a$ є додатною (від'ємною), але це і означає, що вектори $[\vec a, \vec c]$ і $\text{Пр}_{\vec e}\vec a \cdot |\vec c| \cdot \vec g$ *завжди однаково спрямовані.*

Властивості векторного добутку

1. Некомутативність множення:

$$[\vec a, \vec b] = -[\vec b, \vec a].$$

Справді, вектори $[\vec a, \vec b]$, $[\vec b, \vec a]$ мають однакові довжини (модулі)

$$|[\vec a, \vec b]| = |[\vec b, \vec a]| = |\vec a| \cdot |\vec b| \sin\varphi.$$

Вони колінеарні, оскільки обидва перпендикулярні до площини, що визначається векторами $\vec a$ і $\vec b$.

Їх напрями протилежні, бо трійки $\vec a, \vec b, [\vec a, \vec b]$ і $\vec a, \vec b, [\vec b, \vec a]$ – різної орієнтації.

2. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли перемножувані вектори колінеарні (довести цю властивість самостійно).

3. Асоціативність відносно скалярного множника:

$$[\lambda\vec a, \vec b] = \lambda[\vec a, \vec b], \quad [\vec a, \lambda\vec b] = \lambda[\vec a, \vec b].$$

Якщо $\lambda = 0$, або якщо $\vec a$ і $\vec b$ колінеарні, то обидві рівності очевидні, бо в обох випадках їх права і ліва частини дорівнюють нулеві.

Припустимо тепер, що $\lambda \neq 0$ і вектори $\vec a$ та $\vec b$ неколінеарні. Доведемо спочатку першу рівність. Щоб переконатись в її справедливості, досить розглянути модулі й напрями векторів $[\lambda\vec a, \vec b]$, $\lambda[\vec a, \vec b]$.

За означенням $|[\vec a, \vec b]| = |\vec a|\,|\vec b| \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec a$ і $\vec b$. Тоді

$$|\lambda[\vec a, \vec b]| = |\lambda|\,|\vec a|\,|\vec b| \sin\varphi, \quad |[\lambda\vec a, \vec b]| = |\lambda|\,|\vec a|\,|\vec b| \sin\varphi_1,$$

де φ_1 – кут між векторами $\lambda\vec a$ і $\vec b$. Він дорівнює кутові φ, якщо $\lambda > 0$ і $\pi - \varphi$, якщо $\lambda < 0$. В обох випадках $\sin\varphi_1 = \sin\varphi$. Звідси випливає, що

$$|[\lambda\vec a, \vec b]| = |\lambda[\vec a, \vec b]|.$$

Вектори $[\lambda\vec a, \vec b]$ і $\lambda[\vec a, \vec b]$ – колінеарні, як вектори, що перпендикулярні до площини, яка визначається векторами $\vec a$ і $\vec b$.

Якщо $\lambda > 0$, то їх напрями збігаються, і, оскільки їх модулі дорівнюють один одному, вони теж рівні.

Якщо ж $\lambda < 0$, то напрями векторів $[\lambda\vec a, \vec b]$ і $[\vec a, \vec b]$ протилежні, тобто вектори $[\lambda\vec a, \vec b]$ і $\lambda[\vec a, \vec b]$ – рівні. Отже, при $\lambda \neq 0$

$$[\lambda\vec a, \vec b] = \lambda[\vec a, \vec b].$$

Друга з рівностей зводиться до першої переставлянням співмножників в лівій і правій частинах, а саме:

$$[\vec a, \lambda\vec b] = -[\lambda\vec b, \vec a] = -\lambda[\vec b, \vec a] = \lambda[\vec a, \vec b].$$

4. Розподільна властивість відносно додавання.

Для будь-яких векторів $\vec a, \vec b, \vec c$ справедливе співвідношення:

$$[\vec a + \vec b, \vec c] = [\vec a, \vec c] + [\vec b, \vec c].$$

Доведення. Почнемо з випадку, коли один із співмножників є одиничним вектором $\vec{c^o}$. З означення векторного добутку випливає, що вектор $[\vec a, \vec{c^o}]$ можна побудувати так, як зображено на рис. 20. Спроектуємо вектор $\vec a$ на площину, перпендикулярну до вектора $\vec{c^o}$ і повернемо вектор $\overrightarrow{OA_1}$ в цій площині навколо точки O за годинниковою стрілкою на 90^o. Отриманий таким способом вектор $\overrightarrow{OA_2} = [\vec a, \vec{c^o}]$.

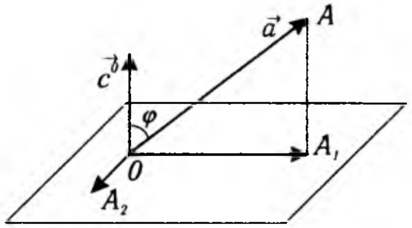


Рис. 20

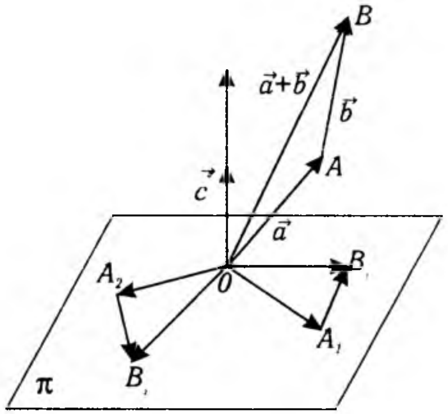


Рис. 21

Справді, $|\overrightarrow{OA_2}| = |\overrightarrow{OA_1}| = |\vec a|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = |\vec a|\sin\varphi = |\vec a|\cdot|\vec{c^o}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec a$ і $\vec{c^o}$; вектор $\overrightarrow{OA_2}$ перпендикулярний до векторів $\vec a$ і $\vec{c^o}$ і вектори $\vec a, \overrightarrow{OA_2}$ і $\vec{c^o}$ утворюють праву трійку. Отже, $\overrightarrow{OA_2} = [\,\vec a, \vec{c^o}\,]$.

Розглянемо тепер одиничний вектор $\vec{c^o}$, перпендикулярну до нього площину π і трикутник OAB (рис. 21), в якому $\overrightarrow{OA} = \vec a$, $\overrightarrow{OB} = \vec a + \vec b$, $\overrightarrow{AB} = \vec b$.

Спроектуємо точки A та B на площину π і повернемо трикутник OA_1B_1 в цій площині за годинниковою стрілкою на 90^o. Отримаємо трикутник OA_2B_2, в якому згідно з попередніми міркуваннями $\overrightarrow{OB_2} = [\,\vec a + \vec b, \vec{c^o}\,]$, $\overrightarrow{OA_2} = [\,\vec a, \vec{c^o}\,]$, $\overrightarrow{A_2B_2} = [\,\vec b, \vec{c^o}\,]$.

Але

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_2},$$

тому

$$[\,\vec a + \vec b, \vec{c^o}\,] = [\,\vec a, \vec{c^o}\,] + [\,\vec b, \vec{c^o}\,].$$

Помножимо обидві частини останнього співвідношення на $|\vec c|$, і, враховуючи, що $\vec c = |\vec c|\,\vec{c^o}$, а також властивість 3 векторного добутку, отримаємо:

$$[\,\vec a + \vec b, |\vec c|\,\vec{c^o}\,] = [\,\vec a, |\vec c|\,\vec{c^o}\,] + [\,\vec b, |\vec c|\,\vec{c^o}\,].$$

або

$$[\,\vec a + \vec b, \vec c\,] = [\,\vec a, \vec c\,] + [\,\vec b, \vec c\,].$$

2. Вираження векторного добутку через координати співмножників

Нехай

$$\vec a = a_x\,\vec i + a_y\,\vec j + a_z\,\vec k,$$
$$\vec b = b_x\,\vec i + b_y\,\vec j + b_z\,\vec k.$$

Очевидно, що $[\,\vec i, \vec j\,] = \vec k$, $[\,\vec i, \vec i\,] = 0$, $[\,\vec j, \vec k\,] = \vec i$, $[\,\vec j, \vec j\,] = 0$, $[\,\vec k, \vec i\,] = \vec j$, $[\,\vec k, \vec k\,] = 0$.

Тоді

$$[\,\vec a.\vec b\,] = [\,a_x\,\vec i + a_y\,\vec j + a_z\,\vec k,\; b_x\,\vec i + b_y\,\vec j + b_z\,\vec k\,] = a_x\,b_y\,\vec k - a_x\,b_z\,\vec j - a_y\,b_x\,\vec k +$$

$$+a_y\,b_z\,\vec i + a_z\,b_x\,\vec j - a_z\,b_y\,\vec i = (\,a_y\,b_z - a_z\,b_y\,)\,\vec i + (\,a_z\,b_x - a_x\,b_z\,)\,\vec j + (\,a_x\,b_y - a_y\,b_x\,)\,\vec k =$$

$$= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec i + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec k = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Отже,

$$[\,\vec a, \vec b\,] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (8.3)$$

• Приклад 8.1

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec a = \{\,1; 0; -\frac{1}{4}\,\}$, $\vec b = \{\,4; -12; -5\,\}$

◀ Знайдемо спочатку векторний добуток $[\,\vec a.\vec b\,]$. Згідно з формулою (8.3), маємо:

$$[\,\vec a, \vec b\,] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 4 & -12 & -5 \end{vmatrix} = -3\vec i + 4\vec j - 12\vec k.$$

Як відомо, площа S паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ і $\vec b$ дорівнює $|[\,\vec a, \vec b\,]|$. Отже,

$$S = |-3\vec i + 4\vec j - 12\vec k| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (-12)^2} = 13(\text{кв.од.}). \quad ▶$$

3. Застосування векторного добутку

3.1. Обчислення площ паралелограма та трикутника

Нехай задані точки $A(\,x_1, y_1, z_1\,)$, $B(\,x_2, y_2, z_2\,)$ і $C(\,x_3, y_3, z_3\,)$. Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Згідно з означенням векторного добутку модуль векторного добутку $[\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,]$ дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, тобто

$$S_\diamond = \left|\left[\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\,\right]\right|.$$

Якщо потрібно знайти площу трикутника ABC, то вона дорівнює половині площі отриманого паралелограма, тобто

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

• **Приклад 8.2**

Обчислити площу трикутника ABC, якщо $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(4,3,5)$.

◄ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \{1;1:1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{3;2;4\}$. Тоді

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

і $\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$. Значить, $S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ (кв.од). ►

3.2. Момент вектора $\vec{a}$ відносно фіксованої точки

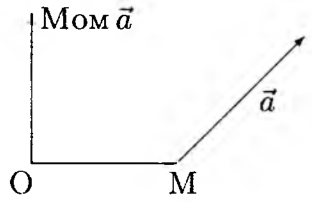


Рис. 22

Поняття векторного добутку використовується в статиці та динаміці, а також в теорії електромагнетизму. Одним із важливих застосувань векторного добутку є поняття моменту вектора $\vec{a}$, прикладеного в точці M відносно фіксованої точки O. За означенням (рис.22)

$$\text{Мом}_O\, \vec{a} = \left[\vec{OM}, \vec{a}\right]. \qquad (8.4)$$

• **Приклад 8.3**

Сила $\vec{F} = \{2;-4;5\}$ прикладена до точки $M(4,-2,3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $A(3,2,-1)$.

◄ Згідно з формулою (8.4) маємо:

$$\text{Мом}_A\, \vec{F} = \left[\overrightarrow{AM}, \vec{F}\right].$$

Тоді $\overrightarrow{AM} = \{1;-4;4\}$ і шуканий

$$\text{Мом}_A\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k},$$

тобто $\text{Мом}_A\, \vec{F} = \{-4;3;4\}$. ►

§ 9. МІШАНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. Визначення мішаного добутку трьох векторів. Властивості мішаного добутку

Нехай дані три вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Помножимо векторно вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і отриманий вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$ помножимо скалярно на вектор $\vec{c}$, тобто складемо вираз

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Цей вираз і називається мішаним добутком трьох векторів, тому що в ньому використані два види множення. Мішаний добуток будемо позначати символом $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, так що за означенням

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Мішаний добуток як результат скалярного множення векторів $[\vec{a}, \vec{b}]$ і $\vec{c}$ є скалярною величиною (числом). Він має дуже просте геометричне тлумачення.

Мішаний добуток некомпланарних векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дорівнює об'ємові паралелепіпеда, побудованого на цих векторах (віднесених до спільного початку), взятому зі знаком плюс, якщо трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – права, і зі знаком мінус, коли ця трійка ліва.

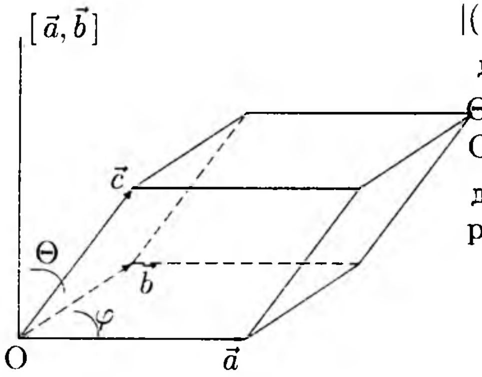


Рис. 23

Справді,

$$|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi\,|\vec{c}|\,|\cos\Theta|,$$

де φ – кут між векторами $\vec{a},\vec{b}$, Θ – кут між векторами $[\vec{a},\vec{b}]$, $\vec{c}$. Об'єм v паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ дорівнює добуткові площі основи

$$S = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$$

на висоту $h = |\vec{c}|\,|\cos\Theta|$ (рис.23), тобто

$$|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = S\cdot h = v.$$

Знак мішаного добутку збігається зі знаком $\cos\Theta$. Тому він додатний, коли кут Θ – гострий, тобто коли трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права, і від'ємний, якщо Θ – тупий, тобто трійка векторів – ліва.

Отже,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \pm v.$$

Наслідок. Мішаний добуток дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли перемножувані вектори компланарні.

Справді, рівність $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$, тобто рівність $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi|\vec{c}|\cos\Theta = 0$ виконується якщо:

1. Хоча б один із векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ є нульовий і тоді всі три вектори компланарні;

2. $\sin\varphi = 0$. Тоді вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, а отже, вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні;

3. $\cos\Theta = 0$, тоді вектори $[\vec{a},\vec{b}]$ і $\vec{c}$ ортогональні і вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні.

Обернене твердження доводиться аналогічно.

З геометричного тлумачення мішаного добутку випливає, що

$$([\vec{a},\vec{b}],\,\vec{c}) = (\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]).$$

Звідси, з огляду на комутативність скалярного добутку і антикомутативність векторного множення, для довільних трьох векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ маємо:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}).$$

2. Вираження мішаного добутку через координати перемножуваних векторів

Нехай $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$. Тоді

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

і

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = ([\vec{a},\vec{b}],\,\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Таким чином,

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (9.1)$$

- **Приклад 9.1**

Дано чотири точки: $A(1,1,1)$, $B(4,4,4)$. $C(3.5,5)$, $D(2.4.7)$. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

◀ Об'єм піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. Отже

$$v_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AD}$.

Маємо: $\overrightarrow{AB} = \{3,3,3\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2,4,4\}$, $\overrightarrow{AD}\{1,3,6\}$.

Тоді $v_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 18 =$
$= 3.$ (куб. од). ▶

• **Приклад 9.2**

З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec a = \{2;3;-1\}$, $\vec b = \{1;-1;3\}$ і $\vec c = \{1;9;-11\}$.

◄ Знайдемо мішаний добуток заданих векторів. Маємо:

$$(\vec a,\vec b,\vec c) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, задані вектори компланарні. ►

• **Приклад 9.3**

Довести, що чотири точки $A(1,2,-1)$, $B(0,1,5)$, $C(-1,2,1)$ і $D(2,1,3)$ лежать в одній площині.

◄ Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = \{-1;-1;6\},\ \overrightarrow{AC} = \{-2;0;2\},\ \overrightarrow{AD} = \{1;-1;4\}.$$

Мішаний добуток

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$ – компланарні, а тому точки A, B, C і D лежать в одній площині. ►

§ 10. ПОДВІЙНИЙ ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК

Нехай задані три вектори $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$.

Означення 3.14 *Якщо вектор $\vec b$ векторно помножити на вектор $\vec c$, а вектор $\vec a$ також векторно помножити на векторний добуток $[\vec b,\vec c]$, то отримаємо вектор $[\vec a,[\vec b,\vec c]]$, який називається подвійним векторним добутком.*

• **Теорема 10.1**

Для довільних векторів $\vec a$, $\vec b$ і $\vec c$ справедливе співвідношення

$$[\vec a,[\vec b,\vec c]] = \vec b(\vec a,\vec c) - \vec c(\vec a,\vec b). \tag{10.1}$$

Доведення. Розглянемо окремо два випадки: перший, коли вектори $\vec b$ і $\vec c$ колінеарні; другий, коли вектори $\vec b$ і $\vec c$ неколінеарні.

В першому випадку позначимо через $\vec c^{\,0}$ орт вектора $\vec c$. Тоді $\vec c = |\vec c|\cdot\vec c^{\,0}$, $\vec b = \pm|\vec b|\cdot\vec c^{\,0}$, де знак плюс беремо тоді, коли вектори $\vec b$ і $\vec c$ однаково спрямовані, а знак мінус – коли протилежно. Знайдемо $\vec b(\vec a,\vec c)$ і $\vec c(\vec a,\vec b)$.

Маємо

$$\vec b(\vec a,\vec c) = \pm|\vec b|\vec c^{\,0}(\vec a,|\vec c|\vec c^{\,0}) = \pm|\vec b||\vec c|\vec c^{\,0}(\vec a,\vec c^{\,0}),$$

$$\vec c(\vec a,\vec b) = |\vec c|\vec c^{\,0}(\vec a,\pm|\vec b|\vec c^{\,0}) = \pm|\vec c||\vec b|\vec c^{\,0}(\vec a,\vec c^{\,0}).$$

Значить, $\vec b(\vec a,\vec c) - \vec c(\vec a,\vec b) = 0$. Але і ліва частина (10.1) дорівнює нулю, оскільки векторний добуток $[\vec b,\vec c]$ колінеарних векторів дорівнює нулю. Для першого випадку теорема доведена.

Розглянемо тепер другий випадок, коли вектори $\vec b$ і $\vec c$ неколінеарні. Вектор $[\vec a,[\vec b,\vec c]]$ ортогональний вектору $[\vec b,\vec c]$, а останній ортогональний векторам $\vec b$ і $\vec c$. Значить, вектори $[\vec a,[\vec b,\vec c]]$, $\vec b$ і $\vec c$ компланарні, а тому вектор $[\vec a,[\vec b,\vec c]]$ можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec b$ і $\vec c$ як за базисом, тобто існують дійсні числа α і β такі, що

$$[\vec a,[\vec b,\vec c]] = \alpha\vec b + \beta\vec c. \tag{10.2}$$

Залишається довести, що $\alpha = (\vec a,\vec c)$, $\beta = -(\vec a,\vec b)$. Доведемо, наприклад, що $\alpha = (\vec a,\vec c)$. Введемо такі позначення: π – площина, яка визначається векторами $\vec b$ і $\vec c$; $\vec e$ – одиничний вектор, що лежить в площині π і ортогональний до вектора $\vec c$; $\vec g$ – одиничний вектор, який ортогональний до площини π і спрямований так, що трійка $\vec e,\vec c,\vec g$ – права. Тоді згідно із співвідношенням (8.2) маємо

$$[\vec b,\vec c] = \text{Пр}_{\vec e}\vec b\cdot|\vec c|\cdot\vec g. \tag{10.3}$$

Якщо $\vec{c^o}$ – одиничний вектор, який колінеарний вектору $\vec{c}$ і однаково з ним спрямований, то права трійка $\vec{e}, \vec{c^o}, \vec{g}$ утворює декартовий прямокутний базис. Розкладемо вектор $\vec{a}$ по цьому базису, враховуючи, що координати дорівнюють проекціям вектора $\vec{a}$ на базисні вектори:

$$\vec{a} = \text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}\cdot\vec{e} + \text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\cdot\vec{c^o} + \text{Пр}_{\vec{g}}\,\vec{a}\cdot\vec{g}. \tag{10.4}$$

Помножимо векторно (10.3) на (10.4). Маємо:

$$\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \left[\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}\cdot\vec{e} + \text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\cdot\vec{c^o} + \text{Пр}_{\vec{g}}\,\vec{a}\cdot\vec{g},\ \text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}\cdot|\vec{c}|\cdot\vec{g}\right] =$$

$$= |\vec{c}|\cdot\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}\left(\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}\,[\vec{e}, \vec{g}] + \text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\,[\vec{c^o}, \vec{g}] + \text{Пр}_{\vec{g}}\,\vec{a}\,[\vec{g}, \vec{g}]\right).$$

Враховуючи, що $[\vec{e}, \vec{g}] = -\vec{c^o}$; $[\vec{c^o}, \vec{g}] = \vec{e}$ і $[\vec{g}, \vec{g}] = 0$, отримаємо

$$\left[\vec{a}. [\vec{b}, \vec{c}]\right] = |\vec{c}|\cdot\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}\left(-\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}\cdot\vec{c^o} + \text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\cdot\vec{e}\right).$$

Але $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \alpha\,\vec{b} + \beta\,\vec{c}$. Тому

$$\alpha\,\vec{b} + \beta\,\vec{c} = |\vec{c}|\cdot\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}\left(-\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{a}\cdot\vec{c^o} + \text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}\cdot\vec{e}\right). \tag{10.5}$$

Помножимо співвідношення (10.5) скалярно на $\vec{e}$ і враховуючи, що
$(\vec{b}, \vec{e}) = \text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}$, $(\vec{c^o}, \vec{e}) = 0$, $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$, остаточно отримаємо

$$\alpha\cdot\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b} = |\vec{c}|\cdot\text{Пр}_{\vec{e}}\,\vec{b}\cdot\text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}, \quad \text{або} \quad \alpha = |\vec{c}|\cdot\text{Пр}_{\vec{c}}\,\vec{a} = (\vec{a}, \vec{c}).$$

Для доведення рівності $\beta = -(\vec{a}, \vec{b})$ потрібно в проведеному доведенні поміняти місцями вектори $\vec{c}$ і $\vec{b}$, і врахувати, що $\left[\vec{a}, [\vec{c}, \vec{b}]\right] = -\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right]$.

Теорема доведена.

- **Приклад 10.1**

Дані вектори $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$, $\vec{b} = \{-3; 1; 2\}$ і $\vec{c} = \{1; 2; 3\}$. Знайти $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$.

◄ Згідно з формулою (10.1) маємо:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

Знайдемо скалярні добутки $(\vec{a}, \vec{c})$ та $(\vec{a}, \vec{b})$:

$$(\vec{a}, \vec{c}) = -1, \qquad (\vec{a}, \vec{b}) = -7.$$

Тоді

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = -\vec{b} + 7\vec{c} = \{10; 13; 19\}. \quad ►$$

РОЗДІЛ 4

Аналітична геометрія на площині

§ 11. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ ТА ЇХ РІВНЯННЯ

1. Поняття про лінію та її рівняння

Поняття лінії є одним із найскладніших понять математики. Загальне визначення лінії наводиться в спеціальній математичній дисципліні — топології. Воно було дане в 20-х роках поточного століття математиком П.С. Урисоном. Ми зупинимось лише на означенні рівняння лінії.

Означення 4.1 *Рівнянням лінії L в декартовій системі координат на площині називається рівняння*

$$F(x,y) = 0, \tag{11.1}$$

яке задовольняють координати x і y кожної точки цієї лінії і не задовольняють координати жодної точки, яка не лежить на цій лінії.

Як зрозуміло з означення, сама лінія L розглядається як множина точок, координати x, y яких задовольняють рівняння (11.1).

Рівняння (11.1) має безліч розв'язків, тобто безліч пар значень x і y, які задовольняють це рівняння. Кожній такій парі відповідає точка на площині. Проте, якщо обмежитись лише дійсними розв'язками, то рівняння (11.1) може мати їх безліч, скінченну кількість або не мати жодного розв'язку. В останньому випадку кажуть, що таке рівняння визначає уявну лінію. Наприклад, рівняння $2x^2 + 3y^2 = 0$ визначає тільки одну точку $O(0,0)$, тому що $(0,0)$ — єдина пара чисел, які задовольняють дане рівняння. Рівняння $2x^2+3y^2+5 = 0$ не має жодного дійсного

розв'язку, тобто воно визначає уявну лінію.

2. Приклади задання лінії за допомогою рівняння

Розглянемо декілька простих прикладів визначення характеру лінії за даним її рівнянням.

- **Приклад 11.1**

Рівняння $x - y = 0$, або, що одне й теж, $x = y$ визначає множину точок, однаково віддалених від осей системи координат, тобто бісектрису першого і третього координатних кутів.

◄ Справді, для всіх точок досліджуваної лінії $x = y$; отже всі вони розміщені всередині I і III координатних кутів, на однаковій відстані від їх сторін (рис. 24). ►

- **Приклад 11.2**

Розглянемо рівняння $(2x^2 + 3y^2)(x^2 - 4) = 0$.

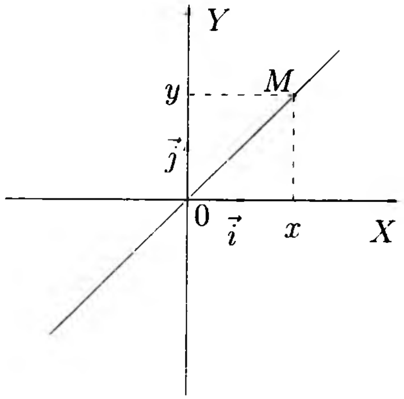
◄ Ліву його частину можна розкласти на множники і записати рівняння у вигляді

$$(2x^2 + 3y^2)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Воно задовольняється лише тими значеннями x і y, які задовольняють рівняння

$$2x^2 + 3y^2 = 0, \quad x - 2 = 0, \quad x + 2 = 0.$$

Перше з цих рівнянь задовольняє лише одна пара дійсних чисел $x = 0$ та $y = 0$, тобто воно визначає лінію, яка вироджується в точку $O(0,0)$. Друге рівняння визначає множину точок, які мають одну й ту саму абсцису $x = 2$. Воно зображає пряму, паралельну осі Oy на відстані 2 від неї. Аналогічно рівняння $x = -2$ зображає пряму, паралельну осі Oy на відстані 2 ліворуч від неї (рис. 25). ►



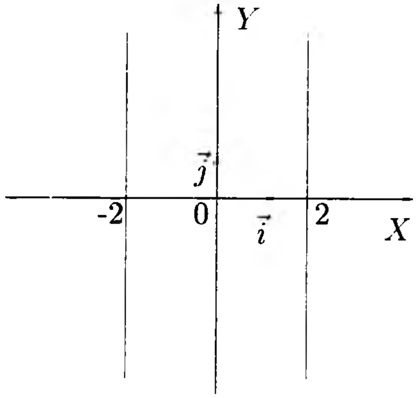


Рис. 24 **Рис. 25**

Якщо ліва частина рівняння лінії розкладається на декілька множників, то говорять, що лінія, яка визначається цим рівнянням, розпадається на декілька ліній.

3. Приклади складання рівнянь заданих ліній

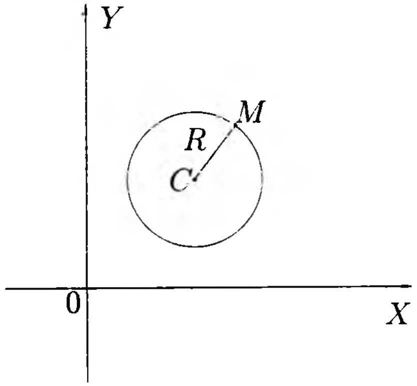
Часто лінію задають за допомогою тієї чи іншої геометричної властивості лінії, спільної для всіх її точок. На її основі треба скласти рівняння даної лінії.

- **Приклад 11.3**

Скласти рівняння множини точок, однаково віддалених від сталої точки $C(a,b)$, тобто рівняння кола.

◀ Позначимо довільну точку кола через $M(x,y)$, а його радіус — через R. Точка M лежить на колі тоді і тільки тоді, коли $|\overrightarrow{CM}| = R$. Виразимо цю властивість, спільну для всіх точок кола, через довільні координати x і y точки M і величини, подані в умові задачі.

Маємо $\overrightarrow{CM} = \{x-a; y-b\}$, $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$.



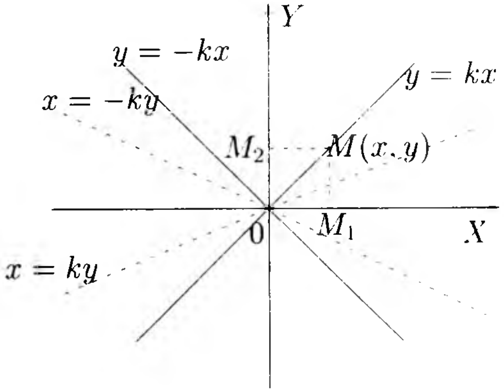


Рис. 26 **Рис. 27.**

Отже, для точок кола справедлива рівність

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R,$$

або

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2.$$

Це і є рівняння кола.

Якщо центр кола знаходиться в початку координат, тобто в точці $O(0,0)$, то рівняння кола набуде вигляду

$$x^2+y^2=R^2. \qquad \blacktriangleright$$

- **Приклад 11.4**

Точка рухається так, що відстані її від двох взаємно перпендикулярних прямих залишаються весь час в сталому відношенні. Знайти рівняння її траєкторії.

◀ Приймемо задані прямі за координатні осі. Позначимо довільну точку траєкторії через $M(x,y)$, а відношення її відстаней від координатних осей — через k. Очевидно, що $|M_1M|=|y|$, $|M_2M|=|x|$ (рис. 27). Але за умовою $\dfrac{|M_1M|}{|M_2M|}=k$, отже, $\left|\dfrac{y}{x}\right|=k$. Звідси

$$\frac{y}{x}=\pm k,$$

або $y = kx$ та $y = -kx$. Це, як легко переконатися, прямі, що проходять через початок координат.

Але умову задачі можна ше записати так: $\dfrac{|M_2M|}{|M_1M|} = k$ тобто $\left|\dfrac{x}{y}\right| = k$. Отже, отримаємо ще дві прямі: $x = ky$ та $x = -ky$. Усі чотири прямі задовольняють умову задачі. ▶

Отже, в зв'язку з аналітичним поданням лінії виникають задачі двох типів. Задачі першого типу полягають у побудові графіка і вивченні властивостей лінії за допомогою заданого її рівняння.

Задачі другого типу полягають у виведенні рівняння лінії на основі заданого геометричного чи механічного закону її утворення.

4. Перетин двох ліній

Часто доводиться розв'язувати таку задачу: дано рівняння двох ліній

$$F(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y) = 0. \tag{11.2}$$

Знайти точки їх перетину.

Шукані точки, якщо вони існують, належать обом лініям. Тому їх координати повинні задовольняти рівняння обох ліній. Отже, щоб знайти координати всіх точок перетину, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ \Phi(x, y) = 0. \end{cases} \tag{11.3}$$

Якщо система (11.3) не має дійсних розв'язків, то лінії, задані рівняннями (11.2), не перетинаються.

• **Приклад 11.5**

Знайти точки перетину кола $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ і прямої $y = x$.

◀ Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 = 4, \\ y = x. \end{cases}$$

Виключаючи y з першого рівняння, отримаємо

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, і відповідно, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Отже, шуканими точками є точки $(1, 1)$ і $(3, 3)$. ▶

5. Класифікація плоских ліній

Задання ліній за допомогою їх рівнянь приводить до класифікації ліній залежно від властивостей цих рівнянь.

Усі лінії розподіляють на алгебраїчні й трансцендентні.

Означення 4.2 *Алгебраїчною лінією називається така лінія, яка зображається в декартових координатах алгебраїчним рівнянням*

$$F(x, y) = 0,$$

де $F(x, y)$ є многочлен від змінних x і y. Степінь многочлена $F(x, y)$, що стоїть у лівій частині рівняння алгебраїчної лінії, називається ***порядком лінії.***

Лінії, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними.

Прикладами алгебраїчних ліній є лінії, задані рівняннями

$$x + y - 2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

Прикладами трансцендентних ліній можуть бути лінії

$$y - \operatorname{tg} x = 0, \quad 5^{xy} + x - y = 0, \quad y = \log_a x.$$

Можна показати, що алгебраїчна лінія залишається алгебраїчною в кожній декартовій системі координат, причому при перетворенні координат порядок її теж не змінюється. Тому доцільно класифікувати алгебраїчні лінії залежно від порядку їх рівнянь.

В аналітичній геометрії вивчаються лише алгебраїчні лінії і притому лише лінії першого і другого порядків, тобто лінії, які в декартовій системі зображаються рівняннями:

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0$$

і

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

§ 12. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

1. Загальне рівняння прямої

Нехай на площині Oxy задані ненульовий вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ і точка $M_0(x_0, y_0)$. Потрібно скласти рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.

З аксіоми елементарної геометрії відомо, що через точку, що лежить на заданій прямій, можна провести єдину пряму, яка перпендикулярна їй.

Отже, поставлена задача має єдиний розв'язок.

Для довільної точки $M(x, y)$ шуканої прямої вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ перпендикулярний вектору $\vec{n}$ (рис. 28).

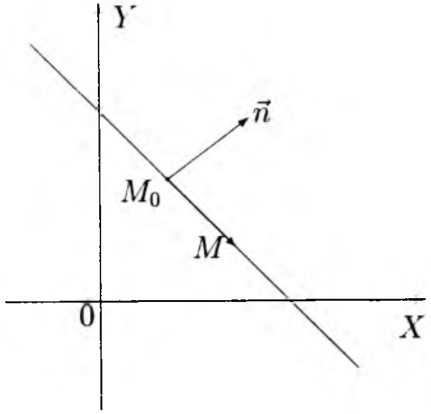


Рис. 28

Тому скалярний добуток їх дорівнює нулю: $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$ або в координатах:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (12.1)$$

Це і є рівняння шуканої прямої.

Отже, пряма на площині визначається рівнянням першого степеня відносно декартової системи координат.

Покажемо тепер, що кожне рівняння першого степеня визначає пряму в цій системі.

Розглянемо довільне рівняння першого степеня

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 > 0 \qquad (12.2)$$

і нехай $M_0(x_0, y_0)$ є однією з точок вираженої ним лінії. Тоді виконується рівність

$$Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Віднімаючи цю тотожність почленно від рівняння (12.2), отримаємо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

яке визначає ту саму лінію, що й рівняння (12.1). Рівняння (12.2) називається **загальним рівнянням прямої на площині**, а вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ — нормальним вектором даної прямої.

Отже, ми показали, що існує лише одна алгебраїчна лінія першого порядку — пряма.

- **Приклад 12.1**

Скласти рівняння прямої, якщо точка $M_0(2, 3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

◀ Оскільки точка $M_0(2, 3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на шукану пряму, то нормальний вектор $\vec{n} = \overrightarrow{OM_0} = \{2; 3\}$. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка прямої. Тоді вектор $\vec{n}$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{M_0M} = \{x - 2; y - 3\}$, тобто $(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. У координатній формі останнє рівняння набуває вигляду

$$2(x - 2) + 3(y - 3) = 0, \quad \text{або} \quad 2x + 3y - 13 = 0.$$

Це і є загальне рівняння шуканої прямої. ▶

2. Дослідження неповного рівняння прямої

Дослідимо, як розміщена пряма відносно координатної системи, коли рівняння (12.2) неповне, тобто деякі його коефіцієнти дорівнюють нулю.

Можливі такі випадки:

1. $C = 0$. Тоді пряма проходить через початок координат, а координати точки $O(0, 0)$ задовольняють рівняння $Ax + By = 0$.

2. $B = 0$. Пряма $Ax + C = 0$ паралельна осі Oy, оскільки нормальний вектор $\vec{n} = \{A; 0\}$ прямої перпендикулярний цій осі.

3. Аналогічно, якщо $A = 0$, то рівняння $By + C = 0$ визначає пряму, паралельну осі Ox.

4. $A = C = 0$. Пряма $By = 0$ суміщається з віссю Ox, тобто $y = 0$ є рівнянням осі Ox.

5. $B = C = 0$. Пряма $Ax = 0$ суміщається з віссю Oy, тобто $x = 0$ є рівнянням осі Oy.

3. Рівняння прямої "у відрізках"

Розглянемо загальне рівняння прямої (12.2) і покажемо, що його можна записати у вигляді рівняння

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{12.3}$$

яке називається **рівнянням прямої "у відрізках"**.

Нехай всі коефіцієнти A, B і C відмінні від нуля. Тоді рівняння (12.2) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

і, прийнявши $a = -\dfrac{C}{A}$, $b = -\dfrac{C}{B}$, отримаємо рівняння (12.3).

У рівнянні "у відрізках" (12.3) числа a та b мають такий геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає пряма відповідно на осях Ox та Oy (відрізки відкладаються від початку координат). Щоб переконатись у цьому, досить знайти точки перетину прямої з осями координат. Наприклад, точка перетину з віссю Ox визначається із спільного розв'язання рівняння (12.3) з рівнянням $y = 0$ осі Ox. Ми отримаємо координати точки перетину $x = a$, $y = 0$. Аналогічно отримаємо координати точки перетину прямої з віссю Oy: $x = 0$, $y = b$.

Рівняння прямої "у відрізках" зручно використовувати для її графічного зображення в прямокутній системі координат.

- **Приклад 12.2**

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1, 1)$ і відтинає від координатного кута трикутник, площа якого дорівнює 2 кв. од.

◀ Запишемо рівняння шуканої прямої "у відрізках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нам потрібно знайти значення параметрів a і b. Точка $M_0(1, 1)$ лежить на шуканій прямій. Тому її координати задовольняють рівняння прямої, тобто $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \Longrightarrow a + b = ab$. Площа S трикутника, який відтинає від координатного кута пряма, визначається формулою $\pm S = \frac{ab}{2}$; $+S$, якщо відрізки a та b одного знаку, і $-S$, якщо різних знаків. Згідно з умовою задачі маємо

$$ab = \pm 4.$$

Для знаходження параметрів a та b отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = ab, \\ ab = \pm 4. \end{cases}$$

яка рівносильна двом системам

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 4 \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} a + b = -4, \\ ab = -4. \end{cases}$$

Розв'язками одержаних систем є: $a_1 = 2$, $b_1 = 2$; $a_2 = -2 + 2\sqrt{2}$, $b_2 = -2 - 2\sqrt{2}$; $a_3 = -2 - 2\sqrt{2}$, $b_3 = -2 + 2\sqrt{2}$. Отже, умові задачі задовольняють три прямі, рівняння яких отримаємо, якщо замість a та b підставимо знайдені розв'язки. Рівняння шуканих прямих мають вигляд:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1, \quad \frac{x}{-2 + 2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2 - 2\sqrt{2}} = 1, \quad \frac{x}{-2 - 2\sqrt{2}} + \frac{y}{-2 + 2\sqrt{2}} = 1.$$

Після спрощення цих рівнянь матимемо:

$$x + y = 2, \quad (1 + \sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y - 2 = 0,$$

$$(1 - \sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y - 2 = 0. \quad ▶$$

4. Канонічні і параметричні рівняння прямої

Положення прямої на площині відносно системи координат можна задати будь-якою точкою $M_0(x_0, y_0)$, що належить цій прямій, і напрямком прямої, тобто вектором $\vec{s} = \{m; n\}$, колінеарним цій прямій (рис. 29). Ненульовий вектор $\vec{s}$, який паралельний прямій, називається **напрямним вектором прямої**.

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну вектору $\vec{s}$. Складемо її рівняння.

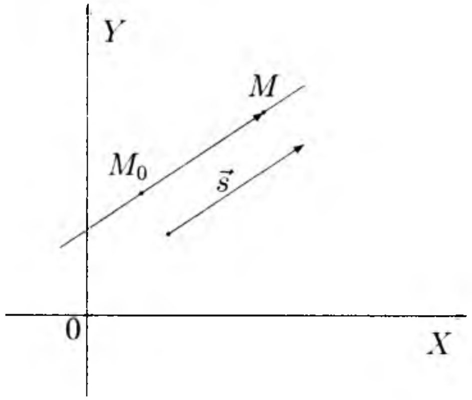


Рис. 29

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка прямої. Тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0\}$ колінеарний вектору $\vec{s} = \{m; n\}$, тобто координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{12.4}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt. \end{cases} \tag{12.5}$$

Рівняння (12.4) називається **канонічним рівнянням прямої**, а рівняння (12.5) — її **параметричними рівняннями**.

5. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Дві точки повністю визначають пряму. Складемо її рівняння. Нехай $M_1(x_1, y_1)$ та $M_2(x_2, y_2)$ — дві точки прямої. Вони визначають напрямний вектор прямої $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$.

Враховуючи те, що пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$, отримаємо канонічне рівняння шуканої прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{12.6}$$

Рівняння (12.6) називається рівнянням прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

- **Приклад 12.3**

Через точки $M_1(-1, 2)$ і $M_2(2, 3)$ проведена пряма. Знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.

◀ Згідно із співвідношенням (12.6) рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-1, 2)$ та $M_2(2, 3)$ має вигляд

$$\frac{x + 1}{2 + 1} = \frac{y - 2}{3 - 2} \quad \text{або} \quad \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{1},$$

тобто

$$y = \frac{x}{3} + \frac{7}{3}.$$

Точка перетину отриманої прямої з віссю Ox має координати: $y = 0$, $x = -7$, а з віссю Oy — $x = 0$, $y = 7/3$. Отже, маємо дві точки $(0, 7/3)$ і $(-7, 0)$, які і є шуканими. ▶

6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Нехай пряма задана точкою $M_0(x_0, y_0)$ і кутом φ, який вона утворює з додатним напрямком осі Ox (рис. 30). Її канонічне рівняння $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, якщо $m \neq 0$, можна записати у вигляді

$$y = \frac{n}{m}(x - x_0) + y_0, \tag{12.7}$$

де

$$m = \text{Пр}_{Ox}\vec{s} = |\vec{s}| \cos\varphi, \quad n = \text{Пр}_{Oy}\vec{s} = |\vec{s}| \sin\varphi.$$

Звідси отримаємо, що $\dfrac{n}{m} = \operatorname{tg}\varphi$.

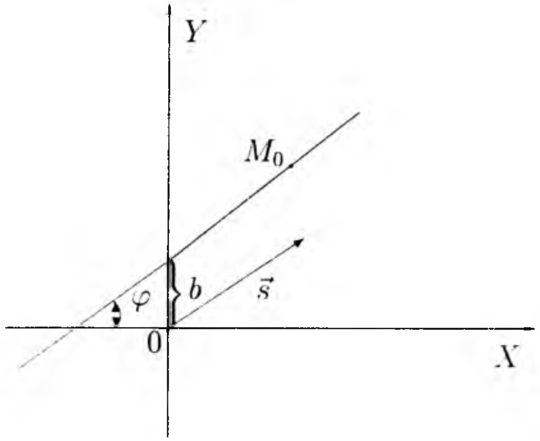


Рис. 30

Тангенс кута φ нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої. Позначимо його через k, тоді $\frac{n}{m} = \operatorname{tg}\varphi = k$ і рівняння (12.7) набуває вигляду

$$y = k(x - x_0) + y_0,$$

або, якщо прийняти $y_0 - kx_0 = b$,

$$y = kx + b. \tag{12.8}$$

Рівняння (12.8) називається рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом. Параметр b є ординатою точки перетину прямої з віссю Oy (рис. 30). Якщо пряма паралельна осі Oy, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ і кутовий коефіцієнт k в цьому випадку не визначений. Отже, рівняння прямої, паралельної осі Oy, не може бути записане у вигляді (12.8).

Зауваження. Якщо пряма задана рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

то, коли $B \neq 0$, його можна записати у вигляді $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, або $y = kx + b$, де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

7. Кут між двома прямими

Дві прямі можна задати загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

або канонічними

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2},$$

або рівняннями з кутовим коефіцієнтом

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2.$$

Відповідно до цього маємо задані вектори нормалей $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$, напрямні вектори $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1\}$ і $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2\}$ та кутові коефіцієнти k_1 і k_2.

Кут Θ між двома прямими дорівнює кутові між їх нормалями або напрямними векторами. [1]

Отже, матимемо:

$$\cos\Theta = \cos\left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}; \tag{12.9}$$

або

$$\cos\Theta = \cos\left(\widehat{\vec{s}_1, \vec{s}_2}\right) = \frac{m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}; \tag{12.10}$$

Якщо прямі задані рівняннями з кутовим коефіцієнтом, то $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$, де φ_1 і φ_2 — кути нахилу прямих до осі Ox.

Тоді за теоремою про зовнішній кут трикутника (рис. 31) маємо: $\Theta = \varphi_2 - \varphi_1$. Отже,

$$\operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2},$$

тобто

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{12.11}$$

---

[1] Оскільки вектори $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}$ перпендикулярні відповідно до прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то за кут Θ між цими прямими візьмемо кут між векторами $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$, тобто $\Theta = \left(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2}\right)$

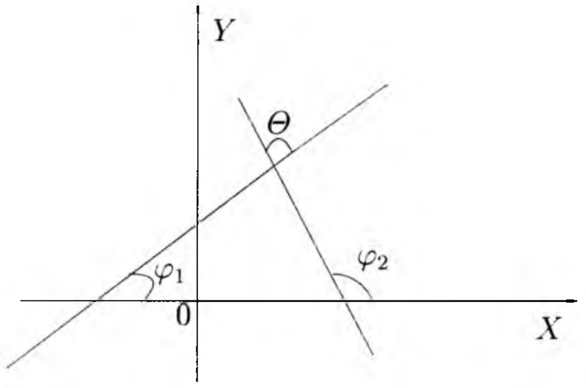


Рис. 31

Зауваження. Якщо Θ — кут між прямими, то $\pi - \Theta$ також є кутом між ними. Тоді значення $\cos\Theta$, яке визначається формулами (12.9), (12.10) і (12.11) може бути додатним або від'ємним. Одне з них відповідає кутові Θ, а друге — $\pi - \Theta$.

Паралельність чи перпендикулярність двох прямих рівнозначна паралельності та перпендикулярності їх нормальних або напрямних векторів. Тому відповідно до вигляду рівнянь, якими задані ці прямі, отримаємо:

а) *умови паралельності*

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2};\quad k_1=k_2, \tag{12.12}$$

б) *умови перпендикулярності*

$$A_1A_2+B_1B_2=0;\quad m_1m_2+n_1n_2=0;\quad 1+k_1k_2=0. \tag{12.13}$$

- **Приклад 12.4**

Дослідити взаємне розміщення прямих $-2x+y-1=0$ і $2y+1=0$. Якщо прямі перетинаються, знайти точку перетину і косинус кута між ними.

◀ Кутовий коефіцієнт першої прямої $k_1 = 2$, другої — $k_2 = 0$. Оскільки $k_1 \neq k_2$, то прямі перетинаються. Для знаходження точки перетину розв'язуємо систему рівнянь

$$-2x+y-1=0,\quad 2y+1=0.$$

Розв'язок системи: $x=-\dfrac{3}{4}$, $y=-\dfrac{1}{2}$. Отже, точка перетину прямих $M_0\left(-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Для обчислення кута між прямими використовуємо формулу (12.9). Маємо

$$\cos\Theta=\frac{(-2)\cdot 0+1\cdot 2}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

звідси $\Theta=\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. ▶

- **Приклад 12.5**

Через точки $M_1(2,-5)$ і $M_2(3,2)$ проведена пряма. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2,1)$ перпендикулярно до проведеної прямої.

◀ Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2,-5)$ і $M_2(3,2)$. Згідно з формулою (12.6) маємо

$$\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+5}{2+5},\quad \text{або}\quad \frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{7}\Longrightarrow y=7x-19.$$

Оскільки шукана пряма перпендикулярна до отриманої, то згідно з формулою (12.13) її кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{1}{7}$. Крім того, шукана пряма проходить через точку $M_0(2,1)$. Тому її рівняння має вигляд

$$y-1=-\frac{1}{7}(x-2),\quad \text{або}\quad x+7y-9=0. \quad ▶$$

8. Нормальне рівняння прямої

Положення прямої на площині можна визначити довжиною перпендикуляра $|OP|=p$, опущеного з початку координат на пряму, і кутом α — нахилу його до осі Ox (рис. 32).

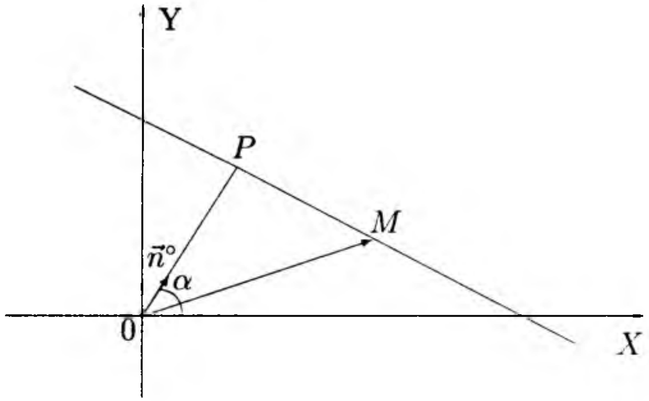


Рис. 32

Напрям перпендикуляра OP визначається одиничним вектором нормалі прямої, проведеним з початку координат, тобто вектором

$$\vec{n}^\circ = \{\cos\alpha; \sin\alpha\}.$$

Візьмемо на прямій довільну точку $M(x,y)$ і позначимо через $\vec{r}$ її радіус-вектор, тобто вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \{x; y\}$. Тоді $\text{Пр}_{\vec{n}^\circ}\vec{r} = p$.

З іншого боку

$$\text{Пр}_{\vec{n}^\circ}\vec{r} = |\vec{r}|\cos(\widehat{\vec{r},\vec{n}^\circ}) = |\vec{r}||\vec{n}^\circ|\cos(\vec{r},\vec{n}^\circ) = (\vec{r},\vec{n}^\circ).$$

Отже,

$$(\vec{r},\vec{n}^\circ) = p \tag{12.14}$$

або, в координатній формі,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0. \tag{12.15}$$

Рівняння (12.14) і (12.15) називають нормованим, або нормальним рівнянням прямої. Перше з них записане у векторній формі.

Зауважимо, що завжди $p \geq 0$, оскільки p — це відстань від початку координат.

9. Зведення загального рівняння прямої до нормального вигляду

Розглянемо загальне рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0$$

і зведемо його до нормального вигляду

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Щоб ці два рівняння були рівносильні, достатньо, щоб їх коефіцієнти були пропорційні:

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B} = \frac{-p}{C} = \lambda,$$

або

$$\cos\alpha = \lambda A, \quad \sin\alpha = \lambda B; \quad -p = \lambda C.$$

Звідси визначаємо коефіцієнт пропорційності λ:

$$\lambda^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Отже,

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{12.16}$$

Знак λ за умовою $\lambda C = -p$ має бути протилежний знакові C, оскільки $p \geq 0$.

Число λ називається **нормувальним множником**.

Отже, щоб звести загальне рівняння прямої $Ax+By+C=0$ до нормального вигляду (12.15), потрібно помножити його на нормувальний множник (12.16).

10. Відстань точки від прямої

Нехай в площині Oxy задана пряма нормальним рівнянням (12.14):

$$(\vec{r},\vec{n}^\circ) - p = 0$$

і точка $M_0(x_0, y_0)$. Треба знайти відстань d цієї точки від даної прямої. Під відстанню точки від прямої розуміємо довжину перпендикуляра, опущеного з даної точки на дану пряму (рис. 33).

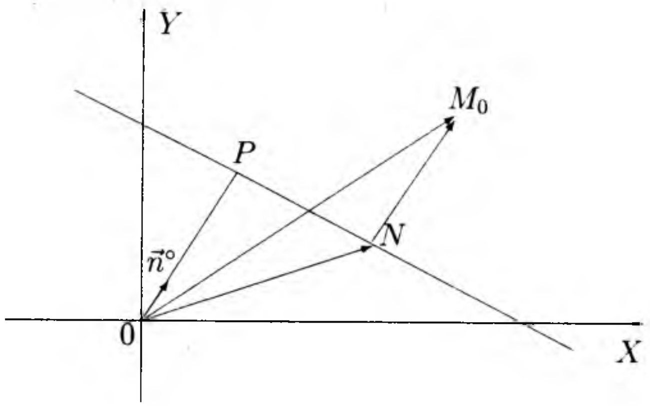


Рис. 33

Як бачимо $d = |\text{Пр}_{\vec{n}^\circ}\overrightarrow{NM_0}|$. З іншого боку, вектор

$$\overrightarrow{NM_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}_N,$$

де $\vec{r}_0$ — радіус-вектор точки M_0, $\vec{r}_N$ — радіус-вектор точки N, яка є основою перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на пряму.

Отже,

$$\text{Пр}_{\vec{n}^\circ}\overrightarrow{NM_0} = (\vec{r}_0 - \vec{r}_N, \vec{n}^\circ) = (\vec{r}_0, \vec{n}^\circ) - (\vec{r}_N, \vec{n}^\circ).$$

Оскільки точка N лежить на даній прямій, то її радіус-вектор $\vec{r}_N$ задовольняє рівняння (12.14) прямої, тобто

$$(\vec{r}_N, \vec{n}^\circ) = p.$$

Враховуючи це, отримаємо

$$\text{Пр}_{\vec{n}^\circ}\overrightarrow{NM_0} = (\vec{r}_0, \vec{n}^\circ) - p.$$

Отже, $d = |(\vec{r}_0, \vec{n}^\circ) - p|$.

Отже, відстань d точки від прямої виражається абсолютним значенням лівої частини нормального рівняння цієї прямої, в якому радіус-вектор цієї точки замінюємо радіус-вектором даної точки.

Якщо пряма задана в координатній формі рівнянням

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

то

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|. \qquad (12.17)$$

Якщо пряма задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, щоб визначити d, треба рівняння знормувати, а потім підставити в його ліву частину координати заданої точки, тобто

$$d = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \qquad (12.18)$$

- **Приклад 12.6**

Дано трикутник ABC, де $A(1,2)$, $B(2,-2)$, $C(6,1)$. Обчислити довжину висоти CD.

◄ Запишемо рівняння сторони AB, використавши формулу (12.6). Маємо

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2-2}, \quad \text{або} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-4}.$$

Отже, рівняння сторони AB має вигляд $y = -4x + 6$, або $4x + y - 6 = 0$.

Обчислимо довжину висоти CD. Для цього достатньо знайти відстань точки $C(6,1)$ від прямої AB. На основі формули (12.18), маємо

$$d = \frac{|4\cdot 6 + 1\cdot 1 - 6|}{\sqrt{16+1}} = \frac{19}{\sqrt{17}}. \quad ►$$

11. Рівняння пучка прямих

Означення 4.3 *Пучком прямих на площині з центром у даній точці називається сукупність прямих, що проходять через цю точку.*

Якщо задана точка $M_0(x_0, y_0)$, то рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

при змінних коефіцієнтах A і B, а також рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

при змінному k є рівняннями пучка прямих з центром в заданій точці M_0.

Пучок прямих можна задати будь-якими двома прямими

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \end{aligned} \tag{12.19}$$

які перетинаються. Точка їх перетину є центром пучка.

Рівняння пучка в цьому випадку можна скласти, не визначаючи координат центра пучка.

Покажемо, що рівняння

$$A_1x + B_1y + C_1 + m(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \tag{12.20}$$

є рівнянням шуканого пучка.

Справді, при будь-якому значенні m рівняння (12.20) є рівнянням першого степеня і, отже, визначає пряму. Якщо точка $M_0(x_0, y_0)$ є точкою перетину прямих (12.19), то її координати задовольняють рівняння (12.20) при кожному значенні m.

Це означає, що рівняння (12.20) є рівнянням пучка прямих з центром в точці перетину прямих (12.19).

Прямі (12.19) також належать до пучка (12.20) і їм відповідають певні значення параметра m. Якщо $m = 0$, отримаємо першу пряму, якщо $m = \infty$, — другу пряму.

Щоб із пучка (12.20) виділити певну пряму, треба задати додаткову умову для встановлення значення параметра m, що відповідає даній прямій.

- **Приклад 12.7**

Провести пряму, що проходить через точку перетину прямих

$$2x - 3y - 6 = 0, \quad x - 2y - 2 = 0$$

і через точку $M(1, 4)$.

◀ Шукана пряма належить до пучка прямих, що визначається заданими прямими. Його рівняння має вигляд

$$2x - 3y - 6 + m(x - 2y - 2) = 0.$$

Нам треба підібрати таке значення m, щоб пряма проходила через точку $M(1, 4)$. Для цього підставимо координати точки $M(1, 4)$ в рівняння пучка прямих. Маємо

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 6 + m(1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 2) = 0,$$

звідси

$$m = -\frac{16}{9}.$$

Підставляючи отримане значення m в рівняння пучка, знаходимо шукане рівняння прямої

$$2x + 5y - 22 = 0. \quad ▶$$

§ 13. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

1. Еліпс

Означення 4.4 *Еліпсом називається множина точок площини, для яких сума відстаней від двох фіксованих точок (фокусів), є сталою.*

Нехай F_1 і F_2 — фокуси еліпса, M — його довільна точка. Відрізки $r_1 = |F_1M|$ і $r_2 = |F_2M|$ називаються фокальними радіусами точки M еліпса. Їх суму позначимо через $2a$. Тоді за означенням

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{13.1}$$

Відстань між фокусами еліпса позначимо через $2c$, тобто $|F_1F_2| = 2c$. Очевидно, що $|F_1F_2| < |F_1M| + |F_2M|$ (рис. 34), тобто $2c < 2a$, $c < a$.

Виберемо на площині декартову прямокутну систему координат таким способом: за вісь Ox приймаємо пряму, яка проходить через фокуси F_1 і F_2, а початок координат помістимо посередині між фокусами. Відповідно до вибраної системи координат фокуси будуть мати такі координати: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Координати точки M позначимо через x і y. Тоді рівність (13.1) в координатах має вигляд:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{13.2}$$

Рівняння (13.2) і є рівнянням еліпса. Для зручності спростимо рівняння (13.2), перенісши другий радикал праворуч та піднесемо обидві частини рівності до квадрата

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Після спрощення отримуємо

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx.$$

Якщо ще раз піднести до квадрата обидві частини останньої рівності та провести спрощення, то матимемо

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

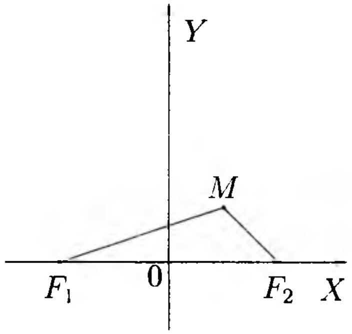


Рис. 34

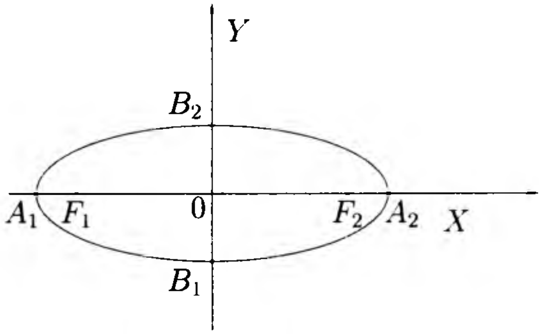


Рис. 35

Приймемо

$$a^2-c^2=b^2 \quad (a>c) \tag{13.3}$$

тоді

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2, отримаємо

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{13.4}$$

Рівняння (13.4) називають **канонічним рівнянням еліпса**. Рівняння (13.4) є алгебраїчними рівняннями другого степеня. Отже, еліпс є алгебраїчною лінією другого порядку.

Дослідження форми еліпса

Розглянемо рівняння (13.4) еліпса. Кожен із додатних доданків лівої частини рівняння не більший за значенням від правої частини рівняння, тому для всіх точок еліпса

$$x^2 \le a^2, \quad y^2 \le b^2,$$

або

$$-a \le x \le a, \quad -b \le y \le b,$$

тобто всі точки еліпса знаходяться всередині прямокутника, сторони якого паралельні осям і мають довжини, що дорівнюють відповідно $2a$ і $2b$ (рис. 35).

Точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$, в яких еліпс перетинає осі координат, називаються вершинами еліпса.

Якщо будь-які значення (x, y) задовольняють рівняння (13.4), то, очевидно, це рівняння будуть задовольняти і значення

$$(-x, y), \quad (x, -y), \quad (-x, -y)$$

тому, що координати в рівняння еліпса входять в парних степенях. Це означає, що координатні осі є осями симетрії, а початок — центром симетрії еліпса.

Величини $2a$ і $2b$ називають довжинами осей еліпса: a — великою піввіссю, b — малою піввіссю ($a > b$).

Розв'яжемо рівняння (13.4) відносно y: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Зважаючи на симетрію еліпса, достатньо дослідити його форму в першій чверті. Для цього в останній рівності потрібно взяти знак плюс, тобто, $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Припустимо, що $x \ge 0$. Тоді:

1. Якщо $x = 0$, маємо $y = b$. Отже, точка $B_1(0, b)$ лежить на еліпсі.

2. Якщо x зростає від 0 до a, то y спадає від b до 0.

3. Якщо $x = a$, $y = 0$, тобто точка $A_2(a, 0)$ лежить на еліпсі.

Враховуючи наведені вище міркування, будуємо схематично еліпс (рис. 35).

Якщо $a = b$, то рівняння набирає вигляд

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

тобто є рівнянням кола. У цьому випадку $c = 0$; а це означає, що фокуси збігаються з центром кола.

Зауваження. Якщо фокуси еліпса розміщені на осі Oy симетрично відносно початку координат, то рівняння еліпса має той самий вигляд (13.4), але тоді $a < b$. Тому, якщо хочемо буквою a позначити велику піввісь, то в рівнянні (4.27) потрібно букви a та b поміняти місцями.

2. Гіпербола

Означення 4.5 *Гіперболою називається множина точок площини, для яких абсолютне значення різниці відстаней від двох фіксованих точок (фокусів), є сталим.*

Позначимо цю сталу величину через $2a$, а відстань між фокусами F_1 і F_2 — через $2c$. Нехай M — довільна точка гіперболи. Тоді $r_1 = |F_1M|$, $r_2 = |F_2M|$ — фокальні радіуси довільної точки M. Згідно з означенням

$$|r_2 - r_1| = 2a, \qquad (13.5)$$

$c > a$, бо $|F_1F_2| > |F_2M| - |F_1M|$ (рис. 36).

Якщо вибрати систему координат так само, як і для еліпса, то рівність (13.5) в координатах набере вигляд

$$|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}| = 2a.$$

Це і є рівняння гіперболи. Після проведення перетворень, аналогічних до перетворень співвідношення (13.2), отримаємо канонічне рівняння гіперболи у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (13.6)$$

де $b^2 = c^2 - a^2$ $(c > a)$ (вивести самостійно).

Значить, гіпербола є також алгебраїчною лінією другого порядку.

Дослідження форми гіперболи

Симетрія. Координатні осі є осями симетрії, а початок координат — центром симетрії (див. дослідження симетрії еліпса).

Точки перетину з осями симетрії. Гіпербола має дві вершини: $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$. Відрізок $|A_1A_2| = 2a$ є дійсною віссю гіперболи. Оскільки вісь Oy не перетинає гіперболи, то параметр b називають уявною піввіссю гіперболи. Параметр a — дійсна піввісь гіперболи.

Асимптоти гіперболи. Розв'яжемо рівняння (13.6) відносно y. Отримаємо $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Якщо $|x| \geq a$, то $-\infty < y < +\infty$, тобто гіпербола є необмеженою кривою, яка складається з двох симетричних відносно осі Oy віток, що лежать праворуч від прямої $x = a$ та ліворуч від прямої $x = -a$.

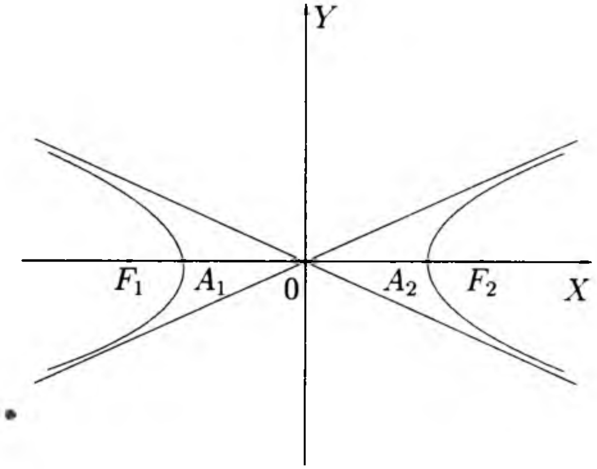


Рис. 36

Візьмемо довільну точку $M(x, y)$ на гіперболі і точку $M_1(x, y_1)$ на прямій $y = \frac{b}{a}x$. Тоді

$$|M_1M| = y_1 - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - x^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

$$\lim_{x\to\infty} |M_1M| = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Отже, вітка гіперболи, яка лежить в першій чверті, наближається до прямої $y = \frac{b}{a}x$, коли точка по кривій прямує в нескінченність.

Якщо при необмеженому віддаленні точки по кривій від початку координат її відстань від деякої прямої прямує до нуля, то така пряма називається **асимптотою даної кривої**.

Тому згідно з визначенням асимптоти та властивостей симетрії гіперболи можна зробити висновок, що прямі $y = \pm\frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи.

Очевидно, асимптоти гіперболи є діагоналями прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$.

Гіперболу зображено на рис. 36.

Гіперболи, що задані рівняннями

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{і} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

називаються **спряженими**. Якщо $a = b$, то гіпербола називається рівнобічною; її рівняння має вигляд $x^2 - y^2 = a^2$, а асимптотами є $y = \pm x$.

3. Парабола

Означення 4.6 *Параболою називається множина точок, кожна з яких однаково віддалена від даної точки (фокуса) і від даної прямої (директриси).*

Відстань від фокуса F до директриси позначимо через p. Нехай M — довільна точка параболи. Тоді $r = |FM|$ буде фокальним радіусом точки M. Відстань від точки M до директриси позначимо через d. Тоді згідно з означенням $r = d$.

Виберемо декартову систему координат таким способом: вісь Ox проведемо через фокус F перпендикулярно до директриси LN, а початок O візьмемо посередині між фокусом і директрисою (рис.37).

Тоді рівність $r = d$ в координатній формі запишеться так:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \tag{13.7}$$

Звідси, після звільнення від радикала, отримаємо

$$y^2 = 2px. \tag{13.8}$$

Рівняння (13.8) називається канонічним рівнянням параболи. Як бачимо, парабола є також алгебраїчною лінією другого порядку.

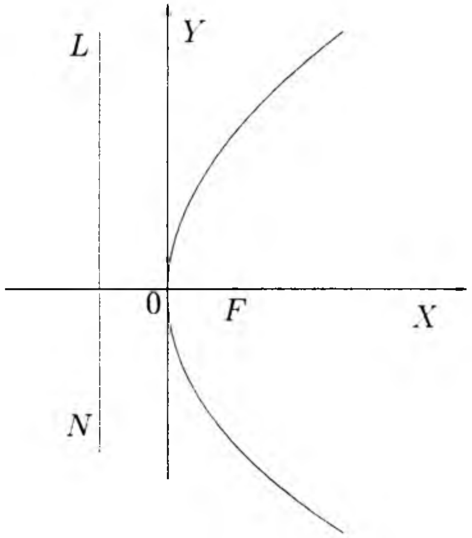


Рис. 37

Дослідження форми параболи

З рівняння (13.8) випливає, що ордината y має дійсне значення лише якщо абсциса x невід'ємна, тому парабола розташована праворуч від осі Oy.

Для кожного значення x рівняння (13.8) дає два рівнопротилежні значення y:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Отже, парабола симетрична відносно осі Ox (осі параболи).

Якщо $x = 0$, два значення ординати однакові, тому вісь Oy дотикається до параболи в початку координат.

Точка перетину параболи з віссю симетрії називається її вершиною. Отже, початок координат є вершиною параболи (13.8).

При необмеженому зростанні значень абсциси x відповідні їм значення ординат також необмежено зростають. Це означає, що вітки параболи простягаються в нескінченність (рис. 37).

Зауваження. Якщо система координат вибрана так, що вісь Ox збігається з віссю симетрії параболи, початок координат з вершиною, але парабола лежить у лівій півплощині, то її рівняння має вигляд: $y^2 = -2px$.

Якщо ж парабола симетрична відносно осі Oy, а вершина міститься в початку координат, то її рівняння має вигляд $x^2 = 2py$, якщо вона лежить у верхній півплощині, і $x^2 = -2py$ — якщо в нижній.

- **Приклад 13.1**

Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відомо, що віддаль між фокусами дорівнює 8, а мала піввісь $b = 3$.

◀ За умовою задачі $2c = 8$, $b = 3$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ знаходимо $a^2 = 9 + 16 = 25$. Отже, рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \quad ►.$$

- **Приклад 13.2**

Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, віддаль між фокусами дорівнює 26, а рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$.

◀ Шукаємо рівняння гіперболи у вигляді $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $c^2 = a^2 - b^2$. За умовою $c = 13$. З рівняння асимптот $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Отже, для визначення a та b маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 13^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \frac{39}{5}, \\ b = \frac{52}{5}. \end{cases}$$

Тому

$$\frac{x^2}{\left(\frac{39}{5}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{52}{5}\right)^2} = 1$$

— шукане рівняння. ►

- **Приклад 13.3**

Скласти канонічне рівняння (13.8) параболи, яка проходить через точку $M_0(9, 6)$.

◀ Згідно з (13.8) рівняння параболи має вигляд $y^2 = 2px$. Параметр p знаходимо з умови, що точка $M_0(9, 6)$ лежить на параболі, тобто $6^2 = 2 \cdot 9p$. Значить, $p = 2$ і $y^2 = 4x$ — шукане рівняння. ►

4. Ексцентриситет та директриси еліпса, гіперболи і параболи.

Фокальні радіуси точок еліпса чи гіперболи виражаються такими формулами:

$$\begin{aligned} r_1 &= |F_1M| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \\ r_2 &= |F_2M| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{13.9}$$

З'ясуємо, чи можна фокальні радіуси точок еліпса, гіперболи і параболи раціонально виразити через їх абсциси.

Із співвідношення (13.9) маємо

$$r_1^2 - r_2^2 = 4xc. \tag{13.10}$$

Для еліпса $r_1 + r_2 = 2a$. Тому із співвідношення (13.10) отримаємо

$$r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x. \tag{13.11}$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 2a, \\ r_1 - r_2 = 2\frac{c}{a}x \end{cases}$$

відносно r_1 і r_2, дістанемо раціональні вирази фокальних радіусів точок еліпса:

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \frac{c}{a}x, \\ r_2 &= a - \frac{c}{a}x. \end{aligned} \tag{13.12}$$

Число $e = \frac{c}{a}$ назвемо **ексцентриситетом** еліпса.

Для еліпса $e < 1$ ($a > c$). Ексцентриситет еліпса дорівнює нулю, якщо фокуси його збігаються, тобто коли еліпс перетворюється в коло ($b^2 = a^2 - c^2$; $c = 0$; $a = b$).

Ексцентриситет характеризує форму еліпса.

Співвідношення (13.12) для фокальних радіусів можна записати у вигляді

$$r_1 = a + ex, \qquad (13.13)$$
$$r_2 = a - ex.$$

Для точок гіперболи $r_2 - r_1 = \pm 2a$. Причому знак плюс (мінус) відповідає точкам гіперболи, для яких $x < 0$ ($x > 0$). З останнього співвідношення, беручи до уваги (13.10), отримаємо

$$r_2 + r_1 = \mp 2\frac{c}{a}x. \qquad (13.14)$$

Число $e = \frac{c}{a}$ назвемо **ексцентриситетом** гіперболи. Для гіперболи $e > 1$. Тоді із системи рівнянь

$$\begin{cases} r_2 - r_1 = \pm 2a, \\ r_2 + r_1 = \mp 2ex \end{cases}$$

отримаємо:

а) для $x < 0$ (для точок лівої вітки)

$$r_2 = a - ex, \qquad (13.15)$$
$$r_1 = -a - ex;$$

б) для $x > 0$ (для точок правої вітки)

$$r_2 = -a + ex, \qquad (13.16)$$
$$r_1 = a + ex.$$

Для параболи $r = d$, а $d = x + \frac{p}{2}$.
Тому

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (13.17)$$

Директрисами еліпса (гіперболи) називаються дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі (тобто до осі, на якій розміщені фокуси) еліпса (гіперболи) і знаходяться на відстані $\frac{a}{e}$ від центра кривої.

Поняття директриси параболи використовувалось при означенні параболи.

Директриси кривих другого порядку не перетинають самих кривих.

У вибраній нами системі координат директриси еліпса, гіперболи і параболи паралельні осі Oy. Тому рівняння директрис еліпса і гіперболи мають вигляд

$$x = \pm\frac{a}{e}, \qquad (13.18)$$

а рівняння директриси параболи

$$x = -\frac{p}{2}. \qquad (13.19)$$

Еліпс, гіперболи і парабола мають таку спільну властивість:

- **Теорема 13.1**

Відношення довжини фокального радіуса r кожної точки лінії другого порядку до відстані d цієї точки від відповідної директриси є сталим і дорівнює ексцентриситету кривої, тобто

$$\frac{r}{d} = e.$$

Доведення. Нехай $M(x, y)$ — довільна точка еліпса, d_1 і d_2 — її віддалі від відповідних директрис, r_1 і r_2 — її фокальні радіуси (рис. 38).

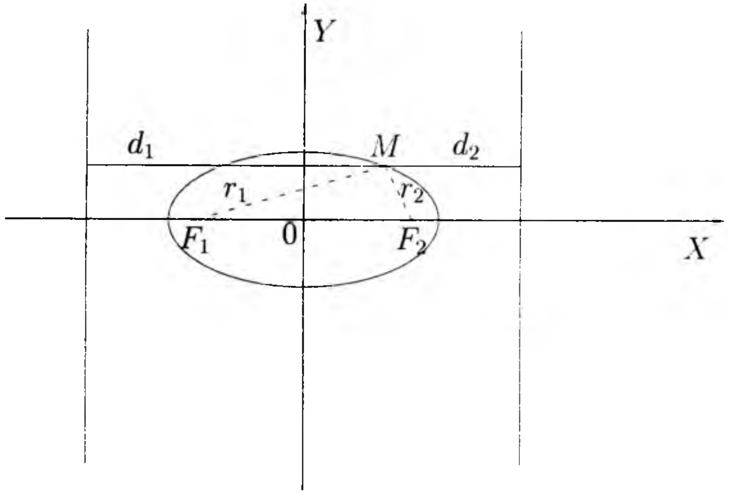


Рис. 38

Для правого фокуса і відповідної йому директриси маємо

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \mathrm{e}x}{\frac{a}{\mathrm{e}} - x} = \mathrm{e};$$

для лівих фокуса і директриси еліпса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \mathrm{e}x}{\frac{a}{\mathrm{e}} + x} = \mathrm{e}.$$

Аналогічно доводиться теорема для точок гіперболи.

Для параболи $\frac{r}{d} = 1$, тобто ексцентриситет параболи $\mathrm{e} = 1$.

• **Приклад 13.4**

Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо задана точка $M_0(-\sqrt{5}; 2)$ еліпса, а відстань між його директрисами дорівнює 10.

◄ Точка $M_0(-\sqrt{5}, 2)$ лежить на еліпсі. Тому її координати задовольняють рівняння еліпса, тобто

$$\frac{5}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{5}{a^2} + \frac{4}{a^2 - c^2} = 1,$$

оскільки $b^2 = a^2 - c^2$. Тоді

$$5(a^2 - c^2) + 4a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

За умовою відстань між директрисами $d = 10$. Враховуючи (13.15), маємо $\frac{a}{\mathrm{e}} = 5$ або $\frac{a^2}{c} = 5$, (бо $\mathrm{e} = c/a$), звідки $a^2 = 5c$.

Отже, для знаходження c маємо рівняння

$$5(5c - c^2) + 20c = 5c(5c - c^2),$$

або $c^3 - 6c^2 + 9c = 0$. Оскільки, $c \neq 0$, то отримаємо, що $c = 3$. Тоді $a^2 = 15$, $b^2 = 15 - 9 = 6$ і шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{6} = 1. \quad ►$$

• **Приклад 13.5**

Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо відомі відстань між її директрисами 8/3 і ексцентриситет $\mathrm{e} = \frac{3}{2}$.

◄ За умовою відстань між директрисами $d = \frac{8}{3}$ і $\mathrm{e} = \frac{3}{2}$. Тому, враховуючи (13.15) маємо $\frac{2a}{\mathrm{e}} = \frac{8}{3}$ або $\frac{2a}{3/2} = \frac{8}{3}$. Звідси $a = 2$ і $c = a \cdot \mathrm{e} = 3$. Отже, $b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$ і $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ — шукане рівняння. ►.

5. Полярна система координат. Рівняння кривих другого порядку в полярній системі координат

Полярна система координат

Виберемо на площині точку O, яку назвемо полюсом, і промінь OP, який назвемо полярною віссю (рис. 39)

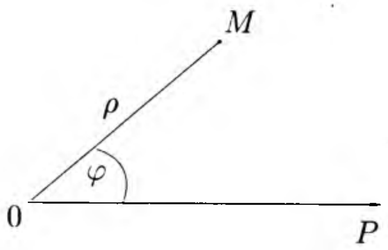


Рис. 39

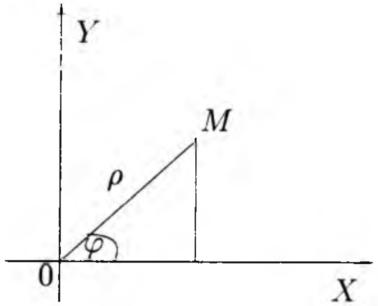


Рис. 40

Позначимо через ρ відстань від точки M до полюса O і через φ кут між полярною віссю і променем OM. Кут φ відраховуємо проти годинникової стрілки від полярної осі. **Числа ρ і φ визначають положення точки M на площині і називаються полярними координатами точки** M. Точку M з полярними координатами ρ і φ позначаємо символом $M(\rho, \varphi)$. Для того, щоб відповідність між відміннмими від полюса точками площини і парами координат (ρ, φ) була взаємнооднозначною, вважаємо, що $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Між декартовою прямокутною і полярною системами координат, якщо вісь Ox суміщена з полярною віссю і початок декартової системи з полюсом, існує зв'язок (рис. 40)

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Рівняння кривих другого порядку в полярній системі координат. Це рівняння ми отримаємо, використовуючи основну властивість еліпса, гіперболи і параболи, а саме: $\frac{r}{d} = \mathrm{e}$.

Нехай задана будь-яка лінія: еліпс, гіпербола чи парабола (якщо дана лінія є гіперболою, то ми будемо розглядати одну із її віток). Позначимо цю лінію буквою L.

Нехай F — фокус лінії, ℓ — директриса, що відповідає даному фокусу.

За полярну вісь візьмемо фокальну вісь кривої L, а за полюс — фокус F. Позначимо через ρ полярний радіус довільної точки M лінії L, а через φ — її полярний кут.

Розглянемо співвідношення

$$\frac{r}{d} = \mathrm{e}, \tag{13.20}$$

де e — ексцентриситет лінії, r — фокальний радіус точки M, d — відстань від точки M до директриси ℓ (рис. 41).

Оскільки полюс збігається з фокусом F, то

$$r = \rho. \tag{13.21}$$

Тоді

$$d = |MD| = |RN| = |RF| + |FN| = |RF| + \rho\cos\varphi. \tag{13.22}$$

Через фокус F проведемо хорду перпендикулярно до полярної осі. Позначимо її довжину через p.

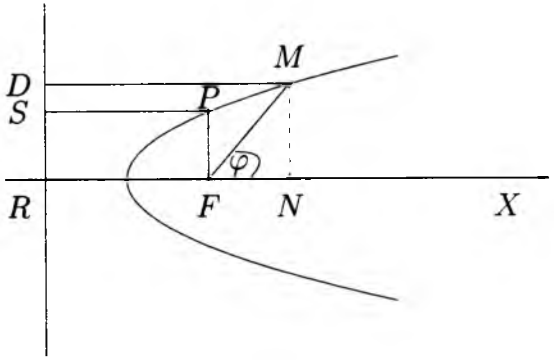


Рис. 41

Тоді точка P, яка відповідає верхньому кінцю хорди, має полярні координати: $\rho = p$; $\varphi = \pi/2$.

Число p називається полярним параметром лінії.

Оскільки співвідношення (13.18) справедливе для всіх точок лінії L, то для точки P можна записати його так: $\frac{p}{d_1} = \mathrm{e}$.

З останнього співвідношення $d_1 = \frac{p}{\mathrm{e}}$. Але $d_1 = |SP| = |RF|$. Тому

$$d = \frac{p}{\mathrm{e}} + \rho\cos\varphi. \tag{13.23}$$

Підставимо в ліву частину рівності (13.20) замість r і d їх значення (13.21) і (13.23). Отримаємо

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\mathrm{e}} + \rho\cos\varphi} = \mathrm{e},$$

звідси

$$\rho = \frac{p}{1 - \mathrm{e}\cos\varphi}. \tag{13.24}$$

Це і є полярне рівняння еліпса ($\mathrm{e} < 1$), гіперболи (однієї вітки) ($\mathrm{e} > 1$) і параболи ($\mathrm{e} = 1$). Тут p — фокальний параметр, e — ексцентриситет кривої. Рівняння (13.24) використовується в механіці та астрономії.

У рівнянні (13.24) фокальний параметр p для параболи має те саме значення, що і в рівнянні $y^2 = 2px$. Справді, для параболи $p = |FP| = |PS|$ (рис. 41), тобто p — відстань від фокуса до директриси.

Природно поставити питання: як виражається фокальний параметр p для еліпса та гіперболи через півосі a і b?

Для еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ підставимо в його рівняння координати однієї із точок еліпса, а саме $P(-c, p)$. Маємо

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{p^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

звідси $p^2 = \frac{b^4}{a^2}$ і $p = \frac{b^2}{a}$.

Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ координати її точки $P(c, p)$ підставимо в рівняння, після чого отримаємо:

$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1, \quad \text{або} \quad \frac{p^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

звідси знову ж маємо:

$$p^2 = \frac{b^4}{a^2}, \quad \text{і} \quad p = \frac{b^2}{a}.$$

Отже, рівняння еліпса, гіперболи і параболи в полярних координатах (при вказаному виборі полюса і полярної осі) мають однаковий вигляд

$$\rho = \frac{p}{1 - \mathrm{e}\cos\varphi}, \tag{13.25}$$

причому для еліпса і гіперболи фокальний параметр p зв'язаний з параметрами a і b формулою

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{13.26}$$

Для гіперболи рівняння (13.25) виведено для однієї її вітки, проте легко переконатись в тому, що його також задовольняють координати будь-якої точки, яка знаходиться на другій вітці гіперболи.

- **Приклад 13.6**

Дано рівняння еліпса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. Скласти його полярне рівняння, якщо напрямок полярної осі збігається з додатним напрямком осі Ox, а полюс знаходиться у фокусі.

◀ Згідно з умовою задачі маємо: $a = 5$, $b = 4$. Тоді $c = \sqrt{25 - 16} = 3$. Тому $\mathrm{e} = 3/5$ і фокальний параметр $\frac{16}{5}$. Тому полярне рівняння еліпса має вигляд:

$$\rho = \frac{\frac{16}{5}}{1 - \frac{3}{5}\cos\varphi} = \frac{16}{5 - 3\cos\varphi}. \quad ▶$$

- **Приклад 13.7**

Показати, що рівняння $\rho = \frac{18}{4 - 5\cos\varphi}$ визначає гіперболу і знайти її півосі.

◀ Запишемо задане рівняння у вигляді

$$\rho = \frac{\frac{18}{4}}{1 - \frac{5}{4}\cos\varphi}.$$

Тоді маємо $e = \frac{5}{4} > 1$ — тобто задане рівняння є рівнянням гіперболи;

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{2} \Longrightarrow b^2 = \frac{9}{2}a, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} \Longrightarrow c = \frac{5}{4}a,$$

тобто $\frac{9}{2}a = c^2 - a^2$ (бо $b^2 = c^2 - a^2$) і

$$\frac{9}{2}a = \frac{25}{16}a^2 - a^2 \Longrightarrow a = 8, \quad c = 10, \quad b = \sqrt{100 - 64} = 6.$$ ▶

РОЗДІЛ 5

Аналітична геометрія в просторі

§ 14. ПОВЕРХНІ ТА ПРОСТОРОВІ ЛІНІЇ

1. Поверхні та їх рівняння

Як відомо з геометрії на площині, метод координат дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між деякими геометричними образами і рівняннями. Тепер, після введення декартової системи координат в просторі, можемо розглянути це питання в просторі.

Нехай в просторі задана прямокутна декартова система координат.

Поверхнею будемо називати множину точок, координати яких задовольняють рівняння вигляду

$$F(x, y, z) = 0. \tag{14.1}$$

Навпаки, рівнянням поверхні відносно заданої системи координат називається рівняння з трьома змінними, яке задовольняють координати кожної точки, що лежать на поверхні, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на ній.

Звичайно, поверхні задаються як множина точок, що мають спільну для всіх них геометричну властивість. Щоб дістати рівняння заданої таким способом поверхні, достатньо аналітично записати геометричні умови, що входять в її визначення.

Проілюструємо це на одному простому прикладі. Нехай треба скласти рівняння сфери радіуса R з центром в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ як множини точок, відстань яких від точки M дорівнює R.

Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка сфери. За означенням сфери маємо

$$|\overrightarrow{M_0M}| = R,$$

або в координатній формі

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Це і є рівняння сфери, тому що його задовольняють координати будь-якої точки сфери і не задовольняють координати точок, що не лежать на даній сфері.

Легко переконатись, що рівняння, яке не містить однієї з координат зображає, нескінченну циліндричну поверхню. Справді, нехай рівняння поверхні

$$F(x, y) = 0 \qquad (14.2)$$

не містить координати z. Дане рівняння на площині Oxy зображає деяку лінію L, (рис. 42).

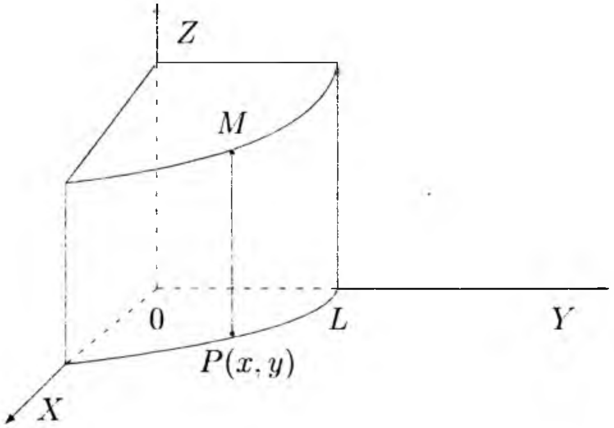


Рис. 42

Якщо через точки цієї лінії проведемо прямі, паралельні осі Oz, то про будь-яку точку кожної з цих прямих можемо сказати, що її координати (x, y, z) задовольняють рівняння (14.2), тому що довільна апліката цієї точки в рівняння (14.2) не входить.

Отже, рівняння (14.2) задовольняють всі точки прямих, паралельних осі Oz, що проходять через точки деякої лінії L в площині Oxy; поверхня, утворена паралельними між собою прямими, що проходять через деяку "напрямну" лінію L, називається циліндричною поверхнею; прямі, які її описують, називаються "твірними".

Отже, рівняння (14.2) зображає циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz.

Відповідно рівняння

$$F(y, z) = 0 \quad \text{чи} \quad F(x, z) = 0$$

зображають циліндричні поверхні, причому твірні першої паралельні осі Ox, твірні другої паралельні осі Oy.

2. Просторові лінії

Будь-яку лінію в просторі можна розглядати як перетин двох поверхонь, заданих відповідно рівняннями

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (14.3)$$

Ті значення x, y, z, які задовольняють обидва рівняння, визначають точки, що лежать одночасно на обох поверхнях, тобто розташовані на лінії їх перетину. Отже, система двох рівнянь (14.3) визначає лінію в просторі.

Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

за умови, що $z_0^2 < R^2$, визначає коло, яке є лінією перетину сфери з площиною Oxy.

Потрібно мати на увазі, що дану лінію L можна подати двома рівняннями нескінченною кількістю способів: замість даних двох поверхонь можна взяти будь-яку пару поверхонь, які перетинаються по тій самій лінії L. Аналітично це означає, що замість системи (14.3) можна взяти будь-яку еквівалентну їй систему.

Наприклад, лінією перетину двох сфер

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 10 \end{cases} \qquad (14.4)$$

є коло радіуса $R = 1$ з центром в точці $O(0,0,0)$, яке лежить в площині Oxy. Справді, якщо в друге рівняння системи замість $x^2 + y^2 + z^2$ підставити його значення з першого рівняння, то отримаємо

$$1 - 6z + 9 = 10 \Longrightarrow z = 0.$$

Система (14.4) еквівалентна системі

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

кожна з яких визначає коло радіуса $R = 1$ з центром в точці $O(0,0,0)$, яке лежить в площині $z = 0$.

Задача про знаходження точки перетину трьох поверхонь рівносильна задачі сумісного розв'язання трьох рівнянь, що зображають ці поверхні:

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ \Phi(x,y,z) = 0, \\ \Psi(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{14.5}$$

3. Класифікація поверхонь

Поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат зображається алгебраїчним рівнянням $F(x,y,z) = 0$, тобто рівнянням, ліва частина якого є многочлен від x, y, z, називається алгебраїчною поверхнею. Степінь цього многочлена визначає порядок алгебраїчної поверхні.

Лінія перетину двох алгебраїчних поверхонь називається алгебраїчною.

Поверхні, які не є алгебраїчними, називаються трансцендентними.

Надалі будемо розглядати алгебраїчні поверхні першого і другого порядків.

§ 15. ПЛОЩИНА

1. Площина як поверхня першого порядку. Загальне рівняння площини

Нехай задані декартова прямокутна система координат $Oxyz$ і рівняння першого степеня

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C, D — довільні сталі і $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Тоді справедлива теорема 15.1

- **Теорема 15.1**

Кожна площина може бути виражена лінійним рівнянням відносно вибраної декартової системи координат у просторі і, навпаки, кожне лінійне рівняння відносно декартової системи координат у просторі виражає площину.

Іншими словами — площина є єдиною поверхнею першого порядку.

Доведення. Нехай у просторі задана довільна площина Π. Позначимо одну з її точок через M_0, а перпендикулярний до неї вектор — через $\vec{n}$. Точка M_0 і вектор $\vec{n}$ повністю визначають площину Π, тому що через точку M_0 можна провести одну і тільки одну площину перпендикулярно до вектора $\vec{n}$.

Введемо у просторі декартову прямокутну систему координат і позначимо через x_0, y_0, z_0 координати точки M_0, через x, y, z координати довільної точки M площини Π, а координати вектора $\vec{n}$ — через A, B, C (рис. 43).

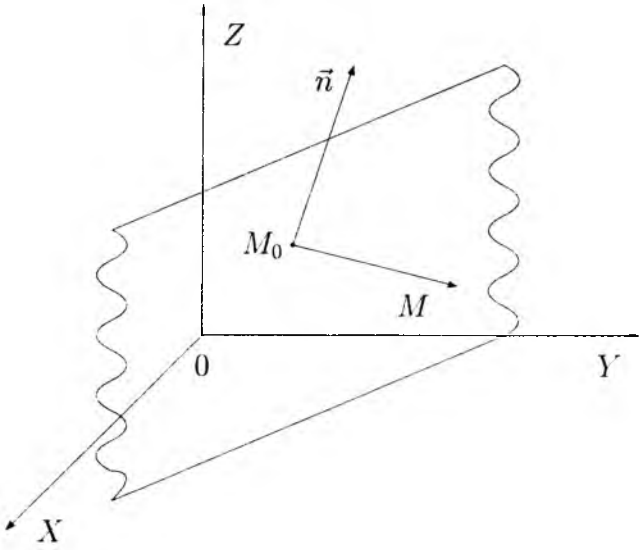


Рис. 43

Вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x-x_0; y-y_0; z-z_0\}$ при будь-якому положенні точки M на площині Π перпендикулярний до вектора $\vec{n}$. Отже, скалярний добуток цих двох векторів дорівнює нулю:

$$(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \qquad (15.1)$$

Рівняння (15.1) — це векторне рівняння площини Π. У координатній формі воно матиме вигляд

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \qquad (15.2)$$

Як бачимо, рівняння площини Π — лінійне.

Легко довести і обернене твердження. Справді, нехай задано довільне лінійне рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (15.3)$$

де A, B, C — довільні числа, що одночасно не дорівнюють нулю. Нехай $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — деяка точка, координати якої задовольняють рівняння, тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Віднімаючи останню рівність почленно від рівності (15.3), отримаємо

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

а це згідно з (15.2) є не що інше, як рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}$.

Рівняння (15.3) називається **загальним рівнянням площини**, а вектор $\vec{n}$ — **вектором її нормалі**, або нормальним вектором.

2. Дослідження неповного рівняння площини

Виходячи із геометричного тлумачення коефіцієнтів A, B і C в загальному рівнянні площини як координат вектора її нормалі, питання про вплив коефіцієнтів рівняння на розміщення площини відносно системи координат розв'язується просто.

а) Зміна коефіцієнта D при незмінних коефіцієнтах A, B, C приводить до паралельного переміщення площини і, зокрема, якщо $D = 0$, дістаємо рівняння

$$Ax + By + Cz = 0$$

площини, що проходить через початок координат.

б) Рівність нулеві одного з коефіцієнтів A, B чи C означає перпендикулярність вектора нормалі до відповідної осі, тобто паралельність площини до цієї осі.

в) Рівність нулеві двох коефіцієнтів A і B, A і C чи B і C означає паралельність площини відповідній координатній площині Oxy, Oxz чи Oyz.

г) Рівність нулеві трьох коефіцієнтів A, B і D; A, C і D чи B, C і D визначає відповідно координатні площини Oxy, Oxz або Oyz.

• **Приклад 15.1**

Точка $M_0(2, -2, -4)$ — основа перпендикуляра, який опущений з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

◄ Знайдемо координати вектора нормалі $\vec{n}$. За вектор $\vec{n}$ можна взяти вектор $\overrightarrow{OM_0} = \{2; -2; -4\}$. Площина проходить через точку $M_0(2,-2,-4)$. Тому згідно з (15.2) шукане рівняння має вигляд

$$2(x-2)-2(y+2)-4(z+4)=0,$$

або

$$x-y-2z-12=0.$$ ▶

- **Приклад 15.2**

  Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_0(4,-1,2)$.

◄ Оскільки площина проходить через вісь Ox, то в загальному рівнянні (15.3) коефіцієнти A та D дорівнюють нулю, тобто рівняння матиме вигляд $By+Cz=0$. Точка $M_0(4,-1,2)$ належить площині. Значить, її координати задовольняють отримане рівняння. Маємо $-B+2C=0$ або $B=2C$ і шукане рівняння площини набирає вигляд $2y+z=0$. ▶

3. Кут між двома площинами. Умови паралельності й перпендикулярності двох площин

Нехай дві площини задані загальними рівняннями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Двогранний кут між двома площинами вимірюється лінійним кутом, який, як випливає з відомої теореми з елементарної геометрії, дорівнює кутові Θ між векторами нормалей $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ двох заданих площин. Косинус кута Θ знаходять за формулою

$$\cos\Theta=\frac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}. \qquad (15.4)$$

Оскільки $\vec{n_1}=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\vec{n_2}=\{A_2;B_2;C_2\}$, визначимо косинус кута між двома площинами через коефіцієнти їх загальних рівнянь:

$$\cos\Theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \qquad (15.5)$$

Умова перпендикулярності двох площин рівносильна умові перпендикулярності векторів $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$. Вона має вигляд:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0. \qquad (15.6)$$

Умова паралельності двох площин має вигляд:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}. \qquad (15.7)$$

Вона виражає той факт, що вектори нормалей двох паралельних площин колінеарні.

- **Приклад 15.3**

  За яких значень ℓ та m рівняння $2x+\ell y+3z-5=0$ і $mx-6y-6z+2=0$ визначають паралельні площини ?

◄ Згідно з умовою (15.7) паралельності двох площин маємо:

$$\frac{2}{m}=\frac{\ell}{-6}=\frac{3}{-6}\Longrightarrow m=-4, \quad \ell=3.$$ ▶

- **Приклад 15.4**

  За якого значення ℓ рівняння $3x-5y-\ell z-3=0$ та $x+3y+2z+5=0$ визначають перпендикулярні площини ?

◄ Згідно з умовою (15.6) перпендикулярності двох площин маємо:

$$3\cdot1-5\cdot3-\ell\cdot2=0\Longrightarrow\ell=-6.$$ ▶

4. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки

Нехай площина задана трьома своїми точками M_1, M_2, M_3, які не лежать на одній прямій: $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ і $M_3(x_3,y_3,z_3)$, а $M(x,y,z)$ — довільна точка площини. Три вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 44) компланарні, отже, їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3})=0.$$

Виразивши цю умову через координати даних векторів, матимемо:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{15.8}$$

— рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

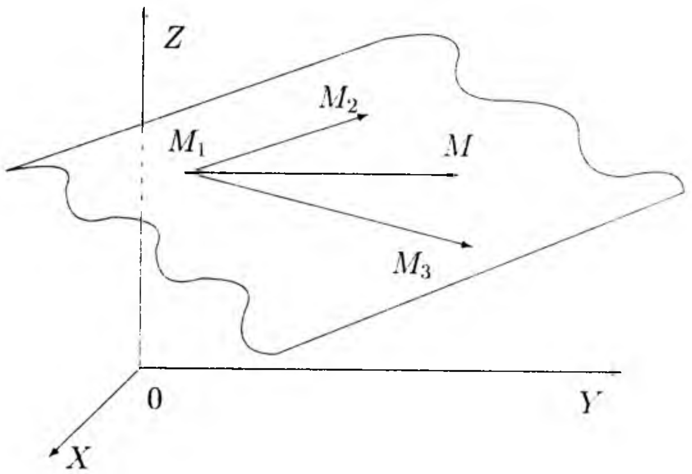


Рис. 44

• **Приклад 15.5**

Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(3,-1,2)$, $M_2(4,-1,-1)$ і $M_3(2,0,2)$.

◄ Підставимо в рівняння (15.8) координати точок M_1, M_2 та M_3:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4-3 & -1+1 & -1-2 \\ 2-3 & 0+1 & 2-2 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x+3y+z-8=0$$

— шукане рівняння площини. ►

5. Рівняння площини ”у відрізках”

Розглянемо загальне рівняння площини (15.3) і покажемо, що його можна звести до вигляду

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag{15.9}$$

яке називають **рівнянням площини ”у відрізках”**.

Справді, якщо всі коефіцієнти A, B, C і D відмінні від нуля, то рівняння (15.3) можна записати у вигляді

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$$

і прийняти, що $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$.

Зауважимо, що в рівнянні ”у відрізках” (15.9) числа a, b і c мають простий геометричний зміст: вони дорівнюють величинам відрізків, які відтинає площина на осях Ox, Oy і Oz. Щоб переконатись в цьому, досить знайти точки перетину площини з осями координат. Наприклад, точка перетину з віссю Ox визначається із сумісного розгляду рівняння площини (15.9) з рівняннями $y=0$ і $z=0$ осі Ox:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1, \\ y=0, \quad z=0 \end{cases} \Longrightarrow x=a, \quad y=0, \quad z=0,$$

тобто точка $A(a,0,0)$ — шукана точка перетину площини з віссю Ox. Аналогічно знайдемо, що координати точки перетину площини (15.9) з віссю Oy: $x=0$, $y=b$, $z=0$ і з віссю Oz — $x=0$, $y=0$, $z=c$.

Зауваження. Рівняння (15.9) можна отримати з рівняння (15.8), якщо прийняти $x_1=a$, $y_1=0$, $z_1=0$; $x_2=0$, $y_2=b$, $z_2=0$; $x_3=0$, $y_3=0$, $z_3=c$, тобто як рівняння площини, що проходить через три точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ і $C(0,0,c)$.

• **Приклад 15.6**

Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$ та відтинає на координатних осях Ox і Oy відрізки, величини яких $a=-2$, $b=2/3$.

◀ Підставимо в рівняння (15.9) замість a та b їх значення. Отримаємо рівняння

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2/3}+\frac{z}{c}=1$$

площини, нормальний вектор якої $\vec{n}_1=\left\{-\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{1}{c}\right\}$. Нормальним вектором заданої площини $2x-2y+4z-5=0$ є вектор $\vec{n}_2=\{2;-2;4\}$. Ці площини перпендикулярні. Тому, враховуючи умову (15.6) перпендикулярності двох площин, знаходимо параметр c із співвідношення:

$$2\left(-\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{3}{2}\right)+4\left(\frac{1}{c}\right)=0\Longrightarrow c=1.$$

Отже, шукане рівняння площини має вигляд

$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{2/3}+\frac{z}{1}=1 \quad \text{або} \quad x-3y-2z+2=0. \quad ▶.$$

6. Нормальне рівняння площини

Нехай в просторі задана площина Π, яка визначається відстанню p від початку координат, тобто $|\overrightarrow{OP}|$ — довжиною перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину, і напрямом цього перпендикуляра, тобто кутами α, β, γ, які він утворює з додатними напрямками осей системи координат. Координати одиничного вектора нормалі (рис. 45) будуть величини: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, тобто

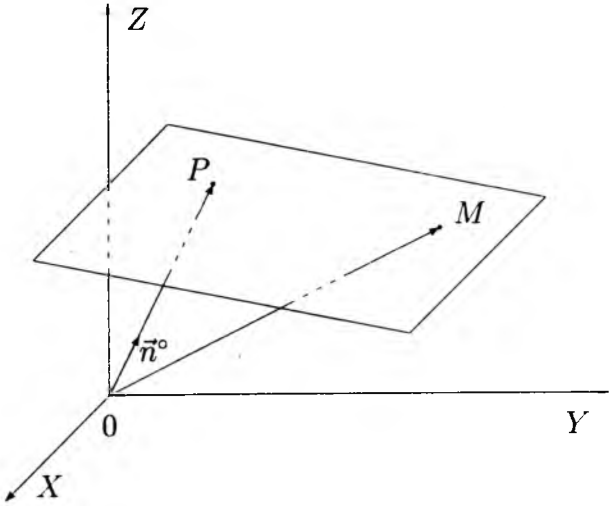


Рис. 45

$$\vec{n}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}.$$

Позначимо довільну точку площини через $M(x,y,z)$ і знайдемо проекцію радіус-вектора $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ на нормаль до площини:

$$\text{Пр}_{\vec{n}^{\circ}}\vec{r}=(\vec{r},\vec{n}^0)=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

З іншого боку

$$\text{Пр}_{\vec{n}^{\circ}}\vec{r}=p.$$

Отже, порівнюючи ці два вирази для проекції вектора, отримаємо:

$$(\vec{r},\vec{n}^{\circ})=p \tag{15.10}$$

або в координатній формі

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0, \tag{15.11}$$

тобто рівняння площини, яке називається її **нормальним рівнянням**.

Щоб звести загальне рівняння площини

$$Ax+By+Cz+D=0$$

до нормального вигляду

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

треба помножити всі його коефіцієнти на число

$$\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Справді, нормальне і загальне рівняння — це дві форми рівнянь однієї площини. Отже, їх коефіцієнти пропорційні

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = -\frac{p}{D} = \lambda.$$

Звідси одержимо

$$\cos\alpha = A\lambda, \quad \cos\beta = B\lambda, \quad \cos\gamma = C\lambda, \quad -p = D\lambda.$$

Користуючись співвідношенням

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

дістанемо $(A\lambda)^2 + (B\lambda)^2 + (C\lambda)^2 = 1$, тобто $\lambda^2(A^2+B^2+C^2) = 1$. Звідси $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Знак числа λ визначається з умови $\lambda D = -p < 0$, тобто він завжди має знак, протилежний знаку вільного члена D.

Число λ називається нормувальним множником рівняння. Отже, нормальне рівняння площини матиме вигляд

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0. \qquad (15.12)$$

7. Відстань точки від площини

Нехай площина Π задана своїм рівнянням в нормальному вигляді

$$(\vec r, \vec n^\circ) - p = 0,$$

де $\vec n^\circ = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$, $\vec r = \{x; y; z\}$ і точка M_0 з радіус-вектором $\vec r^\circ = \{x_0; y_0; z_0\}$. Визначимо відстань d точки M_0 від даної площини.

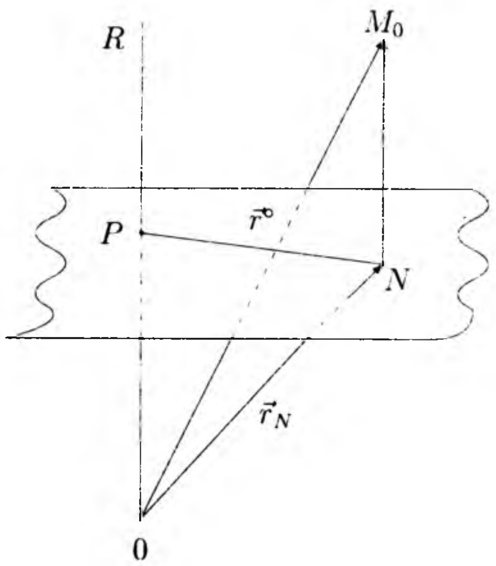


Рис. 46

Під відстанню точки від площини будемо розуміти довжину перпендикуляра, опущеного з даної точки на дану площину, тобто величину

$$d = |\overrightarrow{NM_0}|,$$

де N — основа перпендикуляра, опущеного з точки M_0 на площину (рис. 46).

Вектор $\vec r_0$ можна розглядати як суму двох векторів:

$$\vec r_0 = \vec r_N + \overrightarrow{NM_0}.$$

Звідси $\overrightarrow{NM_0} = \vec r_0 - \vec r_N$.

Оскільки,

$$\text{Пр}_{\vec n^\circ}\overrightarrow{NM_0} = \text{Пр}_{\vec n^\circ}(\vec r_0 - \vec r_N) = \text{Пр}_{\vec n^\circ}\vec r_0 - \text{Пр}_{\vec n^\circ}\vec r_N =$$

$$= (\vec r_0, \vec n^\circ) - (\vec r_N, \vec n^\circ) = (\vec r_0, \vec n^\circ) - p,$$

то,

$$d = |(\vec r_0, \vec n^\circ) - p|. \qquad (15.13)$$

Цей результат можна сформулювати так: *відстань точки від площини дорівнює абсолютному значенню лівої частини нормального рівняння площини для радіус-вектора даної точки.*

У координатній формі (15.13) має вигляд:

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

Якщо площина задана загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, то нормуючи його, і підставляючи потім на місце довільних координат координати точки M_0, отримаємо формулу для обчислення відстані в координатній формі:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (15.14)$$

- **Приклад 15.7**

Знайти відстань точки $M_0(5, 3, 2)$ від площини $2x + 3y + 6z + 4 = 0$.

◀ Згідно з формулою (15.14)

$$d = \frac{|2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = 5.$$

Отже, шукана відстань точки від площини дорівнює 5 одиниць. ▶

§ 16. ПРЯМА В ПРОСТОРІ

1. Канонічні рівняння прямої

Нехай пряма L задана в просторі точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{s} = \{\ell; m; n\}$, тобто вектором, паралельним прямій L. Позначимо, як звичайно, через $M(x, y, z)$ довільну точку прямої (рис. 47) і виразимо умову колінеарності векторів $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ в координатній формі:

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \qquad (16.1)$$

Рівняння (16.1) — **канонічне рівняння** прямої.

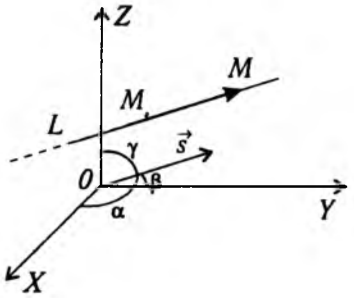


Рис. 47

Координати ℓ, m, n напрямного вектора $\vec{s}$ прямої, як знаємо, пропорційні косинусам кутів α, β, γ, які пряма L утворює з координатними осями.

Тому, якщо $\ell = 0$, то пряма L перпендикулярна до осі Ox. Аналогічно, коли $m = 0$ або $n = 0$, то пряма L перпендикулярна відповідно до осі Oy або Oz.

Якщо ж $\ell = m = 0$, то пряма L перпендикулярна осі Ox і осі Oy, тобто паралельна осі Oz. Аналогічно, коли $\ell = n = 0$, то пряма L паралельна осі Oy і коли $n = m = 0$, то пряма паралельна осі Ox.

2. Параметричні рівняння прямої

Нехай, як і вище, $\vec{s} = \{\ell; m; n\}$ — напрямний вектор прямої L, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — фіксована точка прямої та $M(x, y, z)$ — довільна точка прямої L.

Вектори $\overrightarrow{M_0M}$ і $\vec{s}$ колінеарні. Отже, при будь-якому положенні точки M на прямій L маємо: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{s}t$.

Переходячи до співвідношення між координатами цих векторів, отримаємо

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \qquad (16.2)$$

Рівняння (16.2) називаються **параметричними рівняннями** прямої. Можна показати, що кожна точка M з координатами x, y, z, яка визначається рівняннями (16.2), лежить на прямій, що проходить через точку M_0 паралельно вектору $\vec{s}$.

- **Приклад 16.1**

Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої,

яка проходить через точку $M_0(-2,1,-1)$ паралельно до вектора $\vec{s}=\{1;-2;3\}$.

◄ Відповідно до рівняння (16.1) маємо:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}.$$

Отримане рівняння є шуканим канонічним рівнянням прямої.

Згідно із співвідношеннями (16.2) параметричні рівняння прямої матимуть вигляд

$$x=-2+t,\quad y=1-2t,\quad z=-1+3t. \quad ►$$

• **Приклад 16.2**

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1,1,1)$ перпендикулярно до векторів $\vec{s}_1=\{2;3;1\}$ і $\vec{s}_2=\{3;1;2\}$.

◄ Оскільки пряма L перпендикулярна до векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$, то напрямний вектор прямої $\vec{s}$ перпендикулярний до векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$, тобто $\vec{s}\|[\vec{s}_1,\vec{s}_2]$. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$:

$$[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=5\vec{i}-\vec{j}-7\vec{k}.$$

Тому згідно з (16.1) шукане рівняння має вигляд

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-7}. \quad ►$$

3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Якщо задано дві точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ та $M_2(x_2,y_2,z_2)$, то за напрямний вектор $\vec{s}$ прямої можна взяти вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ і, отже,

$$\ell=x_2-x_1,\quad m=y_2-y_1,\quad n=z_2-z_1.$$

Канонічні рівняння прямої, що проходить через точку M_1 з напрямним вектором $\overrightarrow{M_1M_2}$, мають вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{16.3}$$

• **Приклад 16.3**

Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,-2,1)$ і $M_2(3,1.-1)$.

◄ Згідно із співвідношенням (16.3) маємо

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1},$$

тобто $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$ — канонічне рівняння шуканої прямої. ►

4. Загальне рівняння прямої

Пряму можна розглядати як лінію перетину двох площин, що задані загальними рівняннями. Іншими словами, пряму в просторі можна задати системою двох лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.\end{cases} \tag{16.4}$$

Покажемо, як систему лінійних рівнянь, що визначають пряму, можна звести до канонічного вигляду.

Щоб звести систему рівнянь (16.4) до канонічного вигляду (16.1), треба: 1) знайти координати однієї з точок прямої; 2) знайти координати ℓ, m, n напрямного вектора $\vec{s}$ прямої.

Щоб визначити координати однієї із точок прямої, надамо одній змінній, наприклад z, довільного значення z_0 і розв'яжемо систему (16.4) відносно змінних x і y. Знайдені координати точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ підставляємо в рівняння (16.1).

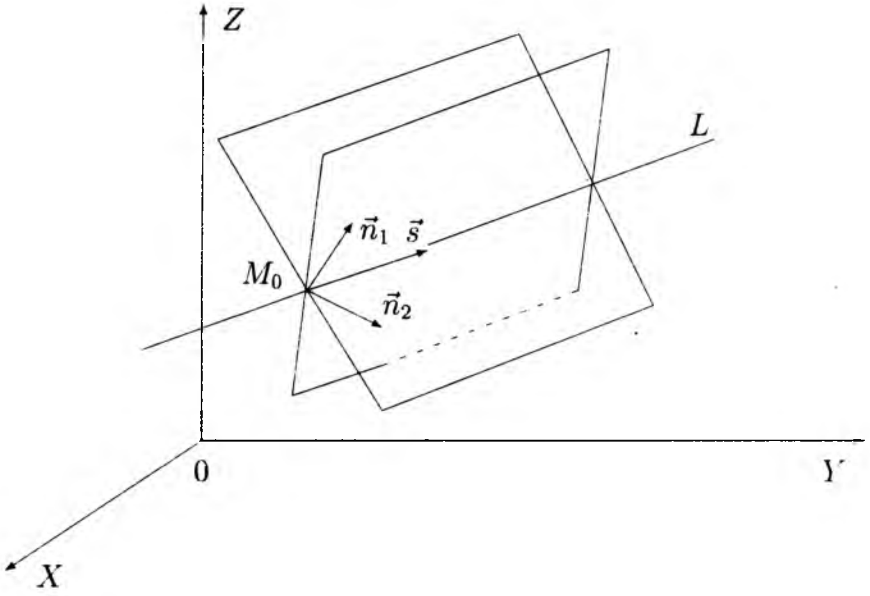


Рис. 48

Щоб визначити координати ℓ, m, n напрямного вектора прямої, зауважимо (рис. 48), що він перпендикулярний до векторів нормалей площин (16.4): $\vec n_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ і $\vec n_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$. Отже, за вектор $\vec s$ можна взяти векторний добуток векторів $\vec n_1$ і $\vec n_2$, тобто

$$\vec s = [\vec n_1, \vec n_2] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec i + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec j + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec k,$$

або

$$\vec s = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}. \qquad (16.5)$$

Підставляючи в рівняння (16.1) замість ℓ, m, n координати вектора $\vec s$ із співвідношення (16.5), отримаємо

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \qquad (16.6)$$

— рівняння прямої (16.4) в канонічній формі (16.1).

• **Приклад 16.4**

Звести до канонічного вигляду загальне рівняння прямої

$$x - 2y + 3z - 4 = 0, \quad 3x + 2y - 5z - 4 = 0.$$

◄ Згідно з формулою (16.5) напрямний вектор прямої

$$\vec s = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{4; 14; 8\}.$$

Щоб знайти координати точки M_0 прямої, надамо одній змінній, наприклад x, довільного значення $x = 0$ і розв'яжемо систему відносно змінних y і z:

$$\begin{cases} -2y + 3z - 4 = 0, \\ 2y - 5z - 4 = 0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = -8, \\ z = -4. \end{cases}$$

Отже, канонічні рівняння прямої мають вигляд

$$\frac{x}{4} = \frac{y+8}{14} = \frac{z+4}{8}, \quad \text{або} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+4}{4}. \quad ►$$

5. Взаємне розміщення двох прямих

Нехай прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}. \qquad (16.7)$$

Кут φ між прямими в просторі визначається аналогічно, як і кут між прямими на площині, тобто, як кут між їх напрямними векторами $\vec s_1$ і $\vec s_2$, тобто з формули

$$\cos\varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (16.8)$$

Умова перпендикулярності прямих (16.7) набирає вигляд

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \qquad (16.9)$$

Прямі будуть паралельні, якщо їх напрямні вектори $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$ — колінеарні, тобто коли

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2} \qquad (16.10)$$

і навпаки.

Нарешті, прямі будуть перетинатись, коли вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ і $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ будуть компланарні (рис. 49), тобто виконуватиметься умова

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)=0,$$

яка в координатній формі запишеться так:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (16.11)$$

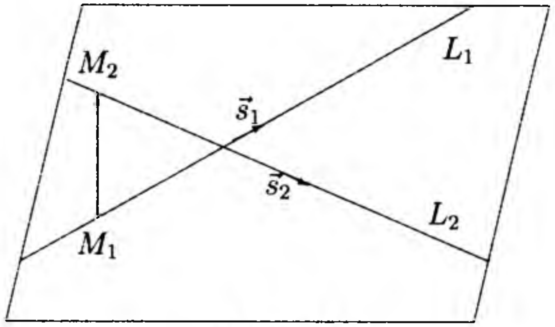


Рис. 49

• **Приклад 16.5**

Довести, що прямі, які задані параметричними рівняннями $x=2t-3$, $y=3t-2$, $z=-4t+6$ і $x=t+5$, $y=-4t-1$, $z=t-4$, перетинаються.

◄ Перевіримо, чи виконується умова (16.11) перетину двох прямих. Згідно з умовою задачі маємо: $M_1(-3,-2,6)$, $M_2(5,-1,-4)$, $\vec{s}_1=\{2;3;-4\}$ та $\vec{s}_2\{1;-4;1\}$. Тоді

$$\begin{vmatrix} 5+3 & -1+2 & -4-6 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -10 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}=24-4+80+30-128-2=$$

$$=134-134=0,$$

тобто умова (16.11) виконується, а тому задані прямі перетинаються. ►.

6. Рівняння пучка площин

Пучком площин називають сукупність всіх площин, які проходять через одну пряму (вісь пучка) L.

Якщо вісь пучка задана рівняннями в загальному вигляді

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \qquad (16.12)$$

то рівняння

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \qquad (16.13)$$

де λ — числовий параметр, буде рівнянням пучка площин.

Справді, рівняння (16.13) як лінійне визначає деяку площину при всіх можливих числових значеннях параметра λ. Всі площини, задані рівнянням (16.13), перетинаються по прямій L тому, що координати точок прямої L, задовольняючи рівняння (16.12), задовольняють і рівняння (16.13) незалежно від значень, які набирає параметр λ.

Нехай тепер треба знайти рівняння площини з даного пучка, яка проходить через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, розташовану поза прямою (16.12). Використовуючи той факт, що координати точки M_0 задовольняють рівняння (16.13), тобто

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1+\lambda(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0,$$

знайдемо з останнього співвідношення параметр λ:

$$\lambda=-\frac{A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1}{A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2}. \qquad (16.14)$$

Отже, рівняння (16.13) є рівнянням пучка площин, які проходять через вісь пучка (16.12).

Площини (16.12) також належать до пучка площин (16.13) за певних значень параметра λ. Якщо $\lambda=0$, отримаємо першу площину $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$. Другу площину $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ дістанемо, якщо $\lambda=\infty$.

• **Приклад 16.6**

Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму

$$x + y - z = 0, \quad x - y + z - 1 = 0$$

і точку $M_0(1, 1, -1)$.

◀ Рівняння будь-якої площини, яка проходить через задану пряму, має вигляд

$$x + y - z + \lambda(x - y + z - 1) = 0. \tag{16.15}$$

Параметр λ знайдемо із співвідношення (16.14):

$$\lambda = -\frac{1+1+1}{1-1-1-1} = \frac{3}{2}.$$

Підставивши одержане значення λ в рівняння пучка площин (16.15), отримаємо рівняння шуканої площини:

$$x + y - z + \frac{3}{2}(x - y + z - 1) = 0, \quad \text{або} \quad 5x - y + z - 3 = 0. \quad ▶$$

§ 17. ДЕЯКІ ЗАДАЧІ НА ПРЯМУ І ПЛОЩИНУ В ПРОСТОРІ

1. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Кут Θ між прямою і площиною в просторі вимірюється гострим кутом між прямою та її проекцією на площину (рис. 50).

Нехай пряма і площина задані рівняннями

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Очевидно, що

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

де φ — кут між вектором нормалі $\vec{n}$ площини і напрямним вектором $\vec{s}$ прямої.

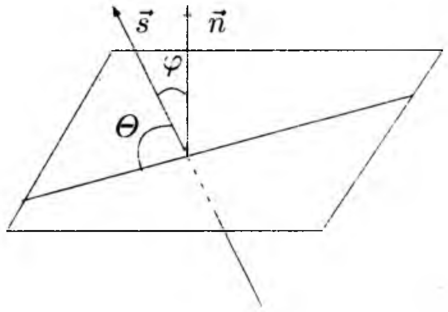


Рис. 50

Кут φ можна визначити за формулою

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n}, \vec{s})}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{A\ell + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}},$$

з іншого боку

$$\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = \sin\Theta.$$

Отже,

$$\sin\Theta = \frac{|A\ell + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\ell^2 + m^2 + n^2}}. \tag{17.1}$$

Якщо пряма паралельна площині, то кут $\Theta = 0$, і навпаки. Отже, співвідношення

$$A\ell + Bm + Cn = 0 \tag{17.2}$$

є умовою паралельності прямої і площини.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вектори $\vec{n}$ і $\vec{s}$ колінеарні, і навпаки. Отже, співвідношення

$$\frac{A}{\ell} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n} \tag{17.3}$$

є умовою перпендикулярності прямої і площини.

• **Приклад 17.1**

Знайти кут між прямою $x = 4 - t$, $y = 5 - 2t$, $z = 3t$ і площиною $2x + 4y - 6z + 7 = 0$.

◄ Перейдемо від параметричних рівнянь прямої до канонічного

$$\frac{x-4}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z}{3}.$$

Тоді, прийнявши у формулі (17.1) $A=2$, $B=4$, $C=-6$, $\ell=-1$, $m=-2$, $n=3$, отримаємо, що

$$\sin\Theta=\frac{|-2-8-18|}{\sqrt{6+16+36}\sqrt{1+4+9}}=\frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}}=1.$$

Отже, $\Theta=\frac{\pi}{2}$. ►

- **Приклад 17.2**

За яких B і n пряма $x=5-3t$, $y=9+4t$, $z=-2+nt$ перпендикулярна до площини $6x+By-10z+9=0$?

◄ Відповідно до співвідношення (17.3) маємо

$$\frac{6}{-3}=\frac{B}{4}=\frac{-10}{n},$$

звідси

$$B=-8,\quad n=5.$$ ►

2. Взаємне розміщення прямої і площини. Перетин прямої з площиною

Пряма в просторі може перетинати площину, бути до неї паралельною або належати їй. Встановимо, чим характеризується аналітично кожний з цих випадків.

Нехай пряма і площина задані рівняннями

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$
$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{17.4}$$

Запишемо рівняння прямої в параметричній формі:

$$\begin{aligned} x&=x_0+\ell t,\\ y&=y_0+mt,\\ z&=z_0+nt. \end{aligned} \tag{17.5}$$

Підставляючи (17.5) в рівняння площини на місце x, y і z, отримаємо

$$A(x_0+\ell t)+B(y_0+mt)+C(z_0+nt)+D=0,$$

звідки

$$(A\ell+Bm+Cn)t+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \tag{17.6}$$

Тут можливі такі випадки:

1. Якщо $A\ell+Bm+Cn\neq 0$, то рівняння (17.6) має єдиний розв'язок

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{A\ell+Bm+Cn}. \tag{17.7}$$

Геометрично це означає, що пряма перетинає площину в одній точці. Координати точки перетину отримаємо, якщо у співвідношення (17.5) підставити на місце t його значення із співвідношення (17.7).

2. Якщо $A\ell+Bm+Cn=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, рівняння (17.6) не має розв'язку. Це означає, що пряма паралельна до площини.

3. Якщо $A\ell+Bm+Cn=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то рівняння (17.6) має безліч розв'язків. Геометрично це означає, що пряма належить даній площині.

- **Приклад 17.3**

За яких значень A і D пряма $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ належить площині $Ax+2y-4z+D=0$?

◄ Якщо пряма лежить на площині, то $A\ell+Bm+Cn=0$ і $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, тобто $4A-8-4=0$, $3A+2+12+D=0$, звідки маємо: $A=3$, $D=-23$. ►

- **Приклад 17.4**

Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

◀ Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних:

$$x = 1 + t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = 6t.$$

Підставляючи в рівняння площини $2x + 3y + z - 1 = 0$ на місце x, y, z отримані значення, дістанемо

$$2(1 + t) + 3(-1 - 2t) + 6t - 1 = 0, \quad \text{звідси} \quad t = 1.$$

Тоді $x_1 = 1 + 1 = 2$, $y_1 = -1 - 2 = -3$, $z_1 = 6$, тобто точкою перетину є точка $M_1(2, -3, 6)$. ▶

3. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку перпендикулярно заданій площині

Потрібно скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ перпендикулярно до площини $A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$. Оскільки пряма проходить через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то її рівняння має вигляд

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

де ℓ_1, m_1, n_1 — координати напрямного вектора $\vec{s}_1$ прямої. Але шукана пряма перпендикулярна до заданої площини. Тому напрямний вектор $\vec{s}_1$ прямої колінеарний нормальному вектору $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$. Значить, за вектор $\vec{s}_1$ можна взяти вектор $\vec{n}_1$ і тоді рівняння шуканої прямої матиме вигляд

$$\frac{x - x_1}{A_1} = \frac{y - y_1}{B_1} = \frac{z - z_1}{C_1}. \qquad (17.8)$$

- **Приклад 17.5**

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3, -6, 7)$ перпендикулярно до площини $x + 4y - 8z - 4 = 0$.

◀ Приймемо у співвідношенні (17.8): $x_1 = 3$, $y_1 = -6$, $z_1 = 7$, $A_1 = 1$, $B_1 = 4$, $C_1 = -8$. Тоді рівняння шуканої прямої набуває вигляду

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y + 6}{4} = \frac{z - 7}{-8}. \quad ▶$$

4. Рівняння площини, яка проходить через задану точку паралельно заданій площині

Нехай задані точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і площина $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$. Потрібно скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0 паралельно заданій площині.

Оскільки нормальні вектори паралельних площин колінеарні, то за нормальний вектор шуканої площини можна взяти вектор $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$.

Значить, рівняння

$$A_1(x - x_0) + B_1(y - y_0) + C_1(z - z_0) = 0 \qquad (17.9)$$

є шуканим рівнянням площини.

- **Приклад 17.6**

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(-4, 3, -7)$ паралельно до площини $6x - 5y + 4z - 15 = 0$.

◀ Відповідно до співвідношення (17.9) маємо

$$6(x + 4) - 5(y - 3) + 4(z + 7) = 0, \quad \text{або} \quad 6x - 5y + 4z + 67 = 0. \quad ▶$$

5. Рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до заданої прямої

Потрібно скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до прямої

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, згідно із (15.2) має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Оскільки шукана площина перпендикулярна заданій прямій, то нормальний вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ площини колінеарний напрямному вектору $\vec{s} = \{\ell; m; n\}$ прямої. Тому шукане рівняння площини має вигляд

$$\ell(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0. \qquad (17.10)$$

- **Приклад 17.7**

Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1,-2,1)$ перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+\ y-z+2=0. \end{cases}$$

◀ Знайдемо напрямний вектор заданої прямої. Оскільки $\vec{s}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$ (згідно з (16.5)), то маємо:

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}.$$

Отже, шукане рівняння площини згідно з (17.10) матиме вигляд

$$x-1+2(y+2)+3(z-1)=0, \quad \text{або} \quad x+2y+3z=0. \ ▶$$

6. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку

Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ і точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ (точка M_1 не лежить на заданій прямій).

Нехай $M(x,y,z)$ — довільна точка площини. Тоді вектори

$$\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}, \quad \overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\}$$

і $\vec{s}=\{\ell;m;n\}$ — компланарні (рис. 51), тобто мішаний добуток $(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s})=0$.

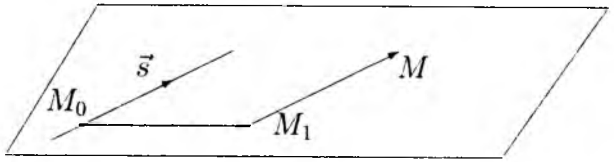


Рис. 51

У координатній формі останнє співвідношення набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \ell & m & n \end{vmatrix}=0, \qquad (17.11)$$

яке і є шуканим рівнянням площини.

- **Приклад 17.8**

Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $x=2t+1$, $y=-3t+2$, $z=2t-3$ і точку $M_1(2,-2,1)$.

◀ З рівняння прямої маємо: $x_0=1$, $y_0=2$, $z_0=-3$, $\ell=2$, $m=-3$, $n=2$. Тому, враховуючи (17.11), отримаємо рівняння площини:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 2-1 & -2-2 & 1+3 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0, \quad \text{або} \quad 4x+6y+5z-1=0. \ ▶$$

7. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму паралельно іншій прямій

Потрібно скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$ паралельно прямій $\dfrac{x-x_2}{\ell_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$.

Нехай $M(x,y,z)$ — довільна точка шуканої площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\vec{s}_1=\{\ell_1;m_1;n_1\}$ та $\vec{s}_2=\{\ell_2;m_2;n_2\}$ — компланарні (рис. 52).

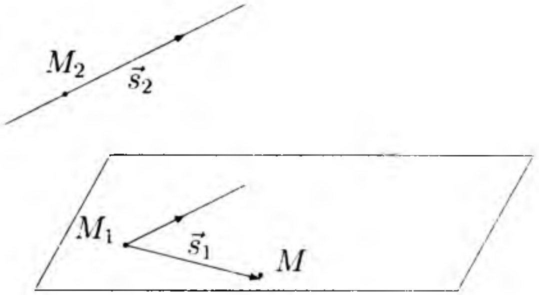


Рис. 52

Отже, мішаний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $(\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$. Виражаючи його через координати перемножуваних векторів, дістанемо рівняння шуканої площини в координатній формі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17.12)$$

• Приклад 17.9

Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-1}$ паралельно прямій $x = -2 - t$, $y = 1 + 3t$, $z = -2 + 4t$.

◄ Згідно з умовою задачі маємо: $x_1 = -1$, $y_1 = 0$, $z_1 = 2$, $\ell_1 = 2$, $m_1 = 3$, $n_1 = -1$, $\ell_2 = -1$, $m_2 = 3$, $n_2 = 4$. Тому, враховуючи (17.12), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad 15x - 7y + 9z - 3 = 0,$$

яке і є шуканим рівнянням площини. ►

8. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини

Нехай шукана площина проходить через пряму $\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ перпендикулярно до площини $Ax + By + Cz + D = 0$. Тоді вектори $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{s}$ та $\vec{n}$ — компланарні, тобто $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{s}, \vec{n}) = 0$, або

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \ell & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (17.13)$$

Останнє рівняння і є шуканим рівнянням площини.

• Приклад 17.10

Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{1}$ перпендикулярно до площини $3x+4y-z-1=0$.

◄ Використовуючи рівність (17.13), отримаємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad 8x - y + 20z - 8 = 0. \ ►$$

9. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі

Нехай площина проходить через дві паралельні прямі

$$\frac{x - x_1}{\ell} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}, \quad \frac{x - x_2}{\ell} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n}$$

і $M(x, y, z)$ — довільна точка площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ та $\vec{s} = \{\ell; m; n\}$ — компланарні. Отже, $(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}) = 0$. Виразимо останнє співвідношення через координати перемножуваних векторів:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (17.14)$$

і отримаємо рівняння шуканої площини.

• Приклад 17.11

Скласти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $x = 3 - 4t$, $y = 5 + 3t$, $z = -2 + 12t$ і $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{12}$.

◄ Перша пряма проходить через точку $M_1(3, 5, -2)$, а друга — через точку $M_2(1, 2, 0)$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-2; -3; 2\}$, $\overrightarrow{M_1M} = \{x - 3; y - 5; z + 2\}$ і $\vec{s} = \{-4; 3; 12\}$.

Відповідно до співвідношення (17.14) маємо

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z+2 \\ -2 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & 12 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad 21x - 8y + 9z - 5 = 0. \ \blacktriangleright$$

10. Рівняння площини, проведеної через дві прямі, що перетинаються

Задано дві прямі

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Треба скласти рівняння площини, яка проходить через ці дві прямі, коли відомо, що вони перетинаються.

Позначимо через $M(x, y, z)$ довільну точку шуканої площини. Очевидно, вектори $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\overrightarrow{M_1M}$ — компланарні (рис. 53).

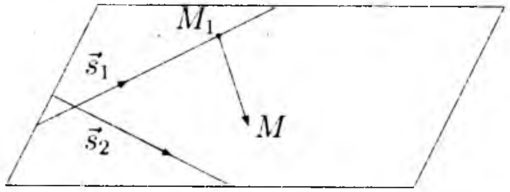


Рис. 53

Отже,

$$(\overrightarrow{M_1M}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0.$$

Виражаючи через координати перемножуваних векторів, дістанемо рівняння шуканої площини:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17.15)$$

- **Приклад 17.12**

Скласти рівняння площини, яка проходить через прямі $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ та $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

◀ Задані прямі проходять через точки $M_1(1, -2, 5)$ та $M_2(7, 2, 1)$, а їх напрямні вектори відповідно $\vec{s}_1 = \{2; -3; 4\}$ та $\vec{s}_2 = \{3; 2; -2\}$. Мішаний добуток векторів $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$ та $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

тобто виконується умова (16.11) перетину прямих.

Тоді відповідно до співвідношення (17.15) маємо

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$2x - 16y - 13z + 31 = 0,$$

яке є шуканим рівнянням площини. ▶

11. Рівняння перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму

Потрібно скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з даної точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на пряму $\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$.

Проведемо через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ площину перпендикулярно до заданої прямої, яка згідно з формулою (17.10) має вигляд

$$\ell_1(x-x_0) + m_1(y-y_0) + n_1(z-z_0) = 0.$$

Знайдемо точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перетину прямої $\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ з отриманою площиною $\ell_1(x-x_0) + m_1(y-y_0) + n_1(z-z_0) = 0$.

Тепер запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0} = \frac{y-y_0}{y_2-y_0} = \frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

Це і є шуканим рівнянням перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму.

• **Приклад 17.13**

Скласти рівняння висоти трикутника, опущеної з вершини $B(3,1,-3)$ на протилежну сторону AC, якщо $A(1,-2,-4)$ та $C(5,1,-7)$.

◄ Канонічні рівняння сторони AC, яка проходить через точки A і C, згідно з (16.3) мають вигляд

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z+4}{-7+4},\quad \text{або}\quad \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{-3}.$$

Через вершину B проведемо площину перпендикулярно до сторони AC трикутника, яка згідно з (17.10) має вигляд

$$4(x-3)+3(y-1)-3(z+3)=0,\quad \text{або}\quad 4x+3y-3z-24=0.$$

Знайдемо точку D перетину отриманих прямої і площини. Для цього потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4x+3y-3z-24=0, \\ x=1+4t,\ y=-2+3t,\ t=-4-3t, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{7}{17}, \\ x=\dfrac{45}{17}, \\ y=-\dfrac{13}{17}, \\ z=-\dfrac{89}{17}. \end{cases}$$

Одержана точка $\left(\dfrac{45}{17},-\dfrac{13}{17},-\dfrac{89}{17}\right)$ є основою перпендикуляра, опущеного з вершини B на сторону AC.

Тоді рівняння висоти BD:

$$\frac{x-3}{\frac{45}{17}-3}=\frac{y-1}{-\frac{13}{17}-1}=\frac{z+3}{-\frac{89}{17}+3},\quad \text{або}\quad \frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{15}=\frac{z+3}{19}.\quad ►$$

12. Відстань від точки до прямої

Задана пряма L

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

і точка $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Знайти відстань d точки M_1 від прямої L.

Шукана відстань d — це довжина висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}=\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\}$ і $\vec{s}=\{\ell;m;n\}$. Площа паралелограма дорівнює, з одного боку, $|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]|$, а з іншого — $|\vec{s}|\cdot d$ (рис. 54).

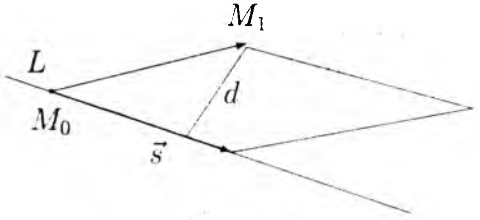


Рис. 54

Отже,

$$|\vec{s}|d=|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]|.$$

Звідси

$$d=\frac{|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]|}{|\vec{s}|},\tag{17.16}$$

або в координатній формі

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & \ell \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ \ell & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\ell^2+m^2+n^2}}.\tag{17.17}$$

• **Приклад 17.14**

Обчислити відстань від точки $M_1(1,-1,-2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-8}{-2}$.

◄ Відповідно до умови задачі маємо: $M_0(-3,-2,8)$, $\vec{s}=\{3;2;-2\}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}=\{4;1;-10\}$.

Тоді

$$[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=18\vec{i}-22\vec{j}+5\vec{k}.$$

$$|[\overrightarrow{M_0M_1},\vec{s}]|=\sqrt{324+484+25}=\sqrt{833}\quad \text{і}\quad |\vec{s}|=\sqrt{9+4+4}=\sqrt{17}.$$

Отже, шукана відстань

$$d = \frac{\sqrt{833}}{\sqrt{17}} = \sqrt{49} = 7. \quad \blacktriangleright$$

13. Відстань між паралельними прямими

Нехай задано дві паралельні прямі L_1 та L_2

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Потрібно обчислити відстань d між ними. Шукана відстань d — довжина висоти паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1\}$ і $\vec{s}_1 = \{\ell_1; m_1; n_1\}$ (або $\vec{s}_2 = \{\ell_2; m_2; n_2\}$) (рис. 55).

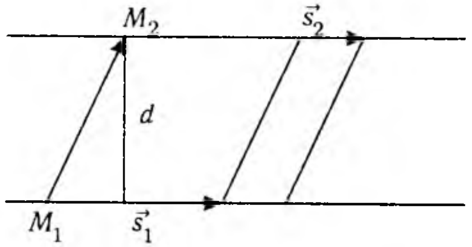


Рис. 55

Площа паралелограма дорівнює $|[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1]|$ (або $|[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_2]|$). Отже,

$$d = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1]|}{|\vec{s}_1|}, \quad \text{або} \quad d = \frac{|[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_2]|}{|\vec{s}_2|}. \qquad (17.18)$$

• **Приклад 17.15**

Обчислити відстань між двома паралельними прямими:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{і} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

◄ Згідно з умовою задачі маємо: $M_1(0,3,2)$, $M_2(3,-1,2)$ і $\vec{s} = \{1;2;1\}$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2} = \{3;-4;0\}$ і

$$[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}, \quad |[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}]| = \sqrt{125}, \; |\vec{s}| = \sqrt{6}.$$

Отже, відповідно до формули (17.18) шукана відстань

$$d = \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{30}. \quad \blacktriangleright$$

14. Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими

Нехай задано дві мимобіжні прямі L_1 та L_2:

$$\frac{x-x_1}{\ell_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, \quad \frac{x-x_2}{\ell_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

Визначити найкоротшу відстань між ними.

Найкоротша відстань між двома мимобіжними прямими дорівнює відстані між двома паралельними площинами, в яких лежать ці прямі. Отже, щоб розв'язати поставлену задачу, треба скласти рівняння площини Π, яка проходить через першу пряму паралельно другій, і визначити відстань точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ від цієї площини (рис. 56).

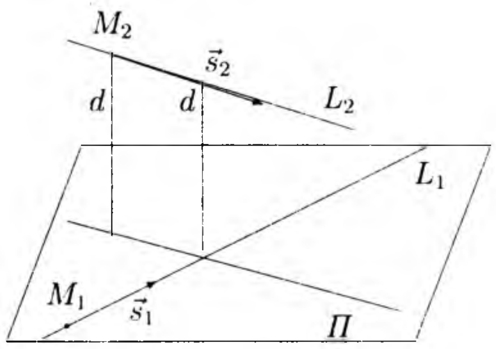


Рис. 56

Площина Π відповідно до формули (17.12) визначається рівнянням

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, шукана відстань визначається формулою:

$$d=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ \ell_1 & m_1 & n_1\\ \ell_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1\\ m_2 & n_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & \ell_1\\ n_2 & \ell_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} \ell_1 & m_1\\ \ell_2 & m_2\end{vmatrix}^2}}. \tag{17.19}$$

Інший спосіб. Вектори $\vec{s}_1=\{\ell_1;m_1;n_1\}$, $\vec{s}_2=\{\ell_2;m_2;n_2\}$ і $\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ — некомпланарні. Побудуємо на цих векторах, як на ребрах, паралелепіпед, основою якого є паралелограм, побудований на векторах $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$. Тоді відстань d дорівнює довжині висоти отриманого паралелепіпеда. Отже, щоб обчислити відстань d, потрібно об'єм паралелепіпеда $V=|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)|$ розділити на площу його основи $S=|[\vec{s}_1,\vec{s}_2]|$, тобто

$$d=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{s}_1,\vec{s}_2)|}{|[\vec{s}_1,\vec{s}_2]|}. \tag{17.20}$$

У координатній формі остання рівність має вигляд (17.19).

- **Приклад 17.16**

Знайти найкоротшу відстань d між двома прямими:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-9}{4}=\frac{z+2}{-3}\quad\text{та}\quad\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+7}{9}.$$

◄ Згідно з умовою задачі $M_1(0,9,-2)$, $M_2(2,0,-7)$, $\vec{s}_1=\{1;4;-3\}$, $\vec{s}_2=\{2;-2;9\}$. Тоді $\overrightarrow{M_1M_2}=\{2;-9;-5\}$ і

$$(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2})=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 9\\ 2 & -9 & -5\end{vmatrix}=245,$$

$$[\vec{s}_1,\vec{s}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 9\end{vmatrix}=30\vec{i}-15\vec{j}-10\vec{k},$$

$$|[\vec{s}_1,\vec{s}_2]|=\sqrt{900+225+100}=35.$$

Значить, шукана відстань між прямими відповідно до формули (17.20) дорівнює:

$$d=\frac{245}{35}=7. \quad ►$$

15. Знаходження точки, що симетрична даній точці відносно заданої площини або заданої прямої

Нехай потрібно знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ відносно заданої площини $Ax+By+Cz+D=0$.

Щоб розв'язати поставлену задачу, потрібно:

1) через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ провести пряму перпендикулярно до площини $Ax+By+Cz+D=0$, яка, згідно з (17.8) має вигляд

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C};$$

2) знайти точку P перетину отриманої прямої і заданої площини. Точка P — проекція точки M_0 на площину;

3) враховуючи, що точка P — середина відрізка $[M_0Q]$, тобто

$$\frac{x_Q+x_0}{2}=x_P,\quad \frac{y_Q+y_0}{2}=y_P,\quad \frac{z_Q+z_0}{2}=z_P, \tag{17.21}$$

то із співвідношення (17.21) знайдемо координати точки $Q(x_Q,y_Q,z_Q)$.

Якщо ж точка Q симетрична точці $M_0(x_0,y_0,z_0)$ відносно заданої прямої $\dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$, то:

1) через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ проведемо площину перпендикулярно прямій $\dfrac{x-x_1}{\ell_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$, яка згідно з (17.10) має вигляд

$$\ell_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0;$$

2) знайдемо точку P перетину площини і заданої прямої;

3) враховуючи, що точка P — середина відрізка $[MQ]$, із співвідношення (17.21) знайдемо координати шуканої точки Q.

- **Приклад 17.17**

Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(1,3,-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.

◄ Складемо параметричні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1, 3, -4)$ паралельно нормальному вектору площини $\vec{n} = \{3; 1; -2\}$. Маємо: $x = 1 + 3t$, $y = 3 + t$, $z = -4 - 2t$. Підставимо отримані значення x, y і z в рівняння площини:

$$3(1 + 3t) + 3 + t - 2(-4 - 2t) = 0,$$

звідси $t = -1$. Тоді, підставивши $t = -1$ в параметричні рівняння прямої, отримаємо точку $P(-2, 2, -2)$, яка є проекцією точки M_0 на площину. Координати симетричної їй точки Q знайдемо із співвідношення (17.21):

$$x_Q = -4 - 1 = -5, \quad y_Q = 4 - 3 = 1, \quad z_Q = -4 + 4 = 0.$$

Отже, $Q(-5, 1, 0)$. ►

• **Приклад 17.18**

Знайти точку Q, яка симетрична точці $M_0(2, -5, 7)$ відносно прямої $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2}$.

◄ Проведемо через точку M_0 площину перпендикулярно до заданої прямої, яка згідно з (17.10) має вигляд

$$1(x - 2) + 3(y + 5) + 2(z - 7) = 0 \quad \text{або} \quad x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0, \\ \dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-6}{2}, \end{cases}$$

отримаємо точку $P(3, -2, 2)$, яка є проекцією точки M_0 на пряму. Із співвідношення (17.21) знайдемо координати точки Q: $x_Q = 4$, $y_Q = 1$, $z_Q = -3$.

Отже, $Q(4, 1, -3)$. ►

§ 18. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Поверхнями другого порядку називають поверхні, які в декартовій системі координат зображаються алгебраїчними рівняннями другого степеня, тобто рівняннями вигляду

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz+$$

$$2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Це рівняння низивають **загальним рівнянням поверхні другого порядку**.

Обмежимось розглядом найпростіших (канонічних) рівнянь поверхонь другого порядку і з'ясуємо питання про їх форму.

1. Циліндри другого порядку

Циліндричною поверхнею, або просто **циліндром**, називається поверхня, утворена рухом прямої, яка перетинає задану криву і залишається паралельною сталому вектору.

Пряма, що своїм рухом утворює циліндр, називається його твірною, а крива, яку перетинають твірні — напрямною циліндра.

Циліндрами другого порядку називаються циліндричні поверхні, напрямними яких є лінії другого порядку.

Серед циліндричних поверхонь другого порядку розглянемо рівняння циліндрів з твірними, паралельними осі Oz. Їх рівняння, як вже було вказано раніше, не містять координати z.

Якщо за напрямну лінію в площині $z = 0$ взяти одну з кривих 2-го порядку

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{18.1}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{18.2}$$

$$y^2 = 2px, \tag{18.3}$$

то кожне з цих рівнянь, якщо їх віднести до просторової системи координат, зображатиме циліндр 2-го порядку з твірними, паралельними осі Oz.

Рівняння (18.1) буде зображати циліндр, перерізи якого площинами, перпендикулярними твірним (паралельними площині Oxy), будуть еліпси з півосями a і b; такий циліндр називається еліптичним (рис. 57). Рівняння (18.2) буде зображувати циліндр, у якому плоскі перерізи, що перпендикулярні твірним, будуть гіперболами; його називають гіперболічним циліндром (рис. 58). Нарешті, рівняння (18.3) зображає циліндр з перпендикулярними до твірних плоскими перерізами у вигляді парабол; такий циліндр будемо називати параболічним (рис. 59).

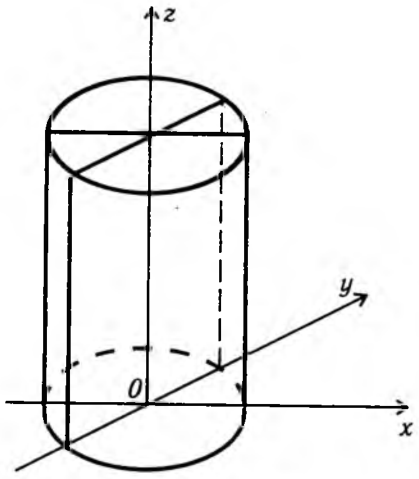


Рис. 57

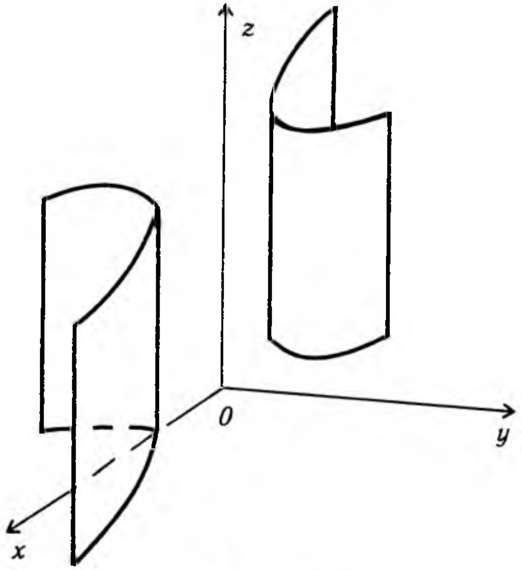


Рис. 58

2. Конус другого порядку

Конусом 2-го порядку називається поверхня, яка в прямокутній системі координат задається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (18.4)$$

Рівняння (18.4) називається **канонічним рівнянням конуса**.

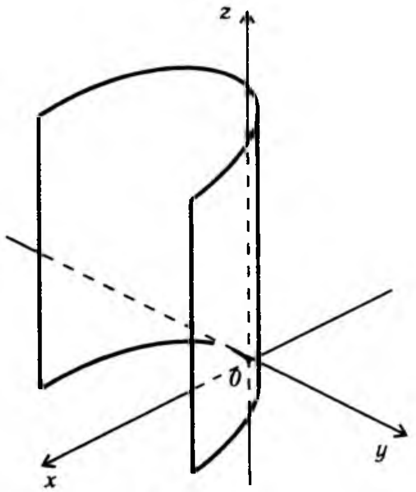


Рис. 59

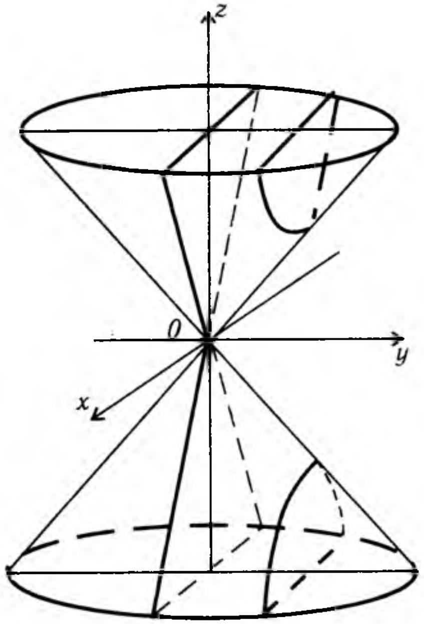


Рис. 60

Покажемо, що конус (18.4) утворюється прямими, які проходять через початок координат. Для цього досить довести, що пряма, яка з'єднує початок координат і довільну точку $M'(x', y', z')$ конуса, належить конусу. Справді, пряма, що проходить через точки O і M', визначається рівняннями

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = t.$$

Отже, координати довільної точки M прямої дорівнюють $x = x't$, $y = y't$, $z = z't$. Ясно, що вони задовольняють рівняння (18.4). Конус (18.4) зображено на рис. 60.

Розглянемо перетини конуса площинами, паралельними координатним площинам.

1) Перетин площиною $z = h$ зображається рівнянням

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\frac{h^2}{c^2}} + \dfrac{y^2}{b^2\frac{h^2}{c^2}} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Перше з цих рівнянь зображає еліптичний циліндр, друге площину, паралельну площині Oxy. Отже, перерізами конуса площинами $z = h$ є еліпси з півосями $a_1 = \frac{a|h|}{c}$, $b_1 = \frac{b|h|}{c}$.

Зауважимо, що еліпс, який отримуємо при перетині конуса площиною $z = 0$, вироджується в точку.

Не є складним і питання про лінії перетину конуса площинами $x = m$ чи $y = n$. Вони є гіперболами, які вироджуються в пару прямих, коли $m \to 0$ чи $n \to 0$.

3. Еліпсоїд

Еліпсоїдом називається поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{18.5}$$

де a, b, c — додатні числа, що називаються півосями еліпсоїда (будемо вважати, що $a \geq b \geq c$).

Рівняння (18.5) називається **канонічним рівнянням еліпсоїда**.

Дослідимо форму еліпсоїда за його канонічним рівнянням (18.5).

Насамперед зауважимо, що, оскільки в рівняння (18.5) входять лише квадрати координат, то, якщо точка з деякими координатами x, y, z належить еліпсоїду, то всі точки $(\pm x, \pm y, \pm z)$ також будуть належати йому. Це означає, що еліпсоїд є поверхнею, симетричною відносно всіх трьох координатних площин, осей, а також початку координат, які називаються відповідно площинами симетрії, осями симетрії і центром симетрії еліпсоїда.

Оскільки сума трьох додатних доданків лівої частини рівняння (18.5) дорівнює одиниці, то кожен з них (при дійсних значеннях координат) не може бути більшим від одиниці:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Звідси випливає, що координати точок еліпсоїда задовольняють нерівність

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b, \quad -c \leq z \leq c.$$

Отже, еліпсоїд – це скінченна поверхня, яка повністю лежить всередині паралелепіпеда, розміри якого відповідно дорівнюють $2a$, $2b$, $2c$.

Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$, $(0, 0, \pm c)$ належать еліпсоїду і називаються його вершинами. Отже, вершини еліпсоїда є точками перетину еліпсоїда з осями його симетрії.

Відстані $2a$, $2b$, $2c$ між вершинами, що лежать на одній осі симетрії, називаються осями еліпсоїда.

Щоб уявити собі форму еліпсоїда і зобразити його на рисунку, використаємо, як і для конуса, метод паралельних перетинів.

Розглянемо перетин еліпсоїда будь-якою горизонтальною площиною $z = h$. Лінія, яку отримаємо при даному перетині, визначається рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Звідси видно, що перетин є еліпсом з півосями

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b' = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Аналогічну картину дістанемо і при перетині еліпсоїда площинами, паралельними кожній із двох інших його площин симетрії (рис. 61).

Лінії перетину еліпсоїда (18.5) з координатними площинами $x = 0$, $y = 0$ та $z = 0$ називаються головними перетинами еліпсоїда. Еліпсоїд (18.5) зображено на рис. 61.

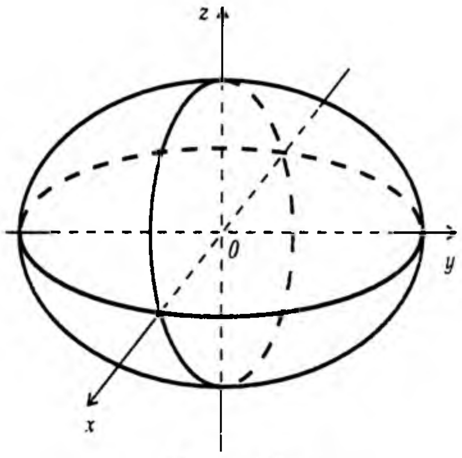


Рис. 61

4. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинний гіперболоїд — це поверхня, яка відносно деякої прямокутної декартової системи координат зображається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (18.6)$$

де $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ — числові параметри.

Рівняння (18.6) називається **канонічним рівнянням однопорожнинного гіперболоїда**.

Ця поверхня розміщена симетрично відносно початку координат, координатні площини є його площинами симетрії, а осі координат — його осями симетрії.

Перетини гіперболоїда площинами $z = h$ є еліпсами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$$

з півосями $a^* = a\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$, $b^* = b\sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$.

Перетини площинами $y = n$ і $x = m$ є відповідно гіперболами

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(a')^2} - \dfrac{z^2}{(b')^2} = 1, \\ y = n, \;\; n \neq \pm b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{(b'')^2} - \dfrac{z^2}{(c'')^2} = 1, \\ x = m, \;\; m \neq \pm a, \end{cases}$$

де

$$a' = a\sqrt{1 - \frac{n^2}{b^2}}; \quad b' = c\sqrt{1 - \frac{n^2}{b^2}};$$

$$b'' = b\sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2}}; \quad c'' = c\sqrt{1 - \frac{m^2}{a^2}},$$

якщо $|n| < b$ та $|m < a|$.

Перетин поверхні (18.6) площиною $y = b$ визначається рівняннями

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0, \\ y = b, \end{cases}$$

які зображають дві прямі

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = b \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = b. \end{cases}$$

Подібно дві прямі отримаємо при перетині гіперболоїда площиною $x = a$ (рис. 62).

Знайти перетини гіперболоїда площинами $y = n$ і $x = m$, де $|n| > b$ та $|m| > a$.

Точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ називають вершинами однопорожнинного гіперболоїда. Однопорожнинний гіперболоїд (18.6) зображено на рис. 62.

5. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називається поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (18.7)$$

Рівняння (18.7) називається **канонічним рівнянням двопорожнинного гіперболоїда**.

Ця поверхня розміщена симетрично відносно початку координат і координатні площини є його площинами симетрії.

Розглянемо її перетини площинами, паралельними координатним площинам.

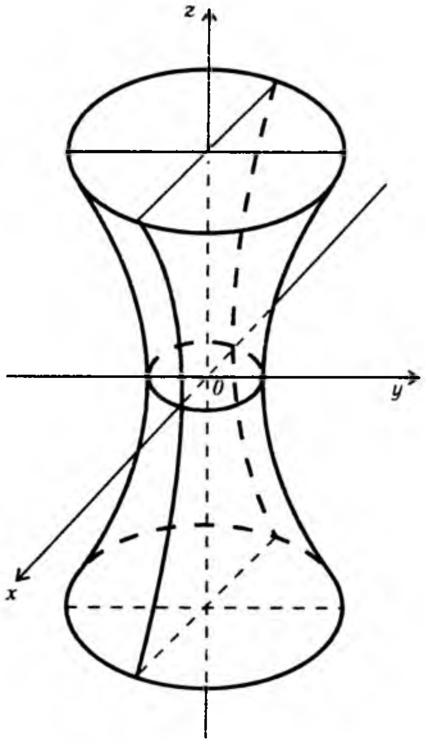


Рис. 62

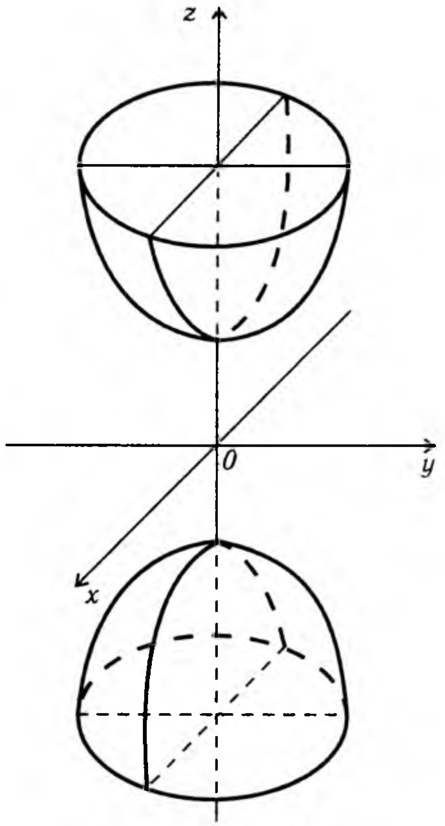


Рис. 63

Площина $z = h$ перетинає поверхню (18.7) лише тоді, коли $|h| \geq c$, тобто двопорожнинний гіперболоїд — необмежена поверхня, яка складається з двох частин.

Лінії перерізу площинами $z = h$, $|h| \geq c$ — це еліпси

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1, \\ z = h. \end{cases} \qquad (18.8)$$

Якщо $h = \pm c$, то еліпси вироджуються в точки $(0, 0, \pm c)$, які називають вершинами двопорожнинного гіперболоїда.

Перетини площинами $x = m$ чи $y = n$ є гіперболи. Двопорожнинний гіперболоїд (18.8) зображено на рис. 63.

---

6. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називається поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0. \qquad (18.9)$$

Рівняння (18.9) називається **канонічним рівнянням еліптичного параболоїда**.

Координатні площини Oxy та Oyz є площинами симетрії поверхні. Якщо $z < 0$, рівняння (18.9) не може задовольнятись при жодних дійсних значеннях x і y. Отже, вся поверхня розташована над площиною Oxy.

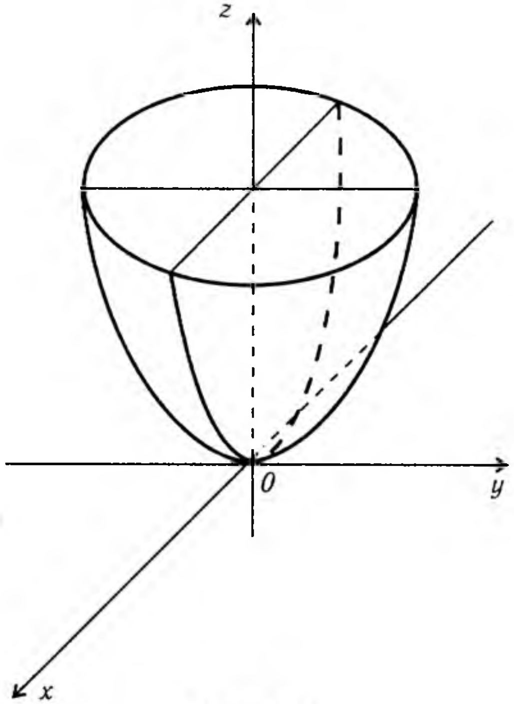


Рис. 64

Площина $z = 0$ має з поверхнею одну спільну точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — вершину параболоїда.

Площина $z = h$, $h > 0$ перетинає поверхню по еліпсу

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \\ z = h \end{cases}$$

півосі якого

$$a' = \sqrt{2ph}, \quad b' = \sqrt{2qh}.$$

Якщо візьмемо перетин площиною $x = m$, то дістанемо параболу:

$$\begin{cases} y^2 = 2q\left(z - \dfrac{m^2}{2p}\right), \\ x = m. \end{cases}$$

Подібно перетин поверхні площиною $y = n$ буде параболою

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{n^2}{2q}\right), \\ y = n. \end{cases}$$

Еліптичний параболоїд (18.9) зображено на рис. 64.

7. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називається поверхня, яка в декартовій прямокутній системі координат визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0. \tag{18.10}$$

Рівняння (18.10) називається **канонічним рівнянням гіперболічного параболоїда**.

Як бачимо з рівняння (18.10), поверхня симетрична відносно площин Oxz та Oyz.

Площина $z = 0$ перетинає поверхню по лінії

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, \quad z = 0$$

або

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0, \quad z = 0,$$

тобто по двох прямих (рис. 65).

$$\begin{cases} y = \pm\sqrt{\dfrac{q}{p}}x, \\ z = 0. \end{cases} \tag{18.11}$$

Площина $z = h$ перетинає поверхню по гіперболі

$$\frac{x^2}{2ph} - \frac{y^2}{2qh} = 1, \quad z = h, \quad h \neq 0. \tag{18.12}$$

Якщо $h > 0$, дійсною віссю цієї гіперболи буде паралель осі Ox; якщо $h < 0$, дійсною віссю буде паралель осі Oy.

Розглянемо тепер перерізи поверхні площинами $y = n$. Вони будуть зображатися рівняннями

$$x^2 = 2p\left(z + \frac{n^2}{2q}\right), \quad y = n,$$

які визначають параболи з параметром p.

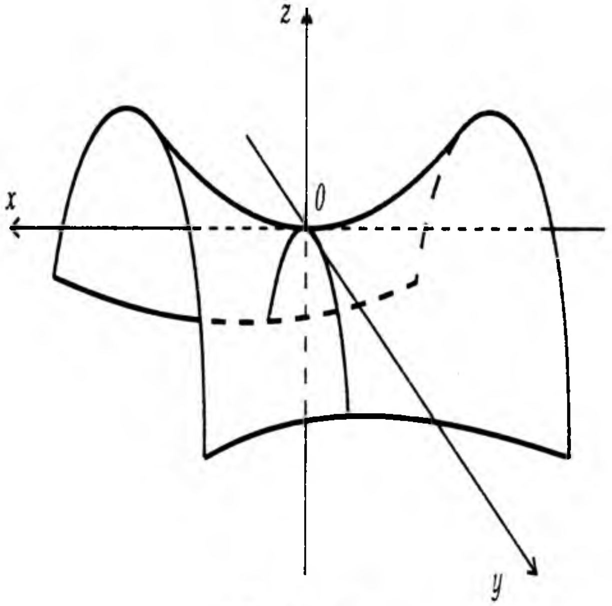


Рис. 65

Якщо поверхню перетинати площинами $x = m$, то в перерізі отримаємо параболи

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{m^2}{2p}\right), \quad x = m.$$

Гіперболічний параболоїд (18.9) зображено на рис. 65.

8. Поверхні обертання

Нехай в площині Oyz задана лінія L, рівняння якої має вигляд

$$\begin{cases} F(y,z) = 0, \\ x = 0. \end{cases} \tag{18.13}$$

Знайдемо рівняння поверхні σ, яка отримується при обертанні цієї лінії навколо осі Oy (рис. 66)

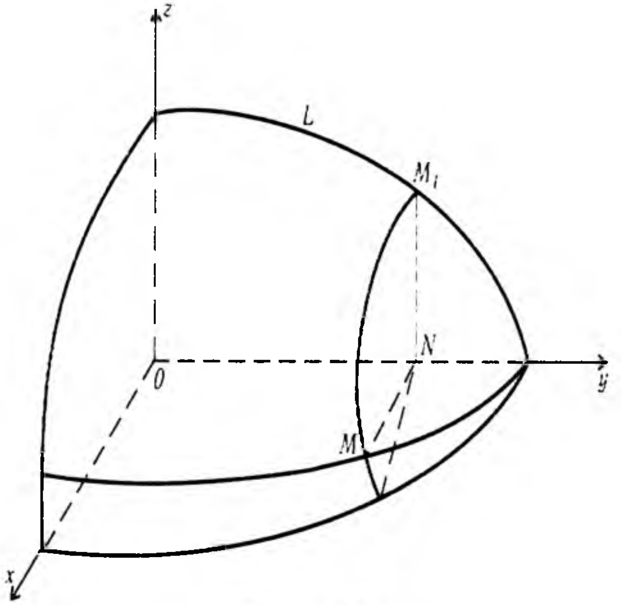


Рис. 66

Візьмемо довільну точку $M(X,Y,Z)$, яка лежить на поверхні σ і проведемо через неї площину перпендикулярно до осі обертання Oy. У перетині маємо коло, центр якого лежить в точці N на осі обертання. Координати точки $N(0,Y,0)$. Радіус кола $|MN|$ як відстань між двома точками M і N дорівнює $\sqrt{X^2+Z^2}$. З іншого боку, цей радіус є абсолютним значенням аплікати точки M_1 заданої лінії L, а ордината цієї точки дорівнює Y. Отже, прийнявши в рівнянні (18.13)

$$y = Y, \quad z = \pm\sqrt{X^2+Z^2},$$

ми отримаємо шукане рівняння поверхні обертання σ:

$$F(Y, \pm\sqrt{X^2+Z^2}) = 0. \tag{18.14}$$

Отже, маємо правило для одержання рівняння поверхні обертання:

Для того щоб отримати рівняння поверхні, утвореної обертанням лінії L, що лежить в площині Oyz, навколо осі Oy, потрібно в рівнянні цієї лінії замінити z на $\pm\sqrt{x^2+z^2}$, а y залишити без зміни.

Аналогічні правила справедливі і щодо поверхонь, які отримуються обертанням плоских ліній навколо інших координатних осей.

- **Приклад 18.1**

Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить в площині Oxz, навколо осі Ox.

◀ Оскільки еліпс обертається навколо осі Ox, то в його рівнянні x залишаємо незмінним, а z заміняємо на $\pm\sqrt{y^2+z^2}$. Тоді рівняння шуканої поверхні має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1.$$

Ця поверхня називається **еліпсоїдом обертання**. Зокрема, якщо $a = c$, то отримаємо сферу. ▶

- **Приклад 18.2**

Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням гіперболи $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, навколо: а) осі Ox, б) осі Oz.

◄ Згідно з правилом рівняння поверхні обертання має вигляд а) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2+z^2}{c^2} = 1$; б) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.
Це — а) **двопорожнинний гіперболоїд обертання**, б) **однопорожнинний гіперболоїд обертання**. ►

• **Приклад 18.3**

Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням параболи $\begin{cases} y^2 = 2pz, \\ x = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

◄ Шукане рівняння має вигляд

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Це — параболоїд обертання. ►

• **Приклад 18.4**

Скласти рівняння поверхні, яка утворена обертанням прямої $\begin{cases} y = x, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Oy.

◄ Шукане рівняння має вигляд

$$y = \pm\sqrt{x^2+z^2}, \quad \text{або} \quad x^2 + z^2 - y^2 = 0,$$

тобто поверхнею обертання є конус. ►

РОЗДІЛ 6

Елементи теорії лінійних просторів

§ 19. ЛІНІЙНИЙ ТА ЕВКЛІДОВИЙ ПРОСТОРИ

1. Означення лінійного простору. Властивості лінійного простору

Розглянемо об'єкти, над якими виконуються дії додавання і множення на числа, тобто так звані лінійні операції.

Об'єктами такого роду є, наприклад, вектори, тобто напрямлені відрізки на площині і в просторі, многочлени степеня $\leq n$, матриці, оскільки для кожного з них були встановлені операції їх додавання і множення на число.

Залежно від природи об'єктів, які розглядаються, ці операції визначаються по-різному, але вони мають деякі істотні властивості, які зберігаються у всіх випадках (комутативність і асоціативність додавання, дистрибутивність відносно множення на число тощо).

Якщо тепер залишити осторонь природу об'єктів і ввести аксіоматично зазначені дві операції, то можна побудувати загальну теорію, результати якої можна застосовувати в кожному конкретному випадку. Основним поняттям такої теорії є поняття лінійного простору.

Означення 6.1 *Множина L елементів* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \ldots$ *будь-якої природи називається лінійним простором, якщо:*

1) у множині L введена операція додавання, яка кожній парі $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *елементів із L ставить у відповідність однозначно визначений елемент* $\mathbf{z}$ *із L. Цей елемент називають сумою елементів* $\mathbf{x}$ *і* $\mathbf{y}$ *і позначають* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$;

2) визначена операція множення елементів із L на число, яка кожному елементу $\mathbf{x} \in L$ і кожному числу α ставить у відповідність однозначно визначений елемент $\mathbf{y} \in L$, що називається їх добутком і позначається $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$;

3) для будь-яких елементів $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ і будь-яких чисел α і β операції додавання і множення на число задовольняють такі аксіоми:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$;

3. існує нульовий елемент $\mathbf{0}$ *такий, що* $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;

4. для кожного елемента $\mathbf{x} \in L$ *існує протилежний елемент* $-\mathbf{x}$ *такий, що* $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$;

5. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$;

6. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;

7. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;

8. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Зауважимо, що елементи лінійного простору прийнято називати **векторами**, а сам простір — **векторним простором**.

Простір L називається **дійсним**, якщо в L операція множення вектора на число визначена тільки для дійсних чисел, і **комплексним**, якщо ця операція поширюється і на комплексні числа. Далі будемо розглядати тільки дійсний лінійний простір L.

Властивості лінійного простору

- **Властивість 1.** У довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент $\mathbf{0}$ і для кожного елемента $\mathbf{x}$ існує єдиний протилежний елемент $-\mathbf{x}$.

Дійсно, згідно з аксіомою 3 існує нульовий елемент $\mathbf{0}$ такий, що $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$. Припустимо, що існують два нульові елементи $\mathbf{0}_1$ і $\mathbf{0}_2$. Тоді $\mathbf{x} + \mathbf{0}_1 = \mathbf{x}$ для будь-якого $\mathbf{x} \in L$. Приймемо $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$. Тоді $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2 \Longrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}_1$. Аналогічно, якщо $\mathbf{x} = \mathbf{0}_1$, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$ отримаємо $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1 \Longrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{0}_2$, тобто $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$.

Існування для кожного елемента $\mathbf{x}$ хоча б одного протилежного елемента випливає з аксіоми 4. Припустимо, що елемент $\mathbf{x}$ має два протилежні елементи $-\mathbf{x}_1$ і $-\mathbf{x}_2$: $\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$. Згідно з аксіомою 3

$$(-\mathbf{x}_1) = (-\mathbf{x}_1) + \mathbf{0} = (-\mathbf{x}_1) + (\mathbf{x} + (-\mathbf{x}_2)) =$$

$$= ((-\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}) + (-\mathbf{x}_2) = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}_2) = (-\mathbf{x}_2),$$

тобто $(-\mathbf{x}_1) = (-\mathbf{x}_2)$.

- **Властивість 2.** Для довільного лінійного простору нульовий елемент $\mathbf{0}$ дорівнює добуткові елемента $\mathbf{x}$ на дійсне число 0, тобто $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$, а протилежний елемент $-\mathbf{x}$ дорівнює добуткові елемента $\mathbf{x}$ на -1, тобто $-\mathbf{x} = (-1) \cdot \mathbf{x}$.

Справді,

$$\mathbf{x} \cdot 0 = \mathbf{x} \cdot 0 + \mathbf{0} = \mathbf{x} \cdot 0 + (\mathbf{x} + (-\mathbf{x})) = (\mathbf{x} \cdot 0 + \mathbf{x}) + (-\mathbf{x}) =$$

$$= (\mathbf{x} \cdot 0 + \mathbf{x} \cdot 1) + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x}(0 + 1) + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Отже, маємо

$$\mathbf{x} \cdot 0 = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Покажемо тепер, що $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Нехай $\mathbf{y} = (-1) \cdot \mathbf{x}$. Тоді $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1 - 1)\mathbf{x} = 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, тобто $\mathbf{y} = (-1) \cdot \mathbf{x}$ є протилежним елементом до $\mathbf{x}$.

Приклади лінійних просторів:

1. Множина дійсних чисел.
2. Множина векторів (тобто напрямлених відрізків) на площині чи в просторі.
3. Множина $M_{m,n}$ матриць розміру $m \times n$.
4. Множина $C_{[a,b]}$ всіх функцій $f(x)$, які неперервні на відрізку $[a, b]$.
5. Множина P_n многочленів $P_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i t^{n-i}$ степеня $\leq n$.

- **Приклад 19.1**

Нехай $\tilde{R}_2$ — множина всіх впорядкованих пар дійсних чисел $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ з операціями додавання:

а) якщо $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2)$ і $\mathbf{y} = (\beta_1, \beta_2)$, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2);$$

та множення на число λ:

б) $\forall \lambda \in \mathbf{R}$: $\lambda \mathbf{x} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2)$.

Чи буде $\widetilde{R}_2$ лінійним простором ?

◄ Покажемо, що введені операції додавання і множення на дійсне число задовольняють аксіоми 1-8. Маємо:

$$\mathbf{y} + \mathbf{x} = (\beta_1 + \alpha_1, \beta_2 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) = \mathbf{x} + \mathbf{y};$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) + (\gamma_1, \gamma_2) =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1, \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) = (\alpha_1 + (\beta_1 + \gamma_1), \alpha_2 + (\beta_2 + \gamma_2)) =$$

$$= \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

існує $\mathbf{0} = (0, 0)$ такий, що $\mathbf{x} + \mathbf{0} = (\alpha_1, \alpha_2) + (0, 0) = (\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{x}$; існує протилежний елемент $-\mathbf{x} = (-\alpha_1, -\alpha_2)$, що

$$\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (\alpha_1, \alpha_2) + (-\alpha_1, -\alpha_2) = (0, 0) = \mathbf{0};$$

$$1 \cdot \mathbf{x} = 1(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{x};$$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = \lambda(\mu\alpha_1, \mu\alpha_2) = (\lambda\mu\alpha_1, \lambda\mu\alpha_2) = \lambda\mu(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda((\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2)) = \lambda(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2) =$$

$$= (\lambda\alpha_1 + \lambda\beta_1, \lambda\alpha_2 + \lambda\beta_2) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \lambda(\beta_1, \beta_2) = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y});$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)(\alpha_1, \alpha_2) = ((\lambda + \mu)\alpha_1, (\lambda + \mu)\alpha_2) =$$

$$= (\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_1, \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_2) = \lambda(\alpha_1, \alpha_2) + \mu(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}. \quad ►$$

2. Лінійний підпростір

Означення 6.2 *Підмножина L' лінійного простору L називається лінійним підпростором простору L, якщо вона є лінійним простором відносно операцій, введених в L.*

Щоб підмножина L' лінійного простору була лінійним підпростором, повинні виконуватись такі умови:

1°. Якщо $\mathbf{x} \in L'$, $\mathbf{y} \in L'$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in L'$;

2°. Якщо $\mathbf{x} \in L'$ і $\alpha \in \mathbf{R}$ — довільне число, то $\alpha\mathbf{x} \in L'$.

Інакше кажучи, операції, введені в L, застосовані до елементів L', не повинні виходити за межі цієї підмножини.

Покажемо, що **підмножина L', елементи якої задовольняють умовам 1°-2°, є лінійним простором.** Для цього потрібно переконатись, що аксіоми 1-8 мають місце в L'. Усі аксіоми, крім 3 і 4, справджуються для елементів підмножини L', бо вони справедливі для всіх елементів простору L. Тому залишається перевірити виконання аксіом 3 і 4. Нехай $\mathbf{x}$ — довільний елемент підмножини L', λ — довільне дійсне число. Тоді, згідно з умовою 2: $\lambda\mathbf{x} \in L'$. Оскільки λ — довільне, то, прийнявши $\lambda = 0$, маємо $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \in L'$, а при $\lambda = -1$ отримаємо, що $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in L'$, тобто нульовий елемент $\mathbf{0}$ і протилежний елемент $-\mathbf{x}$ належать L', а тому множина L' є лінійним простором.

Приклади.

1. Множина, яка складається лише з нульового елемента $\mathbf{0}$, є лінійним підпростором довільного лінійного простору L.

2. Множина компланарних чи колінеарних векторів щодо множини всіх звичайних векторів є лінійним підпростором.

3. Базис та вимірність лінійного простору. n-вимірний арифметичний простір

У розділі 2 (§5, п. 1) було введено поняття лінійної залежності вектор-стовпців, а в розділі 3 (§6, п. 4) — поняття лінійної залежності векторів.

Узагальненням цих понять є поняття лінійної залежності елементів довільного лінійного простору.

Означення 6.3 *Система елементів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, які належать лінійному просторові L, називається лінійно незалежною, якщо рівність*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0} \qquad (19.1)$$

справджується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_i = 0$ $(i = \overline{1, n})$, *або* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 0.$

У протилежному випадку система елементів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ називається лінійно залежною.

Розглянемо деякі найпростіші властивості лінійно залежних і лінійно незалежних елементів.

1. Будь-яка система елементів, яка містить нульовий елемент, є лінійно залежною.

Справді, нехай $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$, тоді, приймаючи $\lambda_1{=}1, \lambda_2{=}0, \ldots, \lambda_n{=}0$ отримаємо

$$1 \cdot \mathbf{0} + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

2. Якщо система елементів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно залежна, то хоча б один з елементів цієї системи є лінійною комбінацією інших.

Справді, оскільки задана система елементів лінійно залежна, то можна підібрати такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що буде справджуватись рівність

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \qquad (19.2)$$

Нехай для простоти доведення $\lambda_1 \neq 0$. Тоді рівність (19.2) можна розв'язати відносно $\mathbf{x}_1$.

Маємо:

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\mathbf{x}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\mathbf{x}_3 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\mathbf{x}_n,$$

а це означає, що елемент $\mathbf{x}_1$ є лінійною комбінацією інших елементів системи, що й треба було довести.

Справедливе й обернене твердження: *якщо один із елементів системи* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ *є лінійною комбінацією інших, то ця система елементів лінійно залежна.*

Справді, для простоти запису вважатимемо елемент $\mathbf{x}_1$ лінійною комбінацією інших елементів:

$$\mathbf{x}_1 = \mu_2 \mathbf{x}_2 + \mu_3 \mathbf{x}_3 + \cdots + \mu_n \mathbf{x}_n.$$

Тоді отримаємо

$$\mathbf{x}_1 - \mu_2 \mathbf{x}_2 - \mu_3 \mathbf{x}_3 - \cdots - \mu_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0},$$

тобто рівність вигляду (19.2). Оскільки серед коефіцієнтів

$$1, -\mu_2, -\mu_3, \ldots, -\mu_n$$

є одиниця, то не всі вони дорівнюють нулю, і тому система елементів лінійно залежна, що й треба було довести.

Отже, система елементів лінійно залежна тоді і тільки тоді, коли хоча б один із елементів системи можна подати у вигляді лінійної комбінації інших елементів.

Вимірність лінійного простору

Означення 6.4 *Якщо в лінійному просторі* $\mathbf{L}$ *існує* n *лінійно незалежних елементів, а будь-які* $n+1$ *елементів цього простору лінійно залежні, то лінійний простір називається* n*-вимірним. Число* n *називається вимірністю лінійного простору.*

Іншими словами, вимірність лінійного простору — це максимальна кількість лінійно незалежних елементів у цьому просторі. Якщо їх безліч, то простір називається **нескінченновимірним**.

Простір, який містить лише один нульовий елемент, вважається **нуль-вимірним**.

n-вимірний лінійний простір $\mathbf{L}$ надалі будемо позначати символом $\mathbf{L_n}$.

Базис лінійного простору

Означення 6.5 *Базисом лінійного* n*-вимірного простору називається будь-яка впорядкована (пронумерована) система із* n *лінійно незалежних елементів* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, *якщо для кожного елемента* $\mathbf{x} \in \mathbf{L_n}$ *існують такі числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *що*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{x}_i. \qquad (19.3)$$

Рівність (19.3) називається **розкладом елемента $\mathbf{x}$ за базисом** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ називаються **координатами** елемента $\mathbf{x} \in \mathbf{L_n}$ відносно базису $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Кожен елемент $\mathbf{x}$ лінійного простору $\mathbf{L_n}$ може бути розкладений за базисом $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ єдиним способом, тобто координати кожного елемента $\mathbf{x}$ відносно базису $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ визначаються однозначно.

Припустимо, що існує інший розклад, тобто

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \mathbf{x}_i. \qquad (19.4)$$

Віднімемо почленно (19.4) від (19.3):

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') \mathbf{x}_i.$$

Оскільки елементи $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні, то остання рівність можлива лише за умови, що

$$\alpha_1 - \alpha_1' = 0, \alpha_2 - \alpha_2' = 0, \ldots, \alpha_n - \alpha_n' = 0,$$

тобто,

$$\alpha_1 = \alpha_1', \alpha_2 = \alpha_2', \ldots, \alpha_n = \alpha_n',$$

що й доводить єдиність розкладу (19.3).

Отже, якщо в n-вимірному просторі задати деякий базис, то, користуючись розкладом (19.3), можна встановити взаємооднозначну відповідність між елементами цього простору і впорядкованими послідовностями із n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Числа $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ називаються **координатами** елемента $\mathbf{x}$ в базисі $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. У цьому випадку $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Очевидно, якщо в просторі вибрати інший базис, то цей самий елемент $\mathbf{x}$ буде мати інші координати.

n-вимірний арифметичний простір

Будь-яка впорядкована сукупність із n дійсних (комплексних) чисел називається дійсним (комплексним) **арифметичним вектором** і позначається символом $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називаються **компонентами** арифметичного вектора $\mathbf{x}$.

Над арифметичними векторами виконуються такі операції:

Додавання: якщо $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \qquad (19.5)$$

Множення на число: якщо λ — число (дійсне чи комплексне) і $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n). \qquad (19.6)$$

Множина всіх дійсних (комплексних) арифметичних векторів із введеними операціями додавання (19.5) і множення на число (19.6) називається **n-вимірним дійсним (комплексним) арифметичним простором**.

Позначається n-вимірний дійсний (комплексний) арифметичний простір символом R^n (C^n).

Якщо за базис в R^n взяти систему векторів

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1), \end{aligned} \qquad (19.7)$$

то такий базис називається **канонічним**.

Якщо зафіксувати в R^n довільний базис $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то кожному вектору $\mathbf{x}$ (згідно з 19.3) відповідають його координати в цьому базисі.

Зауваження. Необхідно розрізняти компоненти вектора і його координати в деякому базисі, і пам'ятати, що координати вектора співпадають з його компонентами тільки в канонічному базисі.

- **Приклад 19.2**

Чи є лінійно залежною система векторів $\mathbf{x}_1 = (2; 0; 1)$, $\mathbf{x}_2 = (1; -1; 2)$ і $\mathbf{x}_3 = (3; 1; 1)$?

◀ Складемо лінійну комбінацію заданих векторів і прирівняємо її до нульового вектора:

$$\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}.$$

У координатній формі останнє співвідношення набуває вигляду:

$$\alpha_1(2; 0; 1) + \alpha_2(1; -1; 2) + \alpha_3(3; 1; 1) = (0; 0; 0).$$

Для знаходження α_1, α_2 і α_3 отримаємо однорідну лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0, \\ 0 \cdot \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, а тому вектори $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ і $\mathbf{x}_3$ (згідно з означенням 6.3) є лінійно незалежними. ▶

- **Приклад 19.3**

Показати, що вектори $\mathbf{e}_1 = (1; 3; 5)$, $\mathbf{e}_2 = (0; 4; 5)$ та $\mathbf{e}_3 = (7; -8; 4)$ утворюють базис та знайти розклад вектора $\mathbf{x} = (2; -1; 3)$ за цим базисом.

◀ Покажемо, що вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$ — лінійно незалежні.

Справді, нехай $\alpha_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \alpha_3 \cdot \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$. Тоді для знаходження α_1, α_2 і α_3 отримаємо однорідну лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + 7\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 - 8\alpha_3 = 0, \\ 5\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Визначник системи $\Delta = 21 \neq 0$. Отже, система має єдиний розв'язок $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тобто вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$ —

лінійно незалежні і утворюють базис. Тоді, згідно з (6.3), $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + x_2 \cdot \mathbf{e}_2 + x_3 \cdot \mathbf{e}_3$, тобто

$$(2; -1; 3) = x_1(1; 3; 5) + x_2(0; 4; 5) + x_3(7; -8; 4),$$

або

$$\begin{cases} x_1 + 7x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи $x_1 = -\dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$, $x_3 = \dfrac{1}{3}$. Отже, $\mathbf{x} = -\dfrac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \dfrac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \dfrac{1}{3}\mathbf{e}_3$. Числа $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$ — координати вектора $\mathbf{x}$ у базисі $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. ▶

4. Евклідовий простір: означення, основні поняття

Ми визначили лінійний простір як множину елементів із заданими в ній операціями додавання і множення на числа.

Але в одних лише термінах додавання і множення на число ми не можемо дати визначення довжини вектора, кута між векторами, скалярного добутку векторів тощо.

Щоб ввести ці поняття, вважатимемо базовим поняття скалярного добутку, яке визначимо аксіоматично.

Означення 6.6 *Кажуть, що в лінійному просторі L введено скалярний добуток, якщо кожній парі елементів (векторів) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ поставлено у відповідність єдине дійсне число $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (яке називається скалярним добутком елементів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$), причому для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in L$ і будь-якого дійсного числа λ задовольняються такі вимоги (аксіоми):*

1. $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$;
2. $(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}, \mathbf{z})$;
4. $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, *причому* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *лише тоді, коли* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Означення 6.7 *Лінійний простір, в якому введено скалярний добуток, називається евклідовим простором.*

Евклідовий простір будемо позначати буквою E.

Наприклад, у просторі R^3 був визначений скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Він задовольняв умови 1-4 і залежав від вибору масштабної одиниці. Отже, якщо одиниця вимірювання довжини вибрана, то векторний простір R^3 утворює тривимірний евклідовий простір.

Означення 6.8 *Нормою, або довжиною елемента (вектора)* $\mathbf{x}$ *евклідового простору* E *називається невід'ємне число*

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}. \tag{19.8}$$

Якщо норма вектора дорівнює одиниці, то вектор називається нормованим (звичайний вектор в цьому випадку називається одиничним).

З означення норми і властивості 2 скалярного добутку випливає, що

$$||\lambda\mathbf{x}|| = \sqrt{(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})} = \sqrt{\lambda^2(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\lambda|\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = |\lambda|||\mathbf{x}||.$$

З останньої рівності, зокрема, отримуємо

$$||\mathbf{0}|| = 0,$$

а також, що для кожного вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ можна дістати нормований, якщо розділити його на норму:

$$\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||}. \tag{19.9}$$

Така операція називається нормуванням вектора.

5. Нерівності Коші-Буняковського і трикутника

Для елементів $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ довільного евклідового простору справедлива нерівність

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}), \tag{19.10}$$

відома під назвою **нерівності Коші-Буняковського**.

Для доведення цієї нерівності розглянемо вектор $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}$, де $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $\lambda \in R$. Тоді згідно з властивістю 4 скалярного добутку маємо

$$(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}) \geq 0.$$

Застосувавши до лівої частини останнього співвідношення властивості 1-3 скалярного добутку, для кожного λ отримаємо:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - 2\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \lambda^2(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \geq 0.$$

Останнє співвідношення є квадратним тричленом відносно λ. Оскільки цей тричлен для всіх λ набирає невід'ємні значення, то його дискримінант недодатний

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 - (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leq 0,$$

тобто

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 \leq (\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Нерівність Коші-Буняковского можна записати і в такому вигляді

$$||(\mathbf{x}, \mathbf{y})|| \leq ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||, \tag{19.11}$$

тобто норма скалярного добутку не перевищує добутку норм перемножуваних векторів.

Справді, оскільки ліва і права частини нерівності (19.10) невід'ємні, отримаємо

$$\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2} \leq \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})(\mathbf{y}, \mathbf{y})},$$

тобто

$$||(\mathbf{x}, \mathbf{y})|| \leq ||\mathbf{x}||||\mathbf{y}||.$$

Нерівність трикутника. Використовуючи нерівність (19.10), легко довести нерівність трикутника

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||.$$

Дійсно,

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||^2 \leq$$

$$\le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2.$$

Отже,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \qquad (19.12)$$

Це і є нерівність трикутника (для звичайних векторів $\|\mathbf{x}\|$, $\|\mathbf{y}\|$, $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ — довжини сторін трикутника).

6. Кут між векторами евклідового простору. Ортогональність векторів

За аналогією з векторною алгеброю введемо поняття кута між двома векторами евклідового простору.

Означення 6.9 *Кутом φ між векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (відмінними від нульового) називається такий кут $(0 \le \varphi \le \pi)$, косинус якого визначається співвідношенням*

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}. \qquad (19.13)$$

Формула (19.13) має сенс, тому що згідно з нерівністю (19.10)

$$\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2}{\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2} \le 1.$$

Звідси

$$-1 \le \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \le 1.$$

Ортогональність векторів. Вектори $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ називаються ортогональними, якщо $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Система векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ називається ортогональною, якщо вони попарно ортогональні і жоден з них не дорівнює нульовому векторові.

Очевидно, нульовий вектор $\mathbf{0}$ ортогональний до будь-якого вектора простору:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = (0 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Ортогональна система векторів завжди є системою лінійно незалежних векторів.

Справді, якщо припустити, що ортогональна система векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно залежна, тобто

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}, \qquad (19.14)$$

де принаймні одне з чисел α_i (скажімо, α_1) відмінне від нуля, то домножуючи скалярно обидві частини рівності (19.14) на $\mathbf{x}_1$, отримаємо

$$\alpha_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) + \alpha_2(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) = 0.$$

На підставі ортогональності системи всі члени, починаючи з другого, дорівнюють нулю, і тому $\alpha_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) = 0$. Але це неможливо, бо $\alpha_1 \ne 0$ і $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) > 0$ (адже $\mathbf{x}_1 \ne \mathbf{0}$). Ця суперечність доводить наше твердження.

7. Ортогональний базис в E_n

У лінійному просторі всі базиси рівноправні. У скінченновимірному евклідовому просторі зручно користуватись ортогональним базисом. У такому базисі дуже просто визначаються координати будь-якого вектора. Справді, якщо $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ ортогональний базис, то будь-який вектор $\mathbf{x}$ можна подати у вигляді

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Домножуючи скалярно обидві частини останньої рівності на $\mathbf{e}_i$, одержимо, що

$$\alpha_i = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)}{(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (19.15)$$

Якщо вектори ортогонального базису пронормувати, то отримаємо **ортонормований**, або **евклідовий** базис. У цьому випадку формули (19.15) стають ще простішими (тому що знаменники дорівнюватимуть одиниці) і набирають вигляд

$$\alpha_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad i = \overline{1, n}. \qquad (19.16)$$

Надалі n-вимірний евклідів простір будемо позначати символом E_n.

У довільному n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортогональний базис (див. [1]).

8. Вираження скалярного добутку через координати співмножників

Нехай в евклідовому просторі E_n задано деякий базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Тоді вектори $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ цього простору можна подати у вигляді

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j,$$

а їх скалярний добуток

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j).$$

Якщо базис ортонормований, то

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{19.17}$$

і

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \tag{19.18}$$

- **Приклад 19.4**

Показати, що вектори $\mathbf{x} = (1, -2, 2, -3)$ і $\mathbf{y} = (2, -3, 2, 4)$, які задані в ортонормованому базисі, є ортогональні і знайти норму кожного з них.

◄ Оскільки вектори $\mathbf{x}$ та $\mathbf{y}$ задані в ортонормованому базисі, то їх скалярний добуток згідно з формулою (19.18) дорівнює сумі добутків відповідних координат, тобто

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 = 0,$$

а це означає, що вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ — ортогональні.

Знайдемо норми даних векторів. Маємо:

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}.$$

Аналогічно обчислимо, що

$$||\mathbf{y}|| = \sqrt{33}. \quad ►$$

- **Приклад 19.5**

Обчислити косинус кута φ між векторами $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$, які задані в ортонормованому базисі, якщо $\mathbf{x} = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{y} = (\sqrt{7}, 1, 2, 0)$.

◄ Згідно з формулами (19.13) і (19.18) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||} = \frac{0 \cdot \sqrt{7} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0 + 1 + 1 + 1}\sqrt{7 + 1 + 4 + 0}} = \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}. \quad ►$$

- **Приклад 19.6**

Довести, що коли вектори $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$ евклідового простору ортогональні, то

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2.$$

◄ Згідно з означенням норми вектора

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}).$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, маємо

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Враховуючи, що $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = ||\mathbf{x}||^2$, $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{y}||^2$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$, отримаємо

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2. \quad ►$$

- **Приклад 19.7**

Перевірити ортогональність системи векторів $\mathbf{e}_1 = (1, -2, 1, 3)$ та $\mathbf{e}_2 = (2, 1, -3, 1)$. Доповнити її до ортогонального базису і на його основі знайти ортонормований базис.

◄ Вважаємо, що вектори $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ задані в ортонормованому базисі. Тоді їх скалярний добуток дорівнює сумі добутків однойменних координат, тобто

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0.$$

Отже, вектори $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$ — ортогональні. Тепер знайдемо вектор $\mathbf{e}_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональний до векторів $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. Маємо $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) = 0$; $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$, або

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0.$$

З одержаної системи знайдемо: $x_1 = x_3 - x_4$, $x_2 = x_3 + x_4$, де x_3 та x_4 — вільні невідомі. Надамо x_3 та x_4 довільні ненульові значення, наприклад, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$. Тоді $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Отримаємо вектор $\mathbf{e}_3 = (0, 2, 1, 1)$, який є ортогональний до векторів $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$. Знайдемо тепер вектор $\mathbf{e}_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, ортогональний до векторів $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ і $\mathbf{e}_3$. Маємо: $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4) = 0$; $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_4) = 0$ і $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = 0$, або

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0,$$

$$2x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

З отриманої системи: $x_1 = -2x_4$, $x_2 = 0$, $x_3 = -x_4$, де x_4 — вільне невідоме. Якщо прийняти $x_4 = -1$, то одержимо, що $x_1 = 2$, $x_3 = 1$. Тоді $\mathbf{e}_4 = (2, 0, 1, -1)$. Вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ і $\mathbf{e}_4$ утворюють ортогональний базис. Пронормуємо отриманий базис. Для цього потрібно знайти норму кожного вектора. Маємо:

$$||\mathbf{e}_1|| = \sqrt{15}, \quad ||\mathbf{e}_2|| = \sqrt{15}, \quad ||\mathbf{e}_3|| = \sqrt{6}, \quad ||\mathbf{e}_4|| = \sqrt{6}.$$

Отже, вектори

$$\mathbf{e}_1^0 = \frac{\mathbf{e}_1}{||\mathbf{e}_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{3}{\sqrt{15}}\right),$$

$$\mathbf{e}_2^0 = \frac{\mathbf{e}_2}{||\mathbf{e}_2||} = \left(\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, -\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right),$$

$$\mathbf{e}_3^0 = \frac{\mathbf{e}_3}{||\mathbf{e}_3||} = \left(0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{e}_4^0 = \frac{\mathbf{e}_4}{||\mathbf{e}_4||} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

утворюють ортонормований базис. ►

§ 20. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

1. Означення лінійного оператора

Нехай задано два лінійні простори L і L'. Якщо кожному елементові $\mathbf{x} \in L$ ставиться у відповідність за деяким законом елемент $\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x}) \in L'$, то кажуть, що задано відображення або перетворення $\widehat{A}$ простору L в L'. Елемент $\mathbf{x}$ називають прообразом (оригіналом), а відповідний йому елемент $\mathbf{x}'$ — його образом (зображенням). Відображення $\widehat{A}$ простору L в L' будемо позначати символом $\widehat{A} : L \to L'$.

Означення 6.10 *Відображення, або перетворення* $\widehat{A} : L \to L'$, *яке кожному елементові* $\mathbf{x} \in L$ *ставить у відповідність елемент* $\mathbf{x}' \in L'$, *називається оператором* $\widehat{A}$, *що діє з* L *в* L'.

Означення 6.11 *Оператор* $\widehat{A} : L \to L'$, *називається лінійним, якщо для довільних елементів* $\mathbf{x}_1$ *і* $\mathbf{x}_2$ *простору* L *і довільного дійсного числа* λ *виконуються співвідношення:*

$$1^\circ. \quad \widehat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \widehat{A}(\mathbf{x}_2).$$

$$2^\circ. \quad \widehat{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}). \tag{20.1}$$

Отже, лінійний оператор переводить суму елементів в суму їх образів, а добуток елемента на число — в добуток образа цього елемента на дане число.

З означення лінійного оператора випливає, що він переводить будь-яку лінійну комбінацію елементів простору L в таку ж лінійну комбінацію відповідних елементів простору L', тобто

$$\widehat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widehat{A}(\mathbf{x}_i). \tag{20.2}$$

Зауважимо, що лінійний оператор нульовий елемент простору L переводить в нульовий елемент простору L'. Справді, нехай $\mathbf{0}$ — нульовий елемент простору L. Тоді

$$\widehat{A}(\mathbf{0}) = \widehat{A}(0 \cdot \mathbf{x}) = 0 \cdot \widehat{A}(\mathbf{x}) = 0 \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{0}'.$$

• **Приклад 20.1**

Нехай $\widehat{A}$ — оператор множення довільної матриці X із простору квадратних матриць другого порядку справа на матрицю $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$. Показати, що цей оператор лінійний.

◀ Нехай B і C — дві довільні матриці простору квадратних матриць другого порядку. Тоді

$$\widehat{A}(B) = B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}, \quad \widehat{A}(C) = C\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи властивості добутку матриць і множення матриці на число, маємо:

1. $\widehat{A}(B+C) = (B+C)\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} + C\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} =$ $= \widehat{A}(B) + \widehat{A}(C)$;
2. $\widehat{A}(\lambda B) = (\lambda B)\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \lambda\left(B\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}\right) = \lambda\widehat{A}(B)$.

Отже, умови означення 2 виконуються і оператор $\widehat{A}$ — лінійний. ▶

• **Приклад 20.2**

Нехай оператор $\widehat{A}$ — поворот площини навколо фіксованої точки O на кут φ в двовимірному просторі векторів. Чи буде оператор $\widehat{A}$ — лінійним ?

◀ Покажемо, що оператор $\widehat{A}$ — лінійний, тобто

$$\widehat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \widehat{A}(\mathbf{x}_2),$$

і

$$\widehat{A}(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1),$$

де $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ — вектори на площині, а λ — дійсне число.

Оскільки сума векторів $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$ є діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{x}_1$ і $\mathbf{x}_2$, а поворот суми векторів $\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2$ є, по суті, поворотом діагоналі паралелограма, то $\widehat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \widehat{A}(\mathbf{x}_2)$ (див. рис. 67).

Вектор $\lambda\mathbf{x}_1$ — колінеарний вектору $\mathbf{x}_1$, а поворот вектора $\lambda\mathbf{x}_1$ на кут φ — це поворот $\mathbf{x}_1$ з наступним множенням на λ, то рівність $\widehat{A}(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1)$ — очевидна (рис. 67).

Отже, оператор $\widehat{A}$ — лінійний. ▶

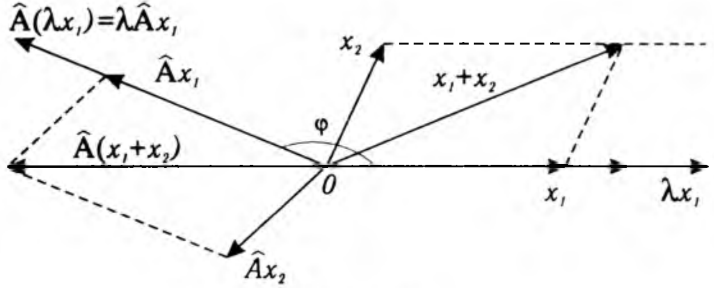


Рис. 67

2. Матриця лінійного оператора

Нехай L і L' відповідно n-вимірний і m-вимірний лінійні простори, $\widehat{A}$ — лінійне відображення L в L'.

У просторі L виберемо базис $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$, а в просторі L' — базис $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m)$.

Якщо $\mathbf{x} \in L$, то $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$. Припустимо, що при лінійному відображенні $\widehat{A}$ елемент $\mathbf{x}$ переходить в елемент $\mathbf{x}' \in L'$, тобто

$$\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x}).$$

Враховуючи лінійність відображення, маємо:

$$\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x}) = \widehat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i\widehat{A}(\mathbf{e}_i). \tag{20.3}$$

З іншого боку, $\mathbf{x}' \in L'$, тому $\mathbf{x}' = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\mathbf{e}'_i$.

Нехай

$$\widehat{A}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\mathbf{e}'_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{20.4}$$

Підставимо (20.4) у (20.3) та прирівняємо коефіцієнти при $\mathbf{e}'_i$

($j = \overline{1,m}$) у лівій та правій частинах. Отримаємо співвідношення

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{cases} \tag{20.5}$$

Це — формули перетворення координат елемента **x** при відображенні $\widehat{A}$ простору L в L'.

Лінійне відображення $\widehat{A}$ простору L в L' у заданих базисах повністю визначається матрицею

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{20.6}$$

яка називається матрицею лінійного оператора $\widehat{A} : L \to L'$ у заданих базисах $\mathcal{B}$ і $\mathcal{B}'$.

Введемо позначення

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad Y = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{Vmatrix}.$$

Тоді співвідношення (20.5) можна записати в матричному вигляді

$$Y = A \cdot X. \tag{20.7}$$

Отже, кожному лінійному оператору $\widehat{A} : L \to L'$ (у вибраних базисах) відповідає своя матриця.

Справедливе й обернене твердження:
кожна числова матриця відповідного розміру є матрицею деякого лінійного відображення $\widehat{A} : L \to L'$. *Якщо простір* L *має вимірність* n, *а простір* L' *— вимірність* m, *то матриця лінійного оператора* $\widehat{A} : L \to L'$ *має розмір* $m \times n$. *Стовпці матриці* A *є координатами образів базисних векторів.*

Операторові $\widehat{A} : L \to L$ відповідає квадратна матриця A. Якщо $detA \neq 0$, то оператор $\widehat{A}$ називається **невиродженим** й існує обернений оператор, якому відповідає обернена матриця A^{-1}.

- **Приклад 20.3**

Оператор $\widehat{A}$ — операція проектування векторів тривимірного простору на горизонтальну площину Ox_1x_2 (рис. 68). Знайти матрицю A оператора $\widehat{A}$ у канонічному базисі $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

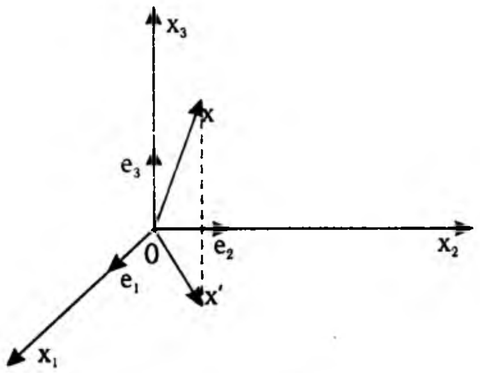


Рис. 68

◀ Маємо $\widehat{A}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$, $\widehat{A}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$, $\widehat{A}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$. Отже, перетворенню $\widehat{A}$ відповідає матриця

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \quad ▶$$

- **Приклад 20.4**

Нехай $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\widehat{A}(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3. 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$. Показати, що оператор $\widehat{A}$ — лінійний і знайти його матрицю в канонічному базисі $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

◀ Перевіримо, чи виконуються умови (20.1). Маємо

$$\widehat{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_2+y_2+x_3+y_3, 2x_1+2y_1+x_3+y_3, 3x_1+3y_1-x_2-y_2+x_3+y_3) =$$

$$= (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) + (y_2 + y_3, 2y_1 + y_3, 3y_1 - y_2 + y_3) =$$

$$= \widehat{A}(\mathbf{x}) + \widehat{A}(\mathbf{y});$$

$$\widehat{A}(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda x_2 + \lambda x_3, 2\lambda x_1 + \lambda x_3, 3\lambda x_1 - \lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3) =$$

$$= \lambda(x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}).$$

Отже, $\widehat{A}$ — лінійний оператор.

Тоді

$$\widehat{A}(\mathbf{e}_1) = \widehat{A}(1,0,0) = (0,2,3) = 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3,$$
$$\widehat{A}(\mathbf{e}_2) = \widehat{A}(0,1,0) = (1,0,-1) = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3,$$
$$\widehat{A}(\mathbf{e}_3) = \widehat{A}(0,0,1) = (1,1,1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Стовпці матриці A є координатами образів базисних векторів. Тому матриця A оператора $\widehat{A}$ має вигляд:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}. \quad ▶$$

- **Приклад 20.5**

Знайти лінійне перетворення, яке переводить вектори $\mathbf{a}_1 = (1,0,3)$, $\mathbf{a}_2 = (2,1,0)$ та $\mathbf{a}_3 = (0,0,1)$, що задані в канонічному базисі, відповідно у вектори $\mathbf{b}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{b}_2 = (0,1,0)$ і $\mathbf{b}_3 = (1,2,3)$. Знайти матрицю цього перетворення.

◀ Нехай A — матриця перетворення $\widehat{A}$, яке переводить вектори $\mathbf{a}_i$ в $\mathbf{b}_i$ $(i = 1,2,3)$.

Тоді

$$A\begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A\begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad A\begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix},$$

або в матричній формі

$$A\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Визначник $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = 1 \neq 0$, тому з останньої рівності знаходимо, що

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -4 & 9 & 2 \\ -9 & 18 & 3 \end{Vmatrix}. \quad ▶$$

3. Дії над лінійними операторами

Нехай $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ — два лінійні оператори, які діють в просторі L.

1. **Рівність операторів.** Оператори $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ називаються **рівними**, якщо

$$\widehat{A}(\mathbf{x}) = \widehat{B}(\mathbf{x})$$

для будь-якого $\mathbf{x} \in L$.

Якщо $A = ||a_{ij}||_1^n$ і $B = ||b_{ij}||_1^n$ — матриці, які відповідають лінійним операторам $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ в деякому базисі $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ простору L, то $a_{ij} = b_{ij}$ $(i, j = \overline{1,n})$, тобто рівним лінійним операторам відповідають в даному базисі рівні матриці.

Очевидно, що справедливе і обернене твердження.

2. **Додавання операторів.**

Нехай $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ — деякі лінійні оператори простору L.

Оператор $\widehat{C}$, який кожному елементові $\mathbf{x} \in L$ ставить у відповідність елемент $\widehat{A}(\mathbf{x}) + \widehat{B}(\mathbf{x})$, називають **сумою операторів** $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ і позначають $\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$.

Покажемо, що перетворення $\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$ — лінійне. Справді, якщо $\mathbf{x}_1 \in L$, $\mathbf{x}_2 \in L$, λ — довільне число, то:

1) $\widehat{C}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \widehat{B}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \widehat{A}(\mathbf{x}_2) + \widehat{B}(\mathbf{x}_1) + \widehat{B}(\mathbf{x}_2) = (\widehat{A} + \widehat{B})(\mathbf{x}_1) + (\widehat{A} + \widehat{B})(\mathbf{x}_2) = \widehat{C}(\mathbf{x}_1) + \widehat{C}(\mathbf{x}_2)$;

2) $\widehat{C}(\lambda\mathbf{x}_1) = (\widehat{A} + \widehat{B})(\lambda\mathbf{x}_1) = \widehat{A}(\lambda\mathbf{x}_1) + \widehat{B}(\lambda\mathbf{x}_1) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \lambda B(\mathbf{x}_1) = \lambda(\widehat{A}(\mathbf{x}_1) + \widehat{B}(\mathbf{x}_1)) = \lambda\widehat{C}(\mathbf{x}_1)$.

З'ясуємо тепер, що відбувається з матрицями лінійних операторів, якщо останні додаються. Нехай в деякому базисі лінійному оператору $\widehat{A}$ відповідає матриця A, а операторам $\widehat{B}$ і $\widehat{C}$ — відповідно матриці B і C (у тому ж базисі).

За означенням

$$CX = AX + BX = (A + B)X$$

для всіх $\mathbf{x} \in L$.

Тому $C = A + B$, тобто якщо додаються лінійні оператори, додаються і відповідні їм матриці.

3. **Множення оператора на число**

Добутком оператора $\widehat{A}$ **на число** λ називається оператор $\widehat{B} = \lambda\widehat{A}$, якщо для довільного елемента $\mathbf{x} \in L$ справедлива рівність

$$\widehat{B}(\mathbf{x}) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}).$$

Покажемо, що оператор $\widehat{B}$ є лінійним.
Дійсно, якщо $\mathbf{x}_1 \in L$, $\mathbf{x}_2 \in L$, α — довільне число, то
1) $\widehat{B}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \lambda(\widehat{A}(\mathbf{x}_1)+\widehat{A}(\mathbf{x}_2)) = \lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1)+\lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_2) = \widehat{B}(\mathbf{x}_1)+\widehat{B}(\mathbf{x}_2)$;
2) $\widehat{B}(\alpha\mathbf{x}_1) = \lambda\widehat{A}(\alpha\mathbf{x}_1) = \lambda\alpha\widehat{A}(\mathbf{x}_1) = \alpha\lambda\widehat{A}(\mathbf{x}_1) = \alpha\widehat{B}(\mathbf{x}_1)$.

Нехай в деякому базисі лінійному перетворенню $\widehat{A}$ відповідає матриця A, а перетворенню $\widehat{B}$ — матриця B.

За означенням

$$BX = \alpha(AX) = \alpha AX.$$

Отже, $B = \alpha A$, тобто якщо лінійний оператор множиться на число, відповідна йому матриця також множиться на це число.

4. **Множення операторів**

Добутком лінійних операторів $\widehat{A}$ та $\widehat{B}$ називається оператор $\widehat{C} = \widehat{A}\cdot\widehat{B}$, якщо для будь-якого $\mathbf{x} \in L$ справедлива рівність

$$\widehat{C}(\mathbf{x}) = \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x})).$$

З останньої рівності випливає, що спершу елемент $\mathbf{x}$ перетворюється в елемент $\mathbf{y} = \widehat{B}(\mathbf{x})$, а потім — в елемент $\mathbf{z} = \widehat{A}(\mathbf{y})$.

Оператор $\widehat{C}$ — лінійний, оскільки для довільних $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in L$ та довільного числа λ:

$$\widehat{C}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)) = \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}_1)+\widehat{B}(\mathbf{x}_2)) =$$

$$= \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}_1)) + \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}_2)) = \widehat{C}(\mathbf{x}_1)+\widehat{C}(\mathbf{x}_2);$$

$$\widehat{C}(\lambda\mathbf{x}_1) = \widehat{A}(\widehat{B}(\lambda\mathbf{x}_1)) = \widehat{A}(\lambda(\widehat{B}(\mathbf{x}_1))) = \lambda\widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}_1)) = \lambda\widehat{C}(\mathbf{x}_1).$$

Якщо A, B і C — матриці лінійних операторів $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ і $\widehat{C}$ у деякому базисі, то згідно з означенням

$$CX = A(BX) = ABX$$

для всіх $\mathbf{x} \in L$.

Тому $C = AB$, тобто якщо множаться лінійні оператори, відповідні їм матриці перемножуються.

5. **Тотожний оператор**

Оператор $\widehat{A}$ називається **тотожним**, якщо $\widehat{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Отже, тотожний оператор кожен елемент $\mathbf{x} \in L$ залишає на місці. У вибраному базисі тотожному оператору відповідає одинична матриця. Позначається тотожний оператор символом $\widehat{E}$.

6. **Обернений оператор**

Оператор $\widehat{B}$ називається **оберненим** для оператора $\widehat{A}$, якщо

$$\widehat{A}\cdot\widehat{B} = \widehat{B}\cdot\widehat{A} = \widehat{E}.$$

У цьому випадку записують $\widehat{B} = \widehat{A}^{-1}$.
З означення випливає: якщо $\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x})$, то $\mathbf{x} = \widehat{A}^{-1}(\mathbf{x}')$.

Якщо оператор $\widehat{A}$ є лінійним, то лінійним є і оператор $\widehat{A}^{-1}$. Обернений оператор $\widehat{A}^{-1}$ існує тоді і тільки тоді, коли $\det A \neq 0$, де A — матриця оператора $\widehat{A}$. Оберненому оператору $\widehat{A}^{-1}$ відповідає матриця A^{-1}, яка є обернена до матриці A.

- **Приклад 20.6**

Довести, що множина лінійних операторів утворює лінійний простір.

◄ Нехай $\widehat{L}$ — множина лінійних операторів, $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ — довільні оператори з множини $\widehat{L}$, λ — довільне число. Оскільки сумою $\widehat{A}+\widehat{B}$ лінійних операторів є лінійний оператор, добуток довільного числа λ на лінійний оператор — це також лінійний оператор і виконуються аксіоми 1-8 (перевірити !), то множина $\widehat{L}$ (згідно з означенням лінійного простору) є лінійним простором. ►

- **Приклад 20.7**

Задано лінійне перетворення

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, \\ x_2' = 3x_1 - x_2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = x_1'' - 3x_2'', \\ x_2 = 2x_1'' - 4x_2''. \end{cases}$$

Знайти матрицю оператора $\widehat{C}$, який переводить вектор $\mathbf{x}'' = (x_1'', x_2'')$ у вектор $\mathbf{x}' = (x_1', x_2')$.

◄ Маємо: $\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \widehat{B}(\mathbf{x}'')$. Тому $\mathbf{x}' = \widehat{A}(\widehat{B}(\mathbf{x}'')) = \widehat{A}\cdot\widehat{B}(\mathbf{x}'')$. Матриці операторів $\widehat{A}$ та $\widehat{B}$ відповідно дорівнюють:

$$A = \left\|\begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{matrix}\right\|, \quad B = \left\|\begin{matrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{matrix}\right\|.$$

Враховуючи, що оператор $\widehat{C} = \widehat{A} \cdot \widehat{B}$, то його матриця

$$C = A \cdot B = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -5 \end{Vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

- **Приклад 20.8**

Показати, що лінійне перетворення

$$x_1' = -x_1+3x_2-x_3, \quad x_2' = -3x_1+5x_2-x_3, \quad x_3' = -3x_1-3x_2+x_3$$

невироджене і знайти обернене перетворення.

◀ Нехай $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3')$. Тоді $\mathbf{x}' = \widehat{A}(\mathbf{x})$, де матриця перетворення

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & -3 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки визначник матриця A не дорівнює нулю (перевірити !), то існує обернене перетворення $\widehat{A}^{-1}$, матриця якого

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -12 & 6 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = A^{-1} \begin{Vmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Vmatrix},$$

тобто

$$x_1 = -\frac{1}{4}(x_1' + x_3'),$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}(3x_1' - 2x_2' + x_3'),$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(6x_1' - 3x_2' + x_3'). \quad \blacktriangleright$$

7. Лінійні перетворення на площині

Для ілюстрації відображення одного лінійного простору в інший, розглянемо відображення площини P в площину Q. У цьому випадку під відображенням $\widehat{A}: \ P \to Q$ розуміють закон, на основі якого кожній точці M площини P ставиться у відповідність деяка точка M' площини Q, що записується так:

$$M' = \widehat{A}(M).$$

Якщо при цьому відображенні зберігається прямолінійність і, крім цього, рівним векторам площини P відповідають рівні вектори площини Q, то таке відображення можна розглядати як відображення векторів площини P у вектори площини Q:

$$\mathbf{y} = \widehat{A}(\mathbf{x}).$$

Будемо вважати, що відображення $\widehat{A}$ — лінійне. Виразимо дане лінійне відображення в координатній формі. Для цього виберемо в площині P прямокутну декартову систему координат Ox_1x_2 з базисними векторами $\mathbf{e}_1$ і $\mathbf{e}_2$, а в площині Q — систему Oy_1y_2 з базисними векторами $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$. Площини P і Q можуть суміщатись, а також можуть суміщатись і системи координат.

Радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$ довільної точки $M(x_1, x_2)$ площини P (рис. 69, а) можна розкласти по базисних векторах:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

Припустимо, що образ точки O, тобто точка $O' = \widehat{A}(O)$ має на площині Q координати b_1, b_2. Знайдемо координати образу точки M, тобто точки $M' = \widehat{A}(M)$.

Маємо

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\tilde{O}O'} + \overrightarrow{O'M'}. \quad \text{(рис. 69, б)}$$

де $\overrightarrow{OM'} = y_1\mathbf{e}_1' + y_2\mathbf{e}_2'$, $\overrightarrow{\tilde{O}O'} = b_1\mathbf{e}_1' + b_2\mathbf{e}_2'$, $\overrightarrow{O'M'} = \widehat{A}(\overrightarrow{OM}) = \widehat{A}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1\widehat{A}(\mathbf{e}_1) + x_2\widehat{A}(\mathbf{e}_2)$.

Вектори $\widehat{A}(\mathbf{e}_1)$ та $\widehat{A}(\mathbf{e}_2)$ задані, тобто відомі їх розклади за базисом $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$:

$$\widehat{A}(\mathbf{e}_1) = a_{11}\mathbf{e}_1' + a_{21}\mathbf{e}_2',$$
$$\widehat{A}(\mathbf{e}_2) = a_{12}\mathbf{e}_1' + a_{22}\mathbf{e}_2'. \qquad (20.8)$$

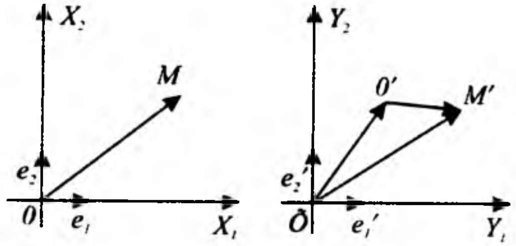


Рис. 69

Отже,

$$y_1\mathbf{e}_1' + y_2\mathbf{e}_2' = b_1\mathbf{e}_1' + b_2\mathbf{e}_2' + x_1\widehat{A}(\mathbf{e}_1) + x_2\widehat{A}(\mathbf{e}_2). \qquad (20.9)$$

Звідси, підставляючи (20.8) в (20.9) і порівнюючи коефіцієнти при $\mathbf{e}_1'$ і $\mathbf{e}_2'$ в правій і лівій частинах співвідношення (20.9), отримаємо

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \qquad (20.10)$$

Це і є координати точки $M' = \widehat{A}(M)$ — образу точки M.

За допомогою векторів-стовпців і матриці A відображення $\widehat{A}$ формули (20.10) можна записати у матричному вигляді:

$$Y = AX + B. \qquad (20.11)$$

Якщо при відображенні точка O переходить в точку $\widetilde{O}$, то $b_1 = b_2 = 0$ і співвідношення (20.11) набирає вигляд

$$Y = AX. \qquad (20.12)$$

Розглянемо декілька прикладів відображень.

1. Відображення

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = x_2$$

— це розтяг вздовж осі Ox_1 з коефіцієнтом розтягу k (рис. 70).

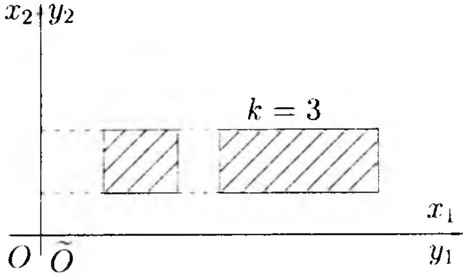


Рис. 70

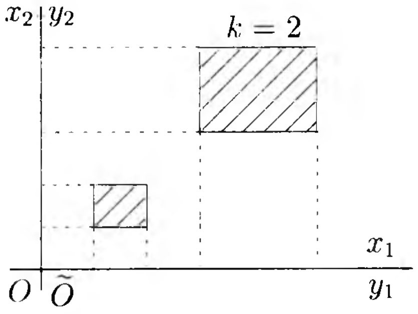


Рис. 71

Матриця цього відображення

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

2. Відображення

$$y_1 = kx_1, \quad y_2 = kx_2$$

— це розтяг в k разів, як в напрямі осі Ox_1, так і в напрямі осі Ox_2 (рис. 71)

Матриця цього відображення

$$A = \begin{Vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{Vmatrix}.$$

3. Перетворення $y_1 = -x_1, \quad y_2 = x_2$ називається дзеркальним відображенням відносно осі Ox_2 (рис. 72).

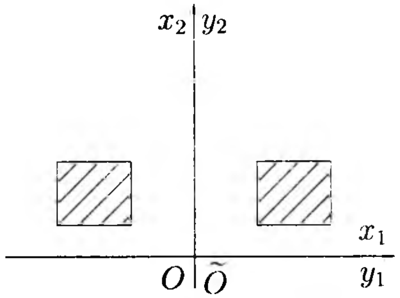


Рис. 72

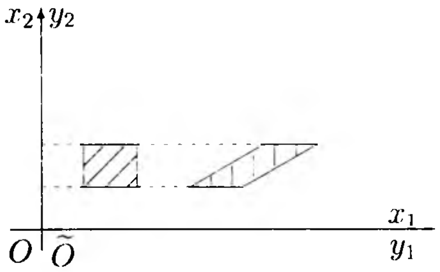


Рис. 73

Матриця цього відображення

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Відображення

$$y_1 = x_1 + \lambda x_2, \quad y_2 = x_2$$

називається зсувом вздовж осі Ox_1 (рис. 73).

Матриця цього відображення

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

5. Відображення

$$y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \quad y_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha.$$

– це поворот на кут α (рис. 74).

Матриця цього відображення

$$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

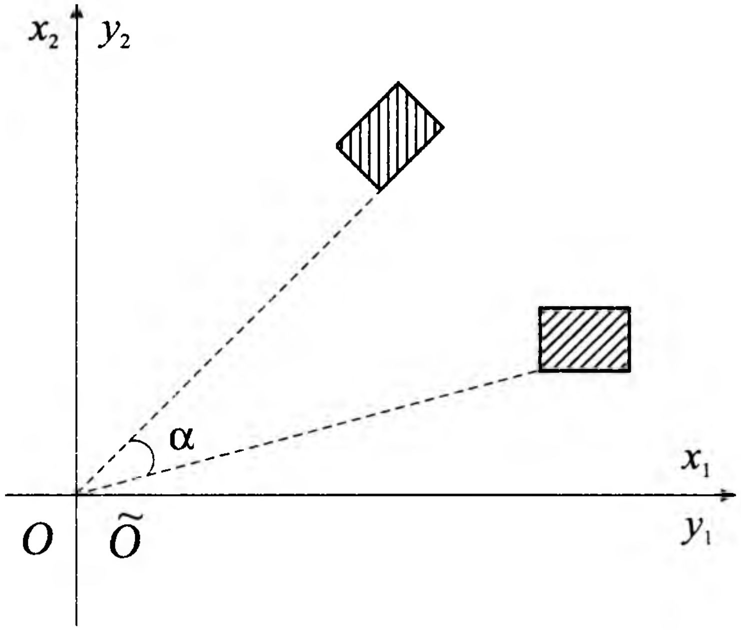


Рис. 74

4. Перетворення матриці лінійного оператора при переході до нового базису. Перетворення координат

Відомо, що базис в n-вимірному лінійному просторі L_n складається з n елементів. Базис можна вибирати багатьма способами: кожну лінійно незалежну систему із n елементів можна взяти за базис. Тому важливо знати, як зв'язані між собою різні базиси і координати одного і того ж елемента в двох заданих базисах.

Припустимо, що в просторі L_n задано довільно два базиси:

$$\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{20.13}$$

та

$$\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n). \tag{20.14}$$

Перший базис (20.13) назвемо старим, а другий (20.14) — новим. Розглянемо оператор $\widehat{H}$, який переводить старий базис в новий. Оскільки

$$\mathbf{e}'_k = \widehat{H}(\mathbf{e}_k), \quad (k = \overline{1,n}) \tag{20.15}$$

або

$$\mathbf{e}'_k = h_{1k}\mathbf{e}_1 + h_{2k}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{nk}\mathbf{e}_n, \tag{20.16}$$

то оператору $\widehat{H}$ відповідає матриця

$$H = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{matrix} \right\|.$$

Матриця H називається матрицею переходу від базису (20.13) до базису (20.14). Зауважимо, що стовпцями цієї матриці є координати елементів $\mathbf{e}'_k$ $(k = \overline{1,n})$ в старому базисі $\mathcal{B}$.

Очевидно, матриця H невироджена, тобто $\det H \neq 0$. У протилежному випадку її стовпці, а тим самим і базисні елементи $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n$ були б лінійно залежні, що суперечить умові, що система $\mathcal{B}'$ є лінійно незалежною.

Звідси випливає, що будь-яка квадратна матриця порядку n з відмінним від нуля визначником є матрицею переходу від одного базису n-вимірного лінійного простору до іншого.

З'ясуємо тепер, як зв'язані між собою координати одного і того ж елемента в двох різних базисах.

Нехай $\mathbf{x}$ — довільний елемент простору L_n. Припустимо, що в базисі (20.13) елемент $\mathbf{x}$ має координати $x_1, x_2, \dots, x_n$, а в базисі (20.14) — $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, тобто

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}' = \sum_{i=1}^{n} x'_i \mathbf{e}'_i.$$

Тоді, враховуючи співвідношення (20.16), отримаємо

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = x'_1(h_{11}\mathbf{e}_1 + h_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{n1}\mathbf{e}_n) +$$

$$+ x'_2(h_{12}\mathbf{e}_1 + h_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{n2}\mathbf{e}_n) + \cdots + x'_n(h_{1n}\mathbf{e}_1 + h_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{nn}\mathbf{e}_n) =$$

$$= (h_{11}x'_1 + h_{12}x'_2 + \cdots + h_{1n}x'_n)\mathbf{e}_1 + (h_{21}x'_1 + h_{22}x'_2 + \cdots + h_{2n}x'_n)\mathbf{e}_2 + \cdots +$$

$$+ (h_{n1}x'_1 + h_{n2}x'_2 + \cdots + h_{nn}x'_n)\mathbf{e}_n.$$

Оскільки координати елемента $\mathbf{x}$ в базисі (20.13) визначаються однозначно, то з останньої рівності випливає, що

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = h_{11}x'_1 + h_{12}x'_2 + \cdots + h_{1n}x'_n, \\ x_2 = h_{21}x'_1 + h_{22}x'_2 + \cdots + h_{2n}x'_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = h_{n1}x'_1 + h_{n2}x'_2 + \cdots + h_{nn}x'_n. \end{array} \right. \tag{20.17}$$

Рівності (20.17) і є шуканими формулами перетворення координат елемента при переході від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$.

Формули (20.17) можна записати у матричному вигляді

$$X = H \cdot X', \tag{20.18}$$

де X — стовпець із координат елемента $\mathbf{x}$ в базисі $\mathcal{B}$, X' — стовпець із координат елемента $\mathbf{x}$ в базисі $\mathcal{B}'$, H — матриця переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$.

Оскільки матриця H невироджена, то із рівності (20.18) випливає, що

$$X' = H^{-1} \cdot X. \tag{20.19}$$

Кожному лінійному оператору в просторі L_n у вибраному базисі відповідає матриця. Якщо змінюється базис, матриця лінійного оператора змінюється. Тому, природно, виникає запитання: *як зв'язані між собою матриці, які відповідають одному і тому ж оператору в різних базисах?*

Нехай лінійному оператору $\widehat{A}$ в просторі L_n в базисі $\mathcal{B}$ відповідає матриця A. Покажемо, що в базисі $\mathcal{B}'$ тому ж оператору $\widehat{A}$ відповідає матриця

$$A' = H^{-1}AH,$$

де H — матриця переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$.

Справді, в старому базисі для координатних стовпців образів будь-яких елементів $\mathbf{x}$ маємо рівність

$$Y = A \cdot X. \tag{20.20}$$

Аналогічно, в новому базисі

$$Y' = A' \cdot X'. \tag{20.21}$$

При переході до нового базису координати елементів $\mathbf{x}$ і його образу $\mathbf{x}'$ зв'язані співвідношеннями

$$X = H \cdot X', \quad Y = H \cdot Y', \tag{20.22}$$

де H — матриця переходу.

Підставивши у співвідношення (20.20) замість Y та X їх значення із співвідношення (20.22), отримаємо

$$HY' = AHX'$$

або після перемноження зліва на H^{-1} маємо

$$Y' = H^{-1}AHX',$$

тобто, з огляду на (20.21)

$$A'X' = H^{-1}AHX'.$$

Отже,

$$A' = H^{-1}AH. \tag{20.23}$$

Означення 6.12 *Квадратна матриця A називається подібною до матриці B, якщо існує така невироджена квадратна матриця T, що*

$$B = T^{-1}AT.$$

Із співвідношення (20.23) випливає, що матриці лінійних операторів в різних базисах подібні.

Справедливе таке твердження: *подібні матриці мають однакові визначники.*

Іншими словами, визначник матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису.

Справді,

$$\det A' = \det(H^{-1}AH) = \det H^{-1} \det A \det H =$$

$$= \det A \cdot \det(HH^{-1}) = \det A \cdot \det E = \det A.$$

Звідси, зокрема, випливає, що подібні матриці або одночасно особливі, або одночасно невироджені.

• **Приклад 20.9**

Оператору $\widehat{A}$ в канонічному базисі $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ відповідає матриця $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю цього оператора в базисі $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$, де $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$.

◀ Знайдемо матрицю переходу від базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ до базису $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$. Оскільки вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ виражаються через вектори $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то

$$\mathbf{e}'_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{e}'_2 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{e}'_3 = (1, 0, -1).$$

Але стовпчики матриці переходу H — це координати базисних векторів $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$, тобто

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \det\ H = 1, \quad H^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матриця A' оператора $\widehat{A}$ в базисі $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ має вигляд: $A' = H^{-1}AH$.

Отже,

$$A' = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{Vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

• **Приклад 20.10**

У просторі L_2 оператор $\widehat{A}$ в базисі $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$, де $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ має матрицю $A' = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. Оператор $\widehat{B}$ в базисі $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$, де $\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$ має матрицю $B'' = \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix}$. Знайти матрицю оператора $\widehat{C} = \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}$ в базисі $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$.

◄ Знайдемо матрицю A'' оператора $\widehat{A}$ в базисі $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$. Для цього знайдемо матрицю переходу $H = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix}$ від базису $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ до базису $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$. Виразимо вектори $\mathbf{e}''_1$, $\mathbf{e}''_2$ через вектори $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$:

$$\mathbf{e}''_1 = h_{11}\mathbf{e}'_1 + h_{21}\mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{e}''_2 = h_{12}\mathbf{e}'_1 + h_{22}\mathbf{e}'_2.$$

Оскільки $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, то $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2$,

$$\mathbf{e}''_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 = 2\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2, \quad \mathbf{e}''_2 = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 - 2(\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2) = -\mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2.$$

Отже,

$$H = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \det H = 3, \quad H^{-1} = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Матриці A' та A'' оператора $\widehat{A}$ в базисах $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ і $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$ зв'язані співвідношенням $A'' = H^{-1}A'H$, тобто

$$A'' = \frac{1}{3}\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}.$$

Тепер матриці операторів $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ задані в одному базисі $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$. Тому матриця C'' оператора $\widehat{C} = \widehat{A}\widehat{B} + \widehat{B}$ в базисі $(\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2)$

$$C'' = A''B'' + B'' = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -10 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -5 & 34 \\ 15 & -24 \end{Vmatrix}. \quad ►$$

- **Приклад 20.11**

Знайти формули перетворення координат при переході від базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ до базису $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2,' \mathbf{e}'_3)$, якщо $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$; $\mathbf{e}'_1 = (2, -1, 0)$, $\mathbf{e}'_2 = (1, -1, 1)$, $\mathbf{e}'_3 = (1, 2, -4)$.

◄ Оскільки $\mathbf{e}'_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$, то матриця переходу H від базису $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ до базису $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}_2,' \mathbf{e}'_3)$ має вигляд

$$H = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{Vmatrix}, \quad \det\ H = -1.$$

Згідно з формулою (20.19) зв'язок між новими і старими координатами має вигляд: $X' = H^{-1}X$. Знайдемо матрицю H^{-1}, яка є оберненою до матриці H. Маємо:

$$H^{-1} = -\begin{Vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & -8 & -5 \\ -1 & -2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix},$$

звідси

$$x'_1 = -2x_1 - 5x_2 - 3x_3,$$

$$x'_2 = 4x_1 + 8x_2 + 5x_3,$$

$$x'_3 = x_1 + 2x_2 + x_3. \quad ►$$

5. Матриця переходу від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису

Нехай E_n — n-вимірний евклідовий простір, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ і $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ — ортонормовані базиси, тобто

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j \end{cases} \tag{20.24}$$

і матриця $H = ||h_{ij}||_1^n$ є матрицею переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$. Тоді згідно із співвідношенням (20.16) маємо

$$\mathbf{e}'_i = h_{1i}\mathbf{e}_1 + h_{2i}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{ni}\mathbf{e}_n,$$

$$\mathbf{e}'_j = h_{1j}\mathbf{e}_1 + h_{2j}\mathbf{e}_2 + \cdots + h_{nj}\mathbf{e}_n.$$

З огляду на ці формули співвідношення (20.24) наберуть вигляд

$$h_{1i}h_{1j} + h_{2i}h_{2j} + \cdots + h_{ni}h_{nj} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j. \end{cases}$$

Сукупність цих рівностей можна записати у матричній формі

$$\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{21} & \dots & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & h_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{1n} & h_{2n} & \dots & h_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

або

$$H^{\top}H = E.$$

Звідки маємо, що

$$H^{\top} = H^{-1}. \qquad (20.25)$$

Означення 6.13 *Квадратна матриця A називається ортогональною, якщо $A^{\top} = A^{-1}$, тобто якщо її транспонована матриця є одночасно і оберненою.*

Отже, матриця переходу H від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису є ортогональною.

З означення ортогональної матриці випливає, що вона невироджена, бо існує обернена матриця. Далі, оскільки det $A^{\top}$ = det A, а det $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, то для визначника ортогональної матриці справедлива рівність det $A = \dfrac{1}{\det A}$, тобто det $A = \pm 1$.

Зауважимо, що одинична матриця E — ортогональна:

$$E^{\top} = E^{-1} = E.$$

Матриця A^{-1}, обернена до ортогональної матриці A (а тому і матриця $A^{\top}$), також є ортогональною. Справді, з того, що $A^{-1} = A^{\top}$, випливає

$$(A^{-1})^{\top} = (A^{\top})^{\top} = A = (A^{-1})^{-1}.$$

Легко також перевірити, що добуток ортогональних матриць — ортогональна матриця.

Означення 6.14 *Лінійне перетворення $\widehat{A} : E_n \to E_n$ називається ортогональним, якщо його матриця в довільному ортонормованому базисі є ортогональна.*

• **Приклад 20.12**

Знайти матрицю лінійного перетворення, яке здійснює поворот на кут α прямокутної декартової системи координат (на площині). Поворот здійснюється проти годинникової стрілки.

◀ Нехай E_2 — двовимірний евклідовий простір, H — матриця лінійного оператора $\widehat{A} : E_2 \to E_2$; $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ та $\mathcal{B}' = (\vec{i}', \vec{j}')$ — два ортонормовані базиси.

Розкладемо новий базис по старому:

$$\vec{i}' = h_{11}\vec{i} + h_{21}\vec{j}, \quad \vec{j}' = h_{12}\vec{i} + h_{22}\vec{j}.$$

Тоді

$$(\vec{i}', \vec{i}) = (h_{11}\vec{i} + h_{21}\vec{j}, \vec{i}) = h_{11}(\vec{i}, \vec{i}) + h_{21}(\vec{j}, \vec{i}) = h_{11}.$$

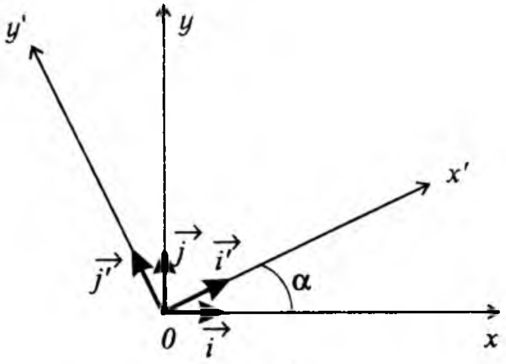


Рис. 75

З іншого боку,

$$(\vec{i}', \vec{i}) = |\vec{i}'||\vec{i}| \cos\alpha = \cos\alpha,$$

тобто $h_{11} = \cos\alpha$.

Аналогічно отримаємо:

$$(\vec{i}', \vec{j}) = h_{21} = \sin\alpha, \quad (\vec{j}', \vec{i}) = h_{12} = -\sin\alpha, \quad (\vec{j}', \vec{j}) = h_{22} = \cos\alpha.$$

Отже,

$$H = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}.$$

Визначник матриці H дорівнює одиниці. Тоді

$$H^{-1} = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix} = H^{\top}.$$

Отже, матриця H лінійного перетворення, яке здійснює поворот декартової системи координат навколо фіксованої точки, є ортогональною матрицею. ▶

- **Приклад 20.13**

Лінійний оператор $\widehat{A} : R^3 \to R^3$ переводить канонічний базис $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ відповідно у базис $\mathbf{e}_1' = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_2' = (0,0,1)$, $\mathbf{e}_3' = (1,0,0)$. Чи буде оператор $\widehat{A}$ ортогональним ?

◀ Матриця A оператора $\widehat{A}$ має вигляд

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Визначник матриці A дорівнює одиниці. Обернена матриця A^{-1} і транспонована $A^{\top}$ відповідно рівні:

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^{\top} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

тобто $A^{-1} = A^{\top}$.
Отже, оператор $\widehat{A}$ — ортогональний. ▶

6. Спряжені оператори

Нехай $\widehat{A}$ та $\widehat{B}$ — лінійні оператори, які діють в евклідовому просторі E.

Означення 6.15 *Лінійні оператори $\widehat{A}$ і $\widehat{B}$ називаються спряженими, якщо для довільних* $\mathbf{x}$ *та* $\mathbf{y}$*, які належать E справедливе співвідношення*

$$(\widehat{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \widehat{B}(\mathbf{y})). \qquad (20.26)$$

Очевидно, що тоді $(\widehat{B}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \widehat{A}(\mathbf{y}))$.
Дійсно,

$$(\widehat{B}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \widehat{B}(\mathbf{x})) = (\widehat{A}(\mathbf{y}), \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \widehat{A}(\mathbf{y})).$$

З'ясуємо, як зв'язані матриці спряжених лінійних операторів в n-вимірному евклідовому просторі E_n. Нехай в ортонормованому базисі $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ оператору $\widehat{A}$ відповідає матриця $A = ||a_{ij}||_1^n$, а оператору $\widehat{B}$ — матриця $B = ||b_{ij}||_1^n$. Запишемо співвідношення (20.26) для векторів $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$:

$$(\widehat{A}(\mathbf{e}_k), \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_k, \widehat{B}(\mathbf{e}_j)), \qquad (20.27)$$

або

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) = \left(\mathbf{e}_k, \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i\right).$$

Останнє співвідношення можна записати у такому вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_j).$$

Враховуючи, що базис ортонормований, отримаємо

$$a_{jk} = b_{kj}, \qquad (20.28)$$

звідки випливає, що

$$A = B^{\top}. \qquad (20.29)$$

Отже, ми показали, що **коли $\widehat{A}$ та $\widehat{B}$ — спряжені оператори, то матриці цих операторів в ортонормованому базисі зв'язані співвідношенням (20.29)**.

Тепер покажемо, що **в скінченновимірному просторі кожний лінійний оператор має спряжений**.

Візьмемо в цьому просторі ортонормований базис. Кожному лінійному оператору $\widehat{A}$ у вибраному базисі відповідає матриця $A = ||a_{ij}||_1^n$. Нехай $B = A^{\top} = ||a_{ji}||_1^n$. За цією матрицею побудуємо оператор $\widehat{B}$. Потрібно довести, що оператори $\widehat{A}$ та $\widehat{B}$ — спряжені. З наведеного вище доведення випливає, що співвідношення (20.29) і (20.27) еквівалентні.

Візьмемо тепер два довільні вектори

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i$$

і розглянемо скалярні добутки $(\widehat{A}(\mathbf{x}),\mathbf{y})$ і $(\mathbf{x},\widehat{B}(\mathbf{y}))$:

$$(\widehat{A}(\mathbf{x}),\mathbf{y}) = \left(\widehat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\widehat{A}(\mathbf{e}_i),\mathbf{e}_j).$$

$$(\mathbf{x},\widehat{B}(\mathbf{y})) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i, \widehat{B}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j(\mathbf{e}_i,\widehat{B}(\mathbf{e}_j)).$$

Порівнюючи отримані добутки і враховуючи співвідношення (20.27), одержимо

$$(\widehat{A}(\mathbf{x}),\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\widehat{B}(\mathbf{y})),$$

а це означає, що співвідношення (2.26) виконується для довільної пари векторів $\mathbf{x}$ і $\mathbf{y}$.

Отже, ми довели, що в скінченновимірному евклідовому просторі кожний лінійний оператор $\widehat{A}$ має спряжений лінійний оператор, який позначають через $\widehat{A}^*$. Тоді співвідношення (20.26) набуває вигляду

$$(\widehat{A}(\mathbf{x}),\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\widehat{A}^*(\mathbf{y})).$$

Якщо A^* — матриця оператора $\widehat{A}^*$, який спряжений до оператора $\widehat{A}$, то

$$A^* = A^{\top}.$$

Довести, що спряжені оператори мають такі властивості: 1) $(\widehat{A}^*)^* = \widehat{A}$; 2) $(\widehat{A}\cdot\widehat{B})^* = \widehat{B}^*\cdot\widehat{A}^*$; 3) $(\alpha\widehat{A})^* = \alpha\widehat{A}^*$; 4) Якщо $\widehat{A}$ невироджений оператор, тобто $\det A \neq 0$, то $(\widehat{A}^{-1})^* = (\widehat{A}^*)^{-1}$.

- **Приклад 20.14**

Знайти матрицю A^* лінійного оператора $\widehat{A}^*$, який спряжений до оператора $\widehat{A}$ в ортонормованому базисі $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$, якщо оператор $\widehat{A}$ переводить вектори $\mathbf{a}_1=(0,0,1)$, $\mathbf{a}_2 = (0,1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (1,1,1)$ відповідно у вектори $\mathbf{b}_1 = (1,2,1)$, $\mathbf{b}_2 = (3,1,2)$, $\mathbf{b}_3 = (7,-1,4)$. Координати всіх векторів задані в базисі $\mathcal{B}$.

◄ Знайдемо матрицю A оператора $\widehat{A}$, де $\widehat{A}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$. Маємо:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$A^* = A^{\top} = \begin{Vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}. \quad ►$$

- **Приклад 20.15**

Лінійний оператор $\widehat{A} : E_3 \to E_3$ в базисі $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3)$ заданий матрицею $A' = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{Vmatrix}$. Відомо, що $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, де базис $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ — ортонормований. Знайти матрицю A^* спряженого оператора $\widehat{A}^*$ в базисі $\mathcal{B}'$.

◄ Базис $\mathcal{B}'$ — неортонормований (перевірити !). Тому, щоб скористатися формулою (20.23), потрібно знайти матрицю A оператора $\widehat{A}$ в ортонормованому базисі $\mathcal{B}$. Враховуючи співвідношення (20.23), маємо

$$A = HA'H^{-1},$$

де H — матриця переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$. Матриця

$$H = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix}, \quad H^{-1} = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Отже,

$$A = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$A^* = A^\top = \begin{Vmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Отже, матриця $A^{*'}$ оператора $\widehat{A}^*$ в базисі $\mathcal{B}'$ має вигляд:

$$A^{*'} = H^{-1}A^*H = \begin{Vmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{Vmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

§ 21. ВЛАСНІ ВЕКТОРИ І ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ЛІНІЙНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ (ОПЕРАТОРА)

1. Власні вектори та власні значення матриці

Відомо, що в різних базисах одному і тому ж лінійному перетворенню відповідають різні матриці. Тому виникає запитання: чи можливо знайти для даного перетворення такий базис, в якому матриця перетворення мала б найпростіший вигляд, наприклад, діагональний.

Для поставленої задачі важливе значення мають ненульові вектори $\mathbf{x} \in L$, які задовольняють за даного лінійного перетворення $\hat{A}$ умову

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x},$$

де λ – деяке число. Вектори $\mathbf{x}$ називають власними векторами перетворення.

Означення 6.16 *Власним вектором лінійного перетворення $\hat{A}$ простору L називається вектор $\mathbf{x} \in L$, який задовольняє умову:*

$$\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}. \tag{21.1}$$

Число λ називається **власним значенням**, або **власним числом** перетворення $\hat{A}$, що відповідає власному вектору $\mathbf{x}$.

Розглянемо тепер питання про знаходження власних значень і власних векторів лінійного перетворення.

Якщо в просторі L_n вибрати базис $\mathcal{B}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$, то у вибраному базисі лінійному перетворенню $\hat{A}$ відповідає матриця A, а вектору $\mathbf{x}$ – вектор-стовпець X з координат вектора $\mathbf{x}$. Тоді рівність (21.1) можна замінити рівносильною їй матричною рівністю

$$A \cdot X = \lambda \cdot X, \tag{21.2}$$

або

$$(A - \lambda E) \cdot X = 0, \tag{21.3}$$

де E – одинична матриця n-го порядку.

Рівняння (21.3) є матричним записом однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{21.4}$$

Система (21.4) має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21.5}$$

Рівняння (21.5) називається **характеристичним рівнянням матриці** A лінійного перетворення (оператора) $\hat{A}$. Це – рівняння n-го степеня відносно λ. Воно служить для знаходження власних значень матриці A оператора $\hat{A}$.

Отже, маємо доведену таку теорему:

- **Теорема 21.1**

Власні значення лінійного оператора (перетворення) збігаються з коренями характеристичного рівняння матриці цього оператора.

Ліву частину характеристичного рівняння (21.5) називають також **характеристичним многочленом** лінійного оператора.

Якщо з рівняння (21.5) знайдемо значення λ, то, підставляючи їх в рівняння (21.4), знайдемо ненульові розв'язки цієї системи. Це і будуть координати власних векторів.

Зауваження. Оскільки ми розглядаємо дійсні лінійні простори, то для комплексних значень λ будемо вважати, що відповідних їм власних векторів не існує.

- **Приклад 21.1**

Знайти власні значення і власні вектори лінійного перетворення, яке в деякому базисі задається матрицею

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{Vmatrix}.$$

◀ Складемо характеристичне рівняння матриці і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$. Це і є власні значення матриці A.

Знайдемо тепер коодинати власних векторів, підставляючи в систему

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + (3-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

на місце λ послідовно відповідні власні значення $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5$.

Координати власного вектора $\mathbf{x}_1$, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = -1$, знаходимо із системи

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = -x_1.$$

Звідси $\mathbf{x}_1 {=} (x_1; -x_1)$. Прийнявши $x_1 {=} \alpha$, отримаємо, що $\mathbf{x}_1 {=} \alpha(1, -1)$.

Аналогічно знаходимо власний вектор $\mathbf{x}_2 = (x_1, x_2)$, який відповідає власному значенню $\lambda_2 = 5$. Для знаходження x_1 та x_2 маємо систему

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 2x_1.$$

Отже, $\mathbf{x}_2 = (x_1, 2x_1)$. Якщо $x_1 = \beta$, отримаємо $\mathbf{x}_2 = (\beta, 2\beta)$. Тут α і β – довільні відмінні від нуля дійсні числа. ▶

Зауваження. Якщо $\mathbf{x}$ – власний вектор лінійного перетворення $\hat{A}$ з власним значенням λ, то вектор $\alpha\mathbf{x}$, який йому колінеарний, при будь-якому $\alpha \neq 0$ також буде власним вектором з тим самим власним значенням.

Справді, якщо $\hat{A}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$, то $\hat{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\hat{A}(\mathbf{x}) = \alpha(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\alpha\mathbf{x})$.

Сформулюємо ще декілька тверджень:

Твердження 1.

Якщо лінійний оператор діє в лінійному дійсному просторі, то характеристичний многочлен має дійсні коефіцієнти. Якщо при цьому n непарне, то характеристичне рівняння має хоча б один дійсний корінь. В цьому випадку лінійний оператор має хоча б один власний вектор.

Твердження 2.

Лінійний оператор не може мати більше ніж n різних власних значень, оскільки характеристичне рівняння має степінь n.

Твердження 3.

Власні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ лінійного оператора $\hat{A}$ з попарно різними власними значеннями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ лінійно незалежні.

Твердження 4.

Якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ лінійного оператора $\hat{A}$ різні, то відповідні їм власні вектори утворюють базис в n-вимірному лінійному просторі.

Це твердження випливає з твердження 3. Справді, якщо всі власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ різні, то відповідні їм власні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні, а тому їх можна взяти за базис n-вимірного простору.

- **Приклад 21.2**

Знайти нормовані власні вектори оператора $\hat{A}$, матриця якого

$$A = \begin{Vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

◀ Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Один з коренів цього рівняння $\lambda_1 = 1$. Тому многочлен $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$ ділиться без остачі на $\lambda - 1$. Тоді $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$. Отже, коренями характеристичного рівняння є $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Нехай власний вектор $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$ відповідає власному значенню λ. Тоді для знаходження власних векторів потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

при $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Нехай $\lambda_1 = 1$. Тоді система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} .$$

Прийнявши $x_1 = \alpha\,(\alpha \neq 0)$, знайдемо, що $x_2 = \alpha$, $x_3 = \alpha$. Якщо взяти $\alpha = 1$, то власний вектор $\mathbf{x}_1 = (1; 1; 1)$. Тоді $\mathbf{x}_1^o = \frac{\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Власні вектори, які відповідають власним значенням $\lambda_2 = 2$ та $\lambda_3 = 3$, відповідно

$$\mathbf{x}_2 = (1; 0; 1) \quad \text{та} \quad \mathbf{x}_3 = (1; 1; 0).$$

$$\text{Тодi} \quad \mathbf{x}_2^o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad i \quad \bar{x}_3^o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right). \quad ▶$$

2. Матриця лінійного перетворення в базисі з власних векторів

Розглянемо лінійне перетворення $\hat{A}$ n-вимірного простору L_n. Перетворенню $\hat{A}$ в деякому базисі відповідає матриця A. Припустимо, що власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матриці A дійсні й різні. Тоді, відповідні їм власні вектори $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ є лінійно незалежні, а отже утворюють базис в L_n.

Нехай A' – матриця перетворення $\hat{A}$ в базисі з власних векторів. Покажемо , що ця матриця — діагональна. Справді, якщо $\mathbf{x}_i$ $(i = \overline{1,n})$ – власні вектори перетворення $\hat{A}$, то

$$\hat{A}(\mathbf{x}_i) = \lambda_i \mathbf{x}_i, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Розкладемо вектор $\hat{A}(\mathbf{x}_i)$ за базисом $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$:

$$\hat{A}(\mathbf{x}_i) = a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + \ldots + a_{ni}\mathbf{x}_n, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$a_{1i}\mathbf{x}_1 + a_{2i}\mathbf{x}_2 + \ldots + a_{ni}\mathbf{x}_n = \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$a_{1i} = a_{2i} = \ldots = a_{i-1i} = a_{i+1i} = \ldots = a_{ni} = 0, \quad a_{ii} = \lambda_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Як бачимо, в цьому випадку всі елементи матриці A', крім діагональних, дорівнюють нулеві, а її діагональні елементи $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn}$ дорівнюють відповідно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, тобто є власними значеннями лінійного перетворення $\hat{A}$.

Отже, в базисі з власних векторів матриця A' лінійного перетворення буде діагональною

$$A' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}. \tag{21.6}$$

Якщо матриця H є матрицею переходу до базису з власних векторів, то згідно із співвідношенням (20.23):

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H. \tag{21.7}$$

З останнього співвідношення випливає, що для будь-якої невиродженої матриці A власні значення якої дійсні і різні, існує така матриця H (матриця переходу), що матриця $H^{-1}AH = A'$ буде діагональною, причому її діагональними елементами будуть власні значення матриці A.

Означення 6.17 *Лінійний оператор $\hat{A}$ називається оператором простої структури, якщо він має базис з власних векторів.*

Отже, якщо всі власні значення оператора $\hat{A}$ дійсні і різні, то оператор має просту структуру.

Сформулюємо **критерій простоти структури оператора:**[1]

- **Теорема 21.2**

  Для того, щоб існував базис із власних векторів оператора $\hat{A}$, необхідно і достатньо, щоб кожному власному значенню λ_i кратності k_i відповідало k_i лінійно незалежних власних векторів.

Враховуючи, що одному і тому ж лінійному оператору в різних базисах відповідають подібні матриці, останню теорему можна сформулювати так.

Якщо кожному власному значенню відповідає така кількість лінійно незалежних векторів, якою є кратність власного значення як кореня характеристичного многочлена, то **тоді і тільки тоді існує перетворення подібності**, яке приводить матрицю оператора до діагонального вигляду.

- **Приклад 21.3**

  Звести до діагонального вигляду матрицю $A=\left\|\begin{matrix}4 & -7\\ 2 & -5\end{matrix}\right\|$

◄ Складемо характеристичне рівняння матриці і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -7\\ 2 & -5-\lambda\end{vmatrix} = 0, \text{ або } \lambda^2+\lambda-6=0, \quad \text{звідки} \quad \lambda_1=-3,\ \lambda_2=2.$$

---

[1] Доведення див. [5]

Корені характеристичного рівняння дійсні й різні. Отже, власні вектори лінійно незалежні і утворюють базис. Знайдемо власні вектори. Маємо

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1-7x_2=0,\\ 2x_1-(5+\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Якщо $\lambda_1=-3$, то для знаходження власного вектора $\mathbf{x}_1$ отримуємо систему

$$\begin{cases}7x_1-7x_2=0\\ 2x_1-2x_2=0\end{cases}, \quad \Rightarrow \quad x_1=x_2.$$

Звідси $\mathbf{x}_1=\alpha(1,1)$, де α – довільне число. Якщо прийняти $\alpha_1=1$, то $\mathbf{x}_1=(1,1)$.

Аналогічно знайдемо, що $\mathbf{x}_2=(7,2)$. Матриця H переходу до нового базису $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$ з власних векторів має вигляд

$$H=\left\|\begin{matrix}1 & 7\\ 1 & 2\end{matrix}\right\|. \quad \text{Тоді} \quad H^{-1}=-\frac{1}{5}\left\|\begin{matrix}2 & -7\\ -1 & 1\end{matrix}\right\|.$$

Отже,

$$A'=H^{-1}AH=\left\|\begin{matrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\|.$$

Якщо змінити нумерацію власних значень ($\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$), то отримаємо, що

$$A'=\left\|\begin{matrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{matrix}\right\|. \quad ►$$

- **Приклад 21.4**

  Звести до діагонального вигляду матрицю

$$A=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|.$$

◄ Складемо характеристичне рівняння матриці і знайдемо його корені:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 4\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0, \quad \text{або} \quad \lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4=0,$$

Звідси $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2.$

Корені характеристичного рівняння дійсні й різні, а тому власні вектори лінійно незалежні і утворюють базис.

Координати власних векторів знайдемо із системи

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - \lambda x_3 = 0, \end{cases}$$

підставляючи замість λ послідовно відповідні власні значення

$$\lambda = \lambda_1 = 1 \qquad\qquad \lambda = \lambda_2 = 2 \qquad\qquad \lambda = \lambda_3 = -2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ -x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\mathbf{x}_1 = (5, -3, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (2, 0, -1)$. Матриця переходу до нового базису

$$H == \left\|\begin{matrix} 5 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{matrix}\right\|; \qquad H^{-1} = -\frac{1}{12}\left\|\begin{matrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & -9 & -6 \\ -3 & -1 & 6 \end{matrix}\right\|.$$

Тоді

$$A' = H^{-1} \cdot A \cdot H = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\right\|. \quad \blacktriangleright$$

- **Приклад 21.5**

Звести до діагонального вигляду матрицю

$$A = \left\|\begin{matrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{matrix}\right\|.$$

◀ Характеристичне рівняння матриці A має вигляд:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0,$$

звідси $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Знайдемо тепер координати власних векторів, підставляючи в систему

$$\begin{cases} (7-\lambda)x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0, \\ 10x_1 - (19+\lambda)x_2 + 10x_3 = 0, \\ 12x_1 - 24x_2 + (13-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

на місце λ послідовно відповідні власні значення. При $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ маємо

$$\begin{cases} 6x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0. \\ 10x_1 - 20x_2 + 10x_3 = 0. \\ 12x_1 - 24x_2 + 12x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Нехай $x_3 = 6$, $x_2 = 5$. Тоді $x_1 = 4$. Якщо прийняти $x_3 = 7$, $x_2 = 5$, то $x_1 = 3$. Отже, власному значенню $\lambda = 1$ кратності 2 відповідають два власні вектори $\mathbf{x}_1 = (4, 5, 6)$ та $\mathbf{x}_2 = (3, 5, 7)$, які є лінійно незалежними (перевірити!).

Якщо $\lambda = \lambda_3 = -1$, то для знаходження власного вектора $\mathbf{x}_3$ маємо систему:

$$\begin{cases} 8x_1 - 12x_2 + 6x_3 = 0. \\ 10x_1 - 18x_2 + 10x_3 = 0. \\ 12x_1 - 24x_2 + 14x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0. \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Віднімемо від другого рівняння перше і отримане рівняння візьмемо за перше рівняння системи, а друге і третє – залишимо без змін. Одержимо систему, еквівалентну даній, яка має вигляд

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 5x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Якщо перше рівняння системи послідовно помножити на -5 та -6 і додати до другого та третього рівнянь, то матимемо систему вигляду

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 6x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Приймемо $x_3 = 6$, тоді $x_2 = 5$, $x_1 = 3$. Отже, власний вектор $\mathbf{x}_3 = (3,5,6)$. Тоді

$$H = \left\|\begin{matrix}4 & 3 & 3\\ 5 & 5 & 5\\ 6 & 7 & 6\end{matrix}\right\|, \quad A' = H^{-1}AH = \left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}\right\|. \quad \blacktriangleright$$

3. Симетричні перетворення та їх матриці

Розглянемо ще один важливий клас лінійних перетворень евклідового простору – симетричні перетворення.

Означення 6.18 *Лінійне перетворення $\hat{A}$ евклідового простору E називається симетричним, якщо для довільної пари елементів $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ виконується умова*

$$\left(\hat{A}(\mathbf{x}), \mathbf{y}\right) = \left(\mathbf{x}, \hat{A}(\mathbf{y})\right).$$

Означення 6.19 *Квадратна матриця A називається симетричною, якщо*

$$A^{\mathrm{T}} = A.$$

Назва "симетрична матриця" цілком природна, оскільки елементи такої матриці, які розміщені симетрично відносно головної діагоналі, рівні $a_{ik} = a_{ki}$. Симетричні перетворення тісно пов'язані з симетричними матрицями. Доводиться, що матриця симетричного оператора $\hat{A} : E \to E$ в довільному ортогональному базисі – симетрична.

Зупинимось на деяких властивостях симетричних перетворень.

1. Власні значення симетричного оператора – дійсні числа.

Покажемо це на прикладі симетричної матриці другого порядку $A = \left\|\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{matrix}\right\|$. Характеристичне рівняння цієї матриці має вигляд

$$\left|\begin{matrix}a_{11} - \lambda & a_{12}\\ a_{12} & a_{22} - \lambda\end{matrix}\right| = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + 4a_{12}^2 =$$

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0,$$

що свідчить про те, що корені характеристичного рівняння, тобто власні значення λ_1 і λ_2 симетричної матриці A, дійсні числа.

2. Власні вектори симетричного перетворення – ортогональні.

Справді, нехай $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$ – власні вектори симетричного перетворення $\hat{A}$, що відповідає власним значенням λ_1 і λ_2, де $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тоді

$$\hat{A}(\mathbf{x}_1) = \lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \text{і} \quad \hat{A}(\mathbf{x}_2) = \lambda_2\mathbf{x}_2,$$

звідси

$$\left(\hat{A}(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2\right) - \left(\mathbf{x}_1, \hat{A}(\mathbf{x}_2)\right) = (\lambda_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) =$$

$$= (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Але перетворення $\hat{A}$ – симетричне, тобто

$$\left(\hat{A}(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2\right) = \left(\mathbf{x}_1, \hat{A}(\mathbf{x}_2)\right).$$

Тоді $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=0$. Враховуючи, що $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тому $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)=0$, тобто власні вектори $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$ – ортогональні.

Припустимо тепер, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Тоді

$$\lambda = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}, \qquad (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = 0.$$

З другої рівності випливає, що $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$.

Отже, $\lambda = a_{11} = a_{22}$, і матриця оператора має вигляд

$$A = \left\|\begin{matrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{matrix}\right\|.$$

Отже, оператор $\hat{A}$ є оператором подібності і кожен вектор є власним вектором. Тому за пару ортогональних векторів можна взяти будь-яку пару ненульових ортогональних векторів.

Висновок:

1. Якщо розглядати симетричну матрицю A як матрицю лінійного оператора $\hat{A}$ в деякому ортонормованому базисі, то завжди можна знайти новий ортонормований базис, який складається з власних векторів матриці A.
2. Оскільки перехід від одного ортонормованого базису до іншого здійснюється за допомогою ортогональної матриці, а в базисі із власних векторів матриця стає діагональною, то для кожної симетричної матриці A можна підібрати ортогональну матрицю H таку, що матриця $H^{T}AH$ буде діагональною, і в ній по діагоналі будуть знаходитись власні значення матриці A.

- **Приклад 21.6**

Знайти для симетричного перетворення $\hat{A}$, заданого матрицею A, ортонормований базис, в якому матриця перетворення буде діагональною, якщо

$$\text{а)}\quad A = \begin{Vmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{Vmatrix}, \qquad \text{б)}\quad A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

◄ Щоб розв'язати поставлену задачу, потрібно знайти повну ортонормовану систему власних векторів даного перетворення.

а) Власні значення матриці A шукаємо з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 12 & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0,$$

звідси $\lambda_1 = 20$, $\lambda_2 = -5$.

Для того, щоб знайти власні вектори, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 12x_2 = 0, \\ 12x_1 + (11-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

якщо $\lambda = 20$ і $\lambda = -5$.

Якщо $\lambda = 20$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} -16x_1 + 12x_2 = 0, \\ 12x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad 4x_1 - 3x_2 = 0, \quad x_1 = \frac{3}{4}x_2.$$

Приймемо x_2=4, тоді x_1=3, тобто маємо власний вектор $\mathbf{x}_1$=(3,4).

Якщо $\lambda = -5$, то $\mathbf{x}_2 = (4, -3)$.

Ортонормований базис із власних векторів

$$\mathbf{x}_1^o = \frac{\mathbf{x}_1}{||\mathbf{x}_1||} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \quad \mathbf{x}_2^o = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Тоді

$$H = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}, \quad H^{T} = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}$$

і матриця

$$A' = H^{T} \cdot A \cdot H = \begin{Vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -5 \end{Vmatrix}.$$

б) Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 6-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^3 - 10\lambda^2 + 12\lambda + 72 = 0,$$

і знайдемо власні значення перетворення: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$.

Складемо відповідні системи лінійних рівнянь для знаходження власних векторів

$$\lambda_1 = -2 \qquad\qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 6$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Перша з цих систем має розв'язок $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$, тобто $\mathbf{x}_1 = (1, 0, -1)$. Особливістю другої системи є те, що вона відповідає кратному кореню характеристичного рівняння.

Нам потрібно знайти два ортогональні власні вектори. Можна прийняти, наприклад, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, тобто $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 1)$. Вектор $\mathbf{x}_3 = (x_1, x_2, x_3)$ повинен бути ортогональним до $\mathbf{x}_1$ та $\mathbf{x}_2$, тобто його координати повинні задовольняти систему

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_3 = 0.$$

Тому можна взяти, що $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 0)$. Поділивши кожен з векторів на його норму, отримаємо шукану ортонормовану систему

$$\mathbf{x}_1^o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{x}_2^o = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{x}_3^o = (0, 1, 0),$$

яка є повною системою власних векторів перетворення $\hat{A}$. Відповідна діагональна матриця матиме вигляд:

$$A' = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{matrix} \right\|. \quad \blacktriangleright$$

§ 22. ЗВЕДЕННЯ ЗАГАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ НА ОСНОВІ ТЕОРІЇ КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ

1. Квадратичні форми та їх зведення до канонічного вигляду

Квадратичні форми. При дослідженні загальних рівнянь прямої в $\mathbf{R}^2$ та площини в $\mathbf{R}^3$ ми оперували однорідними многочленами першого степеня відносно двох чи трьох змінних, тобто

$$F(x, y) = ax + by \quad \text{чи} \quad F(x, y, z) = ax + by + cz,$$

де a, b, c — числові коефіцієнти. Їх називають лінійними формами. При дослідженні загальних рівнянь ліній чи поверхонь другого порядку зустрічаємось з однорідними многочленами другого степеня відносно двох чи трьох змінних. Їх називають квадратичними формами.

Вивчаючи n-вимірні простори, природно узагальнити ці поняття для однорідних многочленів другого степеня від n змінних.

Означення 6.20 *Квадратичною формою F від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен другого степеня відносно цих змінних:*

$$F = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, x_k, \quad a_{ik} = a_{ki} \tag{22.1}$$

де a_{ik} – числові коефіцієнти.

Із коефіцієнтів a_{ik} можна утворити матрицю $A = \|a_{ik}\|_1^n$, де $a_{ik} = a_{ki}$, яка називається **матрицею квадратичної форми** (22.1). Оскільки $a_{ik} = a_{ki}$, то матриця A квадратичної форми є симетрична, тобто $A = A^{\top}$.

Розглянемо, наприклад, квадратичну форму відносно трьох змінних

$$F = a_{11}\, x_1^2 + a_{22}\, x_2^2 + a_{33}\, x_3^2 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + 2a_{13}\, x_1\, x_3 + 2a_{23}\, x_2\, x_3. \tag{22.2}$$

Матриця

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix} \right\|$$

є матрицею квадратичної форми (22.2).

Позначимо через X вектор-стовпець, а через X^{T} – вектор-рядок із n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тоді квадратичну форму (22.1) можна записати у матричному вигляді

$$F = X^{\mathrm{T}} A X. \tag{22.3}$$

Справді,

$$\begin{aligned} F \;&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n) + \\ &+ x_2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ x_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n) = \end{aligned}$$

$$= \|x_1\, x_2\, \ldots\, x_n\| \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{matrix} \right\| = X^{\mathrm{T}} A X.$$

Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду

Розглянемо квадратичну форму (22.1) в просторі E_n. Тоді $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координати вектора $\mathbf{x} \in E_n$ в деякому ортонормованому базисі $\mathcal{B} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$. В цьому випадку квадратична форма (22.1) набуває вигляду

$$F = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \cdot A \cdot \mathbf{x}, \tag{22.4}$$

де $\mathbf{x} = ||x_1, x_2, \dots, x_n||^{\text{т}}$, $\mathbf{x}^{\text{т}} = ||x_1, x_2, \dots, x_n||$ – відповідно вектор-стовпець і вектор-рядок з координат вектора $\mathbf{x}$.

Перейдемо до нового ортонормованого базису $\mathcal{B}' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \dots, \bar{e}'_n)$. Якщо H – матриця переходу від базису $\mathcal{B}$ до базису $\mathcal{B}'$, то відповідне перетворення координат визначається співвідношенням

$$X = H \cdot X', \tag{22.5}$$

де $X = ||x_1, x_2, \dots, x_n||^{\text{т}}$, $X' = ||x'_1, x'_2, \dots, x'_n||^{\text{т}}$. Підставимо (22.5) в (22.3):

$$F = (HX')^{\text{т}} \cdot A \cdot (HX').$$

Оскільки $(HX')^{\text{т}} = X'^{\text{т}} \cdot H^{\text{т}}$, то

$$F = X'^{\text{т}} \cdot H^{\text{т}} \cdot A \cdot H \cdot X',$$

тобто

$$F = X'^{\text{т}} \cdot A' \cdot X', \quad \text{де} \quad A' = H^{\text{т}}AH.$$

Матриця A' – симетрична. Справді,

$$A'^{\text{т}} = (H^{\text{т}}AH)^{\text{т}} = H^{\text{т}} \cdot A^{\text{т}} \cdot H^{\text{т}^{\text{т}}} = H^{\text{т}}AH = A'.$$

Враховуючи, що перехід від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису здійснюється за допомогою ортогональної матриці, тобто $H^{\text{т}} = H^{-1}$, то $A' = H^{-1}AH$.

Матриця A – симетрична, а для кожної симетричної матриці існує така ортогональна матриця H, що матриця $H^{\text{т}}AH$ буде діагональною, в якій по головній діагоналі будуть знаходитись власні значення матриці A, тобто

$$A' = H^{-1}AH = \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix} \right\|.$$

Тоді квадратична форма в нових змінних набере вигляд

$$F = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2. \tag{22.6}$$

Отриманий вигляд для квадратичної форми називається **канонічним**. Числа λ_i $(i = \overline{1, n})$, які є власними значеннями матриці A, називаються характеристичними числами квадратичної форми (22.3). **Напрями власних векторів матриці A називаються головними напрямами квадратичної форми**.

Отже, квадратична фома набирає канонічний вигляд, якщо напрями осей координат збігаються з головними напрямами квадратичної форми.

• **Приклад 22.1**

Звести до канонічного вигляду квадратичну форму

$$F = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

◄ Матриця цієї квадратичної форми має вигляд:

$$A = \left\| \begin{matrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{matrix} \right\|.$$

Знайдемо її власні значення. Для цього складаємо характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad \text{або} \quad \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Розв'язуючи його, знайдемо характеристичні числа даної квадратичної форми: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$.

Отже, дана квадратична форма зводиться до канонічного вигляду

$$F = 3x_1'^2 + 6x_2'^2 + 9x_3'^2. \quad ►$$

2. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду на основі теорії квадратичних форм

Одним із важливих і цікавих застосувань теорії квадратичних форм є задача спрощення рівняння кривих і поверхонь другого порядку. Як вже говорилось, ця задача належить до тих, які визначили постановку основних питань теорії квадратичних форм.

Розглянемо зведення до канонічного вигляду загального рівняння лінії другого порядку:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \qquad (22.7)$$

Розглянемо спочатку суму членів другого степеня в лівій частині рівняння (22.7). Легко помітити, що це квадратична форма з симетричною матрицею

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Перейдемо до нової системи координат $Ox'y'$, осі якої спрямовані по напрямках власних векторів матриці A. Тоді квадратична форма набуває вигляду

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2,$$

де λ_1, λ_2 – власні значення матриці A, тобто корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Нумерацію власних чисел вибираємо так, щоб $\det H = 1$ (H – матриця переходу до ортонормованого базису з власних векторів матриці A).

Отже, рівняння (22.7) в нових координатах буде мати вигляд:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \qquad (22.8)$$

де a'_{13}, a'_{23}, a'_{33} – деякі нові коефіцієнти.

Розглянемо тепер два можливі випадки:

I. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

В цьому випадку в рівнянні (22.8) виділимо повні квадрати:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + \frac{2a'_{13}}{\lambda_1}x' + \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + \frac{2a'_{23}}{\lambda_2}y' + \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2^2} \right) + a'_{33} - \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2} - \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2^2} = 0,$$

або

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2} \right)^2 = K.$$

де

$$K = \frac{a'^2_{13}}{\lambda_1^2} + \frac{a'^2_{23}}{\lambda_2^2} - a'_{33}.$$

Перенесемо початок координат в точку $O'(-\frac{a'_{13}}{\lambda_1}, -\frac{a'_{23}}{\lambda_2})$ за допомогою формул

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{\lambda_1}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{23}}{\lambda_2}.$$

В результаті рівняння (22.8) набере вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = K. \qquad (22.9)$$

1). Якщо $K \neq 0$, то, поділивши рівняння (22.9) на K, отримаємо:

$$\frac{x''^2}{\frac{K}{\lambda_1}} + \frac{y''^2}{\frac{K}{\lambda_2}} = 1. \qquad (22.10)$$

а) Якщо обидві величини $\frac{K}{\lambda_1}$, $\frac{K}{\lambda_2}$ додатні, то рівняння (22.10), а значить і рівняння (22.7) зображає еліпс.

б) Якщо обидві величини $\frac{K}{\lambda_1}$, $\frac{K}{\lambda_2}$ від'ємні – маємо уявний еліпс, тобто рівняння (22.7) не представляє жодної лінії.

в) Якщо одна з цих величин додатна, а друга від'ємна, то маємо гіперболу.

2. Якщо $K = 0$, то рівняння (22.9) має вигляд:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 = 0. \qquad (22.11)$$

При цьому можливі два випадки:

а) Якщо λ_1 і λ_2 мають різні знаки, то ліва частина рівняння (22.11) розкладається на два дійсні лінійні множники як різниця квадратів. Рівняння (22.11), а тим самим і рівняння (22.7) буде парою прямих, які перетинаються.

б) Якщо λ_1 і λ_2 мають однакові знаки, то ліва частина рівняння (22.11) є сумою квадратів і, отже, розкладається на два множники першого степеня, проте обидва множники містять члени з уявними коефіцієнтами і ми маємо пару уявних прямих, які перетинаються, тобто рівняння (22.11) зображує одну дійсну точку.

II. Один із коефіцієнтів характеристичного рівняння λ_1 або λ_2 дорівнює нулю. Тоді рівняння (22.8) матиме вигляд:

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad \lambda_1 \neq 0, \tag{22.12}$$

або

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \quad \lambda_2 \neq 0. \tag{22.13}$$

Розглянемо рівняння вигляду (22.12) (для рівняння вигляду (22.13) міркування такі самі, лише x' та y' міняються ролями).

1) Якщо $a'_{23} \neq 0$, то рівняння (22.12) можна розв'язати відносно y' і ми отримаємо

$$y' = -\frac{\lambda_1}{2a'_{23}}x'^2 - \frac{a'_{13}}{a'_{23}}x' - \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}. \tag{22.14}$$

Рівняння (22.14), а отже, і рівняння (22.12) зображає параболу.

2) Якщо $a'_{23} = 0$, то рівняння (22.12) набере вигляд

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} = 0. \tag{22.15}$$

Розклавши ліву частину (22.15) на множники першого степеня, отримаємо:

$$\lambda_1 \left[x' - \frac{\sqrt{a'^2_{13} - a'_{33}\lambda_1} - a'_{13}}{\lambda_1}\right]\left[x' + \frac{\sqrt{a'^2_{13} - a'_{33}\lambda_1} + a'_{13}}{\lambda_1}\right] = 0. \tag{22.16}$$

Рівняння (22.16), а тим самим і рівняння (22.7),

якщо $a'^2_{13} - a'_{33}\lambda_1 > 0$ визначає пару паралельних прямих;
якщо $a'^2_{13} - a'_{33}\lambda_1 < 0$ — пару уявних паралельних прямих;
якщо $a'^2_{13} - a'_{33}\lambda_1 = 0$ дві прямі, які збігаються.

Отже, ми показали, що будь-яка лінія другого порядку є еліпс або гіпербола, або парабола, або пара прямих (які перетинаються, паралельні або збігаються).

Подібним способом зводиться до канонічного вигляду рівняння поверхні другого порядку

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$+2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \tag{22.17}$$

Спрямовуючи осі координат по головних напрямах квадратичної форми

$$F = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

зведемо її до канонічного вигляду

$$F = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2, \tag{22.18}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристичні числа квадратичної форми.

У новій системі координат рівняння (22.17) набере вигляд

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44} = 0,$$

Далі рівняння (22.17) спрощують за допомогою паралельного перенесення.

- **Приклад 22.2**

Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$$

та побудувати її графік.

◄ 1. Знаходимо власні значення матриці $A = \begin{Vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}$ квадратичної форми

$$F = 5x^2 + 8xy + 5y^2,$$

розв'язуючи характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Маємо

$$(5-\lambda)^2 - 16 = 0, \quad \text{звідси} \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

2. Знаходимо головні напрямки квадратичної форми, тобто власні вектори матриці A, із системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)l + a_{12}m = 0, \\ a_{12}l + (a_{22} - \lambda)m = 0, \end{cases}$$

де l, m – координати власного вектора $\mathbf{x}$, що відповідає власному значенню λ.

Нехай $\lambda = \lambda_1 = 1$. Тоді $\mathbf{x}_1 = (l_1; m_1)$, де l_1 та m_1 визначаємо із системи

$$4l_1 + 4m_1 = 0, \qquad 4l_1 + 4m_1 = 0.$$

Звідси $l_1 = -m_1$. Тоді $\mathbf{x}_1 = (l_1, -l_1)$. Одиничним вектором цього головного напряму буде вектор $x_1^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Аналогічно знайдемо, що $x_2^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Матриця H переходу до ортонормованого базису з власних векторів матриці A має вигляд

$$H = \left\| \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right\|.$$

3. Повернемо осі координат так, щоб напрями нових координатних осей збігались з головними напрямами квадратичної форми. Тоді координати вектора x_1^o будуть значеннями косинуса і синуса кута α повороту, оскільки лінійне перетворення, яке здійснює поворот системи координат навколо фіксованої точки, є ортогональним перетворенням з матрицею

$$H = \left\| \begin{matrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{matrix} \right\|.$$

Тоді $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

Виразимо змінні x, y через нові змінні x', y':

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\|,$$

тобто $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y')$.

Тепер можемо виразити через нові змінні x', y' лінійну частину заданого рівняння:

$$-18x - 18y + 9 = -\frac{18\sqrt{2}}{2}(x' + y') - \frac{18\sqrt{2}}{2}(-x' + y') + 9 = -18\sqrt{2}\,y' + 9.$$

Отже, після віднесення рівняння кривої до головних напрямів її рівняння набере вигляд

$$x'^2 + 9y'^2 - 18\sqrt{2}\,y' + 9 = 0.$$

Перетворимо отримане рівняння, виділивши повний квадрат:

$$x'^2 + 9(y'^2 - 2\sqrt{2}\,y' + 2) + 9 - 18 = 0$$

або

$$x'^2 + 9(y' - \sqrt{2})^2 = 9.$$

Здійснюючи паралельне перенесення початку в точку $O'(0, \sqrt{2})$ за формулами

$$x'' = x', \quad y'' = y' - \sqrt{2}$$

одержимо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x''^2}{9} + \frac{y''^2}{1} = 1.$$

4. Будуємо криву. Повертаємо систему Oxy на кут $\alpha = -45^o$ і переносимо початок координат в точку $O'(0, \sqrt{2})$. Побудувавши систему $O'x''y''$, будуємо криву (рис. 76). ►

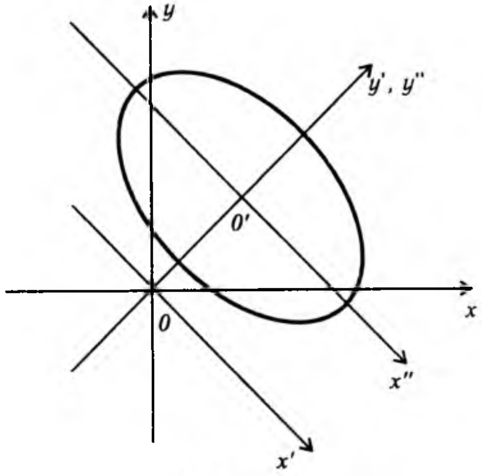


Рис. 76

- **Приклад 22.3**

Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$$

та побудувати її графік.

◄ 1. Знаходимо характеристичні числа квадратичної форми

$$F = 3x^2 + 10xy + 3y^2.$$

Складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad (3-\lambda)^2 = 25$$

звідси $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = -2$.

2. Складаємо відповідні системи лінійних рівнянь для визначення власних векторів

$$\begin{array}{cc} \underline{\lambda_1 = 8} & \underline{\lambda_2 = -2} \\ & \\ -5l_1 + 5m_1 = 0 & 5l_2 + 5m_2 = 0 \\ l_1 = m_1 & l_2 = -m_2 \\ \mathbf{x}_1 = (1;1) & \mathbf{x}_2 = (-1;1) \\ \bar{x}_1^o = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \bar{x}_2^o = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{array}$$

Отже, формули повороту осей до головних напрямів матимуть вигляд

$$x = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}y', \qquad y = \tfrac{\sqrt{2}}{2}x' + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y'.$$

На основі цих формул дістанемо, що

$$-2x-14y = -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 14\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = -8\sqrt{2}\,x' - 6\sqrt{2}\,y'$$

і початкове рівняння набере вигляд:

$$8x'^2 - 2y'^2 - 8\sqrt{2}\,x' - 6\sqrt{2}\,y' - 13 = 0$$

або після виділення повних квадратів

$$8\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8.$$

Здійснюючи паралельне перенесення за формулами

$$x'' = x' - \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad y'' = y' + \tfrac{3\sqrt{2}}{2}$$

отримаємо рівняння гіперболи

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{4} = 1.$$

3. Будуємо криву. Систему координат $Ox'y'$ одержимо із системи Oxy поворотом на кут $\alpha = 45^o$. Переносимо початок координат в точку $O'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

Побудувавши систему координат $O'x''y''$, будуємо криву (рис. 77). ►

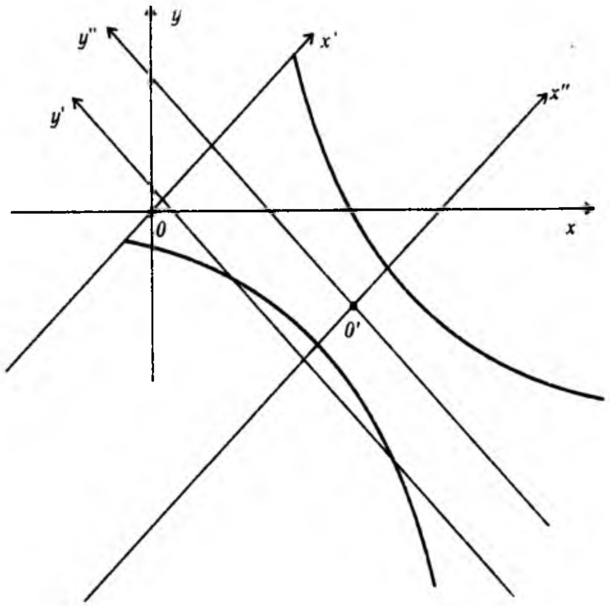


Рис. 77

- **Приклад 22.4**

Звести до канонічного вигляду рівняння кривої

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$$

та побудувати її графік.

◄ 1. Знайдемо власні значення матриці $A = \left\|\begin{matrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right\|$ квадратичної форми $F = 4x^2 - 4xy + y^2$, розв'язуючи характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{або} \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Звідси $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$.

2. Знаходимо власні вектори, які відповідають кореням характеристичного рівняння

$\lambda_1 = 0$	$\lambda_2 = 5$
$4l_1 - 2m_1 = 0$	$-l_2 - 2m_2 = 0$
$m_1 = 2l_1$	$l_2 = -2m_2$
$\mathbf{x}_1 = (1; 2)$	$\mathbf{x}_2 = (-2; 1)$
$\bar{x}_1^o = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}.\right)$	$\bar{x}_2^o = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$

Отже, формули повороту осей координат до головних напрямів матимуть вигляд

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{5}}x' - \tfrac{2}{\sqrt{5}}y',$$
$$y = \tfrac{2}{\sqrt{5}}x' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}y'.$$

На основі цих формул формул дістанемо, що

$$6x + 2y = 6\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) =$$

$$\frac{10}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' = 2\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y'.$$

Отже, початкове рівняння набере вигляд:

$$5y'^2 + 2\sqrt{5}\,x' - 2\sqrt{5}\,y' + 1 = 0$$

або, після виділення повного квадрата,

$$5\left(y'^2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' + \frac{1}{5}\right) + 2\sqrt{5}\,x' = 0,$$

тобто

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 2\sqrt{5}\,x' = 0.$$

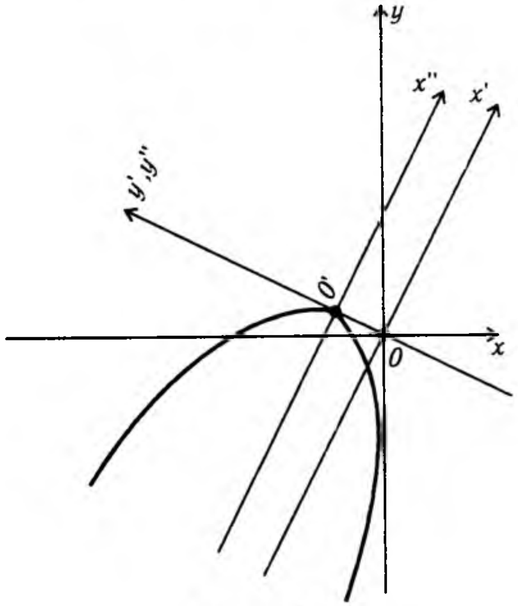


Рис. 78

Використовуючи лінійне перетворення координат

$$x'' = x', \quad y'' = y' - \tfrac{\sqrt{5}}{5}$$

тобто здійснюючи паралельне перенесення початку координат в точку $O'\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, отримаємо рівняння параболи

$$y''^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x''.$$

3. Для побудови кривої спершу знайдемо кут повороту α. Маємо: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, тоді $\mathrm{tg}\alpha = 2$ і $\alpha \sim 65^\circ$.

Будуємо криву. Повертаємо систему Oxy на кут $\alpha \sim 65^\circ$ і переносимо початок координат в точку $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. Побудувавши систему $O'x''y''$, будуємо криву (рис. 78). ▶

Список літератури

1. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. Изд. 2-М.: Гостехиздат, 1951.
2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Изд. 2-М.: Гостехиздат, 1956.
3. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Изд. 26-М.: Госиздат физико-математической литературы, 1961.
4. Ефимов Н.В. Квадратичные формы и матрицы. М.: Госиздат физико-математической литературы, 1963.
5. Рублев А.Н. Линейная алгебра. Москва: Высшая школа, 1968.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Наука, 1969.
7. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1971.
8. Беклемешев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1971.
9. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1978.
10. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.
11. Беклемешев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
12. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. Физматгиз, 1962.
13. Фадеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1968.
14. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука, 1969.
15. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. М.: Наука, 1975.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Рудавський Юрій Кирилович
Костробій Петро Петрович
Луник Хома Павлович
Уханська Дарія Василівна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Навчальний підручник
для студентів базових напрямків
інженерно-технічних спеціальностей

Редактор Чернигевич О.Б.

Здано у видавництво 7.11.2001. Підписано до друку 5.12.2001.
Формат 70x100 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 21,78. Обл.-вид. арк. 17,2.
Тираж 5 000 прим.

Видавництво «Бескид Біт»
м. Львів, вул. Городоцька, 85/21
тел.: (0322) 72-88-29, факс: (0322) 72-16-94
Друк ПТ ВФ «Афіша»