Вища математика

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

частина 2

- ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
- ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
- РЯДИ
- РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
- СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ
- ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
- МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
- ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Вища математика

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

частина **2**

У двох частинах

За загальною редакцією доктора технічних наук, професора П. П. Овчинникова

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих технічних навчальних закладів

- ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
- ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
- РЯДИ
- РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
- СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ
- ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ
- МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ
- ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Київ
"Техніка"
2003

ББК 22.11я73
В55
УДК 51(075.8)

*Гриф надано Міністерством освіти
і науки України,
лист № 14/18.2-1244 від 13.06.2002 р.*

Автори: *П. П. Овчинников, П. С. Кропив'янський, С. П. Полушкін, І. І. Рябець, О. Ф. Кривий, Х. І. Гаврильченко, Г. В. Нагеві, Т. І. Єрофєєва, Н. Д. Орлова, В. Г. Попов, В. Л. Воробйов, О. Х. Чабан, Т. М. Івахненко, О. Ф. Бурденко, Т. М. Сапронова, О. В. Литвин, Г. І. Федорова*

Рецензент: д-р фіз.-мат. наук, проф. *Г. М. Губреєв*

В55 **Вища** математика: Зб. задач: У 2 ч. Ч. 2: Звичайні диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди. Рівняння мат. фізики. Стійкість за Ляпуновим. Елементи теорії ймовірностей і мат. статистики. Методи оптимізації і задачі керування. Варіаційне числення. Числові методи: Навч. посіб. для студ. вищ. техн. навч. закл. / П. П. Овчинников, П. С. Кропив'янський, С. П. Полушкін та ін.; За заг. ред. П. П. Овчинникова. – К.: Техніка, 2003. – 376 с.: іл.

ISBN 966-575-119-0 (повне зібрання)

ISBN 966-575-115-8 (частина 2)

Збірник містить задачі та вправи з вищої математики для самостійної роботи студентів. Наведено приклади розв'язання типових задач. Матеріал розподілено по темах відповідно до теоретичного курсу, викладеного в підручнику П. П. Овчинникова "Вища математика" (частина 2), виданого 2000 р.

ББК 22.11я73

ISBN 966-575-119-0 (повне зібрання)
ISBN 966-575-115-8 (частина 2)

Глава 1

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1.1. РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

***Приклади.* 1.** Скласти диференціальне рівняння сім'ї кривих [ч. 2, с. 8–9]*

$$y = -\frac{1}{x+C}.$$

Розв'язання. Вираз $y' = \frac{1}{(x+C)^2}$ не може називатися диференціальним рівнянням, поки не буде виключено C. Із вихідного рівняння знайдемо $x + C = -\frac{1}{y}$, тоді $y' = y^2$ – шукане диференціальне рівняння.

Відповідь: $y' = y^2$.

2. Скласти диференціальне рівняння, загальним розв'язком якого є функція

$$y = C_1 \sin(ax + C_2). \tag{1.1}$$

Розв'язання. Ця функція включає дві сталі змінні, тому вона є розв'язком рівняння другого порядку. Диференціюючи двічі, маємо

$$y' = C_1 a \cos(ax + C_2);\ y'' = -C_1 a^2 \sin(ax + C_2).$$

Поділивши останній вираз на a^2 і склавши із заданою функцією (1.1), дістанемо

$$\frac{y''}{a^2} + y = C_1 \sin(ax + C_2) - C_1 \sin(ax + C_2) = 0,$$

звідки

$$\frac{y''}{a^2} + y = 0. \tag{1.2}$$

В одержаному рівнянні (1.2) загальним розв'язком є функція (1.1).

Відповідь: $\frac{y''}{a^2} + y = 0$.

Знайти диференціальні рівняння сімей ліній. Вказати властивості цих ліній.

1. $y = Cx$. **2.** $x^2 + y^2 = C^2$.

3. $y = Cx^2$. **4.** $y = Ce^{\frac{x}{C}}$.

---

* Тут і надалі у квадратних дужках наведено посилання на підручник Овчинников П. П. Вища математика: У 2 ч. – К.: Техніка, 2000.

Знайти диференціальні рівняння, розв'язком яких є задані функції.

5. $y^2 = 2p(x+C)$, де p – задане число.

6. $y = Ce^{kx}$, де k – задане число.

7. $y = (x+C)^2$, $x \geq -C$.

8. $y = \sin(x+C)$.

9. $x^2 + Cy^2 = 2y$.

1.2. МЕТОДИ ІЗОКЛІН І ЛАМАНИХ ЕЙЛЕРА ДЛЯ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Приклади. **1.** Методом ізоклін розв'язати задачу Коші $yy' + x = 0$, $y(0) = 1$.

Розв'язання. Запишемо задане рівняння у вигляді $y' = f(x, y)$, тобто $y' = -\dfrac{x}{y}$, тоді $y = -\dfrac{1}{C}x$ – рівняння ізоклін. Це рівняння прямої, що проходить через початок координат. Отже, ізоклінами є прямі, що проходять через початок координат.

Побудуємо ізокліни, вважаючи, що значення $\dfrac{dy}{dx}$ дорівнюють 0; $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}$; $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $+\infty$. Дістанемо рівняння ізоклін – ліній з однаковим нахилом дотичних до інтегральних кривих у відповідних точках.

Прийнявши $y' = 0$, маємо, з одного боку, рівняння ізокліни $x = 0$, а з другого – геометричний зміст похідної $\operatorname{tg}\alpha = 0$. Звідси $\alpha = 0$, тобто дотичні до інтегральних кривих, що проходять через точки ізокліни $x = 0$, мають кут нахилу $\alpha = 0$. Аналогічно одержимо рівняння ізоклін для всіх прийнятих значень похідних:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}};\ y' = \sqrt{3};\ y' = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$y = -\sqrt{3}x;\ y = -\frac{x}{\sqrt{3}};\ y = \sqrt{3}x;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3};\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\alpha = 30°;\ \alpha = 60°;\ \alpha = 150°;$$

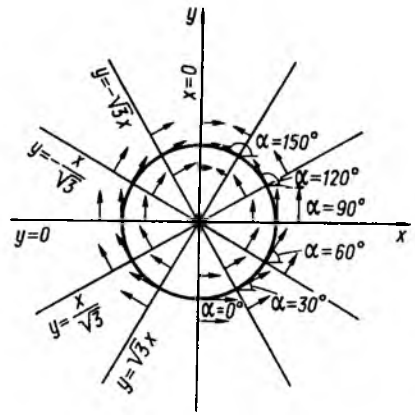

Рис. 1.1

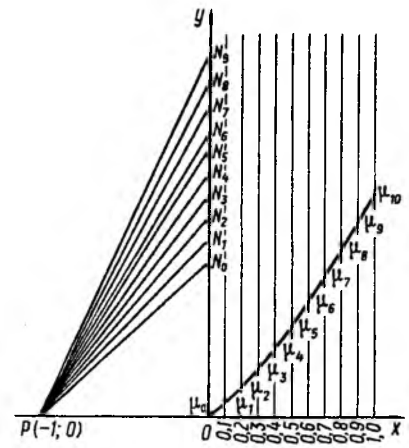

Рис. 1.2

$$y' = -\sqrt{3};\ y' = +\infty;$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}};\ y = 0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3};\ \operatorname{tg}\alpha = \infty;$$

$$\alpha = 120°;\ \alpha = 90°.$$

Зобразимо поле направлень та графік розв'язку задачі Коші (рис. 1.1), тобто інтегральну криву, що проходить через точку $(0;\ 1)$ і перетинає кожну з ізоклін під відомим кутом. Побудована інтегральна крива нагадує коло.

Дійсно, загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд $y^2 + x^2 = C$. Позначимо $C = R^2$ і отримаємо $y^2 + x^2 = R^2$ – рівняння кіл із центром у початку координат довільного радіуса R.

2. Розв'язати задачу Коші $y' = y + 1$, $y(0) = 0$ методом ламаних Ейлера. Знайти $y(1)$, прийнявши крок $h = 0{,}1$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[0;\ 1]$ на 10 частин. Рекурентна формула для обчислень значень функції має вигляд

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1},\ y_{i-1}),$$

де $x_i = x_{i-1} + h$, $i = 1, 2, \ldots, 10$; y_i – значення невідомої функції в точці x_i. За даною точкою $\mu_0(0;\ 0)$ і рівнянням $y' = y + 1$ знаходимо y_0'. На осі Ox ліворуч від початку координат будуємо відрізок $OP = 1$. На осі Oy (рис. 1.2) відкладаємо

$y_0' = ON_0$ у масштабі OP і з'єднуємо точку P з N_0, тоді з трикутника OPN_0 маємо $\frac{y_0'}{1} = \operatorname{tg} \alpha$. Із точки μ_0 проводимо пряму, паралельну PN_0, до перетину з прямою $x = 0.1$. Маємо точку μ_1 з координатами $\mu_1(0,1;\ 0,1)$. За x_1 і y_1 знаходимо y_1' і на осі Oy відкладаємо відрізок $ON_1 = y_1'$. Із точки μ_1 проводимо пряму, паралельну PN_1, до перетину з прямою $x = 0,2$ і т. д. Точки μ_n мають такі координати: $\mu_0(0;\ 0)$, $\mu_1(0,1;\ 0,1)$, $\mu_2(0,2;\ 0,21)$, $\mu_3(0,3;\ 0,331)$, $\mu_4(0,4;\ 0,464)$, $\mu_5(0,5;\ 0,61)$, $\mu_6(0,6;\ 0,772)$, $\mu_7(0,7;\ 0,949)$, $\mu_8(0,8;\ 1,144)$, $\mu_9(0,9;\ 1,36)$, $\mu_{10}(1;\ 1,6)$.

Вихідне рівняння має точний розв'язок: $y = e^x - 1$. Пояснимо, як його знайдено. Перевіряємо, чи є функція $y = e^x - 1$ розв'язком вихідного рівняння. Підставимо y і $y' = e^x$ у вихідне рівняння і дістанемо тотожність $e^x = e^x - 1 + 1$. Отже, функція $y = e^x - 1$ є розв'язком вихідного рівняння.

Методом ламаних Ейлера знайдено ламану, близьку до графіка функції $y = e^x - 1$.

Для розв'язання даної задачі можна використати обчислювальну техніку. Для обчислення значень функції $y_i\ (i = 1,\ 2, \ldots, 10)$ складемо програму обчислення значень на мові Бейсику.

```
10   PRINT "Розв'язання одного диференціального рівняння першого порядку"
20   PRINT "методом Ейлера"
30   PRINT "Праву частину диференціального рівняння запишіть у рядок 120"
40   INPUT "Задайте крок інтегрування"; H
50   INPUT "Уведіть початкове значення аргумента XO"; X
60   INPUT "Уведіть початкове значення функції YO = "; Y
70   INPUT "Уведіть кінцеве значення аргумента XK ="; XK
80   PRINT "X =";X,"Y = "; Y
90   GOSUB 120: У = У + F * H
100  X = X + H:X = INT (X * 1000000 ! + . 5)/ 1000000 #: PRINT "X =";X,"Y = "; Y
110  IF X<XK THEN GOTO 90 ELSE STOP
120  F = X * Y
130  RETURN
```

Для користування цією програмою треба записати в рядок 120 програми праву частину диференціального рівняння. При цьому аргумент позначити літерою "X", а невідому функцію – " Y".

Результати обчислень видаються у вигляді такої таблиці:

$x = 0$	$y = 0$
$x = 0,1$	$y = 0,1$
$x = 0,2$	$y = 0,21$
$x = 0,3$	$y = 0,331$
$x = 0,4$	$y = 0,4641$
$x = 0,5$	$y = 0,61051$
$x = 0,6$	$y = 0,771561$
$x = 0,7$	$y = 0,9487171$
$x = 0,8$	$y = 1,1435888$
$x = 0,9$	$y = 1,3579477$
$x = 1,0$	$y = 1,5937425$

Методом ізоклін наближено знайти розв'язок даних рівнянь, якщо $y(1) = -1$.

10. $xy' = 2y$.

11. $(x - y)y' = x + y$.

12. $y' = y - x^2$.

Методом ламаних Ейлера розв'язати задачі Коші.

13. $y'x^2 + y^2 = 0$, $y(-1) = 1$, $h = 0,1$.

14. $y'(x^2 + 1) + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$, $h = 0,2$.

1.3. РІВНЯННЯ З ВІДОКРЕМЛЮВАНИМИ ЗМІННИМИ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $xydx + (x+1)dy = 0$.

Розв'язання. Розділивши обидві частини рівняння на $y(x+1) \neq 0$, маємо

$$\frac{x}{x+1}dx + \frac{dy}{y} = 0.$$

Інтегруючи, дістанемо $x - \ln|x+1| + \ln|y| = \ln|C|$, або $y = C(x+1)e^{-x}$. Це загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Нехай тепер $y(x+1) = 0$, тобто $y = 0$ або $x + 1 = 0$. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $y = 0$ і $x = -1$ є розв'язками вихідного рівняння. Розв'язок $y = 0$ є частинним, оскільки він міститься у загальному розв'язку при $C=0$. Розв'язок $x=-1$ вихідного рівняння є особливим, тому що його немає в загальному ні при якому значенні довільної сталої C.

Відповідь: $y=C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $xy'+y=y^2$, що задовольняє початкову умову $y(1)=0{,}5$.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x},\ x\left(y^2-y\right)\neq 0.$$

Інтегруючи, знаходимо $\ln|y-1|-\ln|y|=\ln|x|+\ln|C|$, або $y(1-Cx)=1$. Загальний розв'язок знайдено за умови $x\left(y^2-y\right)\neq 0$. Якщо $x\left(y^2-y\right)=0$, то або $x=0$, або $y=0$, або $y=1$. Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що $x=0$ не є розв'язком вихідного рівняння, $y=1$ – частинний розв'язок, оскільки він є у загальному при $C=0$, а $y=0$ – розв'язок рівняння, але у загальному його немає ні при якому значенні довільної сталої C. Застосовуючи початкові умови, знаходимо значення довільної сталої C: $0{,}5(1-C)=1$, тобто $C=-1$.

Отже,

$$y(1+x)=1,$$

тобто

$$y=\frac{1}{1+x},\ x\neq -1.$$

Відповідь: $y=\dfrac{1}{1+x}$.

3. Зінтегрувати $y'=(x-y)^2+1$.

Розв'язання. Як бачимо з рівняння, змінні не розділяються. Дуже часто для розділення змінних необхідно ввести нову змінну або невідому (виконати підстановку). У даному прикладі введемо нову невідому функцію за формулою $x-y=u(x)$. Тоді після диференціювання отримаємо $1-y'=u'$, звідки $y'=1-u'$. Далі перейдемо в рівнянні до нової функції $1-u'=u^2+1$; $u'=-u^2$; $\dfrac{du}{dx}=-u^2$ і дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$-\frac{du}{u^2}=dx;\ -\int u^{-2}du=x+C;\ \frac{1}{u}=x+C;$$

$$u=\frac{1}{x+C};\ x-y=\frac{1}{x+C};\ y=x-\frac{1}{x+C}.$$

Відповідь: $y=x-\dfrac{1}{x+C}$.

4. Розв'язати рівняння $2y'+y^2+\dfrac{1}{x^2}=0$.

Розв'язання. Розділити змінні в заданому рівнянні можна підстановкою $xy=u(x)$. Тоді $u'=y+xy'$; $xy'=u'-y$; $y=\dfrac{u}{x}$; $y'=\dfrac{u'}{x}-\dfrac{y}{x}$; $y'=\dfrac{u'}{x}-\dfrac{u}{x^2}$;

$y'=\dfrac{u'x-u}{x^2}$; $2\dfrac{u'x-u}{x^2}+\dfrac{u^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=0$; $2u'x+u^2-2u+1=0$; $2u'x+(u-1)^2=0$;

$2\dfrac{du}{dx}x=-(u-1)^2$; $2\dfrac{du}{(u-1)^2}=-\dfrac{dx}{x}$; $2\int(u-1)^{-2}du=-\int\dfrac{dx}{x}+C$; $2\dfrac{(u-1)^{-2+1}}{-2+1}=-\ln x+C$;

$\dfrac{-2}{u-1}=C-\ln x$; $\dfrac{-2}{C-\ln x}=u-1$; $xy-1=\dfrac{-2}{C-\ln x}$; $(xy-1)(\ln x-C)=2$.

Відповідь: $(xy-1)(\ln x-C)=2$.

Розв'язати рівняння.

15. 1) $2x^2yy'+y^2=2$;

2) $\left(xy^2-y^2+x-1\right)dx+\left(x^2y-2xy+x^2+2y-2x+2\right)dy=0.$

16. 1) $\sqrt{y^2+1}\ \ dx=xydy$;

2) $\left(1+y^2\right)dx=\left(y-\sqrt{1+y^2}\right)\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}dy.$

17. 1) $yy'=-2x\sec y$;

2) $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dx+\left(\sqrt{xy}+\sqrt{y}\right)dy=0.$

18. 1) $5e^x\operatorname{tg} y\,dx+\left(1-e^x\right)\sec^2 ydy=0$;

2) $4e^x\operatorname{tg} ydy+\left(1+e^x\right)\sec^2 ydy=0.$

19. 1) $\ln\cos ydx+x\operatorname{tg} ydy=0$;

2) $\left(1+y^2\right)\left(e^{2x}dx-e^ydy\right)-(1+y)dy=0.$

20. 1) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

2) $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

21. 1) $y'y\sqrt{\dfrac{4-x^2}{3-y^2}} + 1 = 0$;

2) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$.

22. 1) $x^2(5+y^2)dx + 4(x^2y+y)dy = 0$;

2) $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$.

23. 1) $y'\cos^5 3x\cos y + \sin^3 y\sin 3x = 0$;

2) $\operatorname{tg} x \sec^2 y dx + \operatorname{ctg} y \cos^2 x dy = 0$.

Розв'язати задачі Коші.

24. 1) $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)y^2dy = 0$, $y(0) = 1$;

2) $y\ln^3 y + y'\sqrt{x+1} = 0$, $y\left(-\dfrac{15}{16}\right) = e$.

25. 1) $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$, $y(1) = 0$;

2) $x(y^6+1)dx + y^2(x^4+1)dy = 0$, $y(0) = 1$.

26. 1) $\operatorname{tg} y dx - x\ln x dy = 0$, $y(e) = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $y' + \cos(x+2y) = \cos(x-2y)$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

27. 1) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$;

2) $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$, $y(0) = 0$.

28. 1) $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = -1$;

2) $(x-1)e^{1+x^2}\operatorname{tg} y dx = e^{2x}dy$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4. РІВНЯННЯ З ОДНОРІДНОЮ ФУНКЦІЄЮ

***Приклади.* 1.** Розв'язати рівняння $(x+2y)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Це рівняння з однорідною функцією. Функції $(x+2y)$ та x – однорідні першого виміру. Припустимо $y = tx$. Тоді $dy = t\,dx + x\,dt$ і рівняння набуває вигляду

$$(x+2tx)dx - x(t\,dx + x\,dt) = 0,$$

або

$$(1+t)dx = x\,dt.$$

Розв'яжемо здобуте рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t+1},\ x(t+1) \neq 0,\ \ln|C| + \ln|x| = \ln|t+1|,$$

або

$$t+1 = Cx,\ t = Cx - 1.$$

Повертаючись до невідомої функції $y\left(t = \dfrac{y}{x}\right)$, дістаємо відповідь $y = (Cx-1)x$.

Крім того, є розв'язок $x = 0$, який було загублено при діленні на x.

Відповідь: $y = (Cx-1)x$, $x = 0$.

2. Розв'язати задачу Коші

$$xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x},\quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Розв'язання. Задано рівняння з однорідною функцією. Поділивши обидві його частини на x, дістанемо

$$y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x},\ x \neq 0. \qquad (4.1)$$

Зробимо заміну $\dfrac{y}{x} = t$, або $y = tx$, тоді $dy = t\,dx + x\,dt$. Підставивши це в рівняння (4.1), маємо $t\,dx + xdt - tdx = \operatorname{tg} tdx$, або $xdt = \operatorname{tg} tdx$. Розв'яжемо здобуте диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\int \operatorname{ctg} t dt = \int\frac{dx}{x},\ \ln|\sin t| = \ln|x| + \ln|C|,\ t = \arcsin(Cx).$$

Повертаючись до невідомої функції y, отримуємо $y = x\arcsin(Cx)$. Враховуючи початкові умови, здобудемо $\frac{\pi}{2} = \arcsin C$, звідси $C = 1$. Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд $y = x\arcsin x$.

Відповідь: $y = x\arcsin x$.

Розв'язати рівняння.

29. 1) $y^2 + x^2y' = xyy'$; 2) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} - 4$.

30. 1) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$; 2) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

31. 1) $xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$; 2) $x(2x+y)y' = y(x+y)$.

32. 1) $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$; 2) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$.

33. 1) $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$; 2) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

34. 1) $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$; 2) $xy^2dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$.

Розв'язати задачі Коші.

35. 1) $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$;

2) $x^3y' = y\left(x^2 + y^2\right)$, $y(1) = \frac{1}{12}$.

36. 1) $\left(x^4 + 6x^2y^2 + y^4\right)dx + 4xy\left(x^2 + y^2\right)dy = 0$, $y(1) = 0$;

2) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$, $y(1) = -4$.

37. 1) $xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$;

2) $xydy = \left(y^2 + (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}\right)dx$, $y(1) = 0$.

38. 1) $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$, $y(1) = 0$;

2) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$, $y(1) = 0$.

39. 1) $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$, $y(1) = e^{\pi}$;

2) $2y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$, $y(2) = 1$.

1.5. РІВНЯННЯ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО РІВНЯНЬ З ОДНОРІДНОЮ ФУНКЦІЄЮ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$, що зводиться до рівняння з однорідною функцією.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $y = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right)$ [ч. 2, с. 23], а саме:

$$y' = -\frac{2x + y - 1}{x - 2y + 3}.$$

Знаходимо $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5 \neq 0$. Оскільки $\Delta \neq 0$, рівняння належить до другого типу [ч. 2, с. 24]. Знайдемо точку перетину прямих $2x + y - 1 = 0$ і $x - 2y + 3 = 0$. Маємо

$$x = h = -\frac{1}{5}, \quad y = k = \frac{7}{5}.$$

Зробимо заміну

$$x = x_1 - \frac{1}{5}, \quad y = y_1 + \frac{7}{5}, \quad dx = dx_1, \quad dy = dy_1.$$

Рівняння набуває вигляду

$$(2x_1 + y_1)dx_1 + (x_1 - 2y_1)dy_1 = 0$$

і являє собою рівняння з однорідною функцією. Замінимо $y_1 = tx_1$ і отримаємо $dy_1 = x_1dt + tdx_1$, звідки дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними $\left(2 + 2t - 2t^2\right)dx_1 + x_1(1 - 2t)dt = 0$. Розв'язуючи його, маємо

$$-\ln|x_1| + \ln|C_1| = \frac{1}{2}\ln\left|t^2 - t - 1\right|, \text{ або } \frac{C_1^2}{x_1^2} = t^2 - t - 1.$$

Повертаючись до змінних x_1, y_1, дістаємо $C_1^2 = y_1^2 - x_1y_1 - x_1^2$. Беручи до уваги те, що $x_1 = x + \frac{1}{5}$ та $y_1 = y - \frac{7}{5}$, отримуємо

$$C_1^2 - \frac{11}{5} = y^2 - x^2 - xy - 3y + x.$$

Тоді загальний інтеграл

$$x^2 + xy + 3y - x - y^2 = C,$$

де

$$C = \frac{11}{5} - C_1^2.$$

Відповідь: $x^2 + xy + 3y - x - y^2 = C$, де $C = \frac{11}{5} - C_1^2$.

2. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{x - 2y + 3}{2x - 4y - 1}$, що зводиться до рівняння з однорідною функцією.

Розв'язання. Рівняння належить до третього типу [ч. 2, с. 24], оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Виконавши заміну $x - 2y = z$ і $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{dz}{dx}\right)$, дістанемо рівняння з відокремлюваними змінними

$$-\frac{z}{2z-1} = \frac{dz}{dx}.$$

Розв'язуючи його, отримуємо

$$z^2 - z + 7x = C.$$

Повертаючись до невідомої функції y, маємо

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x + 2y = C.$$

Відповідь: $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x + 2y = C$.

Розв'язати рівняння.

40. $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{2x - 2}$.

41. $y' = \dfrac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$.

42. $y' = \dfrac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$.

43. $y' = \dfrac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1}$.

44. $y' = -\dfrac{2x - y + 1}{2y - x - 1}$.

45. $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$.

46. 1) $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$;

2) $(x - 2y - 5)dx + (2x - y + 4)dy = 0$.

1.6. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

***Приклади*. 1.** Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння $xz' - 2z = 0$.

Поділивши змінні, дістанемо

$$\frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x},\ x,\ z \neq 0.$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння: $\ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C|$. Дістанемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння $z = Cx^2$. Далі знайдемо розв'язок вихідного неоднорідного рівняння, розв'язавши однорідне рівняння з довільною сталою, яка є функцією від x (метод варіації довільної сталої [ч. 2, с. 28]):

$$y = C(x)x^2,$$

де $C(x)$ – невідома функція. Підставивши у вихідне рівняння $y = C(x)x^2$ і $y' = C'(x)x^2 + 2xC(x)$, матимемо

$$C'(x)x^3 = 2x^4,\ C'(x) = 2x.$$

Звідси

$$C(x) = x^2 + C.$$

Загальним розв'язком лінійного неоднорідного рівняння є

$$y = (x^2 + C)x^2 = x^4 + Cx^2.$$

Відповідь: $y = (x^2 + C)x^2$.

2. Розв'язати рівняння $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок даного рівняння у вигляді добутку двох функцій (метод Бернуллі – Фур'є) [ч. 2, с. 31]:

$$y = u(x)v(x).$$

Маємо

$$x[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] + (x+1)u(x)v(x) = 3x^2 e^{-x},$$

або

$$[xu'(x) + (x+1)u(x)]v(x) + xu(x)v'(x) = 3x^2 e^{-x}.$$

Виберемо функцію $u(x)$ так, щоб $xu'(x) + (x+1)u(x) = 0$, тоді

$$xu(x)v'(x) = 3x^2 e^{-x},$$

або

$$u(x)v'(x) = 3xe^{-x}.$$

Розв'язавши здобуте рівняння, знайдемо $u(x)$:

$$xu'(x) = -(x+1)u(x).$$

Поділимо змінні

$$\frac{du}{u} = -\frac{x+1}{x}dx.$$

Почленно зінтегруємо

$$\ln|u| = -x - \ln|x|.$$

Звідси

$$u = e^{-x}\frac{1}{x}$$

(тут при інтегруванні прийняли $C = 0$, оскільки $u(x)$ – довільна).

Тепер знайдемо $v(x)$:

$$v'(x)e^{-x}\frac{1}{x} = 3xe^{-x},$$

або $$v'(x) = 3x^2.$$

звідси $$v = x^3 + C.$$

Нарешті маємо

$$y = u(x)v(x) = x^2 e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}.$$

Відповідь: $y = x^2 e^{-x} + \frac{C}{x}e^{-x}$.

Розв'язати рівняння.

47. $y' - y\sin x = \sin x \cos x$.

48. 1) $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$;

2) $xy' - 2y + x^2 = 0$.

49. $y' + y\cos x = e^{-\sin x}$.

50. 1) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$;

2) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$.

51. 1) $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x + \frac{x^2\cos x}{\sin x}$;

2) $y'x\ln x - (1+\ln x)y + \sqrt{x}(1+\ln\sqrt{x}) = 0$.

52. 1) $ydx - (x + y^2\sin y)dy = 0$ (лінійне відносно $x(y)$);

2) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

53. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

54. 1) $(xy' - 1)\ln x = 2y$;

2) $y'x\ln x - y' = x^3(3\ln x - 1)$.

55. 1) $(\sin^2 y + x\,\mathrm{ctg}\,y)dy = dx$ (лінійне відносно $x(y)$);

2) $y' - \frac{2y}{x} = \frac{e^x(x-2)}{x}$.

Розв'язати задачі Коші.

56. 1) $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^3}$, $y(1) = 1$;

2) $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 3$.

57. 1) $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$;

2) $(1+x)y' + y + x^2(1+x) = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{12}$.

58. 1) $y' - \dfrac{1}{x+2}y = x^2 + 4x + 5$, $y(-1) = \dfrac{3}{2}$;

2) $xy' + y = x(2\ln x + 1)$, $y(1) = 2$.

59. 1) $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$, $y(e) = \dfrac{e^2}{2}$;

2) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$, $y(0) = 1$.

1.7. РІВНЯННЯ БЕРНУЛЛІ

Приклад. Розв'язати рівняння $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$.

Розв'язання. Перетворимо задане рівняння в рівняння Бернуллі [ч. 2, с. 33]:

$$y' + \frac{2}{x}y = -x^4y^3e^x.$$

Поділивши його на y^3, дістанемо

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{xy^2} = -x^4e^x, \quad y \neq 0.$$

Зробимо заміну

$$z = \frac{1}{y^2},$$

тоді

$$z' = -\frac{2y'}{y^3}.$$

Тепер отримуємо лінійне неоднорідне рівняння

$$-\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z = -x^4e^x,$$

або

$$z' - \frac{4}{x}z = 2x^4e^x.$$

Розв'яжемо його методом Бернуллі – Фур'є. Припустимо, що $z(x) = u(x)v(x)$, тоді

$$z' = u'v + uv'$$

і рівняння набуває вигляду

$$uv' + u'v - \frac{4uv}{x} = 2x^4e^x,$$

або

$$\left(u' - \frac{4u}{x}\right)v + uv' = 2x^4e^x.$$

Функцію $u(x)$ виберемо так, щоб $u' - \dfrac{4u}{x} = 0$. Звідси

$$\frac{du}{u} = 4\frac{dx}{x}, \quad \ln|u| = 4\ln|x| \text{ і } u = x^4,$$

тоді

$$v'x^4 = 2x^4e^x, \text{ або } v' = 2e^x.$$

Розв'язуючи здобуте рівняння, знаходимо $u(x) = 2e^x + C$. Тепер маємо

$$z(x) = uv = x^4\left(2e^x + C\right).$$

Це загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння. Оскільки $y = z^{-\frac{1}{2}}$, то зрештою дістанемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = \frac{1}{x^2\sqrt{2e^x + C}}.$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{x^2\sqrt{2e^x + C}}$.

Розв'язати рівняння.

60. 1) $y' = y^4\cos x + y\operatorname{tg} x$; 2) $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$.

61. 1) $xy^2y' = x^2 + y^3$; 2) $x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$.

62. 1) $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2y^{\frac{4}{3}}$; 2) $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$.

63. 1) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$; 2) $y' + y\dfrac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} = y^2(1-x^2)(x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}$.

64. 1) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}\sqrt{y}$, $y(0) = \dfrac{9}{4}$;

2) $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.

65. 1) $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 4\sqrt{\left(1+x^2\right)y}\,\operatorname{arctg} x$;

2) $2y'\sin x + y\cos x = (x\cos x - \sin x)\,y^3$.

1.8. РІВНЯННЯ В ПОВНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛАХ

Приклад. Розв'язати рівняння

$$2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0 .$$

Розв'язання. Це рівняння у повних диференціалах [ч. 2, с. 35], оскільки

$$P(x,\ y) = 2xy,\ Q(x,\ y) = x^2 - y^2,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x .$$

Ліва частина рівняння є повним диференціалом деякої функції $U(x,\ y)$, тобто

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xy,\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2.$$

Зінтегруємо першу з рівностей за x (вважаючи y сталою):

$$U(x,\ y) = \int 2xydx + \varphi(y) = x^2 y + \varphi(y) .$$

Здобуту рівність диференціюємо за y:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y) .$$

Маємо рівняння $x^2 + \varphi'(y) = x^2 - y^2$. Звідси знаходимо $\varphi'(y) = -y^2$ і $\varphi(y) = -\dfrac{y^3}{3} + C_1$. Загальний інтеграл рівняння набуває вигляду

$$x^2 y - \frac{y^3}{3} = C_1,$$

або

$$3x^2 y - y^3 = C ,$$

де

$$C = 3C_1 .$$

Відповідь: $3x^2y - y^3 = C$.

Розв'язати рівняння.

66. 1) $\left(2xy + 3y^2\right)dx + \left(x^2 + 6xy - 3y^2\right)dy = 0$;

2) $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0.$

67. 1) $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$;

2) $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0.$

68. 1) $\left(x^2 + y^2 + y\right)dx + \left(2xy + x + e^y\right)dy = 0,\ \ y(0) = 0$;

2) $\left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$

69. 1) $\left(3x^2 y + \sin x\right)\ dx + \left(x^3 - \cos y\right)dy = 0$;

2) $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \dfrac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\dfrac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \dfrac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$

70. 1) $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$;

2) $\left(\dfrac{y}{\cos^2 xy} + \sin x\right)dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)dy = 0.$

71. 1) $\left(\dfrac{2x}{\sin y} + 5\right)dx + \dfrac{\left(x^2+3\right)\cos y}{\cos^2 y - 1}dy = 0$;

2) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0,\ \ y(1) = 1.$

1.9. ІНТЕГРУВАЛЬНИЙ МНОЖНИК

Приклад. Розв'язати рівняння $(y+\ln x)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов (2.64) і (2.65) [ч. 2, с. 39]. Для цього знайдемо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1 .$$

У такому разі умова (2.64) [ч. 2, с. 39] не виконується, оскільки $\frac{-1-1}{y+\ln x}$ не є функцією тільки y. Виконується умова (2.65), тому що $-\frac{1+1}{x} = -\frac{2}{x} = F(x)$. Скориставшись формулою $\mu = e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$, знайдемо

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2} .$$

Домножимо вихідне рівняння на $\mu = \frac{1}{x^2}$ і дістанемо

$$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx - \frac{dy}{x} = 0, \quad x \neq 0 . \qquad (9.1)$$

Це рівняння в повних диференціалах, тому що для нього виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{x^2} .$$

Отже, ліва частина рівняння (9.1) є повним диференціалом деякої функції $U(x,\ y)$: $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x}$. Знайдемо $U(x,\ y)$ з рівняння (9.1):

$$U(x,\ y) = \int\left(\frac{y}{x^2} + \frac{\ln x}{x^2}\right)dx + \varphi(y) = -\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + \varphi(y) .$$

Диференціюючи за y, отримуємо

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y),$$

звідки дістаємо рівняння

$$-\frac{1}{x} + \varphi'(y) = -\frac{1}{x}$$

і маємо

$$\varphi'(y) = 0 ; \ \varphi(y) = C_1 .$$

Отже,

$$-\frac{y}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_1 = C_2 .$$

Відповідь: $y = Cx - \ln x - 1$ – загальний розв'язок вихідного рівняння, де $C = C_1 - C_2$.

Розв'язати рівняння.

72. $\left(x^2 - \sin^2 y\right)dx + x\sin 2y\, dy = 0$.

73. $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xy\, dy = 0$.

74. $(x\sin y + y\cos y)dx + (x\cos y - y\sin y)dy = 0$.

75. $\cos x\, dy + \left(\sin x + e^y\right)dx = 0$.

1.10. РІВНЯННЯ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ВІДНОСНО ПОХІДНОЇ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $y = xy' - (y')^2$.

Розв'язання. Маємо рівняння Клеро [ч. 2, с. 41]. Позначимо $p = y'$, тоді $y = xp - p^2$. Здиференціювавши за x, дістанемо

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} .$$

Звідси $(x-2p)\frac{dp}{dx} = 0$. Отже, $\frac{dp}{dx} = 0$, або $x = 2p$. Якщо $\frac{dp}{dx} = 0$, то $p = C$ і знаходимо загальний розв'язок рівняння $y = Cx - C^2$. Якщо $x = 2p$, то $y = 2p^2 - p^2 = p^2$ і маємо особливий розв'язок вихідного рівняння

$$\begin{cases} x = 2p, \\ y = p^2. \end{cases}$$

Виключаючи параметр p, одержуємо особливий розв'язок в явному вигляді

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

Відповідь: $y = Cx - C^2$, $y = \frac{x^2}{4}$.

2. Розв'язати рівняння $y = 2xy' - 4(y')^3$.

Розв'язання. Маємо рівняння Лагранжа [ч. 2, с. 42]. Вважатимемо, що $y' = p$, тоді $y = 2xp - 4p^3$. Здиференціюємо цю рівність і одержимо $dy = 2p\,dx + 2x\,dp - 12p^2dp$. Зробимо заміну $dy = pdx$. Тепер $p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp - 12p^2dp$, або $p\,dx = 12p^2dp - 2x\,dp$. Поділивши обидві частини останньої рівності на $p\,dp\ (p \neq 0)$, дістанемо

$$\frac{dx}{dp} = 12p - 2\frac{x}{p},$$

або

$$\frac{dx}{dp} + 2\frac{x}{p} = 12p.$$

Це рівняння – лінійне неоднорідне першого порядку. Розв'яжемо його методом Бернуллі–Фур'є. Розв'язок шукаємо у вигляді $x = u(p)\ v(p)$. Тоді

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{p} = 12p,$$

або

$$\left(u' + \frac{2u}{p}\right)v + uv' = 12p.$$

Функцію $u(p)$ виберемо так, щоб $\frac{u' + 2u}{p} = 0$, тоді $uv' = 12p$. Розв'язуючи здобуті рівняння, знайдемо $u(p)$ і $v(p)$:

$$u' = -\frac{2u}{p},\ \frac{du}{u} = -2\frac{dp}{p},\ u = \frac{1}{p^2};$$

$$v'\frac{1}{p^2} = 12p,\ v' = 12p^3,\ v = 3p^4 + C.$$

Отже,

$$x = u(p)\ v(p) = \frac{1}{p^2}\left(3p^4 + C\right) = 3p^2 + C\,p^{-2}.$$

Використовуючи співвідношення $y = 2xp - 4p^3$, дістанемо $y = 2p^2 + 2C\,p^{-1}$. Ділення на p призводить до втрати коренів. Вважаючи $p = 0$, маємо $y' = 0$, або $y = a$. Підставляючи ці функції у вихідне рівняння, дізнаємося, що йому задовольняє розв'язок $y = 0$, якого немає в загальному. Це особливий розв'язок.

Відповідь: $\begin{cases} x = 3p^2 + C\,p^{-2}, \\ y = 2p^3 + 2C\,p^{-1}, \quad y = 0. \end{cases}$

Розв'язати рівняння.

76. $xy' - y = \ln y'$.

77. $y = x(1 + y') + (y')^2$.

78. $y = -xy' + (y')^2$.

79. $y = xy' + y' - (y')^2$.

80. $y = 2xy' - (y')^2$.

81. $y = xy' + (y')^2$.

82. $xy'(y' + 2) = y$.

83. $(y')^3 = 3(xy' - y)$.

84. $y = xy' - e^{y'}$.

85. $-xy'(y' + 2) = y$.

86. $2xy' - y = \ln y'$.

87. $2(y')^2(y - xy') = 1$.

1.11. ОБВІДНА СІМ'Ї КРИВИХ. ПРИКЛАДИ НА ВСІ ВИДИ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Приклад. Знайти рівняння обвідної сім'ї кривих

$$C^2 - 2xC + y = 0.$$

Розв'язання. Диференціюючи за C [ч. 2, с. 46], маємо $2C - 2x = 0$, $x = C$. Замінивши у вихідній рівності C на x, дістанемо рівняння обвідної (рис. 1.3) $y = x^2$. При цьому на рисунку зображені прямі $y = 2Cx - C^2$.

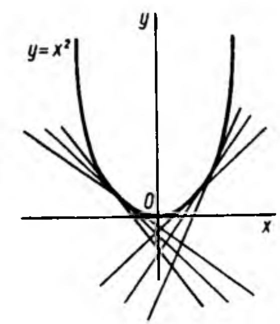

Рис. 1.3

Відповідь: $y = x^2$.

Знайти рівняння обвідних сімей кривих.

88. $y = xC - C^2$.

89. $y = -Cx + C^2$.

Розв'язати рівняння першого порядку.

90. 1) $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$;

2) $y' - y\,\text{tg}x = \sec x$, $y(0) = -3$.

91. 1) $y' - 2y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x$;

2) $3y^2y' + y^3 = x + 1$, $y(1) = -1$.

92. 1) $y' - \dfrac{1}{x-2}y = x^2 - 4x + 5$, $y(-3) = \dfrac{3}{2}$;

2) $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x} = x$, $y(-2) = 2$.

93. 1) $\left(1 + y^2\sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0$;

2) $xy' - y = -4\left(1 + x^2y'\right)$, $y(1) = 1$.

94. 1) $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$; 2) $x^2y' = y^2 - xy$, $y(-1) = 1$.

95. 1) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x} + 1$; 2) $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$, $y(1) = 0$.

96. 1) $\left(x^2 + 4\right)y' + 3x^2\left(y^2 - 1\right) = 0$, $y(0) = 0$;

2) $y' - 3x^2y = x^5 + x^2$, $y(0) = 1$.

97. 1) $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{\left(x^2+1\right)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$;

2) $\left(1 - x^2\right)y' - xy = xy^2$, $y\left(\sqrt{2}\right) = 2$.

98. 1) $\left(2x^2y\ln y - x\right)y' = y$; 2) $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}$, $y(1) = -1$.

99. 1) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$; 2) $xy' + y - e^x = 0$, $y(1) = -2$.

1.12. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ, ЩО ДОПУСКАЮТЬ ЗНИЖЕННЯ ПОРЯДКУ

Приклади. **1.** Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = xe^{-x}$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння:

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int\left[-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2,$$

або

$$y = (x+2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Скористаємося початковими умовами і матимемо

$$1 = 2 + C_2;\ C_2 = -1;\ 0 = -1 + C_1;\ C_1 = 1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1.$$

Цей розв'язок можна знайти й інакше – одразу використовуючи задані початкові умови:

$$y' = y'(0) + \int_0^x xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 1;$$

$$y = y(0) + \int_0^x\left[-xe^{-x} - e^{-x} + 1\right]dx = 1 + \left[(x+2)e^{-x} + x\right]\Big|_0^x = (x+2)e^{-x} + x - 1.$$

Відповідь: $y = (x+2)e^{-x} + x - 1$.

2. Розв'язати рівняння $y''(1+y) = (y')^2 + y'$.

Розв'язання. Це рівняння не містить в явному вигляді незалежну змінну. Вважатимемо, що $y' = p(y)$, тоді $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ і рівняння набуває вигляду

$$p\frac{dp}{dy}(1+y) = p^2 + p.$$

Поділивши обидві частини рівняння на $p \neq 0$, матимемо

$$\frac{dp}{dy}(1+y) = p + 1.$$

Розв'язуючи здобуте диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними, знаходимо p:

$$\frac{dp}{p+1} = \frac{dy}{y+1},\quad p + 1 \neq 0,\ y + 1 \neq 0;\ \ln|p+1| = \ln|y+1| + \ln|C_1|;$$

$$p + 1 = C_1(y+1);\quad p = C_1(y+1) - 1.$$

Повертаючись до змінної y, маємо

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y+1) - 1,$$

або

$$\frac{dy}{C_1(y+1)-1}=dx .$$

Зінтегрувавши, дістанемо

$$\frac{1}{C_1}\ln\left|C_1(y+1)-1\right|=x+C_2,\ \ C_1\neq 0 .$$

Загальний інтеграл вихідного рівняння має вигляд

$$\ln\left|C_1(y+1)-1\right|=C_1(x+C_2),\ \ C_1\neq 0 .$$

Загальний інтеграл знайдено у припущенні, що або $p\neq 0$, або $p+1\neq 0$, або $y+1\neq 0$.

Якщо $p=0$, то $y'=0$, а тому $y=C_3$ є сім'єю розв'язків. Її немає в загальному інтегралі ні за яких довільних сталих C_1 і C_2. Якщо $p+1=0$, тобто $y'=-1$, маємо сім'ю розв'язків $y=-x+C$, якої немає в загальному інтегралі, $y=-1$ також є розв'язком.

Відповідь: $\ln\left|C_1(y+1)-1\right|=C_1(x+C_2)$, $C_1\neq 0$, $y=C_3$, $y=-x+C$, $y=-1$.

3. Розв'язати рівняння $(1-x^2)y''-xy'=2$.

Розв'язання. Це рівняння не містить у явному вигляді невідому функцію y [ч. 2, с. 54]. Нехай $y'=p(x)$, тоді $y''=\dfrac{dp}{dx}$ і рівняння набуває вигляду

$$(1-x^2)\frac{dp}{dx}-xp=2 ,$$

або

$$\frac{dp}{dx}-\frac{xp}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2},\ \ 1-x^2\neq 0 .$$

Це лінійне неоднорідне рівняння першого порядку відносно p. Розв'яжемо його методом Бернуллі–Фур'є. Розв'язок будемо шукати у вигляді $p=u(x)v(x)$. Тоді

$$\frac{dp}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx} .$$

Після підстановки рівняння набуває вигляду

$$u'v+uv'-\frac{xuv}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2} .$$

Виберемо функцію $u(x)$ так, щоб $\left(u'-\dfrac{xu}{1-x^2}\right)v=0$, $v\neq 0$, $uv'=\dfrac{2}{1-x^2}$.

Розв'язуючи здобуті рівняння, знайдемо функції $u(x)$ і $v(x)$:

$$u'-\frac{xu}{1-x^2}=0,\ \ \frac{du}{u}=\frac{xdx}{1-x^2},\ \ \ln|u|-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|,\ \ u=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$v'=\frac{2}{\sqrt{1-x^2}},\ \ v=2\arcsin x+C_1.$$

Маємо

$$p=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}},$$

звідси

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Знаходимо загальний розв'язок

$$y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2 ,$$

значення $x=\pm 1$ не можуть бути розв'язком рівняння.

Відповідь: $y=(\arcsin x)^2+C_1\arcsin x+C_2$.

4. Розв'язати рівняння $y'''=\ln x$ за умови, що $x_0=1$; y_0, y_0', y_0'' – початкове значення; y_0, y_0', y_0'' – довільні.

Розв'язання. За формулою (5.2) [ч. 2, с. 48] маємо

$$n=3;\ \ f(t)=\ln t,$$

$$y=\frac{1}{2}\int_1^x(x-t)^2\ln t\,dt+C_1\frac{(x-1)^2}{2!}+C_2\frac{x-1}{1!}+C_3.$$

Інтеграл $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^x(x-t)^2\ln t\,dt$ інтегруємо частинами:

$$\begin{bmatrix} u=\ln t; & dv=\dfrac{(x-t)^2}{2}dt \\ du=\dfrac{dt}{t}; & v=-\dfrac{(x-t)^3}{6}\end{bmatrix}.$$

Маємо

$$I = -\ln t \frac{(x-t)^3}{6}\Bigg|_{t=1}^{t=x} + \int_1^x \frac{(x-t)^3}{6t}dt.$$

Перший доданок інтеграла I дорівнює нулю, оскільки при $t = x$ $\frac{(x-t)^3}{6} = 0$ і $\ln 1 = 0$. Тоді

$$I = \int_1^x \frac{(x-t)^3}{6t}dt = \frac{1}{6}\int_1^x \frac{(x-t)^3}{t}dt = \frac{1}{6}\int_1^x \frac{x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^x\left(\frac{x^3}{t} - 3x^2 + 3xt - t^2\right)dt = \frac{1}{6}\left(x^3\ln t - 3x^2t + 3x\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^x =$$

$$= \frac{1}{6}\left[x^3\ln x - 3x^2(x-1) + \frac{3}{2}x\left(x^2-1\right) - \frac{1}{3}\left(x^3-1\right)\right].$$

Відповідь: $y = \frac{1}{6}\left[x^3\ln x - 3x^2(x-1) + \frac{3}{2}x\left(x^2-1\right) - \frac{1}{3}\left(x^3-1\right)\right] + C_1\frac{(x-1)^2}{2} +$
$+ C_2\frac{x-1}{1!} + C_3.$

5. Розв'язати рівняння $4y^{IV} = y''$, якщо початкові умови є такими:

$$y\big|_{x=0} = 0;\ \ y'\big|_{x=0} = 0;\ \ y''\big|_{x=0} = 1;\ \ y'''\big|_{x=0} = 1.$$

Розв'язання. Задане рівняння – це рівняння вигляду (5.6) [ч. 2, с. 51]. Вважатимемо, що $y'' = z$, тоді рівняння запишемо так:

$$4z'' = z \text{ або } z'' = \frac{1}{4}z.$$

Це рівняння збігається з рівнянням (5.9) [ч. 2, с. 52]. Розв'язок цього рівняння дається формулою (5.10) [див. там же]: $f(z) = \frac{1}{4}z$. Розв'язання (5.10) одержимо множенням рівняння на $2z'$ і відповідно

$$(z')^2 = 2\int f(z)dz = 2\int\frac{1}{4}z\,dz = 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{z^2}{2} + C_1 = \frac{1}{4}z^2 + C_1;$$

$$z' = \sqrt{\frac{1}{4}z^2} + C_1 = \frac{z}{2} + C_1.$$

У первинних позначеннях цей вираз запишеться так:

$$y''' = \frac{y''}{2} + C_1. \tag{12.1}$$

Продовжимо розв'язання рівняння в позначеннях z:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{2} + C_1;\ \ dz = \left(\frac{z}{2} + C_1\right)dx;\ \ dz = \frac{z + 2C_1}{2}\,dx.$$

Відокремивши змінні, отримаємо $\frac{2dz}{z + 2C_1} = dx$. Тоді

$$x + C_2 = \int\frac{2dz}{z + 2C_1} = 2\ln\left|z + 2C_1\right|;$$
$$x + C_2 = 2\ln\left|z + 2C_1\right|; \tag{12.2}$$
$$x + C_2 = 2\ln\left|y'' + 2C_1\right|.$$

Визначимо C_1 і C_2 з початкових умов. З (12.1) маємо $1 = \frac{1}{2} + C_1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, а з (12.2) $C_2 = 2\ln(1+1)$, $C_2 = 2\ln 2$. Тоді розв'язок (12.2) запишемо так:

$$2\ln\left|y'' + 1\right| = x + 2\ln 2.$$

Звідси

$$\ln\left|y'' + 1\right| = \frac{x}{2} + \ln 2;\ \ y'' + 1 = e^{\frac{x}{2}}e^{\ln 2};\ \ y'' + 1 = e^{\frac{x}{2}}\cdot 2;\ \ y'' = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

Розв'яжемо це рівняння

$$y' = 2\int e^{\frac{x}{2}}dx - \int dx + C_3;\ \ y' = 4e^{\frac{x}{2}} - x + C_3;\ \ y = 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Визначимо C_3, C_4 за початковими умовами

$$0 = 4 + C_3,\ \ C_3 = -4;$$
$$0 = 8 + C_4,\ \ C_4 = -8.$$

Тоді частинний розв'язок

$$y = 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{2} - 4x - 8.$$

Відповідь: $y = 8e^{\frac{x}{2}} - \frac{x^2}{2} - 4x - 8.$

Розв'язати рівняння.

100. $x^2y''+xy'=1$.

101. $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

102. $y''\left(e^x+1\right)+y'=0$.

103. $y''(2y+3)-2(y')^2=0$.

104. $y''+\dfrac{2x}{x^2+1}y'=2x$.

105. $y''y^3+9=0$.

106. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=12x^3$.

107. $4y^3y''=y^4-1$.

Знайти розв'язок задачі Коші.

108. 1) $yy''-(y')^2=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

2) $y''=\dfrac{y'+2}{x+2}\ln\dfrac{y'+2}{x+2}$, $y(-4)=3$, $y'(4)=-4$.

109. 1) $y''-\dfrac{y'}{x-1}=(x-1)x$, $y(2)=1$, $y'(2)=-1$;

2) $x(y')^2y''-(y')^3=\dfrac{1}{3}x^4$, $y(2)=-17$, $y'(2)=4$.

110. 1) $y'''(x-1)-y''=0$, $y(2)=2$, $y'(2)=1$, $y''(2)=1$;

2) $y''=e^{2y}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

111. 1) $2yy''+(y')^2+(y')^4=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;

2) $2(y'')^2=(y'-1)y'''$, $y(2)=3$, $y'(2)=0$, $y''(2)=-2$.

1.13. ЛІНІЙНІ ЗАЛЕЖНІ ТА НЕЗАЛЕЖНІ ФУНКЦІЇ. ВИЗНАЧНИК ВРОНСЬКОГО

Приклади. **1.** Дослідити на лінійну залежність систему функцій

$$y_1=x,\quad y_2=e^x,\quad y_3=xe^x.$$

Розв'язання. Для перевірки лінійної залежності цих функцій обчислимо вронськіан [ч. 2, с. 59]:

$$W(x)=\begin{vmatrix} x & e^x & xe^x \\ 1 & e^x & (x+1)\ e^x \\ 0 & e^x & (x+2)\ e^x \end{vmatrix}=xe^{2x}(x+2)-xe^{2x}(x+1)-$$

$$-e^{2x}(x+2)+xe^{2x}=xe^{2x}-2e^{2x}=e^{2x}(x-2)\neq 0.$$

Цей визначник не дорівнює нулеві при $x\neq 2$, отже, дані функції лінійно незалежні при $x\neq 2$.

Відповідь: функції лінійно незалежні при $x\neq 2$.

2. Скласти лінійне однорідне рівняння за фундаментальною системою

$$y_1=x,\ y_2=x^2,\ y_3=e^x.$$

Розв'язання. Складемо визначник Вронського із системи функцій y_1, y_2, y_3, y [ч. 2, с. 64]. Цей визначник дорівнює нулеві, оскільки система y_1, y_2, y_3, y лінійно залежна:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y \\ y_1' & y_2' & y_3' & y' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y''' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x & y \\ 1 & 2x & e^x & y' \\ 0 & 2 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix}=0.$$

Розкриємо визначник і дістанемо рівняння

$$y'''\left(x^2e^x-2xe^x+2e^x\right)-e^x\left(x^2y''-2xy'+2y\right)=0,$$

або

$$\left(x^2-2x+2\right)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0.$$

Відповідь: $\left(x^2-2x+2\right)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$.

3. Розв'язати рівняння $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, знаючи, що його частинний розв'язок $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Знайдемо y_2 [ч. 2, с. 64]:

$$y_2=\frac{\sin x}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{2}{x}dx}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2e^{-2\ln x}}{\sin^2 x}\,dx=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2dx}{x^2\sin^2 x}=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{\sin x}{x}\operatorname{ctg}x=-\frac{\cos x}{x}.$$

Відповідь: $y=C_1\dfrac{\sin x}{x}-C_2\dfrac{\cos x}{x}$.

Дослідити на лінійну залежність системи функцій.

112. $y_1 = x+2$, $y_2 = x-2$.

113. $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$.

114. $y_1 = x^2 - x + 3$, $y_2 = 2x^2 + x$, $y_3 = 2x - 4$.

115. $y_1 = 1$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = \cos 2x$.

116. $y_1 = \sin nx$, $y_2 = \cos nx$.

117. $y_1 = \sin\dfrac{n\pi x}{l}$, $y_2 = \cos\dfrac{n\pi x}{l}$.

Скласти лінійні однорідні диференціальні рівняння за фундаментальною системою розв'язків.

118. $y_1 = x$, $y_2 = e^x$.

119. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$.

120. $y_1 = 3x$, $y_2 = x-2$, $y_3 = e^x + 1$.

121. $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь, знаючи їх частинні розв'язки.

122. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$, $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$.

123. $xy'' + 2y' - xy = 0$, $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$.

1.14. ЛІНІЙНІ ОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ n-ГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 4k + 3 = 0$. Розв'язуючи його за теоремою Вієта, знайдемо корені $k_1 = -3$, $k_2 = -1$. Оскільки $k_1 \neq k_2$, то $y_1 = e^{-3x}$, $y_2 = e^{-x}$. Функції y_1 і y_2 є лінійно незалежними, тому що $\dfrac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння набуває вигляду $\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, або $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

Відповідь: $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

2. Розв'язати рівняння $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $k^5 + 8k^3 + 16k = 0$. Знайдемо його корені: $k\left(k^4 + 8k^2 + 16\right) = 0$, $k_1 = 0$, $\left(k^2+4\right)^2 = 0$, $k_2 = k_3 = 2j$, $k_4 = k_5 = -2j$.

На основі леми [ч. 2, с. 67] візьмемо за частинні розв'язки вихідного рівняння: $\tilde{y}_1 = e^{ax}\cos bx$, $\tilde{y}_2 = e^{ax}\sin bx$.

Отже, фундаментальна система розв'язків складається з функцій $\tilde{y}_1 = 1$, $\tilde{y}_2 = \cos 2x$, $\tilde{y}_3 = \sin 2x$, $\tilde{y}_4 = x\cos 2x$, $\tilde{y}_5 = x\sin 2x$. Тоді загальний розв'язок вихідного рівняння набуває вигляду $\overline{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$.

Відповідь: $\overline{y} = C_1 + (C_2 + C_3 x)\cos 2x + (C_4 + C_5 x)\sin 2x$.

Розв'язати рівняння.

124. $y'' - 7y' + 6y = 0$.

125. $y'' - 4y' + 5y = 0$.

126. $y''' - 8y = 0$.

127. $y^{IV} - 2y''' - y'' = 0$.

128. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$.

129. $y''' + 3ay'' + 3a^2 y' + a^3 y = 0$.

130. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

131. $y''' + y' = 0$.

132. $y''' - y'' + 2y' + 4y = 0$.

133. $y^{V} - 10y''' + 9y' = 0$.

134. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

135. $y^{IV} - y = 0$.

136. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -2$.

137. $y^{V} + 8y''' + 16y' = 0$.

138. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$.

139. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$.

140. $y^{VI} + 64y = 0$.

141. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

1.15. ЛІНІЙНІ НЕОДНОРІДНІ РІВНЯННЯ. МЕТОД ВАРІАЦІЇ СТАЛИХ

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

Розв'язання. Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає неоднорідному рівнянню $z'' + 4z = 0$. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 4 = 0$. Його корені $k_1 = 2j$, $k_2 = -2j$, $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$.

Загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння є $\overline{y} = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Загальний розв'язок вихідного рівняння шукатимемо методом варіації Лагранжа, тобто у вигляді $y = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$.

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ знайдемо із системи

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0, \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо дану систему за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2;$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} 2x;$$

$$\Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$C_1'(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}.$$

Звідси

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x dx = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x| + C_1; \quad C_2(x) = \frac{1}{2}\int dx = \frac{x}{2} + C_2.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння набуває вигляду

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

Відповідь: $y = \left(C_1 + \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{2}\right)\sin 2x$.

2. Розв'язати рівняння зі спеціальною правою частиною $y'' + y' - 2y = 3xe^x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + k - 2 = 0$ має корені $k_1 = -2$, $k_2 = 1$.

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння набуває вигляду

$$\overline{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

Для функції $f(x) = 3xe^x$, згідно з формулою (5.82) [ч. 2, с. 81], при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $n = 1$, $m = 0$ частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді, що відповідає (5.82) [ч. 2, с. 80], а саме: $y^* = x(Ax + B)e^x$.

Знайдемо невизначені коефіцієнти A і B, для чого визначимо y', y'' від розв'язку y^*:

$$y^{*\prime} = (Ax + B)e^x + Axe^x + x(Ax + B)e^x;$$

$$y^{*\prime\prime} = Ae^x + (Ax + B)e^x + Ae^x + Axe^x + (Ax + B)e^x + Axe^x + x(Ax + B)e^x =$$
$$= 2Axe^x + 2Ae^x + 2(Ax + B)e^x + x(Ax + B)e^x.$$

Підставимо здобуті вирази у вихідне рівняння:

$$2Ax + 4Axe^x + 2Be^x + 2Axe^x + Be^x = 3xe^x.$$

Тоді

$$6Axe^x + (2A + 3B)e^x = 3xe^x,$$

або

$$6Ax + 2A + 3B = 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, маємо

$$\begin{cases} 6A = 3, \\ 2A + 3B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

$$y^* = x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)e^x.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)e^x.$$

Відповідь: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + x\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)e^x$.

3. Розв'язати рівняння $y'' + y = x\sin x$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння набуває вигляду $k^2 + 1 = 0$. Його корені $k_1 = j$, $k_2 = -j$, $j = \sqrt{-1}$.

Запишемо загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Оскільки права частина рівняння $f(x)$ відповідає формулі (5.84) [ч. 2, с. 81] при $\alpha=0$, $\beta=1$, $n=0$, $m=1$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння можна знайти у вигляді (5.90) [ч. 2, с. 83]. Отже,

$$y^*=x\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right].$$

Для знаходження A, B, C, D підставляємо цей розв'язок у рівняння:

$$\begin{gathered}y^{*\prime}=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x+Ax\cos x+\\+Cx\sin x-Ax^2\sin x-Bx\sin x+Cx^2\cos x+\\+Dx\cos x=2Ax\cos x+B\cos x+2xC\sin x+\\+D\sin x-Ax^2\sin x-Bx\sin x+Cx^2\cos x+Dx\cos x.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}y^{*\prime\prime}=2A\cos x-2Ax\sin x-B\sin x+2C\sin x+\\+2Cx\cos x+D\cos x-2Ax\sin x-Ax^2\cos x-\\-B\sin x-Bx\cos x+2xC\cos x-Cx^2\sin x+D\cos x-Dx\sin x.\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(2A+D+D)\cos x+x\sin x(-4A-D)+\\+\sin x(2C-B-B)+x\cos x(4C-B)+\\+Bx\cos x+Dx\sin x=x\sin x.\end{gathered}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x^l\cos x$, $x^l\sin x$, $l=0,1$, дістаємо

$$\begin{array}{l|}\cos x\\ \sin x\\ x\cos x\\ x\sin x\end{array}\left\{\begin{array}{l}2A+2D=0,\\ 2C-2B=0,\\ \quad 4C=0,\\ \quad -4A=1.\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}A=-\dfrac{1}{4},\\ C=0,\\ B=0,\\ D=\dfrac{1}{4}.\end{array}\right.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{4}x^2\cos x+\frac{1}{4}x\sin x,$$

або

$$y=\left(C_1-\frac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x}{4}\right)\sin x.$$

Відповідь: $y=\left(C_1-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(C_2+\dfrac{x}{4}\right)\sin x$.

Розв'язати рівняння або задачі Коші.

142. 1) $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$;
2) $y^{\text{IV}}-2y'''+2y''-2y'+y=e^x$.

143. 1) $y''-6y'+8y=3x^2+2x+1$; 2) $5y'''-7y''=3$.

144. 1) $y''+4y=\sin 2x$;
2) $y''-2y'+2y=4e^x\cos x$, $y(\pi)=\pi e^{\pi}$, $y'(\pi)=e^{\pi}$.

145. 1) $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$;
2) $y'''+y=\sin x$.

146. 1) $y''-4y'+8y=61e^{2x}\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=4$;
2) $y''+4y=\sin^2 x$.

147. 1) $y''-9y'+20y=x^2e^{4x}$;
2) $y'''-y'=-2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y''(0)=2$.

148. 1) $y'''-y''=-3x+1$;
2) $y''-4y'+9y=2x^2e^x$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

149. 1) $y''-3y'=e^{3x}-18x$; 2) $y'''-3y''+3y'-y=e^x\cos 2x$.

150. 1) $y''+y=2\sin x+4\cos x$; 2) $y^{\text{V}}-4y'''=e^x+3\sin 2x+1$.

151. 1) $y^{\text{IV}}+2y''+y=\cos x$;
2) $y''+5y'+6y=(12x-7)e^x$, $y(0)=y'(0)=0$.

152. 1) $y''-2y'+y=4e^x$; 2) $y^{\text{IV}}-8y''+16y=13\cos 3x-8\sin 3x$.

153. 1) $y''+y=xe^x+2e^{-x}$;
2) $y''+6y'+9y=10\sin x$, $y(0)=y'(0)=0$.

154. 1) $y''+y=\cos x+\cos 2x$;
2) $y'''+y'=2x$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=2$.

155. 1) $y''-2y'-3y=-4e^x+3$;
2) $y^{\text{IV}}-y'=8e^x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=y'''(0)=0$, $y''(0)=1$.

156. Розв'язати рівняння $y''+3y'+2y=f(x)$ для заданих $f(x)$:

1) $16e^x$; 2) $8e^{-2x}$; 3) $10\sin x$; 4) $12x^3-39$;
5) $2e^{-x}\cos\dfrac{x}{2}$; 6) $e^{-2x}(3-4x)$; 7) $8x+60\sin 2x$;
8) $2e^{-x}+6e^{2x}$; 9) $\sin x\sin 3x$; 10) $\operatorname{ch} x$.

157. Розв'язати рівняння $2y'' + 3y' = f(x)$, якщо $f(x)$:

1) $6x^2 + 2x + 1$; 2) $e^{-\frac{3}{2}x}$; 3) $39\cos x$;

4) $39x\sin x$; 5) $265xe^{2x}\cos x$.

158. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = f(x)$ при $f(x)$:

1) $12x^3 + 2x + 20$; 2) $18\cos 5x$; 3) $\cos 2x$;

4) $\sin x + 12e^{2x}$; 5) $\cos x \cos 3x$; 6) $96\sin^4 x$.

Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих.

159. 1) $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$; 2) $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$.

160. 1) $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3}e^x$; 2) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

161. 1) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$; 2) $y'' + 9y = 9\operatorname{tg}^2 3x$.

162. 1) $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x$; 2) $y'' + y' = \left(e^x + 1\right)^{-1}$.

163. 1) $y'' + y = 2\sec^3 x$; 2) $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

164. 1) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$; 2) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{12}{2 + e^{-x}}$.

1.16. МЕТОД КОМПЛЕКСНИХ АМПЛІТУД

Приклад. Обчислити значення сили струму $I(t)$ у контурі (рис. 1.4), в якому опір $R = 10$ Ом, ємність $C = 250$мкФ, індуктивність $L = 0{,}5$ Гн, електрорушійна сила $E = 200\sin(100t + 30°)$В, якщо $I(0) = \dfrac{dI(0)}{dt} = 0$.

Розв'язання. За законом Кірхгофа можна записати

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}.$$

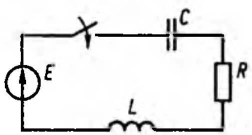

Рис. 1.4

Підставивши початкові дані (виражені в СІ), дістанемо

$$0{,}5\frac{d^2I}{dt^2} + 10\frac{dI}{dt} + \frac{1}{0{,}00025}I = 20000\cos(100t + 30°),$$

або

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 20\frac{dI}{dt} + 8000I = 40000\cos(100t + 30°). \qquad (16.1)$$

Це рівняння будемо розв'язувати методом комплексних амплітуд [ч. 2, с. 88]. Замість рівняння (16.1) розглянемо

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 20\frac{dz}{dt} + 8000z = 40000e^{j(100t+30°)}. \qquad (16.2)$$

Запишемо характеристичне рівняння $k^2 + 20k + 8\,000 = 0$. Розв'язавши його, знаходимо корені $k_1 = -10 + 88{,}882j$; $k_2 = -10 - 88{,}882j$.

Очевидно, що $k = 100j$ не є коренем характеристичного рівняння. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $z^*(t) = \sigma e^{j100t}$. Знайдемо $\dfrac{dz^*}{dt}$ і $\dfrac{d^2z^*}{dt^2}$ і підставимо в рівняння (16.2).

Після перетворень $\sigma\left(2000je^{100jt} - 92000e^{100jt}\right) = 40000e^{j(100t+30°)}$, тоді $\sigma = \dfrac{20e^{30°j}}{j - 46}$. Дістаємо

$$z^*(t) = -\frac{20}{2117}\Big[46\cos(100t + 30°) - \sin(100t + 30°) +$$
$$+ j\big(46\sin(100t + 30°) + \cos(100t + 30°)\big)\Big].$$

Оскільки $z^* = I_1^* + jI_2^*$ і $z^* = -\dfrac{20}{2117}\Big[46\cos(100t + 30°) - \sin(100t + 30°) +$ $+ j\big(46\sin(100t + 30°) + \cos(100t + 30°)\big)\Big]$, то частинним розв'язком рівняння (16.1) є

$$I_1^* = \frac{20}{2117}\Big[\sin(100t + 30°) - 46\cos(100t + 30°)\Big];$$

це також стосується $\bar{I}(t)$, тобто загального розв'язку однорідного рівняння $\bar{I}(t) = e^{-10t}\left(C_1\cos 88{,}882t + C_2\sin 88{,}882t\right)$, тоді

$$I(t) = I_1^*(t) + \bar{I}(t) = e^{-10t}\left(C_1\cos 88{,}882t + C_2\sin 88{,}882t\right) +$$
$$+ \frac{20}{2117}\Big[\sin(100t + 30°) - 46\cos(100t + 30°)\Big].$$

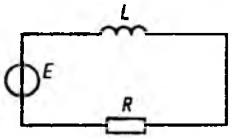

Рис. 1.5

Розв'язуючи задачу Коші, знайдемо $C_1 = 0{,}372$, $C_2 = -0{,}212$.

Отже, сила струму $I(t) = e^{-10t}(0{,}372\cos 88{,}882t - 0{,}212\sin 88{,}882t) + 0{,}009\sin(100t + 30°) - 0{,}435\cos(100t + 30°)$.

165. Обчислити значення сили струму в контурі (рис. 1.5), якщо $R = 10$ Ом, $L = 0{,}03$ Гн, $E = 100\sin 300t$ В.

166. Обчислити значення сили струму в контурі (див. рис. 1.4), якщо $R = 10$ Ом, $L = 10$ мГн, $C = 100$ мкФ, $E = 10\sqrt{2}\sin\left(10^3 t + 135°\right)$ В.

1.17. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НОРМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЗВЕДЕННЯМ ДО ОДНОГО РІВНЯННЯ

Приклад. Розв'язати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t. \end{cases}$$

Розв'язання. Диференціюючи перше рівняння, дістаємо

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} + 6\frac{dy}{dt}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} + 12x + 18y + 6t.$$

Але

$$y = \frac{\dfrac{dx}{dt} - 4x}{6},$$

тоді

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\frac{dx}{dt} + 12x + 3\frac{dx}{dt} - 12x + 6t,$$

звідки

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} = 6t. \tag{17.1}$$

Рівняння (17.1) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'яжемо його:

$$k^2 - 7k = 0,\ k_1 = 0,\ k_2 = 7,\ \bar{x} = C_1 + C_2 e^{7t}.$$

Оскільки $k_1 = 0$ є коренем характеристичного рівняння, частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$x^* = t(At + B),\ \left(x^*\right)' = 2At + B,\ \left(x^*\right)'' = 2A,\ \ 2A - 14At - 7B = 6t,$$

тоді

$$\begin{cases} 2A - 7B = 0, \\ -14A = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{3}{7}, \\ B = -\dfrac{6}{49}, \end{cases} \quad x^* = -t\left(\frac{3}{7}t + \frac{6}{49}\right), \quad x = C_1 + C_2 e^{7t} - t\left(\frac{3}{7}t + \frac{6}{49}\right).$$

Знайдемо y:

$$y = \frac{\dfrac{dx}{dt} - 4x}{6};$$

$$y = \frac{7C_2 e^{7t} - \dfrac{6}{7}t - \dfrac{6}{49} - 4C_1 - 4C_2 e^{7t} + 4t\left(\dfrac{3}{7}t + \dfrac{6}{49}\right)}{6} =$$

$$= \frac{7C_2 e^{7t} - \dfrac{6}{7}t - \dfrac{6}{49} - 4C_1 - 4C_2 e^{7t} + \dfrac{12}{7}t^2 + \dfrac{24}{49}t}{6} =$$

$$= \frac{1}{2}C_2 e^{7t} - \frac{2}{3}C_1 + \frac{2}{7}t^2 - \frac{3}{49}t - \frac{1}{49}.$$

Остаточно маємо

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t} - \dfrac{3}{49}(7t + 2)t, \\ y = -\dfrac{2}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2 e^{7t} + \dfrac{1}{49}\left(14t^2 - 3t - 1\right), \end{cases}$$

що є загальним розв'язком вихідної системи.

Відповідь: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{7t} - \dfrac{3}{49}(7t + 2)t, \\ y = -\dfrac{2}{3}C_1 + \dfrac{1}{2}C_2 e^{7t} + \dfrac{1}{49}\left(14t^2 - 3t - 1\right). \end{cases}$

Знайти загальні розв'язки систем зведенням їх до одного рівняння.

167. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ **168.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$

169. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + t, \quad x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + e^t, \quad y(0) = 0. \end{cases}$ **170.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

171. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3y + 5x + 2e^{3t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$ **172.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x + 1 + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

173. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z. \end{cases}$ **174.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 4y - 2z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 6x - 6y + 5z. \end{cases}$

175. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z. \end{cases}$ **176.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 3x + y. \end{cases}$

1.18. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЛАГРАНЖА

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язуємо однорідну систему [ч. 2, с. 115–116]:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + x = 0. \end{cases}$$

Зведемо її до однорідного рівняння другого порядку:

$$y = \frac{dx}{dt}, \ \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \ \frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 .$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має корені $k_1 = j$, $k_2 = -j$. Загальний розв'язок лінійної однорідної системи має вигляд

$$\begin{cases} \bar{x} = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ \bar{y} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t. \end{cases}$$

Для відшукання загального розв'язку лінійної неоднорідної системи вважатимемо в загальному розв'язку лінійної однорідної системи C_1 і C_2 функціями від t, тобто

$$\begin{cases} \bar{x} = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ \bar{y} = -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t. \end{cases}$$

Підставляємо значення $x(t)$ і $y(t)$ у вихідну систему:

$$\begin{cases} -C_1 \sin t + C_2 \cos t + C_1' \cos t + C_2' \sin t = \\ = -C_1 \sin t + C_2 \cos t + \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ -C_1 \cos t - C_2 \sin t - C_1' \sin t + C_2' \cos t = \\ = -C_1 \cos t - C_2 \sin t + \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$$

Маємо систему відносно невідомих функцій $C_1'(t)$ і $C_2'(t)$:

$$\begin{cases} C_1' \cos t + C_2' \sin t = \mathrm{tg}^2 t - 1, \\ -C_1' \sin t + C_2' \cos t = \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$$

Розв'язуємо її за правилом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 ;$$

$$C_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \mathrm{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \mathrm{tg}\, t & \cos t \end{vmatrix}}{1} = \left(\mathrm{tg}^2 t - 1\right) \cos t - \mathrm{tg}\, t \sin t = -\cos t ;$$

$$C_2'(t)=\frac{\begin{vmatrix}\cos t & \operatorname{tg}^2 t-1\\ -\sin t & \operatorname{tg} t\end{vmatrix}}{1}=\cos t\operatorname{tg} t+\sin t\left(\operatorname{tg}^2 t-1\right)=\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t};$$

$$C_1(t)=-\int\cos t\cdot dt=-\sin t+C_1;$$

$$C_2(t)=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^2 t}dt=\left|\begin{matrix}\cos t=z\\ -\sin t\cdot dt=dz\end{matrix}\right|=-\int\frac{1-z^2}{z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{z}+z+C_2=\frac{1}{\cos t}+\cos t+C_2.$$

Тоді загальний розв'язок вихідної системи запишеться так:

$$\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg} t,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t+\sin^2 t+1+\cos^2 t.\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases}x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg} t,\\ y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2.\end{cases}$

Розв'язати системи методом варіації довільних сталих.

177. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2y-x,\\ \dfrac{dy}{dt}=4y-3x+\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}.\end{cases}$

178. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x+y+t,\ \ x(0)=-\dfrac{7}{9},\\ \dfrac{dy}{dt}=x-2y+2t,\ \ y(0)=-\dfrac{5}{9}.\end{cases}$

179. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-5x-y+e^{t},\ \ x(0)=\dfrac{111}{900},\\ \dfrac{dy}{dt}=x-3y+e^{2t},\ \ y(0)=\dfrac{211}{900}.\end{cases}$

180. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-y.\end{cases}$

181. $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=-y+e^{-t},\ \ x(0)=-2,\\ 2\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{dy}{dt}=\sin t-2y,\ \ y(0)=1.\end{cases}$

182. $\begin{cases}2\dfrac{dx}{dt}=6x-y-6t^2-t+3,\ \ x(0)=2,\\ \dfrac{dy}{dt}=2y-2t-1,\ \ y(0)=3.\end{cases}$

1.19. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Приклади. **1.** Для системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3,\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3,\\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-x_2\end{cases}$$

а) знайти загальний розв'язок системи;

б) записати дану систему та її розв'язок у матричній формі [ч. 2, с. 118–120].

Р о з в ' я з а н н я. Розв'яжемо систему зведенням до одного рівняння третього порядку. Для цього з першого рівняння системи виразимо x_3:

$$x_3=\frac{dx_1}{dt}-x_1+x_2.$$

Здиференціювавши за t, дістанемо

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt}.$$

У здобуту рівність замість $\dfrac{dx_2}{dt}$ підставимо праву частину другого рівняння системи:

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{dx_1}{dt}+x_1-\frac{dx_1}{dt}+x_1.$$

За допомогою третього рівняння системи маємо

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}-2\frac{dx_1}{dt}=-x_2,$$

звідси

$$x_2=2\frac{dx_1}{dt}-\frac{d^2x_1}{dt^2}.$$

Диференціюємо x_2 за t й дістаємо

$$\frac{dx_2}{dt}=2\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{d^3x_1}{dt^3}.$$

Здобуті x_2 і $\frac{dx_2}{dt}$ підставимо в друге рівняння системи, де $x_3=\frac{dx_1}{dt}-\frac{d^2x_1}{dt^2}-x_1$. Після перетворень матимемо

$$\frac{d^3x_1}{dt^3}-2\frac{d^2x_1}{dt^2}-\frac{dx_1}{dt}+2x_1=0,$$

що є лінійним диференціальним рівнянням третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Розв'язуючи його за відомою схемою, дістаємо

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}.$$

Тоді
$$\begin{cases}x_2=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ x_3=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$$

Загальний розв'язок вихідної системи має вигляд

$$\begin{cases}x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ x_2=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ x_3=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}.\end{cases}$$

Тепер запишемо систему та її розв'язок у матричній формі:

$$\begin{pmatrix}\frac{dx_1}{dt}\\ \frac{dx_2}{dt}\\ \frac{dx_3}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1&C_2&C_3\\C_1&0&-3C_3\\C_1&C_2&-5C_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\\e^{-t}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\begin{cases}x_1=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t},\\ x_2=C_1e^t-3C_3e^{-t},\\ x_3=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t};\end{cases}$

б) $\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1&C_2&C_3\\C_1&0&-3C_3\\C_1&C_2&-5C_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\\e^{-t}\end{pmatrix}.$

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\frac{dy_1}{dx}=-4y_1-6y_2,\\ \frac{dy_2}{dx}=-4y_1-2y_2\end{cases}$ за допомогою характеристичного рівняння [ч. 2, с. 117].

Розв'язання. Розв'язок даної системи шукаємо у вигляді $y_i=\gamma_i e^{kx}$, де γ_i – сталі, які необхідно знайти так, щоб розв'язок y_i задовольняв дану систему.

Складаємо характеристичне рівняння системи й знаходимо його корені:

$$\begin{vmatrix}-4-k&-6\\-4&-2-k\end{vmatrix}=0,\quad (4+k)(2+k)-24=0,\quad k_1=-8,\ k_2=2.$$

Далі знаходимо сталі γ_i:

$$\gamma_i=\left(\gamma_i^{(1)},\ \gamma_i^{(2)}\right),\ i=1,\ 2.$$

Коли $k_1=-8$, маємо систему

$$\begin{cases}(-4+8)\gamma_1^{(1)}-6\gamma_2^{(1)}=0,\\ -4\gamma_1^{(1)}-(2-8)\gamma_2^{(1)}=0.\end{cases}$$

Нехай $\gamma_1^{(1)}=1$, тоді $\gamma_2^{(1)}=\frac{2}{3}$. Маємо

$$y_1^{(1)}=e^{-8x},\quad y_2^{(1)}=\frac{2}{3}e^{-8x}.$$

Коли $k_2=2$, маємо систему

$$\begin{cases}(-4-2)\gamma_1^{(2)}-6\gamma_2^{(2)}=0,\\ -4\gamma_1^{(2)}+(-2-2)\gamma_2^{(2)}=0.\end{cases}$$

Нехай $\gamma_1^{(2)}=1$, тоді $\gamma_2^{(2)}=-1$. Маємо $y_1^{(2)}=e^{2x}$, $y_2^{(2)}=-e^{2x}$.

Складаємо загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases}y_1=C_1y_1^1+C_2y_1^2=C_1e^{-8x}+C_2e^{2x},\\ y_2=C_1y_2^1+C_2y_2^2=\frac{2}{3}C_1e^{-8x}-C_2e^{2x}.\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases}y_1=C_1e^{-8x}+C_2e^{2x},\\ y_2=\frac{2}{3}C_1e^{-8x}-C_2e^{2x}.\end{cases}$

3. Для системи лінійних диференціальних рівнянь $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+y+\cos t,\\ \frac{dy}{dt}=-x+2\sin t\end{cases}$

а) знайти загальний розв'язок системи; б) записати дану систему та її розв'язок у матричній формі.

Розв'язання. З другого рівняння системи знайдемо $x=2\sin t-\frac{dy}{dt}$.

Диференціюючи x за t, дістаємо

$$\frac{dx}{dt}=2\cos t-\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Підставивши x і $\frac{dx}{dt}$ в перше рівняння системи, маємо

$$\frac{d^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}+y=\cos t-4\sin t.$$

Розв'язуючи здобуте лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, одержуємо загальний розв'язок вихідної системи:

$$\begin{cases} y=C_1\mathrm{e}^t+C_2t\mathrm{e}^t-2\cos t-\frac{1}{2}\sin t, \\ x=\frac{1}{2}\cos t-\left(C_1+(1+t)C_2\right)\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

Тепер запишемо систему в матричній формі

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$$

і загальний розв'язок системи в матричній формі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C_1-C_2 & -C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2}\sin t-2\cos t \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\cos t-\left(C_1+(1+t)C_2\right)\mathrm{e}^t, \\ y=C_1\mathrm{e}^t+C_2t\mathrm{e}^t-2\cos t-\frac{1}{2}\sin t; \end{cases}$

б) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C_1-C_2 & -C_2 \\ C_1 & -C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t\mathrm{e}^t \end{pmatrix}+$ $+\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2}\sin t-2\cos t \end{pmatrix}.$

Знайти загальні розв'язки систем рівнянь, записавши системи та їх розв'язки у матричній формі.

183. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+y, \\ \frac{dy}{dt}=4y-x. \end{cases}$

184. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=3x+8y, \ x(0)=6, \\ \frac{dy}{dt}=-x-3y, \ y(0)=-2. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=y-2z-x, \\ \frac{dy}{dt}=4x+y, \\ \frac{dz}{dt}=2x+y-z. \end{cases}$

186. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-4x-4y, \ x(0)=0, \\ \frac{dx}{dt}+4\frac{dy}{dt}=-4y, \ y(0)=0. \end{cases}$

187. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-y, \\ \frac{dy}{dt}=x+2\mathrm{e}^t. \end{cases}$

188. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x+5y, \ x(0)=-2, \\ \frac{dy}{dt}=-x-5y, \ y(0)=1. \end{cases}$

189. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-y+8t, \\ \frac{dy}{dt}=5x-y. \end{cases}$

190. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}=17x+8y, \ x(0)=2, \\ 13\frac{dx}{dt}=53x+2y, \ y(0)=-1. \end{cases}$

1.20. ФІЗИЧНІ ЗАДАЧІ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Приклади. **1.** Швидкість остигання нагрітого тіла пропорційна різниці температур тіла й оточуючого середовища. За 10 хв тіло остигло від 100 до 60 °C. Температура оточуючого повітря підтримується 20 °C. За скільки хвилин тіло остигне до 25 °C?

Розв'язання. Нехай час t – незалежна змінна, а $x(t)$ – температура тіла через t хвилин після початку остигання – шукана функція. Швидкість остигання є похідною від температури за часом, яку взято з протилежним знаком, тобто $-\frac{dx}{dt}$. За умовою задачі

$$-\frac{dx}{dt}=k\left[x(t)-20\right], \tag{20.1}$$

де k – коефіцієнт пропорційності, поки що невідомий. Крім того, з умови випливає, що $x(0)=100$, $x(10)=60$. Розв'язуючи рівняння (20.1), дістаємо

$$\frac{dx}{x-20}=-k\,dt,\quad \ln|x-20|=-kt+\ln|C|,$$

звідси

$$x=20+Ce^{-kt}.$$

Тепер з умов $x(0)=100$ і $x(10)=60$ знайдемо C і k:

$$100=20+Ce^{0},\ C=80,\ 60=20+80e^{-10k},\ e^{-10k}=\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{10}\ln 2.$$

Отже,

$$x(t)=20+80e^{-\frac{t}{10}\ln 2},$$

або

$$x(t)=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{10}}.$$

Обчислимо значення часу t остигання тіла до 25 °C :

$$x(t)=20+80\cdot 2^{-\frac{t}{10}}=25,\ 2^{-\frac{t}{10}}=\frac{1}{16},\ \frac{t}{10}=4,\ t=40\ \text{хв}.$$

Відповідь: $t=40$ хв.

2. Човен сповільнює свій рух під дією опору води, який є пропорційним його швидкості. Початкова швидкість човна 1,5 м/с. Через 4 с його швидкість становить 1 м/с. Через скільки секунд швидкість зменшиться до 0,01 м/с? Який шлях може пройти човен до зупинки?

Розв'язання. Нехай час t – незалежна змінна, $v(t)$ – швидкість човна в момент t. Тоді $v(0)=1{,}5$. За другим законом Ньютона $m\frac{dv}{dt}=F(t)$, де m – маса човна, $F(t)$ – сила, що діє на човен. Згідно з умовою, $F(t)=-kv$, де k – коефіцієнт пропорційності, тоді $m\frac{dv}{dt}=-kv$.

Розв'язуючи здобуте диференціальне рівняння, маємо

$$v=Ce^{\frac{-kt}{m}}.$$

За умовою $v(0)=1{,}5$, тому $C=1{,}5$, тоді $v(t)=1{,}5e^{\frac{-kt}{m}}$.

Оскільки $v(4)=1$, то $1=1{,}5e^{\frac{-4k}{m}}$. Звідси

$$\frac{k}{m}=\frac{\ln\frac{3}{2}}{4}.$$

Тоді

$$v(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}.$$

Час t_0, с, коли швидкість човна становитиме 0,01 м/с, знайдемо з рівняння $0{,}01=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t_0}{4}-1}$:

$$t_0=4\left(\frac{2}{\ln 1{,}5}+1\right)\approx 50\ \text{с}.$$

Довжина шляху, м, який може пройти човен до повної зупинки,

$$s=\int_0^{\infty}v(t)\,dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}dt=4\lim_{b\to\infty}\left.\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{4}-1}}{\ln\frac{2}{3}}\right|_0^b=\frac{6}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\approx 15.$$

Відповідь: $t_0=4\left(\frac{2}{\ln 1{,}5}+1\right)\approx 50$ (с), $s=\frac{6}{\ln 1{,}5}\approx 15$ (м).

Розв'язати задачі з використанням диференціальних рівнянь.

191. Світловий потік, що поглинається шаром води малої товщини, пропорційний падаючому світловому потокові і товщині шару. Шар води завтовшки 0,55 м поглинає $\frac{1}{5}$ падаючого світлового потоку. Яку частину світлового потоку поглине шар завтовшки 1,5 м?

192. Матеріальна точка рухається по прямій зі швидкістю, обернено пропорційною пройденому шляхові. У початковий момент руху точка перебувала на відстані 2 м від початку відліку шляху і мала швидкість $v_0=10$ м/с. Обчислити пройдений шлях s і швидкість v точки через 8 с після початку руху.

193. Куля, рухаючись зі швидкістю $v_0 = 450$ м/с, заглиблюється в досить тверду стіну. Сила опору стіни надає кулі від'ємного прискорення, пропорційного квадратові її швидкості. Визначити швидкість v кулі через 0,002 с після входження її в стіну, якщо коефіцієнт пропорційності $k = 6\ \text{с}^{-1}$.

194. Судно водотоннажністю 12 000 т рухається прямолінійно зі швидкістю $v_0 = 20$ м/с. Опір води пропорційний квадратові швидкості судна і становить 36 т при швидкості 1 м/с. Яку відстань s пройде судно після зупинки двигуна до того моменту, як швидкість дорівнюватиме 5 м/с? За який час t судно пройде цю відстань?

195. У колі підтримується напруга $U = 300$ В. Опір кола $R = 150$ Ом. Індуктивність $L_1 = 30$ Гн. За який час t із моменту замикання сила струму, що виникає в ньому, досягне 99 % свого граничного значення?

196. Конденсатор ємністю C ввімкнено в коло, напруга якого U, а опір R. Знайти заряд q конденсатора в момент t після ввімкнення.

197. У колі, що має опір R та індуктивність L, діє періодична електрорушійна сила $E_1 = at\sin\left(\frac{2\pi}{T}\right)$, де a – постійна, що дорівнює, очевидно, максимальному значенню сили E_1, t – час, T – період. Визначити силу струму I в колі в будь-який момент часу, якщо в початковий момент $(t = 0)$ сила струму дорівнює нулеві.

198. Підводний човен, який не має ходу, одержавши невелику від'ємну плавучість P (вага більша за виштовхувальну силу), занурюється на глибину, рухаючись поступально. Опір води за невеликої від'ємної плавучості можна прийняти пропорційним першому ступеневі швидкості занурення, який дорівнює kSv, де k – коефіцієнт пропорційності, S – площа горизонтальної проекції човна, v – швидкість занурення. Маса човна становить m. Визначити швидкість v занурення човна, якщо при $t = 0$ початкова швидкість $v_0 = 0$, та шлях s, який пройшов човен за час T занурення.

199. У дні циліндричної посудини, що має вертикальну вісь, а площа її поперечного перерізу становить S квадратних сантиметрів, є малий круглий отвір, закритий діафрагмою. Площа отвору становить q квадратних сантиметрів. У посудину налито рідину на висоту h сантиметрів. У момент $t = 0$ діафрагма починає відтулятися, причому площа отвору пропорційна часові, й повністю він відкривається за T секунд. Якою буде висота H рідини в посудині через T секунд після початку досліду? Закон витікання $v = k\sqrt{2gh}$, де k – коефіцієнт пропорційності для води $k = 0,6$; h – висота рівня рідини.

200. Сповільнювальна дія тертя на диск, що обертається в рідині, пропорційна кутовій швидкості обертання. Встановити залежність кутової швидкості ω обертання від часу, якщо відомо, що диск, початкова частота обертання якого становила 100 хв^{-1}, через 1 хв має частоту обертання 60 хв^{-1}.

201. Пасажирський потяг рухається прямолінійною горизонтальною рейковою колією зі сталою швидкістю $v_0 = 72$ км/год. У деякий момент часу потяг гальмує, що спричиняє опір рухові, який становить $\frac{1}{10}$ маси потяга. Визначити час t_0 гальмування потяга до його повної зупинки та довжину шляху x, яку пройшов потяг за час гальмування.

202. Моторний човен, що має масу 300 кг, рухається прямолінійно. Його початкова швидкість дорівнює 16 м/с. Опір води пропорційний швидкості човна і становить 10 кг при швидкості човна 1 м/с. Яку відстань s пройде човен з увімкнутим мотором, коли його швидкість дорівнюватиме 8 м/с, та за який час t він подолає цю відстань?

203. До нерухомого центра O притягується матеріальна точка. Сила притягання пропорційна масі точки й обернено пропорційна кубові відстані між ними, причому коефіцієнт пропорційності становить k. У початковий момент відстань між точкою і центром O становить s, швидкість дорівнює нулеві. Встановити закон руху точки.

204. Матеріальна точка, маса якої m, переміщається прямолінійно під дією сили, що змінюється за законом $F = F_0\cos\omega t$, де F_0, ω – постійні. У початковий момент швидкість точки дорівнювала v_0. Встановити закон руху точки.

205. Під час пострілу з гармати снаряд, маса якого дорівнює 6 кг, вилітає горизонтально зі швидкістю 570 м/с. Визначити сумарний тиск P порохових газів, якщо відстань, яку проходить снаряд усередині гармати, становить 2 м, та час t, за який снаряд долає відстань. Тиск газів вважати постійним.

206. Куля масою m падає вертикально вниз під дією сили тяжіння в середовищі, протидійна сила якого пропорційна коефіцієнтові k першого степеня швидкості. Встановити закон руху кулі. Початковою швидкістю кулі знехтувати.

207. Тіло, маса якого становить P, підкинуто вертикально вгору зі швидкістю v_0. На яку висоту H і за який час T воно підніметься, якщо опір повітря пропорційний коефіцієнтові k^2 другого степеня швидкості?

208. Куля входить у дошку, товщина якої $h = 10$ см, зі швидкістю $v_0 = 200$ м/с, а вилітає з неї зі швидкістю $v_1 = 80$ м/с. Визначити час t_0 руху кулі крізь дошку, якщо сила опору дошки пропорційна квадратові швидкості кулі.

209. Камінь падає в шахту. Звук від удару каменя об дно шахти почуто через 6,5 с від початку його падіння. Визначити глибину шахти H, якщо швидкість звуку становить 330 м/с. Опором повітря та початковою швидкістю каменя знехтувати.

210. Тіло підкинуто з поверхні Землі вертикально вгору з початковою швидкістю v_0. Враховуючи силу ньютонівського тяжіння та нехтуючи опором повітря, визначити максимальну висоту $h_{\max}$, якої досягне тіло, та час T, потрібний для цього, якщо радіус Землі становить R.

211. Тіло перебуває на поверхні Землі. Визначити швидкість v_0, якої потрібно надати тілу, щоб воно піднялося вертикально вгору на висоту, що дорівнює радіусові Землі $\left(R = 637 \cdot 10^6 \text{ см}\right)$. Сила земного тяжіння змінюється обернено пропорційно квадратові відстані тіла від центра Землі. Вважати, що прискорення вільного падіння $g = 980$ см/с; опором повітря знехтувати.

212. Робота діючої сили під час прямолінійного руху частинки, маса якої становить 4 г, пропорційна кореню кубічному з відстані, пройденої частинкою від деякого центра (коефіцієнт пропорційності $k = 2$). Встановити закон руху частинки, якщо через 1 с після початку руху частинка перебувала на відстані 1 см від центра, її швидкість при цьому дорівнювала 1 см/с.

213. Важке тіло переміщується гладкою поверхнею, що нахилена під кутом $30°$ до горизонту. Визначити, за який час t тіло пройде відстань 9,6 м завдовжки, якщо в початковий момент його швидкість становила 2 м/с.

214. Матеріальна точка спускається гладкою похилою поверхнею під дією сили тяжіння, вийшовши з точки A. Яким має бути кут нахилу α, щоб час, протягом якого точка пройде відстань AB, був найменшим, якщо $OB = a$ – постійна? Початкову швидкість матеріальної точки не враховувати.

215. Санки переміщуються спочатку похилою поверхнею AB, кут нахилу якої α, а потім горизонтальною до точки C, де вони зупиняються. Визначити коефіцієнт тертя f, якщо $AB = s_1$, $BC = s_2$. Початковою швидкістю санок та опором повітря знехтувати.

216. Встановити закон руху важкої матеріальної точки, що підкинута з початковою швидкістю v_0 під кутом α до горизонту в середовищі, опір якого пропорційний першому степеню швидкості $\left(\overline{R} = -mk\overline{v}\right)$.

217. Визначити кут нахилу α ствола далекобійної гармати до горизонту, якщо ціль виявлена на відстані 32 км, а початкова швидкість снаряда на виході з дула $v_0 = 600$ м/с. Опором повітря знехтувати.

218. Твердому тілу, що перебуває у стані спокою, надано обертання навколо нерухомої осі постійним моментом, який дорівнює M. При цьому виникає момент M_1, пропорційний кутовій швидкості обертання $\left(M_1 = \alpha\omega\right)$. Встановити закон руху $\varphi(t)$. Вважати, що початковий кут повороту дорівнює нулеві, а момент інерції тіла відносно осі обертання I.

219. Під час польоту снаряда обертання його навколо осі симетрії уповільнюється внаслідок дії момента сили опору повітря, що становить $k\omega$, де k – постійний коефіцієнт пропорційності, ω – кутова швидкість обертання снаряда. Встановити закон спадання кутової швидкості, якщо початкова кутова швидкість дорівнює ω_0, а момент інерції снаряда відносно осі симетрії I.

220. Визначити траєкторію руху зарядженої частинки, що має масу m і заряд e, у змінному електричному полі, якщо проекція напруженості поля на вісь Ox становить $\cos\omega t$, а на вісь Oy – $\sin\omega t$, початкова швидкість дорівнює нулеві, початкове положення збігається з початком координат.

221. Частинка, що переносить заряд e електричної енергії та має масу m, перебуває в однорідному електричному полі. Напруженість електричного поля є змінною ($E = A\sin kt$, де A, k – задані постійні). Визначити траєкторію руху частинки, якщо відомо, що в електричному полі на неї діє сила $F = eE$, напрямлена в бік напруженості E. Впливом сили тяжіння знехтувати, початкове положення частинки вважати за початок координат, початкова швидкість частинки дорівнює нулеві.

222. Визначити траєкторію руху зарядженої частинки, що має масу m і заряд e, у рівномірному електричному полі напруженістю E, якщо в початковий момент $t = 0$ швидкість дорівнює v_0 і напрямлена під кутом α до напряму поля $(\alpha \neq 0)$.

223. Визначити силу струму I в котушці в момент часу t, якщо опір її становить R, коефіцієнт самоіндукції L, початкова сила струму $I_0 = 0$. Електрорушійна сила змінюється за законом $E = E_0 \sin \omega t$.

224. Напруга та опір у колі рівномірно змінюються протягом однієї хвилини відповідно від 0 до 120 В і від 0 до 120 Ом. Самоіндукція кола є постійною. Початкова сила струму I_0. Встановити залежність між силою струму та часом протягом першої хвилини досліду.

225. Визначити плоскі криві, радіус кривини яких пропорційний кубові нормалі.

226. Визначити лінію, проекція радіуса кривини якої на вісь є величиною постійною і дорівнює a.

227. Радіус кривини якої лінії в будь-якій її точці пропорційний довжині нормалі? Вважати, що коефіцієнт пропорційності $k = \pm 1$.

228. Тонка гнучка однорідна й нерозтяжна нитка підвішена за обидва кінці, відстань між якими l. Якої форми набуде нитка під дією своєї ваги q, якщо кінці її розміщуються на горизонтальній прямій, що вважається віссю Ox, а натяг нитки H?

229. Дно резервуара, місткість якого становить 300 л, вкрито сумішшю солі та нерозчинної речовини. Припускаючи, що швидкість розчинення солі пропорційна різниці між концентрацією в даний момент і концентрацією насиченого розчину (1 кг солі на 3 л води) та що дана кількість чистої води розчиняє $\frac{1}{3}$ кг солі за 1 хв, обчислити, скільки солі міститиме розчин через 1 год.

230. Цегляна стіна ($k = 0{,}0015$) має товщину 30 см. Встановити залежність температури від відстані між точкою та навантаженим краєм стіни, якщо температура на внутрішній поверхні стіни становить 20 °С, а на зовнішній – 0 °С. Визначити кількість теплоти Q, яку віддає 1 м^2 стіни назовні протягом доби. Врахувати, що за законом Ньютона кількість теплоти, що виділяється поверхнею, перпендикулярною до осі Ox і площа якої S, визначається за формулою $Q = -kS\frac{dT}{dt}$, де k – коефіцієнт теплопровідності, T – температура, t – час.

Відповіді

1. $y = xy'$. **2.** $x + yy' = 0$. **3.** $xy' = 2y$. **4.** $y' = \frac{y}{x}\ln y'$. **5.** $yy' = p$. **6.** $y' = ky$. **7.** $4y = (y')^2$. **8.** $(y')^2 + y^2 = 1$. **9.** $x^2y' - xy = yy'$. **15.** 1) $-y^2 + 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$; 2) $(x^2 - 2x + 2)\times(y+1)e^{2\operatorname{arctg} y} = C$. **16.** 1) $\ln|x| = \sqrt{y^2 + 1} + C$, $x = 0$; 2) $\ln\frac{1 + y^2}{y + \sqrt{1 + y^2}} = \frac{2C}{\sqrt{1 + x^2}} + C$. **17.** 1) $x^2 + y\sin y + \cos y = C$; 2) $x + y - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 2\ln\left|(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} - 1)\right| = C$. **18.** 1) $y = \operatorname{arctg} C(1 - e^x)^5$; 2) $y = \frac{1}{2}\arccos(C_1 + x - e^{-x})$. **19.** 1) $y = \arccos e^{Cx}$; 2) $\frac{e^{2x}}{2} - e^y - \ln\sqrt{1 + y^2} - \operatorname{arctg} y = C$. **20.** 1) $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$; 2) $2\sin x + \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| = C$. **21.** 1) $\arcsin\frac{x}{2} - \sqrt{3 - y^2} = C$; 2) $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = C\left(\operatorname{tg}\frac{y}{2} + 1\right)\left(1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. **22.** 1) $x - \operatorname{arctg} x + 2\ln(5 + y^2) = C$; 2) $y = \ln\left|C(1 + x^2) - 1\right|$. **23.** 1) $\cos^{-4} 3x - 6\sin^{-2} y = C$; 2) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C$. **24.** 1) $(x^3 + 5)(y^3 + 5) = 30$; 2) $2\sqrt[4]{x + 1}\ln y = \pm 1$. **25.** 1) $x^2 + 1 = 2e^{-y}(y + 1)$; 2) $3\operatorname{arctg} x^2 + 2\operatorname{arctg} y^3 = \frac{\pi}{2}$. **26.** 1) $x = e^{\sin y}$; 2) $\ln|\operatorname{tg} y| = 4(1 - \cos x)$. **27.** 1) $\cos x = \sqrt{2}\cos y$; 2) $y = \ln\left|\operatorname{tg}\left(e^x + \frac{\pi}{4} - 1\right)\right|$. **28.** 1) $y = \frac{b + x}{1 + bx}$; 2) $2\ln|\sin y| = e^{(x-1)^2} - 1$. **29.** 1) $y = Ce^{\frac{y}{x}}$; 2) $e^{\frac{y}{x}} = \frac{1}{4} + \frac{C_1}{x^4}$. **30.** 1) $y = -x\ln\ln(Cx)$; 2) $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$. **31.** 1) $\ln(Cx) = \cos\frac{y}{x}$; 2) $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$. **32.** 1) $y^2 = 2x^2\ln\frac{C}{x}$; 2) $\operatorname{tg}\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}$. **33.** 1) $x\ln Cx = 2\sqrt{xy}$, $y = 0$; 2) $x^2 + y^2 = Ce^{-2\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **34.** 1) $\ln\frac{x + y}{x} = Cx$; 2) $y = x\sqrt[3]{\ln(Cx^3)}$, $x = 0$. **35.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{y}{2x} - 2\ln|x| = \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \frac{x}{\sqrt{4 - 2\ln x}}$. **36.** 1) $5xy^4 + 10x^3y^2 + x^5 = 1$; 2) $y = \frac{2x(1 + x^3)}{(1 - 2x^3)}$. **37.** 1) $y = xe^{-\frac{x}{2}}$; 2) $(x + y)(1 + \ln x) = xe^{\frac{y}{x}}$. **38.** 1) $xe^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = 1$; 2) $\ln x = -\sin\frac{y}{x}$. **39.** 1) $\ln x = \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; 2) $2(x - y)^2 = xy^2$.

40. $C(x-1)=e^{\frac{2(y-1)}{x-1}}$. **41.** $C(x-y)=e^{\frac{3(x-1)}{x-y}}$. **42.** $C(x-y)=e^{\frac{7(x-1)}{x-y}}$. **43.** $5y-10x-\ln|5x+10y+z|=C$. **44.** $x^2+y^2-xy+x-y=C$. **45.** $\frac{x^2}{2}+y^2-xy+y=C$. **46.** 1) $x+2y+3\ln|x+y-2|=C$; 2) $\ln|y+2|=C_1-2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3}$. **47.** $y=Ce^{-\cos x}+1-\cos x$.
48. 1) $y=Ce^{x^2}+x^3$; 2) $y=x^2\ln\frac{C}{x}$. **49.** $y=xe^{-\sin x}+Ce^{-\sin x}$. **50.** 1) $y=\sin x+C\cos x$; 2) $y=(C+x^2)e^{x^2}$. **51.** 1) $y=x^2+\frac{C}{\sin x}$; 2) $y=Cx\ln x+\sqrt{x}$. **52.** 1) $x=(C-\cos y)y$; 2) $y=\frac{C-e^{-x^2}}{2x^2}$. **53.** $y=\left(\frac{C}{x}+x^2\right)e^{-x}$. **54.** 1) $y=C\ln^2 x-\ln x$; 2) $y=C\ln x+x^3$.
55. 1) $x=(C-\cos y)\sin y$; 2) $y=Cx^2+e^x$. **56.** 1) $y=\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$; 2) $y=\ln x+x-1$.
57. 1) $y=\sin x\cos x$; 2) $y=\frac{1-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$. **58.** 1) $y=\frac{(x+2)^3}{2}+(x+2)+(x+2)\ln|x+2|$; 2) $y=x\ln x+\frac{2}{x}$. **59.** 1) $y=\frac{x^2}{2}\ln x$; 2) $y=\frac{1-\cos 2x}{2\cos x}$. **60.** 1) $y^{-3}=(C-3\operatorname{tg}x)\cos^3 x$, $y=0$; 2) $y^{-1}=\frac{C}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{2}-\frac{\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|}{2\sqrt{1+x^2}}$. **61.** 1) $y^3=Cx^3-3x^2$; 2) $y^{-1}=Cx^2+\frac{1}{x}$.
62. 1) $y^{-\frac{1}{3}}=Cx^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{7}x^3$, $y=0$; 2) $2y^{-2}=(x+1)^4+C(x+1)^2$. **63.** 1) $y^{\frac{1}{2}}=\operatorname{tg}x+\frac{\ln|\cos x|}{x}+\frac{C}{x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{C\sqrt{x^2+x+1}-x}$. **64.** 1) $y=e^{-x}\left[\frac{e^x}{2}+1\right]^2$; 2) $y^4=C\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$. **65.** 1) $y=(1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x+C)^2$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{C\sin x+x}}$. **66.** 1) $x^2y+3y^2x-y^3=C$; 2) $\frac{2\sin^2 x}{y}+x^2+y^2=C$. **67.** 1) $\frac{x^2}{2}+x\sin y-\cos y=C$; 2) $y\sqrt{1+x^2}+x^2y-y\ln x=C$. **68.** 1) $\frac{x^3}{3}+y^2x+yx+e^y=1$; 2) $x\sin y-y\cos x+\ln|xy|=C$. **69.** 1) $x^3y-\cos x-\sin y=C$; 2) $x^3\operatorname{tg}y+y^4+\frac{y^3}{x^2}=C$. **70.** 1) $x^3(1+\ln y)-y^2=C$; 2) $\operatorname{tg}xy-\cos x-\cos y=C$. **71.** 1) $x^2+3=(C-5x)\sin y$; 2) $y=x$. **72.** $x^2+\sin^2 y=Cx$. **73.** $y^2=Cx^3+x^2$. **74.** $e^x(x\sin y-\sin y+y\cos y)=C$. **75.** $x+C=e^{-y}\cos x$. **76.** $y=Cx-\ln C$ – загальний розв'язок; $y=\ln x+1$ – особливий розв'язок.

77. $\begin{cases} x=2(1-p)+Ce^{-p}, \\ y=2(1-p^2)+Ce^{-p}(1+p)+p^2, \end{cases}$ $y=x(1+p)+p^2$. **78.** $\begin{cases} x=\frac{C}{\sqrt{p}}+\frac{2}{3}p, \\ y=-xp+p^2. \end{cases}$

79. $\begin{cases} x=2p-1, \\ y=p^2, \end{cases}$ $y=xC+C(1-C)$, $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$. **80.** $x=\frac{C}{p^2}+\frac{2}{3}p$, $y=\frac{2C}{p}+\frac{p^3}{3}$, $y=0$.

81. $y=-\frac{x^2}{4}$. **82.** $y=\pm2\sqrt{Cx}+C$, $y=-x$. **83.** $C^3=3(Cx-y)$, $9y^2=4x^3$.
84. $y=x(\ln x-1)$, $y=Cx-e^C$. **85.** $y=-\frac{Cp^{\frac{1}{3}}(p+2)}{(p+3)^{\frac{4}{3}}}$, $x=\frac{C}{p^{\frac{2}{3}}(p+3)^{\frac{4}{3}}}$, $y=0$, $y=3x$.
86. $xp^2=p+C$, $y=2+2Cp^{-1}-\ln p$. **87.** $2C^2(y-Cx)=1$, $y=x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2x^{\frac{2}{3}}}$. **88.** $y=\frac{1}{4}x^2$.
89. $y=-\frac{1}{4}x^2$. **90.** 1) $x=Cy^2$, $y=0$; 2) $y=\frac{x-3}{\cos x}$. **91.** 1) $y=\frac{1}{2}\left(\frac{C}{\cos^2 x}-1\right)$; 2) $y=\sqrt[3]{x-2e^{1-x}}$. **92.** 1) $y=(x-2)+\frac{1}{2}(x-2)^3+(x-2)\ln(x-2)$; 2) $\ln\frac{x^2+y^2}{8}=2\frac{y}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{\pi}{2}$. **93.** 1) $x-y^2\cos^2 x=C$; 2) $y=\frac{4+x}{1+4x}$. **94.** 1) $y=x^4\ln^2 Cx$, $y=0$; 2) $y=\frac{2x}{1-3x^2}$. **95.** 1) $e^{\frac{y}{x}}=\frac{Cx}{1-Cx}$; 2) $\ln(x^2+y^2)=-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. **96.** 1) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+3x-3\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=0$; 2) $3y=5x^2-x^3-2$. **97.** 1) $x^2+1=2(C-2x)\sin 2y$; 2) $y=\frac{2}{3\sqrt{x^2-1}-2}$.
98. 1) $xy(C-\ln^2 y)=1$; 2) $y=-x$. **99.** 1) $\arcsin\frac{y}{x}=\ln|Cx|$; 2) $y=\frac{e^x-2-e}{x}$.
100. $y=\frac{\ln^2 x}{2}+C_1\ln x+C_2$. **101.** $e^y+C_1=(x+C_2)^2$. **102.** $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$.
103. $\frac{1}{2}\ln(2y+3)=C_1x+C_2$. **104.** $y=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x+\left(C_1-\frac{1}{2}\right)\operatorname{arctg}x+C_2$.
105. $y=\pm\sqrt{2C_1(\pm x+C_2)^4-\frac{9}{2C_1}}$. **106.** $y=x^3-3x+(C_1+3)\operatorname{arctg}x+C_2$.

107. $\ln\left|y^2+2C_1+\sqrt{y^4+4C_1y^2+1}\right|=\pm x+C_2$. **108.** 1) $y=e^{2x}$; 2) $y=2x\left(e^{\frac{x+y}{2}}-1\right)+3$.

109. 1) $y=\dfrac{3x^4-4x^3-36x^2+72x+8}{24}$; 2) $14y=2+3(2x-9)(6+x)^{\frac{4}{3}}$.

110. 1) $y=\dfrac{x^3-3x^2+6x+4}{6}$; 2) $y=-\ln|x+1|$. **111.** 1) $y=\dfrac{1}{5}(15x+1)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{4}{5}$; 2) $y=\ln\sqrt{5-x^2}+x+1$. **112–117.** Лінійно незалежні. **118.** $y''(x-1)-xy'+y=0$. **119.** $y''+y=0$. **120.** $y'''-y''=0$. **121.** $y''-y'\operatorname{ctg}x=0$. **122.** $y=C_1\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{C_2}{e}\left(x+1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+1)\ln|x+1|}{x}\right)$. **123.** $xy=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$. **124.** $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}$.
125. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **126.** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$.
127. $y=C_1+C_2x+C_3e^{x}+C_4xe^{x}$. **128.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x$.
129. $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^{-ax}$. **130.** $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin x)$. **131.** $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$.
132. $y=e^{x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)$. **133.** $y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-5x}$. **134.** $y=C_1e^{-x}+e^{x}\left(C_2\cos\sqrt{3}x+C_3\sin\sqrt{3}x\right)$. **135.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **136.** $y=(7-3x)e^{x-2}$.
137. $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$. **138.** $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$.
139. $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$. **140.** $y=e^{\sqrt{3}x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-\sqrt{3}x}(C_3\cos x+C_4\sin x)+C_5\sin 2x+C_6\cos 2x$. **141.** $y=2+e^{-x}$. **142.** 1) $y=e^{3x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+\dfrac{14\cos x+5\sin x}{102}$; 2) $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\dfrac{1}{4}x^2e^{x}$. **143.** 1) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}+\dfrac{24x^2+52x+41}{64}$; 2) $y=C_1+C_2x+C_3e^{\frac{7x}{5}}+\dfrac{3}{14}x^2$.
144. 1) $y=-\dfrac{1}{4}x\cos 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; 2) $y=\left(\dfrac{x}{8}-\dfrac{1}{4}\right)e^{x}+(C_1+C_2x)e^{-x}+\left(C_3-\dfrac{x}{8}\right)\cos x+C_4\sin x$. **145.** 1) $y=\dfrac{3}{2}x^2e^{-2x}$; 2) $y=C_1e^{x}+\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{\frac{-x}{2}}+\dfrac{1}{2}(\cos x-\sin x)$. **146.** 1) $y=e^{2x}\left(\dfrac{61}{3}\sin x-\dfrac{49}{6}\sin 2x\right)$; 2) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{4x-x\cos 2x-2x^2\sin 2x}{32}$.

147. 1) $y=C_1e^{5x}+C_2e^{4x}-\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+2x\right)e^{4x}$; 2) $y=x^2+\operatorname{sh}x$. **148.** 1) $y=\dfrac{1}{2}x^3+x^2+C_1e^{x}+C_2+C_3x$; 2) $y=(\cos x-2\sin x)e^{2x}+(x+1)^2e^{x}$.
149. 1) $y=\dfrac{1}{3}xe^{3x}+3x^2+2x+C_1+C_2e^{3x}$; 2) $y=\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)e^{x}-\dfrac{1}{8}e^{x}\sin 2x$.
150. 1) $y=2x\sin x-x\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x$; 2) $y=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x-\dfrac{1}{5}e^{x}+\dfrac{1}{24}x^3-\dfrac{3}{32}x\sin 2x$. **151.** 1) $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x-\dfrac{x^2}{8}\cos x$; 2) $y=e^{2x}-e^{3x}+xe^{-x}$. **152.** 1) $y=e^{x}(C_1+C_2x)+2x^2e^{x}$; 2) $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+(C_3+C_4x)e^{-2x}+\dfrac{1}{13}\cos 3x-\dfrac{8}{169}\sin 3x$. **153.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{1}{2}(x-1)e^{x}+e^{-x}$; 2) $y=\left(x+\dfrac{3}{5}\right)e^{-3x}+\dfrac{4\sin x-3\cos x}{5}$. **154.** 1) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{x}{2}\sin x-\dfrac{1}{3}\cos 2x$; 2) $y=x^2$. **155.** 1) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+e^{x}-1$; 2) $y=\cos x+2\sin x+e^{-x}-3e^{x}+2xe^{x}$.
156. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+\overline{y}$, де $\overline{y}$: 1) $\dfrac{8}{3}e^{x}$; 2) $-xe^{-2x}$; 3) $\sin x-3\cos x$; 4) $6x^3-27x^2+63x-48$; 5) $\dfrac{4}{105}e^{-x}\left(12\cos\dfrac{x}{2}-26\sin\dfrac{x}{2}\right)$; 6) $e^{-2x}\left(2x^2+x\right)$; 7) $4x+4-9\cos 2x-3\sin 2x$; 8) $2xe^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{2x}$; 9) $\dfrac{1}{40}(3\sin 2x-\cos 2x)+\dfrac{1}{340}(7\cos 4x-3\sin 4x)$; 10) $\dfrac{1}{12}e^{x}+\dfrac{1}{2}xe^{-x}$.
157. $y=C_1+C_2e^{-\frac{3}{2}x}+\overline{y}$, де $\overline{y}$: 1) $\dfrac{2}{3}x^3-x^2+\dfrac{5}{3}x$; 2) $-\dfrac{x}{3}e^{-\frac{3}{2}x}$; 3) $-6\cos x+9\sin x$; 4) $(9x+3{,}9)\cos x+(6x-11{,}7)\sin x$; 5) $\dfrac{1}{265}e^{-2x}\left((3180x-1309)\cos x+(2915x-2812)\sin x\right)$.
158. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\overline{y}$, де $\overline{y}$: 1) $3x^3+4x+5$; 2) $-\dfrac{6}{7}\cos 5x$; 3) $\dfrac{x}{4}\sin 2x$; 4) $\dfrac{1}{3}\sin x-\dfrac{1}{4}e^{2x}$; 5) $\dfrac{x}{8}\sin 2x-\dfrac{1}{24}\cos 4x$; 6) $9-\cos 4x-12x\cos 2x$. **159.** 1) $y=\dfrac{1}{x}+e^{x}(C_1+C_2x)$; 2) $C_1+C_2e^{x}-\cos e^{x}$ **160.** 1) $y=\dfrac{e^{x}}{x}+C_1+C_2e^{x}$; 2) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}-\left(e^{2x}-e^{x}\right)\left(1-\ln\left|1-e^{x}\right|\right)$. **161.** 1) $y=(C_1+\ln|\sin x|)\sin x+(C_2-x)\cos x$;

2) $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \sin 3x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| - 2$. **162.** 1) $y = \sin 2x\ln|\cos x| - x\cos 2x + C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$; 2) $y = C_1 + C_2 e^{-x} - \ln\left(1+e^{-x}\right) - e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$.
163. 1) $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{\cos 2x}{\cos x}$; 2) $y = \left((C_1 - x)\cos x + \left(C_2 + \ln|\sin x|\right)\sin x\right)e^{-x}$.
164. 1) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{\sin 2x}{4}\ln|\operatorname{tg} x|$; 2) $y = (C_1 - 4)e^{x} + \left(C_2 + \frac{1}{2}\right)e^{-x} + C_3 e^{2x} + 1 + \left(8e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}\right)\ln\left(e^{-x}+2\right)$. **165.** $I(t) = C_1 + C_2 e^{-333{,}333\,t} - 11{,}111\cos 300t + 0.041\sin 300t$. **166.** $I(t) = e^{-500\,t}\left(C_1\cos 500\sqrt{3}\,t + C_2\sin 500\sqrt{3}\,t\right) + \sqrt{2}\sin\left(10^3 t + 135\right)$.

167. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t}, \\ y = -C_1 e^{t} + 3C_2 e^{5t}. \end{cases}$ **168.** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + t e^{t} - t^2 - 2, \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{-t} + (t-1)e^{t} - 2t. \end{cases}$

169. $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\left(3e^{t} + 5e^{-t}\right) + \frac{1}{2}t e^{t} - 1, \\ y = \frac{5}{4}\left(e^{t} - e^{-t}\right) + \frac{1}{2}t e^{t} - t. \end{cases}$ **170.** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} + e^{t}(2\cos t - \sin t), \\ y = C_1 e^{t} - C_2 e^{3t} + e^{t}(3\cos t + \sin t). \end{cases}$

171. $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - 2e^{3t}. \end{cases}$ **172.** $\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}e^{t}, \\ y = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} - \frac{3}{4} - e^{t}. \end{cases}$

173. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_3 e^{5t} - 2C_2 e^{2t}, \\ z = -C_1 e^{t} - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}. \end{cases}$ **174.** $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}, \\ z = 2C_2 e^{2t} - C_3 e^{-t}. \end{cases}$

175. $\begin{cases} x = C_1 e^{-2t} + C_2\sin 4t + C_3\cos 4t, \\ y = -\frac{1}{4}C_1 e^{-2t} - \frac{1}{2}C_2\cos 4t - \frac{1}{2}C_3\sin 4t, \\ z = -\frac{1}{4}C_1 e^{-2t} + C_2\sin 4t + C_3\cos 4t. \end{cases}$ **176.** $\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}, \\ y = \frac{3}{2}C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \\ z = \frac{3}{2}C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-t}. \end{cases}$

177. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t} - e^{t}\ln\left(e^{2t}+1\right) + 2e^{2t}\operatorname{arctg} e^{t}, \\ y = C_1 e^{t} + 3C_2 e^{2t} - e^{t}\ln\left(e^{2t}+1\right) + 3e^{2t}\operatorname{arctg} e^{t}. \end{cases}$

178. $\begin{cases} x = -\frac{4}{3}t - \frac{7}{9}, \\ y = \frac{t}{3} - \frac{5}{9}. \end{cases}$ **179.** $\begin{cases} x = \frac{4}{25}e^{t} - \frac{1}{36}e^{2t}, \\ y = \frac{1}{25}e^{t} + \frac{7}{36}e^{2t}. \end{cases}$

180. $\begin{cases} x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\cos t|, \\ y = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + 2t\sin t + 2\cos t\ln|\cos t|. \end{cases}$

181. $\begin{cases} x = -2t - \sin t - \cos t - e^{-t}, \\ y = \cos t - 2e^{-t} + 2. \end{cases}$ **182.** $\begin{cases} x = e^{2t} + e^{3t} + t^2 + t, \\ y = 2e^{2t} + t^2 + 1. \end{cases}$

183. $\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{3t}, \\ y = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{3t}; \end{cases}$ $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 t \\ C_1 & (t+1)C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

184. $\begin{cases} x = 4e^{t} + 2e^{-t}, \\ y = -e^{t} - e^{-t}. \end{cases}$ **185.** $\begin{cases} x = \frac{1}{4}\left(-2C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} - 2C_3 t e^{-t}\right), \\ y = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}, \\ z = \frac{1}{4}\left(2C_1 e^{t} + (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^{-t}\right); \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \left(-\frac{C_2}{2}+\frac{C_3}{4}\right) & -\frac{C_3}{3} \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ \frac{C_1}{2} & \left(\frac{C_2}{2}+\frac{C_3}{4}\right) & \frac{C_3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ e^{-t} \\ t e^{-t} \end{pmatrix}.$$

186. $\begin{cases} x = (1-2t)e^{-2t}, \\ y = t e^{-2t}. \end{cases}$ **187.** $\begin{cases} x = \left(C_1 + C_2 t - t^2\right)e^{t}, \\ y = \left(C_1 - C_2 + (C_2 + 2)t - t^2\right)e^{t}; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{t} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_1 - C_2 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t} \\ t e^{t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t^2 e^{t} \\ \left(2t - t^2\right)e^{t} \end{pmatrix}.$$

188. $\begin{cases} x = (\sin t - 2\cos t)e^{-t}, \\ y = e^{-t}\cos t. \end{cases}$ **189.** $\begin{cases} x = C_1\cos 2t - C_2\sin 2t + 2t + 2, \\ y = (C_1 + 2C_2)\cos 2t - (C_2 - 2C_1)\sin 2t + 10t; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8t \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 & C_1 + 2C_2 \\ C_2 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ 10t \end{pmatrix}.$$

190. $\begin{cases} x = e^{5t} + e^{3t}, \\ y = 6e^{5t} - 7e^{3t}. \end{cases}$ **191.** 99 %. **192.** $s(8) = 18$ м, $v(t) = \frac{k}{\sqrt{4+2kt}}$, $v(8) = \frac{10}{9}$ м/с.

193. $v(0{,}002) \approx 70$ м/с. **194.** $s = 38{,}8$ м, $t = 4{,}6$ с. **195.** $t = \frac{1}{5}\ln 100 \approx 0{,}92$ с.

196. $q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right)$. **197.** $I = \frac{a}{k^2L^2 + R^2}\left(kLe^{-\frac{Rt}{L}} + R\sin kt - kL\cos kt\right)$.

198. $v = \frac{P}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kSt}{m}}\right)$, $s = \frac{P}{kS}\left[T - \frac{P}{kS}\left(1 - e^{-\frac{kS}{m}}\right)\right]$. **199.** $H = \left(\sqrt{h} - \frac{k\sqrt{2g}\,q}{4s}T\right)^2$.

200. $\omega = 100{,}6$ хв$^{-1}$. **201.** $t_0 = \frac{10 \cdot v_0}{g} = 20{,}4$ с, $x(t_0) = \frac{5v_0^2}{g} = 204$ м. **202.** $s = 24{,}5$ м, $t = \frac{30\ln 2}{9{,}81}$ с. **203.** $x = \frac{1}{s}\sqrt{s^4 - kt^2}$. **204.** $x = x_0 + \frac{F_0}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t) + v_0 t$. **205.** $P = 49{,}7$ т, $t = 0{,}007$ с. **206.** $s = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}\left(e^{-kt} - 1\right)$. **207.** $H = \frac{1}{2k^2g}\ln\left(1 + k^2v_0^2\right)$, $T = \frac{\operatorname{arctg} kv_0}{kg}$.

208. $t_0 = 0{,}000\,82$ с. **209.** $H = 175$ м. **210.** $h_{max} = R\left(\frac{v_0}{c}\right)^2$, $T = \frac{R}{c^2}\left(v_0 + \frac{2gR}{c}\arcsin\frac{v_0}{\sqrt{2gR}}\right)$, $c^2 = 2gR - v_0^2$. **211.** $v_0 = 7{,}9$ км/с. **212.** $x = \left(\frac{5t+1}{6}\right)^{\frac{6}{5}}$ (см).

213. $t = 1{,}61$ с. **214.** $\alpha = 45°$. **215.** $f = \frac{s_1\sin\alpha}{s_2 + s_1\cos\alpha}$. **216.** $x = \frac{v_0\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$.

217. $x = 30°21'$. **218.** $\varphi(t) = \frac{M}{\alpha}\left(t - \frac{I}{\alpha}\left(e^{-\frac{\alpha t}{I}} - 1\right)\right)$. **219.** $\omega = \omega_0 e^{-\frac{kt}{I}}$. **220.** $x = \frac{e}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$, $y = \frac{e}{m\omega^2}(\omega t - \sin\omega t)$. **221.** $x = \frac{eA}{k^2m}(kt - \sin kt)$. **222.** $y = \frac{eE}{2mv_0^2\sin^2\alpha}x^2 + x\operatorname{ctg}\alpha$.

223. $I = \frac{E_0}{\omega^2L^2 + R^2}\left(L\omega e^{-\frac{Rt}{L}} + R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t\right)$. **224.** $I = 1 + (I_0 - 1)e^{-t^2}$. **225.** $C_1y^2 = (C_1x + C_2)^2 + \frac{1}{k}$, де k – коефіцієнт пропорційності. **226.** $e^{\frac{y}{a}} = C_2\sec\frac{x + C_1}{a}$.

227. $(x + C_2)^2 + y^2 = C_1^2$; $C_1y = \operatorname{ch}(C_1x + C_2)$. **228.** $y = \frac{1}{a}\left(\operatorname{ch} ax - \operatorname{ch}\frac{al}{2}\right)$, $a = \frac{q}{H}$.

229. $m = 18{,}1$ кг. **230.** $T = \frac{2}{3}x$, $Q = 864\ 000$ кал.

Глава 2
ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

2.1. ОРИГІНАЛ І ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ЛАПЛАСОМ

Приклади. **1.** Визначити, чи буде функція $f(t) = \frac{1}{t-1}$ оригіналом.

Розв'язання. Указана функція не є оригіналом, оскільки порушується перша умова [ч. 2, с. 123]. Функція $\frac{1}{t-1}$ у точці $t = 1$ має розрив другого роду.

Відповідь: ні.

2. Визначити, чи може функція $F(p) = \frac{p^3 + 3}{p + 2}$ комплексної змінної p бути зображенням.

Розв'язання. Очевидно, що при необмеженому зростанні p функція не прямує до нуля, отже, вона зображенням не буде. Дійсно,

$$\lim_{p\to\infty} F(p) = \lim_{p\to\infty}\frac{p^3 + 3}{p + 2} = \lim_{p\to\infty}\frac{(p^3 + 8) - 5}{p + 2} = \lim_{p\to\infty}\left(p^2 - 2p + 4 - \frac{5}{p + 2}\right) = \infty \neq 0.$$

Відповідь: ні.

Визначити, чи будуть указані функції оригіналами за умови $f(t) = 0$, $t < 0$.

1. $f(t) = \frac{1}{t^2 + 4}$. **2.** $f(t) = \frac{1}{t - 2}$. **3.** $f(t) = \operatorname{ctg} t$.

4. $f(t) = \frac{1}{\sin t}$. **5.** $f(t) = \cos t$. **6.** $f(t) = e^{t^4}$.

Визначити, чи будуть указані функції зображеннями.

7. $F(p) = e^{3p}$. **8.** $F(p) = \frac{p^2 + 5}{p + 3}$.

9. $F(p) = \frac{p}{p^2 + 2}$. **10.** $F(p) = \frac{p}{p - 2}$.

11. $F(p) = 2^p$. **12.** $F(p) = \frac{p - 2}{p^3 + 8}$.

13. $F(p) = \sin p$. **14.** $F(p) = \operatorname{tg} p$.

Приклади. **1.** Знайти зображення функції $f(t)=e^{gt}$.

Розв'язання. За формулою для зображення [ч. 2, с. 128] $L\left[e^{gt}\right]=\int\limits_0^\infty e^{gt}e^{-pt}\,dt=$

$$=\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_0^\eta e^{(g-p)t}\,dt=\frac{1}{g-p}\lim_{\eta\to\infty}e^{(g-p)t}\Big|_0^\eta=\frac{1}{g-p}\lim_{\eta\to\infty}\left(e^{(g-p)\eta}-1\right)=\frac{1}{p-g},\quad \operatorname{Re}p>$$

$>\operatorname{Re}g$. У випадку $f(t)=e^{-gt}$ $L\left[e^{-gt}\right]=\dfrac{1}{p+g}$, $\operatorname{Re}p+\operatorname{Re}g>0$, у разі $f(t)=e^{j\beta t}$ $L\left[e^{j\beta t}\right]=\dfrac{1}{p-j\beta}$, $\operatorname{Re}p>0$, якщо $f(t)=e^{-j\beta t}$ $L\left[e^{-j\beta t}\right]=\dfrac{1}{p+j\beta}$, $\operatorname{Re}p>0$.

Відповідь: $L\left[e^{gt}\right]=\dfrac{1}{p-g}$, $L\left[e^{-gt}\right]=\dfrac{1}{p+g}$, $L\left[e^{j\beta t}\right]=\dfrac{1}{p-j\beta}$, $L\left[e^{-j\beta t}\right]=\dfrac{1}{p+j\beta}$.

2. Знайти зображення функції $f(t)=t$.

Розв'язання. Застосування перетворення Лапласа дає

$$L[t]=\int\limits_0^\infty t\,e^{-pt}\,dt=\lim_{\eta\to\infty}\int\limits_0^\eta t\,e^{-pt}\,dt.$$

Нехай $u=t$, $dv=e^{-pt}\,dt$, тоді $du=dt$, $v=-\dfrac{1}{p}e^{-pt}$. Отже,

$$L[t]=\lim_{\eta\to\infty}\left[-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^\eta+\frac{1}{p}\int\limits_0^\eta e^{-pt}\,dt\right]=$$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{\eta\to\infty}\left(t\,e^{-pt}+\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\Bigg|_0^\eta=-\frac{1}{p^2}\lim_{\eta\to\infty}\left(t\,e^{-p\eta}-1\right)=\frac{1}{p^2}.$$

Відповідь: $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$.

Використовуючи перетворення Лапласа, знайти зображення функцій.

15. $f(t)=e^{2t}$.

16. $f(t)=e^{-3t}$.

17. $f(t)=t^2$.

18. $f(t)=\sin 3t$.

19. $f(t)=\cos 2t$.

20. $f(t)=\sin 2t$.

Приклади. **1.** Знайти зображення функції $f(t)=\cos\beta t$.

Розв'язання. За формулою Ейлера $\cos\beta t=\dfrac{e^{j\beta t}+e^{-j\beta t}}{2}=\dfrac{1}{2}e^{j\beta t}+\dfrac{1}{2}e^{-j\beta t}$.

Скориставшись властивістю лінійності, де $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$, і формулами (2.3), (2.4) [ч. 2, с. 128], знайдемо

$$L[\cos\beta t]=\frac{1}{2}L\left[e^{j\beta t}\right]+\frac{1}{2}L\left[e^{-j\beta t}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\beta}+\frac{1}{p+j\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{p+j\beta+p-j\beta}{p^2+\beta^2}=\frac{p}{p^2+\beta^2},\quad \operatorname{Re}p>0.$$

Відповідь: $L[\cos\beta t]=\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$.

2. Знайти зображення функції $f(t)=\sin\beta t\operatorname{ch}^2\beta t$.

Розв'язання. За визначенням гіперболічного косинуса запишемо

$$\operatorname{ch}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2},\quad \operatorname{ch}^2t=\frac{1}{4}\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right).$$

Перший множник розписуємо за формулою Ейлера:

$$\sin t=\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}.$$

Перемножимо два останніх вирази й дістанемо

$$\sin t\operatorname{ch}^2t=\frac{1}{8j}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\left(e^{2t}+2+e^{-2t}\right)=$$

$$=\frac{1}{8j}\left(e^{(2+j)t}-e^{(2-j)t}+2e^{jt}-2e^{-jt}+e^{-(2-j)t}-e^{-(2+j)t}\right).$$

Застосувавши перетворення Лапласа до обох частин здобутої рівності, а до правої частини використавши формулу 3 з табл. 13.1 [ч. 2, с. 197], матимемо

$$L\left[\sin t\cdot\operatorname{ch}^2t\right]=\frac{1}{8j}\left[\frac{1}{p-(2+j)}-\frac{1}{p-(2-j)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{p-j}-\frac{2}{p+j}+\frac{1}{p+(2-j)}-\frac{1}{p+(2+j)}\right].$$

Групуючи перший та останній, другий та передостанній, третій та четвертий члени квадратної дужки, спростимо одержаний вираз. Наприклад, $\frac{1}{p-(2+j)}-$ $-\frac{1}{p+(2+j)}=\frac{2(2+j)}{p^2-(2+j)^2}$ і т. д. Тоді

$$L\left[\sin t\cdot \mathrm{ch}^2 t\right]=\frac{1}{4j}\left[\frac{2+j}{p^2-(2+j)^2}-\frac{2-j}{p^2-(2-j)^2}+\frac{2j}{p^2-j^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4j}\left[\frac{(2+j)\left(p^2-3+4j\right)-(2-j)\left(p^2-3-4j\right)}{\left(p^2-3\right)^2+4^2}+\frac{2j}{p^2-j^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{p^2+5}{\left(p^2-3\right)^2+4^2}+\frac{1}{p^2+1}\right].$$

Піднесенням до квадрата p^2-3 дістанемо

$$L\left[\sin t\cdot \mathrm{ch}^2 t\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{p^2+5}{p^4-6p^2+25}+\frac{1}{p^2+1}\right).$$

Тепер, використовуючи теорему подібності, одержуємо

$$L\left[\sin\beta t\cdot \mathrm{ch}^2 \beta t\right]=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{\left(\frac{p}{\beta}\right)^2+5}{\left(\frac{p}{\beta}\right)^4-6\left(\frac{p}{\beta}\right)^2+25}+\frac{1}{\left(\frac{p}{\beta}\right)^2+1}\right].$$

Після спрощень

$$L\left[\sin\beta t\cdot \mathrm{ch}^2 \beta t\right]=\frac{\beta}{2}\left(\frac{p^2+5\beta^2}{p^4-6\beta^2p^2+25\beta^4}+\frac{1}{p^2+\beta^2}\right).$$

Відповідь: $L\left[\sin\beta t\cdot \mathrm{ch}^2 \beta t\right]=\frac{\beta}{2}\left(\frac{p^2+5\beta^2}{p^4-6\beta^2p^2+25\beta^4}+\frac{1}{p^2+\beta^2}\right).$

3. Знайти зображення функції Крилова $y_1(at)=\mathrm{ch}\,at\cdot\cos at$.

Розв'язання. Для визначення зображення функції Крилова використовуємо теорему зміщення в аргументі зображення та алгебраїчні перетворення:

$$\mathrm{ch}\,at\cdot\cos at=\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\cos at=\frac{1}{2}e^{at}\cos at+\frac{1}{2}e^{-at}\cos at,$$

оскільки

$$e^{at}\cos at \risingdotseq \frac{p-a}{(p-a)^2+a^2},\quad e^{-at}\cos at\risingdotseq\frac{p+a}{(p+a)^2+a^2},$$

то

$$L\left[y_1(at)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{p-a}{(p-a)^2+a^2}+\frac{p+a}{(p+a)^2+a^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{p-a}{\left(p^2+2a^2\right)-2ap}+\frac{p+a}{\left(p^2+2a^2\right)+2ap}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(p-a)\left[\left(p^2+2a^2\right)+2ap\right]+(p+a)\left[\left(p^2+2a^2\right)-2ap\right]}{\left(p^2+2a^2\right)^2-4a^2p^2}=\frac{p^3}{p^4+4a^4}.$$

Відповідь: $\mathrm{ch}\,at\cdot\cos at\risingdotseq\frac{p^3}{p^4+4a^4}$.

4. Знайти зображення функції $f(t)=t^2\cos at$.

Розв'язання. Скористаємося відомою формулою $f(t)=\cos at\risingdotseq\frac{p}{p^2+a^2}=$ $=F(p)$, а потім теоремою про диференціювання зображення [ч. 2, с. 136]:

$$t^2f(t)\risingdotseq(-1)^2\frac{d^2}{dp^2}F(p),\quad t\cos at\risingdotseq\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2},$$

тобто

$$t^2\cos at\risingdotseq\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)}\right)=\frac{2p\left(p^2+a^2\right)^2-\left(p^2-a^2\right)\cdot 2\left(p^2+a^2\right)\cdot 2p}{\left(p^2+a^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2p\left(p^2-3a^2\right)}{\left(p^2+a^2\right)^3}.$$

Відповідь: $L\left[t^2\cos at\right]=\frac{2p\left(p^2-3a^2\right)}{\left(p^2+a^2\right)^3}$.

5. Знайти зображення диференціального виразу

$$x^{IV}(t)+3x'''(t)-2x''(t)+5x'(t)-x(t)+4$$

з початковими умовами

$$x(0)=x''(0)=0,\ x'(0)=x'''(0)=-1.$$

Розв'язання. Загальний порядок переходу від оригіналу до зображення такий: множимо вираз на e^{-pt} та інтегруємо здобутий вираз за t у межах від 0 до $+\infty$. Якщо позначити $L[x(t)]=X(p)$, то за теоремою про диференціювання оригіналу [ч. 2, с. 138] можна записати

$$L[x'(t)]=pX(p)-x(0)=pX(p);$$

$$L[x''(t)]=p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)+1;$$

$$L[x'''(t)]=p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X(p)+p;$$

$$L[x^{IV}(t)]=p^4X(p)-p^3x(0)-p^2x'(0)-px''(0)-x'''(0)=p^4X(p)+p^2+1;$$

$$L[4]=\frac{4}{p}.$$

Звідси випливає, що

$$L[x^{IV}(t)+3x'''(t)-2x''(t)+5x'(t)-x(t)+4]=$$
$$=p^4X(p)+p^2+1+3[p^3X(p)+p]-2[p^2X(p)+1]+$$
$$+5pX(p)-X(p)+\frac{4}{p}.$$

Після зведення подібних членів у правій частині рівності маємо

$$L[x^{IV}(t)+3x'''(t)-2x''(t)+5x'(t)-x(t)+4]=$$
$$=(p^4+3p^3-2p^2+5p-1)X(p)+p^2+3p-1+\frac{4}{p},$$

що й буде відповіддю.

6. Знайти оригінал $f(t)$ за зображенням $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-8p+25)}$.

Розв'язання. Спочатку перетворимо зображення $\dfrac{1}{p(p^2-8p+25)}$ в одну з уже відомих формул. Зазначимо, що у знаменнику міститься квадратний тричлен. Виділимо повний квадрат, тоді

$$\frac{1}{p^2-8p+25}=\frac{1}{(p-4)^2+9}=\frac{1}{3}\frac{3}{(p-4)^2+3^2}.$$

За формулою (3.13) в [ч. 2, с. 133] можна записати

$$\frac{1}{3}\frac{3}{(p-4)^2+3^2}\risingdotseq\frac{1}{3}e^{4t}\sin 3t.$$

Поділивши ліву частину на p та застосувавши теорему про інтегрування оригіналу [ч. 2, с. 141], одержимо

$$\frac{1}{p(p^2-8p+25)}\risingdotseq\frac{1}{3}\int_0^t e^{4u}\sin 3u\,du=\frac{e^{4u}(4\sin 3u-3\cos 3u)}{3\cdot 25}\bigg|_0^t=\frac{e^{4t}(4\sin 3t-3\cos 3t)+3}{75}=f(t).$$

Відповідь: $f(t)=\dfrac{e^{4t}(4\sin 3t-3\cos 3t)+3}{75}$.

7. Знайти зображення оригіналу $f(t)=\dfrac{\sin^2\alpha t}{t}$.

Розв'язання. Використавши відому формулу $\sin^2\alpha t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha t$, знайдемо зображення

$$L[\sin^2\alpha t]=\frac{1}{2}(L[1]-L[\cos 2\alpha t])=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right),$$

$$\sin^2\alpha t\risingdotseq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4\alpha^2}\right).$$

Діленню оригіналу на аргумент t в просторі оригіналів відповідає операція інтегрування в просторі зображень. Виходячи з цього, розв'язання задачі набуває вигляду

$$\frac{\sin^2\alpha t}{t}\risingdotseq\frac{1}{2}\int_p^\infty\left(\frac{1}{z}-\frac{z}{z^2+4\alpha^2}\right)dz=\frac{1}{2}\lim_{\eta\to\infty}\ln\frac{z}{\sqrt{z^2+4\alpha^2}}\bigg|_p^\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{\eta\to\infty}\ln\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2+4\alpha^2}}-\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4\alpha^2}}\right]=-\frac{1}{2}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4\alpha^2}}.$$

Границя у квадратних дужках у разі $\eta\to\infty$ дорівнює нулеві, оскільки $\ln 1=0$. Остаточно результат можна записати так:

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4\alpha^2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{p^2+4\alpha^2}}{p}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left[\left(\frac{\sqrt{p^2+4\alpha^2}}{p}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4\alpha^2}{p^2},$$

звідки

$$\frac{\sin^2\alpha t}{t} \risingdotseq \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4\alpha^2}{p^2}.$$

Відповідь: $\frac{\sin^2\alpha t}{t} \risingdotseq \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4\alpha^2}{p^2}$.

8. Знайти оригінал $f(t)$, що відповідає зображенню $F(p)=\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}$.

Розв'язання. Запишемо задане в задачі зображення у вигляді

$$\frac{1}{p+1}\,\frac{p}{p^2+4}.$$

Для кожного із записаних зображень відомі оригінали

$$\frac{1}{p+1}\risingdotseq e^{-t},\quad \frac{p}{p^2+4}\risingdotseq \cos 2t.$$

За теоремою про згортку [ч. 2, с. 145] можна записати

$$F(p)\risingdotseq e^{-t}*\cos 2t = f(t).$$

Знайдемо цю згортку [ч. 2, с. 145]:

$$f(t)=\int_0^t e^{-\tau}\cos 2(t-\tau)\,d\tau=\int_0^t e^{-t+u}\cos 2u\,du=e^{-t}\int_0^t e^{u}\cos 2u\,du=$$

$$=e^{-t}\left.\frac{e^{u}(2\sin 2u+\cos 2u)}{5}\right|_0^t=\frac{2\sin 2t+\cos 2t}{5}-\frac{e^{-t}}{5}.$$

Відповідь: $\frac{p}{(p+1)(p^2+4)}\risingdotseq\frac{1}{5}\left(2\sin 2t+\cos 2t-e^{-t}\right)$.

Використовуючи властивості оригіналу-зображення [ч. 2, с. 128–149], знайти зображення функцій $f(t)$.

21. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t+\cos t)$.

22. $\frac{1}{2}(\sin t+\operatorname{ch} t)$.

23. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t-\cos t)$.

24. $\frac{1}{2}(\sin t-\operatorname{ch} t)$.

25. $\frac{1}{2}(\cos t-\operatorname{ch} t)$.

26. $\sin^3 at$.

27. $\operatorname{sh}^3 at$.

28. $\cos^3 at$.

29. $\operatorname{ch}^3 at$.

30. $\cos\alpha t\cdot\sin\beta t$.

31. $\operatorname{ch} at\cdot\sin bt$.

32. $\frac{1}{2}(\sin at\cdot\operatorname{ch} at+\operatorname{sh} at\cdot\cos at)$.

33. $\frac{1}{2}\operatorname{sh} at\cdot\sin at$.

34. $\frac{1}{2}(\sin at\cdot\operatorname{ch} at-\operatorname{sh} at\cdot\cos at)$.

35. $e^{2t}\sin 3t\cdot\cos 4t$.

36. $e^{-5t}\sin 4t\cdot\cos 3t$.

37. $\operatorname{sh}(\alpha t-b)$.

38. $\operatorname{ch}(\alpha t-b)$.

39. $t\operatorname{sh} at$.

40. $t\operatorname{ch} at$.

41. $t^2\operatorname{sh} at$.

42. $t^2\sin at$.

43. $t\sin at\cdot\operatorname{ch} at$.

44. $t\operatorname{sh} at\cdot\cos at$.

Знайти зображення диференціальних виразів з указаними початковими умовами.

45. $x''(t)-3x(t)$; $x(0)=1$, $x'(0)=2$.

46. $5x'''(t)+4x''(t)-3x'(t)+1$; $x(0)=x'(0)=0$, $x''(0)=-1$.

47. $2x^{IV}(t)-x''(t)+3x(t)-11$; $x(0)=x''(0)=-1$, $x'(0)=x'''(0)=2$.

48. $x^{V}(t)+2x''(t)-x'(t)-7$; $x(0)=x'''(0)=x^{IV}(0)=3$, $x'(0)=x''(0)=-1$.

49. $x'''(t)+2x''(t)+3x'(t)+4x(t)+5$; $x(0)=x''(0)=0$, $x'(0)=1$.

Користуючись теоремою про інтегрування оригіналу, знайти оригінали за зображеннями $F(p)$.

50. $\frac{1}{p(p+7)}$.

51. $\frac{1}{p(p^2+4p+29)}$.

52. $\frac{1}{p(p^2-10p+29)}$.

53. $\frac{1}{p(p^2+6p+5)}$.

54. $\frac{1}{p(p^2-8p+7)}$.

Застосовуючи теорему про інтегрування зображення, знайти зображення оригіналів $f(t)$.

55. $\frac{\sin 2t}{t}$.

56. $\frac{\cos\omega t-\cos\beta t}{t}$.

57. $\dfrac{\sin 4t\cdot\sin 2t}{t}$.

58. $\dfrac{\sin 9t\cdot\sin 6t}{t}$.

59. $\dfrac{1-e^{at}}{t\cdot e^{t}}$.

Користуючись теоремою про згортку, знайти оригінали, що відповідають зображенням $F(p)$.

60. $\dfrac{1}{(p+3)(p-4)}$.

61. $\dfrac{1}{(p-3)(p+4)}$.

62. $\dfrac{p}{\left(p^2+2\right)\left(p^2+3\right)}$.

63. $\dfrac{p}{(p-2)\left(p^2+9\right)}$.

64. $\dfrac{p^2}{\left(p^2+9\right)\left(p^2+16\right)}$.

65. $\dfrac{p^2}{\left(p^2+4\right)\left(p^2+25\right)}$.

2.4. ЗОБРАЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНОГО ОРИГІНАЛУ

Приклад. Знайти зображення функції

$$\psi(t)=\begin{cases}\cos t & \text{при } 0<t\le\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3\pi}{2}<t\le 2\pi,\\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2}<t\le\dfrac{3\pi}{2},\ T=2\pi.\end{cases}$$

Розв'язання. Використовуючи функцію Хевісайда та враховуючи, що на відрізках $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ та $\left(\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$ виконується умова $\sigma(\cos t)=1$, оскільки $\cos t>0$, а на відрізкові $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ маємо $\cos t<0$ і тому $\sigma(\cos t)=0$, й у такому разі $\psi(t)=\cos t\cdot\sigma(\cos t)$, визначимо

$$F(p)=\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\cos t\cdot\sigma(\cos t)\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-pt}\cos t\,dt+\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}e^{-pt}\cos t\,dt=$$

$$=\frac{e^{-pt}(\sin t-p\cos t)}{1+p^2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{e^{-pt}(\sin t-p\cos t)}{1+p^2}\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}\left(\sin\frac{\pi}{2}-p\cos\frac{\pi}{2}\right)+p}{1+p^2}+$$

$$+\frac{e^{-2\pi p}(\sin 2\pi-p\cos 2\pi)}{1+p^2}-\frac{e^{-\frac{3\pi}{2}p}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-p\cos\frac{3\pi}{2}\right)}{1+p^2}=$$

$$=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}+p-pe^{-2\pi p}+e^{-\frac{3\pi}{2}p}}{1+p^2}=\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}\left(1+e^{-\pi p}\right)}{1+p^2}+\frac{p\left(1-e^{-2\pi p}\right)}{1+p^2}.$$

Скористаємося формулою (4.2) [ч. 2, с. 151], пам'ятаючи, що $a=2\pi$:

$$\Phi(p)=L[\psi(t)]=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}\left(1+e^{-\pi p}\right)}{1+p^2}+\frac{p\left(1-e^{-2\pi p}\right)}{1+p^2}\right)=$$

$$=\frac{1+e^{-\pi p}}{e^{\frac{\pi}{2}p}\left(1-e^{-\pi p}\right)\left(1+e^{-\pi p}\right)\left(1+p^2\right)}+\frac{p}{1+p^2}=\frac{1}{2\cdot\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}p}-e^{-\frac{\pi}{2}p}}{2}\left(1+p^2\right)}+$$

$$+\frac{p}{1+p^2}=\frac{1}{2\left(1+p^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}p}+\frac{p}{1+p^2}=\frac{1+2p\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}p}{2\left(1+p^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}p}.$$

Відповідь: $\Phi(p)=\dfrac{1+2p\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}p}{2\left(1+p^2\right)\operatorname{sh}\frac{\pi}{2}p}$.

Знайти зображення періодичних функцій.

66. $\psi(t)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\le t<\tau,\\ 0 & \text{при } \tau\le t<l;\ T=l.\end{cases}$

67. $\psi(t)=\begin{cases}\sin t & \text{при } 0\le t<\pi,\\ 0 & \text{при } \pi\le t<l;\ T=l.\end{cases}$

68. $\psi(t)=\begin{cases}h & \text{при } 0\le t<b,\\ -h & \text{при } b\le t<2b;\ T=2b.\end{cases}$

69. $\psi(t)=\dfrac{ht}{c}$ при $0\le t<c$; $T=c$.

70. $\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{ht}{c} & \text{при } 0\le t<c,\\ -\dfrac{ht}{c} & \text{при } c\le t<2c;\ T=2c.\end{cases}$

2.5. ЗОБРАЖЕННЯ ОРИГІНАЛУ, ЗАДАНОГО РІЗНИМИ СПОСОБАМИ В ОБЛАСТІ ВИЗНАЧЕННЯ

Приклад. Знайти зображення періодичної функції

$$f(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0,\\ \dfrac{b}{a}t & \text{при} \quad 0\le t<a,\\ b & \text{при} \quad t\ge a, \qquad a \text{ і } b=\text{const}.\end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді однієї формули, скориставшись одиничною функцією:

$$f(t)=\frac{b}{a}t-\frac{b}{a}(t-a)\sigma(t-a),$$

де

$$\sigma(t-a)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<a,\\ 1 & \text{при} \quad t\ge a.\end{cases}$$

Застосуємо до здобутого виразу перетворення Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^a\frac{b}{a}t\,e^{-pt}\,dt-\int_a^\infty\frac{b}{a}(t-a)\sigma(t-a)e^{-pt}\,dt.$$

Обчислимо записані інтеграли:

$$\int_0^a\frac{b}{a}t\,e^{-pt}\,dt=\frac{b}{a}\left(-\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^a+\frac{1}{p}\int_0^a e^{-pt}\,dt\right)=$$

$$=\frac{b}{a}\left(-\frac{a}{p}e^{-ap}-\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^a\right)=-\frac{b}{p}e^{-ap}+\frac{b}{a}\frac{1-e^{-pa}}{p^2},$$

$$-\int_a^\infty\frac{b}{a}(t-a)\sigma(t-a)e^{-pt}\,dt=\int_a^\infty be^{-pt}\,dt=-\frac{b}{p}e^{-pt}\Big|_a^\infty=$$

$$=-\frac{b}{p}\lim_{\eta\to\infty}e^{-pt}\Big|_a^\eta=-\frac{b}{p}\left(\lim_{\eta\to\infty}e^{-p\eta}-e^{-ap}\right)=\frac{b}{p}e^{-ap}.$$

Додавши їх, одержимо $f(t)\risingdotseq\dfrac{b}{a}\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

Відповідь: $f(t)=\dfrac{b}{a}\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$.

Знайти зображення функцій.

71. $f(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad 0<t\le a,\\ 0 & \text{при} \quad t>a.\end{cases}$

72. $f(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<a,\\ 1 & \text{при} \quad a\le t\le b,\\ 0 & \text{при} \quad t>b.\end{cases}$

73. $f(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{a} & \text{при} \quad 0<t\le a,\\ 0 & \text{при} \quad t>a.\end{cases}$

74. $f(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<a,\\ t-a & \text{при} \quad a\le t\le b,\\ b-a & \text{при} \quad t>b.\end{cases}$

75. $f(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{a} & \text{при} \quad 0<t<a,\\ \dfrac{2a-t}{a} & \text{при} \quad a\le t\le 2a,\\ 0 & \text{при} \quad t>2a.\end{cases}$

2.6. ІНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ*

Приклади. **1.** Розв'язати рівняння $y''-2y=2\left(t^3-3t\right)$, що задовольняє нульові початкові умови $y(0)=y'(0)=0$.

Розв'язання. Складемо зображувальне рівняння, вважаючи $y(t)$ оригіналом. Застосовуючи відомі формули, дістаємо

$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p),$$

де

$$y(t)\risingdotseq Y(p).$$

Знаходимо зображення правої частини

$$Q(t)=2\left(t^3-3t\right)\risingdotseq 2\left(\frac{3!}{p^4}-\frac{3}{p^2}\right).$$

Тепер зображувальне рівняння запишемо у вигляді

$$p^2Y(p)-2Y(p)=2\left(\frac{6}{p^4}-\frac{3}{p^2}\right),$$

---

* Див. ч. 2, підрозд. 3.9, с. 147.

або $$\left(p^2-2\right) Y(p)=\frac{6}{p^4}\left(2-p^2\right),\ Y(p)=-\frac{6}{p^4}.$$

Відповідь: $y(t)=-t^3$.

2. Розв'язати операційним методом лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами і нульовими початковими умовами $y''+9y=8\sin t$, $y(0)=y'(0)=0$, застосувавши інтеграл Дюамеля.

Розв'язання. Запишемо $y''+9y=1$, $y(0)=y'(0)=0$. Перейдемо з простору оригіналів у простір зображень $y(t)\risingdotseq Y(p)$, $y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)$; $1\risingdotseq\frac{1}{p}$, маємо

$$Y(p)\left(p^2+9\right)=\frac{1}{p},\ Y(p)=\frac{1}{p\left(p^2+9\right)}=\frac{1}{p}\frac{1}{p^2+9}.$$

Тоді

$$\frac{1}{p^2+9}\risingdotseq\frac{1}{3}\sin 3t;\quad \frac{1}{p\left(p^2+9\right)}\risingdotseq\frac{1}{3}\int_0^t\sin 3u\,du=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos 3u\right)\Bigg|_0^t=\frac{1}{9}(1-\cos 3t).$$

Отже, для зображення $\frac{1}{p^2+9}$ оригінал $y_1(t)=\frac{1}{9}(1-\cos 3t)$. Як і слід було сподіватись, $y_1(0)=0$. Тепер за формулою (7.8) [ч. 2, с. 157] знаходимо

$$y(t)=\int_0^t 8\sin\tau\cdot\frac{1}{3}\sin 3(t-\tau)\,d\tau=\frac{4}{3}\int_0^t\left[\cos(4\tau-3t)-\cos(3t-2\tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}\sin(4\tau-3t)+\frac{1}{2}\sin(3t-2\tau)\right]_0^t=\sin t-\frac{1}{3}\sin 3t.$$

Відповідь: $y(t)=\sin t-\frac{1}{3}\sin 3t$.

3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dddot{x}+2\dot{x}-3x=e^{-2t}$, що задовольняє початкові умови $x(0)=\dot{x}(0)=0$, $\ddot{x}(0)=3$.

Розв'язання. Вважаємо шукану функцію оригіналом. Нехай $x(t)\risingdotseq X(p)$. Застосовуючи теорему про диференціювання оригіналу, маємо

$$\dddot{x}(t)\risingdotseq p^3X(p)-p^2x(0)-p\dot{x}(0)-\ddot{x}(0).$$

З урахуванням початкових умов знаходимо

$$\dddot{x}(t)\risingdotseq p^3X(p)-3.$$

Аналогічно $\dot{x}(t)\risingdotseq pX(p)$. Якщо врахувати, що зображенням функції e^{-2t} є $\frac{1}{p+2}$, то можна скласти зображувальне рівняння, що відповідає початковій задачі:

$$p^3X(p)-3+2pX(p)-3X(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Звідси $$X(p)=\frac{3p+7}{(p-1)(p+2)\left(p^2+p+3\right)}. \tag{6.1}$$

За відомим методом невизначених коефіцієнтів праву частину рівняння (6.1) можна розкласти на прості дроби:

$$\frac{3p+7}{(p-1)(p+2)\left(p^2+p+3\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+2}+\frac{Cp+D}{p^2+p+3},$$

де

$$A=\frac{2}{3},\ B=-\frac{1}{15},\ C=-\frac{3}{5},\ D=-\frac{7}{5}.$$

Тоді

$$X(p)=\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{15}\frac{1}{p+2}-\frac{1}{5}\frac{3p+7}{p^2+p+3}. \tag{6.2}$$

Легко знаходимо оригінали для кожного з доданків у правій частині рівності (6.2):

$$\frac{2}{3}\frac{1}{p-1}\risingdotseq\frac{2}{3}e^t,\ -\frac{1}{15}\frac{1}{p+2}\risingdotseq-\frac{1}{15}e^{-2t}.$$

$$-\frac{1}{5}\frac{3p+7}{p^2+p+3}=-\frac{1}{5}\frac{3\left(p+\frac{1}{2}\right)+\frac{11}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}=$$

$$=-\frac{3}{5}\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}-\frac{\sqrt{11}}{5}\frac{\frac{\sqrt{11}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq-\frac{3}{5}e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t-\frac{\sqrt{11}}{5}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t=-\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{2}}\left(3\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t+\sqrt{11}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t\right).$$

Використавши властивість лінійності перетворення Лапласа, розв'язок даного рівняння можна записати у вигляді

$$x(t)=\frac{2}{3}e^{t}-\frac{1}{15}e^{-2t}-\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{2}}\left(3\cos\frac{\sqrt{11}}{2}t+\sqrt{11}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}t\right).$$

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь за вказаними початковими умовами.

76. $y''+2y'+y=e^{t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

77. $y''-2y'+y=\sin t$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

78. $y''+5y'=e^{-5t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.

79. $y''+5y'-6y=\cos 2t$; $y(0)=-1$, $y'(0)=1$.

80. $y''-2y'+2y=\cos t$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

81. $y''+2y'+2y=e^{-t}\sin 3t$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

82. $y''+4y=\cos 2t$; $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

83. $y''+9y=\sin 3t$; $y(0)=-2$, $y'(0)=1$.

84. $y''-9y=\operatorname{ch} t$; $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.

85. $y''-16y=\operatorname{sh} t$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$.

86. $y''-y'=te^{t}$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

87. $y''+y'=t^2e^{-t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Застосовуючи інтеграл Дюамеля, знайти частинні розв'язки, що задовольняють нульові початкові умови таких диференціальних рівнянь.

88. $y''+y=e^{-t}$.

89. $y''+y=\cos t$.

90. $y''+y=\sin 2t$.

91. $y'''+y'=10e^{2t}$.

92. $y'''+3y''+3y'+y=te^{-t}$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь за вказаними початковими умовами.

93. $y'''-y''=e^{t}$; $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=0$.

94. $y'''+y''=e^{-t}$; $y(0)=y''(0)=0$, $y'(0)=1$.

95. $y^{IV}-y=\operatorname{sh} t$; $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$, $y'''(0)=1$.

96. $y^{IV}-16y=\operatorname{ch} 2t$; $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$.

97. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+\dfrac{d^2y}{dx^2}=\sin x$; $y(0)=y'(0)=1$, $y''(0)=0$.

98. $\dfrac{d^3y}{dx^3}+2\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=\cos x$; $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$.

99. $y^{IV}-5y'''+5y''+5y'-6y=0$; $y(0)=2$, $y'(0)=y'''(0)=0$, $y''(0)=6$.

100. $y^{IV}-8y'''+24y''-32y'+16y=0$; $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=2$, $y'''(0)=3$.

101. $2y''+3y=x^2+\sin 5x$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

102. $3y''-5y=x^3-\cos 2x$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

103. $\dddot{x}-\ddot{x}=3t$; $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=\ddot{x}(0)=0$.

104. $\ddddot{x}-4\ddot{x}=5t^2$; $x(0)=\dot{x}(0)=0$, $\ddot{x}(0)=\dddot{x}(0)=1$.

Знайти загальні розв'язки рівнянь.

105. $y''+4y=3\cos 5t$.

106. $y''+4y'-12y=8\sin 2x$.

107. $y''-2y'+5y=te^{2t}$.

108. $y'''-3y'+2y=e^{-x}$.

109. $y^{IV}+y'''=\sin t$.

2.7. ЛІНІЙНЕ ОДНОРІДНЕ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Приклад. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''-2y'+5y=0$, що задовольняє початкові умови $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Розв'язання. Складаємо зображувальне рівняння

$$\left(p^2-2p+5\right)Y(p)=p,$$

$$Y(p)=\frac{p}{p^2-2p+5}=\frac{(p-1)+2\cdot\frac{1}{2}}{(p-1)^2+2^2}=\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}+\frac{1}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2}.$$

За зображенням записуємо оригінал

$$y(t)=e^{t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Відповідь: $e^{t}\left(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)$.

Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

110. $y'' - 4y' = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

111. $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

112. $y'' + 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

113. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = \frac{4}{3}$, $y'(0) = \frac{1}{5}$.

114. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

115. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

116. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

117. $y'' - 4y' + 13y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

118. $y'' - 8y' + 25y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

119. $y'' - 18y' + 81y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

2.8. ТЕОРЕМИ РОЗКЛАДАННЯ

Приклади. **1.** Використовуючи першу теорему розкладання, знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{6}{p^4} + \frac{11}{p^{13}}.$$

Розв'язання. Скористаємося формулами (10.1) – (10.3) [ч. 2, с. 170], виконаємо перетворення й одержимо зображення в такому вигляді:

$$F(p) = \frac{6}{p^{3+1}} + \frac{11}{p^{12+1}} = \frac{3!}{p^{3+1}} + \frac{11}{12!}\frac{12!}{p^{12+1}},$$

а оригінал його

$$f(t) = t^3 + \frac{11t^{12}}{12!}.$$

Відповідь: $f(t) = t^3 + \frac{11t^{12}}{12!}$.

2. Використовуючи другу теорему розкладання, знайти оригінал за даним зображенням

$$F(p) = \frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2(p-3)}.$$

Розв'язання. У цьому випадку $\Phi_2(p) = p^2 + 3$, $\psi_5(p) = p^2(p+2)^2(p-3)$, $\alpha_1 = 0$, $k_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $k_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $k_3 = 1$. Скористаємося формулою для оригіналу [(10.5), ч. 2, с. 171] і одержимо

$$f(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{(k_i - 1)!} \lim_{p\to\alpha_i} \frac{d^{k_i-1}}{dp^{k_i-1}}\left[(p-\alpha_i)^{k_i}\frac{\Phi_2(p)}{\psi_5(p)}e^{pt}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 0}\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}\left[p^2\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to -2}\frac{d^{2-1}}{dp^{2-1}}\left[(p+2)^2\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] +$$

$$+ \frac{1}{(1-1)!}\lim_{p\to 3}\frac{d^{1-1}}{dp^{1-1}}\left[(p-3)\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] =$$

$$= \lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] + \lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{p^2(p-3)}e^{pt}\right] +$$

$$+ \lim_{p\to 3}\left[\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2}e^{pt}\right].$$

Знаходимо похідні, а потім границі кожного доданка:

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] = \frac{p^2+3}{(p+2)^2(p-3)}e^{pt}t +$$

$$+ \frac{2p(p+2)(p-3) - (p^2+3)(3p-4)}{(p+2)^3(p-3)^2}e^{pt},$$

$$\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{(p+2)^2(p-3)}e^{pt}\right] = -\frac{1}{4}t + \frac{1}{6}.$$

Далі

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{p^2(p-3)}e^{pt}\right] = \frac{p^2+3}{p^2(p-3)}e^{pt}t + \frac{2p^2(p-3) - 3(p^2+3)(p-2)}{p^3(p-3)^2}e^{pt},$$

$$\lim_{p\to -2}\frac{d}{dp}\left[\frac{p^2+3}{p^2(p-3)}e^{pt}\right]=-\frac{7}{20}te^{-2t}-\frac{11}{50}e^{-2t}$$

та

$$\lim_{p\to 3}\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2}e^{pt}=\frac{4}{75}e^{3t}.$$

Додаючи три знайдені границі, знаходимо шуканий оригінал

$$\frac{p^2+3}{p^2(p+2)^2(p-3)}\doteqdot\frac{1}{6}-\frac{t}{4}-\frac{1}{10}\left(\frac{7}{2}t+\frac{11}{5}\right)e^{-2t}+\frac{4}{75}e^{3t}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}-\frac{t}{4}-\frac{1}{10}\left(\frac{7}{2}t+\frac{11}{5}\right)e^{-2t}+\frac{4}{75}e^{3t}$.

Знайти частинні розв'язки рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

120. $y'+3y=3$; $y(0)=0$.

121. $y''-2y'-3y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

122. $y'''+y''=0$; $y(0)=y'(0)=1$, $y''(0)=0$.

123. $y'''-2y''+y'=0$; $y(0)=y''(0)=1$, $y'(0)=0$.

124. $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=1$; $s(0)=\dot{s}(0)=0$.

Використовуючи першу теорему розкладання, знайти оригінали за даними зображеннями.

125. $F(p)=\frac{5}{p^2(p+1)^3}$.

126. $F(p)=\frac{7}{p^3}+\frac{8}{p^{11}}$.

127. $F(p)=\frac{4}{p^3(p-2)^4}$.

128. $F(p)=\frac{5}{p^4}+\frac{9}{p^{12}}$.

Користуючись другою теоремою розкладання, знайти оригінали за даними зображеннями.

129. $F(p)=\frac{p+2}{(p-1)(p+3)(p^2+4)}$.

130. $F(p)=\frac{p^2}{(p^4-16)^2}$.

131. $F(p)=\frac{p-3}{p^3(p+4)(p+1)^2}$.

132. $F(p)=\frac{p^2+1}{p(p^2+5p-6)^2}$.

2.9. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Приклади. **1.** Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x-2y-4z,\\ \dot{y}=-2x+y-2z,\\ \dot{z}=5x+2y+7z\end{cases}$$

з початковими умовами $x=1$, $y=1$, $z=1$ при $t=0$.

Розв'язання. Введемо позначення

$$x(t)\doteqdot X(p),\ y(t)\doteqdot Y(p),\ z(t)\doteqdot Z(p),$$

а зображення

$$\dot{x}\doteqdot pX(p)-x(0)=pX(p)-1,\quad \dot{y}\doteqdot pY(p)-y(0)=pY(p)-1,$$

$$\dot{z}\doteqdot pZ(p)-z(0)=pZ(p)-1.$$

Зображувальну систему можна записати у вигляді

$$\begin{cases}(p+2)X(p)+2Y(p)+4Z(p)=1,\\ 2X(p)+(p-1)Y(p)+2Z(p)=1,\\ -5X(p)-2Y(p)+(p-7)Z(p)=1.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix}p+2 & 2 & 4\\ 2 & p-1 & 2\\ -5 & -2 & p-7\end{vmatrix}=(p-1)(p-2)(p-3),$$

$$\Delta_{X(p)}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & p-1 & 2\\ 1 & -2 & p-7\end{vmatrix}=p^2-14p+25,$$

$$\Delta_{Y(p)}=\begin{vmatrix}p+2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ -5 & 1 & p-7\end{vmatrix}=(p-2)(p-7),$$

$$\Delta_{Z(p)}=\begin{vmatrix} p+2 & 2 & 1\\ 2 & p-1 & 1\\ -5 & -2 & 1\end{vmatrix}=p^2+8p-21.$$

За формулами Крамера запишемо розв'язок системи

$$X(p)=\frac{p^2-14p+25}{(p-1)(p-2)(p-3)},\quad Y(p)=\frac{p-7}{(p-1)(p-3)},$$

$$Z(p)=\frac{p^2+8p-21}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$

Для відшукання оригіналів скористаємося табл. 13.1 [ч. 2, с. 197], перетворивши попередньо дроби:

$$X(p)=\frac{6}{p-1}-\frac{1}{p-2}-\frac{4}{p-3},\quad Y(p)=\frac{3}{p-1}-\frac{2}{p-3},$$

$$Z(p)=-\frac{6}{p-1}+\frac{1}{p-2}+\frac{6}{p-3}.$$

Тепер можна записати розв'язок-оригінал:

$$x(t)=6e^t-e^{2t}-4e^{3t},\quad y(t)=3e^t-2e^{3t},\quad z(t)=-6e^t+e^{2t}+6e^{3t}.$$

Відповідь: $x(t)=6e^t-e^{2t}-4e^{3t}$, $y(t)=3e^t-2e^{3t}$, $z(t)=-6e^t+e^{2t}+6e^{3t}$.

2. Знайти частинний розв'язок системи

$$\begin{cases}\ddot{x}-\dot{y}=0,\\ \ddot{y}-\dot{x}=t,\end{cases}$$

що задовольняє початкові умови $x(0)=y(0)=0$, $\dot{y}(0)=\dot{x}(0)=1$.

Розв'язання. Позначимо $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, а зображення

$$\dot{x}\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p),\quad \dot{y}\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p),$$

$$\ddot{x}\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X(p)-1,$$

$$\ddot{y}\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-\dot{y}(0)=p^2Y(p)-1,\quad t\risingdotseq\frac{1}{p^2}.$$

Зображувальну систему можна записати так:

$$\begin{cases}p^2X(p)-pY(p)=1,\\ -pX(p)+p^2Y(p)=\dfrac{1}{p^2}+1.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p^2 & -p\\ -p & p^2\end{vmatrix}=p^4-p^2=p^2(p-1)(p+1),$$

$$\Delta_{X(p)}=\begin{vmatrix} 1 & -p\\ \dfrac{1+p^2}{p^2} & p^2\end{vmatrix}=\frac{p^3+p^2+1}{p},\quad \Delta_{Y(p)}=\begin{vmatrix} p^2 & 1\\ -p & \dfrac{1+p^2}{p^2}\end{vmatrix}=p^2+p+1.$$

За формулами Крамера запишемо розв'язок системи

$$X(p)=\frac{p^3+p^2+1}{p^3(p-1)(p+1)},\quad Y(p)=\frac{p^2+p+1}{p^2(p-1)(p+1)}.$$

Для відшукання оригіналів скористаємося табл. 13.1 [ч. 2, с. 197], перетворивши попередньо дроби:

$$X(p)=\frac{3}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p^3}-\frac{2}{p},\quad Y(p)=\frac{3}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p}.$$

Тепер можна записати розв'язок-оригінал:

$$x(t)=\frac{3}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{t^2}{2}-2,\quad y(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}-t-1.$$

Відповідь: $x(t)=\frac{3}{2}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{t^2}{2}-2$, $y(t)=\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-t}-t-1$.

3. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=x+2y.\end{cases}$$

Розв'язання. Введемо початкові умови $x(0)=C_1$, $y(0)=C_2$ і позначення $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, а зображення

$$\dot{x}\risingdotseq pX(p)-x(0)=pX(p)-C_1,\quad \dot{y}\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-C_2.$$

Зображувальна система має вигляд

$$\begin{cases}(p-2)X(p)-Y(p)=C_1,\\ -X(p)+(p-2)Y(p)=C_2.\end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p-2 & -1\\ -1 & p-2\end{vmatrix}=(p-1)(p-3),\quad \Delta_{X(p)}=\begin{vmatrix} C_1 & -1\\ C_2 & p-2\end{vmatrix}=C_1p-2C_1+C_2,$$

$$\Delta_{Y(p)}=\begin{vmatrix} p-2 & C_1\\ -1 & C_2\end{vmatrix}=C_1+C_2p-2C_2.$$

За формулами Крамера запишемо розв'язок системи

$$X(p)=\frac{C_1p-2C_1+C_2}{(p-1)\ (p-3)}\ ,\ Y(p)=\frac{C_1+C_2p-2C_2}{(p-1)\ (p-3)}\ .$$

Для відшукання оригіналів скористаємося табл. 13.1 [ч. 2, с. 197], перетворивши попередньо дроби:

$$X(p)=\frac{\bar{C}_1}{p-3}+\frac{\bar{C}_2}{p-1},\ Y(p)=\frac{\bar{C}_1}{p-3}-\frac{\bar{C}_2}{p-1},$$

де

$$\bar{C}_1=\frac{C_1+C_2}{2},\ \bar{C}_2=\frac{C_1-C_2}{2}.$$

Тепер можна записати розв'язок-оригінал

$$x(t)=\bar{C}_1 e^{3t}+\bar{C}_2 e^{t},\ y(t)=\bar{C}_1 e^{3t}-\bar{C}_2 e^{t}.$$

Знайти частинні розв'язки систем лінійних рівнянь, що задовольняють задані початкові умови.

133. $\begin{cases}\dot{x}-x+y=0,\\ \dot{y}-x-y=0;\ x(0)=y(0)=1.\end{cases}$

134. $\begin{cases}\dot{x}-2x+y=0,\\ \dot{y}-3x-2y=0;\ x(0)=1,\ y(0)=0.\end{cases}$

135. $\begin{cases}\dot{x}+x-y-z=0,\\ \dot{y}-x+y-z=0,\\ \dot{z}-x-y+z=0;\ x(0)=y(0)=2,\ z(0)=-1.\end{cases}$

136. $\begin{cases}\dot{x}-7x+2y=0,\\ \dot{y}-x+3y=0;\ x(0)=0,\ y(0)=1.\end{cases}$

137. $\begin{cases}\ddot{x}-\dot{y}=0,\\ x-\ddot{y}=2\sin t;\ x(0)=-1,\ \dot{x}(0)=y(0)=\dot{y}(0)=1.\end{cases}$

138. $\begin{cases}\dot{x}-5x-y=0,\\ \dot{y}+2x+5y=0;\ x(0)=y(0)=1.\end{cases}$

139. $\begin{cases}\ddot{x}-\dot{y}=e^{t},\\ \dot{x}+\ddot{y}=0;\ x(0)=1,\ y(0)=-1,\ \dot{x}(0)=\dot{y}(0)=0.\end{cases}$

140. $\begin{cases}\dot{x}+2y=e^{t},\\ \dot{y}-3x=1;\ x(0)=0,\ y(0)=2.\end{cases}$

141. $\begin{cases}\ddot{x}+\dot{y}=2\sin t,\\ \ddot{y}+\dot{z}=2\cos t,\\ \ddot{z}-x=0;\ x(0)=z(0)=\dot{y}(0)=0,\ \dot{x}(0)=y(0)=-1,\ \dot{z}(0)=1.\end{cases}$

142. $\begin{cases}\ddot{x}+\dot{y}-x=0,\\ \dot{x}-\ddot{y}=\sin t;\ x(0)=-1,\ \dot{x}(0)=0;\ y(0)=1,\ \dot{y}(0)=2.\end{cases}$

Знайти загальні розв'язки систем рівнянь.

143. $\begin{cases}\dot{x}+4x+6y=0,\\ \dot{y}+4x+2y=0.\end{cases}$

144. $\begin{cases}\dot{x}+3x-2y=0,\\ \dot{y}-4x+y=0.\end{cases}$

145. $\begin{cases}\dot{x}+7x-5y=0,\\ \dot{y}-4x+8y=0.\end{cases}$

146. $\begin{cases}\dot{x}=-3x-5y,\\ \dot{y}=-4x-4y.\end{cases}$

147. $\begin{cases}\dot{x}=y-z,\\ \dot{y}=x+y,\\ \dot{z}=x+z.\end{cases}$

148. $\begin{cases}\dot{x}=7x+2y+5z,\\ \dot{y}=-2x+y-2z,\\ \dot{z}=-4x-2y-2z.\end{cases}$

149. $\begin{cases}\ddot{x}+\dot{y}=t,\\ \ddot{y}-\dot{x}=0.\end{cases}$

150. $\begin{cases}\ddot{x}-\dot{y}=t,\\ \ddot{y}+\dot{x}=0.\end{cases}$

2.10. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Приклади. **1.** Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(1-t)y''(t)+(1+t)y'(t)-2y(t)=0.$$

Розв'язання. Введемо початкові умови, вважаючи $y(0)=c_1$, $y'(0)=c_2$. Тоді, якщо $y(t)\risingdotseq Y(p)$, дістанемо

$$y'(t)\risingdotseq pY(p)-y(0)=pY(p)-c_1;$$

$$y''(t)\risingdotseq p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-c_1p-c_2;$$

$$ty'(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\left[pY(p)-c_1\right]=-Y(p)-pY'(p);$$

$$ty''(t)\risingdotseq-\frac{d}{dp}\left[p^2Y(p)-c_1p-c_2\right]=-2pY(p)-p^2Y'(p)+c_1.$$

Зображувальне рівняння запишемо у вигляді

$$p^2Y(p)-c_1p-c_2+2pY(p)+p^2Y'(p)-c_1+$$
$$+pY(p)-c_1-Y(p)-pY'(p)-2Y(p)=0.$$

Після спрощень

$$Y'(p)+\frac{p^2+3p-3}{p(p-1)}Y(p)=\frac{c_1(p+2)+c_2}{p(p-1)}.$$

Зображувальне рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку. Його можна розв'язати за відомою методикою класичної теорії диференціальних рівнянь:

$$Y'(p)+\frac{p^2+3p-3}{p(p-1)}Y(p)=0,$$

$$\frac{dY(p)}{Y(p)}=\frac{3-3p-p^2}{p(p-1)}dp,$$

$$\ln Y(p)=\int\frac{3-3p-p^2}{p(p-1)}dp=-\int\left(1+\frac{4p-3}{p^2-p}\right)dp=$$
$$=-p-\int\frac{4p-3}{p^2-p}dp=-p-3\ln p-\ln(p-1)+\ln c,$$

$$Y(p)=\frac{c(p)}{p^3(p-1)}e^{-p},$$

$$Y'(p)=\frac{c'(p)p^3(p-1)-c(p)p^2(4p-3)}{p^6(p-1)^2}e^{-p}-\frac{c(p)}{p^3(p-1)}e^{-p},$$

або

$$Y'(p)=\frac{p(p-1)c'(p)-(4p-3)c(p)}{p^4(p-1)^2}e^{-p}-c(p)e^{-p}\frac{1}{p^3(p-1)}.$$

Вирази для $Y(p)$ і $Y'(p)$ підставляємо в неоднорідне рівняння, що дасть змогу знайти $c(p)$. Отже,

$$\frac{p(p-1)c'(p)-(4p-3)c(p)}{p^4(p-1)^2}e^{-p}-\frac{c(p)}{p^3(p-1)}e^{-p}+$$
$$+\frac{p^2+3p-3}{p(p-1)}\frac{c(p)}{p^3(p-1)}e^{-p}=\frac{(p+2)c_1+c_2}{p(p-1)}.$$

Групуємо подібні члени:

$$\frac{c'(p)}{p^3(p-1)}e^{-p}+c(p)e^{-p}\left[\frac{3-4p}{p^4(p-1)^2}-\frac{1}{p^3(p-1)}+\frac{p^2+3p-3}{p^4(p-1)^2}\right]=\frac{(p+2)c_1+c_2}{p(p-1)}.$$

Як і слід було сподіватися, вираз у квадратних дужках дорівнює нулеві. Відносно $c'(p)$ дістаємо рівняння

$$c'(p)=p^2\left[(p+2)c_1+c_2\right]e^p.$$

Звідси

$$c(p)=\int p^2\left[(p+2)c_1+c_2\right]e^p\,dp.$$

Беручи цей інтеграл частинами, маємо

$$c(p)=\left[c_1p^3-(c_1-c_2)p^2+2(c_1-c_2)p-2(c_1-c_2)\right]e^p.$$

Розв'язок зображувального рівняння запишемо у вигляді

$$Y(p)=\frac{c_1}{p-1}-\frac{c_1-c_2}{p\,(p-1)}+\frac{2(c_1-c_2)}{p^2(p-1)}-\frac{2(c_1-c_2)}{p^3(p-1)}.$$

Розкладаючи три останніх дроби на елементарні та групуючи подібні члени, одержуємо

$$Y(p)=\frac{c_2}{p-1}+\frac{c_1-c_2}{p}+\frac{2(c_1-c_2)}{p^3}.$$

Перепозначивши сталі, шуканий розв'язок у просторі оригіналів дістанемо у вигляді

$$y(t)=C_1e^t+C_0\left(1+t^2\right),$$

де

$$C_1=c_2,\ C_0=c_1-c_2.$$

2. Знайти операційним методом загальний розв'язок рівняння

$$y''-2y'\operatorname{ctg}x+\left(1+\operatorname{ctg}^2x\right)y=0.$$

Розв'язання. Складаємо інваріант рівняння

$$I(x)=\frac{1}{2}\frac{2}{\sin^2x}+\left(-\frac{2}{2}\operatorname{ctg}x\right)^2-1-2\operatorname{ctg}^2x=$$
$$=\frac{1}{\sin^2x}+\operatorname{ctg}^2x-1-2\operatorname{ctg}^2x=\frac{1}{\sin^2x}-\left(1+\operatorname{ctg}^2x\right)=0.$$

Відповідь: $y(t)=C_1e^t+C_0\left(1+t^2\right)$.

Отже, $\alpha = 0$. За a_1 можна взяти будь-яке дійсне число. Нехай $a_1 = 2$, тоді $a_2 = 1$. Тому перетворене рівняння має вигляд

$$Y''(x) + 2Y'(x) + Y(x) = 0.$$

Доповнюємо його початковими умовами $Y(0) = c_1$, $Y'(0) = c_2$. Позначимо зображення розв'язку $Y(x) \risingdotseq \overline{Y}(p)$, тоді

$$Y'(x) \risingdotseq p\overline{Y}(p) - c_1, \quad Y''(x) \risingdotseq p^2\overline{Y}(p) - pc_1 - c_2,$$

а рівняння

$$p^2\overline{Y}(p) - pc_1 - c_2 + 2p\overline{Y}(p) - 2c_1 + \overline{Y}(p) = 0.$$

Звідси

$$\overline{Y}(p) = \frac{(p+2)c_1 + c_2}{(p+1)^2} = \frac{c_1}{p+1} + \frac{c_1 + c_2}{(p+1)^2}.$$

Отже,

$$Y(x) = \left[c_1 + (c_1 + c_2)x\right]e^{-x}.$$

Для відшукання загального розв'язку вихідного рівняння треба знайти коефіцієнт нелінійної подібності:

$$u(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\int[2 + 2\operatorname{ctg} x]dx\right) = e^{x + \ln\sin x} = e^x e^{\ln\sin x} = e^x \sin x.$$

У цьому випадку сталу c не враховуємо. Загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = (C + C_0 x)e^{-x}e^x \sin x = (C + C_0 x)\sin x,$$

де
$$C = c_1, \text{ а } C_0 = c_1 + c_2.$$

3. Знайти операційним методом загальний розв'язок рівняння

$$xy'' - (x^3 + 2)y' + x^5 y = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y'' - \frac{x^3 + 2}{x}y' + x^4 y = 0,$$

а потім перетворимо його на рівняння зі сталими коефіцієнтами, для чого скористаємося формулою (12.34) [ч. 2, с. 190].

Отже,

$$\beta = -\frac{x^3 + 2}{xx^2} + \frac{4x^3}{2x^6} = -1 - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^3} = -1.$$

Коефіцієнт a_2 вибираємо довільно, наприклад $a_2 = 4$. Підставляючи $a_2 = 4$ і $P_2(x) = x^4$ у формулу (12.37) [ч. 2, с. 191], дістаємо

$$\xi = \frac{1}{2}\int x^2 dx = \frac{x^3}{6}.$$

Тепер рівняння (12.38) [ч. 2, с. 191] набуває вигляду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\frac{dy}{d\xi} + 4y = 0.$$

Доповнимо його початковими умовами $y(0) = c_1$, $y'(0) = c_2$, це дає змогу записати зображувальне рівняння

$$p^2Y(p) - pc_1 - c_2 - 2pY(p) + 2c_1 + 4Y(p) = 0,$$

де
$$y(\xi) \risingdotseq Y(p).$$

Після зведення подібних членів

$$Y(p) = \frac{pc_1 + c_2 - 2c_1}{p^2 - 2p + 4} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 3}c_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{(p-1)^2 + 3}(c_2 - c_1).$$

У просторі оригіналів розв'язок перетвореного рівняння

$$y(\xi) = \left(\overline{C}_1 \cos\sqrt{3}\xi + \overline{C}_2 \sin\sqrt{3}\xi\right)e^{\xi},$$

де
$$\overline{C}_1 = c_1, \; \overline{C}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_2 - c_1).$$

Повертаючись до змінної x, дістаємо

$$y(x) = \left(\overline{C}_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{6}x^3 + \overline{C}_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{6}x^3\right)e^{\frac{x^3}{6}}.$$

Відповідь: $y(x) = \left(\overline{C}_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{6}x^3 + \overline{C}_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{6}x^3\right)e^{\frac{x^3}{6}}.$

Знайти загальні розв'язки рівнянь із лінійними коефіцієнтами.

151. $(1+3t)y'' - 3(1-3t)y' - 18y = 0.$

152. $t\ddot{x} - 2(3t+1)\dot{x} + 3(3t+2)x = 0.$

153. $xz'' + (3-x)z' - 5z = 0.$

154. $xy'' - (2x+7)y' + 8y = 0.$

Знайти загальні розв'язки лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, використовуючи метод подібності та замінюючи шукану функцію.

155. $4y'' + 4\left(2x^3+1\right)y' - \left(3-12x^2-4x^3-4x^6\right)y = 0$.

156. $4x^2y'' + 4x\left(2x^2-1\right)y' + \left(4x^4+3\right)y = 0$.

157. $4y''\sin^4 x + 4y'\sin^2 x\cos x + \left[\cos^2 x\left(1-2\sin x\right) - 2\sin x - 8\sin^4 x\right]y = 0.$

158. $4x^2y'' + 4xy'\ln x + \left[\left(\ln x - 1\right)^2 + 12x^2 + 1\right]y = 0$.

Знайти загальні розв'язки лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, використовуючи метод подібності та змінюючи незалежну змінну.

159. $y'' + 2\left(e^{-2x}+1\right)y' + e^{-4x}y = 0$.

160. $x^6y'' + x^3\left(3x^2-2\right)y' + y = 0$.

161. $y''\sin x - y'\cos x + y\sin^3 x = 0$.

162. $\left(1+x^2\right)y''\operatorname{arctg} x + \left[2\left(1+x^2\right)\operatorname{arctg}^2 x - 1\right]y' + \left(1+x^2\right)y\operatorname{arctg}^3 x = 0$.

2.11. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ. ОПЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Приклад. Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$y(t) = \int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\,y(s)\,ds + \sin t\,.$$

Розв'язання. Користуючись теоремою про згортку, переведемо задане рівняння у простір зображень

$$y(t) \risingdotseq F(p);\ \int_0^t \operatorname{sh}(t-s)\,y(s)\,ds = \operatorname{sh} t * y(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}F(p),\ \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1},$$

тоді вихідне рівняння в просторі зображень набуває вигляду

$$F(p) = \frac{1}{p^2-1}F(p) + \frac{1}{p^2+1},\quad F(p) = \frac{p^2-1}{\left(p^2-2\right)\left(p^2+1\right)}.$$

Розкладаючи праву частину на елементарні дроби й визначаючи коефіцієнти, дістаємо

$$\frac{p^2-1}{\left(p^2-2\right)\left(p^2+1\right)} = \frac{Ap+B}{p^2-2} + \frac{Cp+D}{p^2+1},$$

де $$A = 0,\ B = \frac{1}{3},\ C = 0,\ D = \frac{2}{3};\ F(p) = \frac{\frac{1}{3}}{p^2-2} + \frac{\frac{2}{3}}{p^2+1};$$

$$y(t) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{sh}\sqrt{2}t + \frac{2}{3}\sin t\,.$$

Зінтегрувати рівняння типу згортки.

163. $y(t) = \int_0^t \cos(t-s)\,y(s)\,ds - t - t^2$.

164. $y(t) = \int_0^t \sin(t-s)\,y(s)\,ds - 1 + \cos t$.

165. $y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\,y(s)\,ds - \frac{1}{3}t^3$.

166. $3\int_0^t \sin(t-s)\,y(s)\,ds = e^{-t} + y(t)$.

167. $y(t) = 2\int_0^t e^{t-s}y(s)\,ds - \operatorname{ch} t$.

Відповіді

1. Так. **2.** Ні. **3.** Ні. **4.** Ні. **5.** Так. **6.** Ні. **7.** Ні. **8.** Ні. **9.** Так. **10.** Ні. **11.** Ні. **12.** Так. **13.** Ні. **14.** Ні. **15.** $\frac{1}{p-2}$. **16.** $\frac{1}{p+3}$. **17.** $\frac{2}{p^3}$. **18.** $\frac{3}{p^2+9}$. **19.** $\frac{p}{p^2+4}$. **20.** $\frac{2}{p^2+4}$. **21.** $\frac{p^3+p^2-p+1}{2\left(p^4-1\right)}$. **22.** $\frac{p^3+p^2+p-1}{2\left(p^4-1\right)}$. **23.** $\frac{1+p+p^2-p^3}{2\left(p^4-1\right)}$. **24.** $\frac{-p^3+p^2-p-1}{2\left(p^4-1\right)}$. **25.** $\frac{p}{1-p^4}$. **26.** $\frac{6a^3}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+9a^2\right)}$. **27.** $\frac{6a^3}{\left(p^2-a^2\right)\left(p^2-9a^2\right)}$. **28.** $\frac{p\left(p^2+7a^2\right)}{\left(p^2+a^2\right)\left(p^2+9a^2\right)}$. **29.** $\frac{p\left(p^2-7a^2\right)}{\left(p^2-a^2\right)\left(p^2-9a^2\right)}$. **30.** $\frac{\beta\left(p^2-\alpha^2+\beta^2\right)}{p^4+2\left(\alpha^2+\beta^2\right)p^2+\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2}$. **31.** $\frac{2abp}{p^4+2\left(b^2-a^2\right)p^2+\left(a^2+b^2\right)^2}$.

4 3-53

32. $\frac{ap^2}{p^4+4a^4}$. 33. $\frac{a^2p}{p^4+4a^4}$. 34. $\frac{2a^3}{p^4+4a^4}$. 35. $\frac{3(p^2-4p-3)}{(p^2-4p+53)(p^2-4p+5)}$.

36. $\frac{4(p^2-4p+11)}{(p^2-4p+53)(p^2-4p+5)}$. 37. $e^{-\frac{h}{\alpha}p}\frac{\alpha}{p^2-a^2}$. 38. $e^{-\frac{h}{\alpha}p}\frac{p}{p^2-\alpha^2}$.

39. $\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$. 40. $\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$. 41. $\frac{2a(3p^2+a^2)}{(p^2-a^2)^3}$. 42. $\frac{2a(3p^2-a^2)}{(p^2+a^2)^3}$.

43. $\frac{2ap(p^4+4a^2p^2-4a^4)}{(p^4+4a^4)^2}$. 44. $\frac{2ap(p^4-4a^2p^2-4a^4)}{(p^4+4a^4)^2}$. 45. $(p^2-3)X(p)-p-2$.

46. $(5p^3+4p^2-3p)X(p)+5+\frac{1}{p}$. 47. $(2p^4-p^2+3)X(p)+2p^3-4p^2+p-2-\frac{11}{p}$.

48. $(p^5+2p^2-p)X(p)-3p^4+p^3+p^2-9p+2-\frac{7}{p}$. 49. $(p^3+2p^2+3p+4)X(p)-p-2+\frac{5}{p}$. 50. $\frac{1}{7}(1-e^{-7t})$. 51. $\frac{5-(5\cos 5t+2\sin 5t)e^{-2t}}{145}$.

52. $\frac{2-(2\cos 2t-5\sin 2t)e^{5t}}{145}$. 53. $\frac{2-(2\operatorname{ch}2t+3\operatorname{sh}2t)e^{-3t}}{10}$. 54. $\frac{3-(3\operatorname{ch}3t-4\operatorname{sh}3t)e^{4t}}{21}$.

55. $\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{2}=\operatorname{arctg}\frac{2}{p}$. 56. $\ln\sqrt{\frac{p^2+\beta^2}{p^2+\omega^2}}$. 57. $\ln\sqrt[4]{\frac{p^2+36}{p^2+4}}$. 58. $\ln\sqrt[4]{\frac{p^2+225}{p^2+9}}$.

59. $\ln\frac{p+1-a}{p+1}$. 60. $\frac{1}{7}(e^{4t}-e^{-3t})$. 61. $\frac{1}{7}(e^{3t}-e^{-4t})$. 62. $\cos\sqrt{2}t-\cos\sqrt{3}t$.

63. $\frac{1}{3}(2e^{2t}-2\cos 3t+3\sin 3t)$. 64. $\frac{1}{7}(4\sin 4t-3\sin 3t)$. 65. $\frac{1}{21}(5\sin 5t-2\sin 2t)$.

66. $\frac{1-e^{-p\tau}}{p(1-e^{-pl})}$. 67. $\frac{1+e^{-p\pi}}{(p^2+1)(1-e^{-pl})}$. 68. $\frac{h}{p}\operatorname{th}\frac{bp}{2}$. 69. $\frac{h}{cp^2}-\frac{he^{-pc}}{p(1-e^{-pc})}$.

70. $\frac{h}{cp^2}\operatorname{th}\frac{cp}{2}$. 71. $\frac{1}{p}(1-e^{-ap})$. 72. $\frac{1}{p}(e^{-ap}-e^{-bp})$. 73. $\frac{1}{ap^2}(e^{-ap}+ap-1)$.

74. $\frac{1}{p^2}(e^{-ap}-e^{-bp})$. 75. $\frac{1}{ap^2}(1-e^{-ap})^2$. 76. $\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{2}te^{-t}$. 77. $\frac{1}{2}[\cos t+(3t-1)e^{t}]$.

78. $\frac{1}{25}(4-5t)e^{-5t}-\frac{4}{25}$. 79. $\frac{1}{20}(\sin 2t-\cos 2t)-\frac{1}{140}(96e^{t}-37e^{-6t})$. 80. $\frac{1-e^{t}}{5}\cos t-\frac{2(1-4e^{t})}{5}\sin t$. 81. $e^{-t}\left(\cos t+\frac{11}{8}\sin t-\frac{1}{8}\sin 3t\right)$. 82. $\cos 2t-\sin 2t+\frac{t}{4}\sin 2t$.

83. $\frac{7}{18}\sin 3t-\frac{t+12}{6}\cos 3t$. 84. $\frac{1}{16}(e^{3t}-15e^{-3t})-\frac{1}{16}\operatorname{ch}t$. 85. $\frac{1}{30}(83\operatorname{ch}4t-2\operatorname{sh}t+7e^{-4t})$. 86. $\frac{1}{16}(e^{3t}-15e^{-3t})-\frac{1}{8}\operatorname{ch}t$. 87. $3-\frac{6+6t+3t^2+t^3}{3}e^{-t}$. 88. $\frac{1}{2}(e^{-t}-\cos t+\sin t)$. 89. $\frac{1}{2}t\sin t$. 90. $\frac{1}{3}(2\sin t-\sin 2t)$. 91. $e^{2t}-5+4\cos t-2\sin t$. 92. $\frac{t^4}{24}e^{-t}$.

93. $3+t+(t-2)e^{t}$. 94. $2(t-1)+(t+2)e^{-t}$. 95. $\frac{t}{4}\operatorname{ch}t-\frac{1}{4}\sin t$. 96. $\frac{1}{64}(31\operatorname{ch}2t+33\cos 2t+2t\operatorname{sh}2t)$. 97. $2x+\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$. 98. $\frac{1}{2}[2-\cos x-(1+x)e^{x}]$.

99. $2e^{-x}-3e^{x}+4e^{2x}-e^{3x}$. 100. $\frac{x^2(2-3x)}{2}e^{2x}$. 101. $\frac{13}{9}\cos\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{5}{47}\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\sqrt{\frac{3}{2}}x+\frac{x^2}{3}-\frac{4}{9}-\frac{1}{47}\sin 5x$. 102. $\frac{\cos 2x}{17}-\frac{x(18+5x^2)}{25}-\frac{1}{17}\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{3}}x+\frac{43}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{5}{3}}x$. 103. $3e^{t}-3t-2-\frac{1}{2}(t+3)t^2$. 104. $\frac{1}{64}(17e^{2t}+9e^{-2t})-\frac{1}{96}(39+24t+30t^2+10t^4)$. 105. $C_1\cos 2t+C_2\sin 2t-\frac{1}{7}\cos 5t$. 106. $C_1e^{2x}+C_2e^{-6x}-\frac{2}{5}\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 2x$. 107. $\left(\frac{1}{5}t-\frac{2}{25}\right)e^{2t}+e^{t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)$. 108. $\frac{1}{4}e^{-x}+(C_1+C_2x)e^{x}+C_3e^{-2x}$. 109. $\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+C_1+C_2t+C_3t^2+C_4e^{-t}$. 110. $4e^{4t}-2$. 111. e^{2t}. 112. $11e^{-3t}-10e^{-2t}$. 113. $\left(\frac{4}{3}-\frac{19}{5}t\right)e^{3t}$.

114. $(1+t)e^{t}$. 115. $(2+5t)e^{-2t}$. 116. $\frac{1}{2}\sin 2t-\cos 2t$. 117. $\left(\cos 3t-\frac{2}{3}\sin 3t\right)e^{2t}$.

118. $-\frac{1}{3}e^{4t}\sin 3t$. 119. $(1-7t)e^{9t}$. 120. $1-e^{-3t}$. 121. $\frac{1}{4}(e^{3t}+3e^{-t})$. 122. $1+t$.

123. $2+(t-1)e^{t}$. 124. $1-(t+1)e^{-t}$. 125. $5\left[t-3+\left(3+2t+\frac{t^2}{2}\right)e^{-t}\right]$. 126. $t^2\left(\frac{7}{2}-\frac{8}{10!}t^8\right)$.

127. $\frac{1}{8}\left(5+4t+t^2\right)+\frac{1}{24}\left(2t^3-9t^2+18t-15\right)e^{2t}$. **128.** $t^3\left(\frac{5}{6}+\frac{9}{11!}t^8\right)$. **129.** $\frac{3}{20}e^t+\frac{1}{52}e^{-3t}-$ $-\frac{11}{65}\cos 2t-\frac{3}{65}\sin 2t$. **130.** $\frac{t}{128}(\mathrm{ch}\,2t+\cos 2t)-\frac{1}{256}(\mathrm{sh}2t+\sin 2t)$. **131.** $\frac{7}{576}e^{-4t}+$ $+\frac{1}{9}(29+12t)e^{-t}-\frac{207}{64}+\frac{31}{16}t-\frac{3}{8}t^2$. **132.** $\frac{1}{360}-\left(\frac{199}{12\,348}+\frac{37}{294}t\right)e^{-6t}-\frac{2}{49}\left(\frac{2}{7}-t\right)e^t$. **133.** $x(t)=$ $=e^t(\cos t-\sin t)$, $y(t)=e^t(\cos t+\sin t)$. **134.** $x(t)=e^{2t}\cos\sqrt{3}t$, $y(t)=\sqrt{3}e^{2t}\sin\sqrt{3}t$.
135. $x(t)=y(t)=e^t+e^{-2t}$, $z(t)=e^t-2e^{-2t}$. **136.** $x(t)=-\frac{2}{\sqrt{23}}e^{2t}\,\mathrm{sh}\sqrt{23}t$, $y(t)=e^{2t}\left(\mathrm{ch}\sqrt{23}t-\frac{5}{\sqrt{23}}\mathrm{sh}\sqrt{23}t\right)$. **137.** $x(t)=\sin t-\cos t$, $y(t)=\sin t+\cos t$.
138. $x(t)=\mathrm{ch}\sqrt{23}t+\frac{6}{\sqrt{23}}\,\mathrm{sh}\sqrt{23}t$, $y(t)=\mathrm{ch}\sqrt{23}t-\frac{7}{\sqrt{23}}\,\mathrm{sh}\sqrt{23}t$. **139.** $x(t)=1+\frac{t^2}{2}$, $y(t)=t-e^t$. **140.** $x(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}e^t+\frac{4}{21}\cos\sqrt{6}t-\frac{11\sqrt{6}}{21}\sin\sqrt{6}t$, $y(t)=\frac{3}{7}e^t+\frac{11}{7}\cos\sqrt{6}t+$ $+\frac{2\sqrt{6}}{21}\sin\sqrt{6}t$. **141.** $x(t)=-\sin t$, $y(t)=-\cos t$, $z(t)=\sin t$. **142.** $x(t)=\cos t-t^2-2$, $y(t)=2\sin t-\frac{1}{3}t^3+1$. **143.** $x(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-8t}$, $y(t)=-C_1e^{2t}+\frac{2}{3}C_2e^{-8t}$. **144.** $x(t)=$ $=C_1e^t+C_2e^{-5t}$, $y(t)=2C_1e^t-C_2e^{-5t}$. **145.** $x(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{-12t}$, $y(t)=\frac{4}{5}C_1e^{-3t}-$ $-C_2e^{-12t}$. **146.** $x(t)=C_1e^{-8t}+C_2e^t$, $y(t)=C_1e^{-8t}-\frac{4}{5}C_2e^t$. **147.** $x(t)=C_1+C_2e^t$, $y(t)=-C_1+C_3e^t+C_2te^t$, $z(t)=-C_1+(C_3-C_2+C_2t)e^t$. **148.** $x(t)=-2C_1e^t+$ $+C_2e^{2t}+3C_3e^{3t}$, $y(t)=C_1e^t-C_3e^{3t}$, $z(t)=2C_1e^t-C_2e^{2t}-2C_3e^{3t}$. **149.** $x(t)=C_1+$ $+C_2\sin t+C_3\cos t$, $y(t)=C_1+C_3\sin t-C_2\cos t+\frac{t^2}{2}$. **150.** $x(t)=t+C_2\sin t-C_3\cos t+C_4$, $y(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t-\frac{1}{2}t^2$. **151.** $y(t)=C_1e^{-3t}+C_2\left(1+9t^2\right)$. **152.** $x(t)=$ $=(C_1+C_2t)e^{3t}$. **153.** $z(x)=C_0\left(12+8x+x^2\right)e^x$, $C_0=C_1+C_2$. **154.** $y(x)=C_0\left(105-\right.$ $\left.-90x+30x^2-4x^3\right)e^{2x}$, $C_0=C_1+C_2$. **155.** $y(x)=\left(C_1+C_2e^{-2x}\right)e^{\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}x^4\right)}$. **156.** $y(x)=$ $=(C_1+C_2x)\sqrt{x}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$. **157.** $y(x)=\left(C_1e^{(\sqrt{2}-1)x}+C_2e^{-(\sqrt{2}+1)x}\right)e^{x+\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x}$. **158.** $y(x)=$ $=\left(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x\right)e^{-\frac{1}{4}\ln^2 x}$. **159.** $y(x)=\left(C_1-\frac{1}{2}C_2e^{-2x}\right)e^{\frac{1}{2}e^{-2x}}$. **160.** $y(x)=$ $=\left(C_1-\frac{C_2}{6x^2}\right)e^{-\frac{1}{2x^2}}$. **161.** $y(x)=C_1\cos(\cos x)-C_2\sin(\cos x)$. **162.** $y(x)=\sqrt{1+x^2}\left[C_1+\right.$ $\left.+C_2\left(x\,\mathrm{arctg}\,x-\ln\sqrt{1+x^2}\right)\right]e^{-x\,\mathrm{arctg}\,x}$. **163.** $y(t)=\left(3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}-3-3t-t^2$.
164. $y(t)=-\frac{t^2}{2}$. **165.** $y(t)=\frac{2}{3}\left(3-e^t-2e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. **166.** $y(t)=2e^{-t}-3\,\mathrm{ch}\sqrt{2}t+$ $+\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sh}\sqrt{2}t$. **167.** $y(t)=-\frac{1}{4}\left(e^{-t}+3e^{3t}\right)$.

Глава 3
РЯДИ

3.1. ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЛОВИХ І ФУНКЦІОНАЛЬНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Приклади. **1.** Знайти область збіжності й граничну функцію для функціональної послідовності

$$\left\{\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}\right\}=\frac{x+e^{x}}{1+e^{x}},\ \frac{x+e^{2x}}{1+e^{2x}},\ldots,\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}},\ldots$$

Розв'язання. Гранична функція $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

Значення границі залежить від поведінки e^{nx} при $n\to\infty$:

$$f(0)=\lim_{\substack{n\to\infty\\x=0}}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2};\quad f(x)=\lim_{\substack{n\to\infty\\x<0}}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\frac{x+0}{1+0}=x,$$

тому що

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\x<0}}e^{nx}=0,$$

$$f(x)=\lim_{\substack{n\to+\infty\\x>0}}\frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}=\lim_{\substack{n\to+\infty\\x>0}}\frac{\frac{x}{e^{nx}}+1}{\frac{1}{e^{nx}}+1}=\frac{0+1}{0+1}=1.$$

Отже, гранична функція $f(x)$ має такі значення:

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x<0,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Послідовність збігається при $x\in(-\infty,\ +\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty,\ +\infty)$, $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x<0,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=0,\\ 1 & \text{при } x>0.\end{cases}$

2. Дослідити на рівномірну збіжність функціональну послідовність $\{xe^{-nx}\}$ при $x\in[0,\ +\infty)$.

Розв'язання. Послідовність збігається при $x\in[0,\ +\infty)$, тому що

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\x\ge0}}xe^{-nx}=\lim_{\substack{n\to+\infty\\x\ge0}}\frac{x}{e^{nx}}=0.$$

Перевіримо, чи рівномірна ця збіжність. Знайдемо значення x, при якому похідна функції $y_n(x)=xe^{-nx}$ дорівнює нулеві:

$$y_n'(x)=e^{-nx}-nxe^{-nx}=(1-nx)e^{-nx};\ y_n'(x)=0,$$

якщо $x=\frac{1}{n}$. При $x\in\left(0\ ,\ \frac{1}{n}\right)$ функція $y_n'(x)>0$, при $x\in\left(\frac{1}{n},\ +\infty\right)$ $y_n'(x)<0$, тому при $x=\frac{1}{n}$ функція $y_n(x)$ має максимум, який дорівнює $y_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{ne}$ і збігається, очевидно, з найбільшим значенням. Якщо $x\in[0,\ +\infty)$, то $y_n'(x)\ge0$. Звідси випливає, що всі члени функціональної послідовності задовольняють нерівність $0\le xe^{-nx}\le\frac{1}{ne}$.

Згідно з визначенням рівномірної збіжності знайдемо $N(\delta)$ з умови $\left|xe^{-nx}-0\right|<\frac{1}{ne}$. Вважаючи $\frac{1}{ne}<\delta$, знайдемо $n>\frac{1}{\delta e}$. Візьмемо N, що дорівнює цілій частині $\frac{1}{\delta e}$: $N=E\left(\frac{1}{\delta e}\right)$. Отже, вдалося знайти $N(\delta)$, яке не залежить від x і таке, що для всіх $n>N(\delta)$ і $x\in[0,\ +\infty)$ виконується нерівність $\left|xe^{-nx}-0\right|<\delta$, а це означає рівномірну збіжність функціональної послідовності $\{xe^{-nx}\}$ при $x\in[0,\ +\infty)$.

Відповідь: послідовність збігається рівномірно.

Написати перші три члени числових послідовностей і знайти їх границі.

1. $\{n\}$. **2.** $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. **3.** $\{(-1)^n\}$. **4.** $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$. **5.** $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$.

6. $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$. **7.** $\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}$. **8.** $\{n^2\}$. **9.** $\{\ln n\}$. **10.** $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$.

Дослідити на збіжність числові послідовності.

11. $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$. **12.** $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$. **13.** $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$.

14. $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\right\}$.   **15.** $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}\right\}$.

Знайти область збіжності та граничну функцію функціональних послідовностей.

16. $\{x^n\}$. **17.** $\{x^{-n}\}$. **18.** $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$. **19.** $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^n}\right\}$. **20.** $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}\right\}$.

Знайти область збіжності та граничну функцію для послідовностей функцій двох змінних.

21. $\left\{\ln^n\left(x^2+y^2\right)\right\}$.   **22.** $\{x^n y^n\}$.   **23.** $\left\{\dfrac{1+x^{2n}}{1+y^{2n}}\right\}$.

24. $\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{2n}\right\}$.   **25.** $\left\{\dfrac{\sin nx}{y^{2n}}\right\}$.

Дослідити на рівномірну збіжність функціональні послідовності.

26. $\left\{\dfrac{\cos nx}{n}\right\}$.   **27.** $\left\{\dfrac{\sin nx}{n^2}\right\}$.   **28.** $\left\{\dfrac{n}{e^{nx}-1}\right\}$.

29. $\left\{\cos^{2n} x\right\}$.   **30.** $\left\{\dfrac{1}{x^{2n}+1}\right\}$.

3.2. ЗБІЖНІСТЬ ЧИСЛОВИХ І ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ. ГЕОМЕТРИЧНИЙ РЯД. СТЕПЕНЕВИЙ РЯД

Приклади. **1.** Дано числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. Знайти суму S_n його n членів і суму ряду S.

Розв'язання. Розкладемо загальний член ряду на суму найпростіших дробів:

$$a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\,\frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n+1}.$$

Знайдемо часткову суму ряду:

$$S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$$

$$S_n=\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n+1}\right);$$

$$S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n+1}.$$

Для визначення суми ряду знайдемо границю

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $S_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{3n+1}$, $S=\dfrac{1}{3}$.

2. Дослідити на збіжність числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, користуючись означенням збіжності ряду.

Розв'язання. Для визначення збіжності будь-якого ряду треба знайти зрізану суму S_k, яка в нашому випадку становить

$$S_k=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)(k+2)},$$

де загальний член зрізаної суми

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Ряд збігається, якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$ і ця границя дорівнює кінцевій величині (або кінцевому числу, або функції). Для відшукання $\lim S_n$ перетворимо загальний член a_n, розглядаючи його як раціональний дріб від числа n, а $0, -1, -2$ – як корені цілої раціональної функції, що міститься в знаменнику, тобто

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2},$$

де A, B, C – невизначені коефіцієнти. Використовуючи відомі методи відшукання невизначених коефіцієнтів [ч. 1, с. 463], маємо

$$A=\frac{1}{2};\quad B=-1;\quad C=\frac{1}{-2\cdot(-1)}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right);$$

$$S_k=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Вираз $\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ запишемо у вигляді

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Тепер

$$S_k=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\right].$$

Звільнившись від дужок, знаходимо, що доданки, які стоять на парних і непарних місцях, взаємно знищуються. Залишається лише перший доданок і останнє $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Тоді

$$S_k=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right].$$

Переходячи до границі, маємо

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{1}{4}\lim\left[1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{4}.$$

Відповідь: ряд збігається і його сума $S=\frac{1}{4}$.

3. Знайти радіус збіжності й суму степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty}(1+j)^n z^n$.

Розв'язання. Даний ряд є геометричним, де $a_0=1$, $q=(1+j)z$. Він збігається при $|q|<1$, $\sqrt{2}|z|<1$, $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Половина інтервалу збіжності називається радіусом збіжності $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Сума ряду $S(z)=\frac{a_0}{1-q}=\frac{1}{1-(1+j)z}$.

Відповідь: $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $S(z)=\frac{1}{1-(1+j)z}$.

4. Знайти область збіжності й суму функціонального ряду $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Розв'язання. Це геометричний ряд зі знаменником $q=\frac{1-x}{1+x}$ і першим членом $a_0=1$. Ряд збігається, якщо $|q|=\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1$. Розв'язуючи цю нерівність, знайдемо область збіжності ряду:

$$\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<1,\ \left|\frac{2-(1+x)}{1+x}\right|<1,\ \left|\frac{2}{1+x}-1\right|<1,$$

$$-1<\frac{2}{1+x}-1<1,\ 0<\frac{2}{1+x}<2,\ 1<1+x<+\infty.$$

Звідси $x>0$. Відомо, що сума $\sum_{n=0}^{\infty}a_0q^n$ дорівнює $\frac{a_0}{1-q}$. Вважаючи $a_0=1$ і $q=\frac{1-x}{1+x}$, дістаємо

$$S(x)=\frac{1}{1-\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{2x}.$$

Відповідь: $x>0$, $S(x)=\frac{1+x}{2x}$.

5. Діленням чисельника на знаменник здобути розвинення функції $\frac{1}{1-x}$ в степеневий ряд і знайти область його збіжності.

Розв'язання. Виконаємо ділення кутом так, як виконується ділення полінома на поліном, записавши дільник за зростаючими степенями змінної:

$$\begin{array}{l|l}
-\,1 & 1-x \\
\underline{\ 1-x\ } & \overline{1+x+x^2+\ldots} \\
\quad -\,x & \\
\quad\ \underline{x-x^2} & \\
\qquad -\,x^2 & \\
\qquad\ \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad\qquad x^3 &
\end{array}$$

У результаті ділення одержимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$. Область збіжності цього ряду визначається з нерівності $|x|<1$.

Відповідь: $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, $|x|<1$.

6. Дослідити на збіжність функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\cos x)^n = 1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\ldots+\cos^n x+\ldots$$

Розв'язання. Це геометричний ряд зі знаменником $q=\cos x$ і першим членом $a_0=1$. Ряд збігається, якщо $|q|<1$, тобто $|\cos x|<1$. Зрізана сума за формулою (2.36) [ч. 2, с. 222]

$$S_n = 1\cdot\frac{1-(\cos x)^{n+1}}{1-\cos x}.$$

При $n\to\infty$

$$S_n \to S = \frac{1}{1-\cos x}.$$

Відповідь: ряд збігається і його сума $S=\dfrac{1}{1-\cos x}$.

Написати чотири перших члени заданих рядів.

31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. **32.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$. **33.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n+\dfrac{j}{n}\right)$. **34.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$. **36.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b^n(z-z_0)^n$. **37.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x+n}$.

38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+x^2}$. **39.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$. **40.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{e^{nx}}$.

Знайти часткову суму і суму числових рядів.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$. **42.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **43.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+3)}$.

44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)(2n+5)}$. **45.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Знайти область збіжності й суму функціональних рядів.

46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2\sin x)^n$. **47.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)^n$. **48.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(1+x^2)^n}$.

49. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$. **50.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(z^n-z^{n-1}\right)$.

Знайти радіус збіжності степеневих рядів та їх суму.

51. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{2n}x^n$. **52.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(1+j\sqrt{3}\right)^n}{2^n}z^n$. **53.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{27^n}$.

54. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(7x)^n$. **55.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$.

Діленням чисельника на знаменник одержати розвинення функцій в геометричний ряд і знайти область збіжності.

56. $\dfrac{1}{1-2x}$. **57.** $\dfrac{x}{1-x^2}$. **58.** $\dfrac{x}{1+x^3}$. **59.** $\dfrac{x}{1-x}$. **60.** $\dfrac{2}{1+x^2}$.

3.3. ЗАГАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РЯДІВ. НЕОБХІДНА УМОВА ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ. ГАРМОНІЧНИЙ РЯД І ЙОГО РОЗБІЖНІСТЬ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ. АБСОЛЮТНО Й УМОВНО ЗБІЖНІ РЯДИ

Приклади. **1.** Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3n-2}$.

Розв'язання. Це числовий ряд. Перевіримо, чи виконується необхідна умова збіжності. Для цього запишемо загальний член ряду $a_n=\dfrac{n}{3n-2}$ і знайдемо його границю

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-2}=\frac{1}{3}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$, то за наслідком 1 [ч. 2, с. 228] з необхідної умови збіжності ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(x-1)^n}$.

Розв'язання. Це геометричний ряд, він збігається при $|q|=\dfrac{1}{|x-1|}<1$, тобто при $|x-1|>1$. Розв'язуючи цю нерівність, дістаємо $x<0$ і $x>2$. Для $\dfrac{1}{|x-1|}\geq 1$, тобто якщо $0\leq x<1$ і $1<x\leq 2$, ряд розбігається. При $x=1$ загальний член ряду невизначений.

Відповідь: ряд збігається, якщо $x<0$ і $x>2$.

3. Дослідити збіжність числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}.$$

Розв'язання. Необхідна умова $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $a_n = \frac{1}{5^n}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5^n} = 0$ виконується. Заданий ряд – геометричний зі знаменником $q = \frac{1}{5} < 1$, а значить, збігається.

Відповідь: ряд збігається.

4. Використовуючи критерій Коші, дослідити на рівномірну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\sqrt{1+nx}} \text{ при } 0 \le x < \infty .$$

Розв'язання. Розглянемо частковий залишок ряду й оцінимо його:

$$f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}\sqrt{1+(n+1)x}} + \frac{1}{3^{n+2}\sqrt{1+(n+2)x}} + \ldots +$$

$$+\frac{1}{3^{n+p}\sqrt{1+(n+p)x}} \le \frac{1}{3^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+p}} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{3^p}}{3^{n+1}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{2\cdot 3^n} - \frac{1}{2\cdot 3^{n+p}} < \frac{1}{2\cdot 3^n} < \delta(\forall p > 0).$$

Розв'язуючи нерівність $3^n > \frac{1}{2\delta}$, одержуємо

$$n\ln 3 > \ln\frac{1}{2\delta} = -\ln(2\delta),$$

звідки

$$n > -\frac{\ln 2\delta}{\ln 3}.$$

За $N(\delta)$ можна взяти $E\left[-\ln 2\delta(\ln 3)^{-1}\right]$ останньої нерівності. При такому n виконується нерівність (2.59) [ч. 2, с. 230]:

$$\forall x \in [0, \ \infty) \text{ і } p > 0,$$

що доводить рівномірну збіжність ряду при $x \in [0, \ \infty)$.

Відповідь: ряд збігається рівномірно.

5. Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$.

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних величин членів даного ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}},$$

який збігається як геометричний ряд зі знаменником

$$q = \frac{1}{3} < 1.$$

Це означає, що даний ряд збігається абсолютно.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

6. Показати, що ряд

$$\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+16} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2} - \frac{(-1)^n}{x^2+(n+1)^2} + \ldots$$

збігається рівномірно на всій числовій осі.

Розв'язання. Складемо ряд з модулів членів даного ряду

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+4} + \frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+16} + \ldots + \frac{1}{x^2+n^2} + \frac{1}{x^2+(n+1)^2} + \ldots,$$

тобто досліджуватимемо заданий ряд на абсолютну та рівномірну збіжність. За умовою (2.58) [ч. 2, с. 230] потрібно довести, що зрізаний залишок ряду задовольнить умову

$$\left|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+p}(x)\right| < \delta \tag{3.1}$$

для $x \in (-\infty; +\infty)$ і будь-якого малого $\delta > 0$.

Умова (3.1) для заданого ряду запишеться так:

$$\left|\frac{1}{x^2+(n+1)^2} + \frac{1}{x^2+(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{x^2+(n+p)^2}\right| < \delta.$$

Звільнившись від x^2 і модуля, отримаємо

$$\frac{1}{x^2+(n+1)^2} + \frac{1}{x^2+(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{x^2+(n+p)^2} \le \frac{1}{(n+1)^2} +$$

$$+\frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \delta.$$

Завжди знайдеться n і $p \ge 1$, при яких суму можна зробити меншою від δ незалежно від значення x. А це і є умова рівномірної збіжності.

Відповідь: ряд збігається абсолютно і рівномірно для $x \in (-\infty; +\infty)$.

7. Дослідити на абсолютну збіжність ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ для $x \in (-1,\ \ 1)$.

Розв'язання. Даний ряд збігається абсолютно, тому що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x|^n$ збігається на тому самому інтервалі $(-1\ ,\ \ 1)$.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Дослідити на збіжність ряди.

61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{2n+1}$. **62.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{3n-2}$. **63.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^2)^n$.

64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$. **65.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$.

Використовуючи критерій Коші, дослідити на рівномірну збіжність функціональні ряди.

66. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $0 \le x \le \dfrac{4}{5}$. **67.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$, $0 \le x < 1$.

68. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)}$, $0 < x < +\infty$.

69. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$, $x \in (-\infty,\ \ +\infty)$. **70.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, $0 < x < +\infty$.

3.4. ВИКОРИСТАННЯ ДОСТАТНІХ ОЗНАК ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ

Приклади. **1.** Дослідити на збіжність за допомогою ознаки порівняння [ч. 2, с. 237] ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n \sqrt{n+1}}.$$

Розв'язання. Оцінимо загальний член даного ряду:

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n \sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Ця нерівність виконується для всіх n. Отже, члени заданого ряду менші від членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$, що є геометричним рядом зі знаменником $q = \dfrac{1}{2} < 1$. На основі першої ознаки рядів даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n n!}{n^n}$.

Розв'язання. Використаємо ознаку Д'Аламбера [ч. 2, с. 238–240]:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{3^n n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} =$$

$$= 3\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

3. Дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n \sqrt{1+(2n-1)x}}$ на промені $0 \le x < \infty$.

Розв'язання. Використаємо ознаку Вейєрштрасса [ч.2, с. 236]. Оскільки при $x \ge 0$ маємо $\sqrt{1+(2n-1)x} \ge 1$, то члени даного ряду в заданому інтервалі не більші від членів числового ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{4^n}$, що є геометричним рядом з $q = \dfrac{1}{4} < 1$ і тому збігається. Звідси даний ряд збігається абсолютно й рівномірно на $[0,\ \ +\infty)$.

Відповідь: ряд збігається рівномірно.

4. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Д'Аламбера [ч. 2, с. 238–240]:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{x^{n+1}} : \frac{n}{x^n}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{|x|}.$$

Якщо $\frac{1}{|x|}<1$, то даний ряд збігається абсолютно. З нерівності $\frac{1}{|x|}<1$ маємо $|x|>1$. Якщо $\frac{1}{|x|}>1$, то ряд розбігається. При $|x|=1$ дістаємо розбіжні числові ряди, тому що не виконується необхідна умова збіжності рядів.

Відповідь: ряд збігається абсолютно при $|x|>1$.

5. Знайти інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n.$$

Розв'язання. За ознакою Коші [ч. 2, с. 242]

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n|x|=|x|\cdot e.$$

Якщо $|x|\cdot e<1$, даний ряд абсолютно збігається. Розв'язавши цю нерівність, здобудемо

$$|x|<\frac{1}{e};\ -\frac{1}{e}<x<\frac{1}{e};\ x\in\left(-\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right).$$

Відповідь: ряд збігається в інтервалі $\left(-\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)$.

6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}.$$

Розв'язання. Функція $\varphi(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ при $x\ge 1$ додатна, неперервна і монотонно спадає. Тому, досліджуючи ряд на збіжність, можна використати інтегральну ознаку збіжності [ч. 2, с. 243]. Маємо

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=\int_1^{\infty}\frac{d\ln(x+1)}{\ln^3(x+1)}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\ln^2(x+1)}\Bigg|_1^b=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2(b+1)}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right)=0{,}5\ln^2 2.$$

Оскільки невласний інтервал збігається, то даний ряд також збігається.

Відповідь: ряд збігається.

Застосовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність ряди.

71. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7}$. **72.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-2}{n^4+5n}$. **73.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{3n^2-2n}$.

74. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$. **75.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$. **76.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2+4\right)^{\frac{5}{4}}}$.

77. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$. **78.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\frac{n}{2n^2+1}}$. **79.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{3x}{n}}{4^n}$.

80. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}\operatorname{tg}\frac{x^3}{3^n}$.

Використовуючи ознаку Д'Аламбера, дослідити на збіжність ряди.

81. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$. **82.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$. **83.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin jn}{3^n}$. **84.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n+1)}{1\cdot 4\cdots(3n-2)}$.

85. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{2n}(n-1)!}$. **86.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$. **87.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}$.

88. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{e^{2n}}$. **89.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$. **90.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{3^n(2n-1)}}$.

Застосовуючи ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди.

91. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{2n+1}\right)^n$. **92.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

93. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{j(2n+j)^n}{4n}\right)$. **94.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$, $j=\sqrt{-1}$.

95. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2j}{(1+j)n+3}\right)^n$. **96.** $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Використовуючи інтегральну ознаку, дослідити на збіжність ряди.

97. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. **98.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$. **99.** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

100. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^2}$.

101. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln^3 n}}$.

102. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

103. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2n-1}}$.

104. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+4}}$.

105. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+n^2}$.

106. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Дослідити на збіжність ряди, беручи до уваги відповідні ознаки збіжності.

107. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n-1)^{n-1}}$.

108. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

109. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+j)^n n}{2^n}$.

110. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}$.

111. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{5n-3}\right)^n$.

112. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+j}$.

113. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-j)\sqrt{n}}$.

114. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n^2}$.

115. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\left(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}\right)}$.

116. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(3n+1)\left(2\sqrt{n}-1\right)}$, $j=\sqrt{-1}$.

Дослідити на абсолютну й рівномірну збіжність функціональні ряди.

117. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$.

118. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nz}}{n^2}$.

119. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{n^2}$.

120. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

121. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+j)^n (z-j)^n}{(n+1)(n+2)}$.

Знайти область збіжності степеневих рядів.

122. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (z-5)^n}{(3n+1)^{10}}$.

123. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{3n}}{n^2}$.

124. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{n\sqrt{n}}$.

125. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{n!2^n}$.

126. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n (z-3)^{2n-1}}{n(n+1)}$.

127. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{(n+1)^n}}{n!} x^n$.

128. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^n} z^{2n}$.

129. $\sum_{n=3}^{\infty} \left(1-\frac{2}{n}\right) x^{2n}$.

130. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+2)^n} x^n$.

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n(2n-1)}} x^{2n}$.

3.5. ОЦІНКА ПОХИБКИ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ РЯДІВ. ВИКОРИСТАННЯ ОЗНАКИ ЛЕЙБНІЦА ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ РЯДІВ. РАДІУС ТА ОБЛАСТЬ ЗБІЖНОСТІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Приклади. 1. Дано ряд $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\ldots$ Оцінити суму ряду й похибку, якщо за наближене значення суми взяти три перших члени.

Розв'язання. Заданий ряд знакопереміжний, причому члени ряду задовольняють ознаку Лейбніца [ч. 2, с. 246]:

$$\frac{1}{10}>\frac{2}{10^2}>\frac{3}{10^3}>\ldots>\frac{n}{10^n}>\ldots;\quad \lim_{n\to\infty} a_n=0;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}=0.$$

Тоді за ознакою сума ряду не перевищує за абсолютним значенням першого члена ряду, тобто

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}\le\frac{1}{10},$$

і помилка в заміні суми ряду трьома першими членами

$$S=\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}=\frac{83}{10^3}$$

не перевищує за абсолютним значенням першого з відкинутих членів залишку ряду, тобто $\frac{4}{10^4}$.

Відповідь: $S=\frac{83}{10^3}$; $\frac{4}{10^4}$.

2. Дослідити на збіжність знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{n}}$.

Розв'язання. Члени заданого знакопереміжного ряду за абсолютним значенням спадають і, крім того,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = 0 .$$

Унаслідок цього за ознакою Лейбніца [ч. 2, с. 246] даний ряд збігається. З'ясуємо, як збігається даний ряд: абсолютно чи умовно. Для цього складемо відповідний знакододатний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},$$

що є узагальненим гармонічним рядом (ряд Діріхле) при $p = \frac{4}{3} > 1$ [ч. 2, с. 245] і, як наслідок, він збігається. Це означає, що даний ряд збігається абсолютно.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

3. Скільки членів знакопереміжного ряду

$$1 - \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + \ldots$$

треба взяти, щоб допущена похибка була меншою за 0,000 1.

Розв'язання. За ознакою Лейбніца потрібно знати номер члена ряду, який за абсолютним значенням буде меншим за $\frac{1}{10\,000}$. Оскільки $8! = 40\,360$ і $\frac{1}{40360} < \frac{1}{10\,000}$, то в ряд треба взяти сім членів.

Відповідь: перші сім членів.

4. Для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що абсолютно збігається, оцінити залишок ряду.

Розв'язання. За ознакою Д'Аламбера [ч. 2, с. 238] $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. Припустимо $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q < 1$, тобто

$$|a_{n+1}| < q|a_n|,$$

$$|R_n| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots + |a_{n+m}| + \ldots < q|a_n| + q^2|a_n| + \ldots + q^m|a_n| + \ldots = |a_n|\frac{q}{1-q}.$$

Отже, для всіх $m > n$ $|R_n| < |a_n|\frac{q}{1-q}$.

Розглянемо конкретний приклад

$$1 + 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-2} + \ldots$$

Тут

$$a_n = n\left(\frac{1}{5}\right)^{2n-2}; \quad a_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n}\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{5}\right)^{2n}\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}} = \frac{n+1}{n}\frac{1}{25}.$$

Покладемо $q = \frac{n+1}{n}\frac{1}{25}$, тоді

$$R_n < n\frac{1}{5^{2n-2}}\frac{\frac{n+1}{n}\frac{1}{5^2}}{1-\frac{n+1}{n}\frac{1}{5^2}} = \frac{25n(n+1)}{(24n-1)5^{2n}}.$$

Відповідь: $R_n < \frac{25n(n+1)}{(24-1)5^{2n}}$.

5. Оцінити залишок ряду Діріхле.

Розв'язання. Рядом Діріхле називається ряд [ч. 2, с. 245, формула (2.76)] $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, який збігається при $p > 1$. Залишок за інтегральною ознакою Коші

$$R_n < \int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{n^{1-p}}{p-1} = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}.$$

Наприклад, якщо $p = 2$, то $R_n < \frac{1}{n}$. Отже, щоб похибка заміни ряду кінцевою сумою була меншою за 0,01, треба взяти 99 або 100 членів, тобто цей ряд для обчислення незручний.

Відповідь: $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$, $p > 1$.

6. Визначити радіус й область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}$.

Розв'язання. Радіус збіжності ряду знаходимо за формулою (2.71) [ч. 2, с. 241]:

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|b_n|}{|b_n+1|}.$$

У нашому прикладі

$$b_n = \frac{1}{n \cdot 10^n},\ b_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}},$$

маємо

$$R = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n \cdot 10^n} : \frac{1}{(n+1) \cdot 10^{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1) \cdot 10^{n+1}}{n \cdot 10^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} \cdot 10 = 10.$$

Це означає, що даний ряд збігається при $|x| < 10$, тобто область збіжності $-10 < x < 10$.

Дослідимо тепер поведінку ряду в точках $x_1 = 10$ й $x_2 = -10$. Підставимо в даний ряд замість x значення 10. Одержимо гармонічний розбіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Із цього випливає, що при $x = 10$ даний ряд розбігається. При $x_2 = -10$ дістаємо числовий знакопереміжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$, який збігається умовно на основі ознаки Лейбніца.

Відповідь: $R = 10$; ряд збігається при $x \in [-10,\ 10)$, розбігається при $x \geq 10$ і $x < -10$, а при $x = -10$ збігається умовно.

Дослідити на збіжність числові ряди.

132. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n-1}$. **133.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$. **134.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{5n-2}$.

135. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$. **136.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}$. **137.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$.

138. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{3^n(n+2)}$. **139.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$.

Визначити радіус й область збіжності степеневих рядів, включаючи границі.

140. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n^2+1)}x^n$. **141.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-j)^n}{n \cdot 2^n}$.

142. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^n}{\sqrt{(2n-1) \cdot 3^n}}$. **143.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n^2+1}$.

144. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$. **145.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(z-1)^n}{n(n+1)}$. **146.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$.

147. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)^n(z-2)^n$. **148.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}$. **149.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

150. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1) \cdot 4^n}x^{2n}$. **151.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)}{3^n(n+2)}(x-3)^n$.

3.6. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РІВНОМІРНО ЗБІЖНИХ РЯДІВ

Приклади. **1.** Застосовуючи почленне диференціювання, обчислити суму ряду

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Знайти область збіжності.

Розв'язання. Даний ряд згідно з формулою (2.71) [ч. 2, с. 241] має радіус збіжності, рівний одиниці. За теоремою про диференціювання степеневий ряд можна почленно диференціювати всередині інтервалу збіжності. Тоді

$$1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2},\ |x| < 1.$$

Звідси інтегруванням здобуваємо

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x + C.$$

Вважаючи тут $x = 0$, знаходимо, що стала $C = 0$. Остаточно маємо

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x.$$

Помітимо, що в кінцевих точках інтервалу збіжності цей ряд збігається. Тому згідно з теоремою Абеля сума ряду є неперервною функцією на відрізку [–1, 1]. Оскільки функція $\operatorname{arctg} x$ також неперервна на цьому відрізку, то остання рівність слушна для всіх $x \in [-1,\ 1]$.

Відповідь: $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \operatorname{arctg} x$, $x \in [-1,\ 1]$.

2. Знайти суму ряду

$$x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\cdots$$

Розв'язання. Спочатку встановимо збіжність ряду. Застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x^{4n+1}\right|}{4n+1}\frac{4n-3}{\left|x^{4n-3}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{4n+1}|x|^4=|x|^4.$$

Отже, ряд сходиться рівномірно при $|x|<1$. Тоді всередині $[-\alpha;\ \alpha]\subset(-1;\ 1)$ ряд можна почленно диференціювати:

$$1+x^4+x^{4(3-1)}+\ldots+x^{4(n-1)}+\ldots$$

За (2.100) [ч. 2, с. 258] сума останнього ряду $S'=\frac{1}{1-x^4}$, причому рівність слушна при $|x|<1$. Звідси сума заданого ряду

$$S=\int_0^x\frac{dt}{1-t^4}.$$

Розкладаючи підінтегральну функцію на елементарні дроби

$$\frac{1}{1-t^4}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{t^2+1},$$

знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$A=\frac{1}{4};\ \ B=\frac{1}{4};\ \ C=0;\ \ D=\frac{1}{2}.$$

Тепер інтеграл

$$\int_0^x\frac{dt}{1-t^4}=\frac{1}{4}\int_0^x\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int_0^x\frac{dt}{1+t}+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=-\frac{1}{4}\ln|1-t|\Big|_0^x+$$

$$+\frac{1}{4}\ln|1+t|\Big|_0^x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}t\Big|_0^x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Відповідь: $S=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$

Застосовуючи почленне диференціювання й інтегрування, знайти область збіжності рядів й обчислити їх суми.

152. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots$

153. $x+2x^2+3x^3+\ldots$

154. $x-4x^2+9x^3-16x^4+\ldots$

155. $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+3\cdot 4x^3+\ldots$

156. $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots$

157. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$.

158. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

159. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+1}$.

160. $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$.

161. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}$.

3.7. РЯДИ ТЕЙЛОРА Й МАКЛОРЕНА

Приклади. **1.** Розвинути в ряд за степенями x функцію $f(x)=\ln(1+x)$ і знайти область збіжності здобутого ряду.

Розв'язання. Знайдемо похідні функції $f(x)=\ln(1+x)$:

$$f'(x)=\left[\ln(1+x)\right]'=\frac{1}{1+x}=(x+1)^{-1};\ \ f''(x)=\left[(x+1)^{-1}\right]'=-(x+1)^{-2};$$

$$f'''(x)=\left[-(x+1)^{-2}\right]'=2(x+1)^{-3};\ f^{IV}(x)=\left[2(x+1)^{-3}\right]'=-3!(x+1)^{-4};\ \ldots$$

Знайдемо значення функції $f(x)$ та її похідних у точці $x=0$:

$$f(0)=\ln 1=0;\ \ f'(0)=1;\ \ f''(0)=-1;\ \ f'''(0)=2;\ \ f^{IV}(0)=-3.$$

Підставляючи знайдені значення у формулу (2.105) [ч. 2, с. 259] при $a=0$, маємо

$$f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Знайдемо радіус збіжності одержаного ряду за формулою (2.71) [ч. 2, с. 241]:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}(n+1)\right|}{\left|n(-1)^{n+2}\right|}=1.$$

Перевіримо збіжність ряду при $x=1$ і $x=-1$. При $x=1$ дістанемо ряд, що збігається за ознакою Лейбніца; при $x=-1$ – гармонічний розбіжний ряд.

Унаслідок цього одержаний ряд збігається при $x\in(-1,\ \ 1]$.

Відповідь: $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,\ \ 1]$.

2. Розвинути в ряд Маклорена функцію $y=\sin^2 x$ і знайти область збіжності здобутого ряду.

Розв'язання. Перетворимо функцію

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x. \qquad (7.1)$$

Користуючись формулою (2.114) [ч. 2, с. 265] стосовно $\cos 2x$, можна записати

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2^2}{2}x^2-\frac{1}{2}\frac{2^4}{24}x^4-\ldots+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots=$$

$$=x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}. \qquad (7.2)$$

З формули (7.2) випливає, що інтервал збіжності ряду (7.1) збігається з інтервалом збіжності ряду (2.114) [ч. 2, с. 265]: $x\in(-\infty,\ \ +\infty)$.

Відповідь: $\sin^2 x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty,\ \ +\infty)$.

3. Знайти інтеграл $I(x)=\int_0^x\frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2}dt$ розвиненням підінтегральної функції в степеневий ряд.

Розв'язання. Розвинемо функцію у степеневий ряд за формулою (2.115) [ч. 2, с. 266]

$$(1+t^3)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)t^6+\ldots+\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)t^{3n}+\ldots$$

Підінтегральна функція розвинеться в ряд

$$\frac{(1+t^3)^{\frac{1}{3}}-1}{t^2}=\frac{1}{3}t+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)t^4+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)t^{3n-2}+\ldots$$

Ряд рівномірно збігається для $|t|\le\delta$, де $\delta<1$, тому його можна почленно інтегрувати для $x\in[a,\ \ b]\in[-1,\ \ 1]$:

$$\int_0^x\frac{\sqrt[3]{1+t^3}-1}{t^2}dt=\frac{1}{3}\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{t^5}{5}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{t^{3n-1}}{3n-1}+\ldots\Bigg|_0^x. \qquad (7.3)$$

Рівність (7.3) можлива, якщо $|x|<1$.

Відповідь: $I(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{x^{3n-1}}{3n-1},\ x\in(-1,\ 1)$.

4. Розвинути в ряд Маклорена функцію

$$y=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

Розв'язання. Передбачимо, що існує таке розкладання:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Тоді в околі точки O має виконуватися умова

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2},$$

або

$$1-x+x^2=(1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n.$$

Останнє можливо, якщо коефіцієнти при однакових степенях x є однаковими:

$$1-x+x^2=(1+x+x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots+b_nx^n+\ldots);$$

$$1 - x + x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n + \ldots +$$
$$+b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + b_3x^4 + \ldots + b_nx^{n+1} + \ldots +$$
$$+b_0x^2 + b_1x^3 + b_2x^4 + b_3x^5 + \ldots + b_nx^{n+2} + \ldots$$

Звідси

$$b_0 = 1;\ b_1 + b_0 = -1;\ b_2 + b_1 + b_0 = 1;\ b_3 + b_2 + b_1 = 0; \ldots\ b_n + b_{n-1} + b_{n-2} = 0.$$

Розв'язуючи рівняння, отримуємо

$$b_0 = 1;\ b_1 = -1 - b_0;\ b_1 = -2;\ b_2 = 1 - b_1 - b_0 = 1 + 2 - 1 = 2;$$
$$b_3 = -b_2 - b_1 = -2 + 2 = 0;\ b_4 = -b_3 - b_2 = -2;\ b_5 = -b_4 - b_3 = 2;$$
$$b_6 = -b_5 - b_4 = 0;\ b_7 = -b_6 - b_5 = -2; \ldots ;\ b_n = -b_{n-1} - b_{n-2}.$$

Отримані коефіцієнти вставимо в ряд

$$y = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + \ldots$$

Відповідь: $y = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^4 + 2x^5 - 2x^7 + \ldots$

5. Обчислити $\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, вважаючи, що $x = 1$. Оцінити похибку, зберігши в ряді сім перших членів.

Розв'язання. Використаємо ряд (2.99) [ч. 2, с. 258], вважаючи, що $x = -t^2$; $e^{-t^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$; $t \in (-\infty; +\infty)$. Тоді

$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \int\limits_0^x \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \ldots$$

Покладемо $x = 1$. Маємо

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} - \frac{1}{5!11} + \frac{1}{6!13} - \frac{1}{7!15} + \frac{1}{8!17} - \ldots$$
$$\int\limits_0^x e^{-t^2}dt \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1\,320} + \frac{1}{9\,360} - \frac{1}{75\,600} + \frac{1}{685\,440} + \ldots$$

Похибка за ознакою Лейбніца не перевищує вісім членів, тобто

$$\frac{1}{7!15} = \frac{1}{75\,600} < 0{,}000\,1.$$

Відповідь: менша за 0,000 1.

6. Розвинути в ряд Маклорена функцію $u = e^{x+y}$ в околі точки $M(0;\ 0)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою (2.116) [ч. 2, с. 267]

$$f(x,\ y) = f(x_0,\ y_0) + \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial y}y +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,\ y_0)}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y^2\right) + \ldots$$

Як видно з формули,

$$f(0,\ 0) = 1,\ \frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial^n f(0,\ 0)}{\partial x^n} = 1,$$
$$\frac{\partial^n f(0,\ 0)}{\partial y^n} = 1,\ \frac{\partial^{i+j}(x_0,\ y_0)}{\partial x^i \partial y^j} = 1.$$

Тоді $$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \ldots$$

Отже, ряд збігається на всій площині.

Відповідь: $e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + \ldots$

Знайти розвинення в ряд функцій.

162. xe^{-2x}. **163.** $\frac{\operatorname{ch} 3x}{x}$. **164.** $x^2 \operatorname{sh} 2x$. **165.** xe^{x^2}. **166.** $(x+1)e^{x+1}$.

Розвинути функції в ряд і вказати області збіжності одержаних рядів.

167. $\ln(2 - 5z)$ за степенями $(z+3)$. **168.** $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 19}{(z-3)^2(2z+5)}$ за степенями z. **169.** $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ за степенями x. **170.** $\cos^2 z$ за степенями z. **171.** $\frac{z}{4+z^2}$ за степенями z. **172.** $\frac{1}{1-z}$ за степенями $(z - z_0) = (z - 3j)$. **173.** $z^3 - 2z^2 - 5z - 2$ за степенями $(z+4)$. **174.** $\frac{1}{1-z}$ за степенями $(z-2)$. **175.** $\frac{z}{3+4z}$ за степенями z. **176.** $\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ за степенями z. **177.** $\sqrt[3]{27-z}$ за степенями z. **178.** $\sqrt[3]{z}$ за степенями $(z-1)$. **179.** $\ln\left(z^2 + 6z + 12\right)$ за степенями $(z+3)$. **180.** $\frac{3}{1+z-2z^2}$ за степенями z. **181.** $(1-z)e^{-2z}$ за степенями z.

3.8. РЯДИ ФУР'Є. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ ЗА ДОВІЛЬНОЮ ОРТОГОНАЛЬНОЮ СИСТЕМОЮ ФУНКЦІЙ

Приклади. **1.** Розвинути в ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію (рис. 3.1)

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad -\pi\le x\le 0,\\ 0 & \text{при} \quad 0<x<\pi.\end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[-\pi,\ \pi]$, монотонна й обмежена на відрізках $[-\pi,\ 0]$ і $(0,\ \pi]$, то вона задовольняє умови Діріхле, а отже, її можна розвинути в ряд Фур'є. Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є за формулами (3.5), (3.8), (3.9) [ч. 2, с. 281, 282]:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}xdx+\int_{0}^{\pi}0\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2}=-\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}0\cdot\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx.$$

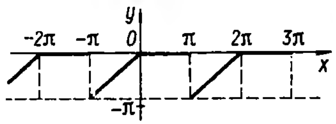

Рис. 3.1

До здобутого інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами. Вважатимемо $u=x$, $dv=\cos nxdx$, тоді $du=dx$, $v=\frac{1}{n}\sin nx$. Отже,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-0-\frac{1}{n}\,\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{для} \quad n=2k,\\ \dfrac{2}{\pi(2k-1)^2} & \text{для} \quad n=2k-1;\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}0\cdot\sin nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx.$$

Знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Тепер припустимо, що $u=x$, $dv=\sin nxdx$, тоді $du=dx$, $v=-\frac{\cos nx}{n}$. Отже,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^{0}+\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(0-\frac{\pi\cos n\pi}{n}+\frac{1}{n^2}\sin nx\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}+0=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Підставляючи коефіцієнти у формулу (3.4) [ч. 2, с. 280], одержуємо

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\,.$$

Відповідь: $f(x)=-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

2. Розвинути в ряд Фур'є функцію (рис. 3.2)

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 2 & \text{при} \quad \dfrac{\pi}{2}<x\le\pi,\end{cases}$$

визначену на проміжку $(0\ ,\ \ \pi]$: а) за синусами кратних дуг; б) за косинусами кратних дуг.

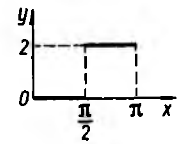

Рис. 3.2

Р о з в' я з а н н я. а) Для розвинення функції в ряд Фур'є за синусами кратних дуг потрібно продовжити її на $(-\pi,\ 0)$ непарним способом і періодично з періодом 2π на всю числову вісь. Використовуючи формулу (3.14) [ч. 2, с. 285], маємо

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}0\cdot\sin nxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}2\cdot\sin nxdx\right)=\frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nxdx=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-\frac{4}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{4}{n\pi}\left((-1)^{n+1}+\cos\frac{n\pi}{2}\right),$$

але

$$\cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad n=2k-1,\\ (-1)^k & \text{при} \quad n=2k.\end{cases}$$

Підставляючи коефіцієнти в ряд (3.4) [ч. 2, с. 280], одержуємо

$$\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\sin 2kx}{k}=\begin{cases}f(x) & \text{в точках неперервності},\\ 1 & \text{в точках} \quad \dfrac{\pi}{2}+2m\pi,\\ -1 & \text{в точках} \quad -\dfrac{\pi}{2}+2m\pi,\\ 0 & \text{в точках} \quad m\pi,\end{cases}$$

де $m=0,\ \ \pm1,\ \ \pm2,\ldots$

б) Продовжимо функцію $y=f(x)$ на $(-\pi,\ 0)$ парним способом. Тоді, застосовуючи формули (3.12), (3.13) [ч. 2, с. 285], здобуваємо

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2dx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{\pi}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)=2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\cos nx dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\cos nx dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{4}{n\pi}\left(\sin n\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{при}\quad n=2k,\\ -\dfrac{4}{(2k-1)\pi}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2} & \text{при}\quad n=2k-1,\end{cases}$$

але

$$\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}=(-1)^{k+1}.$$

Підставляючи коефіцієнти в ряд (3.4) [ч. 2, с. 280], одержуємо

$$f(x)\sim 1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos(2k-1)x=(2k-1)x=\begin{cases}f(x) & \text{в точках неперервності},\\ 2 & \text{в точках } (2m+1)\pi,\\ 1 & \text{в точках } \dfrac{\pi}{2}+m\pi,\\ 0 & \text{в точках } 2m\pi,\end{cases}$$

де $m=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\ldots$

Відповідь:

$$\text{а) } \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}\sin 2kx}{k}=\begin{cases}f(x) & \text{в точках неперервності},\\ 1 & \text{в точках } \dfrac{\pi}{2}+2m\pi,\\ -1 & \text{в точках } -\dfrac{\pi}{2}+2m\pi,\\ 0 & \text{в точках } m\pi,\end{cases}$$

де $m=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\ldots$

$$\text{б) } 1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos(2k-1)x=\begin{cases}f(x) & \text{в точках неперервності},\\ 2 & \text{в точках } (2m+1)\pi,\\ 1 & \text{в точках } \dfrac{\pi}{2}+m\pi.\\ 0 & \text{в точках } 2m\pi,\end{cases}$$

де $m=0,\quad \pm1,\quad \pm2,\ldots$

3. Розвинути в ряд Фур'є функцію (рис. 3.3)

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad -l<x<-\dfrac{l}{2},\\ A & \text{при}\quad -\dfrac{l}{2}<x<\dfrac{l}{2},\\ 0 & \text{при}\quad \dfrac{l}{2}<x<l,\end{cases}$$

де $A=\text{const}$ і $f(x+2l)=f(x)$.

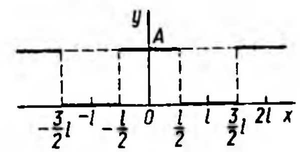

Рис. 3.3

Розв'язання. Оскільки функція парна на відрізку $(-l,\ l)$, то можна застосувати формули (3.21), (3.22) [ч. 2, с. 288]. Одержимо

$$b_n=0,\ a_0=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} Adx+\int_{\frac{l}{2}}^{l} 0dx\right)=\frac{2}{l}Ax\Big|_0^{\frac{l}{2}}=A,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}} A\cos\frac{n\pi x}{l}dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l} 0\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{l}A\cdot\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{\frac{n\pi}{l}}\Bigg|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{2A}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-0\right)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad n=2k,\\ \dfrac{2A(-1)^{k+1}}{(2k-1)\pi} & \text{при}\quad n=2k-1.\end{cases}$$

Підставляючи коефіцієнти у формулу (3.20) [ч. 2, с. 288], дістаємо

$$f(x)\sim\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}.$$

Здобутий ряд збігається до $f(x)$ у точках неперервності, а в точках розриву – до $\frac{A}{2}$.

Відповідь: ряд збігається до $f(x)\sim\frac{A}{2}+\frac{2A}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{l}$ у точках неперервності, а в точках розриву – до $\frac{A}{2}$.

4. Написати ряд Фур'є у комплексній формі для функції (рис. 3.4)

$$i(t)=\begin{cases} I_2 & \text{при} \quad 0<t<l, \\ I_1 & \text{при} \quad l<t<2l, \end{cases}$$

що виражає телеграфні сигнали у разі періодичного передавання точок.

Р о з в ' я з а н н я. Застосовуючи формулу (3.42) [ч. 2, с. 299], одержуємо

$$c_n=\frac{1}{2l}\left(\int\limits_0^l I_2 e^{-\frac{jn\pi}{l}t}dt+\int\limits_l^{2l} I_1 e^{-\frac{jn\pi}{l}t}dt\right)=\frac{1}{2l}\left(I_2\frac{e^{-\frac{jn\pi}{l}t}}{-\frac{jn\pi}{l}}\Bigg|_0^l+I_1\frac{e^{-\frac{jn\pi}{l}t}}{-\frac{jn\pi}{l}}\Bigg|_l^{2l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}\,\frac{-1}{jn\pi}\left(I_2\left(e^{-\frac{jn\pi}{l}l}-e^0\right)+I_1\left(e^{-\frac{jn\pi\cdot 2l}{l}}-e^{-\frac{jn\pi l}{l}}\right)\right)=$$

$$=\frac{j}{2n\pi}\left(I_2(\cos n\pi-j\sin n\pi-1)+I_1(\cos 2n\pi-j\sin 2n\pi-\cos n\pi+j\sin n\pi)\right)=$$

$$=\frac{j}{2n\pi}\left(I_2\left((-1)^n-1\right)+I_1\left(1-\ (-1)^n\right)\right)=\frac{j}{2n\pi}\left((-1)^n-1\right)(I_2-I_1)=$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad n=2k \quad \text{і} \quad n\neq 0, \\ -\frac{(I_2-I_1)j}{(2k-1)\pi} & \text{при} \quad n=2k-1. \end{cases}$$

Для $n=0$ вираз для c_n стає невизначеним. Тому c_0 знайдемо безпосередньо з інтегралу (3.42) [ч. 2, с. 299] для $n=0$:

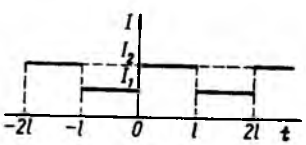

Рис. 3.4

$$c_0=\frac{1}{2l}\left(\int\limits_0^l I_2dt+\int\limits_l^{2l} I_1dt\right)=\frac{1}{2l}\left(I_2t\ \Big|_0^l+I_1t\ \Big|_l^{2l}\right)=$$

$$=\frac{1}{2l}(I_2l+2I_1l-I_1l)=\frac{1}{2l}(I_2+I_1)l=\frac{I_1+I_2}{2}.$$

Підставляючи коефіцієнти c_n і c_0 у формулу (3.41) [ч. 2, с. 299], дістаємо

$$i(t)\sim\frac{I_1+I_2}{2}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{-j(I_2-I_1)}{(2k-1)\pi}e^{\frac{jn\pi}{l}t}=\frac{I_1+I_2}{2}-\frac{j}{\pi}(I_2-I_1)\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}e^{\frac{j(2k-1)\pi}{l}t}.$$

Знайдений ряд дорівнює $i(t)$ у точках неперервності та $\frac{I_1+I_2}{2}$ у точках розриву.

Відповідь: ряд дорівнює $i(t)\sim\frac{I_1+I_2}{2}-\frac{j}{\pi}(I_2-I_1)\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}-e^{\frac{j(2k-1)\pi}{l}t}$ у точках неперервності та $\frac{I_1+I_2}{2}$ у точках розриву.

5. Показати, що система функцій $\sin\pi x,\ \sin 2\pi x,\dots,\ \sin n\pi x,\dots$ ортогональна на сегменті [0; 1]. Нормувати дану систему й написати формули для коефіцієнтів Фур'є c_n відповідно до цієї системи.

Р о з в ' я з а н н я. Для перевірки ортогональності заданої системи функцій обчислимо інтеграл

$$\int\limits_0^1\sin n\pi x\cdot\sin m\pi x dx=\int\limits_0^1\frac{1}{2}\left[\cos(m\pi x-n\pi x)-\cos(m\pi x+n\pi x)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\cos(m-n)\pi x-\cos(m+n)\pi x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi x}{(m-n)\pi}\Bigg|_0^1-\frac{\sin(m+n)\pi x}{(m+n)\pi}\Bigg|_0^1\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi-\sin 0}{(m-n)\pi}-\frac{\sin(m+n)\pi-\sin 0}{(m+n)\pi}\right]=0 \text{ при } m\neq n.$$

Отже, система функцій ортогональна.

Для нормування системи функцій використаємо формулу (4.10) [ч. 2, с. 303]. Тоді

$$\lambda_n=(\sin n\pi x,\ \sin n\pi x)=\int\limits_0^1\sin^2 n\pi x\,dx=\int\limits_0^1\frac{1-\cos 2n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}.$$

Далі систему функцій помножимо на $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2}$ і дістанемо $\sqrt{2}\sin\pi x$, $\sqrt{2}\sin 2\pi x, \ldots, \sqrt{2}\sin n\pi x, \ldots$, що являє собою нормовану систему.

Для написання формули коефіцієнтів Фур'є c_n відносно цієї системи застосуємо формулу (4.18) [ч. 2, с. 308]. Отже,

$$c_n=\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx .$$

Відповідь: нормованою є система функцій $\sqrt{2}\sin\pi x$, $\sqrt{2}\sin 2\pi x, \ldots$, $\sqrt{2}\sin n\pi x, \ldots$; коефіцієнти Фур'є $c_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx$.

Розвинути в ряд Фур'є функції $y=f(x)$, що визначені на проміжку $<-\pi,\ \pi>$.

182. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 1 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

183. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 3 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

184. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ 1 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

185. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ x & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$

186. $f(x)=x$ при $-\pi<x<\pi$.

187. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ x & \text{при } 0<x\le\pi,\end{cases}$ тобто $f(x)=|x|,\ x\in[-\pi,\ \pi]$.

188. $f(x)=3x+1$ при $-\pi<x<\pi$.

189. $f(x)=x^2$ при $-\pi<x<\pi$.

190. $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{при } -\pi<x\le-\frac{\pi}{2},\\ |x| & \text{при } -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2} & \text{при } \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

191. $\sin\frac{x}{2}$ при $-\pi<x<\pi$.

192. $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi<x<0,\\ 2x & \text{при } 0\le x<\pi.\end{cases}$

Розвинути в ряд Фур'є функції $y=f(x)$, що визначені на проміжку $<0,\ \pi>$: а) за синусами кратних дуг; б) за косинусами кратних дуг.

193. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$

194. $f(x)=x$.

195. $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ \pi-x & \text{при } \frac{\pi}{2}<x<\pi.\end{cases}$

196. $f(x)=x^2$.

197. $f(x)=\operatorname{ch}x$.

198. $f(x)=\pi-2x$.

199. $f(x)=e^x$.

У вказаних інтервалах розвинути в ряд Фур'є функції.

200. $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } -1<x<0,\\ 1 & \text{при } 0<x<1.\end{cases}$

201. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -2<x<0,\\ 2 & \text{при } 0<x<2.\end{cases}$

202. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } -1\le x<0,\\ x & \text{при } 0<x<1.\end{cases}$

203. $f(x)=1+|x|$ при $-1\le x\le 1$.

204. $f(x)=x$ при $-2<x<2$.

205. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -2<x<0,\\ x & \text{при } 0<x<2.\end{cases}$

206. $f(x)=x$ при $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

207. $f(x)=4-x$ при $2<x<6$.

208. $f(x)=x$ при $0<x<4$.

209. $f(x)=e^x$ при $-2<x<2$.

Розвинути в ряд Фур'є за синусами функції.

210. $f(x)=1$ при $0<x<1$.

211. $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\le x<\frac{1}{2},\\ 1-x & \text{при } \frac{1}{2}\le x\le 1.\end{cases}$

212. $f(x)=\begin{cases}x & \text{при } 0\le x\le 1,\\ 2-x & \text{при } 1<x<2.\end{cases}$

213. $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ при $0<x<\pi$.

214. $f(x)=\cos 2x$ при $0<x<\pi$.

Розвинути в ряд Фур'є за косинусами функції.

215. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ x-1 & \text{при} \quad 1<x<2. \end{cases}$

216. $f(x)=\dfrac{x}{2}$ при $0\le x\le 2$.

217. $f(x)=\begin{cases} x & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ 2-x & \text{при} \quad 1<x<2. \end{cases}$

218. $f(x)=\sin 2x$ при $0<x<\pi$.

219. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<x<2, \\ 3-x & \text{при} \quad 2<x<3. \end{cases}$

Написати ряд Фур'є в комплексній формі періодичних функцій з періодом T, визначених на вказаному проміжку.

220. $f(x)=e^x$, $T=2\pi$, $0\le x\le 2\pi$.

221. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$, $T=2\pi$, $-\pi\le x\le\pi$.

222. $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при} \quad -\pi<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<\pi; \end{cases} \quad T=2\pi.$

223. $f(x)=\operatorname{ch} x$, $T=2\pi$, $-\pi<x<\pi$.

224. $f(x)=x$, $T=2\pi$, $-\pi<x<\pi$.

225. $f(x)=|x|$, $T=2\pi$, $-\pi<x<\pi$.

226. $f(x)=x^2$, $T=2\pi$, $-\pi<x<\pi$.

227. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при} \quad -4<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<4; \end{cases} \quad T=8.$

228. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1<x<0, \\ 1 & \text{при} \quad 0<x<\dfrac{1}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{1}{2}<x<1; \end{cases} \quad T=2.$

229. $f(x)=e^x$, $T=2l$, $-l<x<l$.

Знайти скалярний добуток функцій.

230. $f(x)=x$, $\varphi(x)=\sin x$, $0\le x\le\pi$.

231. $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=\sin x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$.

232. Показати, що коли p і q $(p\ne q)$ – цілі невід'ємні числа, то функції $\sin\left(p+\dfrac{1}{2}x\right)$ і $\sin\left(q+\dfrac{1}{2}x\right)$ ортогональні на сегменті $[0,\ \pi]$.

Знайти норму $\|f(x)\|=\left(\int\limits_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$ функцій $f(x)$ $(a\le x\le b)$.

233. $f(x)=x^2$, $0\le x\le 1$.

234. $f(x)=\cos x$, $0\le x\le\pi$.

235. $f(x)=e^x$, $0\le x\le 1$.

236. $f(x)=1-x$, $0\le x\le 1$.

Показати, що системи функцій ортогональні на вказаних проміжках і лінійно незалежні. Нормувати ці системи і написати коефіцієнти Фур'є c_n для функцій $f(x)$.

237. $\sin x,\ \sin 3x,\ \dots,\ \sin(2n-1)x,\ \dots,\ \left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

238. $\dfrac{1}{2},\ \cos\pi x,\ \cos 2\pi x,\ \dots,\ \cos n\pi x,\ \dots,[0,\ 1]$.

239. $1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \dots,\ \cos nx,\ \dots,[0,\ \pi]$.

240. $\sin x,\ \sin 2x,\ \dots,\ \sin nx,\ \dots,[0,\ \pi]$.

241. $\dfrac{1}{2},\ \cos\dfrac{\pi x}{l},\ \cos\dfrac{2\pi x}{l},\ \dots,\cos\dfrac{n\pi x}{l},\ \dots,[0,\ l]$.

242. $\sin\dfrac{\pi x}{l},\ \sin\dfrac{2\pi x}{l},\ \dots,\ \sin\dfrac{n\pi x}{l},\ \dots,[0,\ l]$.

3.9. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

Приклади. **1.** Зобразити за допомогою інтеграла Фур'є таку функцію (рис. 3.5):

$$f(x)=\begin{cases} A & \text{при} \quad |x|<\theta, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>\theta, \end{cases} \quad \text{де} \quad \theta>0.$$

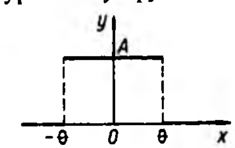

Рис. 3.5

Розв'язання. Задана функція парна, тому $b(u)=0$. За формулою (5.9) [ч. 2, с. 314] знаходимо

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}f(t)\cos ut\,dt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\theta}A\cos ut\,dt+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}0\cdot\cos ut\,dt=\frac{2A\sin u\theta}{\pi u}.$$

Підставляючи $a(u)$ у формулу (5.10) [ч. 2, с. 314], дістаємо

$$I_{\Phi}=\int_{0}^{\infty}a(u)\cos ux\,du,$$

звідки одержуємо в точках неперервності

$$f(x)=\frac{2A}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u\theta\cdot\cos ux}{u}du.$$

Здобутий інтеграл можна використати для обчислення деяких невласних інтегралів. При $x=0$ та $\theta=1$ маємо

$$f(0)=\frac{2A}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=A,$$

тобто

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $f(x)=\dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin u\theta\cdot\cos ux}{u}du$.

2. Зобразити у вигляді інтеграла Фур'є функцію (рис. 3.6)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\le x<1,\\ 0 & \text{при}\quad 1<x,\end{cases}$$

продовживши її парним і непарним способами.

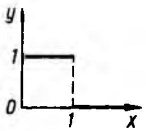

Рис. 3.6

Розв'язання. У разі парного продовження за формулою (5.10) [ч. 2, с. 314]

$$I_{\Phi}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos ux\left(\int_{0}^{1}\cos ut\,dt\right)du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ux\sin u}{u}du.$$

Цю відповідь можна одержати при $A=1$ і $\theta=0$ з попереднього прикладу. У разі непарного продовження за формулою (5.12) [ч. 2, с. 314]

$$I_{\Phi}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin ux\left(\int_{0}^{1}\sin ut\,dt\right)du=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ux(1-\cos u)}{u}du.$$

Відповідь: $I_{\Phi}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\cos ux\sin u}{u}du$ у разі парного продовження та $I_{\Phi}=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\infty}\frac{\sin ux(1-\cos u)}{u}du$, якщо продовження непарне.

3. Знайти спектральну густину (однобічне перетворення Фур'є або зображення за Фур'є) функції $f(t)=e^{-\beta t}$ при $t\ge 0$ $(\beta>0)$.

Розв'язання. За формулою (5.24) [ч. 2, с. 317] одержуємо

$$F(ju)=\int_{0}^{\infty}e^{-\beta t}\cdot e^{-jut}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(\beta+ju)t}dt=\frac{-e^{-(\beta+ju)t}}{\beta+ju}\Bigg|_{0}^{\infty}=$$

$$=-\frac{1}{\beta+ju}e^{-\beta t}(\cos ut-j\sin ut)\Bigg|_{0}^{\infty}=-\frac{1}{\beta+ju}(0-1)=\frac{1}{\beta+ju}.$$

Відповідь: $F(ju)=\dfrac{1}{\beta+ju}$.

4. Знайти спектральну густину $F_1(ju)$ функції Хевісайда

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad t\ge 0,\\ 0 & \text{при}\quad t<0.\end{cases}$$

Розв'язання. Для даної функції $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\int_{0}^{\infty}1\cdot dt=\infty$. Тому для знаходження спектральної густини $F_1(ju)$ домножимо $f(t)$ на $e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$. Функція

$$\varphi(t)=f(t)\cdot e^{-\alpha t}=\begin{cases}e^{-\alpha t} & \text{при}\quad t\ge\theta,\\ 0 & \text{при}\quad t<0\end{cases}$$

є абсолютно інтегрованою, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|dt=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}dt=-\frac{1}{\alpha}\cdot e^{-\alpha t}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\alpha}.$$

Знайдемо спектральну густину функції $\varphi(t)$:

$$F_2(ju)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cdot e^{-jut}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}(\cos ut-j\sin ut)dt=$$

$$=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cos ut\,dt-j\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\sin ut\,dt.$$

Застосовуючи до кожного з інтегралів двічі формулу інтегрування частинами, маємо

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\cos ut\,dt=\frac{\alpha}{\alpha^2+u^2};\quad\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha t}\sin ut\,dt=\frac{u}{u^2+\alpha^2}.$$

Тепер зображення $\varphi(t)$ можна записати у вигляді

$$F_2(ju)=\frac{\alpha}{\alpha^2+u^2}-j\frac{u}{\alpha^2+u^2}.$$

Границя

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\alpha^2+u^2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{1}{\alpha}}{1+\frac{u^2}{\alpha^2}}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{1+\lambda^2u^2}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad u\neq 0\\ \infty & \text{при} \quad u=0\end{cases}=\pi\delta(u),$$

де функція $\delta(u)$ називається δ-функцією (функцією Дірака). При цьому в означення δ-функції [ч. 2, с. 324] входить умова $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(u)du=1$, яка виконується саме тоді, якщо в границю добавити множник π. Розглянемо тепер

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{u}{\alpha^2+u^2}=\begin{cases}\frac{1}{u} & \text{при} \quad u\neq 0,\\ \infty & \text{при} \quad u=0.\end{cases}$$

За означенням

$$F_1(ju)=\lim_{\alpha\to 0}F_2(ju)=\pi\delta(u)-\frac{j}{u}=\begin{cases}-\frac{j}{u} & \text{при} \quad u\neq 0,\\ \infty & \text{при} \quad u=0.\end{cases}$$

Тому, якщо $u\neq 0$, то $F_1(ju)=-\frac{j}{u}$.

Відповідь: $F_1(ju)=\begin{cases}-\frac{j}{u} & \text{при} \quad u\neq 0,\\ \infty & \text{при} \quad u=0.\end{cases}$

5. Знайти спектральну густину функції

$$f(x)=\begin{cases}e^{-jt} & \text{при} \quad t\geq 0,\\ 0 & \text{при} \quad t<0.\end{cases}$$

Розв'язання. Перевіримо вихідну функцію на абсолютну інтегровність:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=\int\limits_{0}^{+\infty}|\cos t-j\sin t|dt=\int\limits_{0}^{+\infty}1dt=\infty.$$

Для знаходження спектральної густини введемо функцію

$$\varphi(t)=f(t)e^{-\alpha t}=e^{-jt}\cdot e^{-\alpha t}.$$

Ця функція буде абсолютно інтегрованою, оскільки $|\varphi(t)|=\left|e^{-jt}\cdot e^{-\alpha t}\right|=\left|e^{-\alpha t}\right|$. Спектральна густина $\varphi(t)=F_2(ju)$, а

$$F_2(ju)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-jt}e^{-jut}dt=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}e^{-j(1+u)t}dt=$$

$$=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha t}\left[\cos(1+u)t-j\sin(1+u)t\right]dt.$$

Використовуючи результати прикладу 4, маємо

$$F_2(ju)=\frac{\alpha}{\alpha^2+(u+1)^2}-j\frac{u+1}{\alpha^2+(u+1)^2}.$$

Переходячи до границі, дістаємо

$$F_1(ju)=\pi\delta(u+1)-\frac{j}{u+1}=\begin{cases}\frac{-j}{u+1} & \text{при} \quad u\neq -1,\\ \infty & \text{при} \quad u=-1.\end{cases}$$

Відповідь: $F_2(ju)=\begin{cases}\frac{-j}{u+1} & \text{при} \quad u\neq -1,\\ \infty & \text{при} \quad u=-1.\end{cases}$

6. Зобразити інтегралом Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad |x|<1,\\ 0 & \text{при} \quad |x|>1.\end{cases}$$

Розв'язання. За формулою (5.19) [ч. 2, с. 316] здобуваємо

$$c(u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-jut}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}1\cdot e^{-jut}dt=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jut}}{-ju}\Bigg|_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi ju}\left(e^{-ju}-e^{ju}\right)=\frac{1}{\pi u}\frac{e^{ju}-e^{-ju}}{2j}=\frac{1}{\pi}\frac{\sin u}{u}.$$

Застосовуючи формулу (5.18) [ч. 2, с. 316], одержуємо

$$I_\Phi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}e^{jux}du.$$

Відповідь: $I_\Phi=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}e^{jux}du.$

Зобразити функції інтегралом Фур'є.

243. $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad 0<x<a, \\ -1 & \text{при} \quad -a<x<0, \\ 0 & \text{при} \quad |x|\ge a. \end{cases}$

244. $f(x)=\begin{cases} -x-2 & \text{при} \quad -2<x<-1, \\ x & \text{при} \quad -1<x<1, \\ -x+2 & \text{при} \quad 1<x<2, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>2. \end{cases}$

245. $f(x)=e^{-|x|}$.

246. $f(x)=\dfrac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$.

247. $f(x)=\dfrac{x}{a^2+x^2}$, $a>0$.

248. $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при} \quad |x|\le\pi, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>\pi. \end{cases}$

249. $f(x)=e^{-x^2}$.

250. $f(x)=e^{-|x|}\cos x$.

251. $f(x)=\begin{cases} 1+x \text{ при} & -1<x<0, \\ 1-x \text{ при} & 0<x<1, \\ 0 \text{ при} & |x|\ge 1. \end{cases}$

252. $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0, \\ \pi x & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

Зобразити інтегралом Фур'є функції, продовжуючи їх: а) парним способом; б) непарним способом.

253. $f(x)=e^{-\beta x}$, $0<x<\infty$, $\beta>0$.

254. $f(x)=e^{-x}$, $0<x<\infty$.

255. $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{при} \quad 0<x<3, \\ 1 & \text{при} \quad x=3, \\ 0 & \text{при} \quad x>3. \end{cases}$

256. $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad 0<x\le\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$

257. $f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при} \quad 0\le x<1, \\ 0 & \text{при} \quad x>1. \end{cases}$

Знайти для функцій: а) косинус-перетворення Фур'є; б) синус-перетворення Фур'є.

258. $f(x)=e^{-\alpha x}$, $a>0$, $x\ge 0$.

259. $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$

260. $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{при} \quad 0\le x\le\dfrac{3}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad \dfrac{3}{2}<x. \end{cases}$

261. $f(x)=\begin{cases} \cos x & \text{при} \quad 0\le x\le\pi, \\ 0 & \text{при} \quad x>\pi. \end{cases}$

262. $f(x)=\begin{cases} 4x-1 & \text{при} \quad 0\le x\le\dfrac{1}{4}, \\ 0 & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

Знайти спектральну густину (перетворення Фур'є) для функцій.

263. $f(x)=\begin{cases} -x+1 & \text{при} \quad 0\le x\le 1, \\ x+1 & \text{при} \quad -1<x<0, \\ 0 & \text{при} \quad |x|>1. \end{cases}$

264. $f(t)=e^{-k^2|t|}$.

265. $f(t)=te^{-|t|}$.

266. $f(t)=e^{\frac{-t^2}{2}}$.

267. $f(t)=\begin{cases} t & \text{при} \quad |t|\le 1, \\ 0 & \text{при} \quad |t|>1. \end{cases}$

268. $f(t)=\begin{cases} h & \text{при} \quad |t|\le\dfrac{\tau}{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |t|>\dfrac{\tau}{2}. \end{cases}$

Знайти спектральну густину неабсолютно інтегровних функцій.

269. $f(t)=\sin\omega t$, $t>0$.

270. $f(t)=\cos\omega t$, $t>0$.

271. $f(t)=t$, $t>0$.

272. $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad t>2, \\ 0 & \text{при} \quad t<2. \end{cases}$

273. $f(t)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad t<0, \\ t & \text{при} \quad 0<t<a, \\ a & \text{при} \quad a<t. \end{cases}$

274. $f(t)=\sin^2\omega t$, $t>0$.

275. $f(t)=\cos^2\omega t$, $t>0$.

276. $f(t)=t\sin\omega t$, $t>0$.

277. $f(t)=t\cos\omega t$, $t>0$.

278. $f(t)=1$, $t\in(-\infty,\ \infty)$.

279. $f(t)=\begin{cases} 1 & \text{при} \quad t>0, \\ -1 & \text{при} \quad t<0. \end{cases}$

280. $f(t)=e^{j\omega t}$, $t\in(-\infty,\ \infty)$.

281. $f(t)=\sin\omega t,\quad t\in(-\infty,\ \infty)$.

282. $f(t)=\cos\omega t,\quad t\in(-\infty,\ \infty)$.

283. $f(t)=\sin^2\omega t,\quad t\in(-\infty,\ \infty)$.

284. $f(t)=\cos^2\omega t,\quad t\in(-\infty,\ \infty)$.

Зобразити функції інтегралом Фур'є в комплексній формі.

285. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при}\quad 0\le x\le a,\\ 0 & \text{зовні}\quad (0,\ a).\end{cases}$

286. $f(x)=\begin{cases}e^x & \text{при}\quad |x|\le\pi,\\ 0 & \text{при}\quad |x|>\pi.\end{cases}$

287. $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & \text{при}\quad x\ge 0,\\ 0 & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$

288. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x\le 0,\\ \sin x & \text{при}\quad 0<x<\pi,\\ 0 & \text{при}\quad x\ge\pi.\end{cases}$

289. $f(x)=\begin{cases}\sin\omega x e^{-ax} & \text{при}\quad x>0,\\ 0 & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$

290. $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при}\quad x<0,\\ \pi x & \text{при}\quad 0\le x\le 1,\\ 0 & \text{при}\quad x>1.\end{cases}$

3.10. ЗАСТОСУВАННЯ ЧИСЛОВИХ І ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ. ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ

Приклади. **1.** Обчислити $\sin 2°$ з точністю до 10^{-6}.

Розв'язання. Переведемо градусну міру кута в радіанну

$$2°=\frac{2\pi}{360}\cdot 2=\frac{\pi}{90}.$$

Використаємо розвинення в ряд функції $y=\sin x$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots,$$

яка збігається при $-\infty<x<\infty$. Підставляючи замість x число $\frac{\pi}{90}$, одержуємо числовий ряд

$$\sin\frac{\pi}{90}=\frac{\pi}{90}-\frac{\pi^3}{3!\cdot 90^3}+\frac{\pi^5}{5!\cdot 90^5}-\dots,$$

який є знакопереміжним. Члени ряду задовольняють ознаку Лейбніца. Абсолютна величина третього члена ряду менша за потрібну точність:

$$\frac{\pi^5}{5!\cdot 90^5}\approx 4\cdot 10^{-10}<10^{-6}.$$

Тому для обчислення $\sin 2°$ з потрібною точністю (10^{-6}) беремо два перших члени ряду. В результаті одержуємо

$$\sin\frac{\pi}{90}\approx 0{,}349\,065-0{,}000\,007=0{,}034\,899\,5.$$

Відповідь: $\sin\frac{\pi}{90}\simeq 0{,}034\,899$.

2. Обчислити $\sqrt[3]{9}$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язання. Скористаємося біномним рядом

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1!}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots,$$

де $-1<x<1$. Заданий корінь перепишемо у вигляді

$$\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{8+1}=\sqrt[3]{2^3\left(1+\frac{1}{8}\right)}=2\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Залишилось обчислити $\left(1+\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$. Вважаючи $m=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{8}$, одержуємо

$$\sqrt[3]{9}=2\left(1+\frac{1}{3}\frac{1}{8}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{8}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{8}\right)^3+\dots\right)=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{24}-\frac{1}{576}+\frac{5}{41\,472}-\dots\right)\approx 2(1+0{,}0417-0{,}0017)=2{,}0801\simeq 2{,}080.$$

Для забезпечення потрібної точності тут взято суму трьох перших членів ряду, бо четвертий член

$$\frac{2\cdot 5}{41\,472}<0{,}001.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{9}\approx 2{,}080$.

Обчислити наближено з указаною точністю.

291. $\frac{1}{e}$, $\Delta=0{,}0001$.

292. $\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\Delta=0{,}0001$.

293. $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$, $\Delta=0{,}001$.

294. $\sin 1$, $\Delta=0{,}000\,01$.

295. $\sin 1°$, $\Delta=0{,}0001$.

296. $\cos 2°$, $\Delta=0{,}001$.

297. $\cos 10^\circ$, $\Delta = 0{,}0001$.

298. $\sqrt{1{,}3}$, $\Delta = 0{,}001$.

299. $\sqrt[3]{8{,}36}$, $\Delta = 0{,}001$.

300. $\sqrt[5]{250}$, $\Delta = 0{,}001$.

301. $\sqrt[4]{90}$, $\Delta = 0{,}001$.

302. $\sqrt[4]{20}$, $\Delta = 0{,}001$.

303. $\ln 1{,}4$, $\Delta = 0{,}001$.

304. $\ln 1{,}5$, $\Delta = 0{,}001$.

305. $\ln 1{,}1$, $\Delta = 0{,}0001$.

306. $\ln 1{,}2$, $\Delta = 0{,}0001$.

307. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$, $\Delta = 0{,}001$.

Вказати похибки наближених формул. За яких значень x ці формули дають похибку, що не перевищує 0,001?

308. $\sin x \approx x$.

309. $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$.

310. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}$.

311. $\operatorname{arctg} x \approx x - \frac{x^3}{3}$.

3.11. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots \approx 1 - 0{,}555\,6 + 0{,}001\,67 - \ldots \approx 0{,}946\,1.$$

Тут обмежились обчисленням суми перших трьох членів, тому що $\frac{1}{7\cdot 7!} < 0{,}000\,03 < 0{,}000\,1$.

Відповідь: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 0{,}946\,1$.

Обчислити інтеграли з точністю до 0,001.

312. $\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$.

313. $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}dx$.

314. $\int_0^{\frac{1}{4}} \sin x^2 dx$.

315. $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+x^2}\,dx$.

316. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

317. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx$.

318. $\int_{0{,}01}^{0{,}1} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

319. $\int_0^{\frac{1}{2}} x\ln\left(1+x^2\right)dx$.

320. $\int_0^1 \sin x^2 dx$.

321. $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$.

3.12. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ТА ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

Приклад. Знайти чотири члени розвинення в ряд за малим параметром μ розв'язку рівняння

$$(x-1)^2 = e^x(1+\mu).$$

Розв'язання. При $\mu = 0$ задане рівняння перетворюється в $(x-1)^2 = e^x$, що має розв'язок при $x = x_0 = 0$. Розв'язок вихідного рівняння знаходимо у вигляді ряду

$$x = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2 + a_3\mu^3 + \ldots \quad (12.1)$$

Якщо $\mu = 0$, $x = a_0 = 0$. Перепишемо задане рівняння у вигляді $x^2 - 2x + 1 - e^x - \mu e^x = 0$. Тепер скористаємося розвиненням функції $y = e^x$ в ряд

$$y = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \quad (12.2)$$

Підставляючи рівняння (12.1) і (12.2) у вихідне, використовуючи при цьому формули (6.2) – (6.4) [ч. 2, с. 332], одержуємо

$$x^2 - 2x + 1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right) - \mu\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right) = 0,$$

$$x^2-2x+1-1-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-...-\mu-\mu x-\frac{\mu x^2}{2}-\frac{1}{6}\mu x^3-...=0,$$

$$\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{6}x^3-...-\mu-\mu x-\frac{1}{2}\mu x^2-\frac{1}{6}\mu x^3-...=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(2a_1a_2\mu^3+a_1^2\mu^2+...\right)-3\left(a_1\mu+a_2\mu^2+a_3\mu^3+...\right)-$$

$$-\frac{1}{6}a_1^3\mu^3-...-\mu-\mu\left(a_1\mu+a_2\mu^2+...\right)-\frac{1}{2}\mu\left(a_1^2\mu^2+...\right)=0.$$

Знаходимо коефіцієнти при відповідних степенях μ і прирівнюємо їх до нуля. Дістаємо систему

$$\begin{array}{l|l} \mu & -3a_1-1=0, \\ \mu^2 & \frac{1}{2}a_1^2-3a_2-a_1=0, \\ \mu^3 & a_1a_2-3a_3-a_2-\frac{1}{2}a_1^2-\frac{1}{6}a_1^3=0, \\ \end{array}$$

....

після розв'язання якої маємо

$$a_1=-\frac{1}{3},\ a_2=\frac{7}{54},\ a_3=-\frac{19}{243}.$$

Отже,
$$x=-\frac{1}{3}\mu+\frac{7}{54}\mu^2-\frac{19}{243}\mu^3+...$$

Відповідь: $x=-\frac{1}{3}\mu+\frac{7}{54}\mu^2-\frac{19}{243}\mu^3+...$

Знайти розвинення в ряд за малим параметром розв'язків рівнянь, обмежуючись членами третього порядку.

322. $x^3+x-\mu=0$. **323.** $x^3+(1-\mu)x-2=0$. **324.** $e^{x-1}=2-x+\mu$.

325. $x^3+\mu x-1=0$. **326.** $e^x-\mu x-1=0$. **327.** $\ln(1+x)+x=\mu$.

328. $e^x+x-1=\mu$. **329.** $x-\cos x+1=\mu$.

3.13. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ РЯДІВ

***Приклади*. 1.** Знайти п'ять перших членів розвинення в ряд розв'язку рівняння $y''=x\sin y'$, яке задовольняє умови $y(1)=0$, $y'(1)=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{IV}(1)}{4!}(x-1)^4+...,$$

де

$$f(1)=y(1)=0,\ f'(1)=y'(1)=\frac{\pi}{2}.$$

Знаходимо другу, третю і четверту похідні функції:

$$f''(1)=1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1;\ f'''(x)=\sin y'+x\cos y'y'';$$

$$f'''(1)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot1=1;$$

$$f^{IV}(x)=\cos y'y''+\cos y'y''+x(-\sin y')y''y''+x\cos y'y''',$$

$$f^{IV}(1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot1+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot1-1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot1\cdot1+1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot1=-1.$$

Записуємо розв'язок:

$$y=0+\frac{\frac{\pi}{2}}{1!}(x-1)+\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{1}{3!}(x-1)^3-\frac{1}{4!}(x-1)^4+...=$$

$$=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4+...$$

Відповідь: $y=\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{24}(x-1)^4+...$

2. Знайти п'ять перших членів розвинення в ряд розв'язку рівняння

$$y''+x^2y=0,$$

що задовольняє умови

$$y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді

$$y=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+d_4x^4+d_5x^5+d_6x^6+...$$

Диференціюючи це розвинення двічі, дістаємо

$$y'=d_1+2d_2x+3d_3x^2+4d_4x^3+5d_5x^4+6d_6x^5+...;$$

$$y''=2d_2+6d_3x+12d_4x^2+20d_5x^3+30d_6x^4+...$$

Підставляючи y і y'' у вихідне рівняння, маємо

$$2d_2+6d_3x+12d_4x^2+20d_5x^3+30d_6x^4+\ldots+x^2\left(d_0+d_1x+d_2x^2+\ldots\right)=0.$$

Початкові умови дають $d_0=y(0)=1$; $d_1=y'(0)=0$. Отже,

$$2d_2+6d_3x+(12d_4+d_0)x^2+(20d_5+d_1)x^3+(30d_6+d_2)x^4+\ldots=0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при відповідних степенях x, одержуємо

$$2d_2=0,\ 6d_3=0,\ 12d_4+1=0,\ 20d_5+0=0,\ldots$$

Розв'язуючи рівняння, здобуваємо

$$d_2=0,\ d_3=0,\ d_4=-\frac{1}{12},\ d_5=0.$$

Підставляючи ці дані в розвинення, знаходимо

$$y=1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3-\frac{1}{12}x^4+0\cdot x^5+\ldots,$$

тобто

$$y=1-\frac{1}{12}x^4+\ldots$$

Відповідь: $y=1-\frac{1}{12}x^4+\ldots$

3. Знайти чотири члени розвинення в ряд розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}y'=x-z^2,\\ z'=x+y, \quad y(0)=1, \quad z(0)=1.\end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\ldots,$$

$$z=z(0)+\frac{z'(0)}{1!}x+\frac{z''(0)}{2!}x^2+\frac{z'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Знаходимо похідні диференціальних рівнянь системи підстановкою відповідних початкових значень. Отже,

$$\begin{cases}y'(0)=0-1^2=-1,\\ z'(0)=0+1=1,\end{cases}\quad \begin{cases}y''=1-2zz',\\ z''=1+y',\end{cases}\quad \begin{cases}y''(0)=1-2\cdot1\cdot1=-1,\\ z''(0)=1+(-1)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}y'''=-2(z')^2-2zz'',\\ z'''=y'',\end{cases}\quad \begin{cases}y'''(0)=-2\cdot1^2-2\cdot1\cdot0=-2,\\ z'''(0)=-1.\end{cases}$$

Підставляючи здобуті значення в ряди, одержуємо розв'язок системи

$$\begin{cases}y=1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{6}x^3+\ldots,\\ z=1+x-\frac{1}{3!}x^3+\ldots,\end{cases}\quad \text{або} \quad \begin{cases}y=1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\ldots,\\ z=1+x-\frac{1}{6}x^3+\ldots\end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases}y=1-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\ldots,\\ z=1+x-\frac{1}{6}x^3+\ldots\end{cases}$

Знайти вказане число членів розвинення в ряд розв'язків диференціальних рівнянь і систем за заданих початкових умов.

330. $y'=x+\frac{1}{y}$; $y(0)=1$ (чотири члени). **331.** $y'=2e^y+xy$; $y(0)=0$ (три члени). **332.** $y'=2x+\cos y$; $y(0)=0$ (чотири члени). **333.** $y'=2\cos x-xy^2$; $y(0)=1$ (чотири члени). **334.** $y'=e^x+y^2$; $y(0)=0$ (три члени). **335.** $y'=\ln(x+y)+xy$; $y(1)=0$ (три члени). **336.** $y''=x^2+y^2$; $y(-1)=2$, $y'(-1)=\frac{1}{2}$ (чотири члени). **337.** $y''=(y')^2+xy$; $y(0)=4$, $y'(0)=-2$ (чотири члени). **338.** $y''=\frac{y'}{y}-\frac{1}{x}$; $y(1)=1$, $y'(1)=0$ (три члени). **339.** $y''=-2xy$; $y(0)=1$, $y'(0)=1$ (три члени). **340.** $y''=y\cos x+x$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$ (три члени). **341.** $\begin{cases}y'=xy+z,\\ z'=y-z, \quad y(0)=0, \quad z(0)=1\end{cases}$ (п'ять членів).

342. $\begin{cases}y'=x+z^2,\\ z'=xy, \quad y(0)=1, \quad z(0)=-1\end{cases}$ (п'ять членів).

343. $\begin{cases}y'=y\cos x-z\sin x,\\ z'=y\sin x+z\cos x, \quad y(0)=1, \quad z(0)=0\end{cases}$ (чотири члени).

3.14. МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Приклади. **1.** Знайти три послідовних наближення розв'язку рівняння
$$y' = x + y\,,\;\; y(0) = 1\,.$$

Розв'язання. Користуючись методом послідовних наближень [ч. 2, с. 337], одержуємо

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (x+1)\,dx = 1 + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Bigg|_0^x = 1 + \frac{x^2}{2} + x\,;$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + y_1(x))\,dx = 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{x^2}{2} + 2x\right)dx =$$

$$= 1 + \left(2\cdot\frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^x = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3\,;$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (x + y_2(x))\,dx = 1 + \int_0^x \left(x + 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)dx =$$

$$= 1 + \left(2\cdot\frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}\right)\Bigg|_0^x = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4\,.$$

Зауважимо, що точним розв'язком даного рівняння є $y = 2e^x - x - 1$. Якщо використати розвинення функції $y = e^x$ в ряд, то дістанемо розв'язок

$$y = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{60}x^5 + \ldots$$

Порівнюючи наближений розв'язок із точним, бачимо, що чотири перших члени збігаються.

Відповідь: $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $y_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{6}x^3$,

$$y_3(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{24}x^4\,.$$

2. Знайти два послідовних наближення розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = x + yz, \\ z' = x^2 - y^2, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо перше наближення

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x \left(x + 1\cdot\frac{1}{2}\right)dx = 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\right)\Bigg|_0^x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\,;$$

$$z_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - 1^2\right)dx = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right)\Bigg|_0^x = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{3}x^3\,.$$

Друге наближення

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (x + y_1(x)\cdot z_1(x))\,dx = 1 + \int_0^x \left(x + \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)\left(\frac{1}{2} - x + \frac{1}{3}x^3\right)\right)dx =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5\right)dx =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5\right)dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{36}x^6\,;$$

$$z_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - y_1^2(x)\right)dx = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right)^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \left(x^2 - 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - x - x^2 - \frac{1}{2}x^3\right)dx = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5\,.$$

Аналогічно знаходимо й інші наближення.

Відповідь: $y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$, $z_1(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{3}x^3$, $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{36}x^6$, $z_2(x) = \frac{1}{2} - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{20}x^5$.

Знайти третє послідовне наближення розв'язку диференціальних рівнянь і систем.

344. $y' = x + y$, $y(0) = 0$.

345. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$.

346. $y' = y$, $y(0) = 1$.

347. $y' = y\sin x + x$, $y(0) = 0$.

348. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0$.

349. $y' = \sqrt{x} + y^2$, $y(0) = 0$.

350. $y' = xy + \sqrt{x}$, $y(0) = 0$.

351. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

352. $\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = -2y + 3z, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \end{cases}$

353. $\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = y + xz, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1. \end{cases}$

354. $\begin{cases} y' = x - z^2, \\ z' = x + y, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1. \end{cases}$

355. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = y \cdot z, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

3.15. МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

***Приклади.* 1.** Знайти три члени розвинення розв'язку в ряд за степенями малого параметра μ для рівняння

$$y' = \frac{x}{1 + \mu xy}, \quad y(0) = 0. \tag{15.1}$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння (15.1) шукаємо у вигляді ряду

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) \cdot \mu + y_2(x) \cdot \mu^2 + \ldots \tag{15.2}$$

Спочатку знаходимо розв'язок рівняння (15.1) при $\mu = 0$: $y' = x$; $dy = xdx$; $y = \dfrac{x^2}{2} + C$. При $y(0) = 0$ $C = 0$, тобто $y = \dfrac{x^2}{2}$. З ряду (15.2) випливає, що при $\mu = 0$

$$y(x) = y_0(x) = \frac{x^2}{2}. \tag{15.3}$$

При $x = 0$

$$y(0) = y_0(0) + y_1(0) \cdot \mu + y_2(0) \cdot \mu^2 + \ldots,$$

тобто

$$y_i(0) = 0, \quad i = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \tag{15.4}$$

Запишемо рівняння (15.1) у вигляді

$$y'(1 + \mu xy) = x. \tag{15.5}$$

Підставляючи формулу (15.2) в (15.5), одержуємо

$$\left(y_0'(x) + y_1'(x) \cdot \mu + y_2'(x) \cdot \mu^2 + \ldots\right)\left(1 + \mu x\left(y_0(x) + y_1(x) \cdot \mu + y_2(x) \cdot \mu^2 + \ldots\right)\right) = x,$$

чи з урахуванням рівнянь (15.3)

$$\left(x + y_1'\mu + y_2'\mu^2 + \ldots\right)\left(1 + \mu x \frac{x^2}{2} + \mu^2 xy_1 + \mu^3 xy_2 + \ldots\right) - x = 0.$$

Знаходячи добуток, залишаємо члени степенів μ не вище ніж μ^2:

$$x + y_1'\mu + y_2'\mu^2 + \mu\frac{x^4}{2} + \mu^2 y_1' \frac{x^3}{2} + \mu^2 x^2 y_1 + \ldots - x = 0.$$

Прирівнюємо до нуля коефіцієнти при степенях μ:

$$\begin{array}{c|l} \mu & y_1' + \dfrac{x^4}{2} = 0, \\ \mu^2 & y_2' + y_1' \dfrac{x^3}{2} + x^2 y_1 = 0. \end{array} \tag{15.6}$$

Розв'язуємо систему (15.6) з урахуванням (15.4):

$$y_1' = -\frac{x^4}{2}; \quad y_1(x) = -\frac{x^5}{10}; \quad y_2' + \left(-\frac{x^4}{2}\right)\frac{x^3}{2} + x^2\left(-\frac{x^5}{10}\right) = 0;$$

$$y_2'(x) = \frac{7}{20}x^7; \quad y_2(x) = \frac{7}{160}x^8$$

і так далі. Підставляючи знайдені функції у формулу (15.2), маємо

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{10}x^2\mu + \frac{7}{160}x^8\mu^2 + \ldots$$

Відповідь: $y(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{10}x^2\mu + \dfrac{7}{160}x^8\mu^2 + \ldots$

2. Знайти три члени розвинення розв'язку в ряд за степенями малого параметра μ для рівняння

$$y' = \frac{6\mu}{x} - y^2, \quad y(1) = 1 + 3\mu. \tag{15.7}$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння (15.7) знаходимо у вигляді ряду

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) \cdot \mu + y_2(x) \cdot \mu^2 + \ldots \tag{15.8}$$

Знаходимо розв'язок (15.7) при $\mu = 0$. Маємо

$$y' = -y^2;\quad -\frac{dy}{y^2} = dx;\quad \frac{1}{y} = x + C.$$

При $y(1) = 1$ $C = 0$, тобто $y = \frac{1}{x}$. З ряду (15.8) випливає, що при $\mu = 0$ виконується рівність

$$y(x) = y_0(x) = \frac{1}{x},$$

тобто

$$y(x) = \frac{1}{x} + y_1(x)\cdot\mu + y_2(x)\cdot\mu^2 + \ldots$$

При $x = 1$ дістаємо

$$y(1) = 1 + y_1(1)\cdot\mu + y_2(1)\cdot\mu^2 + \ldots = 1 + 3\mu$$

(за умовою), тобто

$$y_1(1) = 3,\ y_2(1) = 0,\ y_3(1) = 0, \ldots \tag{15.9}$$

Знаходимо $y'(x) = -\frac{1}{x^2} + y_1'(x)\cdot\mu + y_2'(x)\cdot\mu^2 + \ldots$ Підставляючи в рівняння (15.7) $y'(x)$, $y(x)$, одержуємо

$$-\frac{1}{x^2} + y_1'(x)\cdot\mu + y_2'(x)\cdot\mu^2 + \ldots = \frac{6\mu}{x} - \left(\frac{1}{x} + y_1(x)\cdot\mu + y_2(x)\cdot\mu^2 + \ldots\right)^2 =$$

$$= \frac{6\mu}{x} - \left(\frac{1}{x^2} + 2\cdot\frac{1}{x}y_1(x)\cdot\mu + \left(2\cdot\frac{1}{x}y_2(x) + y_1^2(x)\right)\cdot\mu^2 + \ldots\right),$$

або

$$-\frac{1}{x^2} + y_1'(x)\cdot\mu + y_2'(x)\cdot\mu^2 + \ldots = \frac{6\mu}{x} - \frac{1}{x^2} -$$

$$-\frac{2}{x}y_1(x)\cdot\mu - \left(\frac{2}{x}y_2(x) + y_1^2(x)\right)\cdot\mu^2 + \ldots$$

Порівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях, маємо

$$\begin{array}{c|l} \mu & y_1'(x) = \frac{6}{x} - \frac{2}{x}y_1(x), \\ \mu^2 & y_2'(x) = -\frac{2}{x}y_2(x) - y_1^2(x). \end{array} \tag{15.10}$$

Розв'язуємо систему (15.10) з урахуванням (15.9):

$$y_1' = \frac{6 - 2y_1}{x};\quad \frac{dy_1}{6 - 2y_1} = \frac{dx}{x};\quad -\frac{1}{2}\ln|6 - 2y_1| = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln C;\quad 6 - 2y_1 = \frac{C}{x^2}.$$

При $x = 1$ і $y_1 = 3$ отримаємо $6 - 2\cdot 3 = \frac{C}{1}$, звідки $C = 0$. Отже, $6 - 2y_1(x) = 0$, тобто $y_1(x) = 3$. Підставивши це значення в друге рівняння системи (15.10), здобудемо

$$y_2'(x) = \left(-\frac{2}{x}\right)\cdot y_2(x) - 9.$$

Розв'яжемо це рівняння методом підстановки, вважаючи, що

$$y = uv,\ y' = u'v + uv':$$

$$u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = -9;\quad u'v + u\left(v' + \frac{2}{x}v\right) = -9;$$

$$v' + \frac{2}{x}v = 0;\quad \frac{dv}{v} = -\frac{2}{x}dx;\quad \ln|v| = -2\ln|x|;\quad v = \frac{1}{x^2};$$

$$u'\frac{1}{x^2} = -9;\quad du = -9x^2dx;\quad u = -\frac{9}{3}x^3 + C_1.$$

Звідси
$$y_2(x) = uv = \left(-3x^3 + C_1\right)\frac{1}{x^2} = -3x + \frac{C_1}{x^2}.$$

Маючи на увазі, що $y_2(1) = 0$, одержимо

$$0 = -3\cdot 1 + \frac{C_1}{1} \Rightarrow C_1 = 3.$$

Отже, $y_2(x) = \frac{3}{x^2} - 3x$. Підставляючи знайдені функції в ряд (15.8), дістаємо

$$y(x) = \frac{1}{x} + 3\mu + \left(\frac{3}{x^2} - 3x\right)\cdot\mu^2 + \ldots$$

Відповідь: $y(x) = \frac{1}{x} + 3\mu + \left(\frac{3}{x^2} - 3x\right)\cdot\mu^2 + \ldots$

Знайти два члени розвинення розв'язку в ряд за степенями малого параметра μ в рівняннях.

356. $y' = x^2 + \mu y^2$, $y(0) = 1$.

357. $y' = \mu x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

358. $y' = \mu\sin y + 1$, $y(0) = 0$.

359. $y' = \frac{x^2}{x + \mu y}$, $y(0) = 1$.

360. $y' = y^2 + \mu x,\ y(0) = 1.$

361. $y' = \sin(xy),\ y(0) = \mu.$

Знайти три члени розвинення розв'язку в ряд за степенями малого параметра μ в рівняннях.

362. $y' = y^2 + 2\mu \cdot x^{-1},\ y(1) = 1.$

363. $y' = 4\mu x - y^2,\ y(1) = 1.$

364. $y' = x + \mu y^2,\ y(0) = 1.$

365. $y' = e^{x-y} + \mu y,\ y(0) = \mu.$

3.16. ВИКОРИСТАННЯ ЕОМ У РОЗРАХУНКАХ ІЗ РЯДАМИ

Приклад. Написати програму обчислення інтеграла $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ з точністю ε на Бейсику.

Розв'язання. Знайдемо алгоритм розв'язку задачі. Для цього замінимо $\sin t$ його рядом, а далі обчислимо інтеграл. Дістаємо

$$\int\limits_0^x \frac{\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right)dt}{t} =$$

$$= \int\limits_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^n t^{2n-2}}{(2n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots\right)dt =$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \ldots$$

Знайдемо відношення наступного члена до попереднього:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} \frac{(2n-1)(2n-1)!}{(-1)^n x^{2n-1}} =$$

$$= \frac{-x^2 (2n-1)(2n-1)!}{(2n+1)(2n+1)2n(2n-1)!} = -\frac{x^2}{2} \frac{2n-1}{(2n+1)^2 n},$$

або

$$u_{n+1} = \frac{x^2}{2} \frac{2n-1}{(2n+1)^2 n} u_n.$$

Із цієї формули одержуємо алгоритм знаходження наступного члена, якщо відомий попередній. Це співвідношення виконується при $n \ge 1$. Для першого члена потрібно припустити, що $u_0 = x$. Ознакою закінчення обчислювального

процесу є виконання нерівності $|u_n| < \varepsilon$, тому що здобутий ряд задовольняє ознаку Лейбніца для будь-якого x, внаслідок чого похибка суми ряду не перевищує абсолютної величини першого з відкинутих членів.

Програма розв'язання задачі на Бейсику:

```
10 INPUT "введіть точність Е і значення"
15 INPUT "аргумента Х через кому", E, X
20 B = X : C = X
30 D = (–X ^ 2) / 2 : N = 0
40 N = N + 1 : K = (2 * N + 1) ^ 2
50 B = ((2 * N – 1) * D * B) / (N * K)
60 C = C + B : IF ABS(B) < E THEN 80
70 GOTO 40
80 PRINT "інтеграл = "; C
90 END
```

Приклад для контролю: при $x = 0{,}1$ і $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-10}$

$$\int\limits_0^{0,1} \frac{\sin t}{t} dt = 0{,}099\,944\,4611.$$

Написати на Бейсику програми обчислення сум рядів із заданими абсолютними похибками.

366. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n(n+1)}.$

367. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}.$

368. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$

369. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$

370. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(a+n)n}.$

Використовуючи розвинення в степеневі ряди, написати на Бейсику програми для обчислення значень функції із заданими абсолютними похибками.

371. $y = \cos x.$

372. $y = \operatorname{sh} x.$

373. $y = \operatorname{ch} x.$

374. $y = \ln(1+x).$

375. $y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$

376. $y = \int\limits_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$

377. $y = \int\limits_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt.$

378. $y = \int\limits_0^x \sin t^2 dt.$

379. $y = \int\limits_0^x \cos t^2 dt.$

380. $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt.$

Відповіді

1. 1, 2, 3; ∞. **2.** 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$; 0. **3.** –1, 1, –1; розбігається. **4.** –1, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$; 0. **5.** 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$; 1. **6.** 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 0. **7.** 2, 0, $\frac{2}{3}$; 0. **8.** 1, 4, 9, ∞. **9.** 0, $\ln 2$, $\ln 3$; ∞. **10.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$; 0. **11–15.** Збігається. **16.** $(-1,\ 1]$, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<1,\\ 1 & \text{при } x=1.\end{cases}$ **17.** $(-\infty,\ -1)\cup[1,\ +\infty)$, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>1,\\ 1 & \text{при } x=1.\end{cases}$ **18.** $(-\infty,\ +\infty)$, $f(x)=0$. **19.** $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|<1,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=1,\\ 1 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$ **20.** $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ +\infty)$, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq 1,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=1.\end{cases}$ **21.** $x^2+y^2\in\left(\frac{1}{e},\ e\right]$, $f(x,\ y)=\begin{cases}0 & \text{при } \frac{1}{e}<x^2+y^2<e,\\ 1 & \text{при } x^2+y^2=e.\end{cases}$ **22.** $xy\in(-1,\ 1]$, $f(x,\ y)=\begin{cases}0 \text{ при } |xy|<1,\\ 1 \text{ при } xy^2=1.\end{cases}$ **23.** $\frac{x}{y}\in[-1,\ 1]$, $f(x,\ y)=\begin{cases}0 & \text{при } \frac{x}{y}\in(-1,\ 1),\\ 1 & \text{при } |x|=|y|.\end{cases}$ **24.** $\frac{x}{y}\in[-1,\ 1]$, $f(x,\ y)=\begin{cases}0 \text{ при } |x|<|y|,\\ 1 \text{ при } |x|=|y|.\end{cases}$ **25.** $x\in(-\infty,\ +\infty)$, $|y|>1$, $f(x,\ y)=0$. **26, 27.** Збігається рівномірно. **28.** Збігається нерівномірно $x\in(0,\ +\infty)$. **29.** Збігається нерівномірно, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\neq k\pi,\\ 1 & \text{при } x=k\pi.\end{cases}$ **30.** Збігається нерівномірно, $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } |x|>1,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=1,\\ 1 & \text{при } |x|<1.\end{cases}$

41. $S_n=1-\frac{1}{n+1}$, $S=1$. **42.** $S_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1}$, $S=\frac{1}{2}$. **43.** $S_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S=\frac{11}{18}$. **44.** $S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$, $S=\frac{23}{90}$. **45.** $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}$, $S=\frac{1}{4}$. **46.** $|x-\pi k|<\frac{\pi}{6}$, $k=0$, ±1, $\pm2, \ldots$; $S(x)=\frac{2\sin x}{1-2\sin x}$. **47.** $x>-\frac{1}{3}$, $x<-1$; $S(x)=\frac{x}{x+1}$. **48.** $|x|\neq 1$; $S(x)=\frac{x}{x^2-x+1}$. **49.** $x>0$; $S(x)=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. **50.** $|z|<1$, $z=1$, $S(z)=1$; $S(z)=0$. **51.** $R=\frac{1}{4}$; $S(x)=\frac{4x}{1-4x}$. **52.** $R=1$; $S(z)=\frac{1}{2-\left(1+j\sqrt{3}\right)z}$. **53.** $R=3$; $S(x)=\frac{x^3}{27-x^3}$. **54.** $R=\frac{1}{7}$; $S(x)=\frac{7x}{1-7x}$. **55.** $R=2$; $S(x)=\frac{2}{2+x}$. **56.** $\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n$, $|x|<\frac{1}{2}$. **57.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$, $|x|<1$. **58.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n+1}$, $|x|<1$. **59.** $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$, $|x|<1$. **60.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$, $|x|<1$.

61, 62. Розбігається. **63.** Збігається при $|x|<1$, розбігається при $|x|>1$. **64.** Збігається. **65.** Збігається при $|x|<1$ абсолютно, розбігається при $|x|\geq 1$. **66.** Збігається рівномірно. **67.** Збігається нерівномірно. **68–70.** Збігається рівномірно. **71, 72.** Збігається. **73, 74.** Розбігається. **75 –77.** Збігається. **78.** Розбігається. **79.** Збігається всюди. **80.** Збігається для $|x|<\sqrt{3}$. **81.** Збігається. **82.** Розбігається. **83.** Збігається абсолютно. **84, 85.** Збігається. **86.** Розбігається. **87.** Збігається. **88.** Збігається. **89.** Збігається. **90.** Розбігається. **91.** Збігається. **92.** Розбігається. **93.** Збігається абсолютно. **94.** Збігається. **95.** Збігається абсолютно. **96, 97.** Збігається. **98, 99.** Розбігається. **100–102.** Збігається. **103, 104.** Розбігається. **105–107.** Збігається. **108.** Розбігається. **109.** Збігається абсолютно. **110, 111.** Збігається. **112.** Розбігається. **113.** Збігається абсолютно. **114, 115.** Збігається. **116.** Розбігається. **117.** Збігається абсолютно і рівномірно на всій осі. **118.** Збігається абсолютно і рівномірно при $\operatorname{Re} z\leq 0$. **119.** $|z-1|\leq 1$, збіжність всюди рівномірна. **120.** Збігається абсолютно і рівномірно при $|z-1|\leq 2$. **121.** Збігається абсолютно і рівномірно при $|z+1|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. **122.** Збігається тільки в точці $z=5$. **123.** Збігається абсолютно і рівномірно в області $|z+1|\leq 1$. **124.** Збігається абсолютно і рівномірно в області $|z+3|\leq 1$. **125.** Збігається абсолютно і рівномірно в області $|z|\leq 1$. **126.** Збігається абсолютно і рівномірно в області $|z-3|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. **127.** Збігається абсолютно і рівномірно всюди. **128.** Збігається тільки в точці $z=0$. **129.** Збігається абсолютно і рівномірно в області $|x|<e$. **130.** Збігається абсолютно і рівномірно всюди. **131.** Збігається абсолютно і рівномірно в області

$| x |<\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}$. **132.** Збігається умовно. **133.** Збігається абсолютно. **134.** Розбігається. **135.** Збігається абсолютно. **136.** Збігається умовно. **137, 138.** Збігається абсолютно. **139.** Розбігається. **140.** $R=2$, збігається при $x\in[-2,\ 2)$. **141.** $R=2$, збігається в крузі $(x-1)^2+(y-1)^2<4$. **142.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$, збігається при $x\in\left(\frac{-\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **143.** $R=1$, збігається при $x\in[-1,\ 1]$. **144.** $R=1$, збігається при $x\in(-1,\ 1]$. **145.** $R=\frac{1}{3}$, збігається в області $|z-1|\le\frac{1}{3}$. **146.** $R=\mathrm{e}$, збігається при $|z|<\mathrm{e}$. **147.** $R=\mathrm{e}^3$, збігається при $|z-2|<\mathrm{e}^3$. **148.** $R=1$, збігається при $x\in[-1,\ 1)$. **149.** $R=\mathrm{e}$, збігається при $x\in\left(-\mathrm{e}^{-1},\ \mathrm{e}^{-1}\right)$. **150.** $R=0$, збігається при $x=0$. **151.** $R=3$, збігається при $x\in(0,\ 6)$.

152. $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, $|x|<1$. **153.** $\frac{x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **154.** $\frac{x(1-x)}{(1+x)^2}$, $|x|<1$. **155.** $\frac{2x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$. **156.** $-\ln\left(1-x^2\right)$, $|x|<1$. **157.** $\frac{1+x}{(1-x)^3}$, $|x|<1$. **158.** $\ln\frac{1}{1-x}$, $-1\le x<1$.

159. $\frac{x^2}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **160.** $\frac{1+x}{(1-x)^2}$, $|x|<1$. **161.** $\frac{\operatorname{arctg}x}{x}-1$, $|x|<1$. **162.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}x^{n+1}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **163.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{9^n}{(2n)!}x^{2n-1}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **164.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$.

165. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **166.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+1)^{n+1}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **167.** $\ln 17-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{17}\right)^n\frac{(z+3)^n}{n}$, $|z+3|<\frac{17}{5}$. **168.** $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}+\frac{2(n+1)}{3^{n+2}}\right]z^n$, $|z|<\frac{5}{2}$.

169. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$, $x\in(-\infty;\ +\infty)$. **170.** $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$, $|z|<+\infty$. **171.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$, $|z|<2$. **172.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3j)^n}{(1-3j)^{n+1}}$, $|z-3j|<|1-3j|=\sqrt{10}$.

173. $-78+59(z+4)-14(z+4)^2+(z+4)^3$. **174.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n$, $|z-2|<1$.

175. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n z^{n+1}}{3^{n+1}}$, $|z|<\frac{3}{4}$. **176.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2^n n!(2n+1)}$, $|z|<+\infty$. **177.** $3-\frac{z}{27}-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n-4)}{n!\cdot3^{4n-1}}z^n$, $|z|<27$. **178.** $1+\frac{1}{3}(z-1)+\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2\cdot5\cdots(3n-4)}{3^n n!}(z-1)^n$, $|z-1|<1$. **179.** $\ln 4+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+3)^{2n}}{n\cdot4^n}$, $|z+3|<2$. **180.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[1+(-1)^n 2^{n+1}\right]z^n$; $|z|<\frac{1}{2}$. **181.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n-1}(n+2)}{n!}z^n$; $|z|<\infty$. **182.** $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$.

183. $2+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **184.** $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$. **185.** $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$. **186.** $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$. **187.** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

188. $1+6\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin nx}{n}$. **189.** $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. **190.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos 2nx}{n^2}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$. **191.** $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{4n^2-1}$. **192.** $\frac{3\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos nx}{n}-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

193. а) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}-\frac{1}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2nx}{n}$; б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cos(2n-1)x}{2n-1}$.

194. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$; б) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **195.** а) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$;

б) $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **196.** а) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+2}\pi^2}{n}+\frac{2\left((-1)^n-1\right)}{n^3}\right]\sin nx$;

б) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$. **197.** а) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{n^2+1}n\sin nx$; б) $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\left(1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2+1}\right)$.

198. а) $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n}$; б) $\frac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **199.** а) $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}\right)\frac{n\sin nx}{n^2+1}$;

б) $\frac{e^{\pi}-1}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n e^{\pi}-1\right)}{n^2+1}\cos nx$. **200.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$. **201.** $1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$.

202. $\frac{3}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin \pi x}{n}$. **203.** $\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$.

204. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$. **205.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

206. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin 2nx}{n}$. **207.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$. **208.** $2-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$.

209. $\frac{e^4-1}{2e^2}\left[\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi x}{2}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$. **210.** $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$.

211. $\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$. **212.** $\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$. **213.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

214. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2-4}$. **215.** $\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}$.

216. $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$. **217.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x+$ $+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$. **218.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2-4}$. **219.** $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+$ $+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$. **220.** $\frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1+jn}{1+n^2}e^{jnx}$. **221.** $\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}e^{jnx}$.

222. $-\frac{2j}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k-1}e^{j(2k-1)\pi x}$. **223.** $\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}e^{jnx}$. **224.** $j\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{jnx}$.

225. $\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}e^{j(2n-1)x}$. **226.** $\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}e^{jnx}$. **227.** $\frac{1}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2n-1}e^{\frac{j(2n-1)\pi x}{4}}$.

228. $\frac{1}{4}+\frac{j}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{n\pi}{2}j}-1}{n}e^{jn\pi x}$ $(n\neq 0)$. **229.** $\operatorname{sh} l\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{l+jn\pi}{l^2+n^2\pi^2}(-1)^n e^{j\frac{n\pi x}{l}}$. **230.** π.

231. $\frac{\pi}{4}$. **233.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **234.** $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. **235.** $\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}$. **236.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **237.** $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin x$, $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin 3x, \ldots, \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sin(2n-1)x, \ldots$, $c_n=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin(2n-1)x\,dx$. **238.** 2, $\sqrt{2}\cos\pi x$, $\sqrt{2}\cos 2\pi x, \ldots, \sqrt{2}\cos n\pi x, \ldots$, $c_1=4\int_0^1 f(x)\,dx$, $c_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$, $n>1$.

239. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2x, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx, \ldots$, $c_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$, $n>1$. **240.** $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2x, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx, \ldots$, $c_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$. **241.** $\frac{2}{\sqrt{l}}$, $\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{\pi x}{l}$, $\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}, \ldots$, $c_1=\frac{4}{l}\int_0^{l} f(x)\,dx$, $c_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, $n>1$. **242.** $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{x\pi}{l}$, $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}, \ldots, \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}, \ldots$, $c_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$. **243.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}(1-\cos ua)\frac{\sin ux}{u}\,du$.

244. $\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos u)\sin u}{u^2}\sin ux\,du$. **245.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos u}{1+u^2}\,du$. **246.** $\frac{1}{a}\int_0^{\infty}e^{-au}\cos ux\,du$.

247. $\int_0^{\infty}e^{-au}\sin ux\,du$. **248.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin u\pi}{1-u^2}\sin ux\,du$. **249.** $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{u^2}{4}}\cos ux\,du$.

250. $\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(u-1)^2+1}+\frac{1}{(u+1)^2+1}\right]\cos ux\,du$. **251.** $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos u)\cos ux}{u^2}\,du$.

252. $\int_0^{\infty}\frac{(u\sin u+\cos u-1)\cos ux+(\sin u-u\cos u)\sin ux}{u^2}\,du$.

253. а) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\beta}{u^2+\beta^2}\cos ux\,du$; б) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u}{u^2+\beta^2}\sin ux\,du$. **254.** а) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux}{u^2+1}\,du$; б) $\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u}{u^2+1}\sin ux\,du$. **255.** а) $\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ux\sin 3u}{u}\,du$; б) $\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos 3u)\sin ux}{u}\,du$.

256. а) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{u\sin\pi u\cos ux}{1-u^2}\,du$; б) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{u(1+\cos\pi u)\sin ux}{u^2-1}\,du$.

257. а) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\cos u-1}{u^2}\cos uxdu$; б) $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin u-u}{u^2}\sin uxdu$. **258.** а) $\frac{a}{a^2+u^2}$; б) $\frac{u}{a^2+u^2}$.

259. а) $\frac{1+\cos\pi u}{1-u^2}$; б) $\frac{\sin\pi u}{1-u^2}$. **260.** а) $\frac{2\left(\cos\frac{3}{2}u-1\right)}{u^2}$; б) $-\frac{3}{u}+\frac{2}{u^2}\sin\frac{3}{2}u$.

261. а) $\frac{u\sin\pi u}{1-u^2}$; б) $\frac{1}{2}\left[\frac{1-\cos(u+1)\pi}{u+1}+\frac{1-\cos(u-1)\pi}{u-1}\right]$. **262.** а) $\frac{4}{u^2}\left(\cos\frac{u}{4}-1\right)$; б) $\frac{1}{u}-\frac{4\sin\frac{u}{4}}{u^2}$.

263. $\frac{4\sin^2\frac{u}{2}}{u^2}$. **264.** $\frac{2k^2}{u^2+k^4}$. **265.** $-4j\frac{u}{\left(u^2+1\right)^2}$. **266.** $\sqrt{2\pi}\,e^{\frac{-u^2}{2}}$. **267.** $2je^{ju}$. **268.** $\frac{2h}{u}\sin\frac{u\tau}{2}$.

269. $\frac{\omega}{\omega^2-u^2}$. **270.** $\frac{ju}{\omega^2-u^2}$. **271.** $-\frac{1}{u^2}$. **272.** $-\frac{j}{u}e^{-2ju}$. **273.** $\frac{(a-1)j}{u}e^{-jua}+\frac{1}{u^2}\left(e^{-jua}-1\right)$. **274.** $\frac{-2j\omega^2}{u\left(u^2-4\omega^2\right)}$. **275.** $j\frac{2\omega^2-u^2}{u\left(u^2-4\omega^2\right)}$. **276.** $\frac{2ju}{\left(1-u^2\right)^2}$. **277.** $-\frac{1+u}{\left(1-u^2\right)^2}$.

278. $2\pi\delta(u)$. **279.** $-\frac{2j}{u}$. **280.** $2\pi\delta(u-a)$. **281.** $-j\pi\left[\delta(u-\omega)-\delta(u+\omega)\right]$.

282. $\pi\left[\delta(u-\omega)+\delta(u+\omega)\right]$. **283.** $-\frac{\pi}{2}\left[\delta(u-2\omega)+\delta(u+2\omega)-2\delta(u)\right]$.

284. $\frac{\pi}{2}\left[\delta(u-2\omega)+\delta(u+2\omega)+2\delta(u)\right]$. **285.** $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\frac{au}{2}}{u}e^{ju\left(x-\frac{a}{2}\right)}du$.

286. $\frac{j}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\pi(1-j\pi)}{1-j\pi}e^{jux}du$. **287.** $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a+ju}e^{jux}du$. **288.** $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\pi}+1}{1-u^2}e^{-jux}du$.

289. $\frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{jux}}{(a+ju)^2+\omega^2}du$. **290.** $\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ju}(1-ju)-1}{u^2}e^{-jux}du$. **291.** 0,3679.

292. 0,6065. **293.** 0,716. **294.** 8,841 47. **295.** 0,0175. **296.** 0,999. **297.** 0,9848. **298.** 1,140. **299.** 2,030. **300.** 3,017. **301.** 3,079. **302.** 2,058. **303.** 0,336. **304.** 0,405. **305.** 0,0953. **306.** 0,1823. **307.** 0,464. **308.** $R<\frac{|x|^3}{6}$, $|x|<0{,}18$. **309.** $R<\frac{x^4}{24}$, $|x|<0{,}39$. **310.** $R<\frac{|x|^3}{3}$, $|x|<0{,}14$. **311.** $R<\frac{|x|^5}{5}$, $|x|<0{,}34$. **312.** 0,245.

313. 1,995. **314.** 0,005. **315.** 0,521. **316.** 0,487. **317.** 0,608. **318.** 0,065. **319.** 0,015.

320. 0,310. **321.** 0,764. **322.** $x=\mu-\mu^3+\ldots$ **323.** $x=1+\frac{1}{4}\mu-\frac{1}{64}\mu^2-\frac{1}{512}\mu^3+\ldots$

324. $x=1+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{16}\mu^2+\frac{1}{192}\mu^3+\ldots$ **325.** $x=\frac{1}{3}\mu-\frac{1}{81}\mu^3+\ldots$ **326.** $x=\mu-\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{6}\mu^3+\ldots$

327. $x=\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{16}\mu^2-\frac{1}{192}\mu^3+\ldots$ **328.** $x=\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{16}\mu^2+\frac{1}{196}\mu^3+\ldots$ **329.** $x=\mu-\frac{1}{2}\mu^2+\frac{1}{2}\mu^3+\ldots$ **330.** $y=1+x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4+\ldots$ **331.** $y=2x+2x^2+\frac{10}{3}x^3+\ldots$ **332.** $y=x+x^2-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots$ **333.** $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\ldots$ **334.** $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\ldots$

335. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{1}{6}(x-1)^4+\ldots$ **336.** $y=2+\frac{1}{2}(x+1)+\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{15}{16}(x+1)^3+\ldots$

337. $y=4-2x+2x^2-2x^3+\ldots$ **338.** $y=1-\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{12}(x-1)^4+\ldots$ **339.** $y=1+x-\frac{1}{3}x^3+\ldots$

340. $y=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\ldots$ **341.** $\begin{cases} y=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots, \\ z=1-x+x^2-\frac{1}{2}x^3+\frac{7}{24}x^4+\ldots \end{cases}$

342. $\begin{cases} y=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\ldots, \\ z=-1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4+\ldots \end{cases}$ **343.** $\begin{cases} y=1+x+\frac{1}{2}x^2+\ldots, \\ z=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\ldots \end{cases}$ **344.** $y_3(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4$. **345.** $y_3(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59\,535}x^{15}$. **346.** $y_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$. **347.** $y_3(x)=\frac{3}{4}x^2+x\sin x+\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)\cos x-\frac{3}{8}x\sin 2x+\frac{1}{16}\left(2x^2-11\right)\cos 2x$.

348. $y_3(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{189\cdot 11}x^{11}\frac{1}{63^2\cdot 15}x^{15}$. **349.** $y_3(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{9}x^4+\frac{1}{729}x^9+\frac{8}{351}x^{\frac{13}{2}}$. **350.** $y_3(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{4}{21}x^{\frac{7}{2}}+\frac{8}{231}x^{\frac{11}{2}}$. **351.** $y_3(x)=1+x+x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{5}{6}x^4$.

352. $y_3(x)=1+x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x^3$, $z_3(x)=-2x-4x^2-\frac{11}{8}x^3$. **353.** $y_3(x)=x+\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{8}x^5$,

$z_3(x)=1+x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{64}x^6$. **354.** $y_3(x)=-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{252}x^7$, $z_3(x)=1+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{120}x^6$. **355.** $y_3(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{24}x^3$, $z_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{24}x^3+0{,}015\,625x^4+0{,}006\,25x^5$. **356.** $y(x)=1+\frac{1}{3}x^3+\left(x+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{63}x^7\right)\cdot\mu+\ldots$

357. $y(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{5}x^5\right)\cdot\mu+\ldots$ **358.** $y(x)=x+(1-\cos x)\cdot\mu+\ldots$

359. $y(x)=1+\frac{1}{2}x^2-\left(\frac{1}{6}x^3+x\right)\cdot\mu+\ldots$ **360.** $y(x)=\frac{1}{1-x}+\frac{x^2\left(6-8x+3x^2\right)}{12(1-x)^2}\mu+\ldots$

361. $y(x)=\mu e^{\frac{x^2}{2}}+\mu^3\left(\frac{1}{12}\left(1-x^2\right)e^{\frac{3}{2}x^2}-\frac{1}{12}e^{\frac{x^2}{2}}\right)+\ldots$ **362.** $y(x)=-\frac{1}{x}+\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\mu+\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{x}+\frac{8}{3x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\cdot\mu^2+\ldots$ **363.** $y(x)=\frac{1}{x}+\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\mu+\left(-\frac{1}{7}x^5+\frac{2}{3}x-\frac{32}{21x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\mu^2+\ldots$

364. $y(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{20}x^5\right)\cdot\mu+\left(x^2+\frac{5}{12}x^4+\frac{13}{180}x^6+\frac{1}{160}x^8\right)\cdot\mu^2+\ldots$

365. $y(x)=x-(x+1)\cdot\mu+\frac{1}{2}\left(e^x-x^2-2x-1\right)\cdot\mu^2+\ldots$

Глава 4

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

4.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Приклади. **1.** Визначити порядок рівнянь [див. ч. 2, с. 6]:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+xy=0; \qquad (1.1)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-2u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2u\right)^2-xy^2=0; \qquad (1.2)$$

$$\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \qquad (1.3)$$

де $u=u(x,\ y)$ – функція двох незалежних змінних.

Розв'язання. Найвищий порядок похідної, що входить до рівняння (1.1) – третій: $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$. Отже, рівняння (1.1) є диференціальним із частинними похідними третього порядку.

Далі перетворимо рівняння (1.2), розкривши дужки і виконавши певні дії:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-2u\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2-4u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4u^2\right]-xy^2=0,$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x}\;\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}+$$

$$+4\frac{\partial u}{\partial y}\;\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4u\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}-8u\frac{\partial u}{\partial y}-xy^2=0. \qquad (1.4)$$

З рівняння (1.4) очевидно, що найвищим порядком похідної функції u є третій. Отже, рівняння (1.2) є диференціальним із частинними похідними третього порядку.

Тепер перетворимо рівняння (1.3), скориставшись властивостями логарифмічної функції:

$$\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|+\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|-\ln\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Звідси випливає, що рівняння (1.3) має перший порядок.

2. Визначити, які з наступних рівнянь є лінійними (однорідними або неоднорідними) і які нелінійними:

$$x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2+2x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-3xy\frac{\partial u}{\partial y}-u=0; \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial u}{\partial y}-3x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+xy\frac{\partial u}{\partial x}+u-3x=0; \tag{1.6}$$

$$2\sin(x+y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\cos(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y^2\frac{\partial u}{\partial x}+5u-4xy=0; \tag{1.7}$$

$$8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-7\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial u}{\partial y}+6\frac{\partial u}{\partial x}+7u=0, \tag{1.8}$$

де $u(x,\ y)$ – функція двох незалежних змінних x і y.

Розв'язання. У першому доданку рівняння (1.5) міститься співмножник $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2$. Отже, друга мішана похідна входить до рівняння нелінійно, і рівняння є нелінійним.

У перший доданок рівняння (1.6) перші похідні входять нелінійно відносно одна одної. Отже, рівняння є нелінійним.

Усі похідні і функція $u(x,\ y)$ входять у рівняння (1.7) лінійно. Отже, воно є лінійним диференціальним рівнянням із частинними похідними другого порядку. Оскільки $F(x,\ y)=4xy$, то рівняння є неоднорідним.

Як і в рівнянні (1.7), усі похідні входять у рівняння (1.8) лінійно. Отже, рівняння є лінійним. Воно також однорідне, тому що всі доданки містять або шукану функцію $u(x,\ y)$, або її похідні, тобто $F(x,\ y)=0$.

3. Показати, що функція $u=ye^{\frac{x}{y}}$ є розв'язком диференціального рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. Функція $u(x,\ y)=ye^{\frac{x}{y}}$ при $y\neq 0$ є двічі диференційованою. Знайдемо похідні, що входять до рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=ye^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}=e^{\frac{x}{y}};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=e^{\frac{x}{y}}+ye^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}+\left(1-\frac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=e^{\frac{x}{y}}\frac{x}{y^2}\left(1-1+\frac{x}{y}\right)=\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння:

$$x^2\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}+2xy\left(-\frac{x}{y^2}\right)e^{\frac{x}{y}}+y^2\frac{x^2}{y^3}e^{\frac{x}{y}}=e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x^2}{y}-\frac{2x^2}{y}+\frac{x^2}{y}\right)=0.$$

Таким чином, якщо $y\neq 0$, функція $u=ye^{\frac{x}{y}}$ тотожно задовольняє рівняння. Отже, дана функція є розв'язком розглядуваного рівняння. Цей розв'язок є частинним.

4. За яких умов функція $u=\ln\left(y+e^{-x}\right)$ є інтегралом диференціального рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0? \tag{1.9}$$

Розв'язання. За умови, що $y+e^{-x}>0$, функція $u(x,\ y)=\ln\left(y+e^{-x}\right)$ має частинні похідні, які входять у рівняння (1.9). Знайдемо їх:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+e^{-x}}e^{-x}(-1)=-\frac{e^{-x}}{y+e^{-x}};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{y+e^{-x}};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{\left(y+e^{-x}\right)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(-e^{-x}\right)}{\left(y+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}}{\left(y+e^{-x}\right)^2}.$$

Підставимо знайдені похідні в рівняння (1.9):

$$\frac{1}{y+e^{-x}}\ \frac{e^{-x}}{\left(y+e^{-x}\right)^2}-\frac{e^{-x}}{y+e^{-x}}\ \frac{1}{\left(y+e^{-x}\right)^2}=\frac{e^{-x}}{\left(y+e^{-x}\right)^3}-\frac{e^{-x}}{\left(y+e^{-x}\right)^3}=0.$$

Звідси, якщо $y+e^{-x}>0$, функція $u(x,\ y)=\ln\left(y+e^{-x}\right)$ тотожно задовольняє рівняння (1.9) і, отже, є його інтегралом.

5. Знайти функцію $u=u(x,\ y)$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2ax,$$

де a – стала.

Розв'язання. Зінтегруємо рівняння за x. Тоді, враховуючи, що стала інтегрування взагалі є функцією змінної y, здобудемо $u=ax^2+\varphi(y)$, де φ – довільна функція. Це і є загальним розв'язком рівняння.

6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x+2y.$$

Розв'язання. Зінтегруємо рівняння за y й одержимо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy+y^2+\varphi_0(x),$$

де $\varphi_0(x)$ – поки довільна функція. Далі зінтегруємо за x і дістанемо такий вираз для загального розв'язку:

$$u=yx^2+y^2x+\psi(y)+\varphi(x),$$

де $\varphi(x)=\int\varphi_0(x)dx$; $\psi(y)$ – довільна функція.

Зауважимо, що для існування частинної похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ потрібно, щоб функція $\varphi(x)$ була диференційовною. Якщо ці вимоги накладаються й на функцію $\psi(y)$, то виконуються умови теореми Шварца, і розв'язок розглядуваного рівняння можна отримати, інтегруючи рівняння спочатку за x, а потім за y.

Визначити порядок рівнянь.

1. $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

2. $\cos^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+\sin^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)-2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-3\frac{\partial u}{\partial y}+u=0.$

3. $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left(u+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)+4u=0.$

4. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u^2=0.$

5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+7\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+u^2=0.$

Визначити, які з рівнянь є лінійними (однорідними й неоднорідними) і які нелінійними (квазілінійними).

6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+4xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8x\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0.$

7. $\frac{\partial}{\partial x}\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+8\frac{\partial u}{\partial x}+7\frac{\partial u}{\partial y}+7\sin x=0.$

8. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+xy\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial u}{\partial x}+8u+5x^2=0.$

9. $5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+7\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+8\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+14\frac{\partial u}{\partial x}+5\frac{\partial u}{\partial y}=0.$

10. $x^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+y^2\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+7\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+8u+14xy=0.$

11. За яких умов функція $u=\frac{x}{y}$ є інтегралом рівняння

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}=0\ ?$$

12. Показати, що функція $u=\sin(x+ay)$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.$$

13. За яких умов функція $u=\frac{y}{\left(x^2-y^2\right)^5}$ є розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{1}{x}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{y}\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{u}{y^2}\ ?$$

14. Показати, що функція $u = \cos y + (y - x)\sin y$ є розв'язком диференціального рівняння $(x-y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

15. Знайти загальний розв'язок рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$

16. Розв'язати рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y.$

4.2. МАТЕМАТИЧНА ПОСТАНОВКА ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ. ПОНЯТТЯ ПРО РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ. ДОДАТКОВІ УМОВИ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Приклади. **1.** Вивести диференціальні рівняння, яким задовольняють напруга $v(x,\ t)$ і сила струму $i(x,\ t)$ в провіднику, вздовж якого неперервно розподілені омічний опір R, ємність C, індуктивність L і витік крізь ізоляцію G.

Розв'язання. Розглянемо відрізок провідника Δx. Використовуючи поняття диференціала, запишемо вираз для спаду напруги на відрізку Δx:

$$-\Delta v = v(x,\ t) - v(x+\Delta x,\ t) \approx -dv = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x.$$

Цей спад напруги складається з омічного, що дорівнює $iR\Delta x$, та індуктивного, що дорівнює $\dfrac{\partial i}{\partial t}L\Delta x$:

$$-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x = R\Delta x + \frac{\partial i}{\partial t}L\Delta x.$$

Знак мінус взято тому, що струм тече в напрямку, протилежному збільшенню напруги v. Скорочуючи на Δx, одержуємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} + iR + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0.$$

Аналогічно різницю значень сили струму, що виходить із відрізка Δx, і сили струму, що входить у нього за час Δt, запишемо у вигляді

$$\big(i(x,\ t) - i(x+\Delta x,\ t)\big)\Delta t \approx -di\,\Delta t = -\frac{\partial i}{\partial x}\Delta x\,\Delta t.$$

Частина її $C\Delta x\dfrac{\partial v}{\partial t}\Delta t$ використовується на зарядження відрізка, а частина $Gv\,\Delta x\,\Delta t$ – на втрати крізь ізоляцію бічної поверхні провода в разі витоку.

Прирівнявши ці вирази і скоротивши на $\Delta x\,\Delta t$, дістанемо

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0.$$

Отже, шукані диференціальні рівняння мають вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} + Gv = 0. \qquad (2.2)$$

Ці рівняння прийнято називати *телеграфними*.

2. В умовах задачі 1 вивести рівняння, що містить тільки шукану функцію $i(x,\ t)$, і рівняння, що містить тільки шукану функцію $v(x, t)$.

Розв'язання. Здиференціюємо члени рівняння (2.1) за x, а члени рівняння (2.2) здиференціюємо за t і помножимо їх на C. Віднімемо від першого рівняння друге і запишемо

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + C\frac{\partial v}{\partial x} - GR\frac{\partial i}{\partial t} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.3)$$

Підставляючи в рівняння (2.3) вираз для $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ з формули (2.1), одержуємо

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + G\left(-iR - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - GR\frac{\partial i}{\partial x} - CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + b\frac{\partial i}{\partial t} + c\,i, \qquad (2.4)$$

де

$$a^2 = \frac{1}{CL},\quad b = -\frac{CR+GL}{CL},\quad c = -\frac{GR}{CL}.$$

Аналогічно можна отримати рівняння відносно $v(x,\ t)$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial t} + C\,v. \qquad (2.5)$$

Якщо в провіднику немає витоку крізь ізоляцію $(G=0)$ і опору $(R=0)$, то рівняння (2.4) і (2.5) перейдуть у хвильові. Отже,

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \qquad (2.6)$$

3. Використовуючи рівняння (2.4) і (2.6) прикладу 2, поставити задачу про поширення електричних коливань у необмеженому провіднику $\left[x\in(-\infty,\ +\infty)\right]$ без повторень, тобто за виконання умови $GL = CR$, якщо відомі початкові напруга $\varphi(x)$ і сила струму $\psi(x)$.

Розв'язання. Як було показано в задачі 2, напруга $v(x,\ t)$ і сила струму $i(x,\ t)$ в провіднику $\left[x\in(-\infty,\ +\infty)\right]$ в кожний момент часу $t\in[0,\ +\infty)$ задовольняють відповідно рівняння (2.5) і (2.6). Визначимо початкові умови (при $t=0$).

Згідно з умовою задачі в початковий момент часу маємо

$$v(x,\ 0)=\varphi(x),\ i(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in[0,\ +\infty). \tag{2.7}$$

Використовуючи співвідношення (2.7) і рівняння (2.1), одержимо вираз для похідної функції $i(x,\ t)$ за часом t

$$\frac{\partial i(x,\ 0)}{\partial t}=-\frac{1}{L}\ \frac{\partial v(x,\ 0)}{\partial x}-\frac{R}{L}i(x,\ 0)=-\frac{1}{L}\varphi'(x)-\frac{R}{L}\psi(x).$$

Отже,
$$i_t'(x,\ 0)=-\frac{1}{L}\varphi'(x)-\frac{R}{L}\psi(x).$$

Аналогічно, використовуючи співвідношення (2.7) і рівняння (2.2), отримуємо

$$v_t'(x,\ 0)=-\frac{1}{C}\varphi'(x)-\frac{G}{C}\psi(x).$$

Отже, маємо такі задачі:

а) знайти розв'язок $v(x,\ t)$ рівняння

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial v}{\partial t}+Cv,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ t\in[0,\ +\infty),$$

що задовольняє початкові умови

$$v(x,\ 0)=\varphi(x),\ v_t'(x,\ 0)=-\frac{1}{C}\psi'(x)-\frac{G}{C}\varphi(x);$$

б) знайти розв'язок $i(x,\ t)$ рівняння

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 i}{\partial x^2}+b\frac{\partial i}{\partial t}+Ci,\ x\in(-\infty,\ +\infty),\ t\in[0,\ +\infty),$$

що задовольняє початкові умови

$$i(x,\ 0)=\psi(x),\ \ i_t'(x,\ 0)=-\frac{1}{L}\varphi'(x)-\frac{R}{L}\psi(x).$$

Сформульовані задачі є задачами Коші [ч. 2, с. 359] відносно шуканих функцій $v(x,\ t)$ і $i(x,\ t)$.

17. Абсолютно гнучка однорідна струна закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$ і перебуває під впливом сильної напруги τ_0 в прямолінійному положенні рівноваги. Довести, що рівняння малих плоских коливань струни має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho}F(x,\ t),\ x\in[0,\ l],\ t\in[0,\ +\infty),\ a^2=\frac{\tau_0}{\rho},$$

де $u=u(x,\ t)$ – відхилення точки струни з абсцисою x в мить часу t від положення рівноваги; ρ – лінійна питома вага струни; $F(x,\ t)$ – щільність розподілу діючих на струну зовнішніх сил.

18. Тонкий однорідний стрижень завдовжки l здійснює поздовжні коливання, під час яких його поперечні перерізи, залишаючись плоскими, рухаються вздовж осі Ox. Довести, що рівняння малих вільних коливань мають вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ a^2=\frac{E_0}{\rho},\ \ x\in[0,\ l],\ \ t\in[0,\ +\infty),$$

де $u=u(x,\ t)$ – зміщення перерізу з абсцисою x в момент часу t вздовж осі Ox; ρ – лінійна питома вага стрижня; E – модуль Юнга матеріалу стрижня.

19. Довести, що рівняння розповсюдження тепла в однорідному ізотопному тонкому стрижні $0\le x\le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею без внутрішніх джерел тепла має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ a^2=\frac{k}{\gamma\rho},\ \ x\in[0,\ l],\ \ t\in[0,\ +\infty),$$

де $u=u(x,\ t)$ – температура стрижня в точці з абсцисою x у мить t; γ, ρ – відповідно теплоємність та густина матеріалу стрижня; k – коефіцієнт теплопровідності.

20. Абсолютно гнучка однорідна плівка (мембрана) натягнена на каркас C. Це положення мембрани приймається за площину координат xOy.

Довести, що рівняння малих поперечних коливань мембрани має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \ a^2=\frac{\tau_0}{\delta},\ \ (x,\ y)\in\Omega,\ \ t\in[0,\ +\infty),$$

де $u=u(x,\ y,\ t)$ – відхилення точки мембрани з координатами x і y у мить часу t; Ω – область на площині xOy, обмежена контуром C; τ_0 – сила початкової напруги, розрахована на одиницю контуру C; δ – питома вага поверхні мембрани.

21. Використовуючи рівняння із завдання 17, поставити задачу про вимушені коливання закріпленої на кінцях $x=0$ і $x=l$ однорідної струни, якщо в мить $t=0$ струна мала форму $\varphi(x)$, $x\in[0,\ l]$ і швидкість у кожній точці задається функцією $\psi(x)$.

22. Використовуючи рівняння із завдання 17, поставити задачу про вільні коливання закріпленої на кінці $x=l$ однорідної струни, лівий кінець якої $x=0$ рухається так, що дотична на цьому кінці (при $x\to+0$) в будь-яку мить часу залишається горизонтальною. У мить $t=0$ струна має форму $\varphi(x)$, а швидкість кожної точки дорівнює нулеві.

23. Використовуючи рівняння із завдання 19, поставити задачу про визначення температури однорідного ізотропного стрижня $0\le x\le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура дорівнює $\varphi(x)$, а теплові потоки (кількість теплоти, що надходить за одиницю часу) на його кінцях $x=0$ і $x=l$ становлять відповідно $g_1(t)$ і $g_2(t)$.

24. Нехтуючи омічним опором ($R=0$) і витоком ($G=0$), дати математичну постановку задачі про визначення сили струму $i(x,\ t)$ і напруги $u(x,\ t)$ (електричних коливань) при $t>0$ в провіднику $(x\in[0,\ l])$, якщо $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ – відповідно початкова сила струму і початкова напруга (при $t=0$). До кінця $x=0$, починаючи з миті $t=0$, прикладена електрорушійна сила $E(t)$, а кінець $x=l$ заземлений.

4.3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ. ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ*

Приклади. **1.** Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. Тут [див. ч. 2, с. 377, формула (4.1)] $a_{11}(x,\ y)=x^2$, $a_{12}(x,\ y)=xy$, $a_{22}(x,\ y)=y^2$, $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2-x^2y^2\equiv 0$, $-\infty<x,\ y<+\infty$. Отже, задане рівняння параболічного типу. Запишемо рівняння характеристик

$$x^2dy^2-2xy\,dx\,dy+y^2dx^2=0,$$

або

$$(xdy-ydx)^2=0.$$

Звідси отримуємо диференціальне рівняння $xdy-ydx=0$. Відокремлюючи змінні й інтегруючи їх, дістаємо

$$\frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0,$$

тобто

$$\ln|y|-\ln|x|=\ln C.$$

Потенціюючи, знайдемо інтеграл $\frac{y}{x}=C$. Звідси $\xi=\frac{y}{x}$. Функція $\psi=y$ лінійно не залежить від ξ, отже, можемо вважати $\eta=y$.

Виразимо частинні похідні за старими змінними через частинні похідні за новими змінними ξ і η:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=\frac{2y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)=$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{1}{x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

---
* Див. ч. 2. с. 377–380.

Підставивши знайдені для других похідних вирази у вихідне рівняння, маємо

$$\frac{2y}{x}\ \frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{y^2}{x^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y}{x}\ \frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{2y^2}{x^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{2y^2}{x}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+$$

$$+\frac{y^2}{x^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2y^2}{x}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0,$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

Рівняння зведене до канонічного вигляду параболічного типу.

2. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Розв'язання. Тут [див. ч. 2, с. 377, формула (4.1)] $a_{11}(x,\ y)=1$, $a_{12}(x,\ y)=2$, $a_{22}(x,\ y)=-3$, $\Delta a_{12}^2=-a_{11}a_{22}=4-3=1>0$ для будь-яких дійсних x і y. Отже, задане рівняння – гіперболічного типу. Рівняння характеристик має вигляд

$$dy^2+4dydx+3dx^2=0,$$

або

$$(y')^2+4y'+3=0.$$

Звідси

$$y'=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=-2\pm 1 .$$

Отже, маємо дві сім'ї характеристик:

$$\varphi(x,\ y)\equiv y+x=C_1 \text{ і } \psi(x,\ y)\equiv y+3x=C_2 .$$

Зробивши заміну змінних $\xi=y+x$, $\eta=y+3x$, здобудемо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\ \frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\ \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\ \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\ \frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підставивши знайдені для других похідних вирази у вихідне рівняння, одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-12\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+$$

$$+3\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-2\frac{\partial u}{\partial \xi}-6\frac{\partial u}{\partial \eta}+6\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

або

$$-4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}+4\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

тобто

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

Рівняння зведене до канонічного вигляду гіперболічного типу.

3. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{1}{x^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x\neq 0,\ \ y\neq 0.$$

Розв'язання. Тут $a_{11}(x,\ y)=\dfrac{1}{x^2}$, $a_{12}(x,\ y)=0$, $a_{22}(x,\ y)=\dfrac{1}{y^2}$, $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{12}=-\dfrac{1}{x^2y^2}<0$, тобто, якщо $x\neq 0$ і $y\neq 0$, то рівняння є еліптичним. Складемо рівняння характеристик

$$\frac{1}{x^2}dy^2+\frac{1}{y^2}\ dx^2=0,$$

або

$$\left(\frac{dy}{x}+j\frac{dx}{y}\right)\left(\frac{dy}{x}-j\frac{dx}{y}\right)=0.$$

Маємо два диференціальних рівняння

$$\frac{dy}{x}+j\frac{dx}{y}=0 \text{ і } \frac{dy}{x}-j\frac{dx}{y}=0.$$

Відокремлюючи змінні й інтегруючи їх, отримуємо $ydy + jxdx = 0$, тобто $y^2 + jx^2 = C_1$, а також $ydy - jxdx = 0$, тобто $y^2 - jx^2 = C_2$, або $\varphi(x,\ y) \neq j\psi(x,\ y) \equiv y^2 - jx^2 = C_{1,2}$. Зробивши підстановку $\xi = y^2$, $\eta = jx^2$, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta}2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}2y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}2x\right) = 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}2y\right) = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

Після підстановки знайдених для других похідних виразів у вихідне рівняння одержимо

$$\frac{1}{x^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) + \frac{1}{y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial \xi} + 4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\right) = 0,$$

або

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi}\ \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) = 0.$$

Рівняння зведене до канонічного вигляду еліптичного типу.

4. Звести до канонічного вигляду і спростити рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial v}{\partial t} + cv.$$

Розв'язання. Перепишемо вказане рівняння так:

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + b\frac{\partial v}{\partial t} + cv = 0, \quad -\infty < x < +\infty,\ t > 0.$$

Тут $a_{11}(x,\ t) = a^2$, $a_{12}(x,\ t) = -1$, $a_{22}(x,\ t) = 0$, $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = a^2 > 0$. Отже, рівняння гіперболічного типу. Складемо рівняння характеристик $a^2dt^2 - dx^2 = 0$, або $(adt - dx)(ady + dx) = 0$. Звідси дістаємо диференціальні рівняння $dx + adt = 0$ і $-adt + dx = 0$. Інтегруючи їх, запишемо $x + at = C_1$, $x - at = C_2$.

Замінюючи $\xi = x + at$, $\eta = x - at$, маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right); \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial v^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right).$$

Після підстановки знайдених виразів у вихідне рівняння одержимо

$$4a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + ba\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) + cv = 0. \tag{3.1}$$

Для подальшого спрощення вважатимемо

$$v = \omega(\xi,\ \eta)e^{-\lambda\xi - \mu\eta}, \tag{3.2}$$

де λ і μ – поки що довільні сталі. Виберемо їх так, щоб рівняння (3.1) після підстановки (3.2) мало найпростіший вигляд. З цією метою знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \left(-\lambda\omega + \frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)e^{-\lambda\xi - \mu\eta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = \left(-\mu\omega + \frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)e^{-\lambda\xi - \mu\eta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \left(\lambda\mu\omega - \lambda\frac{\partial \omega}{\partial \eta} - \mu\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}\right)e^{-\lambda\xi - \mu\eta}$$

і підставимо їх у рівняння (3.1). Після перетворення дістаємо

$$4a^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + \left(-\lambda 4a^2 + ba\right)\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \left(-\lambda 4a^2\lambda ba\right)\frac{\partial \omega}{\partial \eta} +$$

$$+\left(c + 4a\lambda\mu + ba(\mu - \lambda)\right)\omega = 0. \tag{3.3}$$

Припустимо, що $\mu = \dfrac{b}{4a}$, $\lambda = -\dfrac{b}{4a}$, тоді коефіцієнти при перших похідних в рівнянні (3.3) перетворяться в нуль, і саме рівняння набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + r\omega = 0, \quad r = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{b^2}{4} + c\right).$$

Відзначимо, що провідник являє собою лінію без спотворень: $GL = CR$ і, отже, $r = 0$. У такому разі $\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Визначити тип рівнянь і звести їх до канонічного вигляду.

25. $y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

26. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin^2 x - 2y\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

27. $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

28. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+s_1u+s_2x+s_3y=0$, де s_1, s_2, s_3 – відомі сталі.

29. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

30. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\sqrt{xy}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}-\sqrt{y}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

31. $\left(1+x^2\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2x\left(1+x^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}=0$.

32. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(1+y^2\right)^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\left(1+y^2\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

33. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

34. $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+(x-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

35. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.

4.4. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ *

4.4.1. Метод характеристик (Д'Аламбера)

Приклади. **1.** Знайти розв'язок $u(x,\ t)$ задачі Коші $(-\infty<x<+\infty,\ \ 0<t<\infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(x,\ 0)=\sin x,\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0.$$

Розв'язання. Використавши формулу Д'Аламбера [(5.13), ч. 2, с.383], де $\varphi(x)=\sin x$, $\psi(x)=0$, здобудемо

$$u(x,\ t)=\left[\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{1}{2}t\right)+\sin\left(x+\frac{1}{2}t\right)\right]=\sin x\cos\frac{t}{2}.$$

* Див. ч. 2, гл. 4, § 5, 6.

2. Знайти розподіл напруги в момент часу $t\ (0<t<\infty)$ в необмеженому $(-\infty<x<+\infty)$ проводі лінії без спотворень (тобто якщо виконується умова $GL=CR$, де G, L, C, R – відповідно витік, самоіндукція, ємність і опір одиниці довжини проводу), якщо напруга і сила струму в початкову мить часу $(t=0)$ дорівнюють відповідно $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

Розв'язання. Ця фізична задача формулюється у вигляді задачі Коші:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial v}{\partial t}+cv,\ t\in[0,\ \ +\infty], \tag{4.1}$$

$$v(x,\ \ 0)=\varphi(x),\ v'_t(x,\ \ 0)=-\frac{1}{C}\psi'(x)-\frac{G}{C}\varphi(x), \tag{4.2}$$

де $x\in(-\infty,\ \ +\infty)$. Рівняння (4.1) є рівнянням гіперболічного типу, і, якщо виконується умова $GL=CR$, зводиться заміною $\xi=x-at$, $\eta=x+at$ до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\xi\partial\eta}=0,\ \ \omega=v\,e^{\frac{1}{4a}(\xi-\eta)}.$$

Отже, згідно з формулою (5.13) [ч. 2, с. 383] можна записати, що

$$v(x,\ \ t)=e^{\frac{b}{2}t}\left(\Phi_1(x+at)+\Phi_2(x-at)\right). \tag{4.3}$$

Підставляючи рівняння (4.3) в початкові умови (4.2), одержуємо систему для визначення Φ_1 і Φ_2

$$\begin{cases}\Phi_1(x)+\Phi_2(x)=\varphi(x),\\ \dfrac{b}{2}\left(\Phi_1(x)+\Phi_2(x)\right)+a\left(\Phi_1'(x)+\Phi_2'(x)\right)=-\dfrac{1}{C}\,\psi(x)-\dfrac{G}{C}\,\varphi(x).\end{cases}$$

Враховуючи, що $\dfrac{b}{2}=-\dfrac{G}{C}$, $\dfrac{1}{Ca}=\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, її можна переписати у вигляді

$$\begin{cases}\Phi_1(x)+\Phi_2(x)=\varphi(x),\\ \Phi_1'(x)-\Phi_2'(x)=-\sqrt{\dfrac{L}{C}}\psi'(x),\end{cases}$$

або

$$\begin{cases}\Phi_1(x)+\Phi_2(x)=\varphi(x),\\ \Phi_1(x)-\Phi_2(x)=-\sqrt{\dfrac{L}{C}}\psi(x).\end{cases}$$

Звідси

$$\Phi_1(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)-\sqrt{\frac{L}{C}}\psi(x)\right);\ \Phi_2(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\sqrt{\frac{L}{C}}\psi(x)\right).$$

Згідно з рівнянням (4.3) шуканий розподіл напруги

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)+\sqrt{\frac{L}{C}}\big(\psi(x+at)-\psi(x-at)\big)\right]. \quad (4.4)$$

3. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0\le x\le\infty,\ 0<t<+\infty,$$

що задовольняє умови $u(x,\ 0)=x$, $u_t'(x,\ 0)=\cos^2 x$, $u'(0,\ t)=0$.

Розв'язання. Продовжимо функції $\varphi(x)=x$ і $\psi(x)=\cos^2 x$ на від'ємну піввісь парно:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}x & \text{при}\quad x\ge 0,\\ -x & \text{при}\quad x<0,\end{cases}\qquad \psi_1(x)=\begin{cases}\cos^2 x & \text{при}\quad x\ge 0,\\ \cos^2 x & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$$

Тоді за формулою Д'Аламбера розв'язок запишеться у вигляді

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi_1(z)dz. \quad (4.5)$$

Нехай $x\ge\frac{t}{a}$, тоді співвідношення (4.5) набуває вигляду

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[(x+at)+(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos^2\tau d\tau=$$

$$=x+\frac{1}{4a}(\tau+\sin 2\tau)\Big|_{x-at}^{x+at}=x+\frac{1}{4a}\big(x+at-x+at+\sin 2(x+at)-$$

$$-\sin 2(x-at)\big)=x+\frac{1}{2}at+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2at.$$

Якщо $t>\frac{x}{a}>0$, то

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[(x+at)-(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{x+at}\cos^2\tau d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^{at-x}\cos^2\tau d\tau\right]=x+\frac{1}{2}at+\frac{1}{2}\sin 2x\cos 2at.$$

4. Знайти розподіл напруги в мить часу $t(0<t<\infty)$ в напівобмеженому $(0\le x<+\infty)$ проводі лінії без спотворень $(GL=CR)$, якщо напруга і сила струму в початкову мить часу $(t=0)$ дорівнюють відповідно $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а кінець $x=0$ заземлений.

Розв'язання. Для математичного формулювання цієї задачі до диференціального рівняння (4.1), визначеного при $x\in(0,\ +\infty)$, $t\in(0,\ +\infty)$, і початкових умовах (4.2), правильних при $x\in(0,\ +\infty)$, необхідно приєднати крайову умову

$$v(0,\ t)=0,\ t\in(0,\ +\infty), \quad (4.6)$$

що відповідає умові заземлення на кінці $x=0$.

Продовжимо початкові умови (4.2) на від'ємну піввісь непарно:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi\ (x) & \text{при}\quad x\ge 0,\\ -\varphi\ (x) & \text{при}\quad x<0,\end{cases}\qquad \psi_1(x)=\begin{cases}\psi\ (x) & \text{при}\quad x\ge 0,\\ \psi\ (-x) & \text{при}\quad x<0.\end{cases}$$

Тоді розв'язок сформульованої задачі, згідно з формулою (4.4), запишеться у вигляді

$$v(x,\ t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi_1(x+at)+\varphi_1(x-at)+\sqrt{\frac{L}{C}}\big(\psi_1(x+at)-\psi_1(x-at)\big)\right]=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)+\sqrt{\frac{L}{C}}\big(\psi(x+at)-\psi(x-at)\big)\right], & \text{якщо}\quad x\ge\frac{t}{a},\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi(x+at)-\varphi(-x-at)+\sqrt{\frac{L}{C}}\big(\psi(x+at)-\psi(at-x)\big)\right], & \text{якщо}\quad t>\frac{x}{a}>0.\end{cases}$$

Неважко помітити, що отриманий розв'язок задовольняє як рівняння (4.1) і початкові умови (4.2) (при $x\in[0,\ +\infty)$, $t\in[0,\ +\infty)$), так і крайову умову (4.6).

36. Знайти розв'язок $u(x,\ t)$ задачі Коші $(-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,\ 0)=\cos x,\ \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0.$$

37. Розв'язати задачу Коші $(-\infty<x<\infty,\ 0<t<\infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(x,\ 0)=e^{-x},\ u_t'(x,\ 0)=4.$$

38. Розв'язати задачу Коші $(-\infty<x<+\infty,\ 0<t<\infty)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,\ 0)=b\sin x$, $u_t'(x,\ 0)=c\cos x$, де b і c – довільні сталі.

39. Знайти розподіл сили струму в мить часу $t(0<t<\infty)$ у проводі необмеженої довжини лінії без спотворень $(GL=CR)$, якщо напруга і сила струму в початкову мить часу $(t=0)$ дорівнюють відповідно $\varphi(x)$ і $\psi(x)$.

40. В області $0\le x<\infty,\ 0<t<\infty$ знайти розв'язок рівняння (4.1) при $b=0$, $c=0$, що задовольняє умови: $u(x,\ 0)=0$, $u'_t(x,\ 0)=\sin x$, $u'_x(0,\ t)=0$.

41. Знайти при $0\le x<\infty,\ 0<t<\infty$ розв'язок рівняння (4.1), що задовольняє умови $u(x,\ 0)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $u'_t(x,\ 0)=0$, $u(0,\ t)=0$.

42. Знайти розподіл сили струму в мить часу $t(0<t<\infty)$ у проводі з напівобмеженою довжиною $(0\le x<\infty)$ лінії без спотворень $(GL=CR)$, якщо напруга і сила струму в початкову мить часу $(t=0)$ дорівнюють відповідно $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, а на кінці $x=0$ виконується умова $I'_x(0,\ t)=0$.

43. Напівобмежена струна $(u(0,\ t)=0)$ в початкову мить часу має форму $u(x,\ 0)=0$ і початкову швидкість $u'_t(x,\ 0)=\begin{cases} c & \text{при } x\in[0,\ l],\\ 0 & \text{при } x\in[l,\ +\infty]. \end{cases}$

Знайти форму струни в момент часу $t\in(0,\ +\infty)$.

4.4.2. Метод Фур'є (метод розподілу змінних)

Приклади. **1.** Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad x\in[0,\ l],\ t\in[0,\ \infty),$$

що задовольняє початкові й граничні умови

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=\psi(t),\quad u(0,\ t)=u(l,\ t)=0.$$

Розв'язання. Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить тільки від x, а друга – тільки від t:

$$u(x,\ t)=X(t)\ T(t). \tag{4.7}$$

Підставимо цей вираз у вихідне рівняння й дістанемо

$$X(x)\ T''(t)=a^2T''(x)\ T(t).$$

Звідси, роз'єднавши змінні, запишемо

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{4.8}$$

Рівність двох відношень (4.8) залежить тільки від x і тільки від t і можлива лише у випадку, якщо обидва відношення дорівнюють сталому числу $-\lambda$ (де $\lambda>0$):

$$\frac{T''(t)}{a^2T\ \ (t)}=\frac{X''(x)}{X\ \ (x)}=-\lambda\ ,$$

або

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0, \tag{4.9}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0. \tag{4.10}$$

Підставимо формулу (4.7) в крайові умови вихідної задачі й, ураховуючи, що $T(t)\not\equiv 0$, здобудемо додаткові умови для функції $X(x)$:

$$X(0)=0,\quad X(l)=0. \tag{4.11}$$

Загальний розв'язок рівняння (4.10) набуває вигляду

$$X(x)=c_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot l+c_2\cos\sqrt{\lambda}\cdot x\ .$$

З умови $X(0)=0$ випливає, що $c_2=0$. Виконавши другу з умов (4.11), знайдемо

$$c_1\sin\sqrt{\lambda}\cdot l=0\ . \tag{4.12}$$

Оскільки розшукується ненульовий розв'язок, то $c_1\ne 0$, і рівність (4.12) можлива лише в разі $\sqrt{\lambda}\cdot l=n\pi$. Звідси $\sqrt{\lambda}=\dfrac{n\pi}{t}$, $\left(n=\overline{1,\ \infty}\right)$, $X(x)=c_1\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

Знайдені значення λ є властивими числами для цієї крайової задачі, а функції $X_n\left(\dfrac{x}{n}\right)=c_1\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ – властивими їй функціями.

Підставимо знайдені значення λ в рівняння (4.9) і запишемо його загальний розв'язок

$$T_n(t)=A\cos\frac{an\pi}{l}t+B\sin\frac{an\pi}{l}t.$$

Отже, для знайдених значень λ

$$u_n(x,\ t)=X_n(x)\,T_n(t)=\sin\frac{n\pi}{l}x\left(a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right).$$

Кожному значенню n відповідають свої сталі A і B, тому пишемо a_n, b_n, а сталу c_1 включаємо в a_n і b_n. Оскільки вихідне рівняння лінійне й однорідне, то сума розв'язків також є розв'язком, який можна зобразити у вигляді ряду

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{an\pi}{l}t+b_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Для визначення невідомих сталих a_n і b_n використаємо початкові умови. В результаті запишемо

$$u(x,\ 0)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x);\quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\varphi(x).$$

Звідси, з урахуванням ортогональності властивих функцій, одержуємо

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx;\quad b_n=\frac{2}{a_n\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$$

Відповідь: $u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{a_n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{a_n\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x;\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx;$

$b_n=\frac{2}{a_n\pi}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}xdx.$

Якщо взяти замість $-\lambda$ вираз $\lambda=k^2$, то рівняння (4.10) матиме загальний розв'язок у вигляді $X(x)=Ae^{kx}+Be^{-kx}$, що в разі $X(x)\not\equiv 0$ не задовольнятиме умову (4.11).

У прикладі 1 змінні вдалося роз'єднати безпосередньо завдяки однорідності рівняння й однорідності крайових умов. Якщо умови однорідності порушено, то змінні можна роз'єднати тільки після деяких попередніх перетворень. Проілюструємо ці перетворення на такому прикладі.

2. Розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g,\quad x\in[0,\ l],\quad t>0 \tag{4.13}$$

за додаткових умов

$$u(0,\ t)=0,\quad \frac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=0,\quad t>0,\quad u(x,\ 0)=0,$$
$$\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=v_0,\quad x\in[0,\ l], \tag{4.14}$$

де g, v_0, a – відомі сталі.

Розв'язання. Невідому функцію $u(x,\ t)$ шукаємо у вигляді

$$u(x,\ t)=v(x,\ t)+\omega(x). \tag{4.15}$$

Підставимо вираз (4.15) в задачу (4.13), (4.14) і поставимо вимогу, щоб функція ω була розв'язком задачі

$$a^2\frac{d^2\omega}{dx^2}+g=0,\quad x\in[0,\ l],\quad \omega(0)=0,\quad \omega'(l)=0. \tag{4.16}$$

Тоді функція $v(x,\ t)$ має бути розв'язком задачі

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\quad x\in[0,\ l],\quad t>0,\quad v(0,\ t)=0,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}(l,\ t)=0,\quad t>0,\quad v(x,\ 0)=-\omega(x),\quad \frac{\partial v}{\partial t}(x,\ 0)=v_0. \tag{4.17}$$

Розв'язок задачі (4.16) можна знайти повторним інтегруванням:

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}=-\frac{g}{a^2};\quad \frac{d\omega}{dx}=-\frac{g}{a^2}x+c_1;\quad \omega(x)=\frac{h}{2a^2}(2l-x).$$

До задачі (4.17) застосуємо метод Фур'є. Вважаючи $v(x,\ t)=T(t)X(x)$, отримуємо

$$T''(t)+(\lambda a)^2T(t)=0,\quad t>0,\quad X''(x)+\lambda^2X(x)=0,$$
$$X(0)=0,\quad X'(l)=0. \tag{4.18}$$

Неважко помітити, що $\lambda_n=\frac{2n+1}{2l}\pi$ і $X_n(x)=\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ – відповідно властиві числа і функції задачі (4.18). При цьому

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t,$$

тоді розв'язок задачі (4.17) має вигляд

$$v(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}+B_n\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x.$$

Реалізуючи початкові умови (4.17), знаходимо

$$A_n=-\frac{2g}{la^2}\int_0^l\left(l-\frac{x}{3}\right)x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi xdx=-\frac{16l^2g}{a^2\pi^3(2n+1)^3},$$

$$B_n=\frac{4v_0}{a\pi(2n+1)}\int_0^l\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}dx=-\frac{8l^2v_0}{a\pi^2(2n+1)^2}.$$

Остаточним розв'язком задачі (4.13), (4.14) є функція

$$u(x,\ t)=\frac{g}{a^2}\left(l-\frac{x}{2}\right)x-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{16l^2g}{a^2\pi^3(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}-\right.$$

$$\left.-\frac{8lv_0}{a\pi^2(2n+1)^2}\sin\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

3. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в полярних координатах [ч. 2, с. 388]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (4.19)$$

в середині кругового сектора $a\le r\le b$, $0\le\varphi\le\alpha$, що задовольняє такі крайові умови:

$$u(r,\ 0)=0,\ u(r,\ \alpha)=0,\ u(a,\ \varphi)=f(\varphi),\ u(b,\ \varphi)=F(\varphi). \qquad (4.20)$$

Розв'язання. Для розв'язання поставленої задачі згідно з методом Фур'є спочатку знайдемо всі розв'язки рівняння (4.19), що задовольняють перші дві (однорідні) крайові умови з (4.20) і можуть бути подані як $u(r,\ \varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$. При цьому вихідне рівняння набуває вигляду

$$\Phi(\varphi)\left[R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)\right]=-\frac{1}{r^2}R(r)\Phi''(\varphi).$$

Поділивши це рівняння на $-\frac{1}{r^2}R(r)\Phi(r)$ і прирівнявши отримане співвідношення до параметра $-\lambda^2$, прийдемо до двох звичайних диференціальних рівнянь

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)-\frac{\lambda^2}{r^2}R(r)=0,\ a<r<b, \qquad (4.21)$$

$$\Phi(\varphi)+\lambda^2\Phi(\varphi)=0,\ \ 0<\varphi<\alpha. \qquad (4.22)$$

Крім того, роз'єднуючи змінні в однорідних крайових умовах, помітимо, що

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(\alpha)=0. \qquad (4.23)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.22) має вигляд

$$\Phi(\varphi)=c_1\sin\lambda\varphi+c_2\cos\lambda\varphi .$$

З умови $\Phi(0)=0$ виходить, що $c_2=0$. Виконавши другу з умов (4.23), знайдемо $c_1\sin\lambda\alpha=0$. Оскільки шукаємо $\Phi(\varphi)\ \not\equiv 0$, то $c_1\ne 0$. Отже, рівність можлива тільки тоді, якщо $\lambda\alpha=n\pi$, і властивими числами є $\lambda_n=\frac{n\pi}{\alpha}$, $n=1,\ 2,\dots,k$, а відповідними їм властивими функціями $\Phi_n(\varphi)=\sin\frac{\pi n}{\alpha}\varphi$. Підставимо знайдені значення λ_n в рівняння (4.21), що зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною $r=e^{\alpha}$ і має загальний розв'язок

$$R_n(r)=A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

За допомогою побудованих функцій загальний розв'язок задачі (4.19), (4.20) запишемо у вигляді

$$u(r,\ \varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\Phi_n(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n r^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi . \qquad (4.24)$$

Тут A_n, B_n – два набори невідомих сталих, що визначаються шляхом реалізації неоднорідних крайових умов (4.20). Дійсно, переходячи у співвідношенні (4.24) до межі під знаком суми при $r\to a$ і $r\to b$, враховуючи при цьому умови (4.20), здобудемо систему рівнянь відносно коефіцієнтів A_n і B_n :

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi=f(\varphi),\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n b^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n b^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi=f(\varphi).\end{cases} \qquad (4.25)$$

Використовуючи ортогональність властивих функцій, тобто рівності

$$\int_0^{\alpha}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=\begin{cases}0 & \text{при}\quad m\ne n,\\ \dfrac{\alpha}{2} & \text{при}\quad m=n,\end{cases}$$

визначимо сталі A_m і B_m . Для цього спочатку домножимо перше рівняння системи (4.25) на $\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi$, а потім, припускаючи рівномірну збіжність ряду, зінтегруємо за φ від 0 до α :

$$\int_0^{\alpha}\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}}+B_n a^{-\frac{n\pi}{\alpha}}\right)\int_0^{\alpha}\sin\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\,d\varphi=\frac{\alpha}{2}\left(A_m a^{\frac{m\pi}{\alpha}}+B_m a^{-\frac{m\pi}{\alpha}}\right).$$

Після аналогічних перетворень другого рівняння система (4.25) набуває вигляду

$$\begin{cases} A_m a^{\frac{m\pi}{\alpha}} + B_m a^{-\frac{m\pi}{\alpha}} = f_m, \\ A_m b^{\frac{m\pi}{\alpha}} + B_m b^{-\frac{m\pi}{\alpha}} = F_m, \end{cases}$$

де $\quad f_m = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha f(\varphi)\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi, \quad F_m = \frac{2}{\alpha}\int_0^\alpha F(\varphi)\sin\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\, d\varphi.$

Звідси

$$\begin{aligned} A_m &= \left(f_m b^{-\frac{m\pi}{\alpha}} - F_m a^{-\frac{m\pi}{\alpha}}\right)\left(c^{\frac{m\pi}{\alpha}} - c^{-\frac{m\pi}{\alpha}}\right)^{-1}, \\ B_m &= \left(F_m a^{\frac{m\pi}{\alpha}} - f_m b^{\frac{m\pi}{\alpha}}\right)\left(c^{\frac{m\pi}{\alpha}} - c^{-\frac{m\pi}{\alpha}}\right)^{-1}, \quad c = ab^{-1}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Остаточно розв'язок задачі (4.19), (4.20) визначається за формулами (4.24) і (4.26).

44. Струна, що закріплена на кінцях $x=0$ і $x=l$, має в початкову мить форму параболи $u(x,\ 0)=\left(\frac{4h}{l^2}\right)x(l-x)$. Визначити зміщення точок струни від осі абсцис, якщо початкові швидкості дорівнюють нулеві.

45. Струна закріплена в точках $x=0$ і $x=l$. Початкові відхилення точок дорівнюють нулеві, а початкові швидкості виражаються формулою

$$\frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t} = \begin{cases} \dfrac{\pi\left(x-\frac{l}{2}\right)}{h} & \text{при } \left|x-\frac{l}{2}\right| < \frac{h}{2}, \\ 0 & \text{при } \left|x-\frac{l}{2}\right| > \frac{h}{2}. \end{cases}$$

Знайти форму струни для будь-якого часу t.

46. Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y < b,$$

що задовольняє такі граничні умови:

$$u(0,\ y)=0,\ u(a,\ y)=0,\ u(x,\ 0)=f(x),\ u(x,\ b)=\varphi(x).$$

47. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля $u(x,\ y)$ усередині прямокутника $0<x<u$, $0<y<b$, якщо вздовж сторони $x=0$ $(0<y<b)$ потенціал дорівнює u_0, а три інші сторони заземлені. Електричних зарядів усередині прямокутника немає. Потенціал електростатичного поля задовольняє при $0<x<a$, $0<y<b$ рівняння Лапласа і граничні умови $u(0,\ y)=u_0$, $u(a,\ y)=0$ $(0<y<b)$, $u(x,\ 0)=u(x,\ b)=0$ $(0<x<b)$.

48. Знайти розподіл потенціалу всередині напівнескінченної горизонтальної коробки $(0<y<b,\ \ 0<x<\infty)$, вертикальна стінка якої має потенціал v $(u(0,\ y)=v,\ \ 0<y<b)$, а горизонтальні потенціали дорівнюють нулеві $(u(x,\ 0)=u(x,\ b)=0,\ \ 0<x<\infty)$.

49. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0 \le x \le \pi,\ \ 0<t<\infty,$$

що задовольняє умови $u(x,\ 0)=f(x)$, $0\le x\le\pi$, $u(0,\ t)=u(\pi,\ t)=0$, $0<t<\infty$, де $f(x)$ – відома функція.

50. Розв'язати задачу про розподіл температури $u(x,\ t)$ в однорідному стрижні $(0\le x\le l,\ t>0)$, один кінець якого теплоізольований, а на іншому підтримується температура T, за наявності внутрішніх витоків теплоти інтенсивністю f. Початкова температура дорівнює $\varphi(x)$. Шукана температура є розв'язком мішаної задачі $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\ (0\le x\le l,\ t\ge 0)$, $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, $u'_x(0,\ t)=0$, $u(l,\ t)=T$. Розв'язок задачі потрібно шукати у вигляді $u(x,\ t)=v(x,\ t)+\omega(x)$ (див. приклад 2).

51. Знайти розподіл напруги $v(x,\ t)$ в однорідному електричному проводі $(0\le x\le l,\ \ t>0)$ без витрат $(R=G=0)$, якщо до кінця $x=0$ проводу прикладена з миті $t=0$ електрорушійна сила $E\sin\omega t$ $(v(0,\ t)=E\sin\omega t,\ \ 0\le t<\infty)$, а кінець $x=l$ заземлений. Для математичної постановки задачі слід скористатися результатами завдання 24 (початкова напруга і сила струму дорівнюють нулеві). Розв'язок слід шукати у вигляді $v(x, t) = u(x, t) + \omega(x, t)$, де $u(x, t)$ і $\omega(x, t)$ задовольняють хвильове рівняння. Причому значення $\omega(x, t)$ вибирається так, щоб воно задовольняло граничні умови $\omega(0, t) = E\sin\omega t$, $\omega(l, t) = 0$. Цього можна досягти, вважаючи $\omega(x, t) = z(x)\sin\omega t$, де функція $z(x)$ є розв'язком задачі

$$z''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} z(x) = 0,\ z(0) = E,\ z(l) = 0.$$

У результаті функція $u(x, t)$ шукається як розв'язок мішаної граничної задачі для хвильового рівняння з однорідними крайовими умовами (див. приклад 2).

52. Знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

в круговому секторі $0 < r < R$, $0 < \varphi < \alpha$, що задовольняє граничні умови $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0$, $u(R, \varphi) = A\varphi$, де A – відома стала.

53. Розв'язати рівняння вільних коливань струни за наявності опору середовища

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty,$$

якщо початкові й крайові умови такі: $u(x, 0) = f(x)$, $u'_t(x, 0) = F(x)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$. Вважати, що коефіцієнт опору $m < a$.

4.4.3. Метод інтегральних перетворень

Приклади. **1.** Розв'язати задачу про вільні коливання нескінченної струни:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad -\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty; \tag{4.27}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x\to\infty} = 0,\quad k = 0,1,\ 0 < t < \infty; \tag{4.28}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \tag{4.29}$$

Розв'язання. Поставлену задачу розв'яжемо, застосувавши перетворення Фур'є [(5.22), (5.23), ч. 2, с. 316, 317]. Область його дії збігається з областю зміни змінної x. Крім того, розглядуване перетворення переводить операцію диференціювання в операцію множення трансформанти* на відповідний степінь параметра перетворення. І нарешті, застосування перетворення Фур'є дає можливість задовольнити умови (4.28).

Помножимо вираз (4.27) на ядро перетворення $K(\alpha, x) = e^{j\alpha x}$ і зінтегруємо за x на інтервалі $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{j\alpha x}\,dx = a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{j\alpha x}\,dx,\quad 0 < t < \infty. \tag{4.30}$$

Виносячи в лівій частині (4.30) похідну за t за знак інтеграла, позначаючи

$$\overline{u}(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{j\alpha x}\,dx$$

і використовуючи в правій частині (4.30) формулу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x) e^{-j\alpha x}\,dx = (-j\alpha)^m F(\alpha);\ \ f^{(m)}(x)_{x\to\pm\infty} = 0,$$

здобуваємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2}{dt^2}\overline{u}(\alpha, t) = a^2(-j\alpha)^2\,\overline{u}(\alpha, t).$$

Перетворюючи аналогічно початкові умови (4.29) і вводячи позначення

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{j\alpha x}\,d\tau,\quad \Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{j\alpha x}\,d\tau, \tag{4.31}$$

приходимо до такої крайової задачі для трансформації $\overline{u}(\alpha, t)$:

$$\frac{d^2\overline{u}(\alpha, t)}{dt^2} + (a\alpha)^2\,\overline{u}(\alpha, t) = 0,\ 0 < t < \infty, \tag{4.32}$$

$$\overline{u}(\alpha, 0) = \Phi(\alpha),\ \overline{u}'_t(\alpha, 0) = \psi(\alpha). \tag{4.33}$$

* Трансформантами будемо називати функції виду (5. 22) – (5 29) [ч. 2, с. 316, 317].

Визначаючи в загальному розв'язку рівняння (4.32) $u(\alpha,\ t)=c_0(\alpha)\cos a\alpha t+$ $+c_1(\alpha)\sin a\alpha t$ довільні коефіцієнти $c_k(\alpha)$, $k=0{,}1$ за допомогою початкових умов (4.33) і застосовуючи формулу зворотного перетворення Фур'є, дістаємо

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(\alpha)\cos a\alpha t+\frac{1}{a\alpha}\Psi(\alpha)\sin a\alpha t\right]e^{-j\alpha x}d\alpha. \qquad (4.34)$$

Функція $u(x,\ t)$ є розв'язком крайової задачі (4.27) – (4.29). Цей розв'язок можна виразити безпосередньо через задані в умові (4.29) функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Для цього підставимо позначення (4.31) в рівняння (4.34) і змінимо порядок інтегрування:

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_1(x,\ t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}R_2(x,\ t,\ \tau)\psi(\tau)d\tau, \qquad (4.35)$$

де

$$R_1(x,\ t,\ \tau)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\alpha(x-\tau)}\cos a\alpha t d\alpha.$$

Скориставшись далі формулою Ейлера

$$e^{j\alpha(x-\tau)}=\cos\alpha(x-\tau)+j\sin\alpha(x-\tau)$$

та інтегралами

$$\int_0^{\infty}\cos s\tau d\tau=\pi\delta(s),\quad \int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\sin s\tau d\tau=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}s,$$

знаходимо

$$\begin{aligned}R_1(x,\ t,\ \tau)\ &=\pi\left[\delta(x+at-\tau)+\delta(x-at-\tau)\right],\\ R_2(x,\ t,\ \tau)\ &=\frac{\pi}{2}\left[\operatorname{sgn}(x+at-\tau)-\operatorname{sgn}(x-at-\tau)\right].\end{aligned} \qquad (4.36)$$

Враховуючи властивість (5.11) [ч. 2, с. 314], підставимо формули (4.36) в рівняння (4.35) і після деяких перетворень одержимо

$$u(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau,$$

що збігається з відомим розв'язком Д'Аламбера, отриманим іншим методом (див. підрозд. 4.4.1).

2. Розв'язати задачу теплопровідності для напівнескінченного стрижня:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0<x<\infty,\quad 0<t<\infty; \qquad (4.37)$$

$$u(0,\ t)=\psi(t),\quad \left.\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right|_{x\to 0}=0,\quad k=0{,}1,\quad 0<t<\infty; \qquad (4.38)$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\quad 0<x<\infty. \qquad (4.39)$$

Розв'язання. У цій задачі для виключення x скористаємося синус-перетворенням Фур'є, визначеним на напівнескінченному інтервалі [(5.27), (5.29), ч. 2, с. 317]. Це обумовлено формулою перетворення другої похідної, яка містить крім трасформанти тільки граничні значення перетворюваних функцій (на відміну від інших перетворень):

$$\int_0^{\infty}f''(x)\sin\alpha x dx=-\alpha^2F(\alpha)-\alpha f(0);\quad \left.f^{(k)}(x)\right|_{x\to+\infty}=0,\quad k=0;\ 1.$$

Домножуючи вихідне рівняння (4.37) на $\sin\alpha x$ й інтегруючи за x на інтервалі $(0,\infty)$, маємо

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_s(\alpha,\ t)=a^2\left[-\alpha^2\bar{u}_s(\alpha,\ t)+\alpha u(0,\ t)\right],\quad 0<t<\infty, \qquad (4.40)$$

де
$$\bar{u}_s(\alpha,\ t)=\int_0^{\infty}u(x,\ t)\sin\alpha x dx.$$

Враховуючи у формулі (4.40) граничну умову (4.38) і застосовуючи синус-перетворення до рівності (4.39), отримуємо крайову задачу відносно трансформанти $u(\alpha,\ t)$:

$$\frac{d}{dt}\bar{u}_s(\alpha,\ t)+a^2\alpha^2\bar{u}_s(\alpha,\ t)=a^2\alpha\psi(t),\quad 0<t<\infty\ ; \qquad (4.41)$$

$$\bar{u}_s(\alpha,\ 0)=\Phi(\alpha), \qquad (4.42)$$

де
$$\Phi(\alpha)=\int_0^{\infty}\varphi(x)\sin\alpha x dx. \qquad (4.43)$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (4.41) запишемо у вигляді

$$\bar{u}_s(\alpha,\ t)=c(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}+u_*(\alpha,\ t), \qquad (4.44)$$

де $c(\alpha)$ – довільна функція параметра перетворення; $u_*(\alpha,\ t)$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.41),

$$\overline{u}_*(\alpha,\ t) = a^2\alpha\int_0^t e^{-a^2\alpha^2(t-\tau)}\psi(\tau)\,d\tau. \qquad (4.45)$$

Підставляючи рівняння (4.44) в (4.42), отримуємо $c(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Розв'язок вихідної крайової задачі знаходимо, застосовуючи до співвідношення (4.44) зворотне синус-перетворення Фур'є:

$$u(x,\ t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\alpha)e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x d\alpha + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \overline{u}_*(\alpha,\ t)\sin\alpha x d\alpha. \qquad (4.46)$$

Здобутий розв'язок, як і в попередньому прикладі, можна виразити через задані функції $\varphi(x)$ і $\psi(t)$. Для цього слід підставити в рівняння (4.46) інтегральні зображення (4.43) і (4.45) функцій $\Phi(\alpha)$ і $\overline{u}_*(\alpha,\ t)$. Змінивши в одержаному виразі порядок інтегрування і скориставшись формулою

$$\sin\alpha x\cdot\sin\alpha\tau = \frac{1}{2}\left[\cos\alpha(x-\tau) - \cos\alpha(x+\tau)\right],$$

а також значенням табличних інтегралів

$$\int_0^\infty e^{-\beta y^2}\cos by dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),\quad \int_0^\infty y e^{-\beta y^2}\sin by dy = \frac{b}{4\beta}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}\exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),$$

остаточно маємо

$$u(x,\ t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{t}\int_0^\infty \varphi(\tau)\left[e^{\frac{(x-\tau)^2}{4a^2t}} - e^{\frac{(x+\tau)^2}{4a^2t}}\right]d\tau + x\int_0^t \varphi(\tau)\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^3}}d\tau\right\}.$$

3. До лівого кінця $x = 0$ лінії завдовжки l без витрат $(G = R = 0)$ підключена електрорушійна сила $E(t) = E_0\sin\omega t$. Знайти напругу $u(x,\ t)$ для будь-якої миті часу $t > 0$, якщо початкові сила струму і напруга в лінії дорівнюють нулеві, а на іншому кінці лінія є короткозамкненою.

Розв'язання. Для визначення напруги $u(x,\ t)$ існує така мішана задача (див. завдання 24):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x\in[0,\ l],\ 0 < t < +\infty, \qquad (4.47)$$

$$u(0,\ t) = E_0\sin\omega t,\ u(l,\ t) = 0,\ t > 0, \qquad (4.48)$$

$$u(x,\ 0) = 0,\ u'_t(x,\ 0) = 0,\ x\in[0,\ l]. \qquad (4.49)$$

Для розв'язання цієї задачі застосуємо інтегральне перетворення Лапласа. Помножимо (4.47) на $K(\alpha,\ t) = e^{-\alpha t}$ і зінтегруємо за t на інтервалі $(0,\ \infty)$. Тоді, враховуючи умову (4.49) і (3.21), (3.22) [ч. 2, с. 139], дістанемо

$$\frac{d^2\overline{u}(x,\ \alpha)}{dx^2} - \frac{\alpha^2}{a^2}\overline{u}(x,\ \alpha) = 0,\ x\in[0,\ l], \qquad (4.50)$$

де
$$\overline{u}(x,\ \alpha) = \int_0^\infty \overline{u}(x,\ t)e^{-\alpha t}dt.$$

Розв'язок звичайного диференціального рівняння (4.50) запишемо у вигляді

$$\overline{u}(x,\ \alpha) = c_1(\alpha)\operatorname{ch}\frac{\alpha x}{a} + c_2(\alpha)\operatorname{ch}\frac{\alpha x}{a}.$$

Для визначення $c_1(\alpha)$ і $c_2(\alpha)$ слід скористатися перетвореними за Лапласом умовами (4.48):

$$\overline{u}(0,\ \alpha) = \frac{E_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2},\ u(l,\ \alpha) = 0.$$

У результаті маємо

$$c_1(\alpha) = \frac{E_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2},\ c_2(\alpha) = -\frac{E_0\omega\operatorname{ch}\frac{l\alpha}{a}}{(\alpha^2 + \omega^2)\operatorname{ch}\frac{l\alpha}{a}}.$$

Отже,

$$u(x,\ \alpha) = \frac{E_0\omega\operatorname{sh}\frac{\alpha(l-x)}{a}}{(\alpha^2 + \omega^2)\operatorname{sh}\frac{l\alpha}{a}}.$$

Для знаходження оригіналу функції $u(x,\ \alpha)$ застосуємо третю теорему розвинення [ч. 2, с. 276]. Функція $\overline{u}(x,\ \alpha)$ має такі прості полюси [ч. 2, с. 273]:

$$\alpha_1 = \pm j\omega\ ,\ \alpha_n = \pm j\frac{(n+1)a\pi}{l},\ n = \overline{1,\ \infty}.$$

Беручи до уваги, що

$$u(x,\ t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{F_1(x,\ \alpha_n)}{F'_2(x,\ \alpha_n)}e^{\alpha_n t},$$

де

$$F_1(x,\ \alpha_n)=E_0\omega\,\mathrm{sh}\frac{(l-x)\alpha_n}{a},\quad F_2(x,\ \alpha_n)=2\alpha_n\,\mathrm{sh}\frac{l\alpha_n}{a}+\left(\alpha_n^2+\omega^2\right)\mathrm{ch}\frac{\alpha_n l}{a},$$

і враховуючи співвідношення $\mathrm{sh}\,jz=j\sin z$, $\mathrm{ch}\,jz=\cos z$, після деяких перетворень здобудемо

$$u(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_1(x,\ \alpha_n)}{F_2'(x,\ \alpha_n)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{F_1(x,\ \alpha_n)}{F_2'(x,\ \alpha_n)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{F_1(x,\ \alpha_n)}{F_2'(x,\ \alpha_n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F_1(x,\ -\alpha_n)}{F_2'(x,\ -\alpha_n)}\right]=$$

$$=E_0\left[\frac{\sin\frac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}+\frac{2a\omega}{l}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}}{\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}-\omega^2}\right].$$

Відповідь: $u(x,\ t)=E_0\left[\dfrac{\sin\frac{\omega(l-x)}{a}\sin\omega t}{\sin\frac{\omega l}{a}}+\dfrac{2a\omega}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{an\pi t}{l}}{\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}-\omega^2}\right].$

Застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є, розв'язати задачі.

54. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t)$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$, $u(x,\ 0)=u_t'(x,\ 0)=0$, $-\infty<x<\infty$.

55. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$, $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$.

56. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t)$, $-\infty<x<\infty$, $t>0$, $u(x,\ 0)=\varphi(x)$, $-\infty<x<\infty$.

57. Розв'язати задачу теплопровідності для нескінченного стрижня $(-\infty<x<\infty)$, якщо в початкову мить часу при $x\in(-l,\ l)$ він має температуру T_0, а при $|x|>l$ його температура дорівнює нулеві.

58. Знайти розподіл температури в нескінченному стрижні $(-\infty<x<\infty)$, якщо при $t=0$ його температура була нульовою, а при $t>0$ в одиницю часу на одиниці об'єму виділяється кількість теплоти $f(x,\ t)=Q(C\rho)^{-1}=\mathrm{const}$.

Використовуючи косинус- або синус-перетворення Фур'є, розв'язати задачі.

59. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<\infty$, $t>0$, $u(0,\ t)=\mu(t)$, $t>0$, $u(x,\ 0)=0$, $0<x<\infty$.

60. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<\infty$, $t>0$, $u'(0,\ t)=\nu(t)$, $t>0$, $u(x,\ 0)=0$, $0<x<\infty$.

61. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,\ t)$, $0<x<\infty$, $t>0$, $u(0,\ t)=0$, $t>0$, $u(x,\ 0)=0$, $0<x<\infty$.

62. Розв'язати задачу для напівнескінченного ізольованого стрижня, якщо його початкова температура є сталою й дорівнює T_0, а на кінці $x=0$ підтримується стала температура T_c.

Розв'язати задачі, застосовуючи інтегральне перетворення Лапласа.

63. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le l$, $t>0$, $u(x,\ 0)=A\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0$, $0\le x\le l$, $u(0,\ t)=u(l,\ t)$, $t>0$.

64. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0\le x\le l$, $t>0$, $u(x,\ 0)=A\cos\dfrac{\pi x}{l}$, $\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=0$, $x\in[0,\ l]$, $\dfrac{\partial u(0,\ t)}{\partial x}=\dfrac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}=0$, $t>0$.

65. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x\in[0,\ l]$, $t>0$, $u(x,\ 0)=0$, $\dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=B\sin\dfrac{\pi x}{i}$, $t\in[0,\ \infty]$, $u(0,\ t)=u(l,\ t)=0$.

66. $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0<x<\infty$, $t>0$, $u(x,\ 0)=0$, $x>0$, $u(0,\ t)=u_0$, $t>0$.

67. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le l$, $t > 0$, $u(x, \ 0) = A\sin\frac{\pi x}{l}$, $x \in [0, \ l]$, $u(0, \ t) = u(l, \ t) = 0$, $t > 0$.

68. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 \le x \le h$, $t > 0$, $u(x, \ 0) = 0$, $0 \le x \le h$, $u(0, \ t) = 0$, $u(h, \ t) = u_0$, $t > 0$.

69. До кінця $x = 0$ напівнескінченної електричної лінії без втрат $(R = G = 0)$, починаючи з миті $t = 0$, підключена електрорушійна сила $E(t)$. Знайти напругу $u(x, \ t)$ для $t > 0$ в лінії, якщо початкові напруга і сила струму в ній дорівнюють нулеві.

70. До кінця $x = 0$ напівнескінченної електричної лінії без спотворення $(RC = LG)$, починаючи з миті $t = 0$, підключена електрорушійна сила $E(t)$. Знайти напругу $u(x, \ t)$ для $t > 0$ в лінії, якщо початкові напруга й сила струму в ній дорівнюють нулеві.

71. Лінія завдовжки l без втрат $(R = G = 0)$ заряджена до напруги u_0. У мить часу $t = 0$ її лівий кінець $(x = 0)$ закорочується. Знайти напругу $u(x, \ t)$ у мить часу t.

Відповіді

1. Другий. **2.** Перший. **3.** Третій. **4.** Другий. **5.** Третій. **6, 7.** Нелінійне. **8.** Квазілінійне. **9.** Лінійне однорідне. **10.** Лінійне неоднорідне. **11.** $y \ne 0, 9$, $x \ne \pm y$. **15.** $u = \varphi(x) + \psi(y)$, де φ і ψ – довільні диференційовні функції. **16.** $u = y^3 + y\varphi(x) + \psi(x)$, де φ і ψ – довільні функції. **21.** Знайти функцію $u(x, t)$, що є розв'язком рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} F(x, t)$, $x \in [0, l]$, $t \in (0, +\infty)$ і задовольняє граничні умови $u(0, t) = u(l, t) = 0$, $t \in [0, +\infty)$ і початкові умови $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x, \ 0)}{\partial t} = \psi(x)$, $x \in [0, l]$. **22.** Знайти розв'язок $u(x, t)$ рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in [0, l]$, $t \in (0, +\infty)$, що задовольняє граничні умови $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$, $t \in (0, +\infty)$ і початкові умови $u(x, 0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$. **23.** Знайти розв'язок $u(x, t)$ рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in [0, \ l]$, $t \in (0, +\infty)$, що задовольняє початкові $u(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in [0, l]$ і граничні умови $u'_x(0, \ t) = -\frac{1}{k\sigma} g_1(t)$, $u'_x(l, t) = -\frac{1}{k\sigma} q_2(t)$, $t \in (0, +\infty)$, де σ – площа поперечного перерізу стрижня. **24.** $\frac{\partial v}{\partial x} + L\frac{\partial i}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial i}{\partial x} + C\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $x \in [0, l]$, $t > 0$; $v(0, t) = E(t)$, $v(l, t) = 0$, $t > 0$; $v(x, 0) = \varphi(x)$, $i(x, 0) = \varphi(x)$, $x \in [0, l]$, або $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}$, $a^2 = \frac{1}{LC}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$; $i''_x(0, t) = -CE'(t)$, $i'_x(l, t) = 0$, $t > 0$; $i(x, \ 0) = \psi(x)$, $i'(x, \ 0) = -\frac{1}{L}\varphi'(x)$, $x \in [0, l]$; $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $x \in [0, l]$, $t > 0$; $v(0, t) = E(t)$, $v(l, t) = 0$, $t > 0$; $v(x, 0) = \varphi(x)$, $v'_t(x, 0) = -\frac{1}{C}\psi'(x)$, $x \in [0, l]$. **25.** При $x \ne 0$ і $y \ne 0$ еліптичне: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi} \ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \ \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$. **26.** При $x \ne 0$ і $y \ne 0$ параболічне: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$, $\xi = y \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $\eta = y$. **27.** При $x \ne 0$ і $y \ne 0$ гіперболічне: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$. **28.** Параболічне всюди: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + s_1 u + s_3 \xi + (2 + s_2)\eta = 0$, $\xi = y - 2x$, $\eta = x$. **29.** Еліптичне всюди: $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = y + x$, $\eta = x$. **30.** Параболічне: $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = \sqrt{y} - \sqrt{x}$, $\eta = x$. **31.** Еліптичне всюди: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0$, $\xi = y$, $\eta = \operatorname{arctg} x$. **32.** Гіперболічне всюди: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$, $\xi = x + \operatorname{arctg} y$, $\eta = x - \operatorname{arctg} y$. **33.** Гіперболічне всюди: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$,

$\xi = x + y - \cos x$, $\eta = -x + y - \cos x$. **34.** Параболічне при $x = 0$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$; гіперболічне при $x > 0$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \dfrac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\dfrac{\partial u}{\partial\xi} - \dfrac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0$, $\xi = y - x + 2\sqrt{x}$, $\eta = y - x - 2\sqrt{x}$; еліптичне при $x < 0$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} - \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$, $\xi = y - x$. $\eta = 2\sqrt{-x}$. **35.** Гіперболічне всюди: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$, $\eta = x + at$, $\xi = x - at$.

36. $u(x, t) = \cos x \cos t$. **37.** $u(x, t) = 4t + e^{-x}\operatorname{ch} t$. **38.** $u(x, t) = b\sin x\cos t + c\cos x\sin t$.

39. $i(x, t) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{R}{L}t}\left[\psi(x+at) + \psi(x-at) + \sqrt{\dfrac{C}{L}}\big(\varphi(x+at) - \varphi(x-at)\big)\right]$.

40. $u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\sin x\sin at, & at < x < +\infty, \\ \dfrac{1}{a}(1 - \cos x\cos at), & 0 \le x \le at. \end{cases}$

41. $u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} + \dfrac{(x+at)^2}{1+(x-at)^2}\right] & \text{при } x \ge at, \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{(x+at)^2}{1+(x+at)^2} - \dfrac{(at-x)^2}{1+(at-x)^2}\right] & \text{при } 0 \le x \le at. \end{cases}$

42. $i(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \sqrt{\dfrac{C}{L}}\big(\varphi(x+at) - \varphi(x-at)\big)\right], & x \ge \dfrac{t}{a} > 0, \\ \dfrac{1}{2}e^{-\frac{G}{C}t}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at) + \sqrt{\dfrac{C}{L}}\big(\varphi(x+at) - \varphi(x-at)\big)\right], & t > \dfrac{x}{a} > 0. \end{cases}$

43. Якщо $0 \le t \le \dfrac{l}{a}$, то $u(x, t) = \begin{cases} ct & \text{при } 0 \le x < l - at, \\ \dfrac{c}{2a}(l + at - x) & \text{при } l - at \le x < l + at, \\ 0 & \text{при } 0 \le x \le at - l; \end{cases}$

якщо $\dfrac{l}{a} \le t < +\infty$, то $u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{cl}{a} & \text{при } 0 \le x \le at - l, \\ \dfrac{c}{2a}(l + at - x) & \text{при } at - l \le x < at + l, \\ 0 & \text{при } at + l \le x < +\infty. \end{cases}$

44. $u(x, t) = \dfrac{32h}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^3}\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}$.

45. $u(x, t) = \dfrac{4hl^2}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi kh}{l}\right)}{l^2 - k^2h^2}\sin\dfrac{k\pi x}{l}\sin\dfrac{k\pi at}{l}$.

46. $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{sh}\dfrac{\pi ny}{a} + B_n\operatorname{ch}\dfrac{\pi ny}{a}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{a}$, $A_n = -f_n\operatorname{ch}\dfrac{n\pi b}{a} + \varphi_n\dfrac{1}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)}$;

$B_n = f_n$; $f_n = \dfrac{2}{a}\int\limits_0^a f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}dx$; $\varphi_n = \dfrac{2}{a}\int\limits_0^a \varphi(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}dx$.

47. $u(x, t) = \dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{2n+1}{b}\pi(a-x)\right]}{(2n+1)\operatorname{sh}\dfrac{2n+1}{b}a\pi}\sin\dfrac{2n+1}{b}\pi y$.

48. $u(x, t) = \dfrac{4v}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}e^{-\frac{2n+1}{b}\pi x}\sin\dfrac{2n+1}{b}\pi y = \dfrac{2v}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin\frac{\pi}{b}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{b}x}$.

49. $u(x, t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx\, e^{-a^2n^2t}$, $b_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$.

50. $u(x, t) = f\dfrac{x^2 - l^2}{2a^2} + T\dfrac{x}{l} + \dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n\cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi x\cdot e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}}$,

$A_n = \int\limits_0^l\left[\varphi(\tau) - \dfrac{1}{2a^2}(\tau^2 - l^2) + T\dfrac{\tau}{l}\right]\cos\dfrac{2n+1}{2l}\pi\tau\,d\tau$.

51. $u(x, t) = \dfrac{E\sin\left(\omega\dfrac{(l-x)}{a}\right)}{\sin\left(\dfrac{\omega l}{a}\right)}\sin\omega t + \dfrac{2E\omega a}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\left(\dfrac{n\pi at}{l}\right)\ \sin\left(\dfrac{n\pi x}{l}\right)}{\left(\dfrac{n\pi a}{t}\right)^2 - \omega^2}$.

52. $u(r, \varphi) = \dfrac{2A\varphi}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$.

53. $u(x, t) = e^{-mt}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos q_n t + b_n\sin q_n t)\sin nx$, $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$,

$b_n = \dfrac{2}{\pi q_n}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx + \dfrac{ma_n}{q_n}$, $q_n = \sqrt{(na)^2 - m^2}$.

54. $u(x,\ t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau\times\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\eta,\ \tau)d\eta$. 55. $u(x,\ t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\eta)e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2t}}d\eta$.

56. $u(x,\ t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\eta,\ \tau)\dfrac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}}d\eta$.

57. $T(x,\ t)=\dfrac{T_0}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right)+\Phi\left(\dfrac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$, де $\Phi(z)$ – функція Лапласа.

58. $T(x,\ t)=\dfrac{Q}{C\rho}t$. 59. $u(x,\ t)=\dfrac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\dfrac{\mu(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^3}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$.

60. $u(x,\ t)=-\dfrac{a}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\dfrac{\nu(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau$.

61. $u(x,\ t)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t\dfrac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int\limits_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right]f(\xi,\ \tau)d\xi$.

62. $T(x,\ t)=(T_0-T_c)\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+T_c$. 63. $u(x,\ t)=A\cos\dfrac{\pi at}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$.

64. $u(x,\ t)=A\cos\left(\dfrac{\pi nat}{l}\right)\cos\left(\dfrac{\pi nx}{l}\right)$. 65. $u(x,\ t)=B\sin\dfrac{n\pi at}{l}\sin\dfrac{\pi nx}{l}$.

66. $u(x,\ t)=u_0\left(1-\Phi\left(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right)$. 67. $u(x,\ t)=Ae^{-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

68. $u(x,\ t)=u_0\left[\dfrac{x}{h}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\frac{a^2k^2\pi^2t}{h^2}}\dfrac{\sin\left(\frac{k\pi x}{h}\right)}{k}\right]$.

69. $u(x,\ t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<\dfrac{x}{a},\\ E\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } t>\dfrac{x}{a}.\end{cases}$ 70. $u(x,\ t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<\dfrac{x}{a},\\ e^{-\alpha x}E\left(t-\dfrac{x}{a}\right) & \text{при } t>\dfrac{x}{a},\ \alpha=\sqrt{\dfrac{CR}{L}}.\end{cases}$

71. $u(x,\ t)=\dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n+1)a\pi t}{2l}}{2n+1}$.

Глава 5
СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ

5.1. СТІЙКІСТЬ. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Приклади. **1.** Дослідити на стійкість розв'язок рівняння $\dfrac{dx}{dt}+x=0$.

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд $x(t)=ce^{-t}$. Задамо $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує таке число $\delta(\varepsilon)$, для якого при $\left|\tilde{\xi}_0-\xi_0\right|<\delta$ виконуватиметься умова $\left|\tilde{\xi}(t)-\xi(t)\right|<\varepsilon$ для всіх $t\geq t_0$ [див. ч. 2, с. 398–402].

Дійсно,

$$\left|\tilde{\xi}(t)-\xi(t)\right|=\left|\tilde{\xi}_0-\xi_0\right|e^{-(t-t_0)}.$$

Оскільки $e^{-(t-t_0)}<1$ при $t>t_0$, то $\left|\tilde{\xi}(t)-\xi(t)\right|<\left|\tilde{\xi}_0-\xi_0\right|<\varepsilon$, тобто будь-який розв'язок вихідного рівняння стійкий за Ляпуновим. Окрім того, він асимптотично стійкий, тому що $\left|\tilde{\xi}(t)-\xi(t)\right|=\left|\tilde{\xi}_0-\xi_0\right|e^{-(t-t_0)}\to 0$ при $t\to+\infty$.

2. Дослідити на стійкість розв'язок системи

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-4x,\end{cases}$$

що задовольняє умови $x(0)=y(0)=0$.

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок системи. Для цього здиференціюємо перше рівняння за t:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-4x.$$

Загальний розв'язок останнього рівняння

$$x(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t,$$

тоді

$$y(t)=-2c_1\sin 2t+2c_2\cos 2t.$$

Розв'язком вихідної системи, що задовольняє початкові умови $x(0)=y(0)=0$, є $\xi_1(t)\equiv 0$, $\xi_2(t)\equiv 0$, а розв'язок, що задовольняє умови $\bar{\xi}_1(0)=\bar{\xi}_{10}$, $\bar{\xi}_2(0)=\bar{\xi}_{20}$, має вигляд

$$\bar{\xi}_1(t)=\bar{\xi}_{10}\cos 2t+\frac{1}{2}\bar{\xi}_{20}\sin 2t,\quad \bar{\xi}_2(t)=-2\bar{\xi}_{10}\sin 2t+\bar{\xi}_{20}\cos 2t.$$

Задамо будь-яке число $\varepsilon>0$ і покажемо, що існує $\delta(\varepsilon)>0$ таке, для якого при $\left|\bar{\xi}_{10}-0\right|<\delta$ і $\left|\bar{\xi}_{20}-0\right|<\delta$ виконуються нерівності

$$\left|\bar{\xi}_1(t)-0\right|=\left|\bar{\xi}_{10}\cos 2t+\frac{1}{2}\bar{\xi}_{20}\sin 2t\right|<\varepsilon,$$

$$\left|\bar{\xi}_2(t)-0\right|=\left|-2\bar{\xi}_{10}\sin 2t+\bar{\xi}_{20}\cos 2t\right|<\varepsilon$$

для всіх $t\ge 0$. Це й буде означати, що нульовий розв'язок системи стійкий за Ляпуновим.

У разі $\left|\bar{\xi}_{10}\right|<\delta$ і $\left|\bar{\xi}_{20}\right|<\delta$ маємо

$$\left|\bar{\xi}_{10}\cos 2t+\frac{1}{2}\bar{\xi}_{20}\sin 2t\right|\le\left|\bar{\xi}_{10}\cos 2t\right|+\frac{1}{2}\left|\bar{\xi}_{20}\sin 2t\right|\le\left|\bar{\xi}_{10}\right|+\frac{1}{2}\left|\bar{\xi}_{20}\right|<\frac{3}{2}\delta,$$

$$\left|\bar{\xi}_{20}\cos 2t-2\bar{\xi}_{10}\sin 2t\right|\le\left|\bar{\xi}_{20}\cos 2t\right|+2\left|\bar{\xi}_{10}\sin 2t\right|\le 2\left|\bar{\xi}_{10}\right|+\left|\bar{\xi}_{20}\right|<3\delta$$

(тут враховано, що $|\cos 2t|\le 1, |\sin 2t|\le 1$).

Якщо вибрати $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}$, то для всіх $t\ge 0$ мають місце нерівності

$$\left|\bar{\xi}_{10}\cos 2t+\frac{1}{2}\bar{\xi}_{20}\sin 2t\right|<\frac{3\varepsilon}{8}<\varepsilon,$$

$$\left|-2\bar{\xi}_{10}\sin 2t+\bar{\xi}_{20}\cos 2t\right|<\frac{3\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

Отже, дійсно, нульовий розв'язок системи стійкий за Ляпуновим, але не асимптотично, тому що функції $\sin 2t$ і $\cos 2t$ при $t\to+\infty$ не мають границі.

3. Дослідити на стійкість розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt}=\sin^2 x,\quad x(0)=0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $x(t)=\operatorname{arcctg}(c-t)$, тому розв'язок $\bar{\xi}(t)$, що задовольняє початкову умову $\bar{\xi}(0)=\bar{\xi}_0$ $\left(0<\bar{\xi}_0<\pi\right)$,

визначається формулою $\bar{\xi}(t)=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\bar{\xi}_0-t\right)$. Розв'язок $\xi(t)$, що задовольняє початкову умову $\xi(0)=0$, буде особливим розв'язком $\xi(t)\equiv 0$. Знайдемо $\left|\bar{\xi}(t)-\xi(t)\right|=\left|\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\bar{\xi}_0-t\right)\right|$.

Звідси, яким би малим не було число $\bar{\xi}_0>0$, знайдеться момент часу $t_1>0$ такий, що $\left|\bar{\xi}(t_1)-\xi(t_1)\right|>1$. Отже, розв'язок $\xi(t)\equiv 0$ нестійкий.

4. Скласти рівняння збурень для системи

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1=\xi_2+8t+1,\\ \dot{\xi}_2=-4\xi_1.\end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки система лінійна, то рівняння збурень дістанемо, відкидаючи довільні члени та змінюючи ξ_1 і ξ_2 відповідно на x_1 і x_2 [див. ч. 2, гл. 5, § 4]:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-4x_1.\end{cases}$$

Використовуючи означення, дослідити на стійкість розв'язки рівнянь.

1. $\frac{dx}{dt}=2$, $x(0)=0$.

2. $\frac{dx}{dt}=2xt$, $x(0)=0$.

3. $\frac{dx}{dt}-2x=t$, $x\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

4. $\frac{dx}{dt}-x=1$, $x(0)=-1$.

5. $\frac{dx}{dt}+x=1$, $x(0)=1$.

6. $\frac{dx}{dt}=\cos t$, $x(0)=1$.

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок систем.

7. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=-3y-2x.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=y,\\ \frac{dy}{dt}=2y+3x.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x,\\ \frac{dy}{dt}=-2y.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=-x,\\ \frac{dy}{dt}=y.\end{cases}$

Скласти рівняння збурень для систем.

11. $\begin{cases}\dot{\xi}_1=\xi_1+2\xi_2+e^t,\\ \dot{\xi}_2=2\xi_1-\xi_2+t^2+3.\end{cases}$

12. $\begin{cases}\dot{\xi}_1=-\xi_1+2\xi_2+\sin t,\\ \dot{\xi}_2=\xi_1-3t^2.\end{cases}$

5.2. НАЙПРОСТІШІ ТИПИ ТОЧОК СПОКОЮ

Приклади. **1.** Визначити тип точки спокою (0; 0) системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

(тут і далі під $\dot{x}$, $\dot{y}$ розуміють відповідно $\dfrac{dx}{dt}$ і $\dfrac{dy}{dt}$) [див. ч. 2, с. 446–458].

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_{1,\,2} = \pm j$. Точкою спокою є особлива точка типу центра.

2. Визначити тип та дослідити на стійкість точку спокою системи

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + \alpha y, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

залежно від параметра α.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -2-k & \alpha \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 + k - (\alpha + 2) = 0$$

має корені $k_{1,\,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{9 + 4\alpha}$. Дослідивши поведінку коренів залежно від параметра α, дістанемо: якщо $\alpha < -\dfrac{9}{4}$ (корені комплексні, $\operatorname{Re} k_{1,\,2} < 0$) – стійкий фокус; якщо $\alpha = -\dfrac{9}{4}$ (корені дійсні та рівні) – стійкий вузол; якщо $-\dfrac{9}{4} < \alpha < -2$ (корені дійсні та від'ємні) – стійкий вузол; якщо $-2 < \alpha$ (корені дійсні та мають різні знаки) – сідло, точка спокою нестійка.

Визначити тип точок спокою систем.

13. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \dfrac{1}{3}y, \\ \dot{y} = -2x + \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - 5y, \\ \dot{y} = -2x - 5y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dot{x} = x - 4y, \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$

Визначити, за яких значень параметра α точка спокою систем стійка.

23. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \alpha y, \\ \dot{y} = -\alpha x + y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + 5y, \\ \dot{y} = -x + 2y. \end{cases}$

5.3. ФАЗОВА ПЛОЩИНА

Приклади. **1.** Дослідити поведінку фазових траєкторій системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y, \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$$

Розв'язання. Праві частини кожного з рівнянь системи обертаються на нуль у точках прямої $y = 2x$, тому точки цієї прямої – це положення рівноваги [див. ч. 2, с. 407–412]. Фазові траєкторії, відмінні від положень рівноваги, – це інтегральні криві рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{-4x + 2y},$$

або

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}, \quad y \neq 2x,$$

тобто напівпрямі, здобуті із сім'ї прямих $y = -\dfrac{1}{2}(x + c)$ та розташовані по різні боки від прямої $y = 2x$.

Рух по фазових траєкторіях іде в напрямку до положень рівноваги, тому що коли зображальна точка $(x(t);\ y(t))$ у момент t розміщується в області $2x - y < 0$, тобто над прямою $y = 2x$, то

$$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y > 0, \quad \frac{dy}{dt} = 2x - y < 0,$$

тобто $x(t)$ зростає з часом, а $y(t)$ спадає. Навпаки, якщо зображальна точка в момент t розташована під прямою $y = 2x$, тобто $2x(t) - y(t) > 0$, то

$$\frac{dx}{dt} < 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0,$$

тобто $x(t)$ спадає, а $y(t)$ зростає (рис. 5.1).

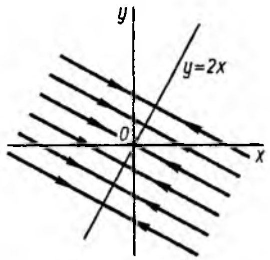

Рис. 5.1

2. Визначити тип положення рівноваги та поведінку фазових траєкторій системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Система має єдине положення рівноваги $x = y = 0$. Коренями характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & 0 \\ 1 & 2-k \end{vmatrix} = 0$$

є $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. Отже, положення рівноваги (0; 0) – нестійкий вузол. Для $k_1 = 1$ знайдемо власний вектор (1; –1), для $k_2 = 2$ – вектор (0; 1).

На площині xOy будуємо прямі $x + y = 0$ і $x = 0$, спрямовані вздовж цих векторів. Кожна з прямих містить три фазові траєкторії: положення рівноваги і дві напівпрямі, на які розділяється пряма точкою $O(0;\ 0)$. Решта фазових траєкторій дотикаються при підході до точки $O(0;\ 0)$ до прямої $x + y = 0$, оскільки $|k_1| < |k_2|$ (рис. 5.2).

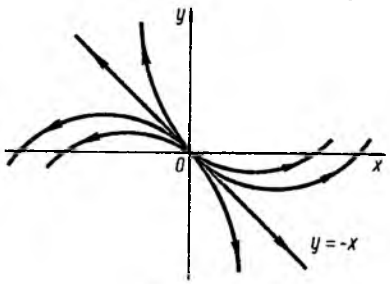

Рис. 5.2

3. Визначити тип положення рівноваги системи рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$$

та дослідити поведінку фазових траєкторій.

Розв'язання. Положенням рівноваги системи є $x = y = 0$. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 2 \\ 2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_1 = -1$, $k_2 = 4$. Отже, положення рівноваги – сідло. Знайдемо сепаратриси сідла, тобто прямі, що розділяють гіперболи різних типів, які є фазовими траєкторіями системи. Будемо шукати їх у вигляді $y = ax$. Для визначення a маємо рівняння

$$a = \frac{2+3a}{2a}, \quad 2a^2 - 3a - 2 = 0; \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = 2.$$

Отже, ці прямі $y = -\dfrac{x}{2}$ і $y = 2x$. Кожна з них складається з трьох фазових траєкторій. На прямій $y = -\dfrac{x}{2}$ дана система набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Звідси випливає, що вздовж прямої $y = -\dfrac{x}{2}$ зображальна точка $(x(t);\ y(t))$ рухається за законом $x(t) = x_0 e^{-t}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$, тобто рух точки зі зростанням t відбувається у напрямку до початку координат. Аналогічно знаходимо, що вздовж прямої $y = 2x$ зображальна точка рухається згідно із системою рівнянь $\dot{x} = 4x$, $\dot{y} = 4y$, тобто за законом $x(t) = x_0 e^{4t}$, $y(t) = y_0 e^{4t}$. По цій прямій рух відбувається в напрямку від початку координат. Схематично фазові траєкторії зображені на рис. 5.3.

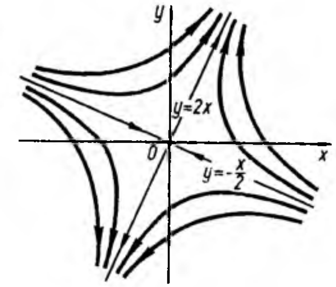

Рис. 5.3

Визначити тип положення рівноваги та дослідити поведінку фазових траєкторій систем.

27. $\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = 2y. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 6y, \\ \dot{y} = -3x + 5y. \end{cases}$ **33.** $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 4x - 3y. \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

5.4. СТІЙКІСТЬ ЗА ПЕРШИМ НАБЛИЖЕННЯМ

Приклади. **1.** Дослідити на стійкість точку спокою (0; 0) системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

Розв'язання. Розвиваючи функції $\sin y$, $\cos y$, e^x в ряд Маклорена та виділяючи члени першого порядку мализни відносно x та y, дістаємо

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y + H_1(x,\ y), \\ \dot{y} = -x - 3y + H_2(x,\ y), \end{cases}$$

де H_1, H_2 – члени не менше ніж другого порядку мализни відносно x і y. Система рівнянь першого наближення має вигляд [див. ч. 2, с. 415–424]

$$\begin{cases} \dot z_1 = 2z_1 + 8z_2, \\ \dot z_2 = -z_1 - 3z_2. \end{cases}$$

Її характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 8 \\ -1 & -3-k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $k_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}$ з від'ємною дійсною частиною. Отже, точка спокою $x = 0$, $y = 0$ стійка асимптотично.

2. Знайти всі точки спокою системи

$$\begin{cases} \dot x = y - x^2 - x, \\ \dot y = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

і дослідити їх на стійкість.

Р о з в ' я з а н н я. Точки спокою системи визначаються з рівнянь

$$\begin{cases} y - x^2 - x = 0, \\ 3x - x^2 - y = 0. \end{cases}$$

Для розв'язання цієї системи в першому рівнянні виразимо y і підставимо в друге, внаслідок чого одержимо

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ 3x - x^2 - x^2 - x = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ x^2 - x = 0. \end{cases}$$

Звідси знайдемо дві точки спокою (0; 0) і (1; 2) та дослідимо на стійкість кожну з них.

Система першого наближення, що відповідає точці спокою (0; 0), має вигляд $\dot z_1 = -z_1 + z_2$, $\dot z_2 = 3z_1 - z_2$. Коренями її характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 3 & -1-k \end{vmatrix} = 0$$

є $k_1 = -1 - \sqrt{3} < 0$ і $k_2 = -1 + \sqrt{3} > 0$, тому точка спокою (0; 0) системи нестійка.

Розвинемо праві частини даної системи в околі точки спокою (1; 2) в ряд Тейлора:

$$P(x,\ y) = y - x^2 - x = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(1;\,2)}(x-1) + \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(1;\,2)}(y-2) + \ldots,$$

$$Q(x,\ y) = 3x - x^2 - y = \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(1;\,2)}(x-1) + \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{(1;\,2)}(y-2) + \ldots$$

Тут крапками позначені члени не нижче другого порядку мализни відносно $x-1$, $y-2$. У нас

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{(1;\,2)} = \left.(-2x-1)\right|_{x=1} = -3; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{(1;\,2)} = 1;$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(1;\,2)} = \left.(3-2x)\right|_{x=1} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{(1;\,2)} = 1.$$

Тоді система першого наближення в околі особливої точки (1; 2) набуває вигляду

$$\begin{cases} \dot z_1 = -3z_1 + z_2, \\ \dot z_2 = z_1 - z_2, \end{cases}$$

де $$z_1 = x - 1, \quad z_2 = y - 2.$$

Характеристичне рівняння цієї системи $k^2 + 4k + 2 = 0$ має корені $k_1 = -2 - \sqrt{2} < 0$, $k_2 = -2 + \sqrt{2} < 0$, тому точка спокою $x = 1$, $y = 2$ стійка асимптотично.

3. Дослідити тип положень рівноваги системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 + y^2. \end{cases}$$

Побудувати фазові траєкторії.

Р о з в ' я з а н н я. Із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ 1 + y + y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$$

знайдемо положення рівноваги: $O_1(-1;\ 0)$ і $O_2(1;\ 0)$. Оскільки вихідна система не змінюється, якщо змінити x на $-x$, то її фазові траєкторії симетричні відносно осі ординат, тобто достатньо дослідити тип одного з положень рівноваги, наприклад $O_2(1;\ 0)$. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає цьому положенню рівноваги:

$$\begin{vmatrix} -k & 2 \\ -2 & 1-k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 - k + 4 = 0.$$

Корені цього рівняння

$$k_{1,\ 2} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2}.$$

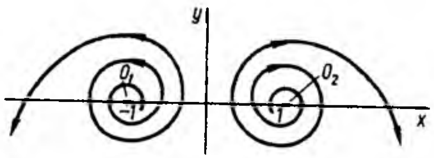

Рис. 5.4

Отже, обидва положення рівноваги даної системи – нестійкі фокуси.

Вісь ординат є фазовою траєкторією і на ній $\dot{y} = 1 + y + y^2$. Зображальна точка з часом наближається до $+\infty$. Фазові траєкторії зображені на рис. 5.4.

4. Дослідити тип усіх положень рівноваги системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = x^2 + y^2 - 1. \end{cases}$$

Побудувати фазові траєкторії.

Розв'язання. Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2xy = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

знайдемо всі положення рівноваги вихідної диференціальної системи: $O_1(-1;\ 0)$, $O_2(1;\ 0)$, $O_3(0;\ 1)$, $O_4(0;\ -1)$. Система першого наближення в околі особливої точки $(x_0,\ y_0)$ має вигляд [див. ч. 2, с. 447]

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -2y_0 z_1 - 2x_0 z_2, \\ \dfrac{dz_2}{dt} = 2x_0 z_1 + 2y_0 z_2. \end{cases}$$

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає положенню рівноваги $(x_0,\ y_0)$:

$$\begin{vmatrix} -2y_0 - k & -2x_0 \\ 2x_0 & 2y_0 - k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 + 4\left(x_0^2 - y_0^2\right) = 0.$$

Корені цього рівняння при $x_0 = 0$, $y_0 = \pm 1$ дійсні та різні за знаком: $k_1 = -2$, $k_2 = 2$. Отже, положення рівноваги O_3 та O_4 – сідла. Очевидно, що вісь Oy складається з фазових траєкторій, три з яких є сепаратрисами сідел: $x = 0$, $y < -1$; $x = 0$, $-1 < y < 1$; $x = 0$, $y > 1$, причому сепаратриса $x = 0$, $-1 < y < 1$ є спільною для обох сідел, вихідною для сідла O_3 і вхідною для сідла O_4.

Корені характеристичного рівняння при $x_0 = \pm 1$, $y_0 = 0$ чисто уявні: $k_{1,\ 2} = \pm 2j$. Отже, положення рівноваги O_1 та O_2 можуть бути центрами або фокусами.

Оскільки рівняння фазових траєкторій $\left(x^2 + y^2 - 1\right)dx + 2xydy = 0$ не змінюється в разі зміни y на $-y$, то фазові траєкторії симетричні відносно осі Ox. Звідси випливає, що положення рівноваги O_1 і O_2 є центрами.

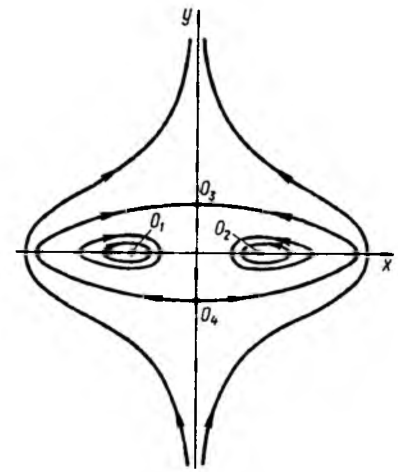

Рис. 5.5

Напрямок руху по замкнених траєкторіях в околі цих центрів можна визначити, міркуючи так. Згідно з другим рівнянням вихідної системи зображальна точка перетинає вісь Ox так, що $\dot{y}(t) = x^2(t) - 1$. Отже, її ордината в цей момент зростає, якщо зображальна точка перетинає вісь абсцис у точках, для яких $|x| > 1$, та спадає, якщо $|x| < 1$. Фазові траєкторії зображені на рис. 5.5.

Дослідити на стійкість по першому наближенню точку спокою $O(0;\ 0)$ систем.

35. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x, \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - \ln(1 + y) + \sin x, \\ \dot{y} = e^x + \sin(x + y) - \cos^2 y. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{5}x - \sin y. \end{cases}$

38. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\sin 2y, \\ \dot{y} = -y - 2x. \end{cases}$

39. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y, \\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y. \end{cases}$

40. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + \sin y, \\ \dot{y} = 5\left(e^x - 1\right) - y. \end{cases}$

41. $\begin{cases} \dot x = 2x - y\cos y, \\ \dot y = 3x - 2y - xy^2. \end{cases}$

42. $\begin{cases} \dot x = 2xy - x + y, \\ \dot y = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y. \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dot x = -\sin(x - z), \\ \dot y = \sin^2 x - y - \sin z, \\ \dot z = \mathrm{tg}(y - z). \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dot x = e^x - e^{-3z}, \\ \dot y = 4z - 3\sin(x + y), \\ \dot z = \ln(1 + z - 3x). \end{cases}$

45. $\begin{cases} \dot x = y - z, \\ \dot y = x^2 + y^2, \\ \dot z = x^2 + z^2. \end{cases}$

46. $\begin{cases} \dot x = -x + 4yz, \\ \dot y = -y - z + x^2, \\ \dot z = -z - x + y^2. \end{cases}$

Дослідити на стійкість усі положення рівноваги систем рівнянь.

47. $\begin{cases} \dot x = -y, \\ \dot y = x - 3x^2. \end{cases}$

48. $\begin{cases} \dot x = 2y, \\ \dot y = 4x - 4x^3. \end{cases}$

49. $\begin{cases} \dot x = xy + 4, \\ \dot y = x^2 + y^2 - 17. \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dot x = x^2 - y^2 - 5, \\ \dot y = x^2 + y^2 - 13. \end{cases}$

51. $\begin{cases} \dot x = y, \\ \dot y = -2y - \sin x. \end{cases}$

52. $\begin{cases} \dot x = y, \\ \dot y = \sin(x + y). \end{cases}$

53. $\begin{cases} \dot x = -2x + y + x^3, \\ \dot y = -x - 2y + 3x^5. \end{cases}$

5.5. УМОВА РАУСА – ГУРВІЦА

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^4 + 7k^3 + 12k^2 + 23k + 10 = 0 .$$

Тут

$$a_0 = 1,\ a_1 = 7,\ a_2 = 12,\ a_3 = 23,\ a_4 = 10 .$$

Усі коефіцієнти додатні, тобто необхідна умова виконується. Складемо матрицю Гурвіца [див. ч. 2, с. 429–431]

$$\begin{pmatrix} 7 & 23 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 23 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Випишемо головні діагональні мінори

$$\Delta_1 = 7 > 0\ ;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 23 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 84 - 23 = 61 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 7 & 23 & 0 \\ 1 & 12 & 10 \\ 0 & 7 & 23 \end{vmatrix} = 1932 - 490 - 529 = 913 > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 7 & 23 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 10 & 0 \\ 0 & 7 & 23 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 10 \end{pmatrix} = 10 \cdot \Delta_3 = 9130 > 0.$$

Таким чином, $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0$.

Отже, нульовий розв'язок рівняння асимптотично стійкий.

Дослідити на стійкість нульові розв'язки рівнянь.

54. $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0.$

55. $y''' + y'' + y' + 2y = 0.$

56. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$

57. $y^{\mathrm{IV}} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0.$

58. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$

59. $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0.$

60. $y^{\mathrm{V}} + 2y^{\mathrm{IV}} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0.$

5.6. УМОВА ЛЬЄНАРА – ШИПАРА

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння [див. ч. 2, с. 431–432]

$$y^{\mathrm{V}} + 2^{\mathrm{IV}} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$k^5 + 2k^4 + 3k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0 .$$

Тут $\quad a_0 = 1 > 0$, $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = 3 > 0$, $a_3 = 2 > 0$, $a_4 = 1 > 0$; $a_5 = 1 > 0$,

тобто перша умова критерію Льєнара – Шипара виконується.

Перевіримо виконання другої умови. Для цього складемо матрицю Гурвіца

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Випишемо головні діагональні мінори, починаючи з Δ_{n-1}, тобто Δ_4:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 3 = -5 < 0.$$

Оскільки $\Delta_4 < 0$, то друга умова не виконується, тому подальші розрахунки припиняємо. Нульовий розв'язок $y \equiv 0$ нестійкий.

Дослідити на стійкість нульові розв'язки рівнянь.

61. $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0.$ **62.** $y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$

63. $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0.$

64. $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0.$

За яких значень α будуть стійкими нульові розв'язки рівнянь?

65. $y''' + \alpha y'' + 2y' + 3y = 0.$ **66.** $y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + y' + 3y = 0.$

67. $y^{IV} + \alpha y''' + y'' + 2y' + y = 0.$

5.7. УМОВА МИХАЙЛОВА

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння

$$f(k) = k^5 + k^4 + 7k^3 + 4k^2 + 10k + 3 = 0.$$

Вважаючи $k = j\omega$, розглянемо [див. ч. 2, с. 433–436]

$$f(j\omega) = (j\omega)^5 + (j\omega)^4 + 7(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 10j\omega + 3 =$$
$$= j\omega^5 + \omega^4 - 7j\omega^3 - 4\omega^2 + 10j\omega + 3 = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 + j\left(\omega^5 - 7\omega^3 + 10\omega\right).$$

Функцію $f(j\omega)$ запишемо у вигляді

$$f(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega),$$

де

$$u(\omega) = \omega^4 - 4\omega^2 + 3 = \left(\omega^2 - 1\right)\left(\omega^2 - 3\right) = (\omega - 1)(\omega + 1)\left(\omega - \sqrt{3}\right)\left(\omega + \sqrt{3}\right),$$
$$v(\omega) = \omega^5 - 7\omega^3 + 10\omega = \omega\left(\omega^4 - 7\omega^2 + 10\right) =$$
$$= \omega\left(\omega^2 - 5\right)\left(\omega^2 - 2\right) = \omega\left(\omega - \sqrt{5}\right)\left(\omega + \sqrt{5}\right)\left(\omega - \sqrt{2}\right)\left(\omega + \sqrt{2}\right).$$

Якщо змінювати ω від 0 до $+\infty$, то u і v набуватимуть таких значень:

ω	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$
u	3	0	−1	0	8
v	0	4	0	$-2\sqrt{3}$	0

За таблицею побудуємо криву Михайлова (рис. 5.6). При $\omega > \sqrt{5}$ крива Михайлова весь час залишається в першому квадранті. Визначимо, що

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{v}{u} = \lim_{\omega\to+\infty}\frac{\omega^5 - 7\omega^3 + 10\omega}{\omega^4 - 4\omega^2 + 3} = \infty.$$

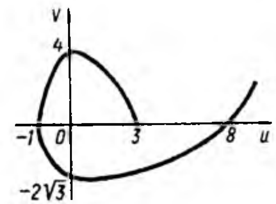

Рис. 5.6

Отже, вектор $\overline{f(j\omega)}$ зробив повний оберт проти руху годинникової стрілки, а годограф не проходить через початок координат. Кут повороту радіуса-вектора $\varphi = \frac{5\pi}{2} = (n - 2m)\frac{\pi}{2}$; $n = 5$. Звідси $2m = 0$, $m = 0$. Таким чином, усі корені характеристичного рівняння лежать у лівій півплощині. Нульовий розв'язок асимптотично стійкий.

Дослідити на стійкість нульові розв'язки рівнянь.

68. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$

69. $y^{V} + y^{IV} + 9y''' + 5y'' + 18y' + 4y = 0.$

70. $y^{V} + y^{IV} + 8y''' + 5y'' + 12y' + 4y = 0.$

71. $y^{V} + y^{IV} + 9y''' + 4y'' + 14y' + 3y = 0.$

72. $y^{V} + y^{IV} + 7y''' + 6y'' + 12y' + 5y = 0.$

73. $y^{V} + 3y^{IV} + 2y''' + y'' + 3y' + 2y = 0.$

74. $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0.$

5.8. *D*-РОЗБИТТЯ*

Приклад. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння

$$y''' + \alpha y'' + \beta y' + 6y = 0.$$

Розв'язання. Область стійкості $D(3;\ 0)$ визначається поведінкою коефіцієнтів α і β характеристичного рівняння $k^3 + \alpha k^2 + \beta k + 6 = 0$ [див. ч. 2, с. 437–445]. Визначимо межу області $D(3;\ 0)$, вважаючи $k = jg$:

$$f(jg) = (jg)^3 + \alpha(jg)^2 + \beta jg + 6 = -jg^3 - \alpha g^2 + \beta jg + 6 = \left(6 - \alpha g^2\right) + j\left(\beta g - g^3\right).$$

Прирівнюючи до нуля дійсну й уявну частини многочлена $f(jg)$, дістаємо параметричні рівняння межі області

$$\begin{cases} \alpha g^2 = 6, \\ g = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha g^2 = 6, \\ \beta = g^2. \end{cases}$$

Перша із систем несумісна. Розв'язуючи другу систему, маємо $\alpha\beta = 6$. Це рівняння межі області $D(3;\ 0)$. Межею є гіпербола в площині $(\alpha,\ \beta)$. Тут $\beta \geq 0$, оскільки $\beta = g^2$ (рис. 5.7). Отже, площина $(\alpha,\ \beta)$ поділилась гіперболою $\alpha\beta = 6$ на дві області. Для визначення характеру цих областей виберемо конкретні значення α і β в кожній області й дослідимо на стійкість нульовий розв'язок рівняння, наприклад за допомогою критерію Рауса – Гурвіца.

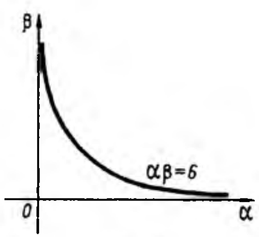

Рис. 5.7

Візьмемо на площині $(\alpha,\ \beta)$ точку під гіперболою. Нехай $\alpha = -1$, $\beta = 0$. Тут $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 6$. Тоді $f(k) = k^3 - k^2 + 6$. Для многочлена $f(k) = k^3 - k^2 + 6$ не виконується необхідна умова від'ємності дійсних частин його коренів. Отже, область, що міститься під гіперболою $\alpha\beta = 6$, є областю нестійкості.

Візьмемо точку на площині $(\alpha,\ \beta)$ над гіперболою (рис. 5.7). Нехай $\alpha = 3$, $\beta = 3$. Тоді $f(k) = k^3 + 3k^2 + 3k + 6 = 0$. Тут $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$. У матриці Гурвіца

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \Delta_1 = 3 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0; \quad \Delta_3 > 0.$$

Отже, область, що міститься над гіперболою, є областю стійкості.

---

* Див. ч. 2, гл. 5, § 9.

Визначити області стійкості многочленів.

75. $k^3 + \alpha k^2 + 11k + \beta = 0$.

76. $k^3 + \left(k^2 + 2\right)\alpha + \beta k + 4 = 0$.

77. $k^4 + k^3 + \alpha k^2 + k + \beta = 0$.

78. $k^4 + \alpha k^3 + 4k^2 + 2k + \beta = 0$.

5.9. ФУНКЦІЯ ЛЯПУНОВА ТА ЇЇ ПОБУДОВА

Приклад. Знайти функцію Ляпунова для системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 3y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $v(x,\ y) = Ax^2 + By^2$, де $A > 0$, $B > 0$ – невизначені коефіцієнти [див. ч. 2, с. 469–474].

Знаходження повної похідної $\dfrac{dv}{dt}$ з урахуванням рівнянь системи приводить до такого результату:

$$\frac{dv}{dt} = 2Ax\dot{x} + 2By\dot{y} = 2Ax\left(y - x^3\right) + 2By\left(-x - 3y^3\right) =$$

$$= 2Axy - 2Ax^4 - 2Bxy - 6By^4 = 2xy(A - B) - 2\left(Ax^4 + 3By^4\right) \leq 0$$

при $A = B$.

Вважатимемо, що $A = 1$, $B = 1$, тоді $v(x,\ y) = x^2 + y^2$.

Які з функцій двох змінних є знаковизначеними, знакосталими і знакозмінними?

79. $v(x_1,\ x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$.

80. $v(x,\ y) = x^2 - y^2$.

81. $v(x,\ y) = (x - y)^2$.

82. $v(x,\ y) = x^2 + y^2 - 4y^3$.

83. $-v(x,\ y) = -x^2$.

84. $v(x,\ y) = x^2 y + xy^2$.

85. $v(x,\ y) = -x^2 - y^2$.

86. $v(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2 x_3$.

87. $v(x,\ y) = y^2 - 4x^2$.

88. $v(x,\ y) = 5x^4 + 3y^2$.

89. $v(x,\ y) = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$.

Знайти функції Ляпунова для систем диференціальних рівнянь.

90. $\begin{cases}\dot{x} = -5y - 2x^3, \\ \dot{y} = 5x - 3y^3.\end{cases}$ **91.** $\begin{cases}\dot{x} = xy^4, \\ \dot{y} = -yx^4.\end{cases}$

5.10. ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА

Приклади. **1.** Дослідити на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases}\dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $v(x,\ y) = x^2 + y^2$. Це явно додатна функція [див. ч. 2, с. 474 – 478]. Похідна функції v для даної системи

$$\frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x\left(x^3 - y\right) + 2y\left(x + y^3\right) = 2x^4 - 2xy + 2xy + 2y^4 = 2x^4 + 2y^4,$$

отже, похідна $\frac{dv}{dt}$ є також явно додатною. У будь-якому околі початку координат є точки, в яких функція $v(x,\ y)$ має додатні значення. З теореми 3 Ляпунова випливає, що точка спокою $x=0$, $y=0$ системи нестійка.

2. Дослідити на стійкість за допомогою функції Ляпунова точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases}\dot{x} = -x^3 - y, \\ \dot{y} = x - y^3.\end{cases}$$

Розв'язання. Будемо шукати функцію Ляпунова у вигляді $v(x,\ y) = Ax^2 + By^2$. Отже,

$$\frac{dv}{dt} = 2Ax\left(-x^3 - y\right) + 2By\left(x - y^3\right) = -2Ax^4 - 2Axy + 2Bxy - 2By^4 =$$

$$= -2\left(Ax^4 + By^4\right) - 2xy(A - B).$$

Візьмемо $A = B = 1$, тоді $\frac{dv}{dt} \le 0$. Отже, $v(x,\ y) = x^2 + y^2$ є явно додатною функцією, а похідна $\frac{dv}{dt}$ – явно від'ємною. З теореми 2 Ляпунова випливає, що точка спокою $x=0$, $y=0$ системи асимптотично стійка.

3. Дослідити на стійкість за допомогою функції Ляпунова точку спокою $x=0$, $y=0$ системи

$$\begin{cases}\dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $v(x,\ y) = x^2 + y^2$. Це явно додатна функція:

$$\frac{dv}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y) + 2yx = 0.$$

З теореми 1 Ляпунова випливає, що точка спокою $x=0$, $y=0$ системи стійка.

Дослідити на стійкість точку спокою $x=0$, $y=0$ систем.

92. $\begin{cases}\dot{x} = y - 3x^2, \\ \dot{y} = -x - 7y^3\end{cases}$ $\left(v = x^2 + y^2\right)$.

93. $\begin{cases}\dot{x} = -3x^2 + 2xy^2 - 2x - y, \\ \dot{y} = -x^2y - 7y^3 + \frac{1}{3}x - y\end{cases}$ $\left(v = x^2 + 3y^2\right)$.

94. $\begin{cases}\dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3\end{cases}$ $\left(v = x^2 - y^2\right)$. **95.** $\begin{cases}\dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^4y\end{cases}$ $\left(v = x^4 + y^4\right)$.

96. $\begin{cases}\dot{x} = -x - xy, \\ \dot{y} = y^3 - x^3.\end{cases}$ **97.** $\begin{cases}\dot{x} = y - 3x - x^3, \\ \dot{y} = 6x - 2y.\end{cases}$

5.11. СТІЙКІСТЬ У ТЕОРІЇ РЕГУЛЮВАННЯ

Приклади. **1.** Рух автоматичної системи регулювання описується системою диференціальних рівнянь [див. ч. 2, с. 479 – 486]

$$\begin{cases}\dot{\varphi} - \Omega\left(\gamma_0 - \gamma\right) = c_2\gamma_0 + \delta_1, \\ \dot{\gamma}_0 + \dot{\gamma} + \Omega\psi = -c_1\gamma_0 + \delta_2, \\ \dot{\gamma} + \Omega\psi = -k_1\left(\gamma - \gamma_g\right) + \delta_3,\end{cases}$$

де γ, γ_0, ψ – координати системи; δ_1, δ_2, δ_3 – збурений вплив; γ_g – керуючий вплив; $\Omega = 1{,}16 \cdot 10^{-3}$ с^{-1}; $k_1 = 10$ с^{-1}; c_1, c_2 – коефіцієнти. Визначити умови стійкості системи.

Розв'язання. Перетворимо вихідну систему до нормального вигляду. Для цього виразимо $\dot{\gamma}$ в третьому рівнянні й підставимо в друге:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = -k_1\gamma - \Omega\psi + \delta_3 + k_1\gamma_g, \\ \dot{\gamma}_0 = k_1\gamma + c_1\gamma_0 - k_1\gamma_g + \delta_2 - \delta_3, \\ \dot{\psi} = \Omega\gamma + (\Omega + c_2)\gamma_0 + \delta_1. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння вихідної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} -k_1 - p & 0 & \Omega \\ k_1 & -c_1 - p & 0 \\ \Omega & \Omega + c_2 & -p \end{vmatrix} = 0.$$

Розкривши визначник, матимемо характеристичний многочлен

$$f(p) = p^3 + (k_1 + c_1)p^2 + \left(k_1c_1 + \Omega^2\right)p + \Omega^2(k_1 + c_1) + \Omega c_2 k_1 .$$

Умови стійкості дістаємо, використовуючи критерій Льєнара – Шипара. Система буде стійкою в разі виконання таких нерівностей:

$$a_0 > 0, \; a_1 > 0, \; a_2 > 0, \; a_3 > 0, \; a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \tag{11.1}$$

де $\quad a_0 = 1; \; a_1 = k_1 + c_1; \; a_2 = \Omega^2 + k_1c_1; \; a_3 = \Omega^2(k_1 + c_1) + \Omega c_2 k_1 .$

Підставляючи в нерівності (11.1) значення коефіцієнтів, отримуємо умову стійкості $(c_1 + k_1)\left(\Omega^2 + k_1c_1\right) > \Omega^2(k_1 + c_1) + \Omega c_2 k_1$, або після перетворень $c_1^2k_1 + k_1^2c_1 > \Omega c_2 k_1$. Звідси

$$c_2 < \frac{c_1^2 + k_1c_1}{\Omega}. \tag{11.2}$$

Підставляючи в нерівність (11.2) значення k_1 і Ω, знайдемо умови стійкості

$$c_2 < 863c_1^2 + 8630c_1 .$$

2. Перевірити стійкість замкненої системи автоматичного регулювання, якщо передавальна функція розімкненої системи

$$L(p) = \frac{3p + 10}{0{,}1p^3 + 0{,}2p^2 + 0{,}5p + 1}.$$

Розв'язання. Характеристичний поліном замкненої системи дорівнює сумі поліномів чисельника й знаменника передавальної функції розімкненої системи, тобто

$$D(p) = Q(p) + P(p) = 3p + 10 + 0{,}1p^3 + 0{,}2p^2 + 0{,}5p + 1,$$

$$D(p) = 0{,}1p^3 + 0{,}2p^2 + 3{,}5p + 11 .$$

Складемо матрицю Гурвіца й знайдемо Δ_2:

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 11 & 3{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}1 \\ 11 & 3{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}2 \cdot 3{,}5 - 11 \cdot 0{,}1 = -0{,}4 < 0.$$

Умова Льєнара – Шипара не виконана. Отже, система нестійка.

3. Використовуючи критерій Михайлова, визначити стійкість електромеханічної системи стеження, передавальна функція якої в розімкненому стані

$$L(p) = \frac{K}{p(1 + T_п p)(1 + T_д p)},$$

де K – загальний коефіцієнт підсилення розімкненої системи, $K = 58\ с^{-1}$; $T_п$ – стала часу підсилювача, $T_п = 0{,}01$ с; $T_д$ – стала часу двигуна, $T_д = 0{,}57$ с.

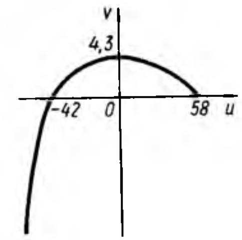

Рис. 5.8

Розв'язання. Характеристичний поліном розімкненої системи має вигляд

$$D(p) = p(1 + T_п p)(1 + T_д p) + K = T_п T_д p^3 + (T_п + T_д)p^2 + p + K.$$

Для побудови кривої Михайлова визначимо дійсні та уявні частини функції $D(j\omega)$:

$$u(\omega) = K - (T_п + T_д)\omega^2 = 58 - 0{,}58\,\omega^2; \quad v(\omega) = \omega - T_п T_д \omega^3 = \omega - 5{,}7 \cdot 10^{-3}\,\omega^3 .$$

Знайдемо корені $u(\omega)$ та $v(\omega)$:

$$u(\omega) = 0, \qquad v(\omega) = 0,$$

$$0{,}58\,\omega^2 = 58, \qquad \omega\left(1 - 5{,}7 \cdot 10^{-3}\omega^2\right) = 0,$$

$$\omega^2 = 100, \qquad \omega_2 = 0, \quad \omega^2 = \frac{10^4}{57},$$

$$\omega_1 = 10, \qquad \omega_3 = \frac{100}{\sqrt{57}}.$$

Криву Михайлова будуємо за такими значеннями:

ω	0	10	$\frac{100}{\sqrt{57}}$
$u(\omega)$	58	0	≈ -42
$v(\omega)$	0	4,3	0

Система стійка, тому що крива Михайлова послідовно проходить через три квадранти, залишаючись у третьому квадранті (рис. 5.8).

4. Скласти програму дослідження на стійкість нульового розв'язку $y \equiv 0$ диференціального рівняння системи автоматичного регулювання

$$0{,}32y^{IV} + 2{,}88y''' + 8{,}4y'' + 16{,}35y' + 25{,}3y = 0$$

за допомогою критерію Рауса – Гурвіца.

Розв'язання.

```
PRINT "Критерій Рауса – Гурвіца для диф. рівнянь 3–5-го порядків"
INPUT "Введіть порядок диф. рівняння", N
FOR J = 0 TO N
PRINT "Введіть коефіцієнт диф. рівняння при похідній порядку", N – J: INPUT
A(J+1) : NEXT J
FOR J = 1 TO N+1 : IF A(J)<=0 THEN 140
ON N – 2 GOTO 70, 90, 110
70: IF A(2)*A(3) – A(1)*A(4)<=0 THEN 140
80: PRINT HEX(03) : PRINT "Розв'язок стійкий" : STOP
90: IF A(4)*(A(2)*A(3) – A(1)*A(4)) – A(2)*(A(2)*A(5) – A(1)*A(6))<=0 THEN 140
GOTO 80
110: IF A(2)*A(3)–A(1)*A(4)<=0 THEN 140
IF(A(2)*A(3) – A(1)*A(4))*(A(4)*A(5) – A(3)*A(6)) – (A(2)*A(5) – (1)*A(6))^2<=0
THEN 140
GOTO 80
140: PRINT HEX(03) : PRINT "Розв'язок нестійкий" : STOP
```

Відповідь: нульовий розв'язок стійкий.

Перевірити стійкість замкненої системи, якщо передавальна функція розімкненої системи має наведений вигляд.

98. $L(p) = \dfrac{10p+1}{p^2(5p+1)}$. **99.** $L(p) = \dfrac{5p+20}{p^3+2p^2+3p+1}$.

100. Визначити стійкість одновісного гіростабілізатора, передавальна функція якого в розімкненому стані має вигляд

$$L(p) = \frac{K}{p\left(1+2\xi T_г p + T_г^2 p^2\right)},$$

де $K = 40\ с^{-1}$; $\xi = 0{,}2$; $T_г = 6{,}5 \cdot 10^{-3}$ с.

Використовуючи програму рахунку на Бейсику, дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівнянь систем автоматичного регулювання.

101. $0{,}45y^{IV} + 2{,}74y''' + 9{,}6y'' + 15{,}31y' + 26{,}7y = 0$.

102. $0{,}0015y''' + 0{,}5y'' + 0{,}59y' + 8y = 0$.

103. $0{,}005y^{V} + 0{,}15y^{IV} + 1{,}25y''' + 5y'' + 50y' + 300y = 0$.

104. $3 \cdot 10^{-4}y^{V} + 5 \cdot 10^{-3}y^{IV} + 0{,}1y''' + 0{,}5y'' + 0{,}9y' + y = 0$.

5.12. СТІЙКІСТЬ НАВІГАЦІЙНИХ СИСТЕМ

Приклади. **1.** Рух астатичного гіроскопа під впливом зовнішнього моменту при малих кутах відліку описується рівняннями

$$\begin{cases} I\dot{y} + Hx = L_y, \\ I\dot{x} - Hy = 0, \end{cases} \tag{12.1}$$

де x, y – кутові швидкості, які визначають положення головної осі; I, H, L_y – сталі. Дослідити точку спокою системи (12.1) на стійкість.

Розв'язання. Система рівнянь збурень (збуреного руху) має вигляд [див. ч. 2, гл. 5, § 4]

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dfrac{H}{I}z_2, \\ \dot{z}_2 = -\dfrac{H}{I}z_1, \end{cases} \tag{12.2}$$

тому що система (12.1) лінійна.

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & \dfrac{H}{I} \\ -\dfrac{H}{I} & -k \end{vmatrix} = 0$$

має корені $$k_{1,2} = \pm j\frac{H}{I}.$$

Тому точка спокою системи (12.1) стійка, але не асимптотично.

2. Диференціальне рівняння бортової качки корабля без урахування опору води має вигляд

$$I\ddot{\Theta} + Pl\Theta = Pl\alpha_0 \sin\frac{2\pi t}{\tau}, \tag{12.3}$$

де Θ – кут крена; I, P, l, α_0, τ – сталі. Дослідити на стійкість точку спокою рівняння (12.3).

Розв'язання. Рівняння (12.3) лінійне, тому рівняння збурень має вигляд [див. ч. 2, гл. 5 § 7]

$$I\ddot{z} + Plz = 0. \tag{12.4}$$

Характеристичне рівняння

$$Ik^2 + Pl = 0$$

має корені $$k_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{Pl}{I}}.$$

Тому нульовий розв'язок рівняння (12.4) стійкий, але не асимптотично. Тоді точка спокою рівняння (12.3) стійка, але не асимптотично.

105. Диференціальне рівняння гіроскопа під впливом зовнішнього моменту, напрямленого вздовж осі гіроскопа, має вигляд

$$\tau\ddot{\beta}+\dot{\beta}=\frac{H}{K_D}\omega_z+\frac{L_y}{K_D},$$

де $\beta(t)$ – кут відхилення осі гіроскопа від початкового положення; τ, H, K_D, ω_z, L_y – сталі. Дослідити точку спокою рівняння на стійкість.

106. Власні коливання гірокомпаса описуються рівняннями

$$\begin{cases} H\dot{\alpha}+C\beta=0, \\ H\left(\dot{\beta}-\omega\alpha\right)+D\beta=0, \end{cases}$$

де α, β – кутові координати, що визначають положення чутливого елемента відносно його положення рівноваги; H, C, ω, D – сталі. Дослідити точку спокою системи рівнянь на стійкість, якщо

$$\frac{C}{H}=0{,}01\ \text{с}^{-1};\ \frac{D}{H}=0{,}0008\ \text{с}^{-1};\ \omega=0{,}002\ \text{с}^{-1};\ \alpha=0{,}01;\ \beta=0{,}02.$$

Відповіді

1. Стійкий. **2–4.** Нестійкий. **5.** Асимптотично стійкий. **6.** Стійкий. **7.** Асимптотично стійкий. **8.** Нестійкий. **9.** Асимптотично стійкий. **10.** Нестійкий. **11.** $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1+2x_2, \\ \dot{x}_2=2x_1-x_2.\end{cases}$ **12.** $\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+2x_2, \\ \dot{x}_2=x_1.\end{cases}$ **13.** Нестійкий фокус. **14.** Сідло. **15.** Стійкий вузол. **16.** Центр. **17.** Стійкий фокус. **18.** Нестійкий вузол. **19.** Нестійка. **20.** Стійкий фокус. **21.** Сідло. **22.** Центр. **23.** Ні за яких α. **24.** $|\alpha|\geq 2$. **25.** $\alpha\leq 0$. **26.** $-\frac{5}{2}\leq\alpha\leq -2$. **27.** Нестійкий вузол. **28.** Сідло. **29.** Центр. **30.** Стійкий вузол. **31.** Нестійка. **32.** Сідло. **33.** Стійкий фокус. **34.** Нестійкий фокус. **35, 36.** Нестійка. **37, 38.** Стійка асимптотично. **39 – 41.** Нестійка. **42, 43.** Стійка асимптотично. **44, 45.** Нестійка. **46.** Стійка асимптотично. **47.** (0; 0) – центр, $\left(\frac{1}{3};\ 0\right)$ – сідло. **48.** (±1; 0) – центр, (0; 0) – сідло. **49.** (–4; 1), (4; –1) – сідло, (–1; 4) – нестійкий вузол, (1; –4) – стійкий вузол. **50.** (–3; 2), (3; –2) – сідло, (–3; –2) – стійкий фокус, (3; 2) – нестійкий фокус. **51.** $(2k\pi;\ 0)$ – стійка асимптотично, $\left((2k+1)\pi;\ 0\right)$ – нестійка. **52.** $(2k\pi;\ 0)$ – нестійка, $\left((2k+1)\pi;\ 0\right)$ – стійка асимптотично. **53.** (0; 0) – стійка асимптотично, (1; 1) – нестійка, (–1; –1) – нестійка. **54.** Стійкий. **55.** Нестійкий. **56.** Стійкий. **57, 58.** Нестійкий. **59.** Стійкий. **60, 61.** Нестійкий. **62, 63.** Стійкий. **64.** Нестійкий. **65.** Стійкий при $\alpha>1{,}5$. **66, 67.** Нестійкий при всіх $\alpha\in R$. **68–71.** Стійкий. **72–74.** Нестійкий. **75.** Рівняння межі області стійкості $\beta=0$ і $\beta=11\alpha$, $\alpha\in R$. **76.** Рівняння межі області стійкості $\alpha(\beta-2)=4$, $\beta>0$. **77.** Область стійкості визначається нерівностями $\beta>0$ і $\alpha>\beta+1$. **78.** Область стійкості визначається нерівностями $\alpha>0$; $\beta>0$; $8\alpha-\alpha^2\beta>4$. **79.** Явно додатна. **80.** Знакозмінна. **81.** Знакододатна. **82.** Якщо $y<\frac{1}{4}$, то $v(x,\ y)>0$, окрім $x=0$, $y=0$. **83.** Знаковід’ємна. **84.** Знакозмінна. **85.** Явно додатна. **86.** Знакододатна. **87.** Знакозмінна. **88.** Явно додатна. **89.** Явно додатна. **90.** $v(x,\ y)=x^2+y^2$. **91.** $v(x,\ y)=x^4+2y^4$. **92, 93.** Асимптотично стійка. **94.** Нестійка. **95.** Стійка. **96.** Нестійка. **97, 98.** Стійка. **99.** Нестійка. **100–102.** Стійка. **103.** Нестійка. **104.** Стійка. **105, 106.** Стійка.

Глава 6

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

6.1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

6.1.1. Основний принцип комбінаторики

Розглянемо скінченні множини A з елементами a, B з елементами b, C з елементами c. Об'єднання, перетин і різницю множин A, B позначатимемо відповідно $A \cup B$, AB (або $A \cap B$) та $A \setminus B$; $\varnothing$ – порожня множина [див. ч. 2, с. 176 –179].

Через $N(A)$ позначимо число елементів множини A: якщо $N(A) = n$, то множину A називають n-множиною.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b – n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним із виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $m+n$ способами, тобто, якщо $N(A) = m$, $N(b) = n$, $AB = \varnothing$, то $N(A \cup B) = m + n$.

Правило добутку. Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і під час кожного вибору об'єкта a об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари $(a,\ b)$ можна здійснити mn способами.

Основний принцип комбінаторики (або узагальнене правило добутку). Якщо об'єкт a_1 можна вибрати m_1 способами, об'єкт a_2 – m_2 способами, ..., об'єкт a_r – m_r способами, то вибір упорядкованої системи $(a_1,\ a_2, ..., a_r)$ можна здійснити $m_1, m_2 \cdots m_r$ способами.

Приклади. **1.** Із пункту A до пункту B можна проїхати трьома різними видами транспорту, а з B до C – двома. Яким числом способів можна проїхати з пункту A до пункту C через пункт B?

Розв'язання. Мабуть, число різних шляхів з A до C дорівнює $3 \cdot 2 = 6$, тому що для кожного з трьох можливих способів подорожі з A до B маємо два можливих способи подорожі з B до C, тобто кількість способів подорожі з A до C, згідно з правилом добутку, дорівнює $3 \cdot 2 = 6$.

Відповідь: 6 способів.

2. У розиграші першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Яким числом способів можуть бути розподілені золота та срібна медалі?

Розв'язання. Золоту медаль може отримати одна з 16 команд, тобто золота медаль може бути розподілена 16 способами. Після того, як визначений власник золотої медалі, срібну може отримати одна з 15 команд. Отже, згідно з правилом добутку, загальна кількість способів, якими можуть бути розподілені золота та срібна медалі, дорівнює $16 \cdot 15 = 240$.

Відповідь: 240 способів.

6.1.2. Розміщення. Сполучення. Перестановки

Нехай $\mathbf{M}$ є n-множиною, $k \le n$. *Розміщеннями* з n елементів по k називаються будь-які впорядковані k-підмножини множини $\mathbf{M}$, тобто такі комбінації елементів, які можуть відрізнятися одна від одної або самим елементом, або їх порядком, або і тим і іншим. Число розміщень з n елементів по k позначають як A_n^k (A – це перша літера французького слова arrangement – розміщення, впорядкування) та визначають за формулою (2.22) [ч. 1, с. 201]:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

або, при $k \le n$, за формулою (2.20) [ч. 1, с. 200]

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1).$$

Приклади. **1.** Нехай є три елементи: $a,\ b,\ c$ $(n=3)$. Складемо з них усі можливі розміщення по два елементи $(k=2)$. Дістанемо такі пари:

$$ab,\ ac,\ bc,\ ba,\ ca,\ cb.$$

Їх кількість

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

2. Скількома способами можна розсадити чотирьох курсантів на 25 місцях?

Розв'язання. Шукане число різних способів дорівнює числу розміщень з 25 по 4:

$$A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Відповідь: 303 600 способів.

Нехай $\mathbf{M}$ є n-множиною. *Сполученнями* з n елементів по k називаються будь-які k-підмножини множини $\mathbf{M}$, тобто це такі комбінації з n елементів по k, які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом (порядок ролі не відіграє). Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається через C_n^k (C – перша літера французького слова combinaison – комбінація).

Наприклад, нехай є три елементи: a, b, c. Складемо з них сполучення по $k=2$ елементи: ab, ac, bc. У загальному випадку число сполучень із n елементів по k визначається за формулою (2.23) [ч. 1, с. 201]

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

***Приклади.* 3.** Яким числом способів можна поділити наполовину групу з восьми чоловік?

Розв'язання. Потрібно відібрати чотири чоловіки з восьми. Оскільки послідовність відбирання значення не має, то йдеться про сполучення. Отже,

$$C_8^4 = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70.$$

Відповідь: 70 способів.

4. В ящику міститься 20 радіоламп, серед яких вісім браковані. Яким числом способів можна з 20 ламп вийняти шість так, щоб серед них були дві браковані?

Розв'язання. Оскільки з 20 ламп вісім – браковані, то 12 – доброякісні. Тоді потрібно вибрати чотири доброякісні лампи з 12 можливих і дві браковані з восьми можливих бракованих. Це можна зробити таким числом способів:

$$C_{12}^4 C_8^2 = \frac{12!}{4!\cdot 8!}\ \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 13\,860.$$

Відповідь: 13 860 способів.

Розміщення з n елементів по n називаються *перестановками* з n елементів, тобто це такі комбінації, які відрізняються між собою тільки порядком елементів. Число перестановок з n елементів позначають як P_n (P – перша літера французького слова permutation – перестановка). Число перестановок з n елементів обчислюється за формулою (2.21) [ч. 1, с. 201]

$$P_n = n!$$

***Приклади.* 5.** Одного разу 10 друзів зайшли до ресторану. Хазяїн ресторану запропонував їм приходити до нього щодня і кожного разу сідати за той самий стіл по іншому. Після того як усі способи розміщення будуть вичерпані, їх годуватимуть у ресторані безкоштовно. Коли настане цей день?

Розв'язання. Число різних способів розміщення десяти чоловік за столом, очевидно, $P_{10} = 10! = 3\,628\,800 \approx 3{,}6\cdot 10^6$.

Відповідь: цей день настане через 9 942 роки.

6. Скількома способами можуть розміститись 5 чоловік у черзі до каси?

Розв'язання. $P_5 = 5! = 120$.

Відповідь: 120 способами.

7. Скільки можна скласти перестановок з n елементів, в яких дані два елементи не стоять поруч?

Розв'язання. Визначимо число перестановок, в яких дані два елементи a і b розміщуються поруч. Можуть бути такі випадки:

1) a стоїть на першому місці;

2) a – на другому місці;

3) a – на $(n-1)$ місці, а b – правіше від a.

Число таких випадків – $(n-1)$. Крім того, a і b можна міняти місцями, і, отже, число випадків, коли a і b розміщуються поруч, дорівнює $2(n-1)$.

Кожному із цих способів відповідає $(n-2)!$ перестановок інших елементів. Отже, число перестановок, в яких a і b містяться поруч, дорівнює $2(n-1)(n-2)! = 2(n-1)!$ Тому шукане число перестановок дорівнює $n! - 2(n-1)!$

Відповідь: $n! - 2(n-1)!$ перестановок.

1. Скільки чотиризначних непарних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри не повторювались?

2. Скільки є п'ятизначних чисел, які діляться на 5 ?

3. Нехай з пункту A до пункту B є m доріг, з A до C – n доріг, з B до D – k доріг, з C до D – l доріг, B і C між собою дорогами не сполучені. Скількома дорогами можна потрапити з пункту A до пункту D?

4. Скільки діагоналей у k - кутнику $(k>3)$?

5. Студентові потрібно здати чотири екзамени протягом восьми днів. Скількома способами можна скласти розклад екзаменів?

6. Скількома способами можна присудити золоту, срібну та бронзову медалі на змаганнях, в яких беруть участь 15 чоловік?

7. Якщо k друзів обмінялися вітальними листівками, то скільки було відіслано листівок?

8. Вивчається десять предметів. Скількома способами можна скласти розклад занять по три пари на один день, якщо один предмет займає не більше ніж одну пару?

9. Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з восьми нападаючих, п'яти захисників та двох воротарів, якщо до складу команди повинні ввійти три нападаючих, два захисники й один воротар?

10. У колоді 52 карти. Яким числом способів можна вийняти 10 карт?

11. У колоді 52 карти. Вийняли 10 карт. У скількох випадках серед них опиниться тільки один туз?

12. Скільки різних п'ятизначних чисел, що починаються цифрою 1 і закінчуються цифрою 5, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб жодна цифра не повторювалась.

13. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо всі цифри утвореного числа мають бути різними?

14. Скількома способами можна з 30 студентів групи обрати старосту, фізрука і редактора стінгазети?

15. У шаховому турнірі беруть участь 7 чоловік. Скількома способами можуть розподілитись місця між ними?

16. На вечорі присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них чотири пари для танців?

17. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 чоловік?

18. З десяти різних квіток треба скласти букет так, щоб у ньому було не менше двох квіток. Скількома способами можна скласти такий букет?

19. У списку є прізвища десяти чоловік, з яких потрібно обрати до президії трьох. Скількома способами це можна зробити, якщо: а) байдуже, які прізвища будуть у трьох обраних; б) потрібно назвати голову, його замісника та секретаря?

6.2. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Приклади. **1.** Двічі підкинуто монету. Описати простір елементарних подій. Описати події: A – припав герб не менше ніж один раз; B – припала цифра рівно один раз; C – припала цифра принаймні один раз.

Розв'язання. Простір елементарних подій – це сукупність усіх можливих наслідків випробування. Позначимо припадання цифри літерою Ц, появу герба – Г. Тоді можливі такі випадки: $\omega_1(\text{ГГ})$ – подія, що полягає в появі герба першого й другого разу; $\omega_2(\text{ГЦ})$ – першого разу припав герб, а другого – цифра; $\omega_3(\text{ЦГ})$ – першого разу припала цифра, а другого – герб; $\omega_4(\text{ЦЦ})$ – обидва рази припала цифра.

Подія A – припадання герба не менше ніж один раз можлива в трьох випадках. Герб з'являється двічі або один раз – не має значення, першого чи другого разу за рахунком.

Тому

$$A = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3.$$

Подія B – поява цифри рівно один раз можлива у двох випадках: цифра припала першого чи другого разу, тобто $B = \omega_2 + \omega_3$.

Подія C – поява цифри принаймні один раз аналогічна події A, тому

$$C = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = B + \omega_4.$$

2. Кидають два гральних кубики. Описати простір елементарних подій. Описати подію A, тобто таку, коли сума очок, що випала на обох кубиках, не перевищить п'ять.

Розв'язання. Нехай n_1 очок припало на першому кубику, n_2 – на другому. Простір елементарних подій - це множина пар $(n_1,\ n_2)$:

$$\Omega = \{(n_1,\ n_2) : n_1,\ n_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Подія A, що нас цікавить, має вигляд

$$A = \{(n_1,\ n_2) : n_1,\ n_2 = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ n_1 + n_2 < 5\}.$$

Множина Ω містить 36 елементів, множина A – 10 елементів.

Відповідь: множина Ω – 36 елементів, A – 10 елементів.

3. Мішень має п'ять кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $r_k\ (k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$, причому $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5$. Подія A_k – влучення точки в круг із радіусом r_k. Що означають події

$$B = \bigcup_{k=1}^{3} A_k;\ \ C = \bigcap_{k=1}^{5} A_k;\ \ D = \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}?$$

Розв'язання. B – сума подій A_1, A_2, A_3, тобто подія, що полягає в появі принаймні однієї з них. Для її здійснення необхідне виконання умови $0 < r < r_3$, де r – відстань від центра мішені до точки влучення, при цьому, якщо $r_2 < r < r_3$, то відбулося влучення тільки в круг із радіусом r_3, якщо ж $r_1 < r < r_2$, влучення відбудеться і в круг із радіусом r_2, і в круг із радіусом r_3; у разі $0 < r < r_1$ влучення відбудеться в усі три круги.

Подія C означає одночасне влучення в усі круги. Це здійснюється, якщо $0 < r < r_1$.

Подія D полягає в одночасному промаху в круг із радіусом r_1, влученні в круг із радіусом r_2 та в тому, що в круг з радіусом r_3 не було жодного влучення, причому за умови $r_1 < r_2 < r_3$, тому подія D неможлива.

20. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 вибирають одну, а потім з останніх чотирьох – другу. Описати простір елементарних подій та виділити в ньому частину множини, що відповідає події $A=\{$обидва рази припала непарна цифра$\}$.

21. Описати простір елементарних подій розподілу трьох куль в ящику: а) кулі пофарбовані: червона, біла, синя; б) кулі одного кольору.

22. Монету підкидають тричі. Описати простір елементарних подій. Описати події: $A=\{$припав герб не менше двох разів$\}$; $B=\{$припала цифра рівно один раз$\}$.

23. Із повної колоди з 36 карт виймають навмання одну карту, при цьому можливі такі події: $A_1=\{$туз$\}$; $A_2=\{$король$\}$; $A_3=\{$дама$\}$; $A_4=\{$валет$\}$; $A_5=\{$десятка$\}$; $A_6=\{$дев'ятка$\}$; $A_7=\{$вісімка$\}$; $A_8=\{$сімка$\}$; $A_9=\{$шістка$\}$. Чи складають ці події повну групу; чи є вони несумісними; чи є вони рівноможливими; чи складають вони простір елементарних подій?

24. Нехай A, B і C – три довільні події. Знайти вирази для подій, які полягають у тому, що з A, B, C: $D_1=\{$сталася принаймні одна подія$\}$; $D_2=\{$сталася тільки одна подія$\}$; $D_3=\{$усі події відбулися$\}$; $D_4=\{$не сталося жодної події$\}$; $D_5=\{$відбулися не менше ніж дві події$\}$.

25. Серед студентів, які присутні на лекції, вибирають навмання одного. Нехай подія A полягає в тому, що обраний виявиться юнаком, B – в тому, що він не курить, а C – в тому, що він мешкає в гуртожитку. Описати подію $AB\bar{C}$. За яких умов буде слушною тотожність $ABC=A$? Коли буде слушне рівняння $\bar{A}=B$, чи воно буде, якщо всі юнаки курять?

26. Монету підкидають доти, доки вона не впаде двічі підряд одним боком. Описати простір елементарних подій.

27. Стрілець двічі стріляє по мішені: A – влучення під час першого пострілу, B – під час другого. Описати простір елементарних подій. Записати подію, яка полягає в тому, що: а) стрілець влучив у мішень принаймні один раз (подія C); б) стрілець влучив рівно один раз (подія D); в) стрілець не влучив у мішень (подія E).

28. В урні лежать чотири кулі, позначені цифрами 1, 2, 3, 4. Виймають дві кулі. Описати простір елементарних подій. Записати елементарні події, сприятливі для події: "вийнято дві кулі з парними номерами".

29. Нехай A, B, C – деякі події. Записати вирази для подій, які полягають у тому, що: а) сталася тільки подія A; б) відбулися події A і B, але подія C не настала; в) сталася принаймні одна із цих подій; г) не відбулося жодної із цих подій; д) відбулися всі три події; е) сталося не більше двох подій.

6.3. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЙ

Приклади. **1.** Лотерея складається з 1000 білетів, серед яких 120 виграшних. Навмання виймається білет. Знайти ймовірність того, що він виграшний.

Розв'язання. Різних результатів у цьому випробуванні $1000\,(n=1000)$. Події A, що нас цікавить, сприяє 120 результатів, отже, $m=120$. Таким чином, згідно з означенням

$$P(A)=\frac{120}{1000}=\frac{3}{25}.$$

Відповідь: $\frac{3}{25}$.

2. Тричі підкидають монету. Знайти ймовірність подій: $A=\{$герб припадає три рази$\}$; $B=\{$герб припадає принаймні один раз$\}$; $C=\{$герб припадає не менше ніж два рази$\}$.

Розв'язання. Опишемо простір елементарних подій: $\omega_1=\{\text{Г Г Г}\}$; $\omega_2=\{\text{Г Г Ц}\}$; $\omega_3=\{\text{Г Ц Г}\}$; $\omega_4=\{\text{Ц Г Г}\}$; $\omega_5=\{\text{Г Ц Ц}\}$; $\omega_6=\{\text{Ц Г Ц}\}$; $\omega_7=\{\text{Ц Ц Г}\}$; $\omega_8=\{\text{Ц Ц Ц}\}$. Зрозуміло, що ці вісім випадків рівноможливі. Події A сприяє один результат – ω_1, тому $P(A)=\frac{1}{8}$. Події B сприяють результати ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6, ω_7, тому $P(B)=\frac{7}{8}$. Імовірність події B ще можна знайти за формулою $P(B)=1-P(\bar{B})$. Подія $\bar{B}$ полягає в тому, що герб не випаде жодного разу: $P(\bar{B})=\frac{1}{8}$, $P(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$. Події C сприяють результати ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, тому $P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $P(A)=\frac{1}{8}$; $P(B)=\frac{7}{8}$; $P(C)=\frac{1}{2}$.

3. Відстань від пункту A до пункту B автобус проходить за τ хвилин, а пішохід – за t хвилин $(t>\tau)$. Інтервал руху автобусів T хвилин. В якийсь момент пішохід виходить із пункту A. Знайти ймовірність того, що під час руху його наздожене наступний автобус.

Розв'язання. Позначимо через x проміжок часу, що віддаляє момент відправлення автобуса з пункту A від моменту виходу пішохода. Оскільки інтервал руху автобусів T хвилин, то можливе значення x обмежується нерівністю $0 \le x \le T$. Автобус наздожене пішохода, якщо $0 \le x \le t - \tau$.

Шукана ймовірність дорівнює відношенню довжин відрізків, на яких знаходяться всі сприятливі й можливі значення x [ч. 2, с. 509], тому

$$P = \begin{cases} \dfrac{t-\tau}{T} & \text{при} \quad t - \tau \le T, \\ 1 & \text{при} \quad t - \tau \ge T. \end{cases}$$

Отже, якщо $t = 20$ хв, $\tau = 4$ хв, $T = 30$ хв, то $P = \dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$.

Відповідь: $\dfrac{8}{15}$.

4. На одній доріжці магнітної стрічки завдовжки 200 м записано повідомлення на інтервалі 20 м, на іншій – на інтервалі 30 м. Визначити ймовірність того, що на інтервалі від 100 до 135 м не буде проміжку стрічки, яка не має запису, якщо початки обох повідомлень рівноможливі в будь-якій точці від 0 до 180 м для першого запису і від 0 до 170 м для другого.

Розв'язання. Нехай x та y – координати початку запису, причому $x \ge y$. Оскільки $0 \le x \le 180$, $0 \le y \le 170$, $x \ge y$, то область можливих значень x і y – це прямокутний трикутник із катетами 170 і 180 м, площа якого $S = \dfrac{170 \cdot 180}{2} = 15\,300$ (м^2).

Знайдемо область значень, сприятливих події, яка розглядається. Для того щоб запис на інтервалі був неперервний, необхідно виконання нерівності $x - y \le 30$, а щоб інтервал запису був не менше ніж 35 м, має бути $x - y \ge 15$. Крім того, очевидно, мають виконуватись нерівності $x \le 130$, $y \ge 85$. Отже, дістаємо $115 \le x \le 130$, $85 \le y \le 100$.

Проведемо межі вказаних областей та дізнаємось, що сприятливі значення x і y містяться в трикутнику, площа якого $S = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot 15^2 = 112{,}5$ (м^2). Шукана ймовірність

$$P = \frac{112{,}5}{15\,300} = \frac{1}{136}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{136}$.

5. На п'яти картках написані цифри від 1 до 5. Дослід полягає у випадковому виборі трьох карток і розкладанні їх у порядку появи в ряд зліва направо. Знайти ймовірність того, що з'явиться число, яке не містить цифру 2.

Розв'язання. Кількість усіх можливих результатів досліду дорівнює кількості розміщень з п'яти елементів по три. Події сприяє розміщення, що не містить цифри 2, тобто розміщення з чотирьох цифр: 1, 3, 4, 5 – по три. Отже,

$$P(A) = \frac{A_4^3}{A_5^3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{2}{5}$.

6. Сім літер розрізної абетки: А, А, М, М, К, О, Ч містяться в мішку, звідки їх беруть навмання й розкладають одну за одною в порядку, в якому вони з'являються. Яка ймовірність того, що з'явиться слово МАМОЧКА?

Розв'язання. Пронумеруємо картки з літерами:

1	2	3	4	5	6	7
А	А	М	М	К	О	Ч

Картки можна розкласти по порядку $7! = 5040$ способами. Це кількість усіх можливих результатів. Із них сприятливими будуть тільки такі чотири:

3	1	4	6	7	5	2	4	1	3	6	7	5	2
М	А	М	О	Ч	К	А	М	А	М	О	Ч	К	А
3	2	4	6	7	5	1	4	2	3	6	7	5	1
М	А	М	О	Ч	К	А	М	А	М	О	Ч	К	А.

Отже,
$$P = \frac{4}{5\,040} = \frac{1}{1\,260}.$$

Відповідь: $\dfrac{1}{1260}$.

7. Є $n + m$ білетів, з яких n виграшних. Одночасно купується k білетів. Знайти ймовірність того, що серед них s виграшних білетів.

Розв'язання. Кількість усіх можливих результатів дорівнює кількості способів вибору k різних білетів з $n + m$ білетів, а саме C_{n+m}^k.

Кількість сприятливих результатів становить $C_n^s\, C_m^{k-s}$, що являє собою кількість способів вибору з n виграшних білетів s виграшних, помножену на кількість способів вибору з m невиграшних білетів $k - s$ невиграшних. Шукана ймовірність

$$P = \frac{C_n^s \cdot C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}.$$

Наприклад, нехай

$$n+m=200;\ n=20;\ m=180;\ k=5;\ s=2,$$

тоді
$$P=\frac{C_{20}^{2}\ C_{180}^{3}}{C_{200}^{5}}=\frac{20\cdot 19\cdot 180\cdot 179\cdot 178\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 200\cdot 199\cdot 198\cdot 197\cdot 196}\approx 0,072.$$

Відповідь: 0,072.

8. У ліфт десятиповерхового будинку на 1-му поверсі ввійшли 4 чоловіки. Вважається, що кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з 2-го. Знайти ймовірність подій: $A=$ {усі пасажири вийдуть на 5-му поверсі}; $B=$ {усі пасажири вийдуть на одному й тому самому поверсі}; $C=$ {усі пасажири вийдуть на різних поверхах}.

Розв'язання. Кількість усіх можливих результатів дорівнює 9^4, тому що кожний із чотирьох пасажирів може вийти на будь-якому з дев'яти поверхів.

Події A сприяє тільки один результат, а саме, коли кожний пасажир вийде на 5-му поверсі, тобто

$$P(A)=\frac{1}{9^4}\approx 0,000\,152\ldots$$

Події B сприяють дев'ять результатів: усі пасажири можуть вийти або на 1-му, або на 2-му, ... , або на 9-му поверсі. Отже, $P(B)=\frac{9}{9^4}=\frac{1}{9^3}\approx 0,001\,37\ldots$ Події C сприяє кількість результатів, що дорівнює кількості сполучень, яку можна скласти з 9 по 4:

$$P(C)=\frac{C_9^4}{9^4}=\frac{14}{729}\approx 0,019\,2\ldots$$

Відповідь: 0,000 152 ...; 0,001 37 ...; 0,019 2 ...

9. З урни, яка містить N білих і M чорних куль, два рази виймають по одній кулі. Першу взяту кулю в урну не повертають. Знайти ймовірність того, що білу кулю візьмуть під час другого виймання.

Розв'язання. Часто ймовірність деякої події A доводиться оцінювати залежно від того, сталася чи не сталася подія B. У цьому разі класична і статистична ймовірності називаються умовними класичною і статистичною ймовірностями і позначаються відповідно $P(A/B)$, $P^{*}(A/B)$ або $P_B(A)$, $P_B^{*}(A)$.

Імовірність того, що біла куля буде вийнята другою, є умовною і залежить від результату першого виймання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що вийнята біла куля, B – чорна. Тоді [ч. 2, с. 503–505]

$$P(A/B)=\frac{N}{N+M-1};\quad P(A/A)=\frac{N-1}{N+M-1}.$$

Відповідь: імовірність того, що білу кулю візьмуть під час другого виймання, дорівнює $P(A/B)$ або $P(A/A)$.

30. В урні 15 куль із номерами від 1 до 15. Яка ймовірність навмання витягти кулю з парним номером? З номером, що кратний п'яти?

31. Відділ технічного контролю виявив п'ять бракованих виробів у партії, що складається з 1000 виробів. Знайти частоту появи бракованого виробу.

32. Під час стрільби з гвинтівки відносна частота влучень у ціль виявилась рівною 0,9. Знайти число влучень з 15 пострілів.

33. Монету підкинули два рази. Яка ймовірність того, що обидва рази припаде герб?

34. Після бурі на дільниці між 10-м і 100-м кілометрами телефонної лінії обірвався провід. Знайти ймовірність того, що обрив стався між 35-м і 40-м кілометрами (припускається рівноможливим обрив у будь-якій точці лінії).

35. Куб, усі грані якого пофарбовані, розпилений на 1000 кубиків однакового розміру. Одержані кубики старанно перемішані. Визначити ймовірність того, що вийнятий навмання кубик буде мати: а) одну пофарбовану грань; б) дві пофарбовані грані; в) три пофарбовані грані; г) усі непофарбовані грані.

36. В інтервалі часу $[0;\ T]$ у випадковий момент τ з'являється сигнал тривалістю Δ. Приймач вмикається у випадковий момент часу $v[0;\ T]$ на час t. Знайти ймовірність виявлення сигналу приймачем.

37. Два судна мають прибути до одного й того самого причалу. Появи суден – незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному із суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна становить одну годину, а другого – дві години.

38. По обидва боки магнітної стрічки завдовжки L розташовані записи: на одному боці завдовжки l_1, а на другому – l_2; місцезнаходження обох записів невідоме. У зв'язку з пошкодженнями стрічки довелось відрізати її ділянку завдовжки s_0, що починається на відстані s від початку стрічки. Знайти ймовірність таких подій: $A=$ {ні перший, ні другий запис не пошкоджені}; $B=$ {перший запис пошкоджений, другий – ні}; $C=$ {другий запис пошкоджений, перший – ні}; $D=$ {обидва записи пошкоджені}.

39. У туристів було сім консервних банок: три з м'ясом, дві з овочами і дві з фруктами. Припустимо, що під час дощу етикетки на банках відклеїлись. А всі банки однакові. Яка ймовірність того, що три банки, відкриті навмання, будуть відрізнятися вмістом?

40. У ряд, в якому 15 місць, випадково сідають 15 чоловік. Знайти ймовірність того, що два певних чоловіки опиняться поруч.

41. Студент прийшов на екзамен, знаючи 40 з 50 запитань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає всі три питання екзаменаційного квитка.

42. З ящика, в якому є сім білих і вісім чорних куль, вийняли дві кулі по одній без повернення. Знайти ймовірність того, що обидві кулі білі.

43. Яка ймовірність того, що в разі випадкового розташування десяти літер: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т, можна отримати слово МАТЕМАТИКА?

44. Знайти, що більш імовірно: одержати принаймні одну одиницю в разі одночасного підкидання чотирьох гральних кубиків чи хоча б один раз дві одиниці в разі 24 підкидань двох гральних кубиків. (Відповідь відома як парадокс де Мере. Гравець Шевальє де Мере вважав імовірності однаковими й звинувачував у своїх програшах математиків.)

45. Робиться вибірка обсягу r з генеральної сукупності, що складається з n елементів. Знайти ймовірність того, що жоден із даних N елементів не потрапить у вибірку, якщо вибірка робиться: а) без повернень; б) з поверненнями. Порівняти кількісні результати для різних способів вибірки, якщо: 1) $n = 100$, $N = r = 3$; 2) $n = 100$, $r = N = 10$.

46. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена в будь-якому місці всередині кола, потрапить у вписаний у це коло: а) правильний трикутник; б) квадрат.

6.4. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Приклади. **1.** Партію зі 100 деталей піддали вибірковому контролю. Умовою непридатності всієї партії є наявність принаймні однієї бракованої деталі з п'яти, які обстежуються. Яка ймовірність для цієї партії бути прийнятою, якщо вона містить 5 % непридатних деталей?

Розв'язання. Знайдемо ймовірність події A, яка полягає в тому, що партія деталей буде прийнята. Подія A є перетином подій A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, якщо A_k – подія, яка полягає в тому, що k-та деталь придатна $(k = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$: $A = A_1A_2A_3A_4A_5$.

Імовірність події A_1 визначається як $P(A_1) = \dfrac{95}{100}$, оскільки серед 100 деталей 5 % браку, тобто п'ять бракованих деталей; $P(A_2/A_1)$ – імовірність появи

другої придатної деталі за умови, що подія A_1 відбулась (перша деталь виявилася придатною), тобто із загальної кількості деталей, що дорівнює 100, спочатку вибрали одну, залишилось 99, з яких 94 придатні. Тому

$$P(A_2/A_1) = \frac{94}{99}.$$

Аналогічно можна описати такі умовні ймовірності:

$$P(A_3/A_1A_2) = \frac{93}{98};\quad P(A_4/A_1A_2A_3) = \frac{92}{97};\quad P(A_5/A_1A_2A_3A_4) = \frac{91}{96}.$$

Отже,
$$P(A) = \frac{95}{100}\cdot\frac{94}{99}\cdot\frac{93}{98}\cdot\frac{92}{97}\cdot\frac{91}{96} \approx 0{,}77.$$

Відповідь: 0,77 .

2. Два стрільці зробили по одному пострілу в мішень. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що: а) обидва стрільці влучать у мішень; б) принаймні один зі стрільців влучить у мішень; в) жоден не влучить.

Розв'язання. Подію $A =$ {обидва стрільці влучать у мішень} можна розглядати як перетин двох незалежних подій: $A_1 =$ {перший стрілець влучить у мішень}; $A_2 =$ {другий стрілець влучить у мішень}. За теоремою множення для незалежних подій (3.22) [ч. 2, с. 517]

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

Подія $B =$ {принаймні один зі стрільців влучить у мішень} являє собою суму подій A_1 і A_2. Оскільки події A_1 та A_2 сумісні, застосуємо формулу (3.15) [ч. 2. с. 512]:

$$P(B) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

Подія $C =$ {жоден зі стрільців не влучить у мішень} є перетином подій $C_1 =$ {перший стрілець не влучить у мішень} і $C_2 =$ {другий стрілець не влучить у мішень}. Події C_1 та C_2 незалежні й протилежні відповідно подіям A_1 і A_2: $C_1 = \overline{A}_1$; $C_2 = \overline{A}_2$, тому

$$P(C) = P(C_1C_2) = P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2) = (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) = 0{,}2\cdot 0{,}1 = 0{,}02.$$

Потрібно зазначити, що подія C протилежна події B, тому ймовірність події B можна знайти ще й так: $P(B) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$

Відповідь: а) 0,72; б) 0,9; в) 0,02.

3. Дві кульки розкинули випадково й незалежно одна від одної в чотири комірки, розташовані одна за одною по прямій лінії. Кожна кулька з однаковою ймовірністю $\frac{1}{4}$ потрапляє в сусідню комірку. Знайти ймовірність того, що кульки потраплять у сусідні комірки.

Розв'язання. Подію $A=$ {кульки потрапили в сусідні комірки} можна зобразити як суму незалежних подій: $A_1=$ {кульки потрапили в першу та другу комірки}; $A_2=$ {кульки потрапили в другу та третю комірки}; $A_3=$ {кульки потрапили в третю та четверту комірки}.

Імовірність кожного варіанта однакова, тому що кульки можуть потрапити в сусідні комірки двома рівноцінними способами (наприклад, для події A_1 – перша кулька потрапила в першу комірку, а друга кулька – в другу комірку і, навпаки, перша кулька – в другу комірку, а друга кулька – в першу комірку), тому цю кількість способів (2) потрібно помножити на ймовірність потрапляння кожної кульки (1/4) в комірку:

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

Отже,

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

Відповідь: $\frac{3}{8}$.

47. У круг, радіус якого R, вписано правильний трикутник. Навмання в цей круг кинуто чотири точки. Яка ймовірність того, що вони опиняться всередині трикутника?

48. Для кожної з трьох телевізійних камер імовірність того, що вона ввімкнена в даний час, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що у даний час: а) увімкнена принаймні одна камера; б) увімкнені дві камери; в) увімкнені всі три камери; г) не ввімкнена жодна камера.

49. Студент підготував до екзамену 40 запитань із 50. Знайти ймовірність того, що з трьох навмання вибраних запитань він знає не менше двох.

50. Ведеться стрілянина по літакові, вразливими частинами якого є два двигуни та кабіна пілота. Щоб вивести з ладу літак, досить уразити обидва двигуни разом або кабіну пілота. За даних умов стрілянини ймовірність влучення в перший двигун $p_1=0,1$, у другий двигун $p_2=0,2$, у кабіну пілота $p_3=0,15$. Частини літака вражаються незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що літак буде виведено з ладу.

51. Імовірність виграшу по одному білету лотереї дорівнює $\frac{1}{20}$. Яка ймовірність у разі наявності п'яти білетів виграти: а) по всіх п'яти білетах; б) ні по одному білету; в) принаймні по одному білету?

52. На станцію зв'язку надійшло 20 телеграм, адресованих у чотири різних пункти (по п'ять у кожний пункт). З усіх телеграм вибираються навмання чотири. Знайти ймовірність подій: а) усі телеграми адресовані в один пункт; б) усі телеграми адресовані у різні пункти.

53. В урні лежать дві білі й три чорні кулі. Два гравці по черзі виймають з урни по одній кулі, не повертаючи її назад. Виграє той, хто раніше одержить білу кулю. Яка ймовірність того, що виграє перший гравець?

54. В урні міститься десять білих, сім чорних і три червоні кулі. Знайти ймовірність того, що принаймні дві з трьох вийнятих навмання куль будуть одного кольору.

55. Ви кидаєте два правильних гральних кубики – червоного і рожевого кольорів, але результатів експерименту ви не бачите. Яка ймовірність того, що сума очок більше чи дорівнює десяти за умови: а) вам повідомлять, що "на червоному кубику випало п'ять очок"; б) вам повідомлять, що "на одному з кубиків випало п'ять очок" (можливість того, що випало п'ять очок на обох кубиках не виключається)?

56. З урни, в якій містяться кулі з номерами 1, 2, ..., n, виймають k разів по одній кулі й кожного разу повертають назад. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль утворюють зростаючу послідовність.

57. Розв'язати попередню задачу за умови, що витягнуті кулі в урну не повертають.

58. Підкидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що сума буде: а) 11 очок; б) 12 очок; в) 13 очок; г) більше ніж 10 очок?

6.5. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

Приклад. Є чотири урни з таким складом куль: перша – п'ять білих і п'ять чорних куль, друга – одна біла і дві чорні, третя – дві білі й п'ять чорних, четверта – три білі й сім чорних. Навмання обирають урну й у ній одну кулю. Чому дорівнює ймовірність того, що вона виявиться білою?

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що куля виявилась білою, а гіпотези ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 означають, що куля витягнута відповідно з першої, другої, третьої, четвертої урн. Ці гіпотези однаково ймовірні:

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)=P(\omega_4)=\frac{1}{4}.$$

Знайдемо

$$P(A/\omega_1)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2};\ P(A/\omega_2)=\frac{1}{3};\ P(A/\omega_3)=\frac{2}{7};\ P(A/\omega_4)=\frac{3}{10}.$$

За формулою повної ймовірності [(3.19), ч. 2, с. 515]

$$P(A)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{10}\right)=\frac{149}{420}.$$

Для переоцінки ймовірностей гіпотез після того, як подія відбулася, застосуємо формулу Беєса [(3.20), ч. 2, с. 516] й дістанемо

$$P(\omega_i/A)=\frac{P(\omega_i)P(A/\omega_i)}{P(A)},\quad i=\overline{(1,n)},$$

де $P(A)$ визначається за формулою повної ймовірності.

Переглянемо гіпотези за умов даного прикладу, якщо відомо, що витягнуто білу кулю:

$$P(\omega_1/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{149}{420}}=\frac{105}{298};\quad P(\omega_2/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{149}{420}}=\frac{35}{149};$$

$$P(\omega_3/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{149}{420}}=\frac{30}{149};\quad P(\omega_4/A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{149}{420}}=\frac{63}{298}.$$

Таким чином, після того як обрали білу кулю, ймовірності гіпотез істотно змінились; отже, умовні ймовірності гіпотез значною мірою залежать від розподілу білих куль в урнах.

Відповідь: $\frac{149}{420}$.

59. Із двадцяти стрільців чотири влучили в мішень з імовірністю 0,9; десять – з імовірністю 0,8 і шість – з імовірністю 0,6. Знайти ймовірність того, що навмання обраний стрілець влучить у мішень.

60. Із партії виробів, що надійшли до продажу, 50 % виготовлені першим заводом, 30 % – другим, 20 % – третім. Імовірність дефекту для виробів першого заводу – 0,1, другого – 0,05, третього – 0,15. Яка ймовірність того, що навмання обраний виріб буде з дефектом?

61. На трьох верстатах A, B і C виготовляють 9000 деталей. Відомо, що на верстаті A з імовірністю 0,01 деталь буде бракованою, на верстатах B і C ці ймовірності становлять відповідно 0,02 і 0,04. Одного разу, коли на верстаті A виготовили 4000 деталей, а на верстатах B і C – відповідно 4000 і 1000 деталей, одну деталь взяли до контролю і вона виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена на верстаті C.

62. Унаслідок порушення технологічного процесу в середньому 20 % продукції виявилось бракованої. Кожна деталь із цієї групи надійшла до контролю, який був недосконалим: якщо деталь відповідала нормі, контроль пропускав її з імовірністю 0,9, якщо ж деталь була бракованою, то на контролі її бракували з імовірністю 0,7. Покупець навмання вибирає одну деталь із великої партії проконтрольованої продукції. Знайти ймовірність того, що покупка буде з дефектом.

63. З урни, що містить три білі й дві чорні кулі, переклали дві витягнені навмання кулі до урни, в якій є чотири білі й чотири чорні кулі. Після цього з другої урни вийняли одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться білою?

64. На заводі виготовляють вироби, кожний з яких з імовірністю p має дефект. У цеху є три контролери. Виріб оглядає тільки один контролер – з однаковою ймовірністю перший, другий або третій. Імовірність виявлення дефекту (якщо він є) для i-го контролера дорівнює $p_i\,(i=1,\ 2,\ 3)$. Якщо виріб не забракували в цеху, він надходить до ВТК заводу, де дефект (якщо він є) виявляється з імовірністю p_0. Визначити ймовірність таких подій: $A=\{$виріб буде забраковано$\}$; $B=\{$виріб буде забраковано в цеху$\}$; $C=\{$виріб буде забраковано у ВТК заводу$\}$.

65. Імовірність для виробів деякого виробництва відповідати стандартові дорівнює 0,96. Пропонується спрощена система перевірки на стандартність, яка дає позитивний результат з імовірністю 0,9 для виробів, що задовольняють стандарт, а для виробів, що не задовольняють стандарт, – з імовірністю 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, визнаний під час перевірки стандартним, дійсно відповідає стандартові.

66. Урна містить n куль. Усі припущення про число білих куль в урні однаково ймовірні. Навмання вийнята з урни куля виявилась білою. Обчислити ймовірність усіх припущень про склад куль в урні. Яке припущення найбільш імовірне?

67. Пілот робить посадку літака, спостерігаючи за аеродромом візуально або сліпо (за приладами). У разі візуальної посадки ймовірність благополучного результату дорівнює p_1^*. Надійність (імовірність безвідмовної роботи) "сліпої" посадки – p_2. Якщо прилади під час "сліпої" посадки спрацьовують нормально, то літак сідає благополучно з тією самою імовірністю p_1, що й у разі візуальної посадки. Якщо ж прилади "сліпої" посадки не спрацювали, то пілот може благополучно посадити літак з імовірністю $p_1^* < p_1$. Знайти повну ймовірність благополучної посадки літака, якщо відомо, що в k % випадків існує необхідність посадки за приладами.

68. (Задача-жарт). Одному володареві надокучив звіздар зі своїми неправдивими віщуваннями, і він вирішив покарати його. Проте володар надав йому можливість вижити і наказав розподілити у дві урни дві білі і дві чорні кулі. Кат вибере навмання урну і з неї вийме кулю. Якщо куля буде чорною, звіздаря стратять, якщо білою – помилують. Як звіздар повинен розподілити кулі в урнах, щоб забезпечити собі найбільшу ймовірність залишитися живим.

69. З урни, що містить n куль невідомого кольору, взяли одну кулю, що виявилася білою. Після цього знову виймають кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла? Усі припущення про кількість білих куль в урні однаково ймовірні.

70. Стрілець A влучив у мішень з імовірністю $p_1 = 0{,}6$, стрілець B – з імовірністю $p_2 = 0{,}5$, а стрілець C – з імовірністю $p_3 = 0{,}4$. Стрільці зробили залп по мішені. Відомо, що є два влучення. Що більш імовірно: влучив стрілець C в мішень чи ні?

71. Три мисливці одночасно зробили по одному пострілу у ведмедя. Ведмедя вбито однією кулею. Яка ймовірність того, що ведмедя вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучень для них відповідно $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $p_3 = 0{,}6$?

6.6. ВИПРОБУВАННЯ БЕРНУЛЛІ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ (ТЕОРЕМА ПУАССОНА, ЛОКАЛЬНА ТА ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМИ ЛАПЛАСА)

Приклади. **1.** Два шахісти умовились зіграти десять результативних партій. Імовірність виграшу кожної окремої партії першим гравцем дорівнює $\frac{2}{3}$, другим – $\frac{1}{3}$ (нічиї не враховуються). Чому дорівнює ймовірність виграшу всієї гри (потрібно виграти понад п'ять партій) першим гравцем, другим гравцем, загального нічийного результату?

Розв'язання. Визначимо події A, B, C: $A = \{$виграє перший гравець$\}$; $B = \{$виграє другий гравець$\}$; $C = \{$нічийний результат$\}$. Для того щоб гру виграв перший гравець, йому необхідно виграти 6, 7, 8, 9 або 10 партій. Тому, за формулою Бернуллі [(3.26), ч. 2, с. 521] і теоремою додавання ймовірностей,

$$P(A) = P_{10}(6) + P_{10}(7) + P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10) =$$

$$= C_{10}^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} + C_{10}^{7}\left(\frac{2}{3}\right)^{7}\left(\frac{1}{3}\right)^{3} + C_{10}^{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} + C_{10}^{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{9}\left(\frac{1}{3}\right) +$$

$$+\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \left(\frac{2^6}{3^{10}}\right)(210 + 240 + 180 + 80 + 16) = 121\cdot\frac{2^7}{3^9} \approx 0{,}786\,9;$$

$$P(C) = P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5} = 7\cdot\frac{2^7}{3^8} \approx 0{,}136\,6.$$

Події A, B, C складають повну групу, тому

$$P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0{,}786\,9 - 0\cdot 136\,6 = 0{,}076\,6.$$

Відповідь: $P(A) = 0{,}786\,9$; $P(B) = 0{,}076\,6$; $P(C) = 0{,}136\,6$.

2. За даними технологічного контролю, в середньому 2 % виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Знайти ймовірність того, що зі 100 годинників, виготовлених на заводі, додатково відрегулювати потрібно буде не більш ніж три годинники.

Розв'язання. Оскільки $n = 100$ велике число, а $p = 0{,}02$ мале, то шукану ймовірність можна знайти за формулою Пуассона

$$\lambda = np = 100\cdot 0{,}02 = 2;$$

$$P(A) = P_{100}(0) + P_{100}(1) + P_{100}(2) + P_{100}(3) \approx e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) \approx 0{,}85.$$

Відповідь: 0,85.

3. У місті за місяць народилось 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них буде рівно 100 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчиків становить 0,515.

Розв'язання. Оскільки $n = 200$ велике число, а $p = 1 - 0,515 = 0,485$ не є близьким до нуля, то для обчислення $p_{200}(100)$ застосуємо теорему Лапласа. Для цього обчислимо

$$\sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,485 \cdot 0,515} \approx 7,068; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \approx \frac{100 - 200 \cdot 0,485}{7,068} \approx 0,424.$$

Знаходимо $\varphi(0,424)$ за таблицею функції Гаусса [ч. 2, с. 525]:

$$\varphi(0,424) = 0,364.$$

Тоді [за формулою (3.31), ч. 2, с. 524]:

$$p_{200}(100) \approx \frac{\varphi(0,424)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0,364}{7,068} \approx 0,051.$$

Відповідь: 0,051.

72. Зроблено п'ять незалежних пострілів. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі однакова й дорівнює p. Знайти ймовірність: а) одного; б) двох; в) трьох; г) чотирьох; д) п'яти влучень; е) ймовірність того, що не буде жодного влучення; є) ймовірність хоча б одного влучення; ж) ймовірність не менше двох влучень; з) ймовірність не більше трьох влучень.

73. У родині десятеро дітей. Будемо вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що в родині: а) тільки хлопчики чи тільки дівчатка; б) половина хлопчиків і половина дівчаток; в) чотири хлопчики й шість дівчаток; г) не більше як три хлопчики; д) принаймні одна дівчинка.

74. Що ймовірніше виграти в рівносильного противника: а) три партії з чотирьох чи п'ять із восьми; б) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти партій із восьми?

75. Прилад складається із семи вузлів. Надійність (імовірність безвідмовної роботи протягом часу t) для кожного вузла дорівнює 0,9. Вузли виходять із ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що за час t: а) відмовить принаймні один вузол; б) відмовлять рівно два вузли; в) відмовлять не менше як два вузли.

76. Подія B настає тільки в тому випадку, якщо подія A відбулася не менше трьох разів. Визначити ймовірність того, що подія B сталась, якщо ймовірність події A під час одного випробування дорівнює 0,3, а проведено п'ять незалежних випробувань.

77. Яке найменше число випробувань достатньо провести, щоб з імовірністю, не меншою за $\alpha(0 \le \alpha \le 1)$, можна було очікувати, що успіх настане принаймні один раз, якщо ймовірність успіху в одному випробуванні дорівнює p $(p = 0,05;\ \alpha = 0,95)$?

78. Кожні п'ять незалежних випробувань полягають в одночасному підкиданні трьох монет. Знайти ймовірність того, що принаймні під час одного випробування припадуть три герби.

79. Під час передавання повідомлення ймовірність перекручення одного знаку дорівнює $\frac{1}{10}$. Знайти ймовірність того, що повідомлення з десяти знаків: а) не буде перекручене; б) містить рівно три перекручення; в) містить не більше трьох перекручень.

80. Серед насіння пшениці 0,6 % насіння бур'янів. Яка ймовірність під час випадкового відбору 1 000 насінин виявити: а) рівно шість насінин бур'янів; б) не менше як три насінини бур'янів; в) не більше ніж п'ять насінин бур'янів?

81. На лекції присутні 200 студентів. Знайти ймовірність того, що один із присутніх народився 1 травня і два народилися 7 жовтня. Вважати, що ймовірність народження в даний день дорівнює $\frac{1}{365}$.

82. Імовірність того, що на сторінці книжки можуть виявитись помилки, дорівнює 0,002. Перевіряється книжка, яка містить 500 сторінок. Знайти ймовірність того, що з помилками виявиться: а) п'ять сторінок; б) від трьох до п'яти сторінок.

83. Дослід полягає в тому, що підкидають 4 040 разів монету (дослід Бюффона), при цьому герб припав 2 048 разів. Знайти ймовірність того, що в разі повторення досліду Бюффона частота появи герба відхилиться від 0,5 не більше, ніж у досліді Бюффона.

84. Знайти приблизно ймовірність того, що під час 400 випробувань успіх настане рівно 104 рази, якщо ймовірність його в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

85. Імовірність того, що подія A відбудеться під час кожного з n випробувань, дорівнює p. Знайти імовірність того, що: 1) частота успіхів при $n = 1500$ відхиляється від $p = 0,4$ менше ніж на 0,02; 2) кількість успіхів за тих самих умов становить число між: а) 560 і 640; б) 600 і 680.

86. В урні міститься порівну білих і чорних куль. В одному з експериментів під час 10 000 витягувань з поверненням було витягнуто 5 011 білих і 4 989 чорних куль. Яка ймовірність такого результату експерименту? Якщо повторити цей експеримент, то яка ймовірність того, що за модулем відхилення дістанемо білих куль більше за найімовірніше число?

87. У селищі 2 500 жителів. Кожен із них приблизно шість разів на місяць їздить до міста, підбираючи дні поїздки за випадковими причинами незалежно від інших. Яка найменша кількість пасажирів повинна вміщуватися у поїзді, щоб він переповнювався в середньому не частіше ніж один раз за 100 днів (поїзд ходить один раз на добу)?

88. Імовірність появи події A в кожному із незалежних експериментів дорівнює 0,8. Скільки потрібно здійснити експериментів, щоб з імовірністю 0,9 можна було чекати, що подія A відбудеться не менше як 75 разів?

89. (Задача-жарт). Скільки родзинок у середньому повинні містити булки, щоб імовірність знайти в булці хоча б одну родзинку була не менше ніж 0,99?

90. Каналом зв'язку передається 1 000 знаків. Кожен знак може бути перекручений незалежно від решти з імовірністю 0,005. Знайти приблизне значення ймовірності того, що буде перекручено: а) не більше як три знаки; б) принаймні один знак; в) рівно п'ять знаків.

91. Імовірність позитивного результату в кожному із незалежних експериментів дорівнює 0,9. Скільки потрібно здійснити експериментів, щоб з імовірністю 0,9 можна було чекати, що не менше ніж 150 експериментів дадуть позитивний результат?

92. Гральний кубик кидають 35 разів. Яке найімовірніше число припадання грані з одиницею?

93. Для одного баскетболіста ймовірність влучити м'ячем у корзину під час одного кидання дорівнює 0,4. Зроблено десять кидків. Знайти найімовірніше число влучень і відповідну ймовірність.

6.7. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ПОНЯТТЯ ПРО ОДНОВИМІРНУ Й БАГАТОВИМІРНУ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. ГУСТИНА РОЗПОДІЛУ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Приклади. **1.** Одночасно підкидають дві монети. Випадкова величина X – це кількість припадань герба. Побудувати для неї: а) ряд розподілу; б) багатокутник розподілу; в) функцію розподілу.

Розв'язання. Простір елементарних подій складається з точок

$$\omega_1 = \{Ц, Ц\}\ ;\ \omega_2 = \{Ц, Г\}\ ;\ \omega_3 = \{Г, Ц\}\ ;\ \omega_4 = \{Г, Г\}.$$

Звідси видно, що X набуває трьох значень: 0, 1, 2, імовірності яких відповідно дорівнюють $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$. Запишемо це у вигляді таблиці. Ряд розподілу має вигляд

X	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

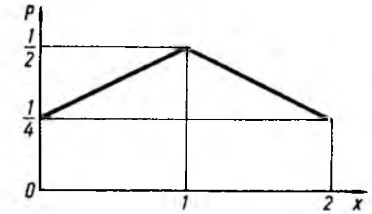

Рис. 6.1

На підставі таблиці побудуємо багатокутник розподілу (рис. 6.1). Тепер знаходимо функцію розподілу:

$$F(0) = P(X < 0) = 0\ ;\ F(1) = P(X < 1) = P(X = 0) = \frac{1}{4};$$

$$F(2) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4};$$

$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1.$$

Графік функції зображено на рис. 6.2.

2. Нехай на відрізку $[a,\ b]$ дійсної осі випадково кинуто точку, імовірність попадання якої в певну множину $[a,\ b]$ передбачається пропорційною мірі цієї множини. Знайти функцію розподілу випадкової величини $X = x,\ \ x \in [a,\ b]$ (вважати, що X дорівнює тому числу з інтервалу $[a,\ b]$, в яке попала розглядувана точка).

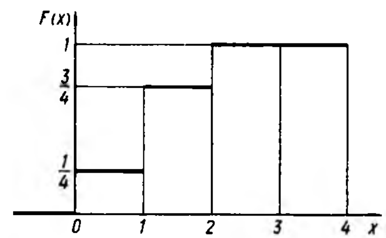

Рис. 6.2

Розв'язання. Якщо $x < a$, то $F(x) = 0$. Нехай $a \le x \le b$. Тоді подія $\{X < x\}$ значить, що точка попала в інтервал $[a,\ x)$. Імовірність того, що точка попала в даний інтервал, пропорційна довжині цього інтервалу, отже,

$$F(x) = P(X < x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

$^1/_2$ 9 3-53

Коли $x<b$, то $F(x)=1$. Звідси маємо

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Ця функція визначає так званий рівномірний розподіл на інтервалі $[a,\ b]$.

Графік функції $F(x)$ зображено на рис. 6.3. Порівняно з попереднім прикладом, де графік функції кусково-сталий, у даному прикладі графік є неспадною функцією.

3. Дано функцію розподілу випадкової величини X: $F(x)=c+$ $+b\operatorname{arctg}x(-\infty<x<\infty)$. Знайти сталі c і b, а також $P(\alpha\le X<\beta)$.

Розв'язання. Коефіцієнти c і b знайдемо з умов

$$\lim_{x\to\infty}F(x)=1;\quad \lim_{x\to-\infty}F(x)=0:\quad \lim_{x\to\infty}(c+b\operatorname{arctg}x)=c+b\frac{\pi}{2}=1;$$

$$\lim_{x\to-\infty}(c+b\operatorname{arctg}x)=c-b\frac{\pi}{2}=0;\quad c=\frac{1}{2};\quad b=\frac{1}{\pi}.$$

Отже,
$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$$

За формулою (5.5) [ч. 2, с. 536] $P(\alpha\le X<\beta)$ знаходимо:

$$P(\alpha\le X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\beta-\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\alpha=\frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}\alpha).$$

Відповідь: $c=\dfrac{1}{2}$; $b=\dfrac{1}{\pi}$; $P(\alpha\le X<\beta)=\dfrac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}\beta-\operatorname{arctg}\alpha)$.

4. Знайти ймовірність влучення випадкової точки з координатами $(X,\ Y)$ у заштриховану область (рис. 6.4), якщо відома функція розподілу $F(x,\ y)$.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що випадкова точка $(X,\ Y)$ попала в заштриховану область; A_1 – у прямокутник ABB_1F; A_2 – у прямокутник B_1CDE; A_3 – у прямокутник $KLMN$. Отже,

$$P(A)=P(A_1+A_2-A_3)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_3).$$

Імовірність влучення випадкової величини $(X,\ Y)$ у прямокутник знаходимо за формулою (5.6) [ч. 2, с. 538]:

$$P(A)=F(a_1,\ b_3)+F(a_2,\ b_5)-F(a_1,\ b_5)-F(a_2,\ b_3)+F(a_2,\ b_1)+$$
$$+F(a_5,\ b_5)-F(a_2,\ b_5)-F(a_5,\ b_1)-[F(a_3,\ b_2)+F(a_4,\ b_4)-F(a_3,\ b_4)-$$
$$-F(a_4,\ b_2)]=F(a_1,\ b_3)+F(a_2,\ b_1)+F(a_3,\ b_4)+F(a_4,\ b_2)+F(a_5,\ b_5)-$$

$$-F(a_1,\ b_5)-F(a_2,\ b_3)-F(a_3,\ b_2)-F(a_4,\ b_4)-F(a_5,\ b_1).$$

5. При якому значенні a функція

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}\ (-\infty<x<\infty)$$

є густиною розподілу ймовірності випадкової величини X? Знайти: а) $F(x)$ – функцію розподілу випадкової величини X; б) імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(-1,\ 1)$.

Розв'язання. Коефіцієнт a знаходимо, використовуючи рівність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$,

звідки
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=\alpha\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=a\pi=1,$$

тобто
$$a=\frac{1}{\pi}.$$

Функція розподілу випадкової величини x

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg}t\Big|_{A}^{x}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x.$$

Імовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(-1,\ 1)$

$$P(-1\le X<1)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{+1}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $F(x)=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{\pi}\right)\operatorname{arctg}x$; $P(-1\le X<1)=\dfrac{1}{2}$.

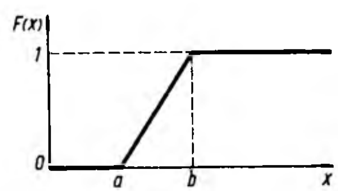

Рис. 6.3

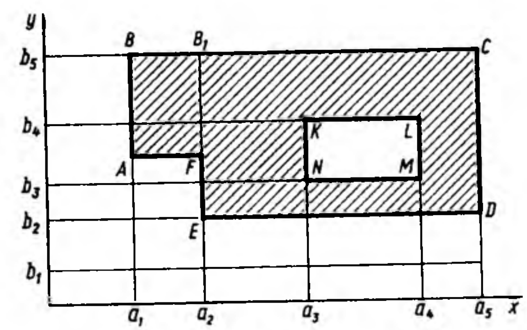

Рис. 6.4

6. Випадкова напруга U, що має густину $f(u)$, пропускається через обмежувач, який "зрізує" всі значення напруги, менші за u_1 і більші ніж u_2, у першому випадку підвищуючи її до u_1, а в другому – знижуючи до u_2. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\tilde{U}$ – напруги, що пройшла через обмежувач, і побудувати її графік.

Розв'язання. Випадкові величини, неперервна U і зсунена $\tilde{U}$, мають між собою такий зв'язок:

$$\tilde{U} = \begin{cases} u_1 & \text{при} \quad u < u_1, \\ U & \text{при} \quad u_1 < u < u_2, \\ u_2 & \text{при} \quad u > u_2. \end{cases}$$

Функції розподілу U і $\tilde{U}$ позначимо відповідно як $F(u)$ і $\tilde{F}(u)$. Знайдемо $\tilde{F}(u)$ при $u_1 < u < u_2$:

$$\tilde{F}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u)\,du.$$

Маємо $P(\tilde{U} = u_1) = p_1$ при $u = u_1$ і $P(\tilde{U} = u_2) = p_2$ при $u = u_2$, де p_1, p_2 – деякі відмінні від нуля значення. Внаслідок того, що функція $F(u)$ неперервна зліва, дістаємо

$$\lim_{u \to u_1+0} \tilde{F}(u) = \lim_{u \to u_1+0} \int_{-\infty}^{u} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{u_1} f(u)\,du = p_1.$$

Оскільки події $\{X < u_2\}$, $\{X > u_2\}$, $\{X = u_2\}$ складають повну групу, маємо співвідношення

$$P(X < u_2) + P(X > u_2) + P(X = u_2) = 1.$$

Крім того,

$$P(X < u_2) = F(u_2) = \int_{-\infty}^{u_2} f(u)\,du; \quad P(X = u_2) = p_2; \quad P(X > u_2) = 0.$$

Отже,
$$\int_{-\infty}^{u_2} f(u)\,du + p_2 = 1, \quad p_2 = 1 - \int_{-\infty}^{u_2} f(u)\,du.$$

З розрахунків випливає, що при $u < u_1$ функція $\tilde{F}(u) = 0$; у точці u_1 – $\tilde{F}(u_1) = p_1$. Для $u_1 < u < u_2$

$$\tilde{F}(u) = \int_{u_1}^{u_2} f(u)\,du,$$

для u_2
$$\tilde{F}(u_2) = p_2$$

і, якщо $u > u_2$,

$$\tilde{F}(u) \approx 1.$$

Графік функції $\tilde{F}(u)$ зображено на рис. 6.5.

7. Густина ймовірності випадкової величини $X(X_1,\ X_2)$

$$f(x,\ y) = \begin{cases} c\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right) & \text{при} \quad x^2 + y^2 \le R^2, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Визначити сталу c та ймовірність попадання випадкової величини $X(X_1,\ X_2)$ в круг, радіус якого $a < R$, а центр міститься в початку координат.

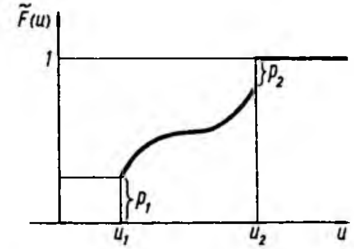

Рис. 6.5

Розв'язання. Сталу c знаходимо зі співвідношення

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)\,dx\,dy = 1.$$

Отже,
$$\iint_D c\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx\,dy = 1,$$

де D – площа круга, радіус якого дорівнює R. Інтеграл, що міститься в лівій частині, позначимо як I. Для його визначення перейдемо до полярних координат:

$$I = 4c\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (R - r)r\,dr = 4c\frac{\pi}{2}\left(\frac{Rr^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = \frac{1}{3}\pi c R^3,$$

звідки
$$c = \frac{3}{\pi R^3}.$$

Шукана ймовірність влучення в D_1 (відкритий круг, радіус якого a)

$$P\left(0 \le x^2 + y^2 < a^2\right) = \frac{3}{\pi R^3}\iint_{D_1}\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)dxdy = \frac{3}{\pi R^3}4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a (R - r)r\tau r =$$

$$= \frac{12}{\pi R^3}\frac{\pi}{2}\left(\frac{Ra^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{3a^2}{R^2}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right).$$

Відповідь: $c = \dfrac{3}{\pi R^3}$; $\quad P\left(0 \le x^2 + y^2 < a^2\right) = \dfrac{3a^2}{R^2}\left(1 - \dfrac{2a}{3R}\right).$

8. Визначити густину ймовірності випадкової величини $X(X_1,\ X_2,\ X_3)$ за заданою функцією розподілу

$$F(x,\ y,\ z)=\begin{cases}\left(1-e^{-ax}\right)\left(1-e^{-by}\right)\left(1-e^{-cz}\right),\\ \quad\text{якщо}\quad x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0,\\ 0,\ \text{якщо}\quad x<0,\ \ y<0,\ \ z<0.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо густину розподілу тривимірної випадкової величини

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{\partial^3 F}{\partial x\partial y\partial z}=\begin{cases}abc\,e^{-ax}e^{-by}e^{-cz}=abc\,e^{-(ax+by+cz)},\\ \quad\text{якщо}\quad x\ge 0,\ \ y\ge 0,\ \ z\ge 0,\\ 0,\ \text{якщо}\quad x<0,\ \ y<0,\ \ z<0,\end{cases}$$

що і є відповіддю.

94. Нехай випадкова величина X дорівнює кількості припадання герба в разі десяти підкидань монети. Знайти: а) закон розподілу випадкової величини; б) імовірність подій $1\le X\le 3$; в) імовірність подій $X>3$.

95. З ящика, в якому містяться 20 стандартних деталей і чотири нестандартні, виймають п'ять деталей. Знайти закон розподілу кількості вийнятих нестандартних деталей.

96. Завод направив на базу 500 виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час перевезення дорівнює 0,002. Знайти закон розподілу випадкової величини, що дорівнює кількості пошкоджень виробів по дорозі на базу.

97. Довести, що

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \ \text{якщо}\quad x\le 0,\\ 1-e^{-\alpha x},\ \ \text{якщо}\quad x>0\end{cases}$$

(α – позитивний параметр) є функцією розподілу деякої випадкової величини. Знайти ймовірність події $0\le X<1$ для $\alpha=1$. Побудувати графік $F(x)$ для $\alpha=1$.

98. Гральний кубик кидають п'ять разів. Знайти закон та функцію розподілу кількості припадання шістки.

99. За допомогою властивостей функції розподілу з'ясувати чи є $F(x)$ функцією розподілу випадкової величини. Побудувати графіки:

а) $F(x)=\begin{cases}0,\ \ \text{якщо}\quad x\le 0,\\ 0{,}3,\ \ \text{якщо}\quad 0<x\le 1,\\ 0{,}5,\ \ \text{якщо}\quad 1<x\le 2,\\ 1,\ \ \text{якщо}\quad x>2;\end{cases}$ б) $F(x)=\begin{cases}0,\ \ \text{якщо}\quad x\le 1,\\ 0{,}5,\ \ \text{якщо}\quad 1<x\le 2,\\ 0{,}25x,\ \ \text{якщо}\quad 2<x\le 3,\\ 1,\ \ \text{якщо}\quad x>3;\end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}0,\ \ \text{якщо}\quad x\le -\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x,\ \ \text{якщо}\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0,\\ 1,\ \ \text{якщо}\quad x>0.\end{cases}$

100. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \ \text{якщо}\quad x\le 0,\\ \sqrt{x},\ \ \text{якщо}\quad 0<x\le\dfrac{1}{4},\\ 8x^2,\ \ \text{якщо}\quad \dfrac{1}{4}<x\le\dfrac{\sqrt{2}}{4},\\ 1,\ \ \text{якщо}\quad x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}.\end{cases}$$

Показати, що X має густину розподілу ймовірності, і знайти густину розподілу.

101. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, густина якого

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2}},\ \ \text{якщо}\quad |\,x\,|<a,\\ 0,\ \ \text{якщо}\quad |\,x\,|\ge a.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a. Знайти функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $\left(\dfrac{a}{2},\ a\right)$ двома способами: за допомогою густини ймовірності $f(x)$ та за допомогою функції розподілу $F(x)$.

102. Випадкова величина X має функцію розподілу, густина якого

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0,\\ a\sin x, & \text{якщо} \quad 0\le x\le\pi,\\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi.\end{cases}$$

Визначити коефіцієнт a. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини в інтервали $\left(-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right)$.

103. Густина розподілу випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}a\cos x, & \text{якщо} \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{якщо} \quad |x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти: а) сталу a; б) функцію розподілу $F(x)$ та побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$; в) обчислити $p\left(0\le X\le\frac{\pi}{4}\right)$.

104. Точка кинута в круг, радіус якого R. Імовірність її попадання в будь-яку область, розташовану всередині круга, пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу $F(x)$ та густину ймовірності $f(x)$ випадкової величини X, що дорівнює відстані точки від центра круга.

105. Випадкова величина $(X,\ Y)$ має густину ймовірності

$$f(x,\ y)=\frac{A}{\pi^2\left(16+x^2\right)\left(25+y^2\right)}.$$

Знайти величину A та функцію розподілу $F(x,\ y)$, а також імовірність попадання випадкової точки в прямокутник з вершинами $A(1,\ 1)$, $B(\sqrt{3},\ 1)$, $C(1,\ 0)$, $D(\sqrt{3},\ 0)$.

106. Дано густину сумісного розподілу неперервної двовимірної величини $(X,\ Y)$

$$f(x,\ y)=c\cos x\cos y$$

у квадраті $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$, поза цим квадратом $f(x,\ y)=0$. Знайти сталий коефіцієнт c.

107. Двовимірна випадкова величина $(X,\ Y)$ задана густиною сумісного розподілу

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{6\pi}, & \text{якщо} \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1,\\ 0, & \text{якщо} \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}>1.\end{cases}$$

Знайти густину розподілу складових X та Y.

108. Дано функцію розподілу випадкової величини $(X,\ Y)$

$$F(x,\ y)=\begin{cases}1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-x-y}, & \text{якщо} \quad x\ge 0 \ \text{ і } \ y\ge 0,\\ 0, & \text{якщо} \quad x<0 \ \text{ або } \ y<0.\end{cases}$$

Знайти густину ймовірності $f(x,\ y)$ та ймовірність попадання випадкової точки $(x,\ y)$ у прямокутник $(0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1)$.

6.8. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ ТА ДИСПЕРСІЯ ОДНОВИМІРНОЇ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ. МОМЕНТИ. АСИМЕТРІЯ ТА ЕКСЦЕС ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Приклади. **1.** Випадкова величина X має такий закон розподілу:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

Визначити математичне сподівання, дисперсію та моду даної випадкової величини.

Розв'язання. $M[X]=\sum_{i=1}^{4}x_ip_i=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}4+3\cdot 0{,}2=1{,}5.$

Запишемо значення необхідних величин і визначимо дисперсію:

x_i	0	1	2	3
$x_i-M[X]$	–1,5	–0,5	0,5	1,5
$(x_i-M[X])^2$	2,25	0,25	0,25	2,25
p_i	0,3	0,1	0,4	0,2

$$D[X]=\sum_{i=1}^{4}(x_i-M[X])^2p_i=2{,}25\cdot 0{,}3+0{,}25\cdot 0{,}1+0{,}25\cdot 0{,}4+2{,}25\cdot 0{,}2=1{,}25.$$

Модою $\overline{M}$ випадкової величини X є її значення $x_3=2$.

Відповідь: $M[X]=1{,}5;\ \ D[X]=1{,}25;\ \ \overline{M}=2.$

2. Випадкова величина має густину

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{b}\left(1-\dfrac{x}{b}\right), & \text{якщо} \quad 0\le x<b,\\ 0 & \text{у протилежному випадку.}\end{cases}$$

Знайти її математичне сподівання, дисперсію та моду. Побудувати графік густини $f(x)$ і позначити в області означення на графіку функції $f(x)$ положення $M[X]$ та моди.

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію:

$$M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\frac{2}{b}\int\limits_0^b x\left(1-\frac{x}{b}\right)dx=\frac{2}{b}\int\limits_0^b\left(x-\frac{x^2}{b}\right)dx=\frac{2}{b}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3b}\right)\Bigg|_0^b=\frac{b}{3};$$

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^2 f(x)\,dx=\frac{2}{b}\int\limits_0^b\left(x-\frac{b}{3}\right)^2\left(1-\frac{x}{b}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{b}\int\limits_0^b\left(x^2-\frac{2b}{3}x+\frac{b^2}{9}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)dx=\frac{2}{b}\int\limits_0^b\left(-\frac{x^3}{b}+\frac{5}{3}x^2-\frac{7}{9}bx+\frac{b^2}{9}\right)dx=$$

$$=\frac{2}{b}\left(-\frac{1}{4b}x^4+\frac{5}{9}x^3-\frac{7b}{18}x^2+\frac{b^2}{9}x\right)\Bigg|_0^b=\frac{2}{b}\left(-\frac{b^3}{4}+\frac{5}{9}b^3-\frac{7}{18}b^3+\frac{b^3}{9}\right)=\frac{2}{b}\frac{b^3}{36}=\frac{b^2}{18}.$$

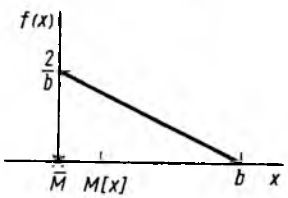

Рис. 6.6

Геометрично мода є абсцисою тієї точки кривої розподілу $f(x)$, ордината якої максимальна [ч. 2, с. 569]. Враховуючи вигляд функції $f(x)$, робимо висновок, що функція $f(x)$ має найбільше значення, коли $x=0$. Отже, $\bar{M}=0$. Графік функції $f(x)$ зображено на рис. 6.6.

Відповідь: $M[X]=\dfrac{b}{3}$; $D[X]=\dfrac{b^2}{18}$; $\bar{M}=0$.

3. Нехай випадкова величина X має такий закон розподілу:

X	2	3	4	5	6	7	8
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=X^2$.

Розв'язання. Закон розподілу випадкової величини Y можна зобразити такими значеннями:

X	4	9	16	25	36	49	64
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

4. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу Коші $f_1(x)=\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{x^2+1}$.

Знайти функцію розподілу та густину розподілу випадкової величини $Y=3X-2$.

Розв'язання. Функція $y=\varphi(x)=3x-2$ строго зростає та має протилежну величину $x=\psi(y)=\frac{1}{3}(y+2)$, тому визначимо $F_2(y)$ за формулою (7.5) [ч. 2, с. 548]:

$$F_2(y)=F_1(x)=F_1(\psi(y));$$

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_1(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2};$$

$$F_2(y)=F_1(\psi(y))=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}(y+2)+\frac{1}{2};$$

$$f_2(y)=\frac{dF_2(y)}{dy}=\frac{1}{\pi}\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{3^2}(y+2)^2+1}=\frac{3}{\pi\left(y^2+4y+13\right)}.$$

5. Зроблено три незалежних постріли в мішень: імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,4. Випадкова величина X – кількість влучень. Знайти числові характеристики величини X: математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію та ексцес.

Розв'язання. Закон розподілу величини X має вигляд

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Знайдемо числові характеристики випадкової величини X:

$$m_x=0\cdot 0{,}216+1\cdot 0{,}432+2\cdot 0{,}288+3\cdot 0{,}064=1{,}2;$$

$$D_x=(0-1{,}2)^2\cdot 0{,}216+(1-1{,}2)^2\cdot 0{,}432+(2-1{,}2)^2\cdot 0{,}288+(3-1{,}2)^2\cdot 0{,}064=0{,}72;$$

$$\sigma_x=\sqrt{D_x}=\sqrt{0{,}72}\approx 0{,}848.$$

Зауважимо, що центральні та початкові моменти 1-, 2-, 3- і 4-го порядків пов'язані співвідношеннями [(7.8), ч. 2, с. 549]

$$\mu_1=0,\ \mu_2=\alpha_2-\alpha_1^2,\ \mu_3=\alpha_3-3\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3,\ \mu_4=\alpha_4-4\alpha_1\alpha_3+6\alpha_1^2\alpha_2-3\alpha_1^4,$$

де α_i, $i=1,2,3,4$ – початкові моменти; μ_i, $i=1,2,3,4$ – центральні моменти.

Відношення центрального моменту 3-го порядку до кубу середньоквадратичного відхилення називається асиметрією:

$$S_k=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}.$$

Якщо розподіл симетричний відносно математичного сподівання, то $S_k = 0$.

Ексцесом випадкової величини X називається величина E_x, що визначається рівністю

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3.$$

Для нормального закону розподілу $E_x = 0$.

Обчислимо

$$\mu_3 = (0-1,2)^3 \cdot 0,216 + (1-1,2)^3 \cdot 0,432 + (2-1,2)^3 \cdot 0,288 + (3-1,2)^3 \cdot 0,064 = 0,144,$$

звідки
$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{0,144}{0,72 \cdot 0,848} \approx 0,236.$$

Тепер визначимо

$$\mu_4 = (0-1,2)^4 \cdot 0,216 + (1-1,2)^4 \cdot 0,432 + (2-1,2)^4 \cdot 0,288 +$$
$$+(3-1,2)^4 \cdot 0,064 \approx 1,238$$

й дістанемо

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{1,238}{0,72 \cdot 0,72} - 3 = -0,612.$$

Відповідь: $m_x = 1,2$; $D_x = 0,72$; $\sigma_x = 0,848$; $S_k \approx 0,236$; $E_x = -0,612$.

6. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу, густина якого

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ ax & \text{при} \quad 0 < x < 1, \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти сталу a, математичне сподівання, дисперсію, середньоквадратичне відхилення, асиметрію та ексцес розподілу.

Розв'язання. Використовуючи властивості густини розподілу, знаходимо $a = 2$.

Математичне сподівання величини X

$$\alpha_1 = m_x = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію знайдемо за допомогою другого початкового моменту:

$$\alpha_2 = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{2}; \quad D_x = \alpha_2 - m_x^2 = \frac{1}{18},$$

звідки середньоквадратичне відхилення

$$\sigma_x = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Визначимо третій та четвертий початкові моменти:

$$\alpha_3 = 2\int_0^1 x^4 dx = \frac{2}{5}; \quad \alpha_4 = 2\int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{3}.$$

Використовуючи зв'язок між центральними та початковими моментами, відшукаємо центральні моменти 3-го та 4-го порядків:

$$\mu_3 = \alpha - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 = -\frac{1}{135}; \quad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = 0,007,$$

звідки

$$S_k = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{-\frac{1}{135}}{\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)^2} \approx -0,189; \quad E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{0,007}{\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18}} - 3 \approx -0,667.$$

Відповідь: $a = 2$, $m_x = \frac{2}{3}$; $D_x = \frac{1}{18}$; $\sigma_x = \frac{1}{3\sqrt{2}}$; $S_k \approx -0,189$; $E_x \approx -0,667$.

109. Випадкова величина X має закон розподілу

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Знайти $M[X]$ і $D[X]$.

110. Знайти закон розподілу випадкової величини X, що може набувати тільки двох значень: x_1 з імовірністю $p_1 = 0,9$ і $x_2 \ (x_1 < x_2)$, якщо $M[X] = 4,1$ і $D[X] = 0,09$.

111. Два стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу в одну й ту саму мішень. Імовірність влучення для першого стрільця дорівнює p_1, а для другого – p_2. Знайти $M[X]$ і $D[X]$, якщо X – загальна кількість влучень у мішень.

112. Стрілець стріляє в ціль тричі. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,3. Побудувати ряд розподілу кількості влучень, знайти математичне сподівання та дисперсію.

Вказівка: скористатися формулою Бернуллі (3.26) [ч. 2, с. 521].

113. Неперервна випадкова величина X задана густиною ймовірності $f(x)$. Знайти $M[X]$ та $D[X]$ для: а) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<0,\\ 2x, \text{ якщо } 0\le x\le 1,\\ 0, \text{ якщо } x>1;\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<-\dfrac{\pi}{2},\\ 0{,}5\cos x, \text{ якщо } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, \text{ якщо } x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ в) $f(x)=\begin{cases}e^x, \text{ якщо } x\le 0,\\ 0, \text{ якщо } x>0.\end{cases}$

114. Випадкова величина X має закон розподілу

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	0,4	0,2

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)+1$. Обчислити для випадкових величин X та Y математичне сподівання, дисперсію та середньоквадратичне відхилення.

115. Випадкова величина X має густину розподілу $f(x)=0{,}5\cos x$ при $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини $Y=\varphi(X)$: а) $Y=\sin X$; б) $Y=|\sin X|$.

116. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом, тобто має густину $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ при $x>0$. За яких умов існують і чому дорівнюють математичне сподівання та дисперсія випадкової величини $Y=e^X$?

117. Дискретна випадкова величина X задана своїм законом розподілу

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків цієї випадкової величини, асиметрію та ексцес.

118. Густина розподілу випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ ax^2 \text{ при } 0\le x<1,\\ a(2-x)^2 \text{ при } 1\le x<2,\\ 0 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a, початкові й центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес.

119. Густина розподілу випадкової величини X

$$f(x)=\begin{cases}0 \text{ при } x<0,\\ x \text{ при } 0\le x<1,\\ 2-x \text{ при } 1\le x<2,\\ 0 \text{ при } x\ge 2.\end{cases}$$

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків, асиметрію та ексцес.

120. Дано розподіл випадкової величини X :

x_i	2	4	6	8
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти початкові та центральні моменти перших чотирьох порядків цієї величини, ексцес та асиметрію.

121. Випадкова величина X задана густиною ймовірності $f(x)$. Знайти густину ймовірності випадкової величини $Y=\varphi(x)$, якщо: а) $Y=-2X+3$; б) $Y=X^2-1$.

122. Випадкова величина X має показниковий розподіл, густина ймовірності якого

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ якщо } x>0,\end{cases}$$

де $\lambda>0$. Знайти густину ймовірності випадкової величини $Y=\varphi(x)$, якщо: а) $Y=\sqrt{X}$; б) $Y=\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\ln X$.

123. Незалежні дискретні випадкові величини задані такими законами розподілу:

X	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2

Y	1	4
p	0,2	0,8

Знайти закони розподілу функцій для: а) $Z = X + Y$; б) $Z = XY$.

124. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

а)

X	1	2	3
p	0,2	0,1	0,7

б)

X	−1	1	2
p	0,1	0,2	0,7

Знайти закон розподілу випадкової величини $Y = X^4$.

125. Незалежні випадкові величини X та Y задані густинами розподілу

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} \left(0 \le x < \infty\right); \quad f_2(x) = \frac{1}{5}e^{-\frac{y}{5}} \left(0 \le y < \infty\right).$$

Знайти композицію цих законів, тобто густину розподілу випадкової величини $Z = X + Y$.

6.9. ВЛАСТИВОСТІ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ТА ДИСПЕРСІЇ

Приклади. **1.** Випадкові величини X та Y незалежні. Знайти

$$M\left[X^2 + Y^2\right],$$

якщо

$$M[X] = 2; \quad M[Y] = 1; \quad D[X] = 1; \quad D[Y] = 4.$$

Розв'язання. За формулою (8.10) [ч. 2, с. 558] знаходимо

$$M\left[X^2\right] = D[X] + M^2[X] = 1 + 2^2 = 5; \quad M\left[Y^2\right] = D[Y] + M^2[Y] = 4 + 1^2 = 5.$$

На підставі рівняння (8.5) [ч. 2, с. 554] маємо

$$M\left[X^2 + Y^2\right] = M\left[X^2\right] + M\left[\ Y^2\right] = 5 + 5 = 10.$$

Відповідь: 10.

2. Випадкова величина X має характеристики $M[X] = 1$, $\sigma[X] = 0$. Оцінити знизу ймовірність події $A = \{|X| < 2\}$.

Розв'язання. Подія $\overline{A} = \{|X| \ge 2\}$ є протилежною щодо події $A = \{|X| < 2\}$. Імовірність події $\overline{A}$ можна оцінити зверху, використовуючи нерівність Чебишова [(8.6), ч. 2, с. 555]:

$$P\left[|X| \ge 2\right] \le \frac{M\left[|X|^2\right]}{2^2} \quad \text{при} \quad \varepsilon = 2;$$

$M\left[|X|^2\right]$ знаходимо за формулою (8.10) [ч. 2, с. 558]:

$$M\left[X^2\right] = D[X] + M^2[X] = 0{,}2^2 + 1 = 1{,}04,$$

тому $$P\left(\overline{A}\right) \le \frac{1{,}04}{4} = 0{,}26; \quad P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) \ge 1 - 0{,}26 = 0{,}74.$$

Відповідь: $P(A) \ge 0{,}74$.

126. Незалежні випадкові величини X, Y, Z мають математичне сподівання, що дорівнює 10, і дисперсію 1, 4 і 9 відповідно. Знайти:

а) $M[X + Y - 2Z]$; б) $D[X + Y - 2Z]$; в) $M\left[M[X]\right]$;

г) $D\left[D[X]\right]$; д) $M\left[D[X]\right]$.

127. Незалежні випадкові величини X та Y мають математичне сподівання $M[X] = 2$, $M[Y] = -3$ і дисперсію $D[X] = 1$, $D[Y] = 2$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $z = 3X^2Y + 2Y^2 + 1$.

128. Незалежні випадкові величини X і Y рівномірно розподілені відповідно на відрізках $[a,\ b]$ і $[c,\ d]$. Знайти $M[XY]$ і $D[XY]$.

129. Випадкові величини X_1 і $X_2, \ldots, X_n$ незалежні й однаково розподілені:

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{4}; \quad P\{X_i = 0\} = \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,\ n}.$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n.$$

130. Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення x_1 та x_2, до того ж $x_2 > x_1$. Імовірність того, що X набуде значення x_1, дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу величини X, якщо $M[X] = 2{,}6$; $D[X] = 0{,}64$.

131. Кинуто n гральних кубиків. Знайти дисперсію суми очок, що можуть з'явитися на всіх гранях, що випали.

132. Відомі дисперсії двох незалежних випадкових величин: $D[X]=4$, $D[Y]=3$. Знайти дисперсію суми цих величин.

133. Дисперсія випадкової величини X дорівнює п'ять. Знайти дисперсію таких величин: а) $X-1$; б) $-2X$; в) $3X+6$.

134. Дискретні незалежні випадкові величини задані законами розподілу

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Знайти математичне сподівання добутку XY двома способами:

а) склавши закон розподілу XY; б) використовуючи відповідну властивість.

135. Дискретні випадкові величини X, Y задані законами розподілу, як у задачі 134. Знайти математичне сподівання суми $X+Y$ двома способами:

а) склавши закон розподілу $X+Y$; б) використовуючи відповідну властивість.

6.10. МОМЕНТИ БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. КОРЕЛЯЦІЙНИЙ МОМЕНТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Приклади. **1.** Число X вибирається випадково з множини цілих чисел 1, 2, 3. Потім із цієї ж множини вибирається навмання число Y, що є більшим за перше чи рівне йому. Описати закон розподілу випадкового вектора $(X,\ Y)$. Визначити, залежні чи незалежні випадкові компоненти X та Y. Обчислити основні характеристики: $M[X]$, $M[Y]$, $D[X]$, $D[Y]$, K_{xy}, r_x.

Р о з в' я з а н н я. Для того щоб описати закон розподілу випадкового вектора $(X,\ Y)$, необхідно визначити множину пар значень $(x_i,\ y_j)$ і відповідні ймовірності p_{ij}. Ясно, що можливими значеннями X та Y є 1, 2, 3.

Знайдемо

$$p_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3).$$

Передусім, очевидно, що $p_{21}=p_{31}=p_{32}=0$, оскільки відповідні події $\{X=2,\ Y=1\}$, $\{X=3,\ Y=1\}$, $\{X=3,\ Y=2\}$ неможливі. Отже,

$$p_{11}=P\{X=1,\ \ Y=1\}=P\{X=1\}\cdot P\{\ Y=1/X=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$p_{12}=P\{X=1,\ \ Y=2\}=P\{X=1\}\cdot P\{\ Y=2/X=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$p_{13}=P\{X=1,\ \ Y=3\}=P\{X=1\}\cdot P\{\ Y=3/X=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9};$$

$$p_{22}=P\{X=2,\ \ Y=2\}=P\{X=2\}\cdot P\{\ Y=2/X=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6};$$

$$p_{23}=P\{X=2,\ \ Y=3\}=P\{X=2\}\cdot P\{\ Y=3/X=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6};$$

$$p_{33}=P\{X=3,\ \ Y=3\}=P\{X=3\}\cdot P\{\ Y=3/X=3\}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

Результат подано у вигляді таблиці:

x_i	y_j			
	1	2	3	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{11}{18}$	1

У першій графі таблиці вказані можливі значення випадкової величини X, у першому рядку – можливі значення Y; в останній графі й останньому рядку наведені безумовні ймовірності можливих значень відповідно X та Y. На перетині i-го рядка й j-ї графи вказані ймовірності сумісного здійснення подій

$$\{X=x_i,\ \ Y=y_i\},$$

тобто

$$p_{ij}=P\{X=x_i,\ \ Y=y_i\}.$$

Далі з'ясуємо, що події X та Y залежні, тому що, наприклад,

$$P\{X=1,\ \ Y=1\}=\frac{1}{9}\neq P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{27}.$$

Тепер обчислимо числові характеристики вектора $(X,\ Y)$:

$$M[X]=\sum_{i=1}^{3}x_iP\{X=x_i\}=1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}=2;$$

$$M[Y]=\sum_{i=1}^{3}y_iP\{Y=y_i\}=1\cdot\frac{1}{9}+2\cdot\frac{5}{18}+3\cdot\frac{11}{18}=\frac{5}{2};$$

$$D[X]=M\left[X^2\right]-M^2[X]=\sum_{i=1}^{3}x_i^2P\{X=x_i\}-M^2[X]=$$

$$=1\cdot\frac{1}{3}+2^2\cdot\frac{1}{3}+3^2\cdot\frac{1}{3}-2^2=\frac{2}{3};$$

$$D[Y]=M\left[Y^2\right]-M^2[Y]=\sum_{i=1}^{3}y_i^2P\{Y=y_i\}-M^2[Y]=$$

$$=1\cdot\frac{1}{9}+2^2\cdot\frac{5}{18}+3^2\cdot\frac{11}{18}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{36};$$

$$k_{xy}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y];$$

$$M[XY]=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_iy_jp_{ij}=1\cdot1\cdot\frac{1}{9}+1\cdot2\cdot\frac{1}{9}+1\cdot3\cdot\frac{1}{9}+2\cdot1\cdot0+$$

$$+2\cdot2\cdot\frac{1}{6}+2\cdot3\cdot\frac{1}{6}+3\cdot1\cdot0+3\cdot2\cdot0+3\cdot3\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{3};$$

$$K_{xy}=\frac{16}{3}-2\cdot\frac{5}{2}=\frac{1}{3};$$

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\frac{17}{36}}}\approx 0{,}594.$$

Відповідь: $p_{ij}=P\{X=x_i,\ Y=y_i\}$; події залежні; $M[X]=2$; $M[Y]=\frac{5}{2}$; $D[X]=\frac{2}{3}$; $D[Y]=\frac{17}{36}$; $K_{xy}=\frac{1}{3}$; $r_{xy}=0{,}594$.

2. У продукції заводу брак через дефект α становить 3 %, а через дефект β – 4,5 %, придатна продукція – 95 %. Знайти коефіцієнт кореляції дефектів α і β.

Розв'язання. Введемо випадкові величини: X_1 – індикатор браку через дефект α, X_2 – індикатор браку через дефект β, тобто

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{якщо є дефект,}\\ 0, & \text{якщо дефекту немає } (i=1,\ 2).\end{cases}$$

Тоді закони розподілу X_1 та X_2

x_{1i}	0	1
p_i	0,97	0,03

x_{2i}	0	1
p_j	0,955	0,045

З умови задачі випливає, що $p_{11}=P\{X_1=0,\ X_2=0\}=0{,}95$. Ці дані надають можливість записати закон розподілу випадкового вектора $X(X_1,\ X_2)$ у вигляді таблиці

x_{1i}	x_{2i}: 0	1	$P\{X_1=x_{1i}\}$
0	0,95	0,02	0,97
1	0,005	0,025	0,03
$P\{X_2=x_{2i}\}$	0,955	0,045	1

Для обчислення коефіцієнта кореляції $r_{x_1x_2}$ спочатку знаходимо

$$M[X_1]=0\cdot0{,}97+1\cdot0{,}03=0{,}03;\quad M[X_2]=0\cdot0{,}955+1\cdot0{,}045=0{,}04;$$

$$M\left[X_1^2\right]=0{,}03;\quad M\left[X_2^2\right]=0{,}045;$$

$$D[X_1]=M\left[X_1^2\right]-M^2[X_1]=0{,}03-(0{,}03)^2=0{,}0291;$$

$$D[X_2]=M\left[X_2^2\right]-M^2[X_2]=0{,}045-(0{,}045)^2=0{,}042\,975;$$

$$K_{x_1x_2}=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(x_{1i}-M[X_1])(x_{2j}-M[X_2])p_{ij}=(0-0{,}03)(0-0{,}045)\cdot0{,}95+$$

$$+(0-0{,}03)(1-0{,}045)\cdot0{,}02+(1-0{,}03)(0-0{,}045)\cdot0{,}005+$$

$$+(1-0{,}03)(1-0{,}045)\cdot0{,}02=0{,}02.$$

Тоді

$$r_{x_1x_2}=\frac{K_{x_1x_2}}{\sqrt{D[X_1]D[X_2]}}=\frac{0{,}023\,65}{\sqrt{0{,}0291\cdot0{,}042\,975}}=0{,}669.$$

Відповідь: $r_{x_1x_2}=0{,}669$.

3. Дано густину ймовірності випадкового вектора $(X,\ Y)$

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{3}{28}\left(xy+y^2\right) & \text{при } 0\le x\le2,\ 0\le y\le2,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання й дисперсію компонентів X та Y. Визначити кореляційну матрицю.

Розв'язання. Знайдемо $M[X]$ і $M[Y]$ за формулою (9.1) [ч. 2, с. 559]:

$$M[X]=\int_0^2\int_0^2 xf(x,\ y)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 x\left(xy+y^2\right)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}y+\frac{x^2}{2}y^2\right]\Bigg|_0^2 dy=$$

$$=\frac{3}{28}\int_0^2\left(\frac{8}{3}y+2y^2\right)dy=\frac{3}{28}\left(\frac{8}{3}\frac{y^2}{2}+\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{28}\left(\frac{16}{3}+\frac{16}{3}\right)=\frac{8}{7};$$

$$M[Y]=\int_0^2\int_0^2 yf(x,\ y)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 y\left(xy+y^2\right)dxdy=\frac{3}{28}\int_0^2\left[y^2\frac{x^2}{2}+y^3x\right]\Bigg|_0^2 dy=$$

$$=\frac{3}{28}\int_0^2\left(2y^2+2y^3\right)dy=\frac{3}{28}\left(\frac{2y^3}{3}+\frac{2y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{3}{28}\left(\frac{16}{3}+8\right)=\frac{10}{7}.$$

Обчислимо $D[X]$ і $D[Y]$ за формулою (8.10) [ч. 2, с. 558]:

$$D[X]=M\left[X^2\right]-M^2[X]=\frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 x^2\left(xy+y^2\right)dx\,dy-\frac{64}{49}=$$

$$=\frac{3}{28}\int_0^2\left[\frac{x^4}{4}y+\frac{x^3}{3}y^2\right]\Bigg|_0^2 dy-\frac{64}{49}=\frac{3}{28}\int_0^2\left(4y+\frac{8}{3}y^2\right)dy-\frac{64}{49}=$$

$$=\frac{3}{28}\left(4\frac{y^2}{2}+\frac{8}{3}\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^2-\frac{64}{49}=\frac{3}{28}\left(8+\frac{64}{9}\right)-\frac{64}{49}=\frac{46}{147};$$

$$D[Y]=M\left[Y^2\right]-M^2[Y]=\frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 y^2\left(xy+y^2\right)dx\,dy-\frac{100}{49}=$$

$$=\frac{3}{28}\int_0^2\left[y^3\frac{x^2}{2}+y^4x\right]\Bigg|_0^2 dy-\frac{100}{49}=\frac{3}{28}\int_0^2\left[2y^3+2y^4\right]dy-\frac{100}{49}=$$

$$=\frac{3}{28}\left[2\cdot\frac{y^4}{4}+2\frac{y^5}{5}\right]\Bigg|_0^2-\frac{100}{49}=\frac{3}{28}\left(8+\frac{64}{5}\right)-\frac{100}{49}=\frac{46}{546}=\frac{23}{273}.$$

Будуємо кореляційну матрицю [(9.7), ч. 2, с. 561] при $n=2$, компоненти якої знаходимо за формулою (9.4) [ч. 2, с. 560]:

$$K_{xy}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y]=\frac{3}{28}\int_0^2\int_0^2 xy\left(xy+y^2\right)dx\,dy-\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{7}=$$

$$=\frac{3}{28}\int_0^2\left[\frac{x^3}{3}y^2+\frac{x^2}{2}y^3\right]\Bigg|_0^2 dy-\frac{80}{49}=\frac{3}{28}\int_0^2\left(\frac{8}{3}y^2+2y^3\right)dy-\frac{80}{49}=$$

$$=\frac{3}{28}\left[\frac{8}{3}\frac{y^3}{3}+2\frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_0^2-\frac{80}{49}=\frac{3}{28}\left[\frac{64}{9}+8\right]-\frac{80}{49}=-\frac{2}{147};$$

$$K_{xx}=D[X]=\frac{46}{147};\quad K_{yy}=D[Y]=\frac{23}{273}.$$

Тепер кореляційну матрицю можна записати у вигляді

$$K=\begin{pmatrix}\frac{46}{147} & -\frac{2}{147}\\ -\frac{2}{147} & \frac{23}{273}\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $M[X]=\frac{8}{7}$; $M[Y]=\frac{10}{7}$; $D[X]=\frac{46}{147}$; $D[Y]=\frac{23}{273}$; $K=\begin{pmatrix}\frac{46}{147} & -\frac{2}{147}\\ -\frac{2}{147} & \frac{23}{273}\end{pmatrix}$.

136. Дано таблицю, що визначає закон розподілу випадкового вектора $(X,\ Y)$,

X	Y		
	20	40	60
10	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	0
20	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
30	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

Знайти математичне сподівання $M[X]$ і $M[Y]$, дисперсію $D[X]$ і $D[Y]$, коефіцієнт кореляції r_{xy}.

137. Два ящики містять у собі по шість куль. У першому ящику лежать одна куля за № 3, дві кулі за № 2, три кулі за № 3. У другому ящику є дві кулі за № 1, три кулі за № 2 й одна куля за № 3. Нехай X – номер кулі, вийнятої з першого ящика, Y – номер кулі, вийнятої з другого ящика. З кожного ящика вийняли по одній кулі. Скласти таблицю для визначення закону розподілу системи випадкових величин (X та Y).

138. За умовою попередньої задачі знайти математичне сподівання випадкових величин X та Y, дисперсію випадкових величин X та Y, коваріацію й коефіцієнт кореляції.

139. Густина ймовірності випадкового вектора $(X,\ Y)$ $f(x,\ y)=$ $=\cos x\cos y\left(0\le x\le\frac{\pi}{2};\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}\right)$. Знайти математичне сподівання та кореляційну матрицю випадкового вектора $(X,\ Y)$.

140. Однотипні деталі, залежно від точності виготовлення, розрізняються за формою на круглі та овальні, а за масою – на легкі та важкі. Ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться круглою й легкою, овальною й легкою, круглою й важкою, овальною й важкою, відповідно дорівнюють $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ і $\sigma=1-\alpha-\beta-\gamma$. Навмання взято одну деталь. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості круглих деталей X і легких Y, а також кореляційний момент між кількістю круглих і кількістю легких деталей, якщо $\alpha=0{,}40$, $\beta=0{,}05$, $\gamma=0{,}10$.

141. Кидають два правильних гральних кубики. Нехай X – число очок на першому кубику, а Y – максимальне з двох чисел, що випали. Записати сумісний розподіл X та Y. Знайти $M[X]$, $D[X]$, $M[Y]$, $D[Y]$, k_{xy}.

142. Двовимірна випадкова величина $(X,\ Y)$ підпорядкована закону розподілу з густиною $f(x,\ y)=24xy$ в області D і $f(x,\ y)=0$ поза цією областю. Область D – трикутник, обмежений прямими лініями $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Знайти: а) $M[X]$ і $M[Y]$; б) $D[X]$ і $D[Y]$; в) k_{xy}, r_{xy}.

143. Випадковий вектор $(X,\ Y)$ з невід'ємними компонентами має функцію розподілу

$$F(x,\ y)=1-e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}+e^{-\alpha x-\beta y}\ (\alpha>0,\ \ \beta>0).$$

Знайти математичне сподівання й дисперсійну матрицю цього вектора. Чи залежні величини X та Y?

144. Система випадкових величин $(X,\ Y)$ підпорядкована закону розподілу з густиною

$$f(x,\ y)=\begin{cases}a(x+y) \text{ в області } D,\\ 0 \text{ поза областю } D.\end{cases}$$

Область D – квадрат, обмежений прямими лініями $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$. Знайти: а) коефіцієнт a; б) імовірність попадання випадкової точки $(X,\ Y)$ у квадрат Q, обмежений прямими лініями $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$; в) математичне сподівання m_x і m_y; г) середнє квадратичне відхилення σ_x і σ_y.

145. Система випадкових величин $(X,\ Y)$ підпорядкована закону розподілу з густиною

$$f(x,\ y)=\begin{cases}a\sin(x+y) \text{ в області } D,\\ 0 \quad \text{поза областю } D.\end{cases}$$

Область D визначається нерівностями $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $0\le y\le\frac{\pi}{2}$. Знайти: а) коефіцієнт a; б) математичне сподівання m_x і m_y; в) середньоквадратичне відхилення σ_x і σ_y; г) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

146. Система випадкових величин має закон розподілу з густиною

$$f(x,\ y)=\begin{cases}axy \text{ в області } D,\\ 0 \quad \text{поза областю } D.\end{cases}$$

Область D – трикутник, обмежений прямими лініями $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$. Знайти: а) коефіцієнт a; б) математичне сподівання m_x і m_y; в) дисперсії σ_x^2, σ_y^2; г) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

147. Система випадкових величин має закон розподілу з густиною

$$f(x,\ y)=\begin{cases}a^2-x^2-y^2 \quad \text{при} \quad x^2+y^2\le a^2\ (a>0),\\ 0 \quad \text{при} \quad x^2+y^2>a^2.\end{cases}$$

Знайти: а) коефіцієнт a; б) математичне сподівання m_x і m_y; в) дисперсії σ_x^2, σ_y^2; г) коефіцієнт кореляції r_{xy}.

5.11. НАЙБІЛЬШ ПОШИРЕНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ОДНОВИМІРНИХ І БАГАТОВИМІРНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Приклади. **1.** Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,9. У кожній партії п'ять виробів. Знайти математичне сподівання випадкової величини X – числа партій, у кожній з яких виявиться тільки чотири стандартних вироби, якщо перевірці підлягає 50 партій.

Розв'язання. Математичне сподівання $M[X] = Np$ [ч. 2, с. 563], де N – загальне число партій, p – імовірність того, що в одній партії виявиться тільки чотири стандартних вироби. За формулою Бернуллі

$$p = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^1 \approx 0{,}328 .$$

Отже,

$$M[X] \approx 50 \cdot 0{,}328 \approx 16.$$

Відповідь: 16.

2. На 1 000 сторінках коректури міститься 500 помилок. Знайти ймовірність того, що на випадково обраній сторінці не більше ніж дві помилки.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – число помилок на одній сторінці. Математичне сподівання X – середнє число помилок на одній сторінці:

$$M[X] = \frac{500}{1000} = 0{,}5.$$

Звичайно випадкова величина X вважається розподіленою за законом Пуассона. Тоді ймовірність дорівнює k помилок на одній сторінці та визначається за формулою (3.30) [ч. 2, с. 523]

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \ \lambda = M[X] = 0{,}5 .$$

Імовірність того, що на сторінці виявиться не більше ніж дві помилки, дорівнює сумі ймовірностей $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, звідки

$$P = e^{-0{,}5}\left(\frac{0{,}5^0}{0!} + \frac{0{,}5^1}{1!} + \frac{0{,}5^2}{2!}\right) = \frac{1{,}625}{\sqrt{e}} \approx 0{,}985\,6 .$$

Відповідь: 0,985 6.

3. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показники приладу округлюють до найближчої поділки. Визначити ймовірність того, що в разі відліку похибка дорівнюватиме 0,04 (вважаючи похибку округлення випадковою величиною, розподіленою рівномірно в проміжку між двома сусідніми похибками).

Розв'язання. Довжина $b - a$ проміжку, в якому містяться всі можливі значення випадкової величини X (похибки округлення), дорівнює 0,2. Наприклад, при $a = 0$ густина розподілу випадкової величини X набуває вигляду

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{при} \quad 0 \le x \le 0{,}2, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0 \text{ або } x > 0{,}2. \end{cases}$$

Похибка відліку буде меншою ніж 0,04, якщо X міститься в інтервалі [0; 0,04] або [0,16; 0,2]. Отже,

$$P(|X| < 0{,}04) = P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}2) = \int_0^{0{,}04} f(x)dx +$$

$$+ \int_{0{,}16}^{0{,}2} f(x)\,dx = 5\int_0^{0{,}04} dx + 5\int_{0{,}16}^{0{,}2} dx = 5 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}04 = 0{,}4 .$$

Відповідь: 0,4.

4. Систематична помилка (математичне сподівання) утримання висоти літаком +20 м, а випадкова помилка має середнє квадратичне відхилення 75 м. Для польоту літака відвели коридор 100 м заввишки. Яка ймовірність того, що літак буде летіти в середині коридору, якщо йому задана висота, відповідна середині коридору?

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – висота польоту літака згідно із заданим рівнем. Заданий рівень – висота, що відповідає середині коридору, – має значення $X = 0$. Щоб літак летів усередині коридору, має виконуватися нерівність $-50 \le X \le 50$.

Значення $P(-50 < X < 50)$ знаходимо за формулою (10.13) [ч. 2, с. 570]. З умови задачі математичне сподівання $m_x = 20$ м, а середньоквадратичне відхилення $\sigma_x = 75$ м. Отже,

$$P(-50 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-20}{75}\right) - \Phi\left(\frac{-50-20}{75}\right) =$$

$$= \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}933) = \Phi(0{,}4) + \Phi(0{,}933).$$

Оскільки функція Лапласа є непарною, тобто

$$\Phi(-0{,}933) = -\Phi(0{,}933).$$

З таблиць [ч. 2, с. 527] знаходимо, що $\Phi(0{,}4) = 0{,}155\,4$, $\Phi(0{,}933) = 0{,}324\,6$. Отже, $P(-50 < X < 50) = 0{,}155\,4 + 0{,}324\,6 = 0{,}48$.

Відповідь: 0,48.

5. Випадкова точка на площині $(X,\ Y)$ розподілена за нормальним законом із центром розсіювання $(m_x;\ m_y) = (0;\ 1)$ та середньоквадратичним відхиленням $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Знайти ймовірність попадання випадкової точки в прямокутник з вершинами (–1; 1), (2; 1), (2; 3), (–1; 3).

Розв'язання. Оскільки компоненти X та Y незалежні, то значення, що буде прийняте одним із компонентів, не залежить від значення другого компонента, тому

$$P(-1 \le X < 2,\ \ 1 \le Y < 3) = P(-1 \le X < 2) \cdot P(1 \le Y < 3).$$

Значення $P(-1 \le X < 2)$ і $P(1 \le Y < 3)$ знаходимо за формулою (10.13) [ч. 2, с. 570]:

$$P(-1 \le X < 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{1}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{1}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}818\,5;$$

$$P(1 \le Y < 3) = \Phi\left(\frac{3-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0{,}341\,3.$$

Отже,

$$P(-1 \le X < 2,\ \ 1 \le Y < 3) = 0{,}818\,5 \cdot 0{,}341\,3 \approx 0{,}279.$$

Відповідь: 0,279.

6. Функція розподілу випадкового часу безвідмовної роботи радіоапаратури має вигляд

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}02t}\ (t \ge 0).$$

Знайти густину ймовірності та ймовірність безвідмовної роботи апаратури протягом 100 год.

Розв'язання. Визначаємо густину розподілу:

$$f(t) = 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}\ (t \ge 0).$$

Використовуючи функцію надійності $R = \mathrm{e}^{-\lambda t}$ [ч. 2, с. 575], дістаємо

$$R(100) = \mathrm{e}^{-0{,}02 \cdot 100} = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135\,3.$$

Відповідь: $f(t) = 0{,}02\mathrm{e}^{-0{,}02t}\ (t \ge 0)$; $R(100) \approx 0{,}135\,3$.

7. Густина ймовірності випадкових амплітуд X бокової качки корабля визначається за законом Релея

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\ (x \ge 0),$$

де σ^2 – дисперсія кута крену. Знайти середнє значення амплітуди бокової качки. Чи однаково часто зустрічаються амплітуди, менші чи більші за середню?

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової амплітуди бокової качки

$$M[X] = \int_0^\infty xf(x)\,dx = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}dx = \begin{bmatrix} t = \dfrac{x}{\sigma\sqrt{2}} \\ dx = \sigma\sqrt{2}dt \end{bmatrix} =$$

$$= 2\sqrt{2}\sigma\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t^2}dt = \begin{bmatrix} t^2 = u, \quad t = \sqrt{u} \\ dt = \dfrac{du}{2\sqrt{u}} \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}\sigma\frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$= \sqrt{2}\sigma\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt{2}\sigma\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

де Γ – гамма-функція [ч. 1, с. 565]. Отже, $M[X] = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Події $\{0 < X < M[X]\}$ (випадкові амплітуди бокової качки корабля, менші ніж середня амплітуда) та $\{x > M[X]\}$ (випадкові амплітуди бокової качки корабля, більші за середню амплітуду) є протилежними. Імовірність першої з них знаходимо за властивістю 2 густини розподілу ймовірності [ч. 2, с. 540]:

$$P = (0 < X < M[X]) = \int_0^{M[X]} f(x)dx = \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= -\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_0^{\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} = 0{,}544;$$

$$P(X > M[X]) = 1 - P(0 < X < M[X]) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}} = 0{,}456.$$

Отже, амплітуди, менші за середню амплітуду, зустрічаються частіше, ніж амплітуди, більші за середню.

148. Обладнання складається з 1 000 елементів. Імовірність відмови будь-якого елемента під час випробування дорівнює $5\cdot10^{-4}$ і не залежить від стану інших елементів. Проведено 100 випробувань. Знайти математичне сподівання числа випробувань, у кожному з яких відмовить принаймні один елемент. Вважається, що випробування незалежні одне від одного.

149. Яка ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться чотири лівші, якщо в середньому лівші становлять 1 %?

150. Автоматична телефонна станція одержує в середньому за годину 300 викликів. Яка ймовірність того, що вона отримає за дану хвилину рівно три виклики?

151. Імовірність влучення в мішень для першого стрільця $\frac{2}{3}$, для другого – $\frac{3}{4}$. Перший стрілець зробив 15 пострілів, другий – 20. Випадкова величина X – загальна кількість влучень у мішень. Знайти $M[X]$ та $D[X]$.

152. У селищі 2 800 жителів. Кожен із них приблизно два рази на тиждень їздить до міста, вибираючи дні для поїздки за випадковими мотивами незалежно від інших. Випадкова величина X – кількість пасажирів, які їздять у поїзді будь-якого дня тижня (поїзд вирушає раз на добу). Знайти $M[X]$ та $D[X]$.

153. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $M[X]=1$ і дисперсією $D[X]=3$. Знайти густину ймовірності випадкової величини X.

154. Випадкова величина X рівномірно розподілена на відрізку $[-1;\ 1]$. Знайти: а) $M[2X+3]$; б) $D[2X+3]$; в) $M\left[X^2+1\right]$.

155. Випадкова величина X підпорядкована закону рівномірного розподілу на відрізку $[0;\ 2]$. Знайти густину ймовірності та функцію розподілу випадкової величини X.

156. Автобуси деякого маршруту їздять точно за розкладом. Проміжок руху 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, чекатиме автобус менше ніж 3 хв.

157. Випадкові величини X та Y незалежні й розподілені рівномірно: X – в інтервалі $(a;\ b)$, Y – в інтервалі $(c;\ d)$. Знайти дисперсію добутку XY.

158. Знайти математичне сподівання нормально розподіленої двовимірної випадкової величини з густиною розподілу

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-p^2}}e^{-\frac{1}{2(1-p^2)}\left(\frac{(x-a)^2}{\sigma_1^2}-2p\frac{(x-a)(y-b)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}.$$

159. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметрами $m_x=100$ і $\sigma_x^2=100$. Обчислити: а) $P(X<95)$; б) $P(X>90)$; в) $P(80\le X\le85)$; г) $P(|X-100|<20)$.

Знайти такі значення a, b, c, за яких: д) $P(X<a)=0{,}95$; е) $P(X>b)=$ $=0{,}90$; є) $P(|X-100|<C)=0{,}90$.

160. Випадкова величина X має нормальний розподіл із математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. Яка з двох подій – $\{|X|\le0{,}7\}$ або $\{|X|\ge0{,}7\}$ – має більшу ймовірність?

161. Випадкова величина підпорядкована закону нормального розподілу з $M[X]=0$. Імовірність влучення величини X в інтервал від $-\alpha$ до α $(\alpha>0)$ дорівнює 0,5. Знайти σ_x.

162. Верстат-автомат штампує деталі. Деталь вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковані нормальному закону із середньоквадратичним відхиленням $\sigma_x=5$ мм і математичним сподіванням $m_x=0$. Скільки відсотків придатних деталей виготовляє автомат?

163. Деяка категорія людей має середню масу 60 кг, середнє квадратичне відхилення маси становить 3 кг. Вважаючи, що маса має нормальний розподіл, визначити ймовірність того, що маса випадково взятої особи відрізняється від середньої ваги не більше ніж на 5 кг.

164. Автомат упаковує печиво в пачки по 16 штук у кожну. На етикетці робиться напис, що пачка важить 480 г. Вважається, що маса одного печива є нормальною випадковою величиною із середнім і стандартним відхиленнями відповідно 30 і 3 г. Якщо покупець вибирає пачку випадково, яка ймовірність того, що вона легша ніж 480 г?

165. Випадкові величини X та Y незалежні, нормально розподілені й мають параметри $m_x = m_y = 0$, $\sigma_x = 1$, $\sigma_y = 2$. Обчислити ймовірність попадання випадкової точки $(x,\ \ y)$ у прямокутник $|x| \le 1$. $|y| \le 2$.

166. Міст через річку являє собою прямокутник, координати якого в декартовій системі координат задовольняють нерівностям $|x| \le 10$, $|y| \le 100$. Під час артилерійського обстрілу моста точка влучення снаряду $(x,\ \ y)$ у тій самій системі координат має двовимірний нормальний розподіл із незалежними компонентами і середньоквадратичними відхиленнями $\sigma_x = 10$, $\sigma_y = 40$. "Точки прицілу" позначимо $(m_x,\ \ m_y)$. Визначити ймовірність влучення у міст у разі одного пострілу, якщо точка прицілу має координати: а) (0; 0); б) (10; 0); в) (5; 20).

167. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом з густиною розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{якщо} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X попаде в інтервал (0,1; 0,6).

168. Час безвідмовної роботи елемента має показниковий розподіл $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$. Знайти ймовірність того, що за час $t = 100$ год елемент: а) відмовить; б) не відмовить.

169. Неперервна випадкова величина X розділена за показниковим законом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 0{,}04e^{-0{,}04x}, & \text{якщо} \quad x \ge 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання й середньоквадратичне відхилення випадкової величини X. Обчислити ймовірність того, що відхилення величини X від $M[X]$ не перевищує $3\sigma[X]$.

170. Випробовуються два незалежно працюючих елементи. Тривалість (час) безвідмовної роботи першого елемента має показниковий

розподіл $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}02t}$, другого – $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Знайти ймовірність того, що за час роботи, який дорівнює 6 год: а) обидва елементи відмовлять; б) обидва елементи не відмовлять; в) тільки один елемент відмовить; г) принаймні один елемент відмовить.

171. Стрілець стріляє в ціль до першого влучення. Знайти ймовірність влучення в разі одного пострілу, якщо: а) математичне сподівання числа пострілів дорівнює п'яти; б) дисперсія числа пострілів дорівнює двом.

172. Автоматична лінія в разі нормального налагодження допускає браковані вироби з імовірністю 0,01. Після першого виявлення ВТК бракованого виробу лінію переналагоджують. Знайти середнє число всіх бракованих виробів, виготовлених між двома переналагодженнями лінії.

173. Випадкова величина R – відстань від точки влучення до центру мішені – розподілена за законом Релея:

$$f(r) = 2h^2 r e^{-h^2 r^2}$$

при $r > 0$. Знайти математичне сподівання $M[R]$.

174. У теорії надійності технічних приладів за закон розподілу часу безвідмовної роботи приладу часто використовується закон Вейбулла [ч. 2, с. 577] з функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-\alpha x^n}$ $(x > 0)$, де α – деяка стала, n – ціле додатне число. Знайти: а) густину розподілу; б) математичне сподівання випадкової величини X, розподіленої за законом Вейбулла.

175. Випадкова величина X ексцентриситету деталі має розподіл Релея

$$F(x) = 1 - e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \ (x > 0).$$

Знайти середнє значення ексцентриситету деталі.

176. Знайти густину розподілу випадкової величини X, що має бета-розподіл [ч. 2, с. 578], якщо

$$M[X] = \frac{1}{2};\ D[X] = \frac{1}{20}.$$

6.12. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

Приклади. **1.** Для деякого автопарку середня кількість автобусів, що відправляються на ремонт після експлуатації протягом місяця на міських лініях, дорівнює п'яти. Оцінити ймовірність того, що після закінчення місяця в одному автопарку буде відправлено на ремонт менше ніж 15 автобусів, якщо: а) інформації про дисперсію немає; б) відомо, що дисперсія дорівнює чотирьом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість автобусів, що відправляються на ремонт після місяця експлуатації. Математичне сподівання (середнє значення) $M[X]=5$.

Подія $\{X<15\}$ протилежна події $\{X\ge 15\}$, тому $P(X<15)=1-P(X\ge 15)$.

а) Для випадку, коли інформації про дисперсію немає, визначаючи $P(X\ge 15)$, застосуємо першу нерівність Чебишова [ч. 2, с. 579]: $P(X\ge 15)\le \frac{5}{15}=0{,}333\,3\ldots$, отже, $P(X<15)\ge 0{,}666\,6\ldots$

б) Якщо відомо, що дисперсія дорівнює чотирьом, знайдемо $M\left[X^2\right]=D[X]+$ $+M^2[X]=4+25=29$, а значення $P(X\ge 15)$ оцінимо за другою нерівністю Чебишова:

$$P(X\ge 15)\le \frac{29}{15^2}=\frac{29}{225}\approx 0{,}128\,8\ldots$$

і

$$P(X<15)\ge 0{,}871\,.$$

Відповідь: а) 0,666...; б) 0,871.

2. Дисперсія кожної з 1 000 незалежних випадкових величин $x_k\,(k=1,2,\ldots,1000)$ дорівнює 4. Оцінити ймовірність того, що відхилення середньоарифметичного цих математичних сподівань за модулем не перевищить 0,1.

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину X – середньоарифметичне випадкової величини x_k:

$$X=\frac{\sum\limits_{k=1}^{1000}x_k}{1\,000}.$$

Тоді математичне сподівання

$$M[X]=M\left[\frac{1}{1000}\sum_{k=1}^{1000}x_k\right]=\frac{1}{1\,000}M\left[\sum_{k=1}^{1000}x_k\right]=\frac{1}{1\,000}\sum_{k=1}^{1000}M[x_k].$$

Оскільки випадкові величини x_k незалежні, то дисперсія

$$D[X]=D\left[\frac{1}{1\,000}\sum_{k=1}^{1000}x_k\right]=\frac{D\sum\limits_{k=1}^{1000}x_k}{1\,000^2}=\frac{4\cdot 1\,000}{1\,000^2}=\frac{4}{1\,000}=4\cdot 10^{-3}.$$

Нехай імовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання $M[X]$ менше за 0,1, є $P(|X-M[X]|<0{,}1)$, а ймовірність події, що протилежна вказаній, $P(|X-M[X]|>0{,}1)$. Використовуючи формулу (11.2) [ч. 2, с. 579], дістаємо

$$P(|X-M[X]|>0{,}1)\le\frac{D[X]}{(0{,}1)^2}=\frac{4\cdot 10^{-3}}{10^{-2}}=0{,}4.$$

Отже,

$$P(|X-M[X]|\le 0{,}1)\ge 1-P(|X-M[X]|>0{,}1)=1-0{,}4=0{,}6\,.$$

Відповідь: 0,6.

3. Дано закон розподілу попарно незалежних випадкових величин, що утворюють випадкову послідовність $\{X_n\}$, $n=1,\ 2,\ldots$:

x_{ni}	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
$P\{X_n=x_{ni}\}$	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Чи справджується для цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання. Перша умова закону великих чисел виконана: дано, що члени послідовності $\{X_n\}$ попарно незалежні. Перевіримо виконання другої умови – рівності (11.9) [ч. 2, с. 581]. Для цього знаходимо

$$M[X_k]=-\frac{1}{n}\sqrt{n}+0\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\sqrt{n}=0;\quad D[X_k]=M\left[X_k^2\right]-M^2[X_k];$$

$$M\left[X_k^2\right]=\frac{1}{n}\left(-\sqrt{n}\right)^2+0^2\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}\right)^2=2;\quad D\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\sum_{k=1}^{n}D[X_k]=2n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{k=1}^{n}X_k\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot 2n=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Отже, закон великих чисел для цієї послідовності справджується.

4. Знайти характеристичну функцію та початкові моменти випадкової величини, густина ймовірності якої

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & \text{якщо} \quad x\ge 0,\\ 0, & \text{якщо} \quad x<0.\end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки характеристична функція $\varphi_x(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{jtx} f(x)dx$, то

$$\varphi_x(t)=\int\limits_0^{\infty} e^{-x}e^{jtx}\,dx=\int\limits_0^{\infty} e^{(jt-1)x}\,dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_0^{A} e^{(jt-1)x}dx=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{(jt-1)x}}{jt-1}\Bigg|_0^A=\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{Ajt}}{e^{A}(jt-1)}-\frac{1}{jt-1}=\frac{1}{1-jt}.$$

Центральні моменти знаходимо за властивістю 5 [ч. 2, с. 586]. Маємо

$$M\left[X^k\right]=\frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{j^k},$$

тоді

$$M[X]=\frac{\varphi'_X(0)}{j}=\frac{1}{j}\left[\frac{j}{(1-jt)^2}\right]\Bigg|_{t=0}=1;$$

$$M\left[X^2\right]=\frac{\varphi''_X(0)}{j^2}=\frac{1}{j^2}\left[\frac{2j^2}{(1-jt)^3}\right]\Bigg|_{t=0}=2;$$

....

$$M\left[X^k\right]=\frac{\varphi_X^{(k)}(0)}{j^k}=\frac{1}{jk}\left[\frac{k!\,j^k}{(1-jk)^{k+1}}\right]\Bigg|_{t=0}=k!$$

5. Під час складання статистичного звіту потрібно було додати 10^4 чисел, кожне з яких було округленим з точністю до 10^{-m}. Припускаючи, що похибки, які виникли внаслідок округлення, взаємно незалежні та рівномірно розподілені на відрізку $\left(-0{,}5\cdot10^{-m};\ \ 0{,}5\cdot10^{m}\right)$, визначити границі, в яких з імовірністю, більшою за 0,997, буде знайдена сумарна похибка.

Розв'язання. Позначимо похибку округлення як $X_i\left(\ i=1,\ 2,\dots,10^4\right)$. Тоді сумарні похибки $X=\sum\limits_{i=1}^{10^4}X_i$; X_i взаємно незалежні та однаково розподілені, тобто можна застосувати теорему Ляпунова. Знайдемо $m=M[\,X_i\,]$ та $\sigma^2=D[\,X_i\,]$. Оскільки X_i розподілені рівномірно в межах $(a,\ b)$, де $a=-0{,}5\cdot10^{-m}$, $b=0{,}5\cdot10^{m}$, маємо

$$m=M[\,X_i\,]=\frac{a+b}{2}=0;\quad D[\,X_i\,]=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{10^{-2m}}{12};\quad \sigma=\sqrt{D[\,X_i\,]}=\frac{10^{-m}}{\sqrt{12}}.$$

За теоремою Ляпунова,

$$P\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{10^4}X_i-10^4\cdot 0}{\frac{10^{-m}}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{10^4}}<x\right]\underset{n\to\infty}{\text{імов}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{\frac{-u^2}{2}}du=\Phi(x), jghf,$$

звідки випливає

$$P\left[-\frac{10^{2-m}}{\sqrt{12}}x<X<\frac{10^{2-m}}{\sqrt{12}}x\right]\to\Phi(x)-\Phi(-x)=2\Phi(x)-1;$$

$$2\Phi(x)=1{,}997;\quad \Phi(x)=0{,}998\,5.$$

За табл. 3.2 [ч. 2, с. 527] знаходимо, що $x=2{,}97$, тоді

$$-0{,}86\cdot10^{2-m}<X<0{,}86\cdot10^{2-m},$$

що і є відповіддю.

177. Кількість сонячних днів протягом року для даної місцевості є випадковою величиною з математичним сподіванням, яке дорівнює 75 дням. Оцінити знизу ймовірність того, що в наступному році у даній місцевості буде понад 100 сонячних днів.

178. Закон розподілу попарно незалежних випадкових величин, що утворюють випадкову послідовність $\{X_n\}$, $n=1,\ \ 2,\dots$:

X_{ni}	$-na$	0	na
P_{ni}	$\frac{1}{2n^2}$	$1-\frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

З'ясувати, чи справджується для цієї послідовності закон великих чисел.

179. Вимірюється швидкість вітру в даному пункті Землі. Випадкова величина X – проекція вектора швидкості вітру на фіксований напрямок. Оцінити ймовірність події $A=\{X \geq 80 \text{ км/год}\}$ при такій початковій інформації: а) в результаті багаторічних спостережень установлено, що $M[X]=16$ км; б) проведено додаткові випробування, завдяки яким визначено, що $\sigma_x = 4$ км/год.

180. У результаті 500 незалежних дослідів здобуті значення випадкової величини $X: x_1, x_2, ..., x_{500}$. Нехай математичне сподівання $M[X]=1$ й дисперсія $D[X]=1$. Оцінити ймовірність того, що модуль різниці між середньоарифметичними значеннями випадкової величини, що спостерігаються, і її математичним сподіванням буде меншим ніж $\frac{1}{2}$.

181. Знайти характеристичні функції та, використовуючи їх, обчислити $M[X]$ і $D[X]$: а) для рівномірного розподілу в інтервалі $(-a; \ a)$; б) для біномного розподілу; в) для розподілу Пуассона.

182. Дано характеристичну функцію центрованої випадкової величини X, що підпорядкована закону нормального розподілу

$$\varphi_X(t) = e^{\frac{-t^2\sigma^2}{2}}.$$

Знайти всі центральні моменти випадкової величини X.

183. Гральний кубик кидають 1 000 разів. Знайти границі, в яких з імовірністю, більшою ніж 0,95, буде розміщуватись число очок, що випали.

184. Гральний кубик підкидають доти, доки загальна сума очок, які припали, не перевищить 700. Оцінити ймовірність того, що для цього буде потрібно не більше ніж 210 підкидань.

185. Випадкова величина X – результат вимірювань певної фізичної величини, закон розподілу якої невідомий. Визначити, яку максимальну відносну точність вимірювання можна гарантувати з імовірністю, не меншою ніж 0,95, якщо $M[X]=0,1$; $\sigma[X]=0,02$ та береться середньоарифметичне 100 вимірів.

6.13. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

Приклади. **1.** Випадкова величина $X^0(t)$ задана у вигляді $X^0(t)=Vt+b$, де V – нормально розподілена випадкова величина, $M[V]=m$, $\sigma(V)=\sigma$, а b – стала. Знайти основні характеристики процесу: $m_x(t)$, $\sigma_x(t)$, $k_x(t_1, \ t_2)$.

Розв'язання. Застосовуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$m_{x^0}(t) = M[Vt+b] = tM[V]+b = tm+b; \quad \sigma_{x^0}(t)=\sqrt{D[X]},$$

але оскільки

$$D\left[X^0\right] = M[Vt+b]^2 - M^2[Vt+b] = M\left[V^2t^2+2Vbt+b^2\right] -$$

$$-(tm+b)^2 = t^2M\left[V^2\right]+2btM[V]+b^2-t^2m^2 -$$

$$-2tmb-b^2 = t^2\left[M\left[V^2\right]-m^2\right] = t^2D[V],$$

остаточно дістаємо

$$\sigma_{x^0}(t) = \sqrt{t^2D[V]} = |t|\cdot\sigma.$$

Залишилося скористатись властивостями математичного сподівання, щоб визначити

$$k_{x^0}(t_1, \ t_2) = M\left[X^0(t_1)\cdot X^0(t_2)\right] = M\left[\left(X^0(t_1)-m_X(t_1)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(X^0(t_2)-m_{X^0}(t_2)\right)\right] = M\left[(Vt_1+b-mt_1-b)(Vt_2+b-mt_2-b)\right] =$$

$$= M\left[(V-m)\cdot t_1(V-m)t_2\right] = t_1t_2M\left[V^2-2mV+m^2\right] =$$

$$= t_1t_2\left(M\left[V^2\right]-2mM[V]+m^2\right) = t_1t_2\left(M\left[V^2\right]-2m^2+m^2\right) =$$

$$= t_1t_2\left(M\left[V^2\right]-m^2\right) = t_1t_2\sigma^2.$$

Відповідь: $m_{X^0}(t)=tm+b$; $\sigma_{X^0}(t)=|t|\cdot\sigma$; $k_{X^0}(t_1, \ t_2)=t_1t_2\sigma^2$.

2. Випадковий процес $X^0(t)$ є випадковим гармонійним коливанням $X^0(t)=a\cos(\omega t+\Phi)$ зі сталою амплітудою a та частотою ω, випадковою фазою Φ, що розподілена рівномірно на відрізку $[-\pi, \ \pi]$. Чи є даний процес стаціонарним? Чи є він ергодичним?

Розв'язання. Для з'ясування, чи є процес стаціонарним, спочатку перепишемо $X^0(t)$ у вигляді

$$X^0(t) = a(\cos\omega\, t\cos\Phi - \sin\omega t\sin\Phi).$$

Враховуючи, що a і ω сталі, маємо

$$M\left[X^0(t)\right] = a(\cos\omega t\cdot M[\cos\Phi] - \sin\omega t\cdot M[\sin\Phi]);$$

$$M[\cos\Phi] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\sin\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$M[\sin\Phi] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi = \frac{-1}{2\pi}\cos\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Отже, $M\left[X^0(t)\right] = 0$. Знайдемо далі

$$k_{x^0}(t_1,\ t_2) = M\left[X^0(t_1)\cdot X^0(t_2)\right] = M\left[X(t_1)\cdot X(t_2)\right] =$$

$$= M\left[a\cos(\omega t_1+\Phi)\cdot a\cos(\omega t_2+\Phi)\right] = \frac{a^2}{2}M\left[\cos\omega(t_1-t_2)+\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Phi)\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}M\left[\cos\omega(t_1-t_2)+M\left[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Phi)\right]\right];$$

$$M\left[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\Phi)\right] = M\left[\cos\omega(t_1+t_2)\cos2\Phi - \sin\omega(t_1+t_2)\sin2\Phi\right] =$$

$$= \cos\omega(t_1+t_2)\cdot M[\cos2\Phi] - \sin\omega(t_1+t_2)\cdot M[\sin2\Phi];$$

$$M[\cos2\Phi] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4\pi}\sin2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$M[\sin2\Phi] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin2\varphi\, d\varphi = \frac{-1}{4\pi}\cos2\varphi\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Таким чином,

$$k_{x^0}(t_1,\ t_2) = \frac{a^2}{2}\cos\omega(t_1-t_2)$$

залежить тільки від різниці моментів часу. Крім того, як показано вище, $M\left[X^0(t)\right] = 0$. Обидві умови стаціонарності для випадкової функції $X^0(t)$

виконані, тобто процес $X^0(t)$ є стаціонарним.

Щоб визначити, чи є процес ергодичним [ч. 2, с. 593], знаходимо

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}a\cos(\omega t+\varphi)dt = \frac{a}{2T\omega}\sin(\omega t+\varphi)\Big|_{-T}^{T} =$$

$$= \frac{a}{2T\omega}\left[\sin(\omega T+\varphi)-\sin(\omega T-\varphi)\right] = \frac{a}{T\omega}\sin\omega T\cos\varphi;$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt = \lim_{T\to\infty}\frac{a\sin\omega T\cos\varphi}{T\omega} = 0 = M\left[X^0(t)\right].$$

Умова ергодичності виконана. Отже, процес є ергодичним.

186. Випадкова функція $X(t)$ задана у вигляді $X(t) = U + Vt$, де U і V – незалежні випадкові величини неперервного типу, що підлягають показниковому розподілу з параметрами відповідно $\lambda_U = 1$ і $\lambda_V = 2$. Знайти числові характеристики $m_x(t)$ і $D_x(t)$.

187. Дана кореляційна функція випадкового процесу $X(t)$:

$$k_x(t_1,\ t_2) = \frac{1}{1+(t_1-t_2)^2}.$$

Знайти дисперсію процесу

$$Y(t) = e^{-t^2}X(t)+\sin2t.$$

188. Знайти математичне сподівання випадкових функцій: а) $X(t) = Ut^2$, де U – випадкова величина, причому $M[U] = 5$; б) $X(t) = U\cos2t + Vt$, де U і V – випадкові величини, причому $M[U] = 3$, $M[V] = 4$.

189. Задана кореляційна функція $k_x(t_1,\ t_2)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти кореляційні функції випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t)+t$; б) $Y(t) = (t+1)X(t)$; в) $Y(t) = 4X(t)$.

190. Задана дисперсія $D_x(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайти дисперсію випадкових функцій: а) $Y(t) = X(t)+e^t$; б) $Y(t) = tX(t)$.

191. Знайти: а) математичне сподівання; б) кореляційну функцію; в) дисперсію випадкової функції $X(t) = U\sin2t$, де U – випадкова величина, причому $M[U] = 3$, $D[U] = 6$.

6.14. ПОСЛІДОВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ЗАЛЕЖНИХ ВЕЛИЧИН. ЛАНЦЮГИ МАРКОВА

Приклад. Дано ланцюг Маркова, пов'язаний із випробуванням Бернуллі так: у момент n система перебуває в стані E_1, якщо випробування $n-1$ і n привели до результату УУ; аналогічно E_2, E_3, E_4 відповідають результатам УН, НУ, НН. Знайти матрицю переходу та її показники.

Розв'язання. Складемо матрицю P. Для цього розглянемо ймовірність переходу за один крок – від n -го до $(n+1)$ -го випробування.

Оскільки маємо схему Бернуллі, у випробуванні $n+1$ ймовірність успіху буде p, неуспіху – q.

Зрозуміло, що можливі такі переходи:

$$E_1 \begin{matrix} \nearrow E_1(p) \\ \searrow E_2(q) \end{matrix}, \quad E_2 \begin{matrix} \nearrow E_3(p) \\ \searrow E_4(q) \end{matrix}, \quad E_3 \begin{matrix} \nearrow E_1(p) \\ \searrow E_2(q) \end{matrix}, \quad E_4 \begin{matrix} \nearrow E_3(p) \\ \searrow E_4(q) \end{matrix}.$$

Імовірності переходів написані в дужках. Імовірності решти переходів дорівнюють нулеві. Отже, матриця P має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix}.$$

Знайдемо показники матриці:

$$P^2 = \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{pmatrix};$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$p^k = p^2 \left(k = 3,\ 4, \ldots\right).$$

192. Імовірність переходу за один крок у ланцюгу Маркова задається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Знайти ймовірність переходу за два кроки. За скільки кроків із другого стану можна перейти в третій?

193. Дано ланцюг Маркова з двома станами E_1 і E_2, ймовірностями переходу $p_{11} = p_{22} = p$; $p_{12} = p_{21} = q$ $(0 < p < 1, \quad p + q = 1)$ та початковими ймовірностями $p_{01} = \alpha$, $p_{02} = \beta = 1 - \alpha$. Знайти $p_1(3)$, $p_2(3)$.

194. Ланцюг Маркова має таку матрицю переходу:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Показати, що цей ланцюг ергодичний і знайти граничні ймовірності.

195. Задано матрицю переходу

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю переходу $P_2 = P_1^2$.

196. Задано матрицю переходу

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю переходу $P_3 = P_1^3$.

Приклад. Потік машин, що йде по шосе в одному напрямку, являє собою найпростіший потік з інтенсивністю λ. Людина виходить на шосе, щоб зупинити першу машину, яка їде в даному напрямку. Знайти закон розподілу часу T, який їй доведеться чекати. Визначити $M[T]$, $\sigma[T]$.

Розв'язання. Оскільки найпростіший потік не має наслідків, то "майбутнє" не залежить від "минулого", зокрема від того, скільки часу пройшло з тих пір, як проїхала остання машина. Тому розподіл часу точно такий, як і розподіл проміжку часу між появою чергових машин:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Щільність розподілу $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Отже,

$$M[T] = 1/\lambda, \quad D[T] = 1/\lambda^2, \quad \sigma[T] = 1/\lambda.$$

197. Частинки, що вилітають з радіоактивної речовини в процесі її розпаду, створюють найпростіший потік із параметром λ. Кожна частинка незалежно від іншої з імовірністю p реєструється лічильником. Визначити ймовірність того, що за час t буде зареєстровано n частинок.

198. Автоматична телефонна станція отримує в середньому за годину 300 викликів. Яка ймовірність того, що за дану хвилину вона матиме рівно два виклики?

199. Автоматична телефонна станція має чотири канали зв'язку. На станцію надходить найпростіший потік заявок зі щільністю $\lambda = 3$ виклики за хвилину. Виклик, що надійшов у момент, коли всі лінії зайняті, отримує відмову (припускається, що наступні виклики абонентів, які отримали відмову, не порушують пуассонівського характеру потоку заявок). Середня тривалість розмови – 2 хв. Знайти: а) ймовірність відмови; б) середню частку часу, протягом якого телефонна станція взагалі не завантажена.

200. Станція наведення винищувачів має три канали. Кожний канал може одночасно наводити один винищувач на одну ціль. Середній час наведення – 2 хв. Потік цілей – найпростіший зі щільністю $\lambda = 1{,}5$ літаки за хвилину. Станцію можна вважати системою з відмовами, тому що ціль, по якій наведення почалось у момент, коли вона ввійшла в зону винищувачів, узагалі залишається не атакованою. Знайти середню частку цілей, що проходять крізь зону дій необстріляними.

***Приклади.* 1.** У результаті випробування випадкова величина прийняла такі значення: 16; 17; 9; 13; 21; 11; 7; 7; 19; 5; 17; 5; 20; 18; 11; 4; 6; 22; 21; 15; 15; 23; 19; 25; 1. Потрібно: а) скласти варіаційний ряд; б) збудувати полігон частот; в) скласти інтервальний варіаційний ряд, для цього проміжок [0, 25] розбити на п'ять ділянок, що мають однакову довжину; г) знайти статистичні характеристики $\overline{X}$, S^2, S.

Розв'язання. Знаходимо обсяг вибірки $n = 25$. Складаємо таблицю варіаційного ряду

x_i	1	4	5	6	7	9	11	13	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25
n_i	1	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	1	1

Далі будуємо полігон частот, як показано на рис. 6.7.

Складаємо інтервальний варіаційний ряд

$$\begin{array}{ccccc}]0,5] &]5,10] &]10,15] &]15,20] &]20,25] \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 5 \end{array}$$

Гістограма частот зображена на рис. 6.8.

Для знаходження статистичних характеристик використовуємо ПЕОМ. Складаємо програму на Бейсику:

```
REM СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ, ДИСПЕРСІЯ,
СЕРЕДНЄ КВАДРАТИЧНЕ ВІДХИЛЕННЯ 1
20: INPUT "введіть "0" ДЛЯ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ, "1" ДЛЯ ВИБІРКИ", P
IF P=0 THEN 40: IF P=1 THEN 40: GOTO 20
PRINT "ЧИСЛО СПОСТЕРЕЖЕНЬ"
INPUT N
PRINT "ВВЕДІТЬ ЗНАЧЕННЯ СПОСТЕРЕЖЕНЬ"
FOR I=1 TO N
```

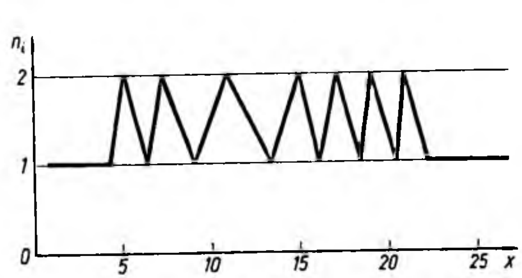

Рис. 6.7

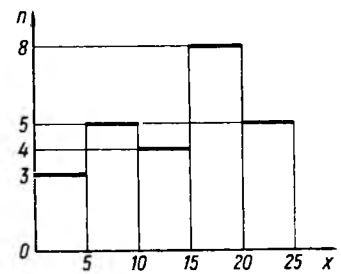

Рис. 6.8

```
INPUT X
S=S+X
T=T+X·2
NEXT I
M=S/N
Y=(T–N·M/2)/(N–P)
PRINT
PRINT "СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ ="; M
PRINT "ДИСПЕРСІЯ ="; Y
PRINT "СЕРЕДНЬОКВ. ="; SOR (Y)
END
Число спостережень
Введіть значення спостережень
Середнє значення = 13.88
Дисперсія = 45.0656
Середньокв. = 6. 713091687144
```

2. Під час обробки даних 15 випробувань спортивного літака одержано такі значення його максимальної швидкості: 422,2; 425,6; 418,7; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 420,0 м/с. Визначити незсунені оцінки математичного сподівання та середнє квадратичне відхилення максимальної швидкості літака. Припускаючи, що максимальна швидкість літака має нормальний розподіл, знайти довірчий інтервал для математичного сподівання з рівнем значущості 0,05.

Розв'язання. Незсунену оцінку для математичного сподівання обчислюємо за формулою (15.3) [ч. 2, с. 612]:

$$\bar{X}=\frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15}x_i=\frac{1}{15}(422,2+425,6+418,7+420,3+425,8+423,1+431,5+$$

$$+428,2+438,3+434,0+411,3+417,2+413,5+441,3+420.0)=424,73\,.$$

Незсунену оцінку дисперсії знаходимо за формулою (15.16) [ч. 2, с. 615]:

$$S^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{15}\left(x_i-\bar{X}\right)^2;$$

$$S^{*2}=\frac{1}{14}\Big(2{,}53^2+0{,}87^2+6{,}03^2+4{,}43^2+1{,}07^2+1{,}63^2+6{,}77^2+3{,}47^2+13{,}57^2+$$

$$+9{,}27^2+13{,}43^2+7{,}53^2+11{,}23^2+16{,}57^2+4{,}73^2\Big)=\frac{1055{,}0135}{14}=75{,}358;$$

$$S^*=\sqrt{S^{*2}}=8{,}68\,.$$

Довірчий інтервал для математичного сподівання μ з рівнем значущості 0,05 дістаємо, використовуючи формулу (15.20) [ч. 2, с. 618]:

$$P\left(\left|\,\mu-\bar{X}\right|<t_p\frac{S^*}{\sqrt{n}}\right)=p=1-\alpha=0{,}95=2\Phi\left(t_p\right),$$

звідки $\Phi\left(t_p\right)=0{,}475$. За табл. 15.2 [ч. 2, с. 619] визначаємо, що $t_p=1{,}96$, тобто

$$\bar{X}-t_p\frac{S^*}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_p\frac{S^*}{\sqrt{n}},\quad t_p\frac{S^*}{\sqrt{n}}=1{,}96\frac{8{,}68}{\sqrt{15}}=4{,}39\,.$$

Отже, $420{,}34<\mu<429{,}02$.

3. Результати вимірювань 1000 деталей наведені у вигляді інтервального варіаційного ряду в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i^*	98,0	98,5	99,0	99,5	100,0	100,5	101,0	101,5	102,0	102,5
n_i	21	47	87	158	181	201	142	97	41	25

Перевірити, використовуючи критерій згоди Колмогорова, згоду одержаних спостережень. При цьому передбачається, що величина X підпорядкована законові нормального розподілу з математичним сподіванням $\mu=100{,}25$ мм і середньоквадратичним відхиленням $\sigma=1$ мм при рівні значущості $\alpha=0{,}05$.

Розв'язання. Теоретичну функцію розподілу $F_X(x)$ визначаємо за формулою

$$F_X(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2}+\Phi(x-\mu),\quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt,$$

а емпіричну функцію розподілу – за формулою

$$F_X^*\left(x_k^*\right)=\frac{1}{1\,000}\left[\sum_{i=1}^{k-1}n_i+0{,}5n_k\right].$$

Складаємо для кожного значення x_i^* різниці $F_X^*\left(x_i^*\right)-F_x\left(x_i^*\right)$ й одержані результати зводимо в таблицю

i	$x_i^*-\mu$	$\Phi\left(x_i^*-\mu\right)$	$F_X\left(x_i^*\right)$	$F_X^*\left(x_i^*\right)$	$F_X^*\left(x_i^*\right)-F_X\left(x_i^*\right)$
1	–2,25	–0,4877	0,0123	0,0105	0,0018
2	–1,75	–0,4599	0,0401	0,0445	0,0044
3	–1,25	–0,3944	0,1056	0,1115	0,0059
4	–0,75	–0,2734	0,2266	0,2340	0,0074
5	–0,25	–0,0987	0,4013	0,4035	0,0022
6	0,25	0,0987	0,5987	0,5945	0,0042
7	0,75	0,2734	0,7734	0,7660	0,0074
8	1,25	0,3944	0,8944	0,8855	0,0089
9	1,75	0,4599	0,9599	0,9545	0,0054
10	2,25	0,4877	0,9877	0,9875	0,0002

Виберемо з різниць $F_X^*\left(x_i^*\right) - F_X\left(x_i^*\right)$ найбільше за модулем значення: $D = 0{,}0089$. Знайдемо D_0 таке, що $P\left(D > D_0\right) = \alpha = 0{,}05$. За табл. 15.3 [ч.2, с. 622] дістаємо значення $t_0 = 1{,}358$, що відповідає $\alpha = 0{,}05$. Отже, $D_0 = t_0/\sqrt{n} = 1{,}358/\sqrt{1000} = 0{,}0429$. Оскільки $D < D_0$, гіпотеза про згоду даних, які спостерігаються, із законом нормального розподілу при $\mu = 100{,}25$; $\sigma = 1$ не заперечується.

Для довідок наводимо таблицю значень функції розподілу Колмогорова $(1-\alpha)$:

t	$1-\alpha$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,3	0,0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005	0008	0013	0019
0,4	0028	0040	0050	0074	0097	0126	0160	0200	0247	0300
0,5	0361	0428	0503	0585	0675	0772	0876	0987	1104	1228
0,6	1357	1492	1632	1778	1927	2080	2236	2396	2558	2722
0.7	2888	3055	3223	3391	3560	3728	3896	4064	4230	4395
0,8	4559	4720	4880	5038	5194	5347	5497	5645	5791	5933
0,9	6073	6209	6343	6473	6601	6725	6846	6964	7079	7191
1,0	7300	7406	7508	7608	7704	7798	7889	7976	8061	8143
1,1	8223	8300	8374	8445	8514	8580	8644	8706	8765	8823
1,2	8878	8930	8981	9030	9076	9121	9164	9206	9245	9283
1,3	9319	9354	9387	9418	9449	9478	9505	9531	9556	9580
1,4	9603	9625	9646	9665	9684	9702	9718	9734	9750	8764
1,5	9778	9791	9803	9815	9826	9836	9846	9855	9864	9873
1,6	9880	9888	9895	9902	9908	9914	9919	9924	9929	9934
1,7	9938	9942	9946	9950	9953	9956	9959	9962	9965	9967
1,8	9969	9971	9973	9975	9977	9979	9980	9981	9983	9984
1,9	9985	9986	9987	9988	9989	9990	9991	9991	9992	9993
2,0	99933	99970	99987	99995	99998	1,0000	–	–	–	–

4. По кожній зі 100 мішеней зробили по десять незалежних пострілів зі спортивного пістолета, фіксувались тільки влучення та промахи. Результати стрільби (ν_i) – кількість мішеней, уражених i пострілами, наведені в таблиці

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ν_i	0	2	4	10	22	26	18	12	4	2	0

Використовуючи критерій χ^2 Пірсона, перевірити, чи підпорядковуються результати стрільби біномному закону розподілу? Рівень значущості вважати таким, що дорівнює 0,10.

Розв'язання. За результатами стрільби знаходимо оцінку математичного сподівання числа влучень у мішень

$$\bar{X} = \sum_{i=0}^{10} \frac{i\nu_i}{n} = \frac{1}{100}(1\cdot 2 + 2\cdot 4 + 3\cdot 10 + 4\cdot 22 + 5\cdot 26 + 6\cdot 18 +$$

$$+ 7\cdot 12 + 8\cdot 4 + 9\cdot 2 + 10\cdot 0) = 5.$$

Статистична ймовірність влучень у мішень

$$P = \frac{\sum_{i=0}^{10} i\nu_i}{10n} = \frac{500}{1\,000} = 0{,}5\,.$$

За табл. 15.4 [ч. 2, с. 623] біномного розподілу визначаємо ймовірність влучень у мішень у разі десяти пострілів:

$$p_0 = p_{10} = 0{,}0098,\quad p_1 = p_9 = 0{,}0097,\quad p_2 = p_8 = 0{,}04395,$$

$$p_3 = p_7 = 0{,}11719,\quad p_4 = p_6 = 0{,}20508,\quad p_5 = 0{,}24609.$$

Використовуючи одержані дані, обчислимо

$$\chi^{*2} = \sum_{i=0}^{10} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(0-0{,}098)^2}{0{,}098} + \frac{(2-0{,}977)^2}{0{,}977} + \frac{(4-4{,}395)^2}{4{,}395} +$$

$$+ \frac{(10-11{,}719)^2}{11{,}719} + \frac{(22-20{,}508)^2}{20{,}508} + \frac{(26-24{,}609)^2}{24{,}609} + \frac{(18-20{,}508)^2}{20{,}508} +$$

$$+ \frac{(12-11{,}719)^2}{11{,}719} + \frac{(4-4{,}395)^2}{4{,}395} + \frac{(2-0{,}977)^2}{0{,}977} + \frac{(0-0{,}098)^2}{0{,}098} = 3{,}161.$$

Оскільки кількість ступенів волі $k = r - l - 1$, де загальна кількість інтервалів $r = 11$, а кількість параметрів, визначених на підставі спостережень, $l = 1$ (параметр $\bar{p}$), то $k = 11 - 1 - 1 = 9$.

За табл. 15.4 [ч. 2, с. 623] для величин $k = 9$ і $\chi^{*2} = 3{,}161$ знаходимо ймовірність $p\left(\chi^2 \ge \chi^{*2}\right)$ того, що величина χ^2 перевищить значення χ^{*2}. Дістаємо $\alpha_* = p\left(\chi^2 \ge \chi^{*2}\right) = 0{,}944 > 0{,}1$. Оскільки $\alpha_* > \alpha$, то відхилення від біномового закону незначні.

201. Для наведеної нижче вибірки записати варіаційний ряд, побудувати полігон частот та знайти середнє арифметичне вибірки: 1, 1, 0, 2, 3. 3, 5, 2, 2, 1, 4, 4, 2, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 0, 4, 6, 2, 5, 6, 1, 4, 1, 4, 3, 4, 2, 7, 6, 1, 2, 3, 6, 4, 2, 1, 4, 3, 3, 3, 6, 8, 3, 5, 3, 3, 2, 1, 3, 5, 3, 5.

202. Наводимо дані про витрати часу на виробництво одиниці продукції по 60 виробах:

0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,07; 0,09; 0,06; 0,09; 0,09; 0,09; 0,11; 0,09; 0,07; 0,09; 0,07; 0,10; 0,07; 0,09; 0,10; 0,06; 0,10; 0,08; 0,06; 0,09; 0,08; 0,08; 0,08; 0,08; 0,10; 0,08; 0,07; 0,09; 0,08; 0,09; 0,11; 0,09; 0,09; 0,08; 0,10; 0,09; 0,08; 0,10; 0,08; 0,09; 0,08; 0,09; 0,09; 0,08; 0,06; 0,08; 0,08; 0,10; 0,09; 0,09; 0,10; 0,10; 0,11.

Скласти інтервальний варіаційний ряд (перший інтервал 0,055–0,065), побудувати гістограму відносних частот і знайти статистичні характеристики $\overline{X}$, S^2, S.

203. Припускаючи, що витрати часу на одиницю продукції (за статистичними даними, наведеними у задачі 202) розподілені за нормальним законом, знайти довірчий інтервал для математичного сподівання з рівнем значущості 0,1.

204. Дано результати восьми незалежних вимірів однієї й тієї самої величини приладом, що не має систематичних помилок: 369, 378, 315, 420. 385, 401, 372, 383 м. Визначити незсунену оцінку дисперсії помилок вимірювань, якщо довжина вимірюваної бази: а) відома і становить $\overline{X} = 375$ м; б) невідома.

205. Стала величина виміряна 25 разів за допомогою приладу, систематична помилка якого дорівнює нулеві, а випадкові помилки вимірювання розподілені нормально із середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$ м. Визначити границі довірчого інтервалу для значень вимірюваної величини при довірчій імовірності 0,99, якщо $\overline{X} = 100$ м.

206. У цеху з десятьма верстатами щоденно реєструвалась кількість верстатів, що вийшли з ладу. Всього проведено 200 спостережень, результати яких наведені в таблиці

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_i	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Тут i – кількість верстатів, що вийшли з ладу; n_i – кількість випадків, що зареєстровані. Використовуючи критерій χ^2, перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість верстатів, які вийшли з ладу, мають розподіл Пуассона. Вважати $\alpha = 0{,}05$.

207. З таблиці випадкових чисел вибрано 150 двозначних (до сукупності двозначних чисел включаємо й 00). Результати вибірки зведено в таблицю

x_i	0:9	10:19	20:29	30:39	40:49	50:59	60:69	70:79	80:89	90:99
n_i	16	15	19	13	14	19	14	11	13	16
ν_i	0,107	0,1	0,127	0,087	0,093	0,127	0,093	0,073	0,087	0,107

У цій таблиці x_i – границі інтервалу; n_i – чисельність розряду; ν_i – частота. Перевірити, використовуючи критерій χ^2, гіпотезу про згоду спостережень із законом рівномірного розподілу при рівні значущості $\alpha = 0{,}10$.

208. Розв'язати попередню задачу, застосовуючи критерій Колмогорова і вважаючи (внаслідок мализни ширини інтервалу в таблиці) можливі значення всіх елементів вибірки, що потрапили в один інтервал, рівними значенню, яке відповідає середині інтервалу, при рівні значущості $\alpha = 0{,}10$.

209. Виміряно максимальну ємність 20 конденсаторів змінної ємності. Результати вимірювань у пФ наведені в таблиці

4,40	4,31	4,40	4,40	4,65
4,56	4,71	4,54	4,36	4,56
4,31	4,42	4,60	4,35	4,50
4,40	4,43	4.48	4,42	4,45

Знайти вибіркову середню ємність конденсаторів з цієї групи, вибіркову дисперсію S^2 ємності та її незсунену оцінку S_1^2.

210. За даними задачі 209: 1) користуючись законом нормального розподілу, знайти надійні межі для математичного сподівання M генеральної сукупності при надійному рівні: а) 0,99; б) 0,95; 2) зробити те саме за допомогою розподілу Стьюдента.

211. При свердлінні 80 отворів одним і тим самим свердлом з наступними вимірюваннями діаметрів отворів здобуто такі дані в мм:

40,25	40,35	40,45	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32
40,37	40,35	40,44	40,35	40,30	40,34	40,31	40,32
40,33	40,41	40,35	40,30	40,33	40,38	40,33	40,33
40,28	40,30	40,40	40,36	40,32	40,32	40,42	40,35
40,29	40,33	40,31	40,33	40,36	40,34	40,30	40,30
40,41	40,40	40,33	40,37	40,34	40,30	40,43	40,34
40,35	40,34	40,34	40,31	40,43	40,36	40,34	40,34
40,28	40,45	40,32	40,34	40,31	40,31	40,36	40,34
40,29	40,39	40,39	40,37	40,37	40,38	40,36	40,41
40,27	40,38	40,37	40,37	40,36	40,35	40,32	40,36

Знайти вибіркове середнє значення діаметра і незсунену оцінку дисперсії: а) безпосередньо за даними таблиці; б) згрупувавши емпіричні дані та використавши метод умовних варіант. При групуванні розбити проміжок від 40,25 до 40,45 на 10 проміжків з кроком $h = 0,2$.

212. За даними задачі 211 (після групування) знайти надійні межі для математичного сподівання M генеральної сукупності при надійному рівні: а) 0,997; б) 0,95.

213. Дано статистичний розподіл:

I	(0; 10)	(10; 20)	(20; 30)	(30; 40)	(40; 50)	(50; 60)
n_x	11	14	15	10	14	16

Вирівняти дані вимірювань, застосувавши закон розподілу з рівномірною щільністю.

214. Дано статистичний розподіл:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
n_x	7	21	26	21	13	7	3	2

Показати, що він близький до розподілу Пуассона та встановити залежність між значеннями випадкових величин і ймовірностями цих значень.

215. Дано статистичний розподіл:

I	(0; 3)	(3; 6)	(6; 9)	(9; 12)	(12;15)	(15;18)	(18;21)	(21;24)	(24;27)	(27;31)
n_x	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Показати, що він близький до нормального розподілу та побудувати таблицю розподілу.

Відповіді

1. 12. **2.** 1800. **3.** $mk + nl$. **4.** $\frac{k(k-3)}{2}$. **5.** 1 680. **6.** A_{15}^3. **7.** $k(k-1)$. **8.** 720. **9.** 1 120. **10.** C_{52}^{10}. **11.** $C_{52}^{10}C_4^1$. **12.** 24. **13.** 120. **14.** A_{30}^3. **15.** $7! = 5\,040$. **16.** $C_{12}^4 A_{15}^4$. **17.** $C_{15}^5 C_{10}^5$. **18.** $2^{10} - C_{10}^0 - C_{10}^1 = 1013$. **19.** а) $C_{10}^3 = 120$; б) $A_{10}^3 = 720$. **20.** $\Omega = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 5),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4)\}$. **21.** а) $\omega_1 = (abc|-|-)$;

$\omega_2 = (-|abc|-)$; $\omega_3 = (-|-|abc)$; $\omega_4 = (ab|c|-)$; $\omega_5 = (ac|b|-)$; $\omega_6 = (bc|\ a\ |-)$; $\omega_7 = (ab|-|c)$; $\omega_8 = (ac|-|b)$; $\omega_9 = (bc|-|a)$; $\omega_{10} = (a|bc|-)$; $\omega_{11} = (b|ac|-)$; $\omega_{12} = (c|ad|-)$; $\omega_{13} = (a|-|bc)$; $\omega_{14} = (b|-|ac)$; $\omega_{15} = (c|-|ab)$; $\omega_{16} = (-|ab|c)$; $\omega_{17} = (-|ac|b)$; $\omega_{18} = (-|bc|a)$; $\omega_{19} = (-|a|bc)$; $\omega_{20} = (-|b|ac)$; $\omega_{21} = (-|c|ab)$; $\omega_{22} = (a|b|c)$; $\omega_{23} = (a|c|b)$; $\omega_{24} = (b|\ a\ |c)$; $\omega_{25} = (b|c|a)$; $\omega_{26} = (c|a|b)$; $\omega_{27} = (c|b|a)$; б) $\omega_1 = (***|-|-)$; $\omega_2 = (-|***|-)$; $\omega_3 = (-|-|***)$; $\omega_4 = (**|*|-)$; $\omega_5 = (**|-|*)$; $\omega_6 = (*|**|-)$; $\omega_7 = (*|-|**)$; $\omega_8 = (-|**|*)$; $\omega_9 = (-|*|**)$; $\omega_{10} = (*|*|*)$. **22.** $\omega_1 = (\text{ГГГ})$; $\omega_2 = (\text{ГГЦ})$; $\omega_3 = (\text{ГЦГ})$; $\omega_4 = (\text{ЦГГ})$; $\omega_5 = (\text{ГЦЦ})$; $\omega_6 = (\text{ЦГЦ})$; $\omega_7 = (\text{ЦЦГ})$; $\omega_8 = (\text{ЦЦЦ})$. **23.** Так; так; так; так. **24.** $D_1 = A + B + C$; $D_2 = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$; $D_3 = ABC$; $D_4 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}$; $D_5 = D_3 + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$.
25. $AB\bar{C} =$ {обраний юнак, який живе в гуртожитку й не курить}; $ABC = A =$ {коли всі юнаки живуть у гуртожитку й не курять}; $\bar{A} = B =$ {коли жодна дівчина не курить, а всі юнаки курять}. Ні, тому що можуть курити й дівчата.
26. $\omega_1 = (\text{ГГ})$; $\omega_2 = (\text{ЦЦ})$; $\omega_3 = (\text{ЦГГ})$; $\omega_4 = (\text{ГЦЦ})$; $\omega_5 = (\text{ГЦГГ})$; $\omega_6 = (\text{ЦГЦЦ})$;...
27. $\omega_1 = (AB)$; $\omega_2 = (A\bar{B})$; $\omega_3 = (\bar{A}B)$; $\omega_4 = (\bar{A}\bar{B})$; а) $C = A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup AB = A \cup B$; б) $D = A\bar{B} \cup \bar{A}B$; в) $E = \bar{A}\bar{B}\left(E = \overline{A \cup B}\right)$. **28.** $\Omega = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3)\}$; $\{(2,\ 4),\ (4,\ 2)\}$.
29. а) $A\bar{B}\bar{C}$; б) $AB\bar{C}$; в) $A \cup B \cup C$; г) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; д) ABC; е) $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$. **30.** $\frac{7}{15}$; $\frac{1}{5}$.
31. 0, 005. **32.** 135. **33.** $\frac{1}{4}$. **34.** $\frac{1}{18}$. **35.** а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008; г) 0,512. **36.** $p = 1 - 0,5\left[\left(1 - \frac{\Delta}{T}\right)^2 + \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2\right]$. **37.** 0,121. **38.** $P(A) = \frac{[L - l_2 - (s - s_0)][L - l_1 - (s_0 + l_1)]}{(L - l_2)(L - l_1)}$; $P(B) = \frac{[L - l_2 - (s + s_0)](s_0 + l_1)}{(L - l_2)(L - l_1)}$; $P(C) = \frac{(s + s_0)[L - l_1 - (s_0 + l_1)]}{(L - l_1)(L - l_2)}$; $P(D) = \frac{(s - s_0)(s_0 + l_1)}{(L - l_2)(L - l_1)}$.
39. $\frac{C_3^1 C_2^1 C_2^1}{C_7^1} = \frac{12}{35}$. **40.** $P = \frac{2 \cdot 14!}{15!} = \frac{2}{15}$. **41.** $\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3} \approx 0,504$. **42.** $\frac{1}{5}$. **43.** $\frac{3!2!2!}{10!} = \frac{1}{151\,200}$. **44.** $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,517...$; $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0,491...$ **45.** а) $\frac{C_{n-N}^r}{C_n^r}$; б) $\left(1 - \frac{N}{n}\right)^r$;

1а) 0.911 812…; 1б) 0,912 673…; 2а) 0,330 476…; 2б) 0,348 678… **46.** а) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; б) $\frac{2}{\pi}$. **47.** $\frac{729}{256}\pi^4 \approx 0{,}029$. **48.** а) $1-0{,}4^3=0{,}936$; б) $3(0{,}6)^2\cdot 0{,}4=0{,}432$; в) $0{,}6^3=0{,}216$; г) $0{,}4^3=0{,}064$. **49.** $\frac{C_{40}^2C_{10}^1}{C_{50}^3}+\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3}=\frac{221}{245}$. **50.** $p_1p_2+p_3-p_1p_2p_3=0{,}167$. **51.** а) $\left(\frac{1}{20}\right)^5$; б) $\left(\frac{19}{20}\right)^5$; в) $1-\left(\frac{19}{20}\right)^5$. **52.** а) $1\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{3}{18}\cdot\frac{2}{17}\approx 0{,}00413$; б) $1\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{10}{18}\cdot\frac{5}{17}\approx 0{,}130$. **53.** $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$. **54.** $\frac{C_{10}^2\left(C_7^1+C_3^1\right)+C_7^2\left(C_{10}^1+C_3^1\right)+C_3^2\left(C_{10}^1+C_7^1\right)+C_{10}^3+C_7^3+C_3^3}{C_{20}^3}=\frac{31}{38}\approx 0{,}815$.

55. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{11}$. **56.** $\frac{C_n^k}{n^k}$, якщо $k\le n$; 0, якщо $k>n$. **57.** $\frac{1}{k!}$. **58.** а) $\frac{27}{6^3}=\frac{1}{8}$; б) $\frac{25}{216}$; в) $\frac{21}{216}=\frac{7}{72}$; г) $\frac{1}{2}$. **59.** 0, 76. **60.** 0, 095. **61.** 0,25. **62.** 0,0649. **63.** 0,52.

64. $P(A)=P(B)+P(C)$; $P(B)=\frac{p}{3}(p_1+p_2+p_3)$; $P(C)=p\left(1-\frac{p_1+p_2+p_3}{3}\right)p_0$.

65. 0,998. **66.** Нехай подія A означає, що вийнято білу кулю, ω_i – урна містить i білих куль та $(n-i)$ чорних $(i=0, 1, \dots, n)$, тоді $p(\omega_i/A)=\frac{2i}{n(n+1)}$; найбільш імовірним є ω_n. **67.** $\left(1-\frac{k}{100}\right)p_1+\frac{k}{100}\left[p_2p_1+(1-p_2)p_1^*\right]$. **68.** Звіздар повинен покласти в одну урну одну білу кулю, а решту куль – у другу. **69.** Указівка. Використати розв'язок задачі 66 і формулу повної ймовірності. $\frac{2}{3}$. **70.** Імовірність того, що стрілець C влучив, дорівнює $\frac{10}{19}>\frac{1}{2}$. **71.** $\frac{3}{29}$. **72.** а) $5pq^4$; б) $10p^2q^3$; в) $10p^3q^2$; г) $5p^4q$; д) p^5; е) q^5; є) $1-q^5$; ж) $1-q^4(q+5p)$; з) $q^2\left(q^3+5pq^2+20p^2q+10p^3\right)$.

73. а) $\frac{1}{1\,024}\approx 0{,}000\,976$; б) $\frac{63}{256}\approx 0{,}246$; в) $\frac{105}{512}\approx 0{,}205$; г) $\frac{176}{1\,024}\approx 0{,}1719$; д) $1-\frac{1}{2^{10}}\approx 0{,}999$. **74.** а) $C_4^3p^3q=0{,}25$; $C_8^5p^5q^3=\frac{7}{2^5}=0{,}218\,75$; найімовірніше виграти три партії з чотирьох; б) не менше ніж п'ять партій із восьми. **75.** а) 0,5217; б) 0,124; в) 0,1497. **76.** 0,163 08. **77.** $n\ge\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln(1-p)}$; $n_0=n+1=59$. **78.** 0,4871.

79. а) ≈ 0,348 678; б) ≈ 0,057 395; в) ≈ 0,987 204. **80.** а) ≈ 0,160 62; б) ≈ 0,938 03; в) ≈ 0,445 681. **81.** $P_{200}(1)\approx 0{,}316\,79$; $P_{200}(2)\approx 0{,}086\,79$. **82.** а) $\frac{1}{5!\mathrm{e}}\approx 0{,}003\,06$; б) $\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{5!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{3!}\right)\approx 0{,}0797$. **83.** $P_{4\,040}(1992\le k\le 2\,048)=2\Phi(0{,}8810)=0{,}621\,14$.

84. $P_{400}(104)=0{,}0006$. **85.** 1) 0,8859; 2а) 0,9651; 2б) 0,5. **86.** 0,007 78; 0,174. **87.** 500. **88.** $n\ge 100$. **89.** З умови $1-\mathrm{e}^{-x}\ge 0{,}99$ дістанемо $x\ge 5$. **90.** а) ≈ 0, 265 02; б) ≈ 0,993 26; в) ≈ 0,175 47. **91.** $n\ge 176$. **92.** 5 і 6. **93.** 4; 0,251.

94. а)

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,00098	0,0098	0,0439	0,1172	0,2051	0,2461	0,2051	0,1172	0,0439	0,0098	0,00098

$p_i=p(X=i)=\frac{C_{10}^i}{2^{10}}$; б) $p(1\le X\le 3)=\frac{175}{2^{10}}\approx 0{,}1709$; в) $p(X>3)\approx 0{,}8281$.

95.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{646}{1771}$	$\frac{1651}{3542}$	$\frac{285}{1771}$	$\frac{95}{5313}$	$\frac{5}{10625}$

; $p(X=i)=\frac{C_4^iC_{20}^{5-i}}{C_{24}^5}$.

96.

x_i	0	1	2	…	500
p_i	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\frac{1}{2\mathrm{e}}$	…	$\frac{1}{500!\mathrm{e}}$

; $p_i=p(X=i)=\frac{1}{i!\mathrm{e}}$, $(i=0, 1, \dots, 500)$.

97. $p(0\le X<1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0{,}63$ (рис. 6. 9).

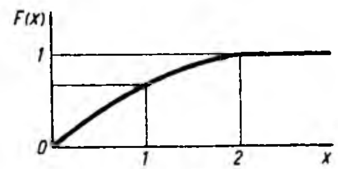

Рис. 6.9

98.

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\left(\frac{5}{6}\right)^5$	$C_5^1\frac{5^4}{6^5}$	$C_5^2\frac{5^3}{6^5}$	$C_5^3\frac{5^2}{6^5}$	$C_5^4\frac{5}{6^5}$	$\frac{1}{6^5}$

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{6^5}\sum\limits_{k=0}^{x-1}C_5^k5^{5-k}, & \text{якщо } 0\le x\le 5,\ x-\text{ціле};\\ \frac{1}{6^5}\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{sgn}[x]}C_5^k5^{5-k}, & \text{якщо } 0\le x\le 5,\ x-\text{дробове};\\ 1, & \text{якщо } x>5.\end{cases}$$

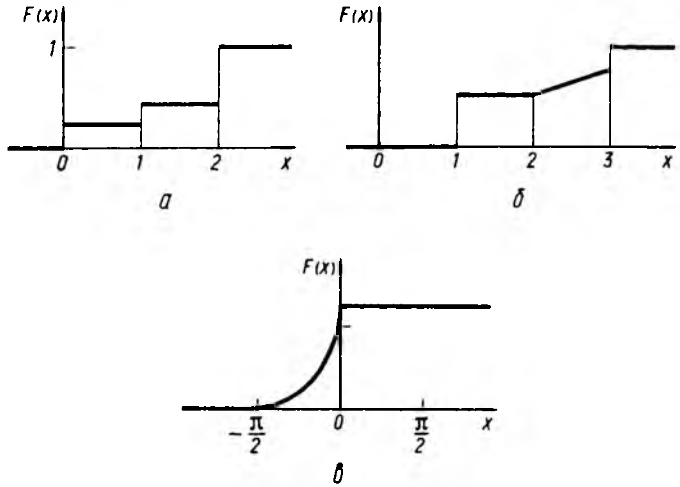

Рис. 6.10

99. Згідно з рис. 6. 10: а) – в) є. **100.** $F(x)$ – неперервна функція: $\lim\limits_{x\to 0-0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} F(x)$; $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}-0} F(x) = \lim\limits_{x\to \frac{1}{4}+0} F(x)$; $\lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{2}}{4}-0} F(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\sqrt{2}}{4}+0} F(x)$;

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & \text{якщо } 0<x\le \dfrac{1}{4}, \\ 16x, & \text{якщо } \dfrac{1}{4}<x\le \dfrac{\sqrt{2}}{4}, \\ 1, & \text{якщо } x>\dfrac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$$

101. $a=\frac{1}{\pi}$; $F(x)=\frac{1}{\pi}\arcsin \pi x+\frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2\pi}\le X<\frac{1}{\pi}\right)=\frac{1}{3}$. **102.** $a=\frac{1}{2}$; $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ 0{,}5\ (1-\cos x) & \text{при } 0\le x\le \pi, \\ 1 & \text{при } x>\pi; \end{cases}$

$p_1=\frac{1}{4}$; $p_2=\frac{1}{2}$. **103.** а) $a=0{,}5$; б) $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x<-\dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{2}\ (\sin x+1), & \text{якщо } -\dfrac{\pi}{2}\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{якщо } x>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

в) $p=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}354$. **104.** $F(x)=\frac{x^2}{R^2}$; $f(x)=\frac{2x}{R^2}$. **105.** $A=20$;

$F(x,\ y)=\left(\frac{1}{\pi}\text{arctg}\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{y}{5}+\frac{1}{2}\right)$. **106.** $c=1$.

107. $f_1(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sqrt{9-x^2}}{9\pi} & \text{при } |x|<3, \\ 0 & \text{при } |x|\ge 3; \end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi} & \text{при } |y|<2, \\ 0 & \text{при } |y|\ge 2. \end{cases}$

108. $f(x,\ y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x\ge 0,\ \ y\ge 0; \\ 0, & x<0,\ \ y<0; \end{cases}$ $P(0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1)=\left(1-e^{-1}\right)^2\approx 0{,}4$.

109. $M[X]=0$; $D[X]=1{,}2$. **110.** $x_1=4$; $x_2=5$;

x	4	5
p	0,9	0,1

. **111.** $M[X]=p_1+p_2$; $D[X]=p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)$. **112.**

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

; $M[X]=1{,}2$; $D[X]=0{,}84$. **113.** а) $M[X]=\frac{2}{3}$; $D[X]=\frac{1}{18}$; б) $M[X]=0$; $D[X]=\frac{\pi^2}{4}-2\approx 0{,}4649$; в) $M[X]=-1$; $D[X]=1$. **114.**

y_i	0	1	2
p_i	0,2	0,5	0,3

; $M[Y]=1{,}1$; $D[Y]=0{,}49$; $\sigma[Y]=0{,}7$. **115.** а) $M[Y]=0$; $D[Y]=\frac{1}{3}$; б) $M[Y]=\frac{1}{2}$; $D[Y]=\frac{1}{12}$.

116. $\lambda>1$, $M[Y]=\frac{\lambda}{\lambda-1}$; $\lambda>2$, $D[Y]=\frac{\lambda}{\lambda-2}-\left(\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2$. **117.** $\alpha_1=4{,}6$; $\alpha_2=26{,}6$; $\alpha_3=177{,}4$; $\alpha_4=1293{,}8$; $\mu_1=0$; $\mu_2=5{,}44$; $\mu_3=4{,}992$; $\mu_4=64{,}55$; $S_k=0{,}394$; $E_x=-0{,}82$. **118.** $a=\frac{3}{2}$; $\alpha_1=1$; $\alpha_2=1{,}1$; $\alpha_3=1{,}3$; $\alpha_4=\frac{57}{35}$; $\mu_1=0$; $\mu_2=0{,}1$; $\mu_3=0$; $\mu_4=\frac{1}{35}$; $\sigma_x=0{,}316$; $S_k=0$; $E_x=-\frac{1}{7}$. **119.** $\alpha_1=1$; $\alpha_2=\frac{7}{6}$; $\alpha_3=\frac{3}{2}$; $\alpha_4=\frac{31}{15}$; $\mu_1=0$; $\mu_2=\frac{1}{6}$; $\mu_3=0$; $\mu_4=\frac{1}{15}$; $S_k=0$; $E_x=-0{,}6$. **120.** $\alpha_1=4$; $\alpha_2=20$; $\alpha_3=116{,}8$; $\alpha_4=752$; $\mu_1=0$; $\mu_2=4$; $\mu_3=4{,}8$; $\mu_4=35{,}2$; $S_k=0{,}6$; $E_x=-0{,}8$. **121.** а) $f_2(y)=0{,}5f\left(\frac{3-y}{2}\right)$; б) $f_2(y)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } y\le -1, \\ \dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}\left(f\left(\sqrt{y+1}\right)+f\left(-\sqrt{y+1}\right)\right), & \text{якщо } y>-1. \end{cases}$

122. а) $f_2(y)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad y\le 0,\\ 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, & \text{якщо} \quad y>0;\end{cases}$ б) $f_2(y)=\lambda^2 e^{-\lambda\left(e^{\lambda y}-y\right)}$.

123. а)

Z	3	4	6	7	9
p	0,06	0,10	0,28	0,40	0,16

; б)

Z	2	3	5	8	12	20
p	0,06	0,10	0,04	0,24	0,40	0,16

124. а)

Y	1	16	81
p	0,2	0,1	0,7

; б)

Y	1	16
p	0,3	0,7

125. $g(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{5}}\left(1-e^{-\frac{2z}{15}}\right) & \text{при} \quad z\ge 0,\\ 0 & \text{при} \quad z<0.\end{cases}$ **126.** а) 0; б) 41; в) 10; г) 0; д) 1.

127. $M[Z]=-22$. **128.** $M[XY]=\frac{(a+b)(c+d)}{4}$; $D[XY]=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(c^2+cd+d^2\right)}{9}-$ $-\frac{(a+b)^2(c+d)^2}{16}$. **129.** $M[X]=0$; $D[X]=\frac{n}{2}$. **130.**

x	1	3
p	0,2	0,8

. **131.** $D[X]=35\left(\frac{n}{12}\right)$.

132. 7. **133.** а) 5; б) 20; в) 45. **134.** 1,53. **135.** 2,65. **136.** $M[X]=22$; $M[Y]=41$; $D[X]=56$; $D[Y]=259$; $r_{xy}=0{,}56$.

137.

x	y 1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

138. $M[X]=\frac{7}{3}$; $M[Y]=\frac{11}{6}$; $D[X]=\frac{5}{9}$; $D[Y]=\frac{17}{36}$; $C_{xy}=0$; $r_{xy}=0$. **139.** $M[X]=M[Y]=\frac{\pi}{2}-1$; $(k_{ij})=\begin{pmatrix}\pi-3 & 0\\ 0 & \pi-3\end{pmatrix}$. **140.** $M[X]=\alpha+\gamma$; $M[Y]=\alpha+\beta$; $D[X]=(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)$; $D[Y]=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$; $k_{xy}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y]=\alpha-(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)$.

141.

x	y_i 1	2	3	4	5	6	$P\{X=x_i\}$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$

x	y_i 1	2	3	4	5	6	$P\{X=x_i\}$
4	0	0	0	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
5	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$
$P\{Y=y_i\}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

$M[X]=\frac{7}{2}$; $M[Y]=\frac{161}{36}$; $D[X]=\frac{35}{12}$; $D[Y]=\frac{2\,555}{1\,296}$;

<table>
<tr><td>xy</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>12</td><td>15</td><td>16</td><td>18</td><td>20</td><td>24</td><td>25</td><td>30</td></tr>
<tr><td>p</td><td colspan="3">$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{4}{36}$</td><td colspan="3">$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr>
</table>

$k_{xy}=M[XY]-M[X]\cdot M[Y]=\frac{105}{72}$. **142.** а) $M[X]=M[Y]=\frac{2}{5}$; б) $D[X]=$ $=D[Y]=\frac{1}{25}$; в) $k_{xy}=-0{,}55$; $r_{xy}=-0{,}144$. **143.** $F_X(x)=1-e^{-\lambda x}$; $F_Y(y)=1-e^{-\beta y}$, отже, $F(x,\ y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$, тобто X і Y незалежні; $M[X]=\frac{1}{\alpha}$; $M[Y]=\frac{1}{\beta}$; $D[X]=\frac{1}{\alpha^2}$; $D[Y]=\frac{1}{\beta^2}$; $\operatorname{cov}(X,\ Y)=0$. **144.** а) $a=\frac{1}{27}$; б) $\frac{1}{9}$; в) $m_x=\frac{7}{4}$; $m_y=\frac{7}{4}$; г) $\sigma_x=\sigma_y=\frac{\sqrt{11}}{4}$. **145.** а) $a=\frac{1}{2}$; б) $m_x=m_y=\frac{\pi}{4}$; в) $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\sigma_x\cdot\sigma_y=$ $=\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}$; г) $C_{xy}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}$; $r_{xy}=-0{,}2454$. **146.** а) $a=24$; б) $m_x=m_y=\frac{2}{5}$; в) $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\frac{1}{25}$; г) $r_{xy}=-\frac{2}{3}$. **147.** а) $a=\sqrt[4]{\frac{2}{\pi}}$; б) $m_x=m_y=0$; в) $\sigma_x^2=\sigma_y^2=\frac{1}{\left(\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\right)}$; г) $r_{xy}=0$. **148.** $M[X]\approx 40$. **149.** $e^{-2}\sum_{4}^{200}\frac{2k}{k!}\approx 0{,}143\ldots$ **150.** $5^3\frac{e^{-5}}{3!}\approx 0{,}15$. **151.** $M[X]=25$; $D[X]=\frac{85}{12}$. **152.** $M[X]=800$; $D[X]\approx 572$. **153.** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6} & \text{при} \quad -2<x<4,\\ 0 & \text{при} \quad x\le -2,\ x\ge 4.\end{cases}$

154. а) 3; б) $\frac{8}{3}$; в) $\frac{4}{3}$. **155.** $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{при } 0<x<2,\\ 0 & \text{при } x\le 0,\ x\ge 2,\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ \frac{x}{2} & \text{при } 0<x<2,\\ 1 & \text{при } x\ge 2.\end{cases}$

156. $P(2\le X<5)=0{,}6$. **157.** $D[XY]=\left(a^2+ab+b^2\right)\frac{c^2+cd+d^2}{9}-\left[(a+b)^2\frac{(c+d)^2}{16}\right]$.

158. $M[X]=a$; $M[Y]=b$. **159.** а) 0,308 5; б) 0,841 3; в) 0,044; г) 0,954 4; д) $a=116{,}45$; е) $b=87{,}18$; є) $c=16{,}45$. **160.** $P(|X|\le 0{,}7)=0{,}516\,0\ldots$; $P(|X|\ge 0{,}7)=0{,}483\,9\ldots$

161. $\sigma_x=1{,}48\alpha$. **162.** $\approx 95\,\%$. **163.** $2\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\approx 0{,}904\,4\ldots$ **164.** 0,5. **165.** $4\Phi(1)=0{,}466\,0\ldots$

166. а) $4\Phi(1)\cdot\Phi(2{,}5)\approx 0{,}674\,2$; б) $2\Phi(2)\cdot\Phi(2{,}5)\approx 0{,}471\,3$; в) $\left[\Phi(0{,}5)+\Phi(1{,}5)\right]\times$ $\times\left[\Phi(2)+\Phi(3)\right]\approx 0{,}609\,6$. **167.** 0,556 7. **168.** а) 0,95; б) 0,05. **169.** $M[X]=\sigma[X]=25$; $P(|X-25|\le 75)=e^2-\frac{1}{e^4}$. **170.** а) $\left(1-e^{-0{,}12}\right)\left(1-e^{0{,}3}\right)\approx 0{,}03$; б) $e^{-0{,}12}e^{-0{,}3}\approx 0{,}66$; в) $\left(1-e^{-0{,}12}\right)\left(e^{-0{,}3}\right)+\left(1-e^{-0{,}3}\right)\cdot e^{-0{,}12}\approx 0{,}31$; г) $\approx 0{,}34$. **171.** а) 0, 2; б) 0, 5. **172.** $M[X]=1000$.

173. 2. **174.** а) $f(x)=n\alpha x^{n-1}e^{-\alpha x^n}$; б) $M[X]=\alpha^{-\frac{1}{n}}\int\limits_0^{\infty}y^{\frac{1}{n}}e^{-y}\,dy=\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\alpha^{-\frac{1}{n}}$. **175.** $\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

176. $f(x)=\left[\frac{1}{\beta(2,2)}\right]x(1-x)=6x(1-x)$. **177.** $P(X>100)\ge 0{,}75$. **178.** Застосовний.

179. а) $P(A)\le 0{,}2$; б) $P(A)\le 0{,}004$. **180.** $P\left(\left|\bar{X}-M[X]\right|<\frac{1}{2}\right)\ge 0{,}992$. **181.** а) $\varphi_x(t)=$ $=\left(\frac{1}{2jat}\right)\left(e^{jta}-e^{-jta}\right)$; $M[X]=0$; $D[X]=\frac{a^2}{3}$; б) $\varphi_x(t)=\left(q+pe^{jt}\right)^n$; $M[X]=np$; $D[X]=npq$; в) $\varphi_x=\exp\left\{\lambda\left(e^{jt}-1\right)\right\}$; $M[X]=D[X]=\lambda$. **182.** $\mu_{2k}=\sigma^{2k}(2k-1)!$; $\mu_{2k+1}=0$. **183.** $|X-3\,500|<106$; $3\,394<X<3\,606$. **184.** $\approx 0{,}08$. **185.** $\left|\frac{X-m_x}{m_x}\right|\approx$ $\approx 0{,}039\,2$. **186.** $m_X(t)=1+\frac{t}{2}$; $D_X(t)=1+\frac{t^2}{4}$. **187.** $D_Y(t)=e^{-2t^2}$. **188.** а) $m_x(t)=5t^2$; б) $m_x(t)=3\cos 2t+4t$. **189.** а) $k_y(t_1,t_2)=k_x(t_1,t_2)$; б) $k_y(t_1,t_2)=(t_1+1)(t_2+1)\times$ $\times k_x(t_1,t_2)$; в) $k_y(t_1,t_2)=16k_x(t_1,t_2)$. **190.** а) $D_y(t)=D_x(t)$; б) $D_y(t)=t^2D_x(t)$.

191. а) $m_x(t)=3\sin 2t$; б) $k_x(t_1,t_2)=6\sin 2t_1\cdot\sin 2t_2$; в) $D_x(t)=6\sin^2 2t$.

192. $P^2=\begin{pmatrix}\frac{13}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{6}\\ \frac{5}{12} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} & 0\\ \frac{5}{24} & \frac{11}{24} & \frac{1}{22} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$, з другого стану в третій можна перейти за два кроки.

193. $p_1(3)=\alpha p_{11}(3)+\beta p_{21}(3)=\left(p^3+3pq^2\right)\alpha+\left(q^3+3p^2q\right)\beta=\frac{1}{2}+\frac{(\alpha-\beta)(p-q)^3}{2}$;

$p_2(3)=\alpha p_{12}(3)+\beta p_{22}(3)=\left(q^3+3p^2q\right)\alpha+\left(p^3+3pq^2\right)\beta=\frac{1}{2}-\frac{(\alpha-\beta)(p-q)^3}{2}$.

194. Умови теореми Маркова виконуються при $S=2$, отже, ланцюг є ергодичним. $p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$. **195.** $P_2=\begin{pmatrix}0{,}60 & 0{,}40\\ 0{,}35 & 0{,}65\end{pmatrix}$. **196.** $P_3=\begin{pmatrix}0{,}244 & 0{,}756\\ 0{,}252 & 0{,}748\end{pmatrix}$. **197.** $P_n(t)=\frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^n}{n!}$.

198. $P_2=\frac{5^2}{2!}e^{-5}\approx 0{,}09$. **199.** а) $P_{\text{відм}}=p_4=\frac{\alpha^4}{4!}\left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}\right)\approx 0{,}47$, де $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}=6$; $\mu=0{,}5\,\frac{\text{розм.}}{\text{хв}}$; б) $p_0=\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^4}{4!}\right)}\approx 0{,}008\,7$. **200.** $\mu=\frac{1}{2}$; $\lambda=1{,}5$; $P_{\text{відм}}=p_3=$ $=\frac{\frac{3^3}{3!}}{1+\frac{3}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}}\approx 0{,}346$. **201.**

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Разом
n_i	2	9	11	15	8	5	5	1	1	57

; $\bar{X}\approx 3{,}175$ (рис. 6.11).

202.

Y	0,055–0,065	0,065–0,075	0,075–0,085	0,085–0,095	0,095–0,105	0,105–0,11
n_i	5	4	14	23	9	5
ω_i	0,0833	0,0667	0,2333	0,3833	0,15	0,0833

; $X=0{,}087$ хв, $S^2=0{,}000\,167$ хв, $S=0{,}013$ хв (рис. 6.12). **203.** $0{,}084<\mu<0{,}09$.

204. а) 814,87 $м^2$; б) 921,84 $м^2$. **205.** (94,9 м; 105 м). **206.** H_0 заперечується; $\chi^2=12{,}95$ (останні шість інтервалів об'єднуються). **207.** $\chi^2=4$; $k=9$; $P\left(\chi^2>\left(\chi^*\right)^2\right)=0.91$.

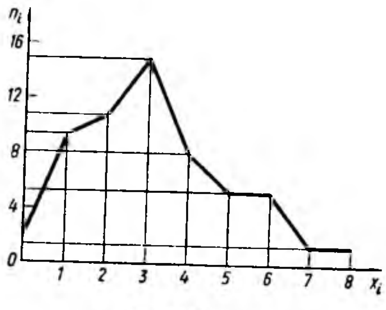

Рис. 6.11

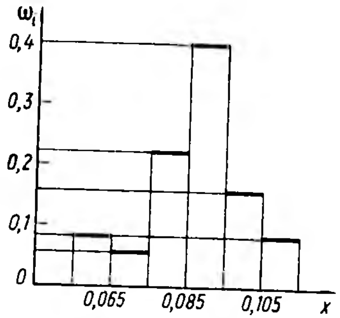

Рис. 6.12

208. $D=0{,}041$; $D_0=0{,}111$; $D<D_0$, гіпотеза не заперечується. **209.** $\bar{x}=4{,}47$; $S^2=0{,}0117$; $S_1^2=0{,}0121$. **210.** 1а) $(4{,}41;\ 4{,}53)$; 1б) $(4{,}42;\ 4{,}52)$; 2а) $(4{,}40;\ 4{,}54)$; 2б) $(4{,}42;\ 4{,}52)$; **211.** а) $\bar{x}=40{,}35$; $S_1^2=0{,}00187$; б) $\bar{x}=40{,}35$; $S_1^2=0{,}00196$. **212.** а) $(40{,}339;\ 40{,}361)$; б) $(40{,}344;\ 40{,}356)$. **213.** $M[X]=31{,}25$; $D[X]=295{,}9375$;

$$a=1{,}46;\ b=61{,}04;\ \frac{1}{b-a}=0{,}017;\ f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<1{,}46,\\ 0{,}017 & \text{при } 1{,}46\le x\le 61{,}04,\\ 0 & \text{при } x>61{,}04.\end{cases}$$

I	(0, 10)	(10, 20)	(20, 30)	(30, 40)	(40, 50)	(50, 60)
$\frac{\omega}{n}$	0,0138	0,0175	0,0188	0,0125	0,0175	0,02

214. $M[X]=2{,}55$; $D[X]=2{,}527$; $P=\frac{e^{-2{,}52}}{x!}\cdot 2{,}52^x$;

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P	0,08	0,20	0,25	0,21	0,13	0,07	0,03	0,01

215. $M[X]=15$; $D[X]=34{,}65$; $\sigma[X]\approx 5{,}9$; $f(x)=\frac{1}{5{,}9\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-15)^2}{69{,}3}}$.

I	(0; 3)	(3; 6)	(6; 9)	(9; 12)	(12; 15)	(15; 18)	(18; 21)	(21; 24)	(24; 27)	(27; 30)
P	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Глава 7

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ. ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Наведемо загальне формулювання задачі лінійного програмування в матричній формі.

Знайти $\min L(X)=CX$ при умові (обмеженні) $AX\le B\,(AX\ge B)$, $X>0$, де

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix};\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix};$$

$$C=(c_1,\ c_2,\ldots,c_n);\ L(X)=\sum_{i,j=1}^{m,n}c_{ij}x_{ij}\ .$$

Якщо ставити задачу відшукання максимуму функції, то треба поміняти знак цільової функції $L(X)$ на протилежний: $L(X)=-CX$.

Для двох або трьох базисних змінних задача розв'язується геометрично, а для більшого числа змінних – аналітично або на ЕОМ.

7.2. ГЕОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Приклади. **1.** Знайти найбільше значення функції $L=7x_1+5x_2$ в області, заданій обмеженнями

$$2x_1+3x_2\le 19,\ \ 2x_1+x_2\le 13,\ \ x_2\le 5,\ \ x_1\le 6,\ \ x_1\ge 0,\ \ x_2\ge 0.$$

Розв'язання. Побудувавши (рис. 7.1) задану область, обмежену прямими

$$2x_1+3x_2-19=0,\ \ 2x_1+x_2-13=0,\ \ x_2=5,\ \ x_1=6,\ \ x_1=0,\ \ x_2=0,$$

одержимо, що областю визначення цільової функції L є замкнений та опуклий шестикутник $ABCDEO$.

Лінійна функція L набуває найбільшого та найменшого значень у вершинах шестикутника $ABCDEO$, оскільки не має критичних точок. Тому знайти найбільше (або найменше) значення цільової функції L можна так: 1) обчислити значення функції

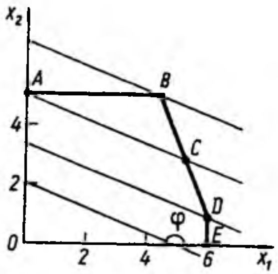

Рис. 7.1

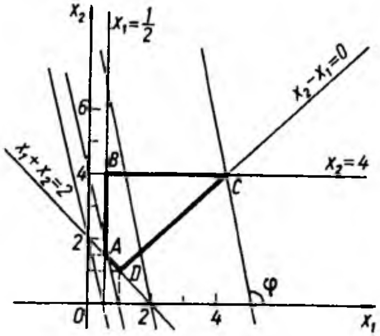

Рис. 7.2

L в точках A, B, C, D, E, O; 2) вибрати з цих значень найбільше (а в разі пошуку найменшого значення – найменше). Цю роботу можна скоротити, якщо згадати, що градієнт функції показує напрямок її найбільшого зростання, а в протилежному напрямку функція спадає з найбільшою швидкістю.

Так, для даного прикладу $\operatorname{grad} L = 7\bar{i} + 5\bar{j}$. Тому в напрямку вектора $(7; 5)$ функція L зростає з найбільшою швидкістю, а в напрямку вектора $(-7;\ -5)$ – спадає. Звідси випливає, що найбільше значення функції може бути в точці $B(2;\ 5)$ або $C(5;\ 3)$. Обчислюємо значення цільової функції в цих точках:

$$L(B) = 7\cdot 2 + 5\cdot 5 = 39;\quad L(C) = 7\cdot 5 + 5\cdot 3 = 50.$$

Отже,
$$L_{\max} = L(C) = 50.$$

2. Знайти найменше значення лінійної функції $L = 12x_1 + 4x_2$ при таких обмеженнях на змінні цієї функції:

$$-x_1 - x_2 \le -2;\ -x_1 \le -\frac{1}{2};\ x_2 \le 4;\ x_2 - x_1 \ge 0;\ x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Побудуємо (рис. 7.2) область зміни аргументів функції L, задану вищезазначеними нерівностями. Для цього накреслимо графіки прямих

$$x_1 + x_2 = 2,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 4,\ x_2 = x_1.$$

Отже, областю визначення функції L є замкнений та опуклий чотирикутник $ABCD$. Оскільки $\operatorname{grad} L = 12\bar{i} + 4\bar{j}$, то функція L спадає з найбільшою швидкістю в напрямку вектора $(-12;\ -4)$, тобто найменше значення функції L в заданій області може бути в точках $A\ (0{,}5;\ 1{,}5)$ або $D(1;\ 1)$. Обчислимо значення цільової функції в цих точках:

$$L(A) = 12\cdot 0{,}5 + 4\cdot 1{,}5 = 12;\quad L(D) = 12\cdot 1 + 4\cdot 1 = 16.$$

Звідси випливає, що

$$L_{\min} = L(A) = 12.$$

Геометричним методом розв'язати задачі лінійного програмування.

1. $L = -2x_1 - 2x_2 \to \min$ при обмеженнях $3x_1 - 2x_2 \ge -6$, $3x_1 + x_2 \ge 3$, $x_1 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

2. $L = 2x_1 + 2x_2 \to \max$ при обмеженнях $3x_1 - 2x_2 \ge -6$, $3x_1 + x_2 \ge 3$, $x_1 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

3. $L = 12x_1 + 4x_2 \to \min$ при обмеженнях $x_1 + x_2 \ge 2$, $x_1 \ge \frac{1}{2}$, $x_2 \le 4$, $x_1 - x_2 \ge 0$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4. $L = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max$ при обмеженнях $x_2 + x_3 \le 3$, $x_1 - x_2 \ge 0$, $x_2 \ge 1$, $3x_1 + x_2 \le 15$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

5. $L = 3x_1 - 4x_2 \to \max$ при обмеженнях $x_1 - 2x_2 \ge 6$, $x_1 + 2x_2 \ge 0$, $x_1 \le 6$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

6. $L = -2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min$ при обмеженнях $x_1 + x_2 \ge 2$, $3x_1 + x_2 \le 6$, $x_3 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

7.3. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. СИМПЛЕКС-МЕТОД

Приклади. **1.** Мінімізувати функцію

$$L = 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 - 2x_5 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7,\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 6, \tag{3.1}$$

де $x_k \ge 0$, кутова точка $Б_0(2;\ 1;\ 2;\ 0;\ 0)$.

Розв'язання. Ранг системи (3.1) $r = 3$, число змінних $n = 5$, число рівнянь $m = 3$, базисні змінні x_1, x_2, x_3, вільні змінні x_4, x_5.

Розв'язуємо систему (3.1) відносно базисних змінних методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_2 + 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_2 + 2x_3 - 8x_4 + x_5 = 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,$$
$$\Leftrightarrow x_2 + 2x_3 - 8x_4 + x_5 = 5,$$
$$x_3 - 2x_4 = 2,$$

$$x_1 = 2 + 5x_4 + x_5, \quad x_2 = 1 - 4x_4 - x_5, \quad x_3 = 2 + 2x_4 \quad . \tag{3.2}$$

Виключаємо x_1, x_2, x_3 з функції L: $L_1 = 7 + 15x_4 - x_5$. Одержуємо задачу $L_1 = 7 + 15x_4 - x_5 \to \min$ при обмеженнях (3.2).

Коефіцієнт при x_5 менший за нуль, а в системі є від'ємний коефіцієнт $(d_{25} = -1)$ при змінній x_5, отже, маємо третій випадок [ч. 2, с. 635]. Вибираємо нові базисні змінні (серед них обов'язково має бути змінна x_5) x_1, x_3, x_5 та вільні x_2, x_4. Оскільки тільки один коефіцієнт при x_5 у системі менший за нуль, то розв'язуваним буде друге рівняння системи (3.2)

$$x_2 = 1 - 4x_4 - x_5,$$

або

$$x_5 = 1 - x_2 - 4x_4.$$

Виключивши змінну x_5 з функції L_1 і рівнянь системи, дістанемо

$$L_2 = 6 + x_2 + 19x_4 \to \min$$

за умови

$$x_1 = 3 - x_2 + x_4, \quad x_3 = 2 + 2x_4, \quad x_5 = 1 - x_2 - 4x_4.$$

Оскільки всі коефіцієнти лінійної форми L_2 додатні, то задачу розв'язано.

Відповідь: $L_{\min} = 6$ $(x_2 = 0, \quad x_4 = 0)$ при $Б_2(3;\ 0;\ 2;\ 0;\ 1)$.

2. Мінімізувати функцію $L = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \min$ при обмеженнях

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3), \quad x_2 + x_3 \leq 3, \quad x_1 - x_2 \geq 0, \quad x_1 \leq 1, \quad 3x_1 + x_2 \leq 15.$$

Розв'язання. Перейдемо до основної задачі лінійного програмування:

$$L = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях

$$3 - x_2 - x_3 \geq 0, \quad x_1 - x_2 \geq 0, \quad 1 - x_1 \geq 0, \quad 15 - 3x_1 - x_2 \geq 0 .$$

Введемо чотири базисні змінні x_4, x_5, x_6, x_7. Одержимо

$$L_1 = -x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_4 = 3 - x_2 - x_3, \quad x_5 = x_1 - x_2, \quad x_6 = 1 - x_1, \quad x_7 = 15 - 3x_1 - x_2;$$

кутова точка

$$Б_0(0;\ 0;\ 0;\ 3;\ 0;\ 1;\ 15);$$

нові базисні змінні

$$x_1, \ x_4, \ x_5, \ x_7,$$

вільні $\quad x_2, \ x_3, \ x_6,$

розв'язуване рівняння

$$x_6 = 1 - x_1.$$

Виключимо x_1 із L:

$$L_1 = -1 + x_6 - 3x_2 - 3x_3 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1 = 1 - x_6, \quad x_4 = 3 - x_2 - x_3, \quad x_5 = 1 - x_2 - x_6, \quad x_7 = 12 - x_2 + 3x_6.$$

Тепер кутова точка

$$Б_1(1;\ 0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 0;\ 12);$$

нові базисні змінні

$$x_1, \ x_2, \ x_4, \ x_7,$$

вільні $\quad x_3, \ x_5, \ x_6;$

розв'язуване рівняння

$$x_5 = 1 - x_2 - x_6,$$

звідки $\quad x_2 = 1 - x_5 - x_6.$

Виключаємо x_2 із L_1:

$$L_2 = -4 - 3x_3 + 3x_5 + 4x_6 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1 = 1 - x_6, \quad x_2 = 1 - x_5 - x_6, \quad x_4 = 2 - x_3 + x_5 + x_6, \quad x_7 = 11 + x_5 + 4x_6.$$

Тепер кутова точка

$$Б_2(1;\ 1;\ 0;\ 2;\ 0;\ 0;\ 11);$$

нові базисні змінні

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_7,$$

вільні $\quad x_6, \ x_5, \ x_4;$

розв'язуване рівняння

$$x_4 = 2 - x_3 + x_5 + x_6,$$

звідки $\quad x_3 = 2 - x_4 + x_5 + x_6.$

Виключивши x_3, одержимо

$$L_3 = -10 + 3x_4 + x_6 \to \min$$

при обмеженнях

$$x_1 = 1 - x_6,\ \ x_2 = 1 - x_5 - x_6,\ \ x_3 = 2 - x_4 + x_5 + x_6,\ \ x_7 = 11 + x_5 + 4x_6.$$

Кутову точку $Б_3(1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 0;\ 0;\ 11)$ позначимо як X^*. Оскільки всі коефіцієнти L_3 додатні, то задачу розв'язано.

Відповідь: $L_{\min} = -10$ при $X^*(1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 0;\ 0;\ 11)$.

Починаючи із заданої кутової точки $Б_0$, визначити $L \to \min$ і точку X^*, що мінімізує $L(X)$ за заданих обмежень.

7. $L(X) = x_3 + x_4 + x_5 \to \min;\ \ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1,$
$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1,\ \ x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 - x_5 = 3;$
$x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ 5}),\ \ Б_0(1;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0).$

8. $L(X) = -4x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 \to \max;\ \ -x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 5,$
$x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = -9,.\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 6;$
$x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ 5}),\ \ Б_0(0;\ 0;\ 1;\ 2;\ 1).$

9. $L(X) = x_4 - x_5 \to \min;\ \ x_1 + x_4 - 2x_5 = 1,\ \ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2,$
$x_3 + 3x_4 + x_5 = 3;\ \ x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ 5}),\ \ Б_0(1;\ 2;\ 3;\ 0;\ 0).$

10. $L(X) = x_2 + x_3 \to \max;\ \ x_1 - x_2 + x_3 = 1,\ \ x_2 + 2x_3 + x_4 = 2;$
$x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ 4})\ ,\ \ Б_0(1; 0; 0; 2).$

11. $L(X) = -4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \to \max;\ \ x_1 + 2x_2 + 2x_5 = 4,$
$x_2 + 2x_4 - x_5 = 1,\ \ x_3 - x_4 + x_5 = 1;$
$x_i \ge 0\ \ (i = \overline{1,\ 5}),\ \ Б_0\left(0;\ \frac{3}{2};\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right).$

12. $L(X) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 \to \max;\ \ x_2 + x_3 \le 3,\ \ x_1 - x_2 \ge 0,$
$x_2 \ge 1,\ \ 3x_1 + x_2 \le 15.$

13. $L(X) = x_1 - x_3 \to \min;\ \ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1,\ \ x_1 + 3x_2 + x_4 = 2.$

7.4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УМОВНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДО ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ЧИСЛОВІ МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ

Приклад. Знайти точку, що є розв'язком задачі опуклого програмування, і сідлову точку функції Лагранжа

$$f(\overline{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 \to \min;\ \ x_1 + 2x_2 - 4 \le 0,\ \ -3x_1 - x_2 + 3 \le 0.$$

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L(\overline{X},\ \overline{\Lambda}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 8x_2 + \lambda_1(x_1 + 2x_2 - 4) + \lambda_2(-3x_1 - x_2 + 3);$$

$$\overline{X}(x_1;\ x_2);\ \ \overline{\Lambda}(\lambda_1;\ \lambda_2).$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 + \lambda_1 - 3\lambda_2;\ \ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 8 + 2\lambda_1 - \lambda_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = x_1 + 2x_2 - 4;\ \ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -3x_1 - x_2 + 3.$$

Розв'язавши систему

$$2x_1 - 2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0;\ \ 2x_2 - 8 + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0;$$
$$x_1 + 2x_2 - 4 = 0;\ \ -3x_1 - x_2 + 3 = 0,$$

знайдемо точку $\overline{X^0}$, що є розв'язком задачі:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, & x_1 = \frac{2}{5}, \\ 3x_1 + x_2 = 3, & x_2 = \frac{9}{5}. \end{cases}$$

З першого та другого рівнянь системи знайдемо $\lambda_1,\ \ \lambda_2$:

$$\begin{cases} \lambda_1 - 3\lambda_2 - \frac{6}{5} = 0\ , & \lambda_1 = \frac{12}{5}, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \frac{22}{5} = 0\ , & \lambda_2 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Урешті-решт

$$\overline{X}^0 = \left(\frac{2}{5};\ \frac{9}{5}\right),\ \ \overline{\Lambda}^0 = \left(\frac{12}{5};\ \frac{2}{5}\right).$$

Оскільки $\lambda_1 > 0;\ \ \lambda_2 > 0$, то за достатніми умовами [ч. 2, с. 644] пара $(\overline{X}^0,\ \overline{\Lambda}^0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа.

Відповідь: $\overline{X}^0\left(\frac{2}{5};\ \frac{9}{5}\right),\ \ \overline{\Lambda}^0\left(\frac{12}{5};\ \frac{2}{5}\right)$ – сідлова точка.

Безпосереднє застосування теореми Куна – Таккера для визначення оптимального розв'язку задачі опуклого програмування взагалі пов'язане з великим обсягом обчислень.

Знайти точки, в яких усі частинні похідні функції Лагранжа дорівнюють нулеві, часто буває не легше, ніж знайти екстремальне значення цільової функції. Тому з появою ЕОМ усе частіше задачі лінійного та нелінійного програмування розв'язують числовими методами на обчислювальних машинах.

Нижче наведено текст програми MINMAX для пошуку найменшого значення цільової функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в області, заданій обмеженнями $G_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \le 0$, $i = 1, m$.

Обмежень може й не бути, тобто за допомогою цієї програми можна розв'язувати задачі й безумовної мінімізації. Нагадаємо, що пошук максимуму функції z збігається з пошуком мінімуму функції $z_1 = -z$, а обмеження у вигляді рівнянь часто використовуються для зменшення кількості змінних цільової функції та обмежень типу нерівностей. Отже, програма MINMAX дає змогу розв'язувати велику кількість задач лінійного та нелінійного програмування.

У програмі реалізується комплексний метод Бокса, що є модифікацією симплексного методу Нелдера – Міда.

Для розв'язування конкретної задачі необхідно в рядок 5000 програми записати цільову функцію, а починаючи з рядка 7000 – функції $G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При цьому змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ записують як елементи масиву $X(1)$, $X(2)$, …, $X(N)$. Крім того, на запит програми потрібно ввести кількість обмежень, змінних та координати однієї точки M, що задовольняє всі обмеження. З точки M і починається пошук найменшого значення цільової функції. У деяких випадках повторний пуск програми з точки M, здобутої в попередньому розрахунку, покращує результат.

```
10 CLS
15 PRINT "ПРОГРАМА MINMAX"
20 PRINT "КОМПЛЕКСНИЙ МЕТОД.": PRINT
40 PRINT "ЦІЛЬОВА ФУНКЦІЯ Z=F(X1, X2,..., XN) ОБЧИСЛЮЄТЬСЯ В РЯДКУ 5000
50 PRINT
60 PRINT "ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ G(1), G(2),...,G(M) І ПЕРЕВІРКА";
65 PRINT "ОБМЕЖЕННЯ ПРОВОДИТЬСЯ В РЯДКУ 7000."
70 PRINT
80 PRINT "ВВЕДІТЬ КІЛЬКІСТЬ ОБМЕЖЕНЬ": INPUT M
100 INPUT "ВВЕДІТЬ КІЛЬКІСТЬ ЗМІННИХ"; N
120 DIM X(N), Y(N), L(N), U(N), XC(N), XO(N), XR(N), XH(N)
160 K=2*N:PP=0
180 DIM C(K, N), F(K), G(M), IC(M), EC(2*N)
190 PRINT
200 PRINT "ВВЕДІТЬ ПОЧАТКОВІ ЗНАЧЕННЯ ЗМІННИХ."
210 PRINT "ЯКІ ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УСІ ОБМЕЖЕННЯ"
220 FOR J=1 TO N: INPUT X(J):C(1,J)=X(J):XC(J)=X(J):NEXT J
260 FOR J=1 TO N: L(J)=0:U(J)=1:NEXT J
280 REM
290 X=1
500 I=1
520 GOSUB 5000:F(1)=Z
600 I=I+1
620 FOR J=1 TO N:C(I,J)=L(J)+RND(X)*(U(J)-L(J)):X(J)=C(I,J):NEXT J
640 IM=1:GOSUB 6000
660 IF IC=1 THEN GOTO 720
680 FOR J=1 TO N:XC(J)=((I-1)*XC(J)+C(I,J))/I:NEXT J
700 GOTO 760
720 FOR J=1 TO N:C(I,J)=(C(I,J)+XC(J))/2:X(J)=C(I,J):NEXT J
740 GOTO 640
760 GOSUB 5000:F(I)=Z
780 IF I<K THEN GOTO 600
800 FOR J=1 TO K-1
820 FOR I=J+1 TO K
840 IF F(J)<=F(I) THEN GOTO 900
860 F=F(J):F(J)=F(I):F(I)=F
880 FOR L=1 TO N:Y(L)=C(J,L):C(J,L)= C(I,L):C(I,L)=Y(L):NEXT L
900 NEXT I: NEXT J
920 FM=F(1)
1000 PRINT "ПЕРША ТОЧКА"
1020 PRINT "ПЕРШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ=";F(1)
1040 PRINT "В ТОЧЦІ"
1060 FOR L=1 TO N:PRINT "X";L,C(1,L):NEXT L
1080 PRINT :PRINT
1120 A=1.3
```

```
1200 FOR L=1 TO N:XH(L)=C(K,L):X0(L)=(K*XC(L) –XH(L))/(K–1):
NEXT L
1400 FOR L=1 TO N:XR(L)=(1+A)*X0(L) –A*XH(L):X(L)=XR(L):NEXT L
1500 'IM=0
1520 GOSUB 6000
1540 IF EC=0 AND IC=0 THEN GOTO 2000
1600 IF EC=0 THEN GOTO 1800
1620 FOR J=1 TO N
1640 IF EC(J)=1 THEN XR(J)=L(J)+.00001:X(J)=XR(J)
1660 IF EC(J+N)=1 THEN XR(J)=U(J) –.00001:X(J)=XR(J)
1680 NEXT J
1800 IF IC=0 THEN GOTO 2000
1820 FOR L=1 TO N:XR(L)=(XR(L)+X0(L))/2:X(L)=XR(L):NEXT L
1840 GOTO 1500
2000 GOSUB 5000:FR=Z
2020 IF FR<F(K) THEN GOTO 2410
2040 FOR L=1 TO N:XR(L)=(XR(L) +X0(L))/2#:X(L)=XR(L):NEXT L
2060 GOTO 1500
2410 F(K)=FR
2420 FOR L=1 TO N
2440 XC(L)=K*XC(L) – C(K,L) +XR(L)
2460 XC(L)=XC(L)/K:C(K,L)=XR(L)
2480 NEXT L
2500 FOR J=1 TO K–1
2520 FOR I=J+1 TO K
2540 IF F(J)<=F(I) THEN GOTO 2600
2560 F=F(J):F(J)=F(I):F(I)=F
2580 FOR L=1 TO N:Y(L)=C(J,L):C(J,L)=C(I,L):C(I,L)=Y(L):NEXT L
2600 NEXT I: NEXT J
2620 IF F(1)<FM THEN PP=1
2640 IF PP=0 THEN GOTO 1200
3000 S1=0:S2=0
3020 FOR I=1 TO K:S1=S1+F(I):S2=S2+F(I)*F(I):NEXT I
3040 SD=S2–S1*S1/K:SD=SD/K
3100 DM=0
3120 FOR I=1 TO K–1:FOR J=I+1 TO K
3140 D=0
3160 FOR L=1 TO N:D=D+(C(I,L)–C(J,L)^2:NEXT L
3180 D=SQR(D)
3200 IF D>DM THEN DM=D
3220 NEXT J:NEXT I
3400 IF PP=0 THEN 3790
3520 PRINT "МЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ДОРІВНЮЄ=";F(1)
3540 PRINT "В ТОЧЦІ"
3560 FOR L=1 TO N:PRINT "X";L,C(1,L):NEXT L
3580 PRINT ""
3600 FM=F(1):PP=0
3790 REM
3800 IF SD>.0001 OR DM>.0001 THEN GOTO 1200
4000 PRINT "МІНІМУМ ЗНАЙДЕНО"
4020 PRINT "ТОЧКА МІНІМУМУ"
4040 FOR L=1 TO N:PRINT "X";L,C(1,L):NEXT L
4060 PRINT "МІНІМУМ ФУНКЦІЇ=";F(1)
4080 PRINT "КІЛЬКІСТЬ ОБЧИСЛЕНЬ ФУНКЦІЇ="; FE
4100 END
5000 Z=X(1)^2+X(2)^2–2*X(1)–8*X(2)
5050 FE=FE+1
5100 RETURN
6000 FOR II=1 TO 2*N:EC(II)=0:NEXT II:EC=0
6020 FOR II=1 TO M:IC(II)=0:NEXT II:IC=0
6050 IF IM=1 THEN GOTO 7000
6100 FOR II=1 TO N
6120 IF X(II)<L(II) THEN EC(II)=1:EC=1
6140 IF X(II)>U(II) THEN EC(N+II)=1:EC=1
6160 NEXT II
7000 G(1)=X(1)+2*X(2) – 4
7010 G(2)= –3*X(1) –X(2)+3
7040 FOR J=1 TO M
7050 IF G(J)>0 THEN IC=1 :IC(J)=1:GOTO 7070
7060 NEXT J
7070 RETURN
```

У початковому варіанті програми записані дані для розв'язування вищенаведеного прикладу. Початковими значеннями змінних можуть бути, наприклад, числа X(1)=1, X(2)=1.

14. Перевірити, чи є точка $\bar{X}^0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ розв'язком задачі

$$f(\bar{X}) = -4x_1 - x_2 + x_3^2 \to \min;\ x_1^2 + x_2^2 + x_1x_3 - 1 \le 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \le 0,\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 0,\ x_i \ge 0\ (i = 1, 2, 3),$$

і якщо є, то знайти сідлову точку функції Лагранжа.

Знайти точку $\bar{X}^0$, що є розв'язком наведених задач опуклого програмування, і сідлову точку функції Лагранжа. Знайти також найменше значення функції у заданих областях за допомогою програми MINMAX.

15. $f(\bar{X}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 \to \min;\ 2x_1 + 3x_2 - 6 \le 0,\ x_1 + 4x_2 - 5 \le 0.$

16. $f(\bar{X}) = 2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \min;\ x_1 - x_2 + 1 \ge 0,\ 2x_1 + 3x_2 + 6 \le 0.$

17. $f(\bar{X}) = x_1^2 + x_2^2 \to \min;\ -5x_1 + 4x_2 \le 0,\ -x_1 + 4x_2 + 3 \le 0.$

За допомогою програми MINMAX мінімізувати функцію z при заданих обмеженнях.

18. $z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \to \min;\ x_1 - 2x_2 + 2 \le 0,\ 2x_1 - x_2 \ge 0.$

19. $z = x_1^2 + x_2^2;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \ge 5.$

20. $z = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \ge 4.$

21. $z = \frac{4}{x_1} + \frac{9}{x_2} + x_1 + x_2;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \le 4.$

22. $z = x_1^4 + x_2^2;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 \ge 8.$

23. $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 3,\ x_1x_2x_3 \ge 3.$

24. $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2;\ 2x_1^2 + x_2^2 \le 34,\ 2x_1 + 3x_2 \le 18,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

25. $z = -x_1x_2x_3;\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0;\ x_3 \ge 0;\ 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 \le 51.$

7.5. ВАРІАЦІЯ ТА ПРИРІСТ ФУНКЦІОНАЛА

Приклад. Знайти приріст ΔI та варіацію δI функціонала

$$I(y(x)) = \int_a^b y^2(x)dx.$$

Розв'язання. Знайдемо приріст функціонала

$$\Delta I = \int_a^b (y + \delta y)^2 dx - \int_a^b y^2 dx = \int_a^b 2y\delta y\,dx + \int_a^b \delta^2 y\,dx,\ \Delta I = 2\int_a^b y\delta y\,dx + \int_a^b \delta^2 y\,dx.$$

Лінійний функціонал $\int_a^b 2y\delta y\,dx$ за означенням [ч. 2, с. 661] і буде варіацією функціонала:

$$\delta I = 2\int_a^b y\delta y\,dx,$$

оскільки
$$\lim_{\max|\delta y| \to 0} \int_a^b \delta^2 y\,dx = 0.$$

Відповідь: $\Delta I = 2\int_a^b y\delta y\,dx + \int_a^b \delta^2 y\,dx,\ \delta I = 2\int_a^b y\delta y\,dx.$

Знайти варіацію функціонала.

26. $I = \int_a^b F(x, y)dx.$

27. $I = \int_a^b y^4(x)dx.$

28. $I = \int_{-1}^{1} (y^3 - 3x^4 y)dx.$

29. $I = \int_0^1 y(y + x)dx.$

30. $I = \int_2^3 (xy + y^2 - 2y^3 - y')dx.$

31. $I = \int_1^5 y\sqrt{1 + (y')^2}dx.$

32. $I = \int_0^T x^2 (y')^2 dx.$

33. $I = \int_a^b (2xy - (y')^2)dx.$

7.6. НЕОБХІДНА УМОВА ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛА. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЕКСТРЕМАЛЕЙ

Приклад. Знайти припустимі екстремалі для функціонала

$$I(y(x)) = \int_0^1 (y + 2xy' + (y')^2)dx$$

за умов $y(0) = 1,\ y(1) = 2.$

Розв'язання. Знайдемо похідні, тоді з урахуванням рівняння Ейлера [ч. 2, с. 673]

$$F(x, y, y') = y + 2xy' + (y')^2$$

маємо
$$F'_y = 1;\ F'_{y'} = 2x + 2y';\ \frac{d}{dx}F'_{y'} = 2 + 2y''.$$

Диференціальне рівняння екстремалей Ейлера запишемо у вигляді $1+2y''=0$. Його розв'язком є $y''=-\frac{1}{2}$, $y'=-\frac{1}{2}x+c_1$, $y(x)=-\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2$, звідки рівняння екстремалей

$$y=-\frac{1}{4}x^2+c_1x+c_2;\ y(0)=1;\ \ y(1)=2.$$

Враховуючи граничні умови,

$$c_2=1;\ 2=-\frac{1}{4}+c_1+1;\ c_1=\frac{5}{4};\ c_2=1.$$

Отже,

$$y(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+1,\ \ x\in[0;1].$$

Відповідь: рівнянням припустимої екстремалі функціонала є

$$y(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{4}x+1,\ \ x\in[0;1].$$

Знайти екстремалі функціонала.

34. $I=\int\limits_a^b\left(12xy+yy'+(y')^2\right)dx.$

35. $I=\int\limits_1^2\left((y')^2+2yy'+16y^2\right)dx.$

36. $I=\int\limits_a^b\left((y')^2-4y^2\right)dx.$

37. $I=\int\limits_2^3\frac{1+y^2}{y'}\,dx.$

38. $I=\int\limits_c^d\left(y^2-(y')^2-2y\cos x\right)dx.$

39. $I=\int\limits_{-1}^1\left(2xy'-\frac{1}{2}(y')^2\right)dx;\ y(-1)=0,\ \ y(1)=\frac{1}{2}.$

40. $I=\int\limits_0^{+\infty}\left(y^2+\frac{1}{4}(y')^2\right)dx;\ y(0)=1,\ \ y(+\infty)=0.$

41. $I=\int\limits_0^{\ln 2}\left(3y^2+(y')^2\right)e^{2x}\,dx;\ y(0)=1,\ \ y(\ln 2)=\frac{15}{8}.$

42. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}\left((y')^2+2yy'-16y^2\right)dx;\ y(0)=1,\ \ y\left(\frac{\pi}{8}\right)=2.$

43. $I=\int\limits_1^2\left(x^2-(y'')^2-16(y')^2\right)dx.$

44. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4y^2-5(y')^2+(y'')^2\right)dx;\ y(0)=3,\ y'(0)=4,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=4.$

45. $I=\int\limits_a^b\left(yy'+(y')^2+yy''+y'y''+(y'')^2\right)dx.$

46. $I(y_1,y_2)=\int\limits_1^3\left(x(y_1')^2+(y_2')^2+xy_1'+y_2'\right)dx.$

47. $I(y_1,y_2)=\int\limits_a^b\left(2y_1\cos x+2y_2^2+2y_1'y_2'+(y_1')^2-(y_2')^2\right)dx.$

48. $I=\int\limits_a^b\left(2y_1y_2+(y_1')^2+(y_2')^2\right)dx.$

49. $I=\int\limits_a^b\left((y'')^2-2x^2y\right)dx.$

50. $I=\int\limits_a^b y'\left(1+x^2y'\right)dx.$

7.7. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІОНАЛІВ

***Приклади.* 1.** Знайти екстремаль функціонала

$$I=\int\limits_0^1(1+x)(y')^2\,dx,\ \ y(0)=0,\ \ y(1)=1.$$

Розв'язання. У цьому прикладі

$$F(x,y,y')=(1+x)(y')^2,\ \ F_y'-\frac{d}{dx}F_{y'}'=0,\ \ F_y'=0,\ \ F_{y'}'=2y'(1+x).$$

Тоді диференціальне рівняння екстремалей Ейлера запишемо у вигляді $(1+x)y''+y'=0$. Розв'яжемо його:

$$y'(x)=p(x);\ \ (1+x)p'(x)+p(x)=0;\ \ \frac{dp}{p}=-\frac{dx}{1+x};\ \ p(x)=\frac{c_1}{1+x};\ \ y'=\frac{c_1}{1+x}.$$

Тепер знайдемо рівняння екстремалей функціонала:

$$y(x)=c_1\ln|1+x|+c_2.$$

Використовуючи умови $y(0)=0,\ \ y(1)=1,$ можна визначити c_1 і c_2:

$$\begin{cases} c_1\ln 1+c_2=0,\ c_1=\dfrac{1}{\ln 2},\\ c_1\ln 2+c_2=1,\ c_2=0.\end{cases}$$

Знайдемо

$$F''_{yy}=0,\ \ F''_{yy'}=0,\ \ F''_{y'y'}=2(1+x),$$

тоді на екстремалі

$$y=\frac{\ln|1+x|}{\ln 2}$$

при довільному значенні y' функціонал

$$F''_{y'y'}\ge 0\,.$$

Відповідь: на екстремалі $y=\dfrac{\ln|1+x|}{\ln 2}$ функціонал має сильний максимум.

2. Знайти екстремаль функціонала в ізопериметричній задачі

$$I=\int_0^1 (y')^2\,dx,\ \ y(0)=1,\ \ y(1)=6$$

за умови

$$\int_0^1 y(x)\,dx=3.$$

Розв'язання. Для розв'язування задачі вводиться функція Лагранжа [(6.79), ч. 2. с. 685]

$$F(x,y,y',\lambda)=\left((y')^2+\lambda y\right).$$

Тоді диференціальне рівняння екстремалей Ейлера запишемо у вигляді

$$\lambda-\frac{d}{dx}(2y')=0,\ \ y''=\frac{\lambda}{2},\ \ y'=\frac{\lambda}{2}x+c_1,\ \ y(x)=\frac{\lambda}{4}x^2+c_1x+c_2.$$

З граничних умов визначаємо

$$c_2=1,\ \ \lambda+4c_1=20,$$

а з умови $\int_0^1\left(\dfrac{\lambda}{4}x^2+c_1x+1\right)dx=3$ маємо

$$\lambda+6c_1=24.$$

Остаточно

$$c_1=2,\ \ c_2=1,\ \ \lambda=12.$$

Відповідь: рівняння екстремалі $y(x)=3x^2+2x+1$.

Використовуючи достатні умови екстремуму, знайти екстремум функціонала.

51. $I=\int_0^T\left(y^2-(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(T)=2.$

52. $I=\int_1^2 x^2(y')^2\,dx;\ \ y(1)=3,\ \ y(2)=1.$

53. $I=\int_0^6\left(2xy-(y')^2\right)dx;\ \ y(0)=1,\ \ y(6)=1.$

54. $I=\int_0^3 (y')^3\,dx;\ \ y(0)=0,\ \ y(3)=6.$

55. $I=\int_0^1 y\cdot(y')^2\,dx;\ \ y(0)=5,\ \ y(1)=5.$

Знайти екстремаль функціонала в ізопериметричній задачі.

56. $I=\int_0^1\left(x+(y')^2\right)dx;\ y(0)=0,\ \ y(1)=0$ за умови $\int_0^1 y(x)\,dx=2.$

57. $I=\int_0^1\left(x^2+(y')^2\right)dx;\ y(0)=1,\ \ y(1)=0$ за умови $\int_0^1 y(x)\,dx=3.$

58. $I=\int_0^\pi (y')^2\,dx;\ y(0)=y(\pi)=0$ (якщо $\lambda<0$) за умови $\int_0^\pi y^2(x)\,dx=1.$

7.8. ВАРІАЦІЙНІ ЗАДАЧІ З РУХОМИМИ КІНЦЯМИ

Приклад. Знайти припустимі екстремалі функціонала

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((y')^2-y^2\right)dx,$$

кінці яких розміщені на лініях $y=-x+1$ і $y=2x$.

Розв'язання. Складаємо рівняння Ейлера $y''+y=0$. Рівняння екстремалей має вигляд

$$y(x)=c_1\sin x+c_2\cos x,\ \ y'(x)=c_1\cos x-c_2\sin x.$$

Використовуючи умови трансверсальності [(6.97), ч. 2, с. 691]

$$\begin{cases} \left[(y')^2 - y^2 + (-1-y')2y'\right]_{x=0} = 0, \\ \left[(y')^2 - y^2 + (2-y')2y'\right]_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^2 - c_2^2 + (-1-c_1)2c_1 = 0, \\ c_2^2 - c_1^2 - (2+c_2)2c_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 = 0, \\ c_1^2 + c_2^2 + 4c_2 = 0, \end{cases}$$

можна визначити $\qquad c_2 = -0{,}8; \;\; c_1 = -1{,}6,$

звідки $\qquad y(x) = -1{,}6\sin x - 0{,}8\cos x.$

Відповідь: рівняння екстремалі $y(x) = -1{,}6\sin x - 0{,}8\cos x$.

Знайти припустимі екстремалі функціоналів.

59. $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1+(y')^2}\, dx;\;\; y = x^2,\;\; y = x - 5.$

60. $I = \int\limits_{1}^{2} \left(x^2 (y')^2 - yx\right) dx;\;\; y = 2x - 1,\;\; y = x^2.$

61. $I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \left(y + 2xy' + (y')^2\right) dx;\;\; y = 2x + 1,\;\; y = -x + 2.$

62. Знайти найменшу відстань від точки $A(1;0)$ до еліпса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

63. Знайти найменшу відстань від точки $A(-1;5)$ до параболи $y^2 = x$.

Вказівка. Задачі 62, 63 зводяться до визначення екстремуму (мінімуму) інтеграла $I = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ за умови, що лівий кінець задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, а правий $y = \psi(x)$ [ч. 2, с. 691].

7.9. ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

Приклади. **1.** Наближене рівняння руху судна можна записати у вигляді системи

$$m\frac{dv}{dt} = cu_1 + f_1(t);$$

$$mv\left(\omega - \frac{d\alpha}{dt}\right) = (a_1 - p)\alpha + a_2\omega + a_3\beta + f_2(t);$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = l_1\alpha + l_2\omega + l_3\beta + f_3(t),$$

де m – маса судна; I – момент інерції відносно вертикальної осі; v – швидкість центра мас судна; α – кут дрейфу; β – кут укладки керма; ω – кутова швидкість, похідна від кута рискання; $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ – характеристики збурення (хвилі, вітер тощо); p – упор гвинтів; cu_1 – характеристика дії регулятора швидкості; a_1, a_2, a_3, l_1, l_2, l_3 – сталі.

Перше рівняння описує зміну швидкості судна під дією регулятора швидкості, а також зовнішніх збурень $f_1(t)$. За керуючу координату тут взято u_1, у двох інших рівняннях, що описують рух судна, керуючими координатами є α і β. Зазначимо, що задача керування нелінійна (друге рівняння нелінійне).

2. Нехай об'єкт керування описується диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + x = 2\sqrt{2}u. \tag{9.1}$$

Визначити закон керування u під час переведення об'єкта з початкового стану $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ у кінцевий $x(\infty) = \dot{x}(\infty) = 0$ за умови

$$I(u) = \int\limits_0^{+\infty} (x^2 + u^2)\, dt \to \min.$$

Розв'язання. Запишемо рівняння зв'язку (9.1) у вигляді

$$\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + x - 2\sqrt{2}u = 0. \tag{9.2}$$

Для розв'язування задачі введемо функцію Лагранжа

$$F = x^2 + u^2 + \lambda(t)\left(\ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + x - 2\sqrt{2}u\right).$$

Складаємо рівняння Ейлера – Пуассона для двох невідомих функцій $x(t)$, $u(t)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}}\right) = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}}\right) = 0.$$

Обчислюючи відповідні похідні, дістаємо

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\sqrt{3}\dot{x} + x - 2\sqrt{2}u = 0, \\ 2x + \lambda - 2\sqrt{2}\dot{\lambda} + \ddot{\lambda} = 0, \\ 2u - 2\sqrt{2}\lambda = 0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Із системи (9.3) знайдемо диференціальне рівняння для визначення $x(t)$:

$$u(t)=\sqrt{2}\lambda(t);\;\; u(t)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ddot{x}(t)+2\sqrt{3}\dot{x}(t)+x(t)\right);$$

$$2x(t)+\frac{1}{4}\ddot{x}(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{x}(t)+\frac{1}{4}x(t)-\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{x}(t)-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{x}(t)-$$

$$-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\dot{x}+\frac{1}{4}x^{\text{IV}}(t)+\frac{\sqrt{3}}{2}\dddot{x}(t)+\frac{1}{4}\ddot{x}(t)=0.$$

Остаточно здобудемо

$$x^{\text{IV}}(t)-10\ddot{x}(t)+9x(t)=0. \tag{9.4}$$

Характеристичне рівняння для (9.4) має вигляд

$$k^4-10k^2+9=0;$$

корені

$$k_1=-1,\;\; k_2=1,\;\; k_3=-3,\;\; k_4=3$$

і

$$x(t)=c_1\,\mathrm{e}^{-t}+c_2\,\mathrm{e}^{t}+c_3\,\mathrm{e}^{-3t}+c_4\,\mathrm{e}^{3t}.$$

За умовою $x(t)\to 0$, $\dot{x}(t)\to 0$ при $t\to\infty$, тобто розв'язок має бути стійким, тоді $c_2=c_4=0$.

За умови $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=0$ знайдемо c_1 і c_2:

$$\begin{cases} c_1+c_3=1, \\ -c_1-3c_3=0; \end{cases}\quad c_1=\frac{3}{2},\quad c_2=-\frac{1}{2}.$$

Тоді
$$x(t)=\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}.$$

Закон керування $u(t)$ одержуємо з першого рівняння системи (9.3):

$$u(t)=\frac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t}+\frac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-3t}.$$

Відповідь: $u(t)=\dfrac{3-3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-3t}.$

Визначити закон керування u під час переведення об'єкта з початкового стану $x(0)=1$, $\dot{x}(0)=1$ у кінцевий $x(\infty)=0$, $\dot{x}(\infty)=0$ за заданих умов.

64. $\ddot{x}+\sqrt{5}\dot{x}+x=u,\;\; I(u)=\int\limits_0^\infty\left(x^2+u^2\right)dt\to\min.$

65. $\dot{x}+a_1x=u,\;\; I(u)=\int\limits_0^\infty\left(x^2+cu^2\right)dt\to\min.$

66. $\ddot{x}+2n\dot{x}+k^2x=u,\;\; I(u)=\int\limits_0^\infty x^2dt\to\min.$

Відповіді

1. $L_{\min}=-21;\; x_1=3;\; x_2=\frac{15}{2}$. **2.** $L_{\max}=21;\; x_1=3;\; x_2=\frac{15}{2}$. **3.** $L_{\min}=12;\; x_1=\frac{1}{2};\; x_2=\frac{3}{2}$. **4.** $L_{\max}=13;\; x_1=4;\; x_2=3;\; x_3=0$. **5.** $L_{\max}=18;\; x_1=6;\; x_2=0$. **6.** $L_{\min}=-4;\; x_1=2;\; x_2=0;\; x_3=0$. **7.** $L_{\min}=\frac{1}{4};\; X^*\left(\frac{1}{2};\; \frac{3}{4};\; 0;\; \frac{1}{4};\; 0\right)$ **8.** $L_{\max}=17;\; X^*(0;\; 1;\; 2;\; 0;\; 2)$. **9.** $L_{\min}=-\frac{11}{5};\; X^*\left(\frac{28}{5};\; 0;\; 0;\; \frac{1}{5};\; \frac{12}{5}\right)$. **10.** $L_{\max}=2;\; X^*(3;\; 2;\; 0;\; 0)$. **11.** $L_{\max}=\frac{17}{2};\; X^*\left(0;\; 0;\; \frac{9}{2};\; \frac{3}{2};\; 2\right)$. **12.** $L_{\max}=13;\; X^*(4;\; 3;\; 0)$. **13.** $L_{\min}=-3;\; X^*(0;\; 1;\; 3;\; 0)$. **14.** Так, є, $\overline{X}^0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\; \frac{1}{2};\; 0\right)$; $\overline{\lambda}^0\left(\frac{\left(4\sqrt{3}+3\right)}{6};\; \frac{\left(4\sqrt{3}-3\right)}{6};\; 0\right)$ – сідлова точка функції. **15.** $\overline{X}^0\left(\frac{13}{17};\; \frac{18}{17}\right)$; $\overline{\lambda}^0\left(0;\; \frac{8}{17}\right)$; $\left(\overline{X}^0,\; \overline{\lambda}^0\right)$ – сідлова точка. **16.** $\overline{X}^0\left(\frac{2}{5};\; \frac{7}{5}\right)$; $\overline{\lambda}^0\left(\frac{14}{25};\; \frac{78}{25}\right)$; $\left(\overline{X}^0,\; \overline{\lambda}^0\right)$ – сідлова точка. **17.** $\overline{X}^0\left(\frac{1}{2};\; \frac{5}{8}\right)$; $\overline{\lambda}^0\left(\frac{9}{32};\; \frac{19}{32}\right)$; $\left(\overline{X}^0,\; \overline{\lambda}^0\right)$ – сідлова точка.

18. $z_{\min}=0{,}889;\; x_1=\frac{2}{3};\; x_2=\frac{4}{3}$. **19.** $z_{\min}=12{,}5;\; x_1=2{,}5;\; x_2=2{,}5$. **20.** $z_{\min}=44;\; x_1=3;\; x_2=1$. **21.** $z_{\min}=10;\; x_1=2;\; x_2=3$. **22.** $z_{\min}=30{,}238;\; x_1=1{,}782;\; x_2=4{,}490$. **23.** $z_{\min}=6{,}240\,3;\; x_1=x_2=x_3=1{,}442\,2$. **24.** $z_{\min}=0;\; x_1=3;\; x_2=4$. **25.** $z_{\min}=-28{,}615\,3;\; x_1=2{,}915\,5;\; x_2=4{,}123\,1;\; x_3=2{,}380\,5$. **26.** $\delta I=\int\limits_a^b\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\,dx$.

27. $\delta I=4\int\limits_a^b y^3\delta y\,dx$. **28.** $\delta I=\int\limits_{-1}^{1}\left(3y^2-3x^4\right)\delta y\,dx$. **29.** $\delta I=\int\limits_0^1\left(2y+x\right)\delta y\,dx$.

30. $\delta I=\int\limits_2^3\left((x+2y-4yy')\delta y-2y^2\delta y'\right)dx$. 31. $\delta I=\int\limits_1^5\left(\sqrt{1+(y')^2}\,\delta y+\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\delta y'\right)dx$.

32. $\delta I=\int\limits_0^T 2x^2y'\delta y'dx$. 33. $\delta I=\int\limits_a^b(2x\delta y-2y'\delta y')\,dx$. 34. $y=x^3+c_1x+c_2$. 35. $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{4x}$. 36. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$. 37. $y=\mathrm{tg}\,(c_1x+c_2)$. 38. $y=\frac{1}{2}x\sin x+c_1\sin x+c_2\cos x$. 39. $y=x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{4}$. 40. $y=e^{-2x}$. 41. $y(x)=-e^{-3x}+e^{x}$. 42. $y(x)=\frac{4}{x}-1$.

43. $y(x)=c_1+c_2x+c_3e^{-4x}+c_4e^{4x}$. 44. $y=\frac{5}{3}\cos 2x+\frac{2}{3}\sin 2x+\frac{8}{3}\sin x+\frac{4}{3}\cos x$.

45. $y=\frac{c_1}{6}x^3+c_2\frac{x^2}{2}+c_3x+c_4$. 46. $\begin{cases} y_1(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2c_3}\ln|\,x\,|+c_4, \\ y_2(x)=c_1x+c_2. \end{cases}$

47. $\begin{cases} y_1=c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}\cos x+c_3x+c_4, \\ y_2=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{1}{4}x\sin x. \end{cases}$

48. $\begin{cases} y_1=-c_1\cos x-c_2\sin x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}, \\ y_2=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3e^{x}+c_4e^{-x}. \end{cases}$ 49. $y=\frac{x^5}{48}+c_1\frac{1}{2}x^2+c_2x+c_3$. 50. $y(x)=c_1\frac{x^3}{3}+c_2$. 51. $y=\frac{2\sin x}{\sin T}\to\max$, $0<T<\pi$. 52. $y=\frac{4}{x}\to\min$. 53. $y=-\frac{x^3}{6}+6x+1\to\max$. 54. $y=2x\to\min$. 55. $y=5\to$ слабкий $\min$. 56. $y=-12(x^2-1)\to\min$.

57. $y=-15x^2+14x+1\to\min$. 58. $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\to\min$. 59. $y=-x+\frac{3}{4}$. 60. $y=\frac{3}{x}-\frac{x}{2}+1{,}9$.

61. $y=\frac{91}{4x}-\frac{x}{2}+2{,}24$. 62. $d=\frac{4}{\sqrt{3}}$. 63. $d=2\sqrt{5}$. 64. $u(t)=\left(6+\sqrt{2}-2\sqrt{10}\right)e^{-t}-\left(2\sqrt{10}+4\sqrt{5}-6-6\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}t}$. 65. $u(t)=-ke^{-kt}+a_1e^{-kt}$, де $k=-\sqrt{\frac{1+ca_1^2}{c}}$. 66. $u(t)=0$.

Глава 8
ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

8.1. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Приклади. **1.** Написати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції $f(x)$, значення якої задані таблицею

x	0	0,1	0,3	0,5
$f(x)$	–0,3	0	0,4	1,2

Розв'язання. За формулою (3.7) [ч. 2, с. 725] знайдемо $\Phi_0(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$. Обчислювати $\Phi_1(x)$ немає потреби, оскільки $y_1=0$. Отже,

$$\Phi_0(x)=\frac{(x-0{,}1)(x-0{,}3)(x-0{,}5)}{(0-0{,}1)(0-0{,}3)(0-0{,}5)}=-\frac{x^3-0{,}9x^2+0{,}23x-0{,}015}{0{,}015};$$

$$\Phi_2(x)=\frac{x(x-0{,}1)(x-0{,}5)}{0{,}3(0{,}3-0{,}1)(0{,}3-0{,}5)}=-\frac{x^3-0{,}6x^2+0{,}05x}{0{,}012};$$

$$\Phi_3(x)=\frac{x(x-0{,}1)(x-0{,}3)}{0{,}05(0{,}5-0{,}1)(0{,}5-0{,}4)}=-\frac{x^3-0{,}4x^2+0{,}03x}{0{,}04}.$$

Тоді шуканий многочлен має вигляд

$$L_3(x)=-0{,}3\Phi_0(x)+0\Phi_1(x)+0{,}4\Phi_2(x)+0{,}5\Phi_3(x)=\frac{50}{3}x^3-10x^2+\frac{23}{6}x-0{,}3.$$

Відповідь: $L_3(x)=\frac{50}{3}x^3-10x^2+\frac{23}{6}x-0{,}3.$

2. За відомими значеннями функції $y=\sin x$ при $x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ знайти наближене значення $\sin x$ при $x=\frac{\pi}{7}$ й оцінити похибку.

Розв'язання. Обчислити наближене значення функції $y=\sin x$ при $x=\frac{\pi}{7}$ можна за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа. Складемо таблицю

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Тоді

$$\sin\frac{\pi}{7} \approx L_4\left(\frac{\pi}{7}\right),$$

або

$$\sin\frac{\pi}{7} \approx y_0\Phi_0\left(\frac{\pi}{7}\right) + y_1\Phi_1\left(\frac{\pi}{7}\right) + y_2\Phi_2\left(\frac{\pi}{7}\right) + y_3\Phi_3\left(\frac{\pi}{7}\right) + y_4\Phi_4\left(\frac{\pi}{7}\right).$$

Причому $\Phi_0\left(\frac{\pi}{7}\right)$ можна не обчислювати, оскільки $y_0 = 0$. Знаходимо

$$\Phi_1\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\frac{\pi}{7}\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)} = 1{,}349\,43.$$

Аналогічно

$$\Phi_2\left(\frac{\pi}{7}\right) = -0{,}533\,111,\quad \Phi_3\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0{,}168\,679,\quad \Phi_4\left(\frac{\pi}{7}\right) = -0{,}009\,996,$$

тоді

$$\sin\frac{\pi}{7} \approx 0{,}433\,832.$$

Похибку отриманого наближеного результату оцінимо за формулою (3.15) [ч. 2, с. 730], враховуючи, що $\left|\sin^{(5)} x\right| = \left|\cos x\right| \le 1$:

$$\delta = \left|\sin\frac{\pi}{7} - L_4\left(\frac{\pi}{7}\right)\right| \le \left|\frac{\pi}{7}\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{2}\right)\right| \approx 6{,}32\cdot 10^{-5}.$$

Відповідь: $\sin\frac{\pi}{7} \approx 0{,}433\,832$; $\delta \le 6{,}32\cdot 10^{-5}$.

Написати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції, заданої таблично.

1.

x	1,45	1,36	1,14
y	3,14	4,15	5,65

2.

x	0	1	2	5
y	2	3	12	147

3.

x	0	1,5	3,4	6,8
y	1,45	3,14	4,65	4,11

4. Функція $y = \sqrt[3]{x}$ задана таблицею

x	1,0	1,1	1,3	1,5	1,6
y	1,000	1,032	1,091	1,145	1,170

Обчислити $\sqrt[3]{3{,}15}$ й оцінити похибку.

5. За відомими значеннями $\cos x$ при $x = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ знайти значення $\cos\frac{\pi}{5}$ й оцінити похибку.

За таблицею значень функції, використовуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа, знайти значення функції в указаних точках.

6.

x	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
y	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Знайти $y(1{,}52)$ і $y(1{,}67)$.

7.

x	14	17	31	35
y	68,7	64,0	44,0	39,1

Знайти $y(27)$.

8.

x	93,0	96,2	100,0	104,2	108,7
y	11,38	12,80	44,70	17,07	19,91

Знайти $y(102)$.

8.2. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ

Приклади. **1.** Побудувати інтерполяційний многочлен найкращого наближення третього степеня для функції

$$y = \frac{1}{6}x^5 - 4x^3 + 2x + 1,\quad x\in[-1, 1]$$

й оцінити похибку інтерполювання.

Розв'язання. Визначимо вузли інтерполяції за формулою (3.20) [ч. 2, с. 732]:

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{8} = 0{,}923\,88;\quad x_1 = \cos\frac{3\pi}{8} = 0{,}382\,68;$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -0{,}382\,68;\quad x_3 = \cos\frac{7\pi}{8} = -0{,}923\,88.$$

Складемо таблицю значень функції, розташувавши для зручності вузли інтерполяції в порядку зростання:

x	$-0{,}923\,88$	$-0{,}382\,68$	$0{,}382\,68$	$0{,}923\,88$
y	$-1{,}732\,01$	$0{,}409\,56$	$1{,}590\,43$	$3{,}732\,01$

За таблицею будуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа третього степеня:

$$L_3(x) = y_0\Phi_0(x) + y_1\Phi_1(x) + y_2\Phi_2(x) + y_3\Phi_3(x),$$

де y_0, y_1, y_2, y_3 – значення функції з таблиці, а

$$\Phi_0(x) = \frac{(x+0{,}382\,68)(x-0{,}382\,68)(x-0{,}923\,88)}{(-0{,}923\,88+0{,}382\,68)(-0{,}923\,88-0{,}382\,68)(-0{,}923\,88-0{,}923\,88)} =$$

$$= -0{,}765\,36x^3 + 0{,}707\,1x^2 + 0{,}112\,08x - 0{,}103\,54;$$

$$\Phi_1(x) = \frac{(x+0{,}923\,88)(x-0{,}382\,68)(x-0{,}923\,88)}{(-0{,}382\,68+0{,}923\,88)(-0{,}382\,68-0{,}382\,68)(-0{,}382\,68-0{,}923\,88)} =$$

$$= 1{,}847\,77x^3 - 0{,}707\,1x^2 - 1{,}577\,16x + 0{,}603\,55;$$

$$\Phi_2(x) = \frac{(x+0{,}923\,88)(x+0{,}382\,68)(x-0{,}923\,88)}{(0{,}382\,68+0{,}923\,88)(0{,}382\,68+0{,}382\,68)(0{,}382\,68-0{,}923\,88)} =$$

$$= -1{,}847\,77x^3 - 0{,}707\,1x^2 + 1{,}577\,16x + 0{,}603\,55;$$

$$\Phi_3(x) = \frac{(x-0{,}382\,68)(x+0{,}382\,68)(x+0{,}923\,88)}{(0{,}923\,88+0{,}382\,68)(0{,}923\,88-0{,}382\,68)(0{,}923\,88+0{,}923\,88)} =$$

$$= 0{,}765\,36x^3 + 0{,}7071x^2 - 0{,}112\,08x - 0{,}103\,54.$$

Отже, шуканий многочлен матиме вигляд

$$L_3(x) = 2x^3 + 1{,}256\,32x + 1{,}000\,14$$

(коефіцієнт при степені x^2 дорівнює $7{,}01\cdot10^{-6}$ і тому цим доданком можна знехтувати).

Нехай δ – максимальна похибка, допущена під час заміни функції інтерполяційним многочленом. Тоді за формулою (3.24) [ч. 2, с. 733]

$$\delta \le \frac{M_4}{4\cdot 2^3}, \quad M_4 = \max_{[-1;1]}\left|y^{(4)}\right|.$$

У цьому випадку

$$y^{(4)} = 20x, \quad M_4 = \max_{[-1;1]}|20x| = 20.$$

Отже, для максимальної похибки інтерполяції справедлива оцінка

$$\delta \le \frac{20}{24\cdot 8} \approx 0{,}104.$$

2. Побудувати інтерполяційний многочлен найкращого наближення третього степеня для функції

$$f(x) = \frac{3\sqrt{x} + \cos x}{0{,}367\,879\cdot e^x + x^2}, \quad x\in[1;\ 2].$$

Обчислити значення функції в точках $x=1$; $x=1{,}5$; $x=2$ за допомогою інтерполяційного многочлена і порівняти їх з точними значеннями функції.

Розв'язання. Вузли інтерполяції визначаємо за формулою (3.20) [ч. 2, с. 732], узагальненою на довільні проміжки:

$$x_0 = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}961\,9; \quad x_1 = \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}691\,3;$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}308\,6; \quad x_3 = \frac{1}{2}\cos\frac{7\pi}{8} + \frac{3}{2} = 1{,}038\,1.$$

Складаємо таблицю значень функції у вузлах інтерполяції:

x	1,038 1	1,308 6	1,691 3	1,961 9
y	1,684 1	1,200 7	0,778 5	0,590 5

За цією таблицею обчислюємо інтерполяційний многочлен

$$L_3(x) = -0{,}458\,1x^3 + 2{,}899\,1x^2 - 6{,}691\,1x + 6{,}018\,1.$$

Результати обчислення значень функції за допомогою інтерполяційного многочлена і порівняння їх із точними зручно оформити у вигляді такої таблиці:

x	1	1,5	2
$L_3(x)$	1,768	0,958 3	0,567 5
y	1,770 1	0,960 6	0,569 6

Для вказаних функцій на заданому проміжку побудувати многочлен найкращого наближення третього степеня й оцінити похибку.

9. $y = \frac{1}{3}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 3, \quad x\in[-1;\ 1].$

10. $y = x^2 + \ln(x+2), \quad x\in[-1;\ 1].$

11. $y = \sin x, \quad x\in\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

12. $y = \cos x, \quad x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$

13. $y = e^x, \quad x\in[0;2].$

Для функцій на заданому проміжку побудувати інтерполяційний многочлен найкращого наближення третього степеня. Обчислити за його допомогою значення функції на кінцях і в центрі проміжку та порівняти їх з точними значеннями функції.

14. $f(x)=\dfrac{2x^2-\operatorname{arctg}(x-1)}{\ln(x+0,285\,714)}$, $x\in[1;\ 2]$.

15. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x^4+2}+\cos(x+3)}{1+\exp(0,142\,857)}$, $x\in[-1;\ 1]$.

16. $f(x)=\dfrac{2x^3+4,285\,71\sqrt[4]{x+1}}{e^x+6}$, $x\in[0;\ 2]$.

17. $f(x)=\dfrac{e^{2x}+8\sin x}{3,571\,42+\sqrt{x}}$, $x\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

18. $f(x)=\dfrac{3x^4+8,214e^{-3x}}{\sqrt{1+x^2}}$, $x\in[1;\ 2]$.

8.3. МЕТОД ГАУССА ЧИСЛОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ

Квадратурна формула Гаусса має вигляд (6.16) [ч. 2, с. 760], де c_i і x_i визначаються з таблиці:

n	x_i	c_i
1	$x_1=0$	$c_1=2$
2	$x_2=-x_1=0,577\,350\,3$	$c_1=c_2=1$
3	$x_2=0$ $x_3=-x_1=0,774\,596\,7$	$c_2=\dfrac{8}{9}=0,888\,888\,89$ $c_1=c_3=\dfrac{5}{9}=0,555\,555\,55$
4	$x_3=-x_2=0,339\,981\,0$ $x_4=-x_1=0,861\,136\,3$	$c_2=c_3=0,652\,145\,1$ $c_1=c_4=0,347\,854\,8$
5	$x_3=0$ $x_4=-x_2=0,538\,469\,3$ $x_5=-x_1=0,906\,179\,8$	$c_3=0,568\,888\,9$ $c_4=c_2=0,478\,628\,7$ $c_1=c_5=0,236\,926\,9$

Продовження табл.

n	x_i	c_i
6	$x_4=-x_3=0,238\,619\,2$ $x_5=-x_2=0,661\,209\,4$ $x_6=-x_1=0,932\,469\,5$	$c_4=c_3=0,467\,913\,4$ $c_5=c_2=0,360\,761\,6$ $c_1=c_6=0.171\,324\,5$
7	$x_4=0$ $x_5=-x_3=0,405\,845\,1$ $x_6=-x_2=0,741\,531\,2$ $x_7=-x_1=0,949\,107\,9$	$c_4=0.417\,959\,2$ $c_3=c_5=0.381\,830\,0$ $c_2=c_6=0,279\,705\,4$ $c_1=c_7=0,129\,485\,0$
8	$x_5=-x_4=0,324\,253\,4$ $x_6=-x_3=0,525\,532\,4$ $x_7=-x_2=0,796\,666\,5$ $x_8=-x_1=0,960\,289\,8$	$c_4=c_5=0,362\,683\,8$ $c_3=c_6=0.313\,706\,6$ $c_2=c_7=0,222\,381\,0$ $c_1=c_8=0,101\,228\,5$

Приклади. **1.** Обчислити інтеграл $\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$ за квадратурною формулою Гаусса для $n=4$, $n=8$ і порівняти наближені значення з точним значенням інтеграла.

Розв'язання. Позначимо як I_4 та I_8 наближені значення інтеграла відповідно для $n=4$ і $n=8$, а як I – його точне значення. Виконаємо заміну

$$t=2x-1,\quad x=\frac{1+t}{2},\quad t\in[-1;\ 1],$$

тоді
$$\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{3+t}{2}}\,dt\approx\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i\sqrt{\frac{3+x_i}{2}}.$$

Використовуючи таблицю, наведену на початку параграфа, обчислимо за формулою (6.16) [ч. 2, с. 760]

$$I_4=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}c_i\sqrt{\frac{3+x_i}{2}}=1,218\,952\,5;\quad I_8=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}c_i\sqrt{\frac{3+x_i}{2}}=1,218\,951\,1.$$

Знайдемо точне значення інтеграла

$$\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)=1,218\,951\,3.$$

Порівнюючи здобуті результати, бачимо, що формула Гаусса дає можливість досягнути високої точності обчислень і за досить малої кількості вузлів. Це зумовлює її широке застосування.

2. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx$ за квадратурною формулою Гаусса для $n = 4;\ 8$.

Розв'язання. Нехай I_4, I_8 – відповідні наближені значення інтеграла. Виконаємо заміну змінної $x = \frac{\pi}{4}(t+1)$, $t \in [-1;\ 1]$, тоді

$$F(t) = e^{-\cos\frac{\pi}{4}(t+1)}\cos\left[\sin\frac{\pi}{4}(t+1)\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\cos x}\cos(\sin x)dx = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{+1} F(t)dt \approx \frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{n} c_i F(x_i).$$

Відповідь: $I_4 = 0{,}624\,717\,92$; $I_8 = 0{,}624\,713\,1$.

19. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ за квадратурною формулою Гаусса для $n = 4;\ 8$. Порівняти наближені значення з точним значенням інтеграла.

20. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ за квадратурною формулою Гаусса для n=2; 4; 8 і порівняти наближені значення з точним значенням інтеграла.

21. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ при $n = 2;4;\ 8$ і порівняти наближені значення з точним значенням інтеграла.

22. Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$ при $n = 2;\ 4;\ 8$ і порівняти наближені значення з точним значенням інтеграла.

Обчислити інтеграли за формулою Гаусса для $n = 8$.

23. $\int_0^1 \cos(x + x^5)dx$. **24.** $\int_0^{\pi} e^{\sin^2 x}\sin 3x dx$. **25.** $\int_0^1 \cos(x^2 + x + 1)dx$.

26. $\int_0^1 \sin(x^2 + x + 1)dx$. **27.** $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(3t^2+1)}}$. **28.** $\int_0^{\pi} \cos(x - \sin x)dx$.

29. $\int_0^{\pi} \sin(x - \cos x)dx$. **30.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + x + \sqrt{\sin x}}$.

31. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{(1-x^2)(1-0{,}25x^2)}$. **32.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{(1-x^2)(1-0{,}75x^2)}$.

33. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1-0{,}25\sin^2 x}}$. **34.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-0{,}5\sin^2 x}\,dx$.

8.4. МЕТОД РУНГЕ – КУТТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Метод Рунге – Кутта визначає наближене значення розв'язку диференціального рівняння за формулами (7.3) – (7.5) [ч. 2, с. 765]. Для більш точного врахування похибки користуються правилом Рунге – Ромберга, зміст якого полягає в тому, що, коли $y_k^{(h)}$ і $y_k^{(2h)}$ вважати значеннями шуканого розв'язку задачі Коші (7.1), (7.2) [ч. 2, с. 764], отриманими з кроком інтегрування відповідно h і $2h$, то в розв'язку $y_k^{(h)}$ досягається задана точність обчислень, якщо виконується нерівність

$$\frac{\left|y_{2k}^{(h)} - y_k^{(2h)}\right|}{15} < \varepsilon.$$

***Приклади.* 1.** Методом Рунге – Кутта зінтегрувати рівняння

$$x^2y' - xy = 1,\quad y(1) = 0$$

на проміжку $x \in [1;\ 2]$ з кроком $h = 0{,}2$ і порівняти з точним розв'язком.

Розв'язання. Для знаходження наближеного розв'язку рівняння запишемо його у вигляді (7.1) [ч. 2, с. 764]:

$$y' = f(x,y),\quad f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}.$$

Виконаємо обчислення за формулами (7.3), (7.4) [ч. 2, с. 765]. Знайдемо значення точного розв'язку в тих самих точках. У результаті дістаємо таблицю:

x	Розв'язок y	
	наближений	точний
1	0	0
1,2	0,183 349	0,183 333
1,4	0,342 882	0,342 857
1,6	0,487 53	0,487 5
1,8	0,622 26	0,622 22
2	0,750 04	0,75

З наведеної таблиці випливає, що значення похибки не перевищує 10^{-4}.

2. Методом Рунге – Кутта зінтегрувати рівняння

$$y' = \sin 2x + \cos y, \quad y(0) = 1$$

на проміжку $[0; 3]$ з кроком $h = 0{,}3$ і $h = 0{,}15$. Оцінити похибку за правилом Рунге – Ромберга.

Розв'язання. Виконуємо обчислення з кроком $h = 0{,}3$. Щоб оцінити похибку за правилом Рунге – Ромберга, проводимо розв'язання з кроком, зменшеним у два рази, тобто $h = 0{,}15$. Результати наведемо в таблиці

x	Розв'язок y	
	$h = 0{,}3$	$h = 0{,}15$
0	1,0	1,0
0,3	1,222 567	1,222 573
0,6	1,514 677	1,514 688
0,9	1,784 241	1,784 26
1,2	1,948 735	1,948 75
1,5	1,959 103	1,959 11
1,8	1,815 931	1,815 936
2,1	1,574 177	1,574 18
2,4	1,322 749	1,322 749
2,7	1,150 212	1,150 205
3,0	1,117 912	1,117 914

З таблиці випливає, що

$$\frac{\left|y_{2k}^{\left(\frac{h}{2}\right)} - y_k^{(h)}\right|}{15} \le 10^{-5}, \quad k = \left(\overline{1, 10}\right).$$

Отже, розв'язок здобуто з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

3. Скласти таблицю значень розв'язку задачі Коші

$$y' = x^2 y + e^{-y} + x, \quad y(0) = 0$$

на відрізку $[0; 1{,}6]$ з кроком $h = 0{,}2$ і точністю $\varepsilon = 10^{-6}$.

Розв'язання. Виконуємо обчислення з кроком $h = 0{,}2$ і $h = 0{,}1$. Як бачимо, для значень аргументу $x \in [0; 1]$ необхідна точність, згідно з правилом Рунге – Ромберга, досягається при $h = 0{,}1$. На проміжку $[1; 1{,}6]$ проводимо обчислення з кроком $h = 0{,}05$.

Порівнюючи розв'язок для $x \in [1; 1{,}6]$ при $h = 0{,}1$ і $h = 0{,}05$, переконуємося, що необхідна точність досягнена:

x	Розв'язок y		
	$h = 0{,}2$	$h = 0{,}1$	$h = 0{,}05$
0	0	0	0
0,2	0,201 605	0,201 605 4	–
0,4	0,415 208	0,415 206	–
0,6	0,660 613	0,660 614	–
0,8	0,971 288	0,971 295	–
1,0	1,407 294	1,407 307	–
1,2	2,085 895	2,085 92	2,085 921 7
1,4	3,256 519	3,256 648	3,256 654
1,6	5,495 596	5,496 439	5,496 435

35. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{y}{x \ln x}, \quad y(e) = 1$$

з кроком $h = 0{,}1$ на проміжку $[e; e+1]$ і порівняти з точним розв'язком.

36. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{xy - 1}{x^2 - 1}, \quad y(0) = 1$$

з кроком $h = 0{,}1$ на проміжку $[0; 0{,}8]$ і порівняти з точним розв'язком.

37. Зінтегрувати рівняння

$$y' = \frac{1}{\cos x} + y \operatorname{tg} x, \quad y(0) = 1$$

з кроком $h = 0{,}15$ на проміжку $[0; 1{,}5]$ і порівняти з точним розв'язком.

38. Зінтегрувати рівняння

$$y' = x^2 y - x^2$$

з кроком $h = 0.2$ на проміжку $[2;\ 4]$ і порівняти результати з точним розв'язком.

Розв'язати задачу Коші з указаним в умові кроком і кроком, що в два рази менший. Оцінити похибку обчислень за правилом Рунге – Ромберга.

39. $y' = x + x^2 - y^2 + \cos x$, $y(0) = 1$, $x \in [0;\ 2]$, $h = 0{,}2$.

40. $y' = 2x - 3\ln y + y$, $y(0) = 1$, $x \in [0;\ 1]$, $h = 0{,}2$.

41. $y' = \cos 2x - x - y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0;\ 2]$, $h = 0{,}2$.

42. $y' = x^2 y + e^y + x$, $y(0) = 0$, $x \in [0;\ 1]$, $h = 0{,}1$.

43. Скласти таблицю значень розв'язку задачі Коші $y' = e^{-2x} + y^2$, $y(0) = 0$ на відрізку $[0;\ 2]$ з кроком $h = 0{,}4$ і точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

44. Скласти таблицю значень розв'язку задачі Коші $y' = xe^{-x} + \ln y$, $y(0) = 1$ на відрізку $[0;\ 2]$ з кроком $h = 0{,}2$ і точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

8.5. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ ДЛЯ ОДНОВИМІРНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

Приклад. На відрізку $[0{,}1;\ 1{,}1]$ методом скінченних рішень, поділяючи відрізок на 40 частин, розв'язати граничну задачу

$$y'' + e^x y' + \frac{x}{2} y = x^2, \quad y(0{,}1) - 1{,}2y'(0{,}1) = 0, \quad 2y(1{,}1) - 2{,}5y'(1{,}1) = -4.$$

Розв'язання. Числове розв'язання задачі полягає у визначенні наближених значень: y_0, $y_1, \ldots, y_n$ в точках x_0, $x_1, \ldots, x_n$, де

$$x_0 = 0{,}1;\ x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{0, n},\ n = 40,\ h = \frac{1{,}1 - 0{,}1}{40} = \frac{1}{40}.$$

Похідні $y'(x)$ та $y''(x)$ у кожному внутрішньому вузлі x_i, $i = 1, \ldots, n-1$ замінюються центральними різницями за формулами (8.5), (8.10) [ч. 2, с. 770, 771]. На кінцях відрізка значення $y'(x)$, що входять у граничні умови, подаються однобічними різницями за формулами (8.1), (8.2) [ч. 2, с. 769]. У результаті замість граничної задачі дістаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно y_1, $y_2, \ldots, y_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \\ y_0 - 1{,}2\dfrac{y_1 - y_0}{h} = 0, \qquad\qquad i = \overline{1, n-1}. \\ 2y_n - 2{,}5\dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = -4. \end{cases}$$

У цій системі $n = 40$, $p_i = e^{x_i}$, $q_i = \dfrac{x_i}{2}$, $f_i = x_i^2$.

Здобута система перетворюється до вигляду (4.16), (4.17) [ч. 2, с. 746], де відповідні коефіцієнти визначаються за формулами

$$A_i = 2 - hp_i;\ C_i = 4 - 2h^2 q_i;\ F_i = h^2 f_i;\ B_i = 2 + hp_i;\ i = \overline{1, n-1};$$

$$\mu_0 = \frac{1{,}2}{h + 1{,}2};\ \nu_0 = 0;\ \mu_n = \frac{2{,}5 y_{n-1}}{2{,}5 - 2h};\ \nu_n = \frac{4h}{2{,}5 - 2h};\ n = 40;\ h = \frac{1}{40}.$$

Після цього для її розв'язання застосовується метод прогону [ч. 2, гл. 8, підрозд. 4.4].

Після обчислень отримані такі результати (з метою економії місця наводиться розв'язок не в усіх вузлах):

x	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
y	–1,249	–1,348	–1,435	–1,507	–1,565	–1,637

x	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
y	–1,651	–1,650	–1,650	–1,653	–1,608

За вихідними даними методом скінченних різниць розв'язати граничну задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),\ x \in [a,\ b];\ \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0;$$
$$\alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1.$$

45. $a = 0; b = 0{,}8$; $N = 40$; $\alpha_0 = 0$; $\beta_0 = 1$; $\gamma_0 = -0{,}5$; $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 0$; $\gamma_1 = 0{,}5$; $p(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$; $q(x) = \dfrac{6}{\sqrt{1 - x^2}}$; $f(x) = 0$.

46. $a = 0$; $b = 0{,}8$; $N = 40$; $\alpha_0 = 0$; $\beta_0 = 1$; $\gamma_0 = 0$; $\alpha_1 = 1$; $\beta_1 = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $p(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$; $q(x) = \dfrac{12}{\sqrt{1 - x^2}}$; $f(x) = 0$.

47. $a=0$; $b=0,6$; $N=30$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=0,2$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=0,8$; $p(x)=\dfrac{1,5+2,5x}{x^2-1}$; $q(x)=\dfrac{33}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x)=0$.

48. $a=0$; $b=0,6$; $N=50$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-0,5$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=0,2$; $p(x)=\dfrac{1,9+2,9x}{x^2-1}$; $q(x)=\dfrac{34,5}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x)=0$.

49. $a=0$; $b=0,6$; $N=50$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-0,5$; $\alpha_1=0$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=0,2$; $p(x)=\dfrac{1,7+2,7x}{x^2-1}$; $q(x)=\dfrac{33,5}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x)=0$.

50. $a=0,5$; $b=3$; $N=50$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=1$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=6$; $p(x)=-2x$; $q(x)=2$; $f(x)=0$.

51. $a=0,5$; $b=3$; $N=50$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-1$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=3,4$; $p(x)=-2x$; $q(x)=2$; $f(x)=0$.

52. $a=0,5$; $b=3$; $N=50$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-5$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=1,8$; $p(x)=-2x$; $q(x)=6$; $f(x)=0$.

53. $a=1$; $b=5$; $N=80$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-0,5$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=3,5$; $p(x)=\dfrac{1-x}{x}$; $q(x)=\dfrac{2}{x}$; $f(x)=0$.

54. $a=1$; $b=5$; $N=80$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-0,667$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=2,667$; $p(x)=\dfrac{1-x}{x}$; $q(x)=\dfrac{3}{x}$; $f(x)=0$.

55. $a=1$; $b=5$; $N=80$; $\alpha_0=0$; $\beta_0=1$; $\gamma_0=-0,625$; $\alpha_1=1$; $\beta_1=0$; $\gamma_1=-1,292$; $p(x)=\dfrac{1-x}{x}$; $q(x)=\dfrac{4}{x}$; $f(x)=0$.

8.6. МЕТОД СІТОК РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА

Приклад. Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутній області

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<a,\ 0<y<b; \tag{6.1}$$

$$u(0,y)=f_1(y),\ u(a,y)=f_2(y),\ y\in[0,b]; \tag{6.2}$$

$$u(x,0)=f_3(x),\ u(x,b)=f_4(x),\ x\in[0,a], \tag{6.3}$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 – задані функції.

Розв'язання. Виберемо кроки h і l за змінними x та y і побудуємо сітку з вузлами:

$$x_i=ih,\ i=\overline{(0,n)},\ x_0=0,\ x_n=a;$$

$$y_j=jh,\ j=\overline{(0,m)},\ y_0=0,\ y_m=b.$$

Позначимо $u_{ij}=u(x_i,y_j)$ та апроксимуємо похідні в кожному внутрішньому вузлі сітки центральними різницями другого порядку за формулами (8.17) [ч. 2, с. 772]. Замінимо рівняння Лапласа (6.1) скінченнорізницевим рівнянням

$$\frac{u_{i+1,j}-2u_{ij}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{ij}+u_{i,j-1}}{l^2}=0, \tag{6.4}$$

$$i=\overline{(1,\ n-1)},\ j=\overline{(1,\ m-1)}.$$

Рівняння (6.4) разом зі значеннями u_{ij} в граничних вузлах утворює систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно наближених значень функцій $u(x,y)$ у вузлах сітки (x_i,y_j):

$$\begin{cases} u_{ij}=\dfrac{1}{2(1+t)}\left(u_{i-1,j}+u_{i+1,j}+tu_{i,j-1}+tu_{i,j+1}\right), & t=\dfrac{h^2}{l^2};\\ u_{i0}=f_3(x_i),\quad u_{im}=f_4(x_i), & i=\overline{(1,\ n-1)};\\ u_{0j}=f_1(y_j),\quad u_{nj}=f_2(y_j), & j=\overline{(1,\ m-1)}. \end{cases} \tag{6.5}$$

Систему лінійних рівнянь (6.5) найзручніше розв'язувати ітераційним методом Зейделя [ч. 2, с. 744–746].

Нехай область, в якій розглядається гранична задача (6.1) – (6.3), є квадратом:

$$0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,$$

а функції, що входять у граничні умови, мають вигляд

$$f_1(y)\equiv 0,\ f_2(y)=y,\ 0\le y\le 1,$$

$$f_3(x)\equiv 0,\ f_4(x)=x,\ 0\le x\le 1.$$

Вважатимемо $n = m = 10$ і, розв'язуючи систему лінійних рівнянь (6.5) методом Зейделя, обмежимося точністю $\varepsilon = 10^{-3}$. Отримані наближені значення розв'язку у вузлах сітки наведемо у вигляді таблиці:

1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,9	0,0	0,090	0,181	0,272	0,362	0,452	0,542	0,631	0,721	0,810	0,9
0,8	0,0	0,081	0,163	0,244	0,324	0,404	0,484	0,563	0,642	0,721	0,8
0,7	0,0	0,073	0,144	0,216	0,286	0,356	0,426	0,494	0,563	0,631	0,7
0,6	0,0	0,063	0,125	0,187	0,248	0,308	0,367	0,426	0,484	0,542	0,6
0,5	0,0	0,053	0,106	0,158	0,209	0,259	0,308	0,356	0,404	0,452	0,5
0,4	0,0	0,043	0,086	0,128	0,169	0,209	0,248	0,286	0,324	0,362	0,4
0,3	0,0	0,033	0,065	0,097	0,128	0,158	0,187	0,216	0,244	0,272	0,3
0,2	0,0	0,022	0,044	0,065	0,086	0,106	0,125	0,144	0,163	0,181	0,2
0,1	0,0	0,011	0,022	0,033	0,043	0,053	0,063	0,072	0,081	0,09	0,1
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	3,0	0,0	0,0	0,0	0,0
y / x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0

Розв'язати задачу Діріхле (6.1) – (6.3) у квадраті $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ на сітці 11×11 для наведених граничних функцій.

56. $f_1(y) = y^2$, $f_2(y) = y(2 - \cos y) + \cos y$, $f_3(x) = x^3$, $f_4(x) = x + 1$.

57. $f_1(y) = 1 - y^2$, $f_2(y) = y$, $f_3(x) = \sin x - (1 + \sin x)x^3 + 1$, $f_4(x) = x$.

58. $f_1(y) = e^y + (1 - e^y)y^2 - 1$, $f_2(y) = -y$, $f_3(x) = 1 - x^3$, $f_4(x) = x - 2$.

59. $f_1(y) = -10y^2 - 8y + 6$, $f_2(y) = -10y^2 - 30y + 22$, $f_3(x) = 9x^2 + 7x + 6$, $f_4(x) = 9x^2 - 15x - 12$.

60. $f_1(y) = -7y^2 + 5y + 3$, $f_2(y) = -7y^2 - 21y + 13$, $f_3(x) = 6x^2 + 4x + 3$, $f_4(x) = 6x^2 - 12x - 9$.

61. $f_1(y) = -6y^2 - 4y + 2$, $f_2(y) = -6y^2 - 18y + 10$, $f_3(x) = 5x^2 + 3x + 2$, $f_4(x) = 5x^2 - 11x - 8$.

62. $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = y + 1$, $f_3(x) = 1$, $f_4(x) = x + 1$.

63. $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = y + 1$, $f_3(x) = 1$, $f_4(x) = x^2 + 1$.

64. $f_1(y) = e^{-y^2}$, $f_2(y) = e^{1-y^2}$, $f_3(x) = e^{x^2}$, $f_4(x) = e^{x^2-1}$.

65. $f_1(y) = 0$, $f_2(y) = \operatorname{tg} y$, $f_3(x) = 0$, $f_4(x) = \operatorname{tg} x$.

66. $f_1(y) = -\sin y$, $f_2(y) = \sin(1 - y)$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = \sin(x - 1)$.

67. $f_1(y) = 1$, $f_2(y) = 1 + \cos y$, $f_3(x) = x$, $f_4(x) = x + \cos x$.

8.7. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СІТОК

Приклад. Знайти функцію $u(x, t)$, що задовольняє в області $D\{(x,t) | 0 < x < a,\ 0 < t < \infty\}$ рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (k = \text{const} > 0), \tag{7.1}$$

початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le a \tag{7.2}$$

і крайові умови першого роду

$$u(0, t) = p(t),\quad u(a, t) = q(t). \tag{7.3}$$

Припустимо також, що в деякій точці $x = b$, $0 < b < a$ початкові умови змінюють вигляд, тобто функція $\varphi(x)$ в умові (7.2) визначається так:

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \le x \le b, \\ g(x), & b < x \le a. \end{cases} \tag{7.4}$$

Розв'язання. Заміною змінної t на kt рівняння (7.2) завжди можна привести до вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{7.5}$$

тому, не обмежуючи спільності, будемо вважати $k = 1$.

Нехай потрібно знайти розв'язання задачі (7.1) – (7.3) для інтервалу часу $0 \le t \le T$. В області $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$ побудуємо рівномірну прямолінійну сітку з кроком h у напрямку x і кроком τ в напрямку t:

$$h = \frac{a}{n},\quad \tau = \frac{T}{m}.$$

Тоді вузлами сітки є точки (x_i, t_j), де $x_i = ih$, $i = \overline{(0, n)}$, $t_j = j\tau$, $j = \overline{(0, m)}$.

Апроксимуючи похідні в кожному внутрішньому вузлі сітки центральними різницями за формулами (8.6), (8.17) [ч. 2, с. 770, 772], дістаємо різницеве рівняння

$$\lambda u_{i+1,j} - (1 + 2\lambda)u_{ij} + \lambda u_{i-1,j} = -u_{i,j-1},\ i = \overline{(1, n-1)},\ j = \overline{(1, m)}, \tag{7.6}$$

де

$$\lambda = \frac{\tau}{h^2}.$$

Число рівнянь у (7.6) менше, ніж число невідомих u_{ij}. Рівняння, яких не вистачає, можна здобути з граничних і початкових умов

$$u_{0j} = p(t_j),\ u_{nj} = q(t_j),\ u_{i0} = \varphi(x_i). \qquad (7.7)$$

Нехай потрібно розв'язати граничну задачу (7.1) – (7.3) для $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1]$ і функцій, що входять у початкові й граничні умови,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 10 - 20x, & x \in [0; 0,5], \\ 40x - 20, & x \in [0,5; 1], \end{cases} \quad p(t) \equiv 10,\ q(t) \equiv 20.$$

Вважаємо $\tau = 0,02$, $h = 0,1$.

Результати обчислень наведені в таблиці:

x	t					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0
0,1	8,0	10,454	10,966	11,04	11,051	11,052
0,2	6,0	10,971	11,942	12,082	12,102	12,105
0,3	4,0	11,609	12,935	13,126	13,153	13,157
0,4	2,0	12,411	13,952	14,173	14,205	14,21
0,5	0,0	13,406	14,996	15,225	15,258	15,262
0,6	4,0	14,6	16,069	16,28	16,311	16,315
0,7	8,0	15,977	17,169	17,34	17,364	17,368
0,8	12,0	17,505	18,29	18,402	18,418	18,421
0,9	16,0	19,131	19,425	19,467	19,473	19,474
1,0	20,0	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00

Розв'язати задачу для рівняння теплопровідності за заданими початковими і граничними умовами.

68. $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1,5]$, $u(0; t) = 1,1$, $u(1; t) = 3,0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} 1,1, & 0 \le x \le 0,5, \\ 2x + 1, & 0,5 < x \le 1, \end{cases} \quad h = 0,05,\ \tau = 0,015.$$

69. $x \in [0; 2]$, $t \in [0; 1]$, $u(0; t) = u(2; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad h = 0,1,\ \tau = 0,01.$$

70. $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 2]$, $u(0; t) = 8$, $u(1; t) = 3$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} 80x + 8, & 0 \le x \le 0,15, \\ -20x + 23, & 0,15 < x \le 1, \end{cases} \quad h = 0,1,\ \tau = 0,02.$$

71. $x \in [0; 3]$, $t \in [0; 1,5]$, $u(0; t) = u(3; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{3}, & 0 \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ 3 - x, & \dfrac{3}{2} < x \le 3, \end{cases} \quad h = 0,1,\ \tau = 0,015.$$

72. $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1,8]$, $u(0; t) = 1,3$, $u(1; t) = 3$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} 1,3, & 0 \le x \le 0,25, \\ 3,6x + 0,4, & 0,25 < x \le 1, \end{cases} \quad h = 0,05,\ \tau = 0,015.$$

73. $x \in [0; 5]$, $t \in [0; 2]$, $u(0; t) = u(5; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{5}, & 0 \le x \le \dfrac{5}{2}, \\ 5 - x, & \dfrac{5}{2} < x \le 5, \end{cases} \quad h = 0,25,\ \tau = 0,02.$$

74. $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1,2]$, $u(0; t) = 10$, $u(1; t) = 5$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} 48x + 10, & 0 \le x \le 0,25, \\ -22\dfrac{2}{3}x + 27\dfrac{2}{3}, & 0,25 < x \le 1, \end{cases} \quad h = 0,05,\ \tau = 0,02.$$

75. $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 1,6]$, $u(0; t) = u(1; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \le x \le 0,5, \\ 1 - x, & 0,5 < x \le 1, \end{cases} \quad h = 0,1,\ \tau = 0,016.$$

76. $x \in [0; 2]$, $t \in [0; 1,4]$, $u(0; t) = u(1; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1, \\ 2 - x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad h = 0,1,\ \tau = 0,02.$$

77. $x \in [0; 1,2]$, $t \in [0; 1,6]$, $u(0; t) = u(1; t) = 0$,

$$u(x; 0) = \begin{cases} \dfrac{5}{3}x^2, & 0 \le x \le 0,6, \\ 1,2 - x, & 0,6 < x \le 1,2, \end{cases} \quad h = 0,06,\ \tau = 0,02.$$

8.8. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ МЕТОДОМ СІТОК

Приклад. (Гранична задача для однорідного рівняння коливань струни). Знайти функцію $u(x,t)$, що задовольняє при $t>0$ рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<a,\ 0<t<T, \tag{8.1}$$

початкові умови

$$u(x,0)=F(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=G(x),\ 0\le x\le a \tag{8.2}$$

і крайові умови

$$u(0,t)=p(t);\ u(a,t)=q(t). \tag{8.3}$$

Припустимо, що функція $F(x)$ у точці $x=b$, $0<b<a$ змінює свій вигляд, залишаючись при цьому неперервною, тобто

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & 0\le x<b,\\ r(x), & b\le x<a,\end{cases}\quad f(b)=r(b). \tag{8.4}$$

Надалі вважаємо в рівнянні (8.1) $c=1$.

Р о з в ' я з а н н я. Для розв'язання задачі (8.1) – (8.3) методом скінченних різниць побудуємо в області $D=\{(x,t)|0\le x\le a;\ 0\le t\le T\}$ сітку

$$x_i=ih,\ i=\left(\overline{0,n}\right),\ t_j=j\tau,\ j=\left(\overline{0,m}\right)$$

і апроксимуємо рівняння (8.1) цими різницями, після чого отримаємо явну тришарову різницеву схему

$$\begin{gathered} u_{i,j+1}=2(1-\lambda^2)u_{ij}+\lambda^2\left(u_{i+1,j}-u_{i-1,j}\right)-u_{i,j-1},\\ \lambda=\frac{\tau}{h},\quad i=\left(\overline{1,\ n-1}\right),\quad j=\left(\overline{1,\ m-1}\right).\end{gathered} \tag{8.5}$$

Схема (8.5) називається тришаровою, оскільки пов'язує між собою значення u_{ij} на трьох тимчасових шарах із номерами $j-1$, $j+1$. Схема (8.5) явна, оскільки дає можливість в явному вигляді виразити u_{ij+1} через значення u на двох попередніх шарах.

Числове розв'язання задачі полягає у визначенні наближених значень u_{ij} у вузлах (x_i,t_j) при $i=\left(\overline{1,\ n-1}\right)$, $j=\left(\overline{1,\ m}\right)$.

Припустимо, що $x\in[0;1]$, $t\in[0;0,8]$, а функції, що входять у початкові та граничні умови, визначаються формулами

$$F(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 0{,}5,\\ 2-2x, & 0{,}5<x\le 1,\end{cases}\quad p(t)=q(t)=0.$$

Вважатимемо $h=0{,}1$, $\tau=0{,}05$ і знайдемо наближене значення розв'язку у вузлах сітки за схемою (8.5).

Результати обчислень наведені в таблиці:

t	x								
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0.6	0,7	0,8
0,0	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0.8	0,6	0,4
0,05	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	0.8	0,6	0,4
0,1	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	0,8	0,6	0.4
0,2	0,0	0,2	0,399	0,594	0,7	0.613	0.7	0.594	0,4
0,3	0,0	0,2	0,399	0,498	0,436	0,454	0,436	0.498	0.389
0,4	0,0	0,185	0,297	0,253	0,229	0,274	0,229	0,253	0,297
0,5	0,0	0,097	0,065	0,02	0,078	0,024	0,078	0,02	0,065
0,6	0,0	–0,105	–0,18	–0,131	–0,158	–0,145	–0,158	–0,131	–0,18
0,7	0,0	–0,273	–0,319	–0,338	–0.365	–0,333	–0,365	–0,338	–0,273
0,8	0,0	–0,241	–0,42	–0,548	–0,525	–0.57	–0,525	–0,548	–0,42

Розв'язати задачу про коливання струни за заданими початковими й граничними умовами.

78. $x\in[0;1]$, $t\in[0;1]$, $u(0;t)=u(1;t)=0$,

$$u(x;0)=\begin{cases}\frac{4}{3}x, & 0\le x\le 0{,}5,\\ \frac{4}{3}(1-x), & 0{,}5<x\le 1,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ h=0{,}1,\ \tau=0{,}05.$$

79. $x\in[0;2]$, $t\in[0;1{,}2]$, $u(0;t)=u(2;t)=0$,

$$u(x;0)=\begin{cases}\frac{4}{5}x, & 0\le x\le 1,\\ \frac{4}{5}(2-x), & 1<x\le 2,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ h=0{,}1,\ \tau=0{,}05.$$

80. $x\in[0;3]$, $t\in[0;1{,}5]$, $u(0;t)=u(3;t)=0$.

$$u(x;0)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\le x\le \frac{3}{2},\\ \frac{3-x}{2}, & \frac{3}{2}<x\le 3,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ h=0{,}15,\ \tau=0{,}01.$$

81. $x\in[0;2]$, $t\in[0;2]$, $u(0;t)=u(2;t)=0$,

$$u(x;0)=\begin{cases}x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ h=0{,}1,\ \tau=0{,}02.$$

82. $x\in[0;1]$, $t\in[0;4]$, $u(0;t)=u(1;t)=0$,

$$u(x;0)=\begin{cases}\frac{4}{3}x, & 0\le x\le 0{,}5,\\ \frac{4}{3}(1-x), & 0{,}5<x\le 1,\end{cases}\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ h=0{,}05,\ \tau=0{,}02.$$

83. $x\in[0;1]$, $t\in[0;5]$, $u(0;t)=u(1;t)=0$, $u(x;0)=x(x-1)$, $0\le x\le 1$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $h=0{,}05$, $\tau=0{,}025$.

84. $x\in[0;1{,}5]$, $t\in[0;2]$, $u(0;t)=u(1{,}5;t)=0$, $u(x;0)=x(1{,}5-x)$, $0\le x\le 1{,}5$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $h=0{,}075$, $\tau=0{,}005$.

85. $x\in[0;2]$, $t\in[0;2]$, $u(0;t)=u(2;t)=0$, $u(x;0)=x(2-x)$, $0\le x\le 2$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $h=0{,}1$, $\tau=0{,}01$.

86. $x\in[0;3]$, $t\in[0;10]$, $u(0;t)=u(3;t)=0$, $u(x;0)=x(3-x)$, $0\le x\le 3$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $h=0{,}15$, $\tau=0{,}05$.

87. $x\in[0;0{,}5]$, $t\in[0;2]$, $u(0;t)=u(0{,}5;t)=0$, $u(x;0)=x(0{,}5-x)$, $0\le x\le 0{,}5$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$, $h=0{,}025$, $\tau=0{,}005$.

Відповіді

1. $L_2(x)=-14{,}2x^2+28{,}67x+91{,}37$. **2.** $L_3(x)=x^3+x^2-x+2$. **3.** $L_3(x)=-0{,}0205x^3-0{,}02x^2+2{,}73x+1{,}45$. **4.** $\sqrt[3]{1{,}15}\approx 1{,}0477$; $\delta<0{,}55\cdot10^{-5}$. **5.** $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\approx 0{,}9397$; $\delta<0{,}3\cdot10^{-4}$. **6.** $y(1{,}52)=3{,}899$; $y(1{,}67)=4{,}087$. **7.** $y(27)=49{,}46$. **8.** $y(102)=15{,}38$. **9.** $L_3(x)=-1{,}99994x^3+3{,}33302x^2-6x+2{,}95845$; $\delta\le0{,}042$. **10.** $L_3(x)=0{,}0491x^3+0{,}8566x^2+0{,}499x+0{,}6995$; $\delta\le0{,}032$. **11.** $L_3(x)=-1{,}11424x^3-0{,}06642x^2+1{,}02268x-0{,}00065$; $\delta\le2\cdot10^{-3}$. **12.** $L_3(x)=0{,}11429x^3-0{,}60494x^2+0{,}03191x+0{,}99848$; $\delta\le2\cdot10^{-3}$. **13.** $L_3(x)=0{,}47614x^3+0{,}04735x^2+1{,}19215x+0{,}98788$; $\delta\le0{,}04$. **14.** $L_3(x)=-5{,}708152x^3+31{,}07717x^2-52{,}3837x+34{,}82234$. **15.** $L_3(x)=-0{,}016611x^3+0{,}394367x^2-0{,}084391x+0{,}62318263$. **16.** $L_3(x)=-0{,}005579x^3+0{,}316211x^2-0{,}1087281x+0{,}623182$. **17.** $L_3(x)=1{,}30368x^3-1{,}428301x^2+2{,}94864x+0{,}25201$. **18.** $L_3(x)=2{,}69333x^3+1{,}77941x^2-5{,}11307x+3{,}04868$. **19.** $0{,}78540288\ (n=4)$; $0{,}78539798\ (n=8)$; $0{,}78539815$ (точне). **20.** $0{,}12975\ (n=2)$; $1{,}306579\ (n=4)$; $1{,}306838\ (n=8)$; $1{,}306852$ (точне). **21.** $0{,}561741\ (n=2)$; $0{,}491190\ (n=4)$; $0{,}490813\ (n=8)$; $0{,}490873$ (точне). **22.** $0{,}5635623\ (n=2)$; $0{,}5707961\ (n=4)$; $0{,}5707962\ (n=8)$; $0{,}5707963$ (точне). **23.** 0,040 841. **24.** $0{,}641539\cdot10^{-2}$. **25.** – 0,207 784. **26.** 0,813 305. **27.** 0,402 182. **28.** 1,382 459. **29.** 0,300 479. **30.** 1,055 153. **31.** 0,529 428. **32.** 0,542 229. **33.** 1,089 550. **34.** 1,350 643.

35.

x	Розв'язок $y(x)$		x	Розв'язок $y(x)$	
	наближений	точний		наближений	точний
e	1	1	e + 0,6	1,119 447 1	1,119 447 2
e + 0,1	1,036 127 4	1,036 127 3	e + 0,7	1,122 913 80	1,122 913 81
e + 0,2	1,070 995	1,070 995	e + 0,8	1,257 972 7	1,257 972 8
e + 0,3	1,104 687 7	1,104 687 7	e + 0,9	1,285 999 3	1,285 999 4
e + 0,4	1,137 282 1	1,137 282 1	e + 1	1,313 226 17	1,313 226 17
e + 0,5	1,168 847 6	1,168 847 7			

36.

x	Розв'язок $y(x)$		x	Розв'язок $y(x)$	
	наближений	точний		наближений	точний
0	1,0	1,0	0,5	1,366 024	1,366 025
0,1	1,094 987 4	1,094 987 4	0,6	1,399 988	1,4
0,2	1,179 795 8	1,179 795 9	0,7	1,414 339	1,414 142 8
0,3	1,253 938 9	1,253 939 2	0,8	1,399 963	1,4
0,4	1,316 514 5	1,316 515 1	0,9	1,335 540 2	1,335 884

37.

x	Розв'язок $y(x)$		x	Розв'язок $y(x)$	
	наближений	точний		наближений	точний
0	1	1	0,9	3,056 583	3,056 578
0,15	1,163 06	1,163 06	1,05	4,120 04	4,120 014
0,30	1,360 777	1,360 777	1,20	6,071 42	6,071 34
0,45	1,610 311	1,610 311	1,35	10,730 61	10,730 26
0,60	1,938 606	1,938 605	1,50	35,345 7	35,342 0
0,75	2,391 730 4	2,391 726 8			

38. $y_{\text{точн}}=y_{\text{набл}}=1$.

39.

x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1	x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1
0	1	1	1,2	1,512 153	1,512 09
0,2	1,018 8	1,010 78	1,4	1,661 03	1,660 97
0,4	1,070 91	1,070 88	1,6	1,820 09	1,820 02
0,6	1,150 851	1,150 806	1,8	1,988 06	1,987 98
0,8	1,253 801	1,253 75	2,0	2,164 218	2,164 13
1,0	1,375 456	1,375 397			

40.

x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1	x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1
0	1	1	0,6	1,672 24	1,672 248
0,2	1,203 36	1,203 365	0,8	1,958 62	1,958 626
0,4	1,422 36	1,423 65	1,0	2,292 3	2,293 03

41.

x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1	x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1
0	0,0	0,0	1,2	−0,434 23	−0,434 09
0,2	0,172 525	0,172 535	1,4	−0,961 36	−0,961 1
0,4	0,266 012	0,266 04	1,6	−1,838 35	−1,837 9
0,6	0,258 617	0,258 67	1,8	−3,852 6	−3,858 8
0,8	0,143 31	0,143 38	2,0	−17,946	−17,967
1,0	−0,083 02	−0,082 93			

42.

x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1	x	y ; h = 0,2	y ; h = 0,1
0	0,0	0,0	0,5	0,892 058	0,892 051
0,1	0,110 573 9	0,110 573 7	0,6	1,273 38	1,273 36
0,2	0,245 316 4	0,245 315 8	0,7	1,882 77	1,882 67
0,3	0,411 035	0,411 034	0,8	3,383 0	3,391 4
0,4	0,619 458	0,619 455			

43.

x	y
0	0,0
0,4	0,288 212
0,8	0,471 886
1,2	0,653 920
1,6	0,920 040
2,0	1,480 955

44.

x	y	x	y
0	1,0	1,2	1,535 752
0,2	1,018 787	1,4	1,702 665
0,4	1,071 093	1,6	1,886 273
0,6	1,152 161	1,8	2,085 364
0,8	1,258 419	2,0	2,298 990
1,0	1,387 046		

45.

x	y	x	y
0	−0,520 1	0,48	−0,387 9
0,08	−0,554 6	0,56	−0,254 5
0,16	−0,571 9	0,64	−0,072 6
0,24	−0,568 1	0,72	0,170 5
0,32	−0,539 2	0,80	0,5
0,40	−0,480 8		

46.

x	y
0	−0,038
0,08	−0,037
0,16	−0,032
0,24	−0,024
0,32	−0,013
0,40	0,002 0
0,48	0,020
0,56	0,04
0,64	0,061
0,72	0,082
0,80	0,10

47.

x	y
0,0	−1,066
0,08	−0,971
0,16	−0,692
0,24	−0,296
0,32	0,134
0,40	0,515
0,48	0,77
0,6	0,8

48.

x	y
0,0	−0,241 7
0,072	−0,257 7
0,144	−0,228 9
0,216	−0,164 1
0,268	−0,076 6
0,360	−0,018 6
0,432	0,105 5
0,504	0,169 8
0,576	0,199 4
0,600	0,2

49.

x	y
0,0	−0,29
0,072	−0,285
0,144	−0,191
0,216	−0,096
0,288	−0,008
0,360	−0,104
0,432	0,177
0,504	0,216
0,576	0,212
0,6	0,2

50.

x	y
0,5	0,502 3
0,8	0,802 1
1,1	1,101 3
1,4	1,399 4
1,7	1,695
2,0	1,984 4
2,3	2,254
2,6	2,448 7
2,9	2,297 5
3,0	2,0

51.

x	y
0,5	−0,514 7
0,8	−0,813 5
1,1	−1,108 3
1,4	−1,396
1,7	−1,668 3
2,0	−1,900 4
2,3	−2,005 6
2,6	−1,629
2,9	0,955 8
3,0	3,4

52.

x	y
0,5	−10,199 8
0,8	−9,301 8
1,1	−1,457 6
1,4	14,988
1,7	41,000 8
2,0	76,011 8
2,3	115,311 1
2,6	140,641 9
2,9	79,978 2
3,0	1,8

53.

x	y
1	−0,575 9
1,4	−0,700 8
1,8	−0,669 6
2,2	−0,500 8
2,6	−0,208 2
3,0	0,196 3
3,4	0,701 7
3,8	1,296 9
4,2	1,970 3
4,6	2,709 4
5	3,5

54.

x	y
1	−0,423 7
1,4	−0,601 5
1,8	−0,583 2
2,2	−0,390 5
2,6	−0,054 1
3,0	0,389 4
3,4	0,899 4
3,8	1,431 3
4,2	1,937 6
4,6	2,367 5
5	2,667

55.

x	y
1	−2,502 3
1,4	−2,133 3
1,8	−0,675 5
2,2	1,349 9
2,6	3,454 4
3,0	5,830 5
3,4	6,236 7
3,8	6,262 0
4,2	5,046 8
4,6	2,566
5	−1,292

56.

x	y					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,8	0,64	0,901	1,128	1,343	1,550	1,739
0,6	0,36	0,635	0,870	1,093	1,315	1,530
0,4	0,16	0,408	0,623	0,843	1,088	1,352
0,2	0,04	0,208	0,367	0,567	0,839	1,184
0,0	0,0	0,008	0,064	0,216	0,542	1,0

57.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,8	0,36	0,433	0,533	0,632	0,720	0,8
0,6	0,64	0,641	0,665	0,674	0,650	0,6
0,4	0,84	0,822	0,810	0,748	0,606	0,4
0,2	0,96	0,994	1,002	0,901	0,631	0,2
0,0	1,0	1,189	1,300	1,226	0,838	0,0

58.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	−2	−1,8	−1,6	−1,4	−1,2	−1,0
0,8	0,441	−0,561	−0,849	−0,891	−0,857	−0,8
0,6	0,526	−0,019	−0,309	−0,451	−0,534	−0,6
0,4	0,413	0,238	0,082	−0,067	−0,227	−0,4
0,2	0,212	0,477	0,459	0,319	0,0936	−0,2
0,0	0,0	0,992	0,936	0,784	0,488	0,0

59.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	−9	−11,16	−12,84	−14,04	−14,76	−15
0,8	−5,48	−7,065	−8,131	−8,691	−8,746	−8,28
0,6	−2,52	−3,490	−3,928	−3,949	−3,251	−2,12
0,4	−0,12	−0,449	−0,247	0,471	1,708	3,48
0,2	1,72	2,055	2,91	4,27	6,134	8,52
0,0	3,00	4,04	5,56	7,56	10,04	13

60.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	−9	−11,16	−12,84	−14,04	−14,76	−15
0,8	−5,48	−7,065	−8,131	−8,691	−8,746	−8,28
0,6	−2,52	−3,490	−3,928	−3,949	−3,251	−2,12
0,4	−0,12	−0,449	−0,247	0,471	1,708	3,48
0,2	1,72	2,055	2,91	4,27	6,134	8,52
0,0	3,00	4,04	5,56	7,56	10,04	13

61.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	−8,0	−10,0	−11,6	−12,8	−13,6	−14
0,8	−5,04	−6,545	−7,611	−8,251	−8,466	−8,24
0,6	−2,56	−3,530	−4,048	−4,129	−3,771	−2,96
0,4	−0,56	−0,969	−0,927	−0,448	0,4689	1,84
0,2	0,96	1,135	1,750	2,789	4,254	6,16
0,0	2	2,8	4	5,6	7,6	10

62.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
0,8	1,0	1,157	1,315	1,476	1,637	1,8
0,6	1,0	1,114	1,232	1,352	1,476	1,6
0,4	1,0	1,074	1,151	1,232	1,315	1,4
0,2	1,0	1,036	1,074	1,114	1,157	1,2
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

63.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	1,0	1,04	1,16	1,36	1,64	2,0
0,8	1,0	1,074	1,185	1,345	1,555	1,8
0,6	1,0	1,074	1,162	1,283	1,432	1,6
0,4	1,0	1,052	1,115	1,196	1,293	1,4
0,2	1,0	1,026	1,059	1,099	1,147	1,2
0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

64.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	0,367	0,382	0,431	0,527	0,697	1,0
0,8	0,527	0,609	0,723	0,893	1,134	1,433
0,6	0,697	0,804	0,960	1,189	1,503	1,896
0,4	0,852	0,954	1,129	1,400	1,792	2,316
0,2	0,960	1,039	1,207	1,496	1,950	2,611
0,0	1,0	1,040	1,173	1,433	1,896	2,718

65.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	0,0	0,202	0,422	0,684	1,029	1,557
0,8	0,0	0,177	0,365	0,572	0,805	1,029
0,6	0,0	0,1409	0,283	0,430	0,572	0,684
0,4	0,0	0,097	0,192	0,283	0,365	0,422
0,2	0,0	0,049	0,097	0,140	0,177	0,100
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

66.

y	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
1,0	−0,841	−0,717	−0,564	−0,389	−0,198	0,0
0,8	−0,717	−0,540	−0,365	−0,185	0,023	0,198
0,6	−0,564	−0,364	−0,176	0,074	0,194	0,389
0,4	−0,389	−0,183	0,090	0,193	0,375	0,564
0,2	−0,198	0,042	0,196	0,376	0,546	0,717
0,0	0,0	0,198	0,389	0,564	0,717	0,841

67.

y	x					
	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1.0	1.0	1,18	1,321	1,425	1,496	1,540
0.8	1.0	1,119	1,243	1,377	1,527	1,696
0,6	1,0	1,057	1,157	1,316	1,541	1,825
0.4	1,0	0,953	1,016	1,195	1,494	1,921
0,2	1,0	0,729	0,770	0,961	1,307	1,98
0,0	1,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0

68.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,1	1,4	1,8	2,2	2,6	3,0
0,3	1,1	1,483	1,868	2,255	2,643	3,0
0,6	1,1	1,486	1,873	2,259	2,646	3,0
0,9	1,1	1,486	1,873	2,259	2,646	3,0
1,2	1,1	1,486	1,873	2,259	2,646	3,0
1,5	1,1	1,486	1,873	2,259	2,646	3,0

69.

t	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,4	2,0
0,0	0.0	0.16	0.64	0.8	0.4	0,0
0.2	0,0	0,231	0,397	0,412	0,24	0,0
0.4	0.0	0.149	0,242	0.238	0,135	0,0
0.6	0,0	0,091	0,145	0,141	0,079	0,0
0.8	0,0	0,054	0,086	0,084	0,047	0,0
1,0	0.0	0,032	0,052	0,050	0,028	0,0

70.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	8	19	15	11	7	3
0,4	8	7,078	6,089	5,027	3,888	3,0
0,8	8	6,95	5,899	4,846	3,792	3,0
1,2	8	6,947	5,895	4,842	3,79	3,0
1,6	8	6,947	5,895	4,842	3,789	3,0
2,0	8	6,947	5,895	4,842	3,789	3,0

71.

t	x					
	0,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0
0,0	0,0	0,24	0,96	1,2	0,6	3,0
0,3	0,0	0,38	0,697	0,756	0,459	0,0
0,6	0,0	0,305	0,507	0,517	0,311	0,0
0,9	0,0	0,225	0,365	0,364	0,215	0,0
1,2	0,0	0,162	0,262	0,258	0,152	0,0
1,5	0,0	0,116	0,187	0,184	0,108	0,0

72.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,3	1,3	1,84	2,56	3,38	3,0
0,6	1,3	1,646	1,992	2,338	2,683	3,0
1,2	1,3	1,646	1,992	2,337	2,683	3,0
1,8	1,3	1,646	1,992	2,337	2,683	3,0

73.

t	x					
	0,0	1,0	2.0	3,0	4,0	5,0
0,0	0,0	0,4	1,6	2,0	1.0	0,0
0,4	0,0	0.62	1,384	1,583	0,889	0,0
0,8	0,0	0,639	1.176	1,264	0.724	0,0
1,2	0,0	0,587	1,005	1,034	0,586	0,0
1,6	0,0	0,517	0,856	0,857	0.479	0,0
2,0	0,0	0,447	0,727	0,715	0,395	0,0

74.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	10,0	19,6	18,6	14,067	9,533	5,0
0,4	10,0	9,138	8,217	7,198	6,084	5,0
0,8	10,0	8,989	7,976	6,961	5,943	5,0
1,2	10,0	8,985	7,970	6,955	5,940	5,0

75.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	0.08	0,32	0,4	0,2	0,0
0,32	0,0	0,009	0,015	0,014	0,007	0,0
0,64	0,0	0,0	0,001	0,001	0,0	0,0
0,96	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

76.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	0,16	0,64	0,8	0,4	0,0
0,4	0,0	0,151	0,246	0,245	0,142	0,0
0,8	0,0	0,057	0,091	0,088	0,061	0,0
1,2	0,0	0,021	0,033	0,032	0,018	0,0

77.

t	x					
	0,0	0,24	0,48	0,72	0,96	1,2
0,0	0,0	0,096	0,384	0,48	0,24	0,0
0,4	0,0	0,018	0,029	0,028	0,017	0,0
0,8	0,0	0,001	0,022	0,002	0,001	0,0
1,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

78.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	0,267	0,8	0,533	0,267	0,0
0,25	0,0	0,461	0,399	0,53	0,267	0,0
0,50	0,0	0,019	0,128	0,003	0,233	0,0
0,57	0,0	−0,279	−0,42	−0,224	−0,373	0,0
1,0	0,0	−0,38	−0,662	−0,789	−0,398	0,0

79.

t	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,0	0,0	0,32	0,64	0,96	0,32	0,0
0,25	0,0	0,32	0,64	0,561	0,321	0,0
0,50	0,0	0,32	0,528	0,367	0,462	0,0
0,75	0,0	0,309	0,189	0,209	0,168	0,0
1,0	0,0	0,045	−0,016	0,048	0,002	0,0

80.

t	x					
	0,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0
0,0	0,0	0,3	0,6	0,9	0,3	0,0
0,3	0,0	0,3	0,6	0,7	0,321	0,0
0,6	0,0	0,3	0,594	0,43	0,528	0,0
0,9	0,0	0,3	0,425	0,276	0,237	0,0
1,2	0,0	0,287	0,074	0,203	0,206	0,0
1,5	0,0	0,132	0,062	−0,040	−0,062	0,0

81.

t	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,0	0,0	0,4	0,8	0,8	0,4	0,0
0,4	0,0	0,4	0,61	0,61	0,4	0,0
0,8	0,0	0,228	0,199	0,199	0,228	0,0
1,2	0,0	−0,182	−0,191	−0,191	−0,182	0,0
1,6	0,0	−0,435	−0,581	−0,581	−0,435	0,0
2,0	0,0	−0,415	−0,832	−0,832	−0,415	0,0

82.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	0,267	0,8	0,533	0,267	0,0
0,8	0,0	−0,28	−0,583	−0,444	−0,330	0,0
1,6	0,0	0,022	0,068	0,109	0,334	0,0
2,4	0,0	0,029	0,076	0,266	0,249	0,0
3,2	0,0	−0,313	−0,506	−0,494	−0,265	0,0
4,0	0,0	0,401	0,768	0,642	0,361	0,0

83.

t	x					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	0,0	−0,16	−0,24	−0,24	−0,16	0,0
1,0	0,0	0,16	0,24	0,24	0,16	0,0
2,0	0,0	−0,161	−0,24	−0,24	−0,161	0,0
3,0	0,0	0,161	0,239	0,239	0,161	0,0
4,0	0,0	−0,161	−0,24	−0,24	−0,161	0,0
5,0	0,0	0,16	0,24	0,24	0,16	0,0

84.

t	x					
	0,0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5
0,0	0,0	0,36	0,54	0,54	0,36	0,0
0,4	0,0	0,212	0,382	0,382	0,212	0,0
0,8	0,0	−0,029	−0,058	−0,058	−0,029	0,0
1,2	0,0	−0,266	−0,449	−0,449	−0,266	0,0
1,6	0,0	−0,35	−0,53	−0,53	−0,35	0,0
2,0	0,0	−0,151	−0,294	−0,294	−0,151	0,0

85.

t	x					
	0,0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
0,0	0,0	0,64	0,96	0,96	0,64	0,0
0,4	0,0	0,486	0,804	0,804	0,486	0,0
0,8	0,0	0,165	0,331	0,331	0,165	0,0
1,2	0,0	−0,156	−0,308	−0,308	−0,156	0,0
1,6	0,0	−0,471	−0,797	−0,797	−0,471	0,0
2,0	0,0	−0,642	−0,96	−0,96	−0,642	0,0

86.

t	x					
	0,0	0,6	1,2	1,8	2,4	3,0
0,0	0,0	1,44	2,16	2,16	1,44	0,0
2,0	0,0	−0,57	−1,099	−1,099	−0,57	0,0
4,0	0,0	−0,63	−1,213	−1,213	−0,63	0,0
6,0	0,0	1,45	2,157	2,157	1,45	0,0
8,0	0,0	−0,57	−1,086	−1,086	−0,57	0,0
10,0	0,0	−0,654	−1,219	−1,219	−0,654	0,0

87.

t	x					
	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	0,0	0,040	0,060	0,060	0,040	0,0
0,5	0,0	−0,040	−0,060	−0,060	−0,040	0,0
1,0	0,0	0,040	0,060	0,060	0,040	0,0
1,5	0,0	−0,040	−0,060	−0,060	−0,040	0,0
2,0	0,0	0,040	0,060	0,060	0,040	0,0
2,5	0,0	−0,040	−0,060	−0,060	−0,040	0,0

ЗМІСТ

Навчальний посібник

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

У двох частинах

Частина 2

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

РЯДИ

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

СТІЙКІСТЬ ЗА ЛЯПУНОВИМ

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ І ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ

ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

Редактори *Н. Г. Петрик, С. К. Кашка*
Оформлення художника *В. О. Гурлєва*
Художній редактор *С. В. Анненков*
Коректори *Н. М. Мірошниченко,*
О. О. Куценко
Комп'ютерна верстка *Т. В. Скалиги*

Підписано до друку 19.02.2003. Формат $60\times84^{1}/_{16}$.
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 21,86.
Обл.-вид. арк. 23,82. Тираж 5000 пр. Зам. № 3-53.

Видавництво "Техніка". 04053 Київ, вул. Обсерваторна, 25.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України
суб'єктів видавничої справи ДК № 357 від 12. 03. 2001 р.

Віддруковано на Білоцерківській книжковій фабриці
09117 Біла Церква, вул. Л. Курбаса, 4.