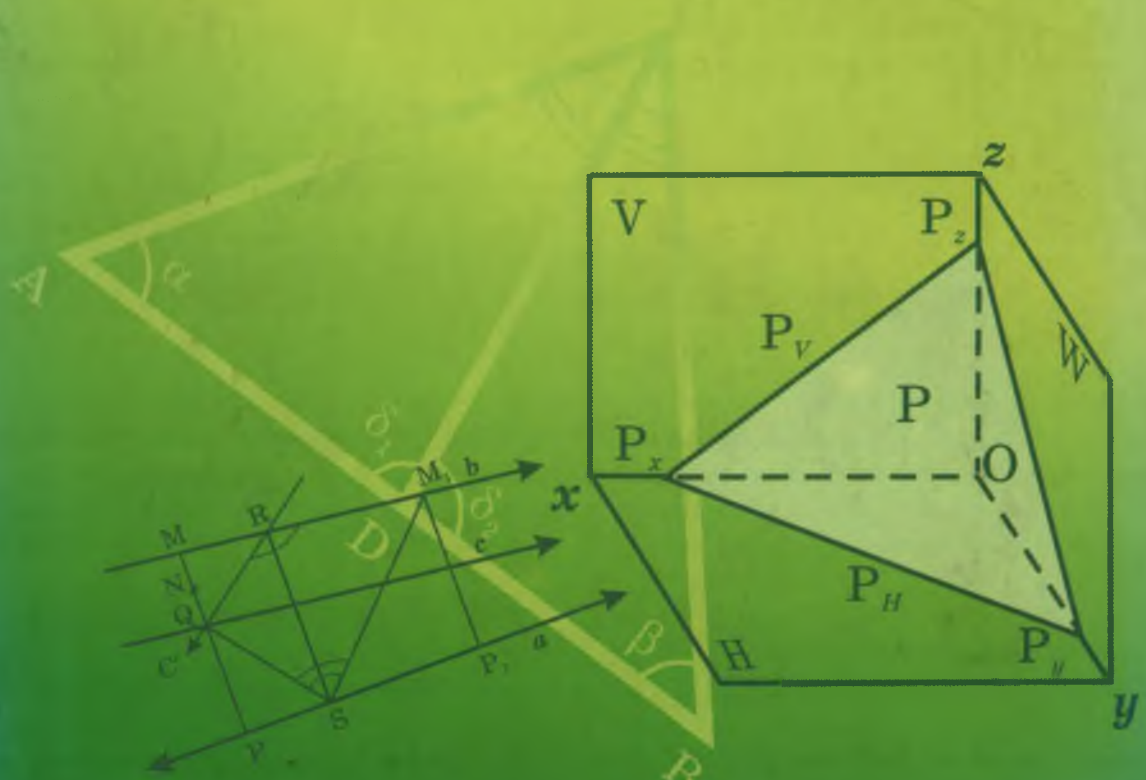
В.Н. Боровик В.П. Яковець

КУРС ВИЩОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник



В.Н. Боровик
В.П. Яковець

КУРС ВИЩОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Суми 2004
«Університетська книга»

УДК 514(075.8)
ББК 22.151я73
Б83

Рецензенти:
Шкіль М.І., доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АПН України;
Кобко Л.М., доцент, канд. техн. наук, зав. кафедри алгебри і геометрії Чернігівського державного педагогічного університету ім. Т.Г. Шевченка

Гриф надано Міністерством освіти і науки України.
Лист № 14/18.2-1927 від 17.11.03

Б83 **Боровик В.Н., Яковець В.П.**
Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.

ISBN 966-680-140-X

У навчальному посібнику викладено головні питання основ геометрії, проективної геометрії і методи зображення просторових тіл згідно з програмою відповідних розділів курсу геометрії для фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів.

Виклад теоретичних питань супроводжується прикладами застосування теорії до розв'язання вправ і задач.

Призначений для студентів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів.

ББК 22.151я73

ISBN 966-680-140-X

Зміст

Передмова 9

Частина I

ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

Розділ 1. Історичний нарис обґрунтування геометрії 14
§ 1. Предмет основ геометрії 14
§ 2. Геометрія до Евкліда 15
§ 3. «Початки» Евкліда 18
§ 4. Критика системи Евкліда 20
§ 5. Спроби доведення V постулату 21
§ 6. Дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра 25
§ 7. Відкриття неевклідової геометрії 29
§ 8. Короткі відомості про життя і діяльність М.І. Лобачевського 31
Контрольні запитання 33

Розділ 2. Елементи геометрії Лобачевського 35
§ 9. Абсолютна геометрія і аксіома Лобачевського 35
§ 10. Паралельні прямі на площині Лобачевського 36
§ 11. Властивості прямих на площині Лобачевського 39
§ 12. Функція Лобачевського 41
§ 13. Властивості трикутників на площині Лобачевського 43
§ 14. Поняття про еквідистанту 46
Основні властивості еквідистант 46
§ 15. Поняття про орицикл 48
Основні властивості орицикла 48
§ 16. Теореми про серединні перпендикуляри сторін трикутника та наслідки з них 51
Контрольні запитання 53

Розділ 3. Завершення логічного обґрунтування геометрії 55
§ 17. Проблема несуперечливості геометрії 55
§ 18. Система аксіом евклідової геометрії за Гільбертом 60
§ 19. Різні шляхи обґрунтування геометрії 64
§ 20. Векторне обґрунтування геометрії Евкліда 66
20.1. Система аксіом Вейля 66
20.2. Побудова геометрії за схемою Вейля 68
Контрольні запитання 72

Розділ 4. Сучасна аксіоматична побудова евклідової геометрії 73
§ 21. Основні поняття 73
§ 22. Аксіоми належності 74

§ 23. Аксіоми порядку 74
§ 24. Аксіоми міри для відрізків і кутів 77
§ 25. Аксіома існування трикутника, рівного даному 79
§ 26. Аксіома існування відрізка даної довжини 81
§ 27. Аксіома паралельних 82
§ 28. Просторові аксіоми 82
Контрольні запитання 84

Розділ 5. Дослідження системи аксіом геометрії 85
§ 29. Завдання обґрунтування системи аксіом 85
§ 30. Декартова реалізація системи аксіом евклідової геометрії (за О.В. Погорєловим) 85
30.1. Несуперечливість системи аксіом евклідової геометрії 85
30.2. Повнота системи аксіом евклідової геометрії 88
30.3. Незалежність аксіоми існування відрізка заданої довжини . 90
30.4. Незалежність аксіоми паралельних 91
§ 31. Арифметична реалізація векторної системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії 91
31.1. Несуперечливість системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії для простору TE_3 91
31.2. Незалежність системи аксіом Г. Вейля 93
31.3. Повнота системи аксіом Вейля 95
§ 32. Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського 96
32.1. Реалізація Бельтрамі – Клейна 97
32.2. Реалізація Пуанкаре 100
Контрольні запитання 104

Розділ 6. Елементи геометрії Рімана 106
§ 33. Поняття про геометрію Рімана 106
33.1. Аксіоми належності 107
33.2. Розміщення точок на прямій Рімана 108
§ 34. Елементи сферичної геометрії 110
34.1. Основні поняття сферичної геометрії 110
34.2. Відстань між двома точками на сфері 110
34.3. Сферичні трикутники 111
34.4. Сума кутів сферичного трикутника 114
34.5. Площа сферичного трикутника 116
34.6. Зовнішній кут сферичного трикутника 118
34.7. Поняття руху і рівності на сфері 118
§ 35. Несуперечливість планіметрії Рімана 120
§ 36. Різні геометрії і реальний простір 124
36.1. Поняття геометричного простору 124
36.2. Поняття про лінії і поверхні сталої кривини 126
36.3. Відстань між двома точками 127
Контрольні запитання 128

Розділ 7. Аксіоматика шкільного курсу геометрії 129
§ 37. Огляд різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії 129
§ 38. Система аксіом Л.С. Атанасяна 131
§ 39. Система аксіом О.Д. Александрова 134
§ 40. Система аксіом О.В. Погорєлова 136
Контрольні запитання 142

Частина II

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

Розділ 1. Побудова проективного простору 146
§ 1. Центральне проектування в евклідовому просторі 146
§ 2. Побудова проективного простору 148
§ 3. Аксіоми евклідової геометрії 151
§ 4. Аксіоми проективної геометрії 153
§ 5. Аксіоми належності проективної геометрії 153
§ 6. Відношення порядку елементів проективного простору 158
6.1. Відношення порядку точок на проективній прямій 158
6.2. Аксіоми порядку проективної геометрії 161
6.3. Властивості відношення порядку на проективній площині ... 162
6.4. Відношення неперервності проективного простору 164
§ 7. Основні геометричні форми 165
§ 8. Принципи двоїстості в проективній геометрії 166
§ 9. Теорема Дезарга 168
§ 10. Конфігурація Дезарга 170
Вправи 174

Розділ 2. Основні поняття проективної геометрії форм першого ступеня 176
§ 11. Подвійне відношення чотирьох точок прямої 176
§ 12. Координати точки на проективній прямій 180
§ 13. Подвійне відношення чотирьох прямих пучка 182
§ 14. Перспективні ряди точок і пучки прямих 183
§ 15. Поняття проективної відповідності у формах першого ступеня 186
§ 16. Побудова проективної відповідності рядів і пучків 189
§ 17. Гармонізм точок ряду і прямих пучка 191
§ 18. Повний чотиривершинник 194
§ 19. Поняття повного чотиристоронника 198
§ 20. Проективні ряди (і пучки) із спільним носієм 199
§ 21. Інволюція 204
§ 22. Друга теорема Дезарга 209
§ 23. Геометрична інтерпретація інволюції 211
§ 24. Проективні відображення форм першого ступеня в координатах 213
24.1. Проективне відображення двох рядів точок у координатах 213

24.2. Інволюція в координатах 216
Вправи 220

Розділ 3. Лінії другого порядку на проективній площині 223
§ 25. Означення і основні властивості ряду точок другого порядку 223
§ 26. Теорема Паскаля 228
§ 27. Окремі випадки теореми Паскаля 230
§ 28. Конфігурація Паскаля – Паппа 233
§ 29. Означення і основні властивості пучка другого порядку. Теорема Бріаншона 234
§ 30. Полюс і поляра. Полярна відповідність 240
Вправи 244

Розділ 4. Проективні перетворення форм другого ступеня 247
§ 31. Колінеація плоских полів 247
§ 32. Гомології 249
§ 33. Проективні координати на площині 252
§ 34. Колінеація в координатах 256
§ 35. Поняття про кореляцію 259
§ 36. Рівняння проективної прямої 261
§ 37. Канонічні рівняння ліній другого порядку в проективних координатах. Проективна класифікація ліній другого порядку 264
Вправи 267

Розділ 5. Група проективних перетворень та її підгрупи 270
§ 38. Група проективних перетворень (колінеацій) 270
§ 39. Група афінних перетворень (як підгрупа групи проективних перетворень) 272
§ 40. Евклідова геометрія з проективної точки зору 277
§ 41. Група рухів 281
§ 42. Групова точка зору на геометрію 283
§ 43. Історичні відомості про розвиток ідей проективної геометрії 285
Вправи 290

Частина III

МЕТОДИ ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

Розділ 1. Загальні відомості про зображення фігур на площині 294
§ 1. Проекційні методи зображення 294
§ 2. Основні вимоги до зображення 295
§ 3. Центральне проектування 298
§ 4. Паралельне проектуваня 301
§ 5. Жорсткі та вільні зображення 305
§ 6. Паралельна проекція кола 309

Розділ 2. Метод Монжа 311
§ 7. Поняття про метод Монжа 311

§ 8. Проекції точки на дві площини 313
§ 9. Система трьох площин проекцій. Проекції точки 316
§ 10. Проекції прямої 319
10.1. Прямі загального положення 319
10.2. Прямі, паралельні одній з трьох площин проекцій 320
10.3. Прямі, паралельні двом із трьох площин проекцій 322
10.4. Прямі, розміщені в площинах проекцій 323
§ 11. Сліди прямої 324
§ 12. Положення точки і прямої 326
§ 13. Взаємне положення двох прямих 327
13.1. Паралельні прямі 327
13.2. Прямі, що перетинаються 328
13.3. Мимобіжні прямі 329
§ 14. Площина 329
14.1. Задання площини на епюрі 329
14.2. Характерні розміщення площини відносно площин проекцій 331
§ 15. Прямі лінії на площині 335
15.1. Пряма загального розміщення 336
15.2. Горизонталь площини 337
15.3. Фронталь площини 337
15.4. Профільна пряма 338
§ 16. Прямі в проектуючих площинах 339
16.1. Горизонтально проектуюча площина 339
16.2. Фронтально проектуюча площина 340
§ 17. Точка на площині 341
§ 18. Взаємне розміщення двох площин 341
§ 19. Основні метричні задачі 342
Вправи 345

Розділ 3. Метод аксонометрії 347
§ 20. Основні поняття аксонометрії 347
§ 21. Коефіцієнти спотворення на аксонометричних осях 348
§ 22. Основна теорема аксонометрії 349
§ 23. Типи аксонометричних проекцій 352
§ 24. Прямокутні аксонометричні проекції 353
§ 25. Прямокутна ізометрична проекція 356
§ 26. Прямокутна диметрична проекція 357
§ 27. Зведені коефіцієнти спотворення 358
§ 28. Основні позиційні задачі 359
28.1. Задання точки 359
28.2. Задання прямої 361
28.3. Взаємне розміщення прямих 363
28.4. Задання площини 365
§ 29. Метричні задачі в аксонометрії 368
Вправи 371

Розділ 4. Метод лінійної перспективи 372
§ 30. Основні поняття лінійної перспективи 372
§ 31. Основні позиційні задачі 374
31.1. Лінійна перспектива точки 374
31.2. Лінійна перспектива прямої 375
31.3. Лінійна перспектива площини 379
§ 32. Метричні задачі 382
Вправи 384

Розділ 5. Метод основної площини 385
§ 33. Основні поняття методу основної площини 385
§ 34. Основні позиційні задачі 386
§ 35. Зображення просторових фігур 387
35.1. Зображення призми 388
35.2. Зображення піраміди 388
35.3. Зображення циліндра 389
35.4. Зображення конуса 390
35.5. Зображення зрізаного конуса 391
35.6. Зображення кулі 391
§ 36. Переріз многогранників площинами 393
36.1. Метод поділу n-кутної призми (піраміди) на трикутні 393
36.2. Метод слідів січних площин 393
36.3. Метод внутрішнього проектування 398
§ 37. Комбінації просторових фігур 404
§ 38. Історичні відомості про становлення методів зображення 412
Вправи 413

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Частина II 416
Розділ 1 416
Розділ 2 418
Розділ 3 428
Розділ 4 436
Розділ 5 441

Частина III 443
Розділ 2 443
Розділ 3 448
Розділ 4 451
Розділ 5 454

Список літератури 461

Передмова

Навчальний посібник написано у повній відповідності зі змістом розділів «Основи геометрії», «Проективна геометрія», «Методи зображень» діючої програми курсу геометрії для фізико-математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Посібник складається з трьох частин:

Частина I. Основи геометрії.

Частина II. Проективна геометрія.

Частина III. Методи зображення просторових фігур.

У багатьох навчальних посібниках з основ геометрії елементи геометрії Лобачевського викладаються після ознайомлення з системою аксіом Д. Гільберта, при цьому часто з використанням останніх. У студентів складається враження, що Лобачевський при створенні своєї неевклідової геометрії також використовував аксіоматику Гільберта, що, звичайно, не відповідає істині.

Тому в даному посібнику елементи геометрії Лобачевського викладено відповідно до історичної послідовності розвитку геометричних ідей, тобто перед обґрунтуванням евклідової геометрії на основі аксіоматики Гільберта.

Такий підхід надає можливість студентам зрозуміти роль, яку відіграє в побудові геометрії та чи інша аксіома, зокрема аксіома паралельних, при збереженні всіх інших аксіом геометрії Евкліда. З огляду на це стає зрозумілим постановка питання про несуперечливість, незалежність і повноту системи аксіом, про причини і мотиви виникнення і розробки аксіоматичного методу побудови як евклідової геометрії, так і неевклідової геометрії Лобачевського.

Завершення логічного обґрунтування геометрії Евкліда дано після ознайомлення з елементами геометрії Лобачевського (частина I, розділ 2).

Розглянуто різні шляхи обґрунтування евклідової геометрії, проаналізовано систему аксіом Гільберта, векторну систему аксіом Г. Вейля (частина I, розділ 3), систему аксіом О.В. Погорєлова (частина I, розділ 4).

Проведено детальне дослідження несуперечливості, незалежності і повноти системи аксіом Погорєлова у декартовій реалізації, системи аксіом Г. Вейля в арифметичній реалізації, наведено доведення несуперечливості геометрії Лобачевського в інтерпретації Бельтрамі – Клейна і Пуанкаре (частина I, розділ 5).

Відомості про геометрію Рімана, її реалізації на сфері викладені у розділі 6 (частина I).

Проведено аналіз різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії, наведено системи аксіом Л.С. Атанасяна, О.Д. Александрова, О.В. Погорєлова (частина I, розділ 7).

До кожного розділу сформульовані контрольні запитання.

В основу побудови курсу *проективної геометрії* (частина II) покладено ідею геометричних перетворень. Автори не ставили за мету виклад елементарних геометричних перетворень, у тому числі й афінних перетворень, з якими студенти ознайомились у курсі аналітичної геометрії, а розпочали викладення матеріалу з вивчення властивостей центрального проектування, інваріанти якого лежать в основі проективної геометрії (частина I, розділ 1).

Поняття проективного простору введено шляхом розширення евклідового простору – доповненням його невласними точками, невласними прямими, невласною площиною (частина I, розділ 2).

Побудований таким чином проективний простір має всі властивості, необхідні для обґрунтування і розвитку проективних понять. Крім того, такий підхід до побудови проективного простору надає можливість тісно пов'язати нові поняття і теореми проективної геометрії з відповідним матеріалом евклідової геометрії, що полегшує сприймання студентами нових проективних понять.

Такий підхід реалізовано і при викладенні проективної теорії ліній другого порядку (частина II, розділ 3). Вивчення проективної відповідності у формах другого ступеня (частина II, розділ 4) ґрунтується на означенні проективної відповідності через гармонійну четвірку точок (прямих) по Штейнеру.

Далі дано порівняльну характеристику різних геометрій із групової точки зору, показано можливість реалізації афінної та евклідової геометрій на проективній площині. Наведені також короткі історичні відомості про розвиток ідей проективної геометрії (частина II, розділ 5).

Методи зображення просторових фігур (частина III) ґрунтуються на проекційних методах, причому проектування виконується або центральною, або паралельною в'язкою (пучком) прямих.

Одним із основних методів пізнання природи, законів її розвитку, дослідження явищ і процесів є *моделювання*, при якому людина створює фізичну або математичну модель певного процесу чи явища.

Математичні моделі виражаються рівняннями, формулами, які характеризують основні властивості пізнавальних об'єктів. У школі геометричні моделі подані у вигляді рисунків, які є наочним засобом вивчення оригіналу.

Неможливо досить чітко уявити собі просторовий об'єкт за його навіть повним словесним описом, який не може замінити рисунок, побудований за певними геометричними правилами. Зображення просторових фігур є найефективнішим засобом розвитку в учня, студента просторових уявлень, без яких неможливе вивчення просторових фігур.

Як у шкільній практиці, так і у викладанні геометрії у вищих навчальних закладах виникають певні труднощі, пов'язані з виконанням зображень просторових фігур. Проблема зображення тіл та їх використання в навчальному процесі має суттєве й до того ж подвійне значення при викладанні геометрії. З одного боку, зображення геометричних фігур і вивчення їх властивостей забезпечує *наочність* у викладанні геометрії, а також конкретність у практичному використанні. У цьому випадку геометричне зображення відіграє *ілюстративну роль*, тому й називається *ілюстративним*. З іншого боку, зображення фігур можна використовувати як засіб розв'язування задач. Тоді маємо справу з *рисунком розв'язувальним*.

В обох випадках для зображення геометричної фігури користуються методом проектування, тому одержані зображення називаються *проекційним рисунком*.

Залежно від призначення і застосування проекційних рисунків випливають різні вимоги до них. Для ілюстративних рисунків важливе значення має *наочність* і *простота* виконання, тоді як для розв'язувальних рисунків необхідна достатня *повнота* і *точність* відповідного зображення.

У цій частині посібника проаналізовані загальні вимоги до зображення просторових фігур на площині, сутність і властивості центрального і паралельного проектування (частина III, розділ 1).

Окремими розділами виділені «Метод Монжа» (частина III, розділ 2), «Метод аксонометрії» (частина III, розділ 3), «Метод лінійної перспективи» (частина III, розділ 4), «Метод основної площини» (частина III, розділ 5). У кожному з цих розділів розглянуто суть методу та його застосування до зображення просторових фігур, до розв'язування задач.

У кожній частині посібника викладено короткі історичні відомості стосовно змісту відповідної частини. Можливо, матеріал посібника дещо ширший від того, що можна викласти у відведені навчальним планом години на вивчення геометрії, але надлишковий матеріал може бути використаний студентами при написанні курсових і дипломних робіт.

Викладення теоретичного матеріалу супроводжується прикладами і задачами на застосування теорії, що допоможе читачеві краще її засвоїти. До вправ, винесених на самостійне опрацювання, подані детальні вказівки щодо їх розв'язання.

Посібник написаний на основі багаторічного досвіду авторів у викладанні геометрії в педагогічних університетах.

Частина I

ОСНОВИ ГЕОМЕТРІЇ

1 Розділ

Історичний нарис обґрунтування геометрії

§ 1. Предмет основ геометрії

У геометрії весь матеріал викладається у вигляді строгої послідовності чітко сформульованих тверджень – означень і теорем.

Теоремою називається твердження, істинність якого встановлюється за допомогою доведення, тобто міркувань, основаних на законах логіки.

Означення – це твердження, в якому пояснюється зміст того чи іншого поняття.

У курсі геометрії всі теореми розміщуються в певній послідовності. При доведенні n-ї теореми як аргумент використовують $(n - 1)$ раніше доведених тверджень. При доведенні $(n - 1)$-ї теореми використовуються $(n - 2)$ попередніх тверджень і т.д. Цей процес не є нескінченним. Через скінченну кількість кроків прийдемо до таких тверджень, для обґрунтування яких уже немає початкових тверджень.

Тому для того, щоб можна було проводити доведення теорем, деякі твердження беруться без доведення. Такі твердження називаються *аксіомами.* Тоді, виходячи з аксіом, за допомогою логічних умовиводів переходять від однієї теореми до іншої.

Аналогічна ситуація і з означеннями. Як не можна довести всі без винятку твердження, так не можна й означити всі поняття. Кожне нове поняття означається через інші, введені раніше. У результаті прийдемо до таких понять, які не можна означити, їх приймають без означень і називають *основними поняттями*. Аксіоми і основні поняття не можуть вибиратись незалежно одне від одного. В аксіомах стверджуються властивості основних понять.

Таким чином, аксіоматична будова геометрії здійснюється за такою схемою:

1. Вводяться основні поняття.
2. Дається система аксіом, які визначають основні поняття.
3. За допомогою основних понять означаються нові поняття, а на основі аксіом доводяться нові твердження як теореми.

Перелік основних понять і аксіом, достатніх для строго логічного означення всіх інших понять геометрії і доведення всіх тверджень про ці поняття, називається *обґрунтуванням геометрії.*

При цьому виникають такі запитання:

1. Які поняття вибрати основними, а які означати через основні?
2. Які твердження геометрії взяти за аксіоми?
3. Як треба здійснювати вибір основних понять і аксіом, щоб з них можна було за допомогою логічних міркувань розвинути всю геометричну теорію?

На всі ці запитання дає відповідь наука, яка називається основами геометрії. Отже, *основи геометрії* – це наука, предметом вивчення якої є обґрунтування геометрії.

Питання про обґрунтування геометрії тісно пов'язане з її історією. Тому зупинимось коротко на деяких історичних етапах її розвитку.

§ 2. Геометрія до Евкліда

1. Геометрія на Стародавньому Сході

Геометрія виникла і розвивалась під впливом життєвих потреб людей. Перші відомості з геометрії були здобуті на Стародавньому Сході – в Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії – у зв'язку з розвитком землемірства. Найбільших успіхів у цьому напрямку досягли в Стародавньому Єгипті. Про це свідчать кілька єгипетських папірусів, у яких містяться геометричні відомості. Найбільш важливі з них – папірус Рінда, який зберігається в Британському музеї, та Московський папірус, розшифрований знаменитим російським єгиптологом В.В. Струве.

Як свідчать ці папіруси, єгиптяни знали правила обчислення площ многокутників, площі круга, уміли обчислювати об'єми ряду многогранників.

Число π обчислювали досить точно: $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16...$

У Московському папірусі наведено правило для обчислення об'єму зрізаної піраміди, яке повністю збігається з сучасною формулою,

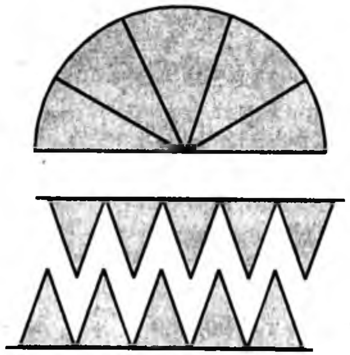


Рис. 1.1

а в одному місці Струве знайшов навіть правило для обчислення площі сфери.

Встановлено, що у Вавилоні досить давно знали теорему Піфагора.

Такі значні досягнення не могли бути одержані чисто емпіричним шляхом. Очевидно, єгипетським жрецям і писарям, у чиїх руках знаходились всі наукові дослідження, були відомі деякі теоретичні геометричні викладки. Але все ж геометрія Стародавнього Сходу носила в основному емпіричний характер і містила зібрання розв'язків окремих задач, правил для знаходження площ, об'ємів тощо. При обґрунтуванні геометричних тверджень звертались до інтуїції або до спостереження, логічних доведень у нашому розумінні ще не знали. Всі обґрунтування зводились до рисунка, під яким стояв напис: «Дивись». Наприклад, індуський математик Ганеші твердження «площа круга дорівнює добутку половини довжини кола на радіус» обґрунтовує рисунком 1.1.

2. Геометрія у Стародавній Греції

Застій і спад економіки Єгипту загальмували подальший розвиток геометрії в цій країні. Поступово центр математичної культури переміщується в Грецію, де в VII–VI ст. до н.е. бурхливо розвивається мореплавство, міське будівництво, зароджується астрономія і фізика. Елементарні методи безпосереднього спостереження, доведення на основі інтуїції вже не могли розв'язати поставлені перед геометрією складні задачі. Треба було відірвати геометрію від задач вимірювання реальних об'єктів і надати їй теоретичного характеру. Вирішення цього завдання взяла на себе *школа Фалеса.*

Фалес (640–548 рр. до н.е.) – представник Мілетської школи, знаменитий філософ і математик. Школа Фалеса розпочала теоретичні дослідження і ввела в геометрію логічні доведення тверджень. Зокрема, Фалесу приписують доведення властивості кутів при основі рівнобедреного трикутника, властивості вертикальних кутів і знаменитої теореми Фалеса, яка вивчається в основній школі.

У подальшому геометрами Стародавньої Греції були здобуті важливі результати, які охоплюють майже весь зміст сучасної елементарної геометрії.

Так, ***Піфагор*** (близько 580–500 рр. до. н.е.) і його школа відкрили теорему про суму кутів трикутника, довели відому теорему Піфагора, існування п'яти типів правильних многогранників. Одним з найвидатніших досягнень школи Піфагора є відкриття несумірних відрізків, що зумовило першу кризу в математиці. Відомі грекам раціональні числа виявились недостатніми для вираження міри довільних відрізків. Грецькі вчені-математики дійшли висновку, що геометрична неперервна величина є більш загальним поняттям, ніж число; геометрія – більш загальна наука, ніж наука про число: вона повинна розвиватися незалежно від науки про число, бути панівною.

Пізніше ***Евдокс*** (410–356 рр. до н.е.) створив геометричну теорію пропорцій, яка замінила грекам теорію ірраціональних чисел, яких вони не знали. Теорія Евдокса дала можливість подолати кризу в математиці, пов'язану з відкриттям несумірних відрізків. Метод Евдокса дозволив вимірювати відрізки з будь-якою точністю. Крім того, Евдокс відкрив метод вичерпування: «*Якщо від величини А відняти $^1/_2$ А або більше, з остачею проробити те саме і т.д., то можна дістати таку величину, яка менша будь-якої наперед заданої*». Користуючись цим методом, Евдокс знаходить об'єми піраміди, конуса, кулі.

Учень Евдокса ***Менехм*** (близько 360 р. до н.е.), розв'язуючи задачу про подвоєння куба, відкрив конічні перерізи – еліпс, гіперболу, параболу, теорію яких потім розробив інший грецький математик – ***Аполлоній.***

Архімед (287–212 рр. до н.е.) – великий грецький математик, астроном і філософ, знайшов правила для обчислення площі параболи, об'єму і поверхні кулі, одержав досить точне наближення числа π: $\pi = \dfrac{22}{7} = 3{,}143...$

Таким чином, протягом кількох століть старогрецькими математиками був накопичений величезний запас геометричних знань. Постало завдання їх систематизації і приведення в логічну систему. Заслугою старогрецьких математиків є те, що вони поставили таке завдання і успішно його вирішили. Постановка задачі про логічне обґрунтування геометрії пов'язана з іменем Платона.

Платон (427–347 рр. до н.е.) вважав, що в будь-якій галузі знань необхідно виділяти основні поняття і твердження, з яких всі інші поняття і твердження повинні випливати як логічні наслідки. Але оскільки Платон був ідеалістом, то все його вчення побудоване на напівмістичній основі, а загальний задум логічної будови науки чітко не сформульований.

Чіткі логічні принципи побудови математичної науки дав учень Платона – великий старогрецький філософ, засновник формальної логіки ***Арістотель***. На думку Арістотеля, у математичній науці всі твердження повинні розміщуватись у певному порядку. Як твердження, так і поняття необхідно поділяти на основні і наслідки з них. Основні твердження мають бути очевидними і не допускати доведення, основні поняття повинні бути безпосередньо зрозумілими і не допускати означення.

Задачу логічного обґрунтування геометрії, поставлену Платоном і Арістотелем, намагались розв'язати багато старогрецьких учених, наприклад, Гіппократ і Фідій, але їх твори не дійшли до нас і були забуті після появи знаменитих «Початків» Евкліда.

§ 3. «Початки» Евкліда

Евклід (близько 300 р. до н.е.) зібрав і привів у логічну систему весь геометричний матеріал, який був накопичений на той час. При викладі геометрії в «Початках» Евклід в основному дотримується принципів побудови науки за Арістотелем, але не повною мірою.

«Початки» Евкліда складаються з 13 книг. Книги I–VI присвячені планіметрії, VII, VIII, IX – арифметиці в геометричному викладі, у X книзі викладається евдоксова теорія несумірних відрізків, книги XI–XIII присвячені стереометрії.

«Початки» починаються з означень понять, які вперше в них зустрічаються, постулатів і аксіом, після чого йдуть теореми і означення нових понять. Доведення всіх теорем викладається детально, стиль викладу сухий, догматичний.

На початку першої книги наводяться 23 означення, наприклад:

1. Точка є те, що не має частин.
2. Лінія – це довжина без ширини.
3. Пряма лінія є та лінія, яка однаково розміщена відносно всіх своїх точок.
4. Поверхня є те, що має тільки довжину і ширину.
5. Площина є поверхня, яка однаково розміщена відносно всіх прямих, які їй належать.

Після означень даються постулати і аксіоми.

Постулати:

1. Від будь-якої точки до будь-якої іншої можна провести пряму лінію.
2. Кожну обмежену пряму можна неперервно продовжити.
3. З кожної точки, як із центра, можна довільним радіусом описати коло.
4. Усі прямі кути рівні один одному.
5. Якщо пряма при перетині з двома іншими прямими утворює з ними внутрішні односторонні кути, сума яких менша двох прямих кутів, то ці прямі перетинаються з того боку, з якого ця сума менша двох прямих кутів.

Аксіоми:

1. Рівні одному й тому ж є рівними.
2. Якщо до рівних добавити рівні, то дістанемо рівні.
3. Якщо від рівних відняти рівні, то дістанемо рівні.
4. Якщо до нерівних добавити рівні, то дістанемо нерівні.
5. Якщо подвоїти рівні, то дістанемо рівні.
6. Половини рівних рівні між собою.
7. Ті, що суміщаються одне з одним, рівні.
8. Ціле більше частини.
9. Дві прямі не містять простору.

«Початки» відзначаються бездоганною логікою. Вони не є звичайним шкільним підручником, це, скоріше, курс лекцій для вищої школи, який має не практичну мету, а мету філософського характеру. «Початки» вважались необхідними для підготовки до занять філософією.

Задача обґрунтування геометрії була розв'язана Евклідом з тим ступенем точності, який був доступний античному світу. Більше того, надалі протягом багатьох століть строгість евклідових доведень незмінно вважалась еталоном для наслідування.

«Початки» Евкліда відіграли величезну роль в історії математики і всієї світової культури. За ними навчались сотні поколінь учених, вони перекладені на всі основні мови світу і після 1482 р. витримали понад 500 видань. Більшу кількість видань мала тільки Біблія. «Початки» справили надзвичайно великий вплив на подальший розвиток математики та її викладання. До початку XIX ст. всі вивчали геометрію за «Початками» Евкліда. Це свідчить про геніальність і прозорливість Евкліда.

§ 4. Критика системи Евкліда

Евклід першим розв'язав задачу обґрунтування геометрії. У цьому його історична заслуга перед наукою. Логічна будова геометрії була проведена Евклідом для його часу надзвичайно точно. Але з погляду сучасної математики «Початки» Евкліда не є бездоганними. Вони містять ряд недоліків.

1. При введенні означень Евклід не дотримується тих вимог до побудови математичної науки, які висунув Арістотель. Він намагається дати означення всіх понять, не виділяючи основних. Спроба дати означення всіх понять заздалегідь приречена на невдачу, що й вийшло в Евкліда. Так, поняття точки, лінії, прямої, площини визначаються через поняття «частина», «довжина», «ширина», які є значно складнішими від понять точки, лінії. Поняття прямої визначається дуже туманно, під цим означенням можна розуміти, наприклад, коло.

Проте слід відзначити, що властивості геометричних образів, які містяться в «дефектних» означеннях, ніде в доведеннях не використовуються, тому ці означення можна виключити без втрат для викладу.

2. Незрозуміло, у чому полягає відмінність між постулатами і аксіомами. З сучасної точки зору відмінності між постулатами і аксіомами немає, усі вони можуть називатися аксіомами.

3. Деякі аксіоми Евкліда є зайвими, вони можуть бути доведені, виходячи з інших постулатів і аксіом. Наприклад, IV постулат Евкліда може бути доведений, якщо скористатись поняттям руху, який використовується Евклідом при доведенні ознак рівності трикутників, що було помічено ще математиками Стародавньої Греції. Зайвими є також п'ята і шоста аксіоми. Вони є наслідком попередніх аксіом і в багатьох виданнях «Початків» виключаються з числа аксіом.

У формулюванні V постулату міститься зайва вимога, щоб прямі, про які йдеться в постулаті, перетинались з того боку, де сума внутрішніх односторонніх кутів менша двох прямих. Ця вимога може бути доведена за допомогою решти постулатів і аксіом, а тому повинна бути виключена з V постулату.

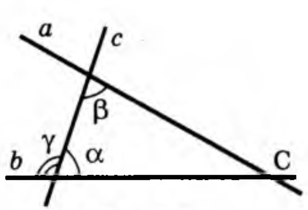


Рис. 1.2

Справді, нехай прямі a і b перетинаються прямою c і виконується вимога першої частини V постулату: $\alpha + \beta < 2d$ (рис. 1.2). Тоді за V постулатом прямі a і b перетинаються в деякій точці C. Доведемо, що кути α і β розміщені з того самого боку, що й точка C. Припустимо, що $\alpha + \beta > 2d$. Але $\alpha + \gamma = 2d$, звідки випливає $\gamma < \beta$, що неможливо, оскільки зовнішній кут трикутника

повинен бути більший внутрішнього кута β, не суміжного з ним (теорема про зовнішній кут трикутника не залежить від V постулату).

4. У системі Евкліда відсутні аксіоми неперервності, з яких випливала неперервність прямих і кіл. У зв'язку з цим Евклід нічим, крім інтуїції і наочності, не обґрунтовує факту існування точок перетину кіл, прямих і кіл. Проте цей недолік був помічений лише в XIX ст.

5. При доведенні теорем про рівність трикутників використовується накладання трикутників, тобто поняття руху. Але Евклід не дає ні означення руху, ні аксіом, які б пояснювали його властивості, приписуючи руху властивості, взяті з емпіричних уявлень про механічний рух твердих тіл. Тут знову Евклід звертається до наочності та інтуїції, що при строгій побудові теорії недопустимо.

6. Серед постулатів і аксіом Евкліда відсутні аксіоми порядку, тобто такі аксіоми, які б пояснювали поняття «лежати між», «лежати по один бік» тощо. На цей недолік системи Евкліда вперше звернув увагу К. Гаусс. Відсутність аксіом порядку змушувала Евкліда при доведенні деяких теорем розглядати різні окремі випадки розміщення фігур за допомогою відповідних рисунків, причому рисунку незаслужено надавалось вирішальне значення в доведенні теорем.

Відзначимо, що вперше аксіоми порядку були розроблені у працях німецького математика Паша в 1882 р.

На недоліки системи Евкліда звернули увагу ще старогрецькі математики. Так, вже Архімед доповнив систему Евкліда знаменитою аксіомою Архімеда: «З двох нерівних величин більша виявиться меншою тієї величини, яку дістанемо, повторивши меншу необхідну кількість разів». Ця аксіома дозволила Архімеду розвинути метричну геометрію, значно поглибивши методи Евкліда, який в «Початках» не торкався питань вимірювання довжин, площ і об'ємів, обмежуючись лише встановленням відношення цих величин (площі двох кругів відносяться як квадрати їх радіусів тощо).

§ 5. Спроби доведення V постулату

Уже після виходу у світ «Початків» Евкліда були помічені деякі недоліки системи Евкліда, з'явились спроби поліпшити викладення «Початків». Проте необхідність доповнити список аксіом «Початків» вбачало дуже мало геометрів, більшість учених намагалась зменшити кількість аксіом і постулатів, довівши їх на основі інших аксіом і постулатів. Так було відкинуто IV постулат.

Особливу увагу дослідників привернув V постулат. Усім здавалось, що його можна, як і IV постулат, вивести як наслідок з інших постулатів і аксіом за допомогою логічних міркувань. Це пояснювалось рядом причин.

1. Твердження, яке міститься в V постулаті, не має такого простого і очевидного характеру, який мають інші постулати.
2. Формулювання V постулату, на відміну від інших, є складним і громіздким.
3. Евклід досить своєрідно використовує V постулат. У той час як всі інші постулати він використовує із самого початку, V постулат застосовується вперше лише при доведенні 29-го твердження. Складається враження, що він намагається спочатку викласти все те, що допускає доведення без V постулату, і відсунути його застосування якомога далі. Можливо, Евклід сам не втрачав надії довести V постулат і відкинути його.

У зв'язку з цим, схиляючись перед строгістю «Початків» і авторитетом Евкліда, всі стали вбачати в V постулаті мало не єдину «темну пляму» евклідової системи, не помічаючи її дійсних «плям». Тому зусилля багатьох поколінь математиків були спрямовані головним чином на те, щоб ліквідувати цю «пляму». Ці зусилля тривали протягом двох тисячоліть.

За розв'язання проблеми V постулату брались математики різних рангів, але всі спроби буди марними. Наскільки значні зусилля різних поколінь учених були витрачені на дослідження V постулату, можна судити з того, що відомо близько 250 серйозних праць, присвячених проблемі V постулату, які так і не досягли поставленої мети.

Перш ніж зупинитися на деяких спробах доведення V постулату, покажемо, що він еквівалентний тій *аксіомі паралельних*, яка наводиться в підручниках середньої школи: «Через кожну точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести одну і тільки одну пряму, паралельну даній». Спочатку доведемо два допоміжні твердження.

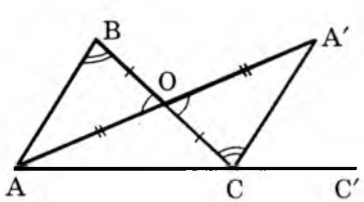


Рис. 1.3

Теорема 1.1. Зовнішній кут трикутника більший будь-якого внутрішнього, не суміжного з ним.

Доведення. Нехай дано ΔABC (рис. 1.3). Покажемо, що його зовнішній кут BCC' більший внутрішніх кутів A, B. Нехай O – середина відрізка BC.

Побудуємо відрізок AO і на його продовженні точку A' так, щоб $AO = OA'$. З'єднаємо точку A' з точкою C і розглянемо ΔAOB й $\Delta A'OC$, які будуть

рівними за першою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle ABC = \angle BCA'$. Оскільки промінь AO лежить усередині кута BAC, то точка A' лежить у тій півплощині з межею AC, що й точка B, отже, $\angle BCA'$ становить частину кута BCC', тому $\angle BCC'$ більший $\angle ABC$. Аналогічно доводиться, що $\angle BCC' > \angle A$.

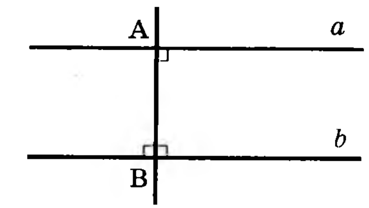


Рис. 1.4

Теорема 1.2. Дві прямі, перпендикулярні третій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай $a \perp AB$, $b \perp AB$ (рис. 1.4). Доведемо, що $a \parallel b$. Припустивши, що $a \nparallel b$, тобто a і b перетинаються в деякій точці C, одержимо ΔABC, зовнішній кут якого при вершині B рівний внутрішньому при вершині A, що суперечить теоремі 1.1. Отже, $a \parallel b$, що й треба було довести.

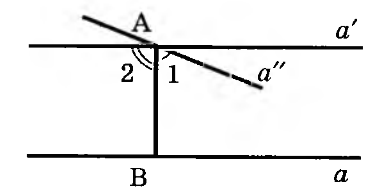


Рис. 1.5

На основі цих тверджень доведемо тепер еквівалентність V постулату аксіомі паралельних.

Теорема 1.3. V постулат Евкліда еквівалентний аксіомі паралельних.

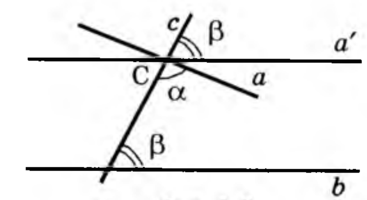


Рис. 1.6

Доведення. 1. Припустимо, що справджується V постулат і доведемо аксіому паралельних. Нехай a – пряма і $A \notin a$ (рис. 1.5). Проведемо $AB \perp a$ і через точку A пряму $a' \perp AB$. За теоремою 1.2 $a' \parallel a$. Покажемо, що пряма a' – єдина пряма, паралельна a. Припустимо супротивне: нехай існує ще одна пряма a'', відмінна від a', яка проходить через точку A і паралельна a. Тоді або $\angle 1$, або $\angle 2$ – гострий і при перетині прямих a'' і a утворюються внутрішні односторонні кути, сума яких менша $2d$, звідки за V постулатом випливає, що a'' перетинає a, що суперечить припущенню.

2. Припустимо, що справджується аксіома паралельних і доведемо, що тоді буде справджуватись і V постулат. Нехай прямі a і b при перетині їх прямою c утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких менша $2d$. (рис. 1.6): $\alpha + \beta < 2d$. Покажемо, що ці прямі перетинаються. Для цього проведемо через точку C перетину прямих a і c пряму a' так, щоб вона утворювала з прямою c кут β. Тоді прямі a' і b паралельні. У противному разі зовнішній кут трикутника дорівнював би його внутрішньому, що суперечить теоремі 1.1. З єдиності

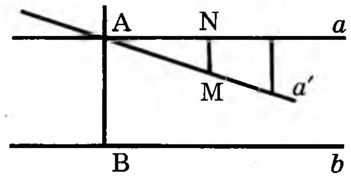


Рис. 1.7

паралельних випливає, що прямі a і b перетинаються, тобто справджується V постулат (відзначимо, що $a' \neq a$, оскільки $\beta \neq 2d - \alpha$).■

Розглянемо тепер деякі спроби доведення V постулату. Найбільш відома з них належить старогрецькому геометру Проклу. Прокл намагався довести V постулат у формулюванні аксіоми паралельних. Він міркував так. Проведемо $a \perp AB$ і $b \perp AB$ (рис. 1.7). Тоді $a \parallel b$. Покажемо, що всяка інша пряма a', відмінна від a, яка також проходять через точку A, перетинає b. Нехай a' проходить, наприклад, усередині кута aAB. Тоді кут aAa' гострий. Тому відстань MN від змінної точки M променя AM до прямої a неперервно зростає в міру віддалення точки M від точки A. Оскільки ж відстань між паралельними прямими a і b обмежена, то в деякий момент відстань MN стане рівною відстані між прямими a і b, і, отже, в цей момент пряма a' перетне b, що й треба було довести.

«Доведення» Прокла ґрунтується на двох твердженнях:

1. Відстань змінної точки сторони гострого кута до другої його сторони неперервно і необмежено зростає в міру віддалення точки від вершини кута.
2. Відстань між паралельними прямими на всій їх довжині залишається сталою.

Перше припущення може бути доведене без використання V постулату. Друге ж твердження, як виявилось, є еквівалентом V постулату. Таким чином, Прокл при «доведенні» V постулату використав його еквівалент, отже, його доведення неправильне. Ця помилка була типовою для більшості спроб доведення V постулату. Наприклад, англійський математик ***Джон Валліс*** (1616–1703) дав своє «доведення» V постулату, спираючись на припущення, що існують подібні, але нерівні трикутники, яке еквівалентне V постулату. Угорський математик ***Фаркаш Бойяї*** (1775–1856) в основу «доведення» V постулату поклав припущення, що через три точки, які не лежать на одній прямій, завжди можна провести коло, що також еквівалентне V постулату.

Усі спроби доведення V постулату мають такі спільні риси:

1) автори «доведень» виходили з упевненості стосовно єдиної можливості і абсолютної істинності V постулату;
2) вони вважали, що твердження, прийняті за аксіоми, повинні бути безпосередньо очевидними, і тому були впевнені, що V постулат можна довести;
3) у всіх «доведеннях» явно чи неявно вводилось якесь інше твердження, яке їм видавалось очевидним, але яке не випливало з інших аксіом. Це – наслідок неповноти системи аксіом Евкліда. Але урахування цього істотного недоліку системи Евкліда до XIX ст. нікому не спадала на думку.

Однак, незважаючи на безрезультатність всіх спроб довести V постулат, вони все ж не були марними. Навпаки, вони відіграли позитивну роль у розвитку геометрії. Унаслідок цих тривалих пошуків були виявлені логічні залежності між деякими важливими геометричними твердженнями. Зокрема, було доведено ряд тверджень, еквівалентних V постулату. Крім тих, що вже згадувалися, такими твердженнями є, наприклад, такі:

1) якщо будь-яка пряма перетинає одну з паралельних прямих, то вона перетинає й другу (Прокл);
2) існують трикутники із сумою кутів $2d$ (Нассір – Еддін);
3) геометричне місце точок, розміщених з одного боку прямої на одній і тій же відстані від неї, є пряма (Посідоній);
4) існують трикутники з якого завгодно великою площею;
5) усі перпендикуляри до однієї сторони гострого кута перетинають його другу сторону.

§ 6. Дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра

Серед досліджень проблеми V постулату виділяються дослідження Саккері, Ламберта і Лежандра у XVIII ст., які найближче підійшли до правильного розв'язання цієї проблеми. Основна ідея їх досліджень полягала в спробі довести V постулат методом від супротивного. Для цього V постулат замінюється протилежним йому твердженням. Тоді, використовуючи змінену в такий спосіб систему аксіом, намагалися прийти до суперечності. Якщо така суперечність буде знайдена, то припущення про істинність твердження, протилежного V постулату, неправильне і, отже, V постулат буде доведеним. Розглянемо на ці дослідження детальніше.

1. Дослідження Саккері.

Джіроламо Саккері (1667–1733), італійський учений, у своїй книзі «Евклід, очищений від будь-яких плям», виданій у 1733 р., розглядає чотирикутник з двома прямими кутами і двома рівними бічними сторонами, який на честь автора зараз називають «чотирикутником Саккері».

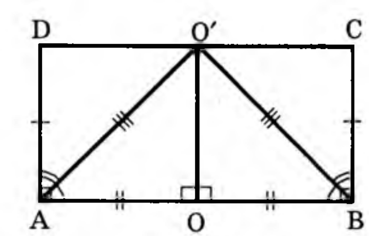


Рис. 1.8

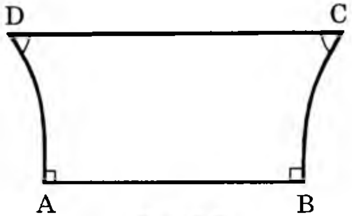


Рис. 1.9

Рис. 1.10

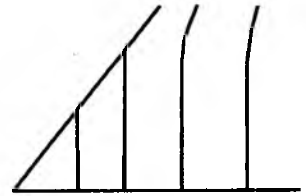


Рис. 1.11

Нехай у чотирикутнику $ABCD$ (рис. 1.8) кути A і B прямі, а сторони AD і BC рівні. Спочатку Саккері доводить, що незалежно від V постулату можна стверджувати, що $\angle C = \angle D$. Справді, поставимо в середині O відрізка AB перпендикуляр OO', який перетне сторону DC у точці O'. Тоді $\Delta AOO' = \Delta BOO'$ за двома катетами, звідки $AO' = BO'$, $\angle O'AO = \angle O'BO$. Тоді і $\angle DAO' = \angle CBO'$ як кути, що доповнюють кути $O'AO$ і $O'BO$ до прямих кутів. Звідси випливає, що $\Delta ADO' = \Delta BCO'$ за першою ознакою рівності трикутників. Отже, дістанемо, що $\angle D = \angle C$.

Тепер відносно кутів C і D можна висунути три гіпотези:

1) обидва кути прямі;
2) обидва кути тупі;
3) обидва кути гострі.

Саккері довів, що гіпотеза прямого кута рівносильна V постулату Евкліда. Отже, щоб довести V постулат, треба відкинути гіпотезу тупого і гострого кута. З цією метою Саккері намагається привести гіпотези тупого і гострого кута до суперечності з тими аксіомами і постулатами, які не містять V постулату.

Прийнявши гіпотезу тупого кута, Саккері відразу приходить до суперечності. Прийнявши гіпотезу гострого кута (рис. 1.9), він доходить висновків, абсурдних з погляду звичних геометричних уявлень. Наприклад, з гіпотези гострого кута випливало, що існують перпендикуляр і похила до однієї й тієї ж прямої, які можуть не перетинатися; що перпендикуляр до однієї сторони гострого кута спочатку перетинає другу сторону, а потім з віддаленням від вершини кута перестає її перетинати (рис. 1.10, 1.11).

Виявилось, що у випадку гіпотези гострого кута геометричне місце точок, рівновіддалених від даної прямої, є крива, що дві паралельні прямі або мають тільки один спільний перпендикуляр, по обидві сторони від якого необмежено розходяться одна від одної, або ж не ма-

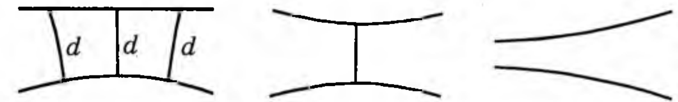


Рис. 1.12

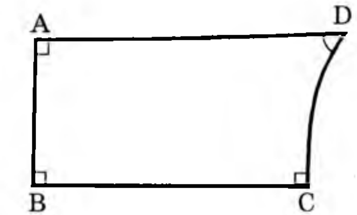


Рис. 1.13

ють жодного і, асимптотично зближаючись в одному напрямку, необмежено розходяться в іншому і т.п. (рис. 1.12).

Саккері справедливо не вбачає в одному лише протиріччі зі звичними просторовими уявленнями логічну неприпустимість цих тверджень. У пошуках логічної суперечності в гіпотезі гострого кута він обчислює двома способами довжину деякої лінії і дістає для неї два різних значення, на основі чого доходить висновку про хибність гіпотези гострого кута і справедливість V постулату. Ця обставина і справді містила б суперечливість, але Саккері прийшов до неї, зробивши помилку ... в обчисленнях.

Значення робіт Саккері в історії розвитку геометрії полягає в тому, що він був піонером у прокладанні нового шляху в дослідженні проблеми V постулату.

2. Дослідження Ламберта.

Іоганн Генріх Ламберт (1728–1777), видатний швейцарський фізик і математик, у своїй праці «Теорія паралельних ліній», виданій в 1766 р., розглядає чотирикутник $ABCD$ із трьома прямими кутами A, B і C (рис. 1.13). Відносно четвертого кута він, як і Саккері, розглядає три гіпотези:

1) гіпотезу прямого кута;
2) гіпотезу тупого кута;
3) гіпотезу гострого кута.

Встановивши еквівалентність гіпотези прямого кута V постулату і звівши до суперечності гіпотезу тупого кута, Ламберт, як і Саккері, більше всього займається гіпотезою гострого кута. Виводячи наслідки з гіпотези гострого кута, він приходить до таких же парадоксальних результатів, як і Саккері. Але, незважаючи на те що гіпотеза гострого кута була розвинута ним досить далеко, Ламберту так і не вдалося знайти в ній суперечностей логічного характеру.

Ламберт виявився послідовнішим за Саккері і ніколи не вважав, що йому вдалося довести V постулат, незважаючи на парадоксальність висловлювань, одержаних з гіпотези гострого кута. Розвиваючи цю гіпотезу, Ламберт виявив аналогію між одержаною ним геометричною системою і геометрією на сфері і висловив правильне припущення про те, що «ця гіпотеза справедлива на якій-небудь уявній сфері».

Ламберт повністю усвідомив усю складність проблеми доведення постулату і всю безрезультатність зроблених до нього в цьому напрямку спроб. Серед геометрів XVIII ст. він ближче всіх стояв до правильного розв'язання проблеми V постулату.

3. Дослідження Лежандра.

Андре Марі Лежандр (1752–1833), великий французький математик, за вихідну фігуру бере трикутник і розглядає три гіпотези відносно суми кутів трикутника:

1) сума кутів трикутника дорівнює $2d$;
2) сума кутів трикутника більша $2d$;
3) сума кутів трикутника менша $2d$.

Він доводить, що перша гіпотеза еквівалентна V постулату, а друга неможлива. Прийнявши третю гіпотезу, приходить до суперечності, неявно використавши в доведенні один з еквівалентів V постулату.

Отже, і Лежандр не розв'язав проблеми V постулату. Але, незважаючи на це, заслуга Лежандра полягає в тому, що, взявши за вихідну фігуру трикутник, він встановив безпосередній зв'язок питання про суму кутів трикутника з V постулатом Евкліда. Книга Лежандра «Початки геометрії», в якій містяться його дослідження V постулату, привернула увагу багатьох математиків XIX ст. до проблеми паралельних (книги Саккері і Ламберта були маловідомими) і сприяла розвитку нових досліджень у цій галузі.

Таким чином, ученим XVIII ст. також, як і їх попередникам, не вдалось розв'язати проблему V постулату Евкліда. Хоча вони пішли трохи далі за своїх попередників, розробивши новий підхід до проблеми, але переконання в безумовній істинності і єдиній можливості V постулату, віра в те, що його можна довести на основі інших постулатів і аксіом Евкліда, завадили їм зробити вирішальний крок. Перед ними відкривалася завіса в новий, незвіданий геометричний світ, однак, будучи в полоні старих уявлень, вони зупинились на півдорозі, сприймаючи нові геометричні факти як міраж.

§ 7. Відкриття неевклідової геометрії

Слід визнати, що труднощі в розв'язанні проблеми паралельних були колосальними. Вони крились і в беззаперечному авторитеті Евкліда, і в нерозробленості основ геометрії, і у звичних просторових уявленнях, підтверджуваних повсякденним досвідом, і у незвичності наслідків гіпотези гострого кута.

Необхідна була геніальність, винятковa наукова сміливість, щоб подолати всі ці труднощі і віднайти на абсолютно новий погляд стосовно проблеми паралельних. Таку геніальність і наукову сміливість виявив великий російський математик М.І. Лобачевський.

Після безрезультатних пошуків, які тривали понад два тисячоліття, проблема V постулату була розв'язана в першій половині XIX ст. майже одночасно і незалежно один від одного трьома вченими – М.І. Лобачевським, Карлом Гауссом і Яношем Бойяї.

Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) спочатку, як і його попередники, намагався безпосередньо довести V постулат. Переконавшись у безрезультатності таких спроб, Лобачевський, подібно Саккері і Ламберту, намагався довести його методом від супротивного, замінивши V постулат протилежним йому твердженням: «Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить на площині принаймні дві прямі, які її не перетинають».

Як і його попередники, Лобачевський сподівався виявити логічну суперечність у системі наслідків із зміненої в такий спосіб системи Евкліда. Однак, розвинувши свою систему до обсягу «Початків», Лобачевський ніде не виявив у ній суперечностей і дійшов геніального висновку про те, що V постулат не може бути виведений як наслідок з решти аксіом і постулатів евклідової геометрії, тобто що він є незалежним від інших постулатів і аксіом.

Не виявивши суперечностей у своїй системі, він робить другий геніальний висновок – про те, що існує інша геометрія, відмінна від геометрії Евкліда, в якій V постулат не має місця. Цю нову геометрію він назвав «уявною геометрією».

На перший погляд, висновок Лобачевського може видатися не досить обґрунтованим. Справді, де гарантія того, що, розвиваючи цю систему далі, ми врешті-решт не прийдемо до протиріччя? Однак це заперечення в однаковій мірі стосується і геометрії Евкліда. Отже, з погляду логічної несуперечливості обидві геометрії рівноправні.

Геніальність Лобачевського полягає в тому, що за тими новими фактами, які випливали із заперечення аксіоми паралельних Евкліда, він побачив не абсурд, не міраж, як вважали Саккері і Ламберт, а новий геометричний світ, нову геометрію, яка має таке ж право на існування, як і геометрія Евкліда, хоча й суперечить нашим звичним просторовим уявленням.

Відкриття Лобачевського було зумовлене і його філософськими поглядами. Він був рішучим противником теорії природжених ідей, повністю відкидав філософію Канта, який розглядав простір і час як апріорні, додосвідні форми свідомості. Лобачевський вважав, що основні поняття і аксіоми геометрії запозичені із зовнішнього світу шляхом чуттєвого сприйняття і практики. І відповідь на те, яка аксіома правильна – аксіома паралельних Евкліда чи її заперечення, яка з геометрій краще відображає властивості простору, – може дати лише практика, досвід. З цією метою Лобачевський проводив вимірювання суми кутів астрономічного трикутника.

Лобачевський розглядав простір не як пусте вмістилище матерії, не як всюди однаковий і однорідний, а як форму існування матерії, де геометричні властивості простору органічно пов'язані з фізичними властивостями матерії. Звідси його думка про те, що в різних сферах простору можуть здійснюватись різні геометрії. Цим самим він прозорливо передбачив сучасні фізичні теорії простору.

Днем народження нової геометрії вважають 11 лютого 1826 року, – день, коли Лобачевський зробив доповідь про відкриття ним нової геометрії на засіданні вченої ради фізико-математичного факультету Казанського університету. Але цю його доповідь ніхто не зрозумів і навіть не намагався зрозуміти, настільки суперечило здоровому глузду те, що розповів Лобачевський.

Лобачевський вперше опублікував свій твір про неевклідову геометрію в 1829 р. і все своє життя вдосконалював це відкриття. Він розробив неевклідову планіметрію, стереометрію, тригонометрію і аналітичну геометрію, публікував свої праці і вперто відстоював їх, незважаючи на насмішки своїх сучасників. За життя Лобачевського його так ніхто й не зрозумів, не підтримав. Навіть видатний український учений Михайло Остроградський жорстоко глузував з теорії Лобачевського.

Трагедія Лобачевського в тому, що він набагато випередив свій час. Він так і помер, не будучи визнаним і зрозумілим своїми сучасниками.

Майже одночасно з Лобачевським до висновку про існування неевклідової геометрії дійшли ще два вчених – Карл Гаусс і Янош Бойяї.

Карл Фрідріх Гаусс (1777–1855), видатний німецький математик, не залишив ніяких слідів систематичного викладу своїх відкриттів у галузі неевклідової геометрії і за життя нічого не опублікував з цього приводу. Всі його думки викладені ним у вигляді окремих висловлювань у листах до друзів. З цих листів видно, що вже в 1816 р. він володів деякими основними ідеями неевклідової геометрії і в подальшому просунувся в розвитку своїх поглядів. Але, боячись втратити свій величезний авторитет в очах вченого світу, не підготовленого до сприйняття нових, надзвичайних ідей, Гаусс не тільки не наважився опублікувати результати своїх досліджень і заборонив друзям розголошувати зміст своїх листів, а й навіть не виявив відкритої моральної підтримки Яношу Бойяї і Лобачевському.

Янош Бойяї (1802–1860), угорський математик, прийшов до відкриття неевклідової геометрії в 1823 р. у 21-річному віці, але опублікував свої результати в 1832 р., через 3 роки після Лобачевського. Не знайшовши розуміння у своїх сучасників, зустрівши стримане ставлення з боку Гаусса, він впав у глибокий відчай. Озлоблений, з манією підозри, що його пріоритет у відкритті нової геометрії присвоєний Гауссом, Я. Бойяї решту свого життя провів у злиднях, невідомості й повній самотності, переживши і Гаусса, і Лобачевського.

Однак усе зроблене в галузі неевклідової геометрії К.Ф. Гауссом і Я. Бойяї – лише перші кроки порівняно з глибокими дослідженнями Лобачевського, який все своє життя вперто розробляв з різних точок зору своє вчення, довів його до високого ступеня досконалості і опублікував цілий ряд великих фундаментальних праць з нової геометрії. Тому як з формального боку (перша за часом публікація в 1829 р.), так і за суттю перше місце серед вчених, які поділили славу створення неевклідової геометрії, безроздільно відвели М.І. Лобачевському, ім'я якого і носить створена ним геометрія.

§ 8. Короткі відомості про життя і діяльність М.І. Лобачевського

Микола Іванович Лобачевський народився 1 грудня (20 листопада) 1792 р. у Нижньому Новгороді в сім'ї бідного чиновника. Батько помер, коли Миколі було 3 роки. Щоб дати дітям – Миколі та його двом братам – освіту, мати привезла їх у Казань. У 1802 р. Микола поступив вчитися у Казанську гімназію, а після її закінчення в 1807 р. був прийнятий до Казанського університету. Після закінчення університету в 1811 р. Лобачевського залишили при університеті для підготовки до професорського звання. У 1814 р. він затверджений ад'юнктом, а в 1816 р. – екстраординарним професором математики.

З 1820 р. Лобачевський – декан фізико-математичного факультету, а в 1827 р. його обирають ректором Казанського університету. У 1846 р. виповнилось 30 років професорської діяльності, і за статутом університету Лобачевський мав іти на пенсію, залишивши роботу в університеті. Деякий час Лобачевський працював помічником попечителя Казанського учбового округу, а потім займався науковою роботою вдома. У 1856 р. М.І. Лобачевський помер.

У перші ж роки своєї педагогічної діяльності Лобачевському довелося читати студентам курс геометрії. Тут його увагу привернув V постулат Евкліда, численні спроби його доведення. Деякий час Лобачевський теж намагався знайти доведення V постулату методом від супротивного.

Замінивши V постулат Евкліда супротивним йому твердженням (через точку, яка не лежить на даній прямій, у площині, що визначається даною точкою і даною прямою, можна провести не менше двох прямих, які не перетинають дану пряму), Лобачевський намагався у наслідках знайти протиріччя. Розвиваючи наслідки з цього припущення, протиріччя він не знайшов і побачив, що перед ним розгортається зовсім інша геометрія – без логічного протиріччя, відмінна в багатьох наслідках від геометрії Евкліда.

24 (11) лютого 1826 р. Лобачевський на засіданні ради фізико-математичного факультету доповідає про відкриття ним нової геометрії, що ґрунтується на всіх аксіомах Евкліда, крім V постулату, замість якого взята його аксіома паралельності, суперечлива з цим постулатом. Проте професори факультету ідей Лобачевського не зрозуміли і рекомендували роботу Лобачевського здати в архів.

З цього часу починається самовіддана вперта боротьба Лобачевського за визнання його відкриття, разом із цим і визнання розв'язання ним проблеми V постулату Евкліда, яка тривала до кінця життя. Починаючи з 1829 р. Лобачевський публікує багато робіт, в яких глибше розробляє свою геометрію, шукає її застосування в обчисленні означених інтегралів. Він удосконалює своє відкриття, створює неевклідову планіметрію, тригонометрію, стереометрію і аналітичну геометрію, шукає шляхи до найбільш популярного викладу своїх ідей. Ось перелік його основних творів з нової геометрії:

1. «О началах геометрии» (1829–1830).
2. «Воображаемая геометрия» (1835).
3. «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам» (1836).
4. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835–1838).
5. «Геометрические исследования по теории параллельных» (1840).
6. «Пангеометрия» (1855).

Контрольні запитання

1. Чому не можна довести всі без винятку геометричні твердження і дати означення всім геометричним поняттям?
2. Які поняття в геометрії називаються основними? Які твердження називаються аксіомами?
3. Що таке означення, теорема?
4. Що слід розуміти під терміном «обґрунтування геометрії»?
5. Що являла собою геометрія Стародавнього Сходу?
6. Які основні досягнення геометрії в Стародавній Греції?
7. Чому виникла потреба логічного обґрунтування геометрії? Хто із стародавніх учених вперше поставив таке завдання?
8. Охарактеризуйте зміст «Початків» Евкліда.
9. Сформулюйте аксіоми і постулати Евкліда.
10. Назвіть основні недоліки системи Евкліда.
11. Сформулюйте V постулат Евкліда. Яка частина цього постулату виявилась зайвою?
12. Чому саме V постулат Евкліда викликав найбільший інтерес у дослідників «Початків»? Чому виникло тверде переконання, що його можна довести на основі інших постулатів і аксіом Евкліда?
13. Доведіть, що V постулат Евкліда еквівалентний аксіомі паралельних. Які допоміжні твердження для цього треба використати?
14. Чому багатовікові спроби довести V постулат не мали успіху? Яка типова помилка припускалась багатьма вченими? Проілюструйте це на прикладі «доведення» V постулату Проклом.
15. Наведіть приклади тверджень, еквівалентних V постулату.
16. Чим відрізнялись дослідження проблеми V постулату вченими XVIII ст. Саккері, Ламбертом і Лежандром від досліджень їхніх попередників?
17. Розкрийте суть міркувань Саккері. Чи вдалося йому розв'язати проблему V постулату?

18. Проаналізуйте міркування Ламберта. Як близько він підійшов до правильного розв'язання проблеми V постулату?
19. Яким чином намагався розв'язати проблему V постулату французький математик Лежандр? У чому полягає його основна заслуга?
20. Яким чином була розв'язана проблема V постулату К. Гауссом, Я. Бойяї та М.І. Лобачевським? Чому пріоритет у розв'язанні цієї проблеми та створенні неевклідової геометрії було беззаперечно віддано М.І. Лобачевському?

Розділ **2**

Елементи геометрії Лобачевського

§ 9. Абсолютна геометрія і аксіома Лобачевского

У розділі 1 було показано, що в геометрії Евкліда є ряд тверджень, які не залежать від V постулату.

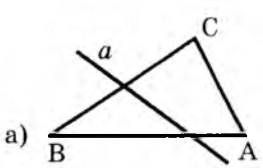
Сукупність всіх таких тверджень, які можна довести без використання V постулату, або еквівалентних йому тверджень, називають *абсолютною геометрією*. Цей термін вперше ввів ***Янош Бойяї***.

До абсолютної геометрії належать, наприклад, три ознаки рівності трикутників, теореми про зовнішній кут трикутника, про рівність прямих кутів, про рівність вертикальних кутів, про те, що сума двох суміжних кутів дорівнює 180°, сума двох сторін трикутника більша третьої, перпендикуляр коротший за похилу, гіпотенуза прямокутного трикутника більша катета, про те, що дві прямі, перпендикулярні третій, не перетинаються, що сума кутів трикутника не перевищує 180° і т.д.

Наведемо як приклад доведення одного твердження абсолютної геометрії, відомого під назвою *теореми Паша*.

Теорема Паша. Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін.

Доведення. Нехай пряма a не проходить через жодну з вершин трикутника ABC і перетинає його сторону AB (рис. 1.14). Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Точки A і B лежать в різних півплощинах, оскільки відрізок AB перетинає пряму a. Точка C лежить в одній з цих півплощин.

а) 

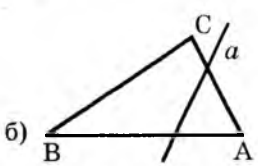
б) 

Рис. 1.14

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою A, то відрізок AC не перетинає прямої a, а відрізок BC перетинає цю пряму (рис. 1.14а).

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою B, то відрізок AC перетинає пряму a, відрізок BC не перетинає її (рис. 1.14б). В обох випадках пряма a перетинає тільки один з відрізків – AC або BC.

Теорему доведено. ■

Система аксіом «Початків» Евкліда не була повною, тому при доведенні деяких тверджень Евклід і його послідовники користувались очевидністю рисунка. Лобачевський при розв'язанні проблеми V постулату і створенні неевклідової геометрії міг використовувати тільки той матеріал, який був у «Початках» Евкліда. Тому у своїх творах Лобачевський не дає повного переліку аксіом геометрії, бо його на той час ще не було, замість аксіом він формулює список тверджень, які використовує при розгортанні своєї геометрії. Це були твердження абсолютної геометрії. Отже, абсолютна геометрія є спільною частиною геометрії Евкліда і геометрії Лобачевського, усі твердження абсолютної геометрії мають місце і в геометрії Лобачевського.

В основі геометрії Лобачевського лежать всі твердження абсолютної геометрії і аксіома Лобачевського.

Аксіома Лобачевського. Через точку, взяту зовні прямої, у площині, що ними визначається, можна провести не менше двох прямих, які не перетинають дану пряму.

Площину і простір, де разом з абсолютною геометрією виконується аксіома Лобачевського та наслідки з неї, називають відповідно *площиною* і *простором Лобачевського.*

Геометрію Лобачевського ще називають *гіперболічною* геометрією (відповідно *гіперболічною площиною і гіперболічним простором).*

Твердження, які є наслідками аксіом Лобачевського, значною мірою відрізняються від аналогічних тверджень евклідової геометрії. Розглянемо деякі з них.

§ 10. Паралельні прямі на площині Лобачевського

З аксіоми Лобачевського відразу випливає, що через дану точку, взяту зовні даної прямої, можна провести безліч прямих, які її не перетинають. Справді, нехай через точку M проходять дві прямі AA' і BB', які не перетинають прямої a, їх існування забезпечується аксіомою Лобачевського (рис. 1.15).

Тоді, очевидно, всі прямі, які проходять всередині вертикальних кутів AMB і $A'MB'$, не перетинають a (якби якась пряма c, що лежить всередині AMB, перетинала a в точці K, то MB лежала б всередині кута OMK і перетинала б a).

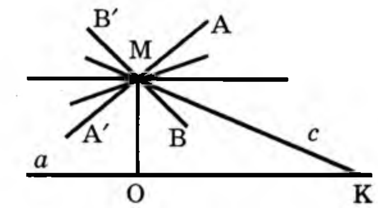


Рис. 1.15

Серед цих прямих Лобачевський виділяє дві спеціальні прямі, які й називає паралельними до даної. Опустимо з точки M перпендикуляр на $C'C$ ($MP \perp C'C$) і проведемо через точку M пряму $DD' \perp MP$. Прямі DD' і $C'C$ не перетинаються (рис. 1.16). Розглянемо пучок променів, які виходять з точки M і розміщені всередині кута DMP. Ці промені можна розбити на два класи: промені, які не перетинають пряму $C'C$, і промені, які її перетинають. Промені першого класу будуть розміщені вище променів другого класу.

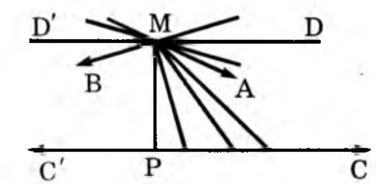


Рис. 1.16

У такому випадку існує єдиний граничний промінь MA, який розділяє обидва класи променів: усі промені, які лежать вище цього променя, належать до першого класу, а всі промені, які лежать нижче MA, належать до другого класу. Промінь MA сам належить до першого класу, тобто не перетинає $C'C$.

Дійсно, якби промінь MA перетинав $C'C$ в деякій точці N (рис. 1.17), то, взявши на промені PC точку N_1, яка лежить правіше N, ми одержали б промінь MN_1, який перетинає $C'C$ і лежить вище MA, що неможливо, оскільки всі промені, які лежать вище MA, не перетинають $C'C$. Гранична пряма MA, яка не перетинає прямої $C'C$, за Лобачевським, і називається *паралельною прямою $C'C$ у точці M у напрямі PC* (рис. 1.16).

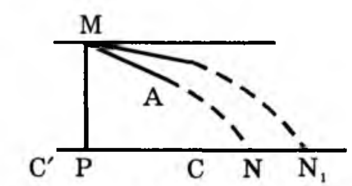


Рис. 1.17

Із міркувань симетрії випливає, що існує граничний промінь MB, який розміщений всередині кута $D'MP$ і не перетинає $C'C$. Цей промінь симетричний променю MA відносно прямої MP. Пряма MB, яка містить цей промінь, називається *паралельною прямій $C'C$ в точці M у напрямі PC'.*

Таким чином, за Лобачевським, через дану точку M можна провести дві прямі, паралельні до даної прямої: одна з них паралельна до даної прямої в одному напрямі, а друга – у протилежному. На рис. 1.16 напрям паралельності зображено стрілками. Можна сказати, що на

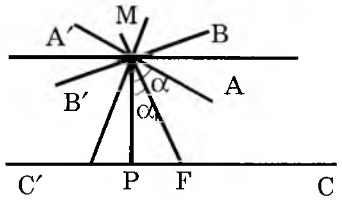


Рис. 1.18

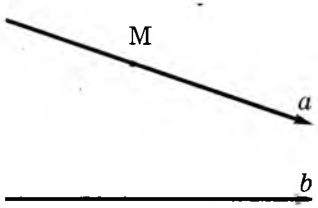


Рис. 1.19

площині Лобачевського через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній прямій у даному напрямі.

Ми прийшли до такої картини розміщення прямих пучка із центром у точці M (рис. 1.18). У цьому пучку існують дві граничні прямі $A'A$ і $B'B$, симетричні відносно перпендикуляра MP. Ці прямі, а також прямі, які проходять всередині вертикальних кутів AMB і $A'MB'$, не перетинають $C'C$, а всі прямі, які проходять всередині вертикальних кутів $A'MB$ і AMB', перетинають цю пряму. Граничні прямі $A'A$ і $B'B$ є паралельними до CC', усі інші прямі, які не перетинають $C'C$ і знаходяться всередині вертикальних кутів $A'MB'$ і AMB, називаються *розбіжними* відносно прямої $C'C$. Ті ж прямі, які перетинають пряму $C'C$ (вони знаходяться всередині кутів $A'MB$ і AMB), називаються *збіжними* відносно прямої $C'C$.

Отже, на відміну від евклідової площини, де прямі діляться на два класи, паралельні і ті, що перетинають дану пряму, у площині Лобачевського прямі пучка діляться на три класи по відношенню до даної прямої: паралельні, розбіжні і збіжні.

Означення паралельності однієї прямої відносно іншої на площині Лобачевського дається локально для однієї точки в даному напрямку. Можна довести, що коли $a \parallel b$ в якій-небудь своїй точці M, то вона буде паралельна b у тому ж напрямі і у всякій іншій своїй точці (рис. 1.19).

Відношення паралельності в геометрії Лобачевського, як і в евклідовій геометрії, має властивості симетричності і транзитивності, а саме: якщо $a \parallel b$ в даному напрямі, то й $b \parallel a$ в тому ж напрямі; якщо $a \parallel b$, а $b \parallel c$, то й $a \parallel c$.

Кут α, який утворюють паралельні MA і MB' з перпендикуляром MP, називається *кутом паралельності* в точці M відносно прямої $C'C$. Цей кут для довільної точки M і будь-якої прямої $C'C$ є гострим: $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Дійсно, взявши довільну точку F на прямій $C'C$, відмінну від P (рис. 1.18), ми одержимо пряму MF, яка перетинає $C'C$ і утворює з MP кут $\alpha_1 > 0$, звідки випливає, що $\alpha > \alpha_1 > 0$. З іншого боку, якби $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то виходило б, що через дану точку M проходить тільки одна пряма, яка не перетинає $C'C$, що суперечить аксіомі Лобачевського.

Отже геометрію Евкліда можна розглядати як граничний випадок геометрії Лобачевського, коли кут паралельності $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

§ 11. Властивості прямих на площині Лобачевського

В евклідовій площині відстань між паралельними прямими є величиною сталою. Ця властивість у площині Лобачевського не зберігається. Тут має місце така теорема.

Теорема 2.1. Дві паралельні прямі на площині Лобачевського асимптотично зближаються в бік їх паралельності і необмежено розходяться в протилежний бік.

Доведення. Нехай $a \parallel b$ (рис. 1.20). Візьмемо $M \in b$ і проведемо $MP \perp a$.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Відкладемо на MP відрізок $NP = \varepsilon$. Візьмемо довільну точку Q на відрізку NP і через цю точку проведемо прямі $c' \parallel a$ і $c \parallel a$ у протилежних напрямах. Тоді за властивістю транзитивності паралельності $c \parallel b$. Оскільки точка Q лежить нижче точки M і пряма c' утворює з MP гострий кут (як кут паралельності), то c' перетне b в деякій точці R. Відкладемо на прямій b вправо $RM_1 = RQ$ і проведемо $RS \perp a$, $M_1P_1 \perp a$. Тоді $\Delta QRS = \Delta M_1RS$ за першою ознакою рівності трикутників ($QR = RM_1$ за побудовою, RS – спільна, $\angle QRS = \angle SRM_1$ як кути паралельності). Звідси випливає, що $QS = M_1S$, $\angle QSR = \angle M_1SR$. Тоді $\Delta PQS = \Delta P_1M_1S$ за гіпотенузою і гострим кутом ($\angle QSP = \angle M_1SP_1$ як кути, що доповнюють рівні кути до прямого). Звідси випливає, що $M_1P_1 = PQ < \varepsilon$.

Отже, яким би не було малим число $\varepsilon > 0$, існує така точка M_1 на прямій b, що $M_1P_1 < \varepsilon$, тобто прямі a і b асимптотично зближаються в бік їх паралельності. ■

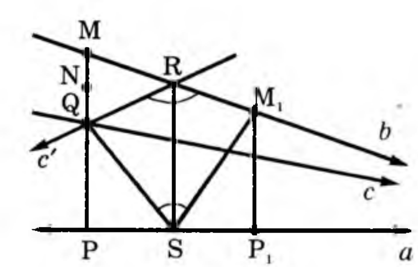


Рис. 1.20

Аналогічно можна довести, що прямі a і b безмежно розходяться в напрямі, протилежному напряму паралельності.

В евклідовій площині дві паралельні прямі мають безліч спільних перпендикулярів. У площині Лобачевського нічого подібного не спостерігається. Тут має місце така теорема.

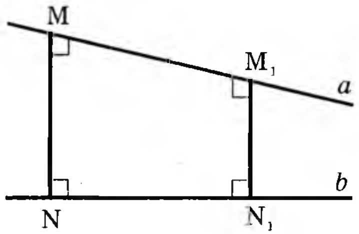


Рис. 1.21

Теорема 2.2. У площині Лобачевського збіжні і паралельні прямі не мають спільного перпендикуляра, а розбіжні прямі можуть мати лише один спільний перпендикуляр.

Доведення. Припустимо, що деякі дві прямі a і b мають спільний перпендикуляр MN (рис. 1.21). Ці прямі не можуть бути збіжними, бо тоді існував би трикутник з двома прямими кутами, що суперечить абсолютній геометрії.

Ці прямі не можуть бути й паралельними, бо тоді кут паралельності був би прямим, що в геометрії Лобачевського неможливо. Отже, якщо прямі a і b мають спільний перпендикуляр, то вони можуть бути тільки розбіжними.

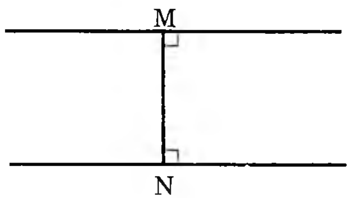


Рис. 1.22

Покажемо, що розбіжні прямі можуть мати лише один спільний перпендикуляр. Припустимо, що прямі a, b, крім MN, мають ще один спільний перпендикуляр M_1N_1 (рис. 1.21). Тоді сума кутів чотирикутника MM_1N_1N дорівнює $4d$, а це еквівалентно V постулату, який у геометрії Лобачевського не виконується. Прийшли до суперечності. Отже, якщо розбіжні прямі і мають спільний перпендикуляр, то цей перпендикуляр єдиний.

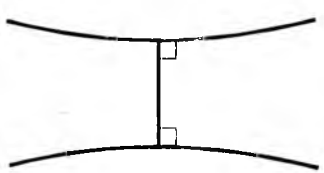


Рис. 1.23

Прикладом розбіжних прямих, які мають спільний перпендикуляр, є дві прямі, перпендикулярні третій (рис. 1.22). Можна показати, що дві розбіжні прямі завжди мають спільний перпендикуляр, по обидва боки від якого необмежено розходяться (рис. 1.23).

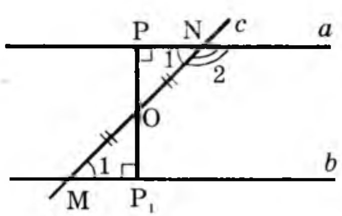


Рис. 1.24

Відомо, що коли в евклідовій площині при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $2d$, то ці прямі паралельні. Виявляється, що в площині Лобачевського такі прямі будуть розбіжними. Дійсно, нехай прямі a і b перетинаються прямою c і при цьому $\angle 1 + \angle 2 = 2d$ (рис. 1.24). Тоді, провівши через середину O відрізка MN перпендикуляри $OP \perp a$ і $OP_1 \perp b$, дістанемо рівні трикутники:

$$\Delta OPN = \Delta OP_1M$$

(як прямокутні з рівними гострими кутами), звідки випливає, що $\angle PON = \angle P_1OM$. А це означає, що PP_1 – спільний перпендикуляр до прямих a і b. Тому прямі a і b розбіжні. Отже, при перетині двох паралельних прямих третьою на площині Лобачевського сума внутрішніх односторонніх кутів не може дорівнювати $2d$: вона менша $2d$ для кутів, розміщених від третьої прямої в бік паралельності, і більша $2d$ в протилежний бік (рис. 1.25).

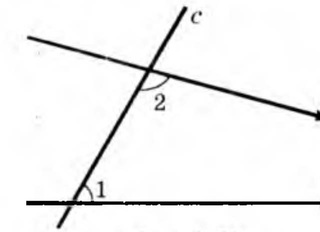


Рис. 1.25

Як бачимо, властивості прямих на площині Лобачевського докорінно відрізняються від властивостей прямих на площині Евкліда. На перший погляд, вони суперечать здоровому глузду. Але це тільки на перший погляд. Ми повинні усвідомлювати, що прямі в площині Лобачевського – зовсім не ті прямі, до яких ми звикли на евклідовій площині. Факти геометрії Лобачевського суперечать нашим звичним просторовим уявленням, але з точки зору логіки вони бездоганні.

Розглянемо ще один факт геометрії Лобачевського, який викликав особливі нападки з боку сучасників Лобачевського.

§ 12. Функція Лобачевського

Розглянемо властивості кута паралельності. Перш за все з'ясуємо, чи змінюється кут паралельності зі зміною довжини перпендикуляра p (рис. 1.26).

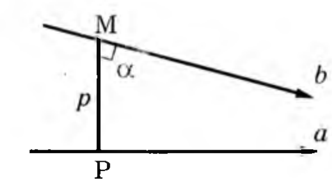


Рис. 1.26

Нехай $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1P \perp a$, $M_2P \perp a$, $M_1P = p_1$, $M_2P = p_2$, $p_1 < p_2$ (рис. 1.27). Оскільки $b_1 \parallel b_2$, то $\alpha_2 + \beta < 2d$. З іншого боку, $\alpha_1 + \beta = 2d$. Звідси випливає, що $\alpha_2 < \alpha_1$. Таким чином, із зростанням p кут паралельності зменшується.

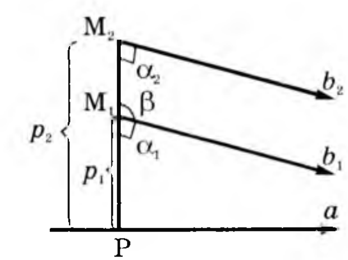


Рис. 1.27

Можна показати, що значення кута паралельності α при даному значенні p не залежить від вибору прямої a і точки P на ній, тобто для даного значення p кут паралельності α матиме цілком визначене одне й те ж значення, де б ми в площині Лобачевського не взяли пряму і точку на ній. Справді, нехай a_1 і a_2 – дві довільні прямі, P_1 і P_2 – довільні точки цих прямих (рис. 1.28).

Поставимо в цих точках перпендикуляри до даних прямих і відкладемо на них відрізки $P_1M_1 = P_2M_2 = p$.

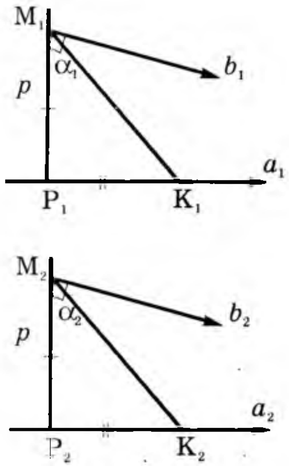


Рис. 1.28

Через точки M_1 і M_2 проведемо прямі $b_1 \parallel a_1$ і $b_2 \parallel a_2$. Нехай α_1 і α_2 – відповідні кути паралельності. Припустимо, що $\alpha_1 \neq \alpha_2$, наприклад, $\alpha_1 > \alpha_2$. Тоді, відклавши $\angle P_1M_1K_1 = \alpha_2$, одержимо промінь M_1K_1, який проходить всередині кута $P_1M_1b_1$ і, отже, перетинає a_1 у точці K_1.

Відкладемо на прямій a_2 $P_2K_2 = P_1K_1$. Тоді $\Delta P_1M_1K_1 = \Delta P_2M_2K_2$ за двома катетами, звідки випливає, що $\angle P_2M_2K_2 = \alpha_2$, тобто промінь M_2K_2 збігається з b_1, що неможливо, оскільки M_2K_2 перетинає a_2, а b_2 не перетинає. Отже, нерівність $\alpha_1 > \alpha_2$ неможлива. Аналогічно доводиться неможливість нерівності $\alpha_1 < \alpha_2$. Отже, $\alpha_1 = \alpha_2$, що й треба було довести. ■

Таким чином, ми дійшли висновку, що кожному значенню p відповідає цілком визначене значення кута паралельності α, тобто α є функцією p з областю існування $0 < p < \infty$. Ця функція позначається $\alpha = \Pi(p)$ і називається ***функцією Лобачевського.***

М.І. Лобачевський знайшов аналітичну формулу для функції $\Pi(p)$:

$$\alpha = \Pi(p) = 2arctge^{-\frac{p}{k}},$$

де k – деяка додатна стала. Аналізуючи цю формулу, дістанемо

$$\lim_{p \to 0} \alpha = 2arctg1 = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{p \to 0} \alpha = 2arctg0 = 0.$$

Це означає, що при досить малих p кут паралельності $\alpha \approx \frac{\pi}{2}$. Тому при досить малих p простір Лобачевського як завгодно мало відрізняється від простору Евкліда, і, отже, евклідову геометрію можна розглядати як граничний випадок геометрії Лобачевського, коли $p \to 0$, тобто при малих розмірах.

Є ще один випадок, коли простір Лобачевського перетворюється в евклідів. Розглянемо сталу k у формулі Лобачевського. Ця стала може набувати будь-яких значень від 0 до ∞, і для кожного такого значення буде існувати свій простір Лобачевського. Ці простори будуть відрізнятись один від одного ступенем відхилення від евклідового простору. Дійсно,

$$\lim_{k \to \infty} \Pi(p) = \frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{k \to 0} \Pi(p) = 0.$$

Тому чим більше k, тим менше простір Лобачевського буде відрізнятись від евклідового.

Виявляється, що стала k – це радіус кривини простору Лобачевського. Отже, простір Лобачевського буде тим ближчий до евклідового, чим більший його радіус кривини, тобто чим менша його кривина.

Наявність функції Лобачевського, яка встановлює зв'язок між кутами і відрізками, вказує на суттєву відмінність геометрії Лобачевського від геометрії Евкліда. На евклідовій площині немає такої функції, яка б пов'язувала відрізки з кутами. Цим пояснюється та обставина, що в евклідовій геометрії за наявності природної одиниці міри кутів (радіан) доводиться спеціально зберігати еталон довжини (метр), у той час як у просторі Лобачевського в цьому немає потреби. Тут за одиницю довжини можна взяти відрізок, який відповідає певному куту паралельності.

Відзначимо ще деякі властивості трикутників на площині Лобачевського.

§ 13. Властивості трикутників на площині Лобачевського

Як показав Лежандр, твердження, що сума кутів трикутника дорівнює $2d$, еквівалентне V постулату. Тому на площині Лобачевського сума кутів трикутника не може бути рівною $2d$. Вона не може бути й більшою $2d$, бо це суперечить абсолютній геометрії. Тому на площині Лобачевського сума кутів трикутника менша $2d$.

Виникає запитання: якому ж тоді конкретному числу дорівнює сума кутів трикутника на площині Лобачевського? Виявляється, що такого конкретного числа для всіх трикутників у геометрії Лобачевського просто не існує. Тут справджується така теорема.

Теорема 2.3. Сума кутів трикутника в геометрії Лобачевського є величина змінна і залежить від форми і розмірів трикутника.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що сумою кутів трикутника на площині Лобачевського є деяка стала

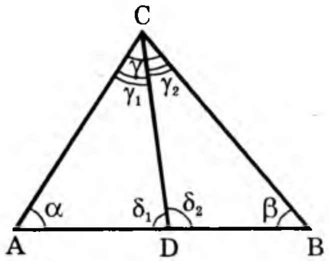


Рис. 1.29

величина m. Розглянемо ΔABC з кутами α, β, γ (рис. 1.29). Тоді $\alpha + \beta + \gamma = m$.

Візьмемо на стороні AB довільну точку D і з'єднаємо її з точкою C. ΔABC розіб'ється на два трикутники: ΔACD з кутами α, γ_1, δ_1 і ΔDCB з кутами β, γ_2, δ_2.

Тоді за припущенням $\alpha + \gamma_1 + \delta_1 = m$, $\beta + \gamma_2 + \delta_2 = m$. Додавши ці рівності, дістанемо

$$\alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2) = 2m;$$

$$\alpha + \beta + \gamma + 2d = 2m;$$

$$m + 2d = 2m,$$

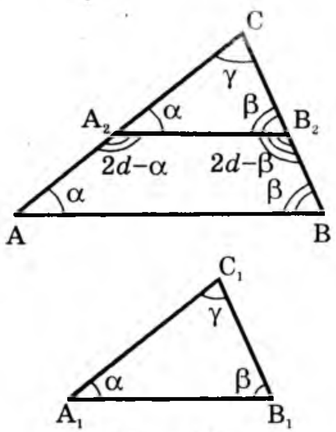


Рис. 1.30

звідки $m = 2d$, що суперечить попередньому висновку про те, що сума кутів трикутника в геометрії Лобачевського менша $2d$. Отже, сума кутів трикутника на площині Лобачевського не може бути сталою, а є величиною змінною. Вона залежить від форми і розмірів трикутника.■

Різниця між числом π і сумою кутів трикутника називається *кутовим дефектом* трикутника, її позначають $D(\Delta)$.

Отже, $D(\Delta) = \pi - s(\Delta)$, де $s(\Delta)$ – сума кутів трикутника.

У геометрії Евкліда кутовий дефект трикутника дорівнює нулю, а в геометрії Лобачевського кутовий дефект – змінна додатна величина, змінюється в межах від нуля до π.

Можна довести, що в геометрії Лобачевського *площа трикутника пропорційна кутовому дефекту.*

Виявляється, що на площині Лобачевського не існує подібних нерівних трикутників.

Теорема 2.4. На площині Лобачевського не існує подібних нерівних трикутників.

Доведення. Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що існують два подібних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності, відмінним від одиниці. Нехай, наприклад, ΔABC більший $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 1.30).

З подібності цих трикутників випливає рівність їх відповідних кутів. Відкладемо на стороні AC ΔABC відрізок $CA_2 = C_1A_1$ і через

точку A_2 проведемо пряму A_2B_2 так, щоб вона утворювала зі стороною AC кут α. За теоремою Паша пряма A_2B_2, перетинаючи сторону AC ΔABC, перетне ще одну сторону цього трикутника. Перетнути сторону AB вона не може, бо вона розбігається відносно неї. Отже, пряма A_2B_2 перетне сторону BC у точці B_2.

$\Delta A_2B_2C = \Delta A_1B_1C_1$ за стороною і двома прилеглими кутами, звідки випливає, що $\angle CB_2A_2 = \angle C_1B_1A_1 = \beta$. Тоді в чотирикутнику AA_2B_2B сума внутрішніх кутів $\alpha + \beta + (2d - \alpha) + (2d - \beta) = 4d$, що в площині Лобачевського неможливо. Прийшли до суперечності, яка й доводить теорему.■

З цієї теореми, як наслідок, випливає таке твердження:

якщо на площині Лобачевського три кути одного трикутника відповідно дорівнюють трьом кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Ця теорема дає нову, четверту ознаку рівності трикутників, якої нема в абсолютній геометрії і в геометрії Евкліда.

Теорема 2.5. У площині Лобачевського не навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

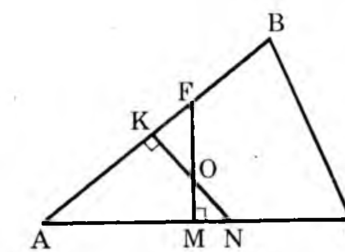


Рис. 1.31

Доведення. У геометрії Евкліда навколо будь-якого трикутника можна описати коло, центром якого є точка перетину перпендикулярів, проведених до сторін трикутника через їх середини. Існування такої точки перетину доводиться на основі V постулату Евкліда. Отже, це твердження *еквівалентне* V постулату.

Справді, нехай маємо трикутник ABC, в якому K і M – середини сторін AB і AC відповідно (рис. 1.31). Проведемо через точки K і M перпендикуляри $KN \perp AB$ і $MF \perp AC$. Тоді кут ANK– гострий (з ΔANK), а кут FMN – прямий, тому сума $\angle ANK +$ + Р$\angle FMN < 180^\circ$ і за V постулатом прямі перетинаються в точці O, яка є центром описаного кола.

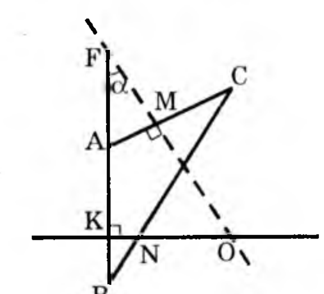


Рис. 1.32

На площині Лобачевського існування точки O перетину серединних перпендикулярів KN і MF сторін AB і AC залежить від величини кута $KFM = \alpha$, який є функцією відрізка KF, а саме функцією Лобачевського: $\alpha = \Pi(KF)$. Точка O існує лише тоді, коли $\alpha < \Pi(KF)$, при $\alpha = \Pi(KF)$ прямі KN і MF паралельні, а при $\alpha > \Pi(KF)$ – розбіжні (рис. 1.32).

Теорему доведено.■

§ 14. Поняття про еквідистанту

Нехай на площині маємо якусь пряму a і на ній декілька точок A_1, B_1, C_1, D_1. Проведемо через ці точки прямі, перпендикулярні до прямої a, відкладемо на них рівні відрізки $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ від прямої a (рис. 1.33).

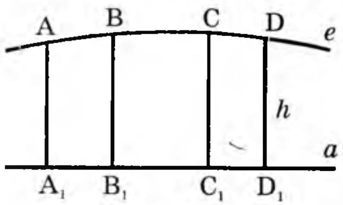


Рис. 1.33

З'єднавши точки A, B, C, D,... гладкою лінією, дістанемо якусь лінію, усі точки якої рівновіддалені від прямої a.

Означення 2.1. Геометричне місце точок площини, розміщених по один бік від прямої a на однакових відстанях від неї, називається *еквідистантою*. Позначимо її через e.

Параметрами еквідистанти, що її повністю визначають, є пряма a – *база* еквідистанти і відстань h її точок від бази a – *висота* еквідистанти. Кожну пряму на площині можна розглядати як еквідистанту *нульової* висоти ($h = 0$).

На евклідовій площині еквідистантою даної висоти h є *пряма*, паралельна даній прямій a і віддалена від неї на h. Твердження, що точки прямої a_1, паралельної прямій a, рівновіддалені від прямої a, еквівалентне V постулату Евкліда.

На площині Лобачевського не існує двох прямих, відстань між точками яких була б сталою величиною. Тому еквідистанта на площині Лобачевського – це *опукла крива лінія*, що випливає з розглянутих далі її властивостей.

До однієї прямої a – бази можна побудувати безліч еквідистант, змінюючи значення висоти h.

Основні властивості еквідистант

1. Еквідистанта може рухатись сама по собі не деформуючись. Справді, при зміщенні площини по прямій a кожна точка еквідистанти з базою a переміщується так, що її відстань від a залишається без змін. Отже, ця точка при русі в площині Лобачевського залишається весь час на еквідистанті. Еквідистанту можна розглядати як лінію, одержану в результаті руху точки в площині Лобачевського – зміщення по прямій.

2. Кожна пряма з еквідистантою може мати не більше двох спільних точок.

Доведення цієї властивості проведемо методом від супротивного. Припустимо, що пряма b перетинає еквідистанту в трьох точках A, B, C. Опустимо з цих точок перпендикуляри на базу a, їх основи A_1, B_1, C_1. Тоді $AA_1 = BB_1 = CC_1 = h$, тому чотирикутники A_1ABB_1 і B_1BCC_1 – чотирикутники Саккері, кути при верхній основі завжди гострі і рівні: $\angle A_1AB = \angle B_1BA = \alpha < 90^\circ$ і $\angle B_1BC = \angle C_1CB = \beta < 90^\circ$. Сума $\alpha + \beta < 180^\circ$, тому точки A, B, C не можуть лежати на одній прямій (рис. 1.34).

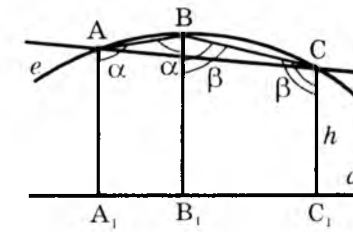


Рис. 1.34

3. Еквідистанта в площині Лобачевського – опукла крива лінія, опуклістю напрямлена в сторону від бази a.

Доведення. Нехай маємо еквідистанту e з базою a і висотою h (рис. 1.35). Візьмемо на еквідистанті дві довільні точки A, B і опустимо з них перпендикуляри-висоти на базу a: $AA_1 \perp a$ і $BB_1 \perp a$. Оскільки $AA_1 = BB_1 = h$, то A_1ABB_1 – чотирикутник Саккері. Через середину C_1 нижньої основи A_1B_1 проведемо перпендикуляр до a. Нехай він перетинає еквідистанту в точці C, а відрізок AB – у точці N. Покажемо, що перпендикуляр C_1N є спільним перпендикуляром обох основ чотирикутника A_1ABB_1 Саккері. Провівши діагоналі A_1N і B_1N чотирикутників A_1ANC_1 і B_1BNC_1, дістанемо рівні прямокуті трикутники NA_1C_1 і NB_1C_1 (NC_1 – спільна, $A_1C_1 = C_1B_1$), тому $A_1N = B_1N$. Тоді будуть рівними і трикутники A_1AN та B_1BN ($AA_1 = BB_1$, $\angle A = \angle B$, $\angle AA_1N = \angle BB_1N$), звідки випливає рівність $AN = NB$. Крім того, $\angle ANC_1 = \angle BNC_1$. Отже, $C_1N \perp AB$, тому прямі AB і A_1B_1 розбіжні, C_1N – найменша відстань між ними: $C_1N < AA_1 = CC_1$, тобто точка C лежить вище точки N. Звідси й випливає, що еквідистанта – опукла крива лінія, опуклістю напрямлена в сторону від бази a.■

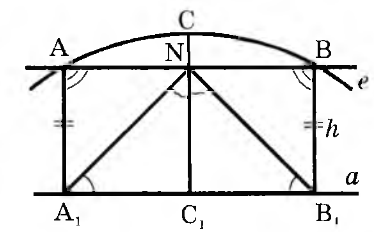


Рис. 1.35

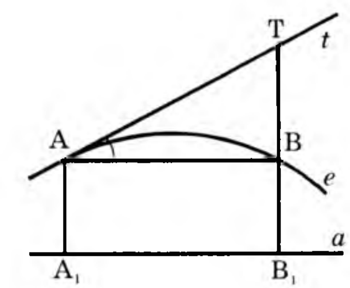


Рис. 1.36

Сформулюємо без доведення ще такі дві властивості.

4. Дотична до еквідистанти перпендикулярна до висоти, проведеної через точку дотику (рис. 1.36).

5. Усі точки еквідистанти розміщені по один бік від дотичної, проведеної через довільну її точку A, в сторону бази a.

Справедливість цієї властивості випливає з попередньої: відрізок BB_1 має сталу величину h, а відрізок B_1T збільшується по обидві сторони від висоти AA_1 (рис. 1.36).

§ 15. Поняття про орицикл

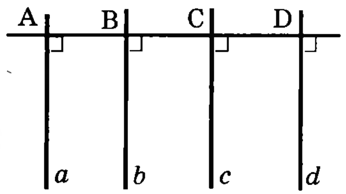


Рис. 1.37

Введемо спочатку поняття січної рівного нахилу двох прямих.

Означення 2.2. Пряма AB називається *січною рівного нахилу* до прямих a і b, якщо вона утворює з ними по один бік рівні внутрішні кути.

Можна довести, що через кожну точку однієї з двох даних прямих завжди можна провести тільки одну січну рівного нахилу цих прямих.

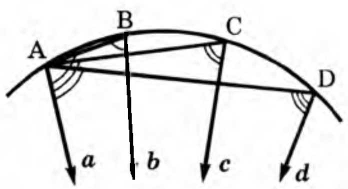


Рис. 1.38

Візьмемо пучок прямих a, b, c, d,... . На одній з них, нехай на прямій a, візьмемо довільну точку A і через неї проведемо січні рівного нахилу прямої a і кожної іншої прямої пучка: AB, AC, AD, ...

На евклідовій площині точки A, B, C, D, ... лежать на одній прямій, перпендикулярній до прямих пучка (рис. 1.37). Це випливає з V постулату Евкліда.

У площині Лобачевського орицикл – опукла крива лінія, у чому переконаємось з наведених далі його властивостей (рис. 1.38).

Означення 2.3. Геометричне місце точок перетину прямих паралельного пучка із січними рівного нахилу, проведеними з довільної точки однієї з них до кожної іншої прямої пучка, називається *орициклом* або *граничною лінією* пучка.

Прямі a, b, c, ... пучка називаються *осями орицикла*, точки A, B, C, ... – *вершинами* орицикла, відрізки AB, BC, CD, ... – *його хордами*.

Основні властивості орицикла

1. Кожний орицикл повністю визначається заданням однієї його осі і однієї його точки.

Справді, нехай дана орієнтована пряма a і точка A на ній. Тоді через довільну точку площини можна провести в площині Лобачевського тільки одну пряму b, паралельну прямій a в заданому напрямі, а через точку A можна провести тільки одну січну рівного нахилу прямих a і b, яка перетне пряму b у точці B, що належить орициклу. Аналогічно, якщо дана точка не лежить на даній осі.

2. *Будь-яка пряма з орициклом може мати не більше двох спільних точок.*

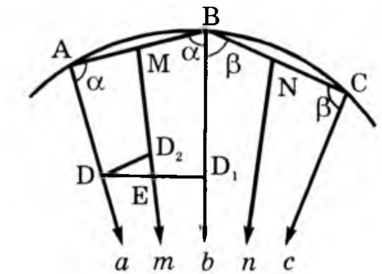


Рис. 1.39

Доведення. Нехай маємо орицикл з вершинами A, B, C і осями a, b, c (рис. 1.39). Січна рівного нахилу AB з прямими a і b утворює кут нахилу α, а січна BC з прямими b і c – рівні кути β. Покажемо, що сума кутів α і β менша 180°, тобто три точки A, B, C орицикла не можуть лежати на одній прямій. Через середину M відрізка AB проведемо пряму, перпендикулярну AB. Пряма m не може перетинати ні пряму a, ні пряму b в бік їх паралельності, бо якби m перетинала пряму a, то через цю точку перетину мала б проходити і пряма b (за властивістю симетричності a і b відносно m), що неможливо для паралельних a і b.

Але прямі a і m не можуть бути і розбіжними. Справді, опустимо з довільної точки D прямої a перпендикуляри DD_1 і DD_2 на прямі a і m відповідно. Тоді $DD_1 > DE > DD_2$, звідки $DD_1 > DD_2$. Відстань DD_1 між паралельними прямими a і b в бік паралельності як завгодно зменшується, тому і відстань DD_2 між прямими a і m як завгодно зменшується. Звідси маємо, що $m \parallel a$ і $m \parallel b$.

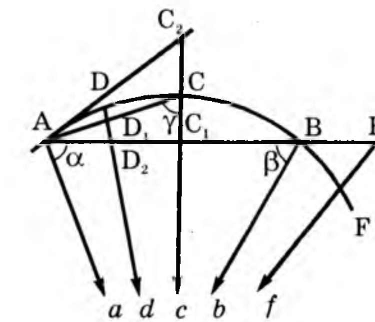


Рис. 1.40

Аналогічно переконуємось, що пряма n, яка проходить через середину N відрізка BC перпендикулярно до нього, також паралельна прямим b і c у тому ж напрямі.

Звідси маємо, що кути $\alpha = \Pi(AM)$ і $\beta = \Pi(BN)$ гострі як кути паралельності в площині Лобачевського, тому $\alpha + \beta < 180^\circ$ і точки A, B, C не лежать на одній прямій.■

3. Точка перетину прямої m, проведеної через середину хорди AB орицикла перпендикулярно до цієї хорди, з орициклом є вершиною орицикла.

Ця властивість є наслідком попередньої. Справді, оскільки $m \parallel a$ і $m \parallel b$, то пряма m є віссю орицикла і її перетин з орициклом є вершиною орицикла (рис. 1.39).

4. Всі внутрішні точки хорди орицикла лежать всередині орицикла, а всі зовнішні точки хорди лежать зовні орицикла.

Доведення. Дано орицикл з вершинами A, B і осями a, b (рис. 1.40).

Через середину C_1 хорди AB проведемо пряму c, перпендикулярну до хорди AB, тоді пряма c – вісь орицикла, вона перетинає орицикл у вершині C (за властивістю 3). Кути α, β, γ при вершинах A, B, C

відповідно *гострі*. Оскільки кут AC_1C прямий, то точка C_1 лежить на промені $c = CC_1$, тобто нижче точки C (за властивістю зовнішнього кута трикутника ACC_2, де AC_2 – дотична до орицикла).

Аналогічно пряма d, що проходить через середину D_1 хорди AC, перетинає орицикл у вершині D так, що точка D_1 лежить нижче точки D на осі d. Вісь d проходить між осями a і c, тому перетинає хорду AB у точці D_2, яка лежить між точками A і C_1 і нижче точки D_1, а отже, і нижче точки D. Перша частина властивості 4 доведена.

Нехай тепер точка F_1 лежить зовні хорди AB за точкою B. Вісь f орицикла, яка проходить через точку F_1, перетинає орицикл у точці F. Кут β між хордою AB і віссю b гострий, тому йому суміжний кут між віссю b і прямою AF_1 тупий. Але кут між віссю b і хордою BF гострий, тому промінь BF_1 не може ввійти всередину кута між віссю b і хордою BF. Отже, точка F_1 лежить на осі f вище точки F, тобто зовні орицикла.■

5. Орицикл – опукла крива лінія, опуклістю напрямлена у бік, протилежний напряму паралельності.

Ця властивість є наслідком властивості 4.

Назвемо ще ряд властивостей орицикла без доведення.

6. Орицикл не залежить від того, яку з його точок взяти за першу.

7. Один і той самий пучок паралельних прямих визначає безліч орициклів, причому всі вони рівні між собою.

8. Які б не були дві точки A і B площини, через них можна провести точно два орицикли, симетричні відносно прямої AB.

9. Всі точки орицикла лежать по один бік від перпендикуляра, проведеного в будь-якій його вершині до осі, а саме з боку паралельності осей. Отже, кожна вісь орицикла є його нормаллю.

10. Орицикл можна розглядати як граничне положення кола з нескінченно віддаленим центром.

В евклідовій геометрії граничним положенням кола, коли його центр віддаляється в нескінченність, є пряма. Це можна пояснити так. Нехай до кола (0; R) проведена дотична AB і нормаль AO. На колі відкладемо дугу AN певної довжини n. В евклідовій площині відстань NM точки N кола до дотичної прямує до нуля, коли радіус AO необмежено зростає, а довжина дуги $AN = n$ залишається незмінною (рис. 1.41).

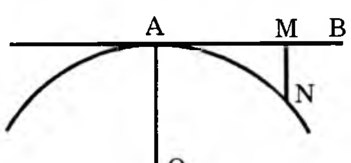


Рис. 1.41

Отже, на евклідовій площині коло необмежено наближається до прямої, коли радіус кола безмежно зростає.

У площині Лобачевського з віддаленням центра кола по прямій AO прямі, що йдуть від верхнього півкола до центра, при необмеженому його віддаленні по прямій AO також намагаються стати паралельними променю AO. Ортогональна їх траєкторія – коло – наближається до ортогональної траєкторії пучка паралельних прямих по Лобачевському – до орицикла. Звідси походить і назва орицикла як граничного положення кола. Отже, на площині Лобачевського граничною лінією (орициклом) є коло з нескінченно великим радіусом.

§ 16. Теореми про серединні перпендикуляри сторін трикутника та наслідки з них

Теорема 2.6. Якщо два серединних перпендикуляри до сторін трикутника *перетинаються*, то і третій серединний перпендикуляр проходить через цю точку перетину.

Доведення. У геометрії Евкліда кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від його кінців. Це твердження доводиться на основі рівності трикутників, тому воно справедливе і на площині Лобачевського. Якщо точка $O = MO \times NO$, де $MO \perp AB$, $NO \perp BC$, то $OA = OB$ і $OB = OC$. Звідси $OA = OC$, тобто точка O лежить і на третьому серединному перпендикулярі OL трикутника ABC (рис. 1.42).■

Наслідок. Якщо два серединних перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються у точці O, то навколо такого трикутника можна описати *коло* із центром у точці O.

Теорема 2.7. Якщо два серединних перпендикуляри до сторін трикутника розбіжні, то і серединний перпендикуляр до третьої сторони трикутника розбіжний з двома першими і всі вони мають єдиний спільний перпендикуляр, причому всі вершини трикутника рівновіддалені від нього.

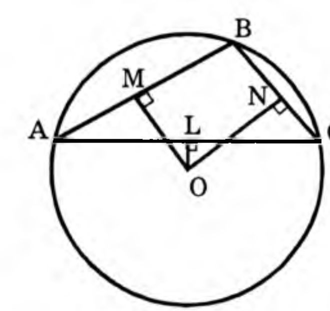


Рис. 1.42

Доведення. Нехай у трикутнику ABC точки M, N, L – середини сторін AB, BC, AC відповідно. $MM_1 \perp AB$, $NN_1 \perp BC$, $LL_1 \perp AC$ і прямі MM_1 і NN_1 – розбіжні (рис. 1.43).

Тоді прямі MM_1 і NN_1 мають єдиний спільний перпендикуляр a, тобто $MM_1 \perp a$, $NN_1 \perp a$. Опустимо з

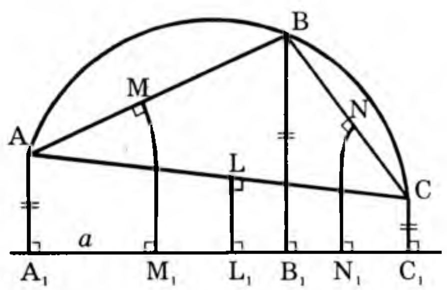


Рис. 1.43

вершин трикутника перпендикуляри на пряму a: $AA_1 \perp a$, $BB_1 \perp a$, $CC_1 \perp a$. Раніше було доведено, що в чотирикутнику Саккері перпендикуляр, проведений через середину однієї основи, перпендикулярний і до другої основи. Справедливе і обернене твердження: якщо в чотирикутнику перпендикуляр, проведений через середину однієї сторони, перпендикулярний і до протилежної сторони, то такий чотирикутник є чотирикутником Саккері. На основі цієї теореми чотирикутники AA_1B_1B і BB_1C_1C – чотирикутники Саккері, тому $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Тоді AA_1C_1C – теж чотирикутник Саккері, у ньому серединний перпендикуляр LL_1 основи AC буде серединним перпендикуляром і основи A_1C_1. А це означає, що LL_1 розбіжна з MM_1 і NN_1.■

Наслідок. Якщо серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника *розбіжні*, то навколо такого трикутника можна описати *еквідистанту*.

Теорема 2.8. Якщо два серединні орієнтовані в один бік до сторін трикутника перпендикуляри *паралельні*, то і серединний перпендикуляр до третьої сторони трикутника паралельний двом першим.

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає з двох попередніх. Дійсно, якщо припустити, що серединний перпендикуляр c до сторони AC перетинається з серединним перпендикуляром a до сторони AB, то за теоремою 2.6 через точку їх перетину має пройти і третій серединний перпендикуляр b сторони BC, що суперечить умові. Аналогічно, якщо припустити, що серединний перпендикуляр c розбіжний з серединним перпендикуляром a, то і третій серединний перпендикуляр b має бути розбіжним з двома першими (за теоремою 2.7), що суперечить умові теореми. Отже, залишається, що серединний перпендикуляр c має бути паралельним до a і b.

Наслідок. Якщо серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника паралельні в даному напрямі, то навколо такого трикутника можна описати *орицикл*.

З доведених теорем випливає, що в площині Лобачевського навколо кожного трикутника можна описати одну з трьох ліній – або коло, або еквідистанту, або орицикл.

Хоча факти геометрії Лобачевського й суперечать нашим звичним просторовим уявленням (що стало причиною її невизнання тривалий час), але геометрія Лобачевського така ж логічно несуперечлива, як і геометрія Евкліда, що строго довели Бельтрамі і Клейн, побудувавши її реалізації. На цей час ще немає фактів, які б свідчили про те, якою є дійсна геометрія нашого реального простору. Простір, що нас оточує, з необхідною для нас точністю підкоряється законам евклідової геометрії. Але простір у межах Всесвіту і різних галактичних скупчень може бути й неевклідовим. Наприклад, простір з сильними гравітаційними полями.

Контрольні запитання

1. Що таке абсолютна геометрія? Наведіть кілька тверджень цієї геометрії. Чи є система аксіом абсолютної геометрії повною? Хто вперше ввів термін «абсолютна геометрія»?
2. Сформулюйте аксіому Лобачевського. Що таке площина Лобачевського? Простір Лобачевського?
3. Покажіть, що на площині Лобачевського через дану точку можна провести безліч прямих, які не перетинають дану пряму.
4. Які прямі на площині Лобачевського називаються паралельними даній прямій? Скільки існує таких прямих?
5. Які прямі на площині Лобачевського називаються розбіжними відносно даної прямої, а які – збіжними відносно неї?
6. Що таке кут паралельності? Чому цей кут на площині Лобачевського менший $\frac{\pi}{2}$?
7. Доведіть, що на площині Лобачевського дві паралельні прямі асимптотично зближаються в бік паралельності.
8. Чи можуть паралельні або збіжні прямі на площині Лобачевського мати спільний перпендикуляр? Чи мають такий перпендикуляр розбіжні прямі? Відповідь обґрунтуйте.
9. Відомо, що в евклідовій площині дві прямі паралельні, якщо при перетині їх третьою прямою утворюються внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює $2d$. Чи будуть такі прямі паралельними на площині Лобачевського? Відповідь обґрунтуйте.
10. Доведіть, що кут паралельності зменшується зі зростанням довжини перпендикуляра p, опущеного із точки на пряму.
11. Що таке функція Лобачевського? Запишіть її аналітичний вираз, дослідіть її поведінку, зробіть відповідні висновки. Як пов'язані між собою геометрія Лобачевського і геометрія Евкліда?

12. Чому в просторі Лобачевського немає потреби в еталоні довжини? Відповідь обґрунтуйте.
13. Якою є сума кутів трикутника на площині Лобачевського? Відповідь обґрунтуйте.
14. Доведіть, що на площині Лобачевського не існує подібних, але нерівних трикутників. Якими є на площині Лобачевського два трикутники, якщо їх відповідні кути рівні?
15. Доведіть, що на площині Лобачевського не завжди можна описати коло навколо трикутника. Від чого це залежить?
16. Що називається еквідистантою? Назвіть властивості еквідистанти в площині Лобачевського.
17. Що називається орициклом? Назвіть властивості орицикла в площині Лобачевського.
18. Чому орицикл називають граничною лінією?
19. Сформулюйте теореми про серединні перпендикуляри трикутника в площині Лобачевського. Які лінії можна описати навколо трикутника?
20. Що є спільного між колом, еквідистантою і орициклом?

Розділ 3

Завершення логічного обґрунтування геометрії

§ 17. Проблема несуперечливості геометрії

Розвиток логічного обґрунтування геометрії на основі аксіоматичного методу був довгим і складним. Першою і досить вдалою спробою логічно побудувати геометрію був твір Евкліда «Початки», який відіграв визначну роль у розвитку геометрії, про що йшлося раніше. «Початки» Евкліда починаються з означень геометричних понять (об'єктів). При цьому Евклід не виділяв основні (неозначувані) поняття, а намагався дати означення всім поняттям. Оскільки це неможливо зробити, то ряд означень в «Початках» не відповідає вимогам до означень. Наведені вище означення точки, прямої, поверхні, площини є, по суті, не означення, а пояснення того, який конкретний зміст вкладається в поняття «точка», «лінія», «пряма» та ін. Отже, у «Початках» Евкліда всі геометричні поняття мають конкретний зміст і ще до формулювання аксіом вважаються відомими деякі властивості цих об'єктів.

Такий метод побудови геометрії, коли всім геометричним об'єктам надається конкретний зміст і аксіоми з'ясовують їхні основні властивості, називається *змістовним аксіоматичним методом*. Таким чином, у «Початках» Евкліда геометрію було викладено як *змістовну аксіоматичну теорію.*

Змістовний аксіоматичний метод домінував у геометрії до середини XIX ст. Розв'язавши проблему п'ятого постулату (1826 р.), великий російський геометр М.І. Лобачевський відкрив нову, неевклідову геометрію. Виникла нова проблема – *проблема несуперечливості геометрії*, тобто треба було з'ясувати, яка ж геометрія – Евкліда чи Лобачевського – правильно відображає властивості об'єктів навколишнього середовища. Виявилося, що засобами змістовного аксіоматичного методу на основі аксіоматики «Начатків» Евкліда розв'язати цю проблему неможливо. Розв'язанням проблеми несуперечливості геометрії, удосконаленням аксіоматичного методу побудови геометрії займалося багато відомих математиків у другій половині XIX століття.

Звичайно, перш за все виникло питання про несуперечливість нової неевклідової геометрії Лобачевського. Першим зробив спробу довести несуперечливість геометрії Лобачевського італійський математик ***Є. Бельтрамі*** (1835–1900). У своїй праці «Досвід тлумачення неевклідової геометрії» (1868 р.) Бельтрамі показав, що в евклідовому просторі є такі поверхні сталої від'ємної кривини – псевдосфери, внутрішня геометрія яких збігається з геометрією на площині Лобачевського. При цьому точки псевдосфери є точками Лобачевського, лінії найкоротших відстаней на псевдосфері (геодезичні лінії поверхні) – «прямі» Лобачевського, а під рухом розуміють ізометричне накладання поверхні на себе. Цей результат доводить несуперечливість планіметрії Лобачевського. Дійсно, суперечності в геометрії Лобачевського відповідала б у даній інтерпретації суперечність у теорії поверхонь евклідового простору, тобто суперечність в евклідовій геометрії.

Але модель Бельтрамі площини Лобачевського на псевдосфері не повністю розв'язувала питання про несуперечливість геометрії Лобачевського. Німецький математик ***Д. Гільберт*** (1862–1943) показав, що в евклідовому просторі не існує повної поверхні сталої від'ємної кривини без особливостей. Тому на псевдосфері можна інтерпретувати лише частину площини Лобачевського (локально).

Цей недолік було ліквідовано пізніше в працях французького математики ***А. Пуанкаре*** (1854–1912) та німецького математика ***Ф. Клейна*** (1848–1925). Інтерпретація Клейна плоскої геометрії Лобачевського здійснена всередині круга на евклідовій площині, де під прямими Лобачевського розуміють хорди цього круга. Основане на цій інтерпретації доведення несуперечливості геометрії Лобачевського є бездоганним.

Інтерпретація Пуанкаре теж реалізується всередині круга на евклідовій площині, але за «прямі» Лобачевського беруть дуги кіл, ортогональних з колом абсолюта.

Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського було одночасно і доведенням незалежності V постулату Евкліда від інших аксіом і постулатів «Начатків» Евкліда. Справді, якби V постулат був наслідком решти постулатів Евкліда, то геометрія Лобачевського була б суперечливою, бо містила б два суперечливі між собою твердження – аксіому паралельності Лобачевського і V постулат Евкліда.

Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського в названих та інших інтерпретаціях ґрунтувалося на тому, що геометрія Евкліда несуперечлива, тобто геометрія Лобачевского несуперечлива, якщо несуперечливою є евклідова геометрія. Але доведення несуперечливості геометрії Евкліда ніхто не робив, таке питання раніше не виникало. Тепер постало питання про доведення несуперечливості евклідової геометрії. Для цього треба мати повну систему аксіом геометрії Евкліда, оскільки сукупність аксіом і постулатів «Начатків» неповна. Поряд з цим з'явились запитання про кількість аксіом, про те, які умови вони повинні задовольняти та ін. Нагадаємо, що таке система аксіом геометрії.

Системою аксіом, на основі якої можна побудувати несуперечливу геометрію (та інші науки), називається така сукупність аксіом, яка задовольняє три умови – *умову несуперечливості, умову незалежності і умову повноти.*

Умова несуперечливості вимагає, щоб:

1) серед аксіом даної сукупності не було суперечливих одна одній;
2) серед доведених на основі даної сукупності аксіом тверджень не було суперечливих між собою або суперечливих якійсь аксіомі;
3) була впевненість, що і при подальшому розвитку геометрії на основі даної сукупності аксіом не виникнуть суперечливі твердження.

Умова незалежності вимагає, щоб кожна аксіома сукупності була незалежна від інших, тобто щоб жодну з аксіом сукупності не можна було довести як теорему на основі інших аксіом цієї сукупності. Ця умова обмежує кількість аксіом, щоб не було зайвих, які можна довести. Тому цю умову ще називають ***умовою мінімальності***.

Умова повноти вимагає, щоб даних аксіом було достатньо для логічної побудови геометрії.

Перевірка цих умов проводиться за допомогою побудови інтерпретацій даної системи аксіом, тобто знаходження для даної системи аксіом однієї з її реалізацій.

Перевірка *умови несуперечливості* даної системи аксіом у більшості випадків є *умовною*: дана система аксіом несуперечлива, якщо несуперечлива та наука, за допомогою об'єктів якої визначаються основні поняття системи аксіом, що розглядається.

Наприклад, якщо точки, прямі, відношення належності в геометрії Лобачевського визначаються через точки, прямі, відношення належності геометрії Евкліда, то геометрія Лобачевського буде несуперечливою настільки, наскільки несуперечливою є геометрія Евкліда.

Детальніше про це йтиметься далі.

Щоб довести *незалежність* системи аксіом, треба довести незалежність кожної окремо взятої аксіоми від всіх інших, тобто треба побудувати моделі для кожної аксіоми системи – модель, в якій всі аксіоми виконуються, крім досліджуваної. Таким шляхом Лобачевський довів незалежність V постулату Евкліда (аксіоми паралельності прямих) від усіх інших аксіом евклідової геометрії.

Доведення *повноти* системи аксіом зводиться до доведення *ізоморфізму* всіх її реалізацій, тобто до встановлення такої взаємно однозначної відповідності між точками, прямими і площинами цих реалізацій, за якої відповідні елементи знаходяться в однакових відношеннях.

Геометри другої половини XIX ст. намагались побудувати таку сукупність аксіом, яка була б *системою аксіом геометрії Евкліда*. Першим важливим досягненням в аксіоматичній побудові евклідової геометрії було дослідження німецького геометра ***М. Паша*** (1843–1930) у творі «Лекції з нової геометрії» (1882). У ньому Паш формулює 12 аксіом належності і порядку точок і прямих, точніше, точок і «відрізків» на «куску площини», які він розглядав замість прямих і площин. Крім того, там було 10 аксіом конгруентності. Взагалі, у творі Паша багато аксіом досить ускладнені у формулюванні, через те що розглядаються лише *куски прямих і площин*. Частину аксіом Паша Д. Гільберт спростив і використав у своїй аксіоматиці.

До спроб аксіоматичної побудови геометрії можна віднести працю італійського математика ***Д. Пеано*** (1858–1932) «Логічно викладені основи геометрії» (1899), яка містить лише аксіоми належності та порядку.

Значним досягненням у питанні дедуктивної побудови евклідової геометрії була праця італійського геометра ***М. Пієрі*** «Елементарна геометрія як дедуктивна система» (1899).

Основними поняттями у Пієрі є «точка» і «рух». Через це у нього дуже громіздкі, ускладнені формулювання аксіом, а означення «прямої», «площини», «лежати між» є досить штучними. Для прикладу наведемо формулювання однієї з його аксіом.

Аксіома XIV. Якщо A, B, C – точки, що не лежать на одній прямій, а D і E – точки площини ABC, відмінні від точки C і належні двом сферам, які проходять через точку C і мають центрами точки A і B, то ці дві точки D і E збігаються.

Створення аксіоматики евклідової геометрії було завершено німецьким математиком ***Д. Гільбертом*** у творі «Основи геометрії», також опублікованому в 1899 році. У системі аксіом Гільберта розглядаються речі трьох видів – «точки», «прямі», «площини» і трьох видів відношення між ними, виражені словами «належати», «лежати між», «конгруентність». Це основні поняття. Усі інші поняття вводяться за допомогою означень.

Вченому вдалося створити аксіоматику евклідової геометрії, розділену на групи так, що логічна будова геометрії стала природною. Таке розбиття аксіом на групи дозволило Гільберту формулювати аксіоми значно простіше і коротше, а також досліджувати, як далеко можна розвивати геометрію, якщо покласти в її основу не всю аксіоматику, а лише певні її групи. Це надало можливість з'ясувати роль окремих груп аксіом.

Гільберт провів глибокий аналіз своєї системи аксіом, зокрема довів, що його система аксіом несуперечлива, якщо несуперечлива арифметика, довів незалежність деяких аксіом від інших.

Отже, створення системи аксіом геометрії (як і іншої науки) досить складна справа.

Логічне обґрунтування геометрії на основі системи аксіом Гільберта називається *напівформальним аксіоматичним методом.*

Суть напівформального аксіоматичного методу побудови геометрії полягає в наступному:

1. Необхідно назвати без означення основні (вихідні) об'єкти.
2. Необхідно назвати без означення основні (вихідні) відношення між названими основними об'єктами.
3. Основні об'єкти і основні відношення називаються основними поняттями геометрії.
   Усі інші поняття геометрії вводяться за допомогою основних понять і раніше означених понять.
4. Необхідно сформулювати основні твердження про властивості основних понять, які приймаються без доведення (аксіоми). Сукупність сформульованих аксіом має утворювати систему аксіом.
5. Усі інші твердження доводяться правильними логічними міркуваннями за допомогою означень, аксіом і вже доведених тверджень.
6. Загальна природа основних понять не визначена, їм не надається конкретний зміст.

Напівформальний аксіоматичний метод будемо надалі називати просто аксіоматичним методом побудови геометрії. На початку XX ст. німецький математик Д. Гільберт створив так званий *формальний метод* побудови теорії. Він відрізняється від напівформального тим, що в ньому формалізований сам процес доведення, тобто повинні бути точно вказані правила виведення, за якими з аксіом дістають теореми, і всі твердження теорії повинні бути подані у символічній формі.

Отже, у розвитку аксіоматичного методу побудови науки можна виділити три періоди: перший – змістовний аксіоматичний метод у «Початках» Евкліда (III ст. до н.е.), другий – напівформальний аксіоматичний метод в «Основах геометрії» Д. Гільберта (кінець XIX ст.), третій – формальний аксіоматичний метод (Д. Гільберт, початок XX ст.).

§ 18. Система аксіом евклідової геометрії за Гільбертом

За схемою Д. Гільберта аксіоматичний виклад евклідової геометрії ґрунтується на трьох основних поняттях – точка, пряма, площина, трьох основних відношеннях – належати, лежати між, конгруентності, і 20 аксіомах, які розбиті на п'ять груп: аксіоми належності, аксіоми порядку, аксіоми конгруентності, аксіоми неперервності, аксіома паралельних.

I. Аксіоми належності

Ці аксіоми пояснюють відношення належності між точками, прямими і площинами.

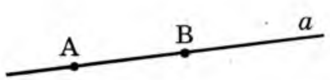


Рис. 1.44

I$_1$. Які б не були дві точки A і B, існує пряма a, яка проходить через кожну з цих точок (рис. 1.44)

I$_2$. Які б не були дві точки A і B, існує не більше однієї прямої, яка проходить через кожну з цих точок.

I$_3$. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, що не лежать на одній прямій (рис. 1.45).

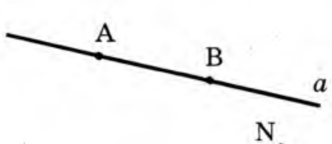


Рис. 1.45

I$_4$. Які б не були три точки A, B і C, які не лежать на одній прямій, існує площина a, яка проходить через кожну з цих точок. На кожній площині лежить хоча б одна точка (рис. 1.46).

I$_5$. Які б не були три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій, існує не більше однієї площини, яка проходить через кожну з цих точок.

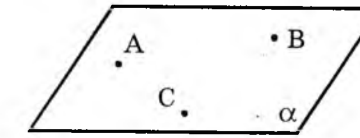


Рис. 1.46

I$_6$. Якщо дві точки A і B прямої a лежать на площині α, то кожна точка прямої a лежить на площині α (рис. 1.47).

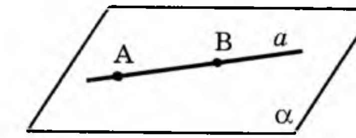


Рис. 1.47

I$_7$. Якщо дві площини a і b мають спільну точку A, то вони мають принаймні ще одну спільну точку B (рис. 1.48).

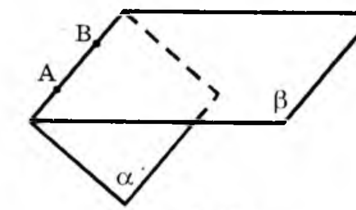


Рис. 1.48

I$_8$. Існують принаймні чотири точки, які не лежать в одній площині.

За допомогою аксіом належності можна довести зовсім небагато геометричних фактів. Наприклад, можна довести, що дві прямі мають не більше однієї спільної точки; дві площини або зовсім не мають спільних точок, або мають спільну пряму; площина і пряма, що не лежить на ній, мають не більше однієї спільної точки; через точку і пряму, яка її не містить, можна провести одну і тільки одну площину; через дві прямі, які перетинаються, можна провести тільки одну площину. Але, користуючись лише цими аксіомами, не можна довести, що на прямій існує більше двох точок або що на площині існує понад три точки.

II. Аксіоми порядку

Ці аксіоми виражають властивості взаємного розміщення точок на прямій і площині, пояснюють відношення «лежати між».

II$_1$. Якщо точка B лежить між точками A і C, то A, B, C – різні точки однієї прямої і точка B лежить між C і A (рис. 1.49).

Рис. 1.49

II$_2$. Які б не були точки A і C, на прямій AC існує принаймні одна точка B така, що точка C лежить між A і B (рис. 1.50).

Рис. 1.50

II$_3$. Серед будь-яких трьох точок прямої існує не більше однієї точки, яка лежить між двома іншими.

II$_4$. Нехай A, B, C – три точки, які не лежать на одній прямій, і a – пряма в площині ABC, яка не проходить через жодну з точок A, B, C. Якщо при цьому пряма a перетинає відрізок AB, то вона повинна перетинати або відрізок AC, або відрізок BC (аксіома Паша) (рис. 1.51).

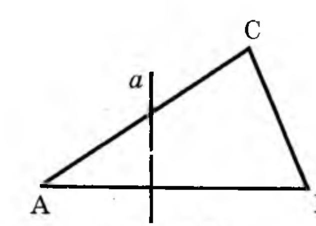


Рис. 1.51

За допомогою аксіом порядку можна ввести поняття відрізка, променя, довести, що між будь-якими двома точками прямої існує нескінченна множина інших її точок, ввести поняття ламаної, трикутника, многокутника, але із цих аксіом ще не випливає, що множина елементів геометрії незчисленна.

III. Аксіоми конгруентності

Ця група аксіом визначає поняття конгруентності для відрізків і кутів.

III$_1$. Якщо A і B – різні точки на прямій a і A' – точка на тій же прямій або на іншій прямій a', то завжди можна знайти точку B', яка лежить в даний від точки A бік прямої a', причому таку, що відрізок AB конгруентний відрізку $A'B'$ (рис. 1.52). Позначають $AB \cong A'B'$.

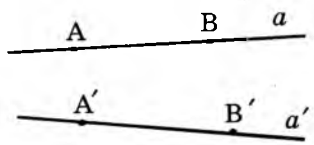


Рис. 1.52

III$_2$. Якщо два відрізки конгруентні третьому, то вони конгруентні між собою, тобто якщо $A'B' \cong AB$ і $A''B'' \cong AB$, то $A''B'' \cong A'B'$.

III$_3$. Нехай AB і BC – два відрізки прямої a, які не мають спільних внутрішніх точок, і нехай $A'B'$, $B'C'$ – два відрізки тієї ж або іншої прямої a', які також не мають спільних внутрішніх точок (рис. 1.53). Якщо при цьому $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ то і $AC \cong A'C'$.

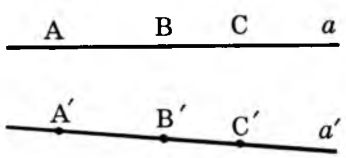


Рис. 1.53

III$_4$. Від даної півпрямої в даній півплощині, що визначається цією півпрямою та її продовженням, можна відкласти кут, і до того ж єдиний, конгруентний даному куту (рис. 1.54).

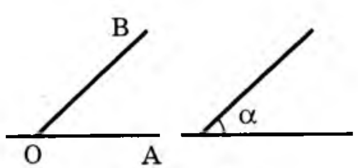


Рис. 1.54

III$_5$. Якщо у двох трикутників ABC і $A'B'C'$ $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$ і $\angle A \cong \angle A'$, то у них $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$ (рис. 1.55).

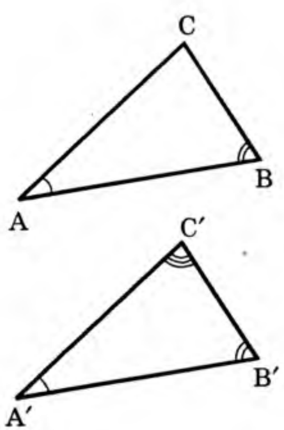


Рис. 1.55

За допомогою аксіом конгруентності та попередніх аксіом можна довести три ознаки рівності трикутників, рівність вертикальних кутів; твердження про те, що в рівнобедреному трикутнику медіана є висотою і бісектрисою; можна ввести поняття «більше» і «менше» для відрізків і кутів, довести теорему про властивість зовнішнього кута трикутника та інші твердження.

Значення аксіом конгруентності полягає в тому, що вони дають можливість означити рух як перетворення, що відображає відрізок у конгруентний йому відрізок.

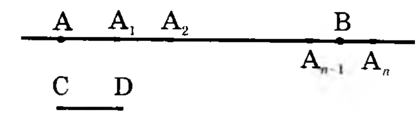


Рис. 1.56

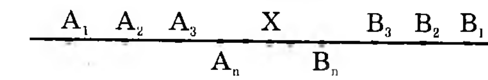


Рис. 1.57

IV. Аксіоми неперервності

IV$_1$ *(аксіома Архімеда)*. Нехай AB і CD – два які-небудь відрізки. Тоді на прямій AB існує скінченне число точок $A_1, A_2, ..., A_n$ таких, що відрізки AA_1, A_1A_2, ... , $A_{n-1}A_n$ конгруентні відрізку CD і точка B лежить між A_{n-1} і A_n (рис. 1.56).

IV$_2$ *(аксіома Кантора)*. Нехай на прямій a задано нескінченну послідовність відрізків – A_1B_1, A_2B_2, ..., з яких кожен наступний лежить всередині попереднього. Нехай, крім того, яким би малим не був заздалегідь відомий відрізок, знайдеться номер n, для якого відрізок A_nB_n менший цього відрізка. Тоді на прямій a існує точка X, яка лежить всередині всіх відрізків A_1B_1, A_2B_2 і т.д. (рис. 1.57).

На основі цих аксіом можна ввести поняття довжини відрізка і градусної міри кута, а на їх основі можна ввести систему координат і встановити взаємно однозначну відповідність між множиною точок прямої і множиною дійсних чисел. Після цього доводиться, що пряма може перетинатися з колом у двох точках і кола можуть перетинатися у двох точках.

V. Аксіома паралельності

Нехай a – довільна пряма і A – точка, яка лежить зовні цієї прямої. Тоді у площині, яка визначається точкою A і прямою a, можна провести не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму a (рис. 1.58).

Аксіома паралельності дозволяє обґрунтувати евклідову теорію паралельних. Зокрема, з неї відразу випливає, що сума кутів будь-якого трикутника дорівнює $2d$, теорема Піфагора та ін.

Проблема V постулату, вже будучи розв'язаною, все ще не була точно сформульована до кінця XIX ст., оскільки означення і аксіоми Евкліда настільки недосконалі, що не могли становити базу для розгортання строгих логічних побудов. Після викладу аксіом Гільберта ми можемо проблему V постулату сформулювати так: прийнявши аксіоми I–IV, вивести з них аксіому V. Результати Лобачевського тепер можна сформулювати строго: аксіома V не

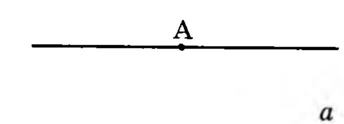


Рис. 1.58

є наслідком аксіом I–IV; якщо до аксіом I–IV приєднати заперечення V постулату, то одержимо логічно несуперечливу систему.

Однією з переваг системи аксіом Гільберта, яка забезпечила їй велику популярність і перемогу над іншими системами аксіом (Пієрі, Кагана), виявився поділ всієї системи аксіом на окремі групи, кожна з яких характеризує ту чи іншу категорію властивостей простору (аксіоми належності, аксіоми порядку, аксіома паралельності та ін.). Не лише вся система аксіом у цілому, а й декілька її окремих груп визначають досить змістовну геометрію. Наприклад, вилучивши із системи аксіом Гільберта аксіоми конгруентності (рівності), дістаємо аксіоматику вільного від метрики *афінного простору*. Вилучивши аксіому паралельності – дістаємо *абсолютну геометрію*, а замінивши цю аксіому її запереченням – дістаємо аксіоматику *неевклідової геометрії Лобачевського.*

Система аксіом Гільберта стала завершальним етапом логічного обґрунтування евклідової геометрії. З погляду логічної побудови система Гільберта бездоганна. Проте громіздкість і величезні труднощі, які доводиться долати при побудові в рамках цієї системи теорії вимірювання довжин, площ і об'ємів, спонукали математиків до пошуку більш раціональних систем аксіом евклідової геометрії, в яких відсутні вказані недоліки.

§ 19. Різні шляхи обґрунтування геометрії

Майже одночасно з дослідженням Д. Гільберта у тому ж 1899 році була опублікована праця італійського математика Маріо Пієрі, в якій він дає обґрунтування геометрії Евкліда на основі системи аксіом, де за одне з вихідних основних понять береться поняття *руху*, а не *конгруентності* відрізків і кутів, як у Гільберта. Поняття конгруентності в цій системі визначається через поняття руху. М. Пієрі максимально зменшує кількість основних понять, залишивши серед них тільки два – «точка» і «рух». Але ця система аксіом виявилась дуже громіздкою, і в ній не було чіткого розподілу на окремі групи аксіом, як у Гільберта.

Третій шлях обґрунтування геометрії передбачав наявність серед основних поняття *відстані* (метрична система аксіом). Уперше таку систему аксіом запропонував російський математик ***В.Ф. Каган*** (1869–1953) у 1902–1904 рр. Основними поняттями в аксіоматиці Кагана є точка, відстань, рух. Усього в цій системі 10 аксіом. Поняття

«лежати між», «пряма», «площина» визначаються через основні. Зокрема, за означенням точка C лежить між точками A і B, якщо $AC + BC = AB$; пряма – це множина точок, розміщених прямолінійно (одна з будь-яких трьох точок лежить між двома іншими); площина – це множина точок, відстані яких до двох даних точок рівні.

Нарешті, є ще один шлях обґрунтування геометрії – ***векторний***, його запропонував у 1917 р. німецький математик ***Герман Вейль*** (1885–1955). Основними поняттями в запропонованій ним системі аксіом є «вектор» і «точка», основними відношеннями – «сума векторів», «добуток вектора на число», «скалярний добуток векторів». Аксіоми в цій системі – це фактично аксіоми тривимірного векторного простору.

Найбільш популярною виявилась система аксіом Гільберта, за його схемою намагались будувати інші системи аксіом. Окремі математики намагалися об'єднати різні шляхи обґрунтування геометрії. Німецький математик ***Фрідріх Шур*** у 1909 р. частково «вдосконалив» систему аксіом Гільберта, замінивши відношення «конгруентність» на «рух» і відповідно аксіоми конгруентності на аксіоми руху.

Спираючись на аксіоми належності, порядку і руху, можна довести гільбертові аксіоми конгруентності як теореми.

Зважаючи на те, що рух є композицією осьових симетрій, інший німецький математик ***Віллерс*** у 1922 р. запропонував замість аксіом конгруентності Гільберта і замість аксіом руху Шура аксіоми симетрії, залишивши першу і другу групи аксіом Гільберта без змін.

Український геометр академік ***О.В. Погорєлов*** у своїй книзі «Основи геометрії» (1968) запропонував замінити аксіоми порядку і конгруентності Гільберта еквівалентними їм групами аксіом: замість аксіом порядку – групу аксіом слідування пар точок, а замість аксіом конгруентності – аксіоми руху.

Німецький математик ***Фрідріх Бахман*** у своєму творі «Побудова геометрії на основі поняття симетрії» (1954) у своїй аксіоматиці за основне поняття взяв лише одне поняття – *симетрія.*

Ідеї В.Ф. Кагана стосовно обґрунтування геометрії на метричній основі дістали розвиток в американських математиків. Зокрема, уже в 1904 р. американський математик ***О. Веблен*** реалізує ідеї Кагана при побудові евклідової геометрії на основі «метричної» аксіоматики. Його дослідження в геометрії на «метричній» основі продовжили інші американські вчені ***Р.Л. Мур*** (1908), ***Дж.Д. Біркгоф*** (1932).

§ 20. Векторне обґрунтування геометрії Евкліда

20.1. Система аксіом Вейля

У 1917–1918 роках відомий німецький математик ***Герман Вейль*** (1885–1955) запропонував векторне обґрунтування геометрії Евкліда. Відомі декілька варіантів векторних систем аксіом Вейля [26]. Розглянемо одну з них, опубліковану в [26]. У цій системі за вихідні об'єкти взято «вектор» і «точка», за основні відношення – «сума векторів», «добуток вектора на число», «скалярний добуток», «відкладання вектора від точки». Система аксіом для тривимірного евклідового простору складається з 17 аксіом, розбитих на п'ять груп:

1. Аксіоми додавання векторів (4).
2. Аксіоми множення вектора на число (4).
3. Аксіоми скалярного добутку (5).
4. Аксіоми розмірності (2).
5. Аксіоми відкладання вектора (2).

I група. ***Аксіоми додавання векторів***

Основне відношення: кожним двом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідає один певний третій вектор, який називається їх *сумою* і позначається $\vec{a}+\vec{b}$.

1.1. Для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

1.2. Для будь-яких трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

1.3. Існує такий вектор $\vec{0}$, що $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$. Вектор $\vec{0}$ називається *нульовим* вектором.

1.4. Для будь-якого вектора $\vec{a}$ знайдеться вектор $\vec{a}'$, що $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$. Вектор $\vec{a}'$ називається *протилежним* до вектора $\vec{a}$ і позначається через $-\vec{a}$.

II група. ***Аксіоми множення вектора на число***

Основне відношення: кожному вектору $\vec{a}$ і кожному дійсному числу k відповідає один певний вектор, який називається *добутком* вектора $\vec{a}$ на число k і позначається $k\vec{a}$.

2.1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

2.2. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел k і l.

2.3. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ для будь-якого вектора $\vec{a}$ і будь-яких дійсних чисел k і l.

2.4. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і будь-якого дійсного числа k.

III група. ***Аксіоми скалярного добутку векторів*** (метричні аксіоми)

Основне відношення: кожним двом векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідає одне певне дійсне число, яке називається їх *скалярним добутком* і позначається через $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

3.1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ для будь-яких двох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$.

3.2. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

3.3. $(k\vec{a})\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і будь-якого дійсного числа k.

3.4. $\vec{a}\cdot\vec{a}\geq 0$ для будь-якого вектора $\vec{a}$.

3.5. $\vec{a}^2=0$ тільки тоді, коли $\vec{a}=\vec{0}$.

IV група. ***Аксіоми розмірності***

Означення. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, з яких принаймні одне не дорівнює нулю, що

$$k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_n\vec{a}_n=\vec{0}.$$

Якщо вектори не є лінійно залежними, то вони називаються *лінійно незалежними*.

4.1. Існують три лінійно незалежні вектори.

4.2. Будь-які чотири вектори лінійно залежні.

V група. ***Аксіоми відкладання вектора***

Основне відношення: кожній парі точок A, B відповідає тільки один певний вектор, який позначається через $\overrightarrow{AB}$.

5.1. Для будь-якої точки A і будь-якого вектора $\vec{a}$ існує така єдина точка B, що $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ (у такому разі говорять, що точку B дістали в результаті *відкладання* вектора $\vec{a}$ від точки A).

5.2. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ для будь-яких трьох точок A, B, C.

Об'єднуючи по-різному названі групи аксіом, дістаємо аксіоматики різних просторів.

1. *Лінійний векторний простір V.*

Основними об'єктами цього простору є вектори, основними відношеннями – сума векторів і множення вектора на число, а аксіомами – аксіоми перших двох груп (1.1–1.4; 2.1–2.4). У деяких варіантах аксіоматики Вейля їх об'єднують в одну групу – аксіоми лінійного векторного простору.

2. *Лінійний векторний тривимірний простір V_3.*

Основні об'єкти – ті ж, що і для простору V, а аксіоматика складається з аксіом першої, другої і четвертої груп (1.1–1.4; 2.1–2.4; 4.1–4.2).

3. *Тривимірний векторний евклідів простір E_3.*

Основні об'єкти – вектори, основні відношення – сума векторів, множення вектора на число, скалярний добуток двох векторів. Аксіоматика простору E_3 складається з аксіом перших чотирьох груп (1.1–1.4; 2.1–2.4; 3.1–3.5; 4.1–4.2).

4. *Точково-векторний тривимірний афінний простір TV_3.*

Основні об'єкти – вектори, точки; основні відношення – сума векторів, множення вектора на число, відкладання вектора від точки. Аксіоматика простору TV_3 складається з аксіом першої, другої, четвертої і п'ятої груп (1.1–1.4; 2.1–2.4; 4.1–4.2; 5.1–5.2).

5. *Точково-векторний тривимірний евклідів простір TE_3.*

Основні об'єкти – вектори, точки; основні відношення – сума векторів, множення вектора на число, скалярний добуток двох векторів, відкладання вектора. Аксіоматика простору TE_3 включає аксіоми всіх п'яти груп (1.1–1.4; 2.1–2.4; 3.1–3.5; 4.1–4.2; 5.1–5.2).

Змінюючи вимогу про число лінійно незалежних векторів в аксіомі 4.1, дістанемо аксіоми для відповідних n-вимірних просторів.

Векторне обґрунтування геометрії Г. Вейль розглядав як вдалий методичний прийом, що дозволив йому паралельно викладати відомості як про евклідів, так і про неевклідів простір. Зрозумілість і чіткість аксіоматики Вейля, можливість її модифікації на різні типи просторів зробили схему Вейля не менш популярною, ніж схема Д. Гільберта.

Нескладні зміни в аксіоматиці Вейля приводять до неевклідових геометрій Лобачевського і Рімана та до деяких інших геометрій.

20.2. Побудова геометрії за схемою Вейля

Розглянемо означення деяких понять і декілька теорем, які є першими наслідками системи аксіом Вейля.

1. Аксіоми першої групи є *груповими* властивостями, тому можна стверджувати, що вектори утворюють *комутативну* (*абелеву*) *групу* відносно операції додавання.

2. Аксіома 1.2 надає можливість ввести поняття суми для довільної кількості доданків: сумою 3-х векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається вектор $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$; сумою 4-х векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ є вектор $((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})+\vec{d}$ і т.д.

3. Аксіома 1.3 стверджує, що *існує* нульовий вектор $\vec{0}$, але в ній не сказано, що цей вектор *єдиний*. Це тому, що єдиність нульового

вектора можна довести на основі аксіом 1.1 і 1.3. Справді, припустимо, що є два нульових вектори $\vec{0}_1$ і $\vec{0}_2$. Тоді за аксіомою 1.3 $\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_1$ і $\vec{0}_2+\vec{0}_1=\vec{0}_2$. Але за аксіомою 1.1 $\vec{0}_1+\vec{0}_2=\vec{0}_2+\vec{0}_1$, а звідси $\vec{0}_1=\vec{0}_2$, тобто нульовий вектор *єдиний*.

4. Аналогічно в аксіомі 1.4 говориться про *існування* вектора $-\vec{a}$, протилежного вектору $\vec{a}$, але про його *єдиність* не вказано, тому що єдиність протилежного вектора можна довести методом від супротивного. Припустимо, що існує два вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, протилежні вектору $\vec{a}$. Тоді за аксіомою 1.4 $\vec{a}+\vec{a}_1=\vec{0}$ і $\vec{a}+\vec{a}_2=\vec{0}$. Оскільки нульовий вектор єдиний, то $\vec{a}+\vec{a}_1=\vec{a}+\vec{a}_2$, а звідси $\vec{a}_1=\vec{a}_2$.

5. Можна довести, що рівняння $\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$ завжди має єдиний розв'язок, а це дає можливість ввести поняття *різниці* векторів $\vec{x}=\vec{a}-\vec{b}$. Різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна ввести як суму вектора $\vec{a}$ і вектора $-\vec{b}$, протилежного вектору $\vec{b}$:

$\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$.

6. З аксіом другої групи випливає, що одиниця є *нейтральним* елементом операції множення вектора на число, а також що операція є *асоціативною* відносно числових множників і *дистрибутивною* відносно суми чисел і суми векторів.

7. З аксіом перших двох груп випливає *незалежність суми* будь-якого числа доданків – векторів від порядку їх розміщення.

8. На основі перших двох груп можна ввести ряд нових понять і довести нові теореми.

Теорема 3.1. Щоб множина векторів була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб принаймні один вектор цієї множини лінійно виражався через інші вектори цієї множини:

$\vec{a}_1=k_1\vec{a}_1+k_2\vec{a}_2+\ldots+k_n\vec{a}_n$.

Теорема 3.2. Якщо два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ лінійно залежні, то існує число $k \neq 0$ таке, що $\vec{a}=k\vec{b}$.

Доведення цих теорем опускаємо.

Означення 3.1. Два лінійно залежні вектори називаються *колінеарними*, або *паралельними*.

Означення 3.2. Два ненульові колінеарні вектори називаються *співнапрямленими*, якщо $k>0$, і *протилежно напрямленими*, якщо $k<0$.

1. Аксіома 3.1 стверджує комутативність операції скалярного множення двох векторів, а аксіома 3.2 – її *дистрибутивність* відносно суми векторів. З аксіоми 3.3 випливає, що скалярний добуток векторів є *асоціативним* відносно операції множення вектора на число.

2. Аксіоми 4.1, 4.2 стверджують, що розглядається тривимірний векторний простір V_3. За допомогою аксіом четвертої групи (розмірності) доводиться теорема про розкладання вектора за базисом.

Означення 3.3. Упорядкована множина будь-яких трьох лінійно незалежних векторів простору V_3 називається *бáзисом* цього простору.

Теорема 3.3. Будь-який вектор $\vec{a}$ можна однозначно розкласти за будь-якими трьома лінійно незалежними векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тобто подати у вигляді їх лінійної комбінації:

$$\vec{a} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3,$$

де k_1, k_2, k_3 – дійсні числа.

Доведення. Маємо чотири вектори $\vec{a}_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, тому за аксіомою 4.2 вони лінійно залежні, тобто існують числа α, β, γ, δ, з яких принаймні одне відмінне від нуля, таких, що

$$\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2 + \delta\vec{e}_3 = \vec{0}. \qquad (3.1)$$

Якщо припустимо, що $\alpha = 0$, то $\alpha\vec{a} = 0\vec{a} = \vec{0}$, і тоді з (1) і аксіоми 1.3 маємо $\beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2 + \delta\vec{e}_3 = \vec{0}$, що суперечить умові лінійної незалежності векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Отже $\alpha \neq 0$.

Помножимо обидві частини рівності (3.1) на число $\dfrac{1}{\alpha}$:

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{e}_1 + \gamma\vec{e}_2 + \delta\vec{e}_3) = \frac{1}{\alpha}\vec{0}. \qquad (3.2)$$

За аксіомою 2.4

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) + \frac{1}{\alpha}(\beta\vec{e}_1) + \frac{1}{\alpha}(\gamma\vec{e}_2) + \frac{1}{\alpha}(\delta\vec{e}_3) = \vec{0}. \qquad (3.3)$$

За аксіомами 2.2 і 2.1

$$\frac{1}{\alpha}(\alpha\vec{a}) = (\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha)\vec{a} = 1\cdot\vec{a} = \vec{a},$$

$$\frac{1}{\alpha}(\beta\vec{e}_1) = (\frac{1}{\alpha}\cdot\beta)\vec{e}_1 = \frac{\beta}{\alpha}\cdot\vec{e}_1 = -k_1\vec{e}_1,$$

$$\frac{1}{\alpha}(\gamma\vec{e}_2) = (\frac{1}{\alpha}\cdot\gamma)\vec{e}_2 = \frac{\gamma}{\alpha}\cdot\vec{e}_2 = -k_2\vec{e}_2,$$

$$\frac{1}{\alpha}(\delta\vec{e}_3) = (\frac{1}{\alpha}\cdot\delta)\vec{e}_3 = \frac{\delta}{\alpha}\cdot\vec{e}_3 = -k_3\vec{e}_3.$$

З рівності (3.3) дістанемо:

$$\vec{a} - k_1\vec{e}_1 - k_2\vec{e}_2 - k_3\vec{e}_3 = \vec{0} \text{ і } \vec{a} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + k_3\vec{e}_3.$$

Теорему доведено.■

Доведення єдиності такого розкладу опускаємо.

Числа k_1, k_2, k_3 часто позначають через x, y, z і називають *координатами* вектора $\vec{a}$ у базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Наведемо далі ще декілька означень і теорем (без доведення), які є наслідками аксіом Вейля, зокрема означення прямої і площини.

Означення 3.4. Нехай A і B – дві довільні точки. *Прямою AB* називається множина всіх таких точок M, що вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AB}$ лінійно залежні, тобто $\overrightarrow{AM} = k\cdot\overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ називається *напрямним вектором прямої AB*. Будь-який вектор $k\cdot\overrightarrow{AB}$ при $k \neq 0$ є також напрямним вектором прямої.

Теорема 3.4. Якщо C і D – дві різні точки прямої AB, то прямі CD і AB збігаються.

З теореми 3.4 випливає, що пряма визначається будь-якими своїми двома точками, а з означення 3.4 – що через дві різні точки можна провести пряму і тільки одну.

Означення 3.5. Нехай A, B, C – три точки, що не лежать на одній прямій. *Площиною* (ABC) називається множина таких точок M, що вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$ лінійно залежні.

Теорема 3.5. Якщо P, Q, R – три точки площини (ABC), які не лежать на одній прямій, то площина (PQR) збігається з площиною (ABC).

З цієї теореми випливає, що площина однозначно визначається будь-якими своїми трьома точками, які не лежать на одній прямій.

Теорема 3.6. Якщо дві точки прямої a лежать у площині α, то всі точки прямої a належать площині α.

Означення 3.6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються взаємно перпендикулярними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Означення 3.7. Дві прямі називаються *перпендикулярними* одна до одної, якщо для будь-яких точок A і B першої прямої і будь-яких двох точок C і D другої прямої вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярні один до одного.

Аналогічно можна продовжити розвивати геометрію Евкліда на основі аксіоматики Вейля. При цьому легко помітити, що подальші формулювання означень і теорем дуже мало відрізняються від традиційних. Тому не будемо ці формулювання наводити.

Контрольні запитання

1. Охарактеризуйте етапи розвитку аксіоматичного методу побудови геометрії.
2. Назвіть перші спроби доведення несуперечливості геометрії Лобачевського.
3. Які вимоги повинна задовольняти система аксіом?
4. Яка система аксіом називається несуперечливою? Незалежною? Повною?
5. Що таке реалізація (інтерпретація) системи аксіом?
6. Назвіть основні об'єкти і основні відношення аксіоматики Гільберта.
7. Назвіть аксіоми належності системи Гільберта.
8. Назвіть аксіоми порядку системи Гільберта.
9. Назвіть аксіоми конгруентності системи Гільберта.
10. Назвіть аксіоми неперервності та паралельності системи Гільберта.
11. Назвіть основні об'єкти і основні відношення систем аксіом М. Пієрі та В.Ф. Кагана.
12. Назвіть основні об'єкти та основні відношення векторної системи аксіом Г. Вейля.
13. Назвіть аксіоми додавання системи Г. Вейля.
14. Назвіть аксіоми множення вектора на число системи Г. Вейля.
15. Назвіть аксіоми скалярного добутку векторів.
16. Назвіть аксіоми розмірності та аксіоми відкладання вектора в системі Г. Вейля.
17. Сформулюйте основні наслідки з системи аксіом Г. Вейля.

Розділ **4**

Сучасна аксіоматична побудова евклідової геометрії

§ 21. Основні поняття

Аксіоматична побудова евклідової геометрії на основі системи аксіом Гільберта досить громіздка і складна. Значні труднощі виникли при введенні поняття міри для відрізків і кутів. Тому в другій половині XX століття ряд геометрів запропонували більш сучасні системи аксіом для побудови геометрії Евкліда. Серед них найбільш відомими є системи аксіом О.В. Погорєлова, А.М. Колмогорова, О.Д. Александрова, Л.С. Атанасяна та ін.

Існування багатьох різних систем аксіом для обґрунтування однієї і тієї самої геометрії Евкліда зумовлено тим, що за основні поняття геометрії можна взяти різні об'єкти геометрії: або точку, пряму, площину (Д. Гільберт, О.В. Погорєлов, А.М. Колмогоров), або точку і вектор (Г. Вейль), або точку, відрізок (О.Д. Александров), або точку, відрізок, півплощину (Л.С. Атанасян). Залежно від вибору основних об'єктів називаються основні відношення між ними, а потім формулюються відповідні аксіоми, які визначають основні властивості вибраних об'єктів.

Розглянемо одну із сучасних аксіоматичних побудов евклідової геометрії на основі системи аксіом, запропонованої видатним українським геометром академіком О.В. Погорєловим, яка найближче примикає до аксіоматики шкільного курсу геометрії [30].

Основними об'єктами в системі аксіом Погорєлова є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями між ними — відношення *«належності»* для точок, прямих і площин, відношення *«лежати між»* для точок на прямій, *«довжина»* – для відрізків, *«градусна* *міра кута»* – для кутів. Ці поняття не означаються, а роз'яснюються в аксіомах. Система аксіом Погорєлова складається з дев'яти аксіом планіметрії та трьох аксіом стереометрії.

§ 22. Аксіоми належності

Аксіоми належності на площині визначають властивості взаємного розміщення точок і прямих, яке виражається відношенням «належати». При цьому вважаються рівнозначними висловлювання «точка належить прямій»; «точка лежить на прямій», «пряма проходить через точку».

Група аксіом належності на площині містить дві аксіоми:

I_1. Які б не були дві точки, існує пряма, яка проходить через ці точки, і причому тільки одна.

Звідси випливає, що пряма визначається двома точками. Це дає підставу позначати її *AB* (рис. 1.59).

I_2. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існують три точки, які не лежать на одній прямій.

З цих аксіом безпосередньо випливають такі твердження.

Теорема 4.1 Дві прямі або не перетинаються, або перетинаються лише в одній точці.

Дійсно, якби прямі мали дві точки перетину, то через ці точки проходили б дві прямі, що суперечить аксіомі I_1.■

Рис. 1.59

Теорема 4.2. Яка б не була пряма, існує точка, яка не лежить на цій прямій.

Дійсно, з трьох точок, існування яких стверджується аксіомою I_2, принаймні одна не лежить на прямій, що проходить через дві інші точки.■

§ 23. Аксіоми порядку

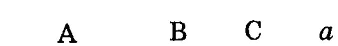


Рис. 1.60

Ці аксіоми виражають властивості взаємного розміщення точок на прямій, тобто роз'яснюють відношення «лежати між».

II_2. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими (рис. 1.60).

II_3. Пряма розбиває множину точок площини, які їй не належать, на дві підмножини (півплощини) так, що відрізок, який з'єднує точки однієї півплощини, не перетинає прямої, а відрізок, який з'єднує точки різних півплощин, перетинається з цією прямою (рис. 1.61).

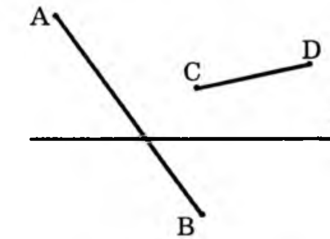


Рис. 1.61

На основі цих аксіом, використовуючи поняття «лежати між», можна ввести нові поняття: «лежати по один бік», «відрізок», «промінь», «кут», «трикутник».

Означення 4.1. Будемо говорити, що точки *A* і *B* лежать по один бік від точки *O*, якщо точка *O* не лежить між точками *A* і *B* (рис. 1.62).

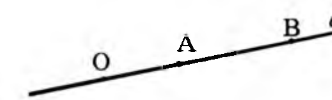


Рис. 1.62

Означення 4.2. Відрізком називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками (рис. 1.63).

Рис. 1.63

Означення 4.3. Променем, або *півпрямою*, називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки (рис. 1.64).

Теорема 4.3. Точка *O*, яка лежить на прямій *a*, розбиває цю пряму на два промені і є початковою точкою для кожного з них. Точка *O* не лежить між точками одного променя і лежить між точками різних променів.

Рис. 1.64

Доведення. Проведемо через точку *O* яку-небудь пряму *b*, відмінну від *a*. Розглянемо промінь *OA* (рис. 1.65). За аксіомою II_2 пряма *b* розбиває площину на дві різні півплощини. Точки променя *OA* належать одній і тільки одній півплощині, а саме тій, в якій лежить точка *A*. Дійсно, будь-який відрізок прямої *a* може перетинати пряму *b* лише в точці *O*. Звідси випливає, що якщо *X* – точка променя *OA*, то відрізок *XA* не перетинає пряму *b*, тобто точки *X* і *A* лежать в одній півплощині. Навпаки, якщо *X* – точка прямої *a*, яка лежить в одній півплощині з точкою *A*, то відрізок *XA* не перетинає *b*, і,

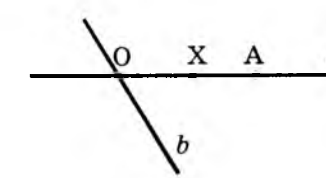


Рис. 1.65

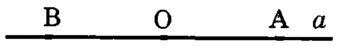


Рис. 1.66

отже, точка O не лежить між X і A, тобто точки X і A лежать по один бік від точки O, і тому точка X належить променю OA. Таким чином, частини прямої a, які лежать в різних півплощинах відносно прямої b, є різними променями прямої a зі спільним початком O, тобто точка O розбиває пряму a на два промені, що й треба було довести. ∎

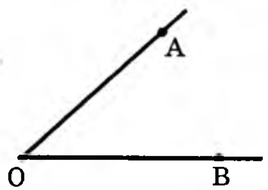


Рис. 1.67

Означення 4.4. Два промені однієї прямої зі спільним початком називаються *доповняльними променями* (рис. 1.66).

Означення 4.5. *Кутом* називається фігура, яка складається з двох різних променів із спільною початковою точкою (рис. 1.67). Ця точка називається *вершиною* кута, а промені – *сторонами* кута. Якщо сторони кута є доповняльними променями однієї прямої, то кут називається *розгорнутим* (рис. 1.68).

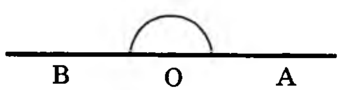


Рис. 1.68

Означення 4.6. Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Ці точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки, що їх з'єднують, – *сторонами* трикутника (рис. 1.69).

Теорема 4.4 (Паша). Якщо пряма, що не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших його сторін (рис. 1.70).

Ця теорема доведена в § 9 (частина I).

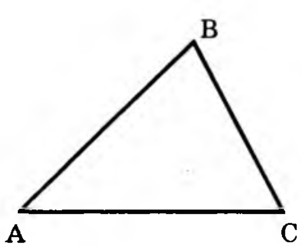


Рис. 1.69

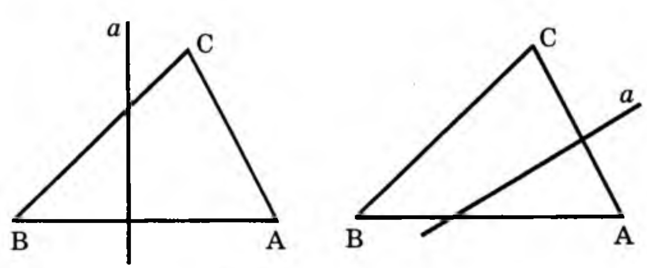


Рис. 1.70

§ 24. Аксіоми міри для відрізків і кутів

Рис. 1.71

Ці аксіоми визначають поняття «довжина відрізка» і «градусна міра кута».

Аксіома III$_1$. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Якщо точка C лежить на відрізку AB, то довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC і BC (рис. 1.71).

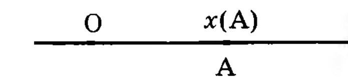


Рис. 1.72

Ця аксіома дозволяє ввести координати на прямій. Дійсно, нехай O – будь-яка точка прямої (рис. 1.72). Вважатимемо, що її координата дорівнює нулю. Точка O розбиває пряму на два промені. Домовимось один з них вважати додатним, а другий – від'ємним. Тоді якщо точка A належить додатній півпрямій, то її координатою $x(A)$ будемо називати довжину відрізка OA. Якщо ж точка A належить від'ємній півпрямій, то її координатою вважатимемо від'ємне число, яке за абсолютною величиною дорівнює довжині відрізка OA.

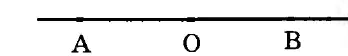


Рис. 1.73

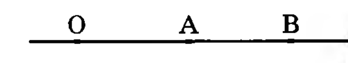


Рис. 1.74

Легко переконатися, що довжина відрізка AB $d(AB) = |x(B) - x(A)|$.

Справді, якщо точки A і B належать різним півпрямим, то точка O лежить між A і B (рис. 1.73) і за аксіомою III$_1$

$$d(AB) = d(OB) + d(OA) = -x(A) + x(B) = |x(B) - x(A)|.$$

Якщо ж точки A і B належать одній півпрямій, наприклад додатній, то точка O не лежить між A і B. Отже, або точка A лежить між O і B, або точка B лежить між O і A. Нехай, наприклад, точка A лежить між O і B. Тоді $d(OB) = d(OA) + d(AB)$, звідки

$$d(AB) = d(OB) - d(OA) = x(B) - x(A) = |x(B) - x(A)|.$$

Аналогічно розглядаються і інші випадки взаємного розміщення точок O, A, B (рис. 1.74).

Перш ніж сформулювати другу аксіому, введемо нове поняття.

Означення 4.7. Будемо говорити, що *промінь проходить між сторонами кута* (ab), якщо він виходить з його вершини і перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах кута. У випадку розгорнутого кута вважатимемо, що будь-який промінь, який виходить з його вершини і відмінний від його сторони, проходить між сторонами кута (рис. 1.75).

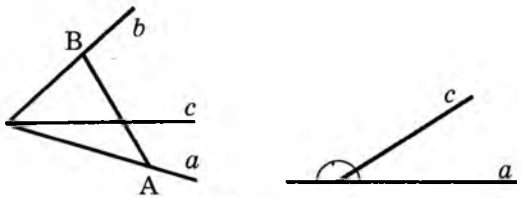


Рис. 1.75

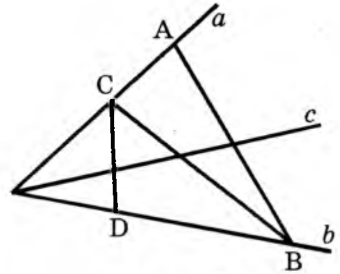


Рис. 1.76

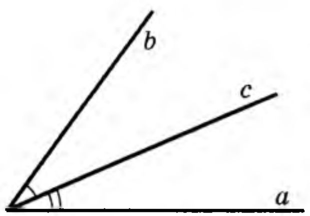


Рис. 1.77

Теорема 4.5. Якщо промінь проходить між сторонами кута, то він перетинає будь-який відрізок з кінцями на сторонах цього кута.

Доведення. Оскільки промінь c проходить між сторонами кута (ab), то за означенням він перетинає якийнебудь відрізок AB з кінцями на сторонах цього кута (рис. 1.76). Нехай CD – який-небудь інший відрізок з кінцями на сторонах цього кута. Тоді за теоремою Паша промінь c перетне відрізок BC і за цією ж теоремою і відрізок CD.■

Аксіома III_2. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо промінь c проходить між сторонами кута (ab), то градусна міра кута (ab) дорівнює сумі градусних мір кутів (ac) і (bc).

На основі цієї аксіоми і теореми Паша можна довести таку теорему.

Теорема 4.6. Якщо від променя a в одній півплощині відносно цього променя і його продовження відкласти кути (ab) і (ac), то або промінь c проходить між сторонами кута (ab), або промінь b проходить між сторонами кута (ab). У будь-якому випадку $(bc) = |(ac) - (ab)|$ (рис. 1.77).

Доведення. Візьмемо на промені a точку A, на його доповненні – точку A_1, а на промені c – точку C (рис. 1.78). Пряма, яка містить промінь b, перетинає сторону AA_1 ΔACA_1 і, отже, за теоремою Паша перетинає або сторону AC, або сторону A_1C ΔACA_1. Перетин здійснюється променем b, оскільки доповняльний промінь лежить в другій півплощині.

Якщо промінь b перетинає відрізок AC (рис. 1.78), то він проходить між сторонами кута (ac). При цьому за аксіомою III_2 $(ac) = (ab) + (bc)$, звідки $(bc) = |(ac) - (ab)|$.

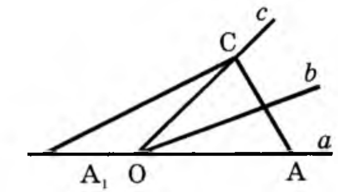


Рис. 1.78

Якщо ж промінь b перетинає сторону A_1C в деякій точці D (рис. 1.79), то, застосовуючи теорему Паша до ΔA_1DA і прямої, що містить промінь c, доходимо висновку, що промінь c перетинає відрізок AD і, отже, проходить між сторонами кута (ab). При цьому $(ab) = (ac) + (bc)$, звідки $(bc) = (ab) - (ac) = |(ac) - (ab)|$.

Теорему доведено.■

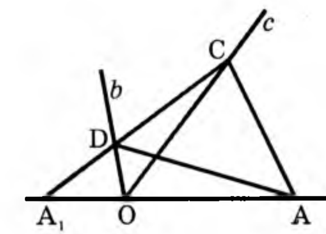


Рис. 1.79

§ 25. Аксіома існування трикутника, рівного даному

На основі аксіом міри для відрізків і кутів можна ввести відношення рівності для відрізків, кутів і трикутників.

Означення 4.8. *Два відрізки* називаються *рівними*, якщо вони мають однакову довжину. Два кути називаються рівними, якщо вони мають однакову градусну міру.

Означення 4.9. *Трикутники* називаються *рівними*, якщо в них рівні відповідні сторони і відповідні кути, тобто $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, якщо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Аксіома IV. Нехай ABC – трикутник і a – промінь. Тоді існує трикутник $A_1B_1C_1$ рівний трикутнику ABC, в якому вершина A_1 збігається з початком променя a, вершина B_1 лежить на промені a, а вершина C_1 лежить у заданій півплощині відносно прямої, яка містить промінь a (рис. 1.80).

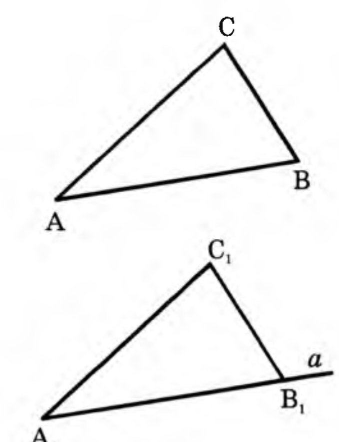


Рис. 1.80

На основі цієї аксіоми можна довести такі теореми.

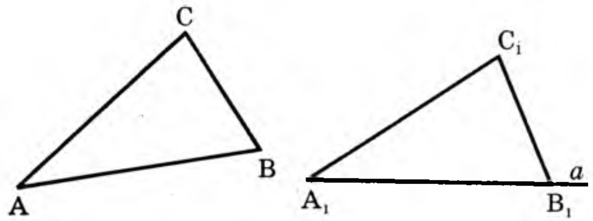


Рис. 1.81

Рис. 1.82

Теорема 4.7. На даному промені від його початкової точки можна відкласти відрізок, рівний даному, і тільки один.

Доведення. Нехай a – даний промінь і AB – даний відрізок (рис. 1.81). Візьмемо довільну точку C зовні прямої AB. За аксіомою IV існує $\Delta A_1B_1C_1$, в якому вершина A_1 збігається з початком променя a, а вершина B_1 лежить на промені a. Тоді $A_1B_1 = AB$ (рис. 1.81).

Доведемо єдиність відрізка A_1B_1. Припустимо, що на промені a з початковою точкою O можна відкласти два відрізки OX і OY, рівні даному відрізку AB. Тоді $OX = OY$ (рис. 1.82). За аксіомою II_1 з трьох точок O, X і Y одна лежить між двома іншими. Цією точкою не може бути точка O, оскільки точки X і Y лежать по один бік від неї. Якщо цією точкою є точка X, то за аксіомою III_1 $OY = OX + XY$, звідки $XY = 0$. Але це неможливо, оскільки за аксіомою III_1 довжина будь-якого відрізка є додатне число. Отже, точка X не лежить між O і Y. Аналогічно доведемо, що точка Y не може лежати між точками O і X. Ця суперечність доводить, що відрізок A_1B_1 єдиний.

Теорема 4.8. Від даної півпрямої в даній півплощині, яка визначається цією півпрямою і її продовженням, можна відкласти кут, рівний даному куту, і тільки один.

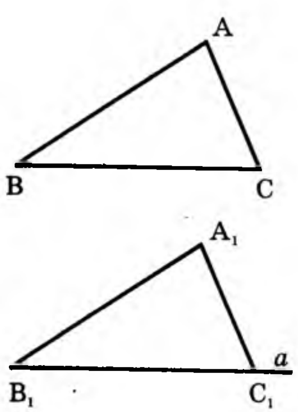


Рис. 1.83

Доведення. Нехай ABC – даний кут і a – даний промінь (рис. 1.83).

За аксіомою IV існує $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$, в якому вершина B_1 збігається з початком променя a, вершина C_1 лежить на промені a, а вершина A_1 лежить у заданій півплощині. Тоді $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. Доведемо єдиність цього кута. Припустимо, що від променя a можна відкласти два кути (ab) і (ac), рівні даному куту. Тоді $(ab) = (ac)$ і $(bc) = |(ac) - (ac)| = 0$, що суперечить аксіомі III_2 (градусна міра кута додатна). Отже, побудований кут єдиний.

Теорему доведено.■

§ 26. Аксіома існування відрізка даної довжини

Аксіома V. Яке б не було дійсне число $d > 0$, існує відрізок довжиною d.

На основі цієї аксіоми можна довести такі теореми.

Теорема 4.9. На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини і тільки один.

Доведення. За аксіомою V існує який-небудь відрізок AB заданої довжини. За теоремою 4.7 на даному промені від його початкової точки можна відкласти і притому тільки один відрізок, рівний AB.■

Теорема 4.10. Введенням координат на прямій установлюється взаємно однозначна відповідність між точками прямої і дійсними числами.

Доведення. Користуючись аксіомою III_1, ми поставили у відповідність кожній точці прямої дійсне число – її координату. Оскільки за аксіомою V від початку координат на додатній і від'ємній півпрямих завжди можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, то кожному дійсному числу d таким способом буде поставлена у відповідність деяка точка A прямої з координатою d. Таким чином, відображення множини точок прямої на множину дійсних чисел, при якому точці прямої відповідає її координата, є взаємно однозначним.■

Можна довести ще таку теорему.

Теорема 4.11. Яке б не було додатне число $q < 180°$, від даного променя a в даній півплощині можна відкласти, і притому єдиний, кут (ab) з градусною мірою q.

Зазначимо, що в шкільному курсі ця теорема приймається за аксіому.

§ 27. Аксіома паралельних

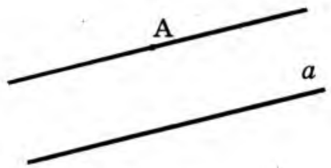


Рис. 1.84

Аксіома VI. Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше однієї прямої, паралельної даній (рис. 1.84).

Безпосередньо з цієї аксіоми випливають такі твердження.

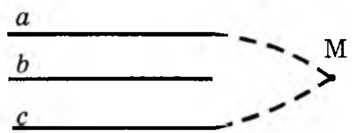


Рис. 1.85

Теорема 4.12. Якщо пряма $a \parallel b$, а $b \parallel c$, то $a \parallel c$, тобто властивість паралельності прямих є транзитивною.

Доведення. Якби прямі a і c перетинались в якій-небудь точці M (рис. 1.85), то через цю точку проходило б дві прямі a і c, які не перетинають b, що суперечить аксіомі VI.

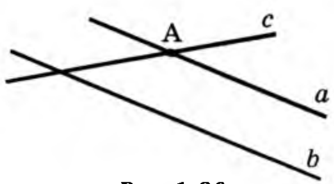


Рис. 1.86

Теорема 4.13. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

Доведення. Нехай $a \parallel b$ і c перетинає a (рис. 1.86). Тоді якби c не перетинала b, то через точку A проходили б дві прямі a і c, які не перетинають b, що суперечить аксіомі VI.

§ 28. Просторові аксіоми

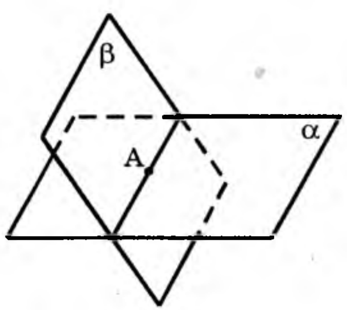


Рис. 1.87

Аксіома C_1. Яка б не була площина, існують точки, які належать цій площині, і точки, які їй не належать.

Аксіома C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій (рис. 1.87).

Аксіома C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж єдину (рис. 1.88).

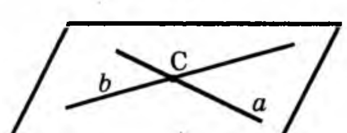


Рис. 1.88

Безпосередньо з цих аксіом випливають такі твердження.

Теорема 4.14. Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

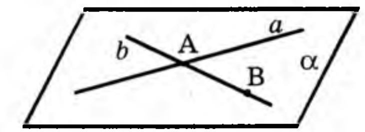


Рис. 1.89

Доведення. Нехай a – дана пряма і B – точка, яка їй не належить (рис. 1.89). Візьмемо на прямій a яку-небудь точку A (вона існує за аксіомою I_2).

Проведемо через точки A і B пряму b. За аксіомою C_3 через прямі a і b можна провести площину α. Ця площина проходить через пряму a і точку B. Доведемо, що ця площина єдина. Припустимо, що існує друга площина α′, яка також проходить через точку B і пряму a. Тоді за аксіомою C_2 площини α і α′ перетинаються по прямій. Отже, будь-які три спільні точки цих площин лежать на одній прямій. Але точка B і дві точки прямої a не лежать на одній прямій. Прийшли до суперечності.

Теорему доведено.∎

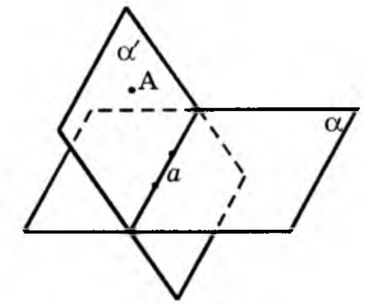


Рис. 1.90

Теорема 4.15. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.

Доведення. Нехай a – дана пряма і α – дана площина (рис. 1.90). За аксіомою I_2 існує точка A, яка не лежить на прямій a. Проведемо через точку A і пряму a площину α′ (це завжди можна зробити згідно з теоремою 4.14). Якщо площина α збігається з α′, то площина α містить пряму a. Якщо площина α′ відмінна від α, то ці площини, згідно з аксіомою C_2, перетинаються по прямій a, яка містить дві точки прямої a. За аксіомою I_1 пряма a' збігається з a. Отже, $a \in α$.

Теорему доведено.∎

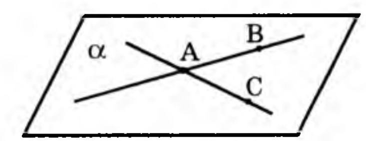


Рис. 1.91

Теорема 4.16. Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Доведення. Нехай A, B, C – три дані точки, які не лежать на одній прямій (рис. 1.91). Проведемо прямі AB і AC; вони різні. За аксіомою C_3 через ці прямі можна провести площину, яка міститиме дані точки. За аксіомою C_3 така площина єдина (площина, яка проходить через точки A, B, C, містить, згідно з теоремою 4.15, прямі AB і AC, а за аксіомою C_3 така площина – єдина).

Теорему доведено.∎

Контрольні запитання

1. Які поняття є основними в системі аксіом О.В. Погорєлова?
2. Сформулюйте аксіоми належності, доведіть основні наслідки з них.
3. Сформулюйте аксіоми порядку. Яке відношення роз'яснюється в цих аксіомах?
4. Користуючись основними поняттями «точка», «пряма», «лежати між», дайте означення понять «лежати по один бік від даної точки», «відрізок», «промінь».
5. Користуючись аксіомами порядку, доведіть, що кожна точка прямої розбиває її на два різні промені з початком у цій точці.
6. Які промені називаються доповняльними?
7. Користуючись поняттями «точка», «промінь», «відрізок», дайте означення понять «кут», «розгорнутий кут», «трикутник».
8. Сформулюйте і доведіть теорему Паша.
9. Сформулюйте аксіому міри для відрізків. Покажіть, що, користуючись цією аксіомою, можна ввести координати на прямій, тобто кожній точці прямої поставити у відповідність дійсне число. Чи можна, навпаки, виходячи лише з цієї аксіоми та попередніх аксіом, кожному дійсному числу поставити у відповідність точку на прямій?
10. Що означає висловлення: «Промінь проходить між сторонами кута»?
11. Користуючись теоремою Паша, доведіть, що коли промінь проходить між сторонами кута, то він перетинає будь-який відрізок з кінцями на сторонах цього кута.
12. Сформулюйте аксіому міри для кутів. Доведіть теорему про відкладання кута від даного променя.
13. Користуючись поняттями «довжина відрізка» та «градусна міра кута», дайте означення рівності відрізків і кутів, а потім – рівності трикутників.
14. Сформулюйте аксіому відкладання трикутника, рівного даному. Доведіть основні наслідки з неї.
15. Сформулюйте аксіому існування відрізка даної довжини. Користуючись цією аксіомою, доведіть, що кожному дійсному числу можна поставити у відповідність єдину точку на прямій. Яке значення має цей факт?
16. Сформулюйте аксіому паралельних та доведіть основні твердження, які випливають безпосередньо з цієї аксіоми. Яку роль відіграє ця аксіома в евклідовій геометрії?
17. Сформулюйте просторові аксіоми, доведіть основні наслідки з них.

Розділ 5

Дослідження системи аксіом геометрії

§ 29. Завдання обґрунтування системи аксіом

Як уже відзначалось, вибір системи аксіом, на якій будується геометрія, не є однозначним. Щоб вибрану сукупність аксіом можна було покласти в основу побудови геометрії (або іншої науки) необхідно і достатньо, щоб ця сукупність утворювала *систему аксіом*, тобто була несуперечливою, незалежною і повною.

Завдання обґрунтування даної системи аксіом і полягає в тому, щоб довести її несуперечливість, повноту, довести незалежність кожної аксіоми системи від інших аксіом цієї ж системи.

Проведемо дослідження системи аксіом О.В. Погорєлова і Г. Вейля, покладених в основу евклідової геометрії, і аксіоматики геометрії М.І. Лобачевського.

§ 30. Декартова реалізація системи аксіом евклідової геометрії (за О.В. Погорєловим)

30.1. Несуперечливість системи аксіом евклідової геометрії

Доведення несуперечливості системи аксіом зводиться до побудови хоча б однієї її реалізації (інтерпретації), в якій основні поняття і аксіоми набувають конкретного змісту. Якщо існує хоча б одна така сфера конкретних речей, відношення між якими задовольняють дану аксіоматику, то несуперечливість даної системи аксіом буде такою, якою є несуперечливість об'єктів теорії (науки), через які визначаються основні поняття даної системи аксіом. Отже, доведення несуперечливості даної системи аксіом є *умовним*.

Множина об'єктів, в яких дана система аксіом знаходить реальне втілення, називається *моделлю* або *інтерпретацією* досліджуваної системи аксіом.

Для побудови реалізації системи аксіом евклідової геометрії, запропонованої О.В. Погорєловим, візьмемо об'єкти множини всіх дійсних чисел, тобто основним поняттям і аксіомам цієї системи надамо арифметичний зміст. Така інтерпретація називається *декартовою* або *арифметичною*.

Надамо конкретного арифметичного змісту поняттям «точка», «пряма», «належати».

Означення 5.1. *Точкою* назвемо будь-яку пару дійсних чисел x і y, взятих у певному порядку: $(x; y)$. Числа x і y називатимемо *координатами точки*.

Означення 5.2. *Прямою* назвемо сукупність всіх точок, координати яких задовольняють рівняння $ax + by + c = 0$, де $a^2 + b^2 \neq 0$. Це рівняння називатимемо рівнянням прямої. Прямі $x = 0$ і $y = 0$ будемо називати осями координат, а точку $(0; 0)$ – початком координат.

Означення 5.3. Будемо говорити, що *точка належить прямій*, якщо її координати задовольняють рівняння прямої.

Покажемо, що при такому конкретному розумінні основних понять «точка», «пряма», «належати» для них виконуються аксіоми належності.

1. Доведемо істинність аксіоми I_1, яка стверджує, що через дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну. Нехай $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ – дані точки. Тоді прямою, яка проходить через ці точки, буде пряма, що задається рівнянням $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = 0$, бо координати даних точок задовольняють це рівняння. Доведемо, що ця пряма єдина. Припустимо, що через точки $(x_1; y_1)$ і $(x_2; y_2)$ проходять дві прямі. Тоді система рівнянь має два розв'язки. Але в такому разі вона має безліч розв'язків і, отже, ці рівняння лінійно залежні, тобто відрізняються лише сталим множником. А це означає, що прямі збігаються, тобто через дві точки не можуть проходити дві різні прямі.

2. Доведемо істинність аксіоми I_2, яка стверджує, що на кожній прямій існують принаймні дві точки, і існують три точки, які не лежать на прямій.

Нехай $ax + by + c = 0$ – рівняння прямої. Тоді один із коефіцієнтів a і b відмінний від нуля. Нехай, наприклад, $b \neq 0$. Візьмемо довільні числа $x_1 \neq x_2$ і знайдемо числа y_1 і y_2 за формулами

$$y_1 = -\frac{ax_1 + c}{b}, \quad y_2 = \frac{ax_2 + c}{b}.$$

Точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ лежать на даній прямій.

Розглянемо точки $(0; 0)$, $(0; 1)$ і $(1; 0)$. Ці три точки не лежать на одній прямій. Справді, припустимо, що вони лежать на деякій прямій $ax + by + c = 0$. Підставляючи координати точок у це рівняння послідовно, одержимо $c = 0$; $b = 0$; $a = 0$, що суперечить нашому означенню прямої.

Надамо конкретного арифметичного змісту поняттю «довжина відрізка».

Означення 5.4. *Відстанню* між точками $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ назвемо число $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Означення 5.5. *Довжиною* відрізка назвемо відстань між його кінцями.

Тоді виконується аксіома існування відрізка даної довжини. Дійсно, яке б не було дійсне число $d > 0$, існує відрізок довжини d. Таким відрізком буде, наприклад, відрізок з кінцями в точках $(0; 0)$ і $(d; 0)$, оскільки

$$\sqrt{(d - 0)^2 + (0 - 0)^2} = d.$$

Перевіримо виконання аксіоми паралельних, а саме: покажемо, що в декартовій реалізації через точку $(x_0; y_0)$, яка лежить зовні прямої $ax + by + c = 0$, можна провести не більше однієї прямої, паралельної їй. Припустимо, що існують дві прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, які проходять через точку $(x_0; y_0)$ і паралельні даній прямій. Тоді обидві системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ ax + by + c = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2 = 0; \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

несумісні. Тому їх визначники дорівнюють нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси випливає, що $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$. Оскільки ж система рівнянь

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

має розв'язок $(x_0; y_0)$, то її рівняння лінійно залежні, тобто відрізняються лише множником. А це означає, що прямі збігаються, що суперечить умові. Аксіома паралельних, таким чином, у декартовій реалізації виконується.

Аналогічно можна показати, що в даній реалізації виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, сформульовані О.В. Погорєловим (розділ 4). Перевірку виконання ряду інших аксіом у цій реалізації можна знайти в посібнику [38].

Ми побудували арифметичну реалізацію системи аксіом евклідової геометрії, надавши основним геометричним поняттям конкретного арифметичного змісту і показавши, що всі аксіоми евклідової геометрії в цій реалізації виконуються. Оскільки аксіоми геометрії у цій реалізації доводилися на основі аксіом арифметики, то питання про несуперечливість системи аксіом евклідової геометрії зводиться до питання про несуперечливість арифметики, тобто евклідова геометрія несуперечлива, якщо несуперечливою є арифметика дійсних чисел. А несуперечливість системи аксіом арифметики підтверджується багатовіковою практикою людства.

30.2. Повнота системи аксіом евклідової геометрії

Питання про повноту системи аксіом тісно пов'язане з питанням про ізоморфізм всіх її реалізацій.

Означення 5.6. Дві реалізації R' і R'' деякої теорії T називаються ізоморфними, якщо між елементами цих реалізацій (що відповідають основним поняттям теорії T) можна встановити взаємно однозначну відповідність, яка зберігає відношення, встановлені аксіомами.

Теорема 5.1. Якщо всі реалізації системи аксіом теорії T ізоморфні, то ця система аксіом повна.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай всі реалізації системи аксіом теорії T ізоморфні, але система аксіом T неповна. Це означає, що існує деяке твердження a, яке не може бути виведене з аксіом T і

не знаходиться з ними в суперечності. Тоді можна утворити дві несуперечливі системи аксіом T' і T'', приєднуючи до аксіом T аксіому a або її заперечення $\overline{a}$.

Нехай R' і R'' – реалізації систем аксіом T' і T''. Кожна з них є одночасно реалізацією T. Оскільки в T' має місце a, а в T'' – $\overline{a}$, то ці реалізації не ізоморфні. Прийшли до суперечності, яка й доводить теорему.■

Теорема 5.2. Система аксіом евклідової геометрії є повною, тобто не можна приєднати до неї жодних нових аксіом, які б не випливали з уже прийнятих аксіом і не суперечили їм.

Доведення. Згідно з теоремою 5.1 для доведення даної теореми досить установити ізоморфізм всіх реалізацій системи аксіом евклідової геометрії. Оскільки дві реалізації, ізоморфні третій, є ізоморфними між собою, то досить довести ізоморфізм всіх реалізацій декартової реалізації. Встановимо такий ізоморфізм.

Нехай R – яка-небудь реалізація системи аксіом евклідової геометрії на площині. Побудуємо аналітичну геометрію, яка відповідає цій реалізації. Введемо на площині прямокутну декартову систему координат точно так, як це робиться в аналітичній геометрії. Тоді кожна пряма на площині буде задаватись лінійним рівнянням $ax + by + c = 0$. Для відстані між точками виводиться формула $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Поставимо тепер у відповідність точці $(x; y)$ декартової реалізації точку реалізації R з координатами x, y; прямій $ax + by + c = 0$ декартової реалізації – пряму в реалізації R, яка задається таким самим рівнянням. Ця взаємно однозначна відповідність між точками і прямими декартової реалізації і точками і прямими реалізації R є *ізоморфізмом*.

Дійсно, якщо в декартовій реалізації точка A лежить на прямій a і A', a' – відповідні точка і пряма в реалізації R, то A' лежить на прямій a'.

Відповідні відрізки декартової реалізації і реалізації R мають однакові довжини, оскільки виражаються однією й тією ж формулою через координати кінців.

Отже, встановлена нами взаємно однозначна відповідність між точками і прямими декартової реалізації і довільної реалізації R – ізоморфізм. Звідси випливає, що всі реалізації системи аксіом евклідової геометрії ізоморфні і, отже, за теоремою 5.1 система аксіом евклідової геометрії повна.

30.3. Незалежність аксіоми існування відрізка заданої довжини

Щоб довести незалежність деякої аксіоми a від інших аксіом теорії T, досить побудувати таку реалізацію R системи аксіом теорії T, в якій аксіома a не виконується. Якщо таку реалізацію вдається побудувати, то аксіома a – незалежна. Дійсно, якби аксіома a була наслідком інших аксіом, то це було б і в реалізації R, тобто в R було б справедливе твердження a, що суперечить побудові R.

Цим способом ми й доведемо незалежність аксіоми існування відрізка даної довжини від інших аксіом евклідової геометрії.

Теорема 5.3. Аксіома існування відрізка заданої довжини незалежна, тобто не може бути одержана як наслідок з інших аксіом евклідової геометрії.

Доведення. Позначимо через G сукупність дійсних чисел, яка містить всі раціональні числа, а також всі числа, які одержуються з раціональних чисел за допомогою скінченного числа дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування квадратного кореня. Числами із G не вичерпуються всі дійсні числа.

Побудуємо тепер декартову реалізацію системи аксіом тим самим способом, що й раніше, але будемо користуватись при цьому лише числами із G. Наприклад, точкою назвемо пару чисел $(x; y)$ із G, прямою – сукупність точок, які задовольняють рівняння $ax + by + c = 0$ з коефіцієнтами a, b, c із G і т.д. Перевіряючи виконання аксіом, ми слово в слово повторимо всі проведені нами раніше доведення. При цьому встановимо виконання всіх аксіом, крім аксіоми існування відрізка даної довжини. Ця аксіома в даній реалізації не буде виконуватися. Дійсно, довжина відрізка з кінцями $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ в даній реалізації визначається за формулою $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Через те що числа x_1, y_1, x_2, $y_2 \in G$, то й $d \in G$. Оскільки ж числа із G не вичерпують всіх дійсних чисел, то знайдеться таке дійсне число d, яке в даній реалізації не може бути довжиною жодного відрізка. Наприклад, у даній реалізації не існує відрізка довжиною π.■

Таким чином, аксіома існування відрізка даної довжини не залежить від інших аксіом евклідової геометрії.

30.4. Незалежність аксіоми паралельних

У такий же спосіб доведемо незалежність аксіоми паралельних від інших аксіом евклідової геометрії.

Теорема 5.4. Аксіома паралельних евклідової геометрії незалежна, тобто не може бути виведена як наслідок з інших аксіом.

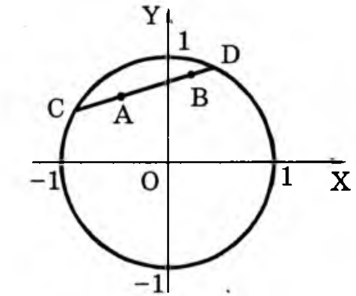


Рис. 1.92

Доведення. Згідно із загальним способом доведення незалежності аксіом нам досить побудувати таку реалізацію системи аксіом евклідової геометрії, в якій би виконувались всі аксіоми, крім аксіоми паралельних. Побудуємо таку реалізацію.

Під точкою будемо розуміти довільну точку евклідової площини всередині одиничного круга $x^2 + y^2 < 1$, під прямою – довільну хорду цього круга (рис. 1.92) Відношення належності будемо розуміти так, як і в евклідовій площині. Довжину відрізка AB з кінцями $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ визначимо так. Нехай пряма AB перетинає коло $x^2 + y^2 = 1$ в точках $(x_3; y_3)$, $(x_4; y_4)$. Тоді довжиною відрізка AB назвемо число

$$d(AB) = \left| \ln\left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} \right) \right|,$$

якщо $x_1 \neq x_2$ і аналогічний вираз із заміною x на y, якщо $y_1 \neq y_2$.

У цій реалізації виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, крім аксіоми паралельних. Дійсно, через дану точку круга можна провести безліч хорд, які не перетинають дану хорду. Побудова цієї реалізації і доводить незалежність аксіоми паралельних від інших аксіом.

§ 31. Арифметична реалізація векторної системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії

31.1. Несуперечливість системи аксіом Г. Вейля евклідової геометрії для простору TE_3

Основним поняттям системи аксіом Вейля надамо конкретний зміст за допомогою дійсних чисел, тому така реалізація називається *арифметичною*.

1. *Вектором* назвемо будь-яку матрицю-стовпець вигляду $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$, де α_1, α_2, α_3 – довільні дійсні числа. При цьому два вектори збігаються тоді і тільки тоді, коли відповідні елементи двох матриць рівні. Збігання векторів позначатимемо знаком рівності.

2. *Точкою* назвемо будь-яку матрицю-рядок вигляду $(m_1\ m_2\ m_3)$, де m_1, m_2, m_3 – довільні дійсні числа. При цьому дві точки $(m_1\ m_2\ m_3)$ і $(n_1\ n_2\ n_3)$ збігаються тоді і тільки тоді, коли $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $m_3 = n_3$.

3. *Сумою векторів* $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$ назвемо вектор $\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_3+\beta_3\end{pmatrix}$.

4. *Добутком числа k на вектор* $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ назвемо вектор $\begin{pmatrix}k\alpha_1\\ k\alpha_2\\ k\alpha_3\end{pmatrix}$.

5. *Скалярним добутком векторів* $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}$, встановленим ненульовим вектором $\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$, називається число $\dfrac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$.

6. *Належність* упорядкованої пари точок $(m_1\ m_2\ m_3)$ і $(n_1\ n_2\ n_3)$ вектору $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ визначається умовою $n_1 - m_1 = \alpha_1$, $n_2 - m_2 = \alpha_2$, $n_3 - m_3 = \alpha_3$.

Можна переконатись, що при таких означеннях основних об'єктів і основних відношень всі аксіоми Вейля тривимірного евклідового простору виконуються. Перевірка аксіом першої, другої, третьої і четвертої груп майже тривіальна, якщо взяти за нульовий вектор $\bar{0}$ матрицю-стовпчик $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ (аксіома 1.3), а за три лінійно незалежні вектори (аксіома 4.1) матриці-стовпці $\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. Перевіримо реалізацію аксіом 5.1 і 5.2.

Аксіома 5.1. Нехай $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ – довільна точка і $\bar{b} = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$ – довільний вектор.

Треба довести, що існує одна і тільки одна точка $B = (m_1\ m_2\ m_3)$ така, що вектор $\overrightarrow{AB} = \bar{b}$. За означенням належності (6) при цьому має виконуватись умова: $m_1 - a_1 = b_1$, $m_2 - a_2 = b_2$, $m_3 - a_3 = b_3$. З цієї умови випливає, що існує одна і тільки одна трійка чисел m_1, m_2, m_3, яка задовольняє ці числові рівності.■

Аксіома 5.2. Нехай маємо три довільні точки $A = (a_1\ a_2\ a_3)$, $B = (b_1\ b_2\ b_3)$, $C = (c_1\ c_2\ c_3)$.

За домовленістю (6) знаходимо вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = ((b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ (b_3 - a_3))$;

$\overrightarrow{BC} = ((c_1 - b_1)(c_2 - b_2)\ (c_3 - b_3))$;

$\overrightarrow{AC} = ((c_1 - a_1)(c_2 - a_2)\ (c_3 - a_3))$.

Тоді

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = ((b_1 - a_1 + c_1 - b_1)(b_2 - a_2 + c_2 - b_2)\ (b_3 - a_3 + c_3 - b_3)) =$$

$$= ((c_1 - a_1)(c_2 - a_2)(c_3 - a_3)) = \overrightarrow{AC}.$$

Аксіома 5.2 доведена.■

Отже, система аксіом Вейля, а тому і геометрія Евкліда, *несуперечлива* настільки, наскільки несуперечливою є арифметика дійсних чисел.

31.2. Незалежність системи аксіом Г. Вейля

Як уже зазначалось, несуперечлива система аксіом називається *незалежною (мінімальною)*, якщо кожна аксіома даної системи не є логічним наслідком інших аксіом цієї системи.

Нехай $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – дана система аксіом геометрії. Для доведення, наприклад, незалежності аксіом A_n від аксіом $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$ треба побудувати *нову* систему аксіом $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, \overline{A}_n\}$, де $\overline{A}_n$ – заперечення аксіоми A_n, і довести її несуперечливість. Якщо аксіома

A_n є наслідком аксіом $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}\}$, то вона буде наслідком і системи $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, \overline{A}_n\}$, тобто в цій новій аксіоматиці аксіому A_n можна довести як теорему. Отже, у новій аксіоматиці матимуть місце два суперечливих між собою твердження A_n і $\overline{A}_n$, але тоді ця аксіоматика не буде несуперечливою.

Розглянемо декілька прикладів доведення незалежності окремих аксіом Вейля.

1. *Доведення незалежності аксіоми 4.1 від аксіом простору TE_3.* Треба довести несуперечливість системи аксіом

$$\{1.1-1.4, 2.1-2.4, 3.1-3.5, \overline{4.1}, 4.2, 5.1, 5.2\}, \tag{5.1}$$

де $\overline{4.1}$ – заперечення аксіоми 4.1.

Для цього використаємо арифметичну реалізацію, побудовану для доведення несуперечливості системи аксіом Вейля простору TE_3, але внесемо до неї деякі зміни: *вектором* назвемо будь-яку матрицю-стовпчик $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$, де α_1 і α_2 – довільні дійсні числа, *скалярним добутком* векторів $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$, встановленим ненульовим вектором $\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}$, назвемо число $\dfrac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}{u_1^2+u_2^2}$.

При таких домовленостях всі аксіоми системи (5.1) виконуються, зокрема аксіома $\overline{4.1}$ виконується тому, що в даній реалізації не виконується аксіома 4.1, оскільки будь-які три вектори лінійно залежні. ■

Аналогічно доводиться незалежність аксіоми 4.2.

2. *Доведення незалежності аксіоми 5.1 від аксіом Вейля простору TE_3.* Треба довести несуперечливість системи аксіом

$$\{1.1-1.4, 2.1-2.4, 3.1-3.5, 4.1-4.2, \overline{5.1}, 5.2\} \tag{5.2}$$

де $\overline{5.1}$ – заперечення аксіоми 5.1.

Використаємо арифметичну реалізацію, побудовану для доведення несуперчливості системи аксіом Вейля простору TE_3, але внесемо такі зміни:

1) *точкою* назвемо матрицю виду $(m_1\ m_2\ m_3\ m_4)$, де m_1, m_2, m_3, m_4 – довільні дійсні числа. При цьому точки $(m_1\ m_2\ m_3\ m_4)$ і $(n_1\ n_2\ n_3\ n_4)$ збігаються тоді і тільки тоді, коли $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$, $m_3 = n_3$, $m_4 = n_4$;

2) *належність* упорядкованих пар точок $(m_1\ m_2\ m_3\ m_4)$ і $(n_1\ n_2\ n_3\ n_4)$ вектора $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ визначається умовами $n_1 - m_1 = \alpha_1$, $n_2 - m_2 = \alpha_2$, $n_3 - m_3 = \alpha_3$. У видозміненій у такий спосіб інтерпретації будуть виконуватись всі аксіоми Вейля, крім аксіоми 5.1. Аксіома 5.1 не виконується тому, що визначення належності впорядкованої пари точок і вектора числа m_4 і n_4 не фігурують, вони можуть вибиратись довільно.

3. *Доведення незалежності аксіоми 5.2.*

Для доведення належності аксіоми 5.2 в арифметичній інтерпретації п. 5.3.1 умову *належності* упорядкованої пари точок $(m_1\ m_2\ m_3)$ і $(n_1\ n_2\ n_3)$ вектора $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ сформулюємо так: $n_1 + m_1 = \alpha_1$, $n_2 + m_2 = \alpha_2$, $n_3 + m_3 = \alpha_3$.

Тоді в такій інтерпретації всі аксіоми Вейля виконуються, крім аксіоми 5.2, у чому легко переконатися.

Аналогічно можна пересвідчитися у незалежності інших аксіом Вейля.

31.3. Повнота системи аксіом Вейля

Як уже зазначалося, для доведення повноти системи аксіом треба показати, що будь-які дві її реалізації *ізоморфні* між собою.

Для доведення повноти системи аксіом Вейля використаємо *декартову* реалізацію, оскільки в наслідках з аксіом Вейля зазначалось, що в просторі TE_3 можна ввести прямокутну декартову систему координат.

У системі координат $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ координатами точки M простору назвемо координати вектора $\overrightarrow{OM}$. При цьому кожній точці M простору ставиться у відповідність упорядкована трійка чисел, причому ця відповідність буде взаємно однозначною.

Якщо точки A і B мають відповідно координати (a_1, a_2, a_3) і (b_1, b_2, b_3), то вектор $\overrightarrow{AB}$ матиме своїми координатами числа $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$, $b_3 - a_3$.

Тепер можна довести, що будь-яка реалізація аксіоматики простору TE_3 ізоморфна декартовій (арифметичній) реалізації системи аксіом Вейля евклідової геометрії (п. 5.3.1).

Справді, нехай M – деяка довільна реалізація даної аксіоматики. Введемо в цій реалізації прямокутну декартову систему координат і кожній точці, кожному вектору поставимо у відповідність їх координати. Ці ж самі основні об'єкти (вектори і точки) в арифметичній реалізації визначені за допомогою дійсних чисел. З правил операцій над векторами і правил визначення координат вектора за координатами його кінцевих точок випливає, що основні відношення між точками і векторами в обох реалізаціях мають однаковий зміст, тобто довільна реалізація M аксіоматики Вейля ізоморфна арифметичній реалізації. Оскільки поняття ізоморфізму має властивість транзитивності, то звідси також випливає, що *будь-які дві інтерпретації аксіом Вейля евклідової геометрії ізоморфні між собою.*

Отже, система аксіом Вейля евклідової геометрії *є повною*.

§ 32. Доведення несуперечливості геометрії Лобачевського

У розділі 2 викладено основні факти планіметрії Лобачевського. Хоча значна кількість цих фактів суперечить нашим звичайним уявленням про властивості прямих, трикутників, чотирикутників, але всі вони виводились правильними логічними міркуваннями. Несуперечливість геометрії, системи аксіом, на якій вона побудована, містить гарантію, що при подальшому розвитку геометрії на основі даної аксіоматики не виникнуть суперечливі твердження.

При створенні нової геометрії Лобачевський користувався відомими фактами геометрії Евкліда, які не є наслідками п'ятого постулату Евкліда, тобто всі твердження, які не залежать від змісту п'ятого постулату, є спільною частиною геометрії Евкліда і Лобачевського. Користуючись аксіоматикою Гільберта, якої не було за життя Лобачевського, можна сказати, що спільною частиною обох геометрій є сукупність всіх тверджень, які можна вивести з аксіом перших чотирьох груп системи аксіом Гільберта. Цю спільну частину називають *абсолютною геометрією.*

Для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського, як і інших геометрій, треба побудувати реалізацію системи аксіом, яка складається з аксіом абсолютної геометрії і аксіоми паралельності Лобачевського.

Перша спроба побудови реалізації фактів площини Лобачевського належить італійському геометру *Є. Бельтрамі* (1868), який показав, що в евклідовому просторі є такі поверхні сталої від'ємної кривини – псевдосфери, внутрішня геометрія яких збігається з геометрією на площині Лобачевського (локально).

Німецький математик Ф. Клейн удосконалив реалізацію Бельтрамі (1870), і в математиці вона відома під назвою реалізація Бельтрамі – Клейна.

32.1. Реалізація Бельтрамі – Клейна

В евклідовій геометрії рівняння прямої в декартових прямокутних координатах виражається лінійно відносно змінних x і y:

$$ax + by + c = 0 \text{ або } x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho, \tag{5.3}$$

де ρ – довжина перпендикуляра OP з початку координат на дану пряму, α – кут між віссю абсцис і перпендикуляром OP, x, y – координати довільної точки M на прямій (рис. 1.93).

У площині Лобачевського пряма зображується відносно декартової прямокутної системи координат трансцендентним рівнянням

$$\cos\Pi(\rho) = \cos\Pi(x)\cos\alpha + \sin\Pi(x)\cos\Pi(y)\sin\alpha, \tag{5.4}$$

де $\Pi(\rho)$, $\Pi(x)$, $\Pi(y)$ – функції Лобачевського відрізків ρ, x, y.

Щоб пряма Лобачевського зображувалась відносно x і y також лінійним рівнянням, Бельтрамі ввів нові координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ такі, що

$$\bar{x} = k\cos\Pi(x),\ \bar{y} = k\sin\Pi(x)\cos\Pi(y) = k\cos\Pi(\bar{y}'), \tag{5.5}$$

де k – довільна стала.

Координати $\bar{x}$ і $\bar{y}$ називають *бельтрамієвими координатами*.

Тоді в бельтрамієвих координатах рівняння прямої Лобачевського має лінійну форму відносно $\bar{x}$ і $\bar{y}$:

$$\bar{x}\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha = k\cos\Pi(\rho). \tag{5.6}$$

Координати x і y точок прямої (5.3) в декартових координатах змінюються від $-\infty$ до ∞. Легко переконатись, що в бельтрамієвих координатах $\bar{x}$ і $\bar{y}$ змінюються у цілком певних межах, які можна взяти від -1 до $+1$.

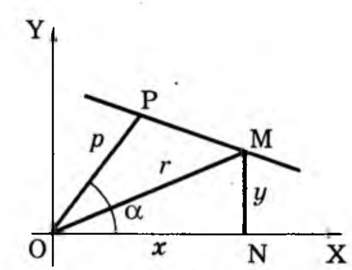


Рис. 1.93

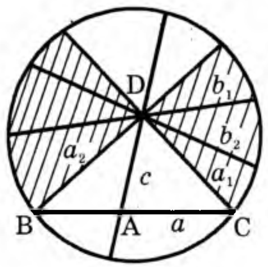


Рис. 1.94

Отже, при переході від декартових координат x, y до бельтрамієвих $\overline{x}$ і $\overline{y}$ вся площина Евкліда відображається на частину площини Евкліда у вигляді круга, радіус якого можна взяти рівним одиниці. Цей круг назвали *абсолютним кругом*, а коло, що його обмежує, – *абсолютом* площини.

Тоді в цій реалізації основні поняття площини Лобачевського можна означити через поняття евклідової площини. Введемо позначення: *Л*-точка (точка площини Лобачевського), *Л*-пряма (пряма площини Лобачевського), *Л*-площина (площина Лобачевського). Дамо означення основних понять геометрії Лобачевського. *Л-точками* назвемо евклідові точки відкритого абсолютного круга. Точки абсолюта до *Л*-точок не належать, їх називають невласними точками, а точки, що лежать зовні абсолюта, – ідеальними.

Л-прямими називають відкриті хорди абсолюта (без їх кінців); *Л-площиною* – відкритий абсолютний круг.

Відношення «належати», «лежати між» для *Л*-точок і *Л*-прямих означаються як відповідні евклідові відношення для точок і хорд, що лежать у середині абсолютного круга. Наприклад, *Л*-точка A належить *Л*-прямій BC, якщо точка A є внутрішньою точкою хорди BC абсолюта (рис. 1.94).

Л-фігура Φ *конгруентна* *Л*-фігурі Φ', якщо існує колінеарне автоморфне відносно абсолюта і абсолютного круга перетворення площини, при якому образом *Л*-фігури Φ є *Л*-фігура Φ'.

При означенні основних понять геометрії Лобачевського через основні поняття геометрії Евкліда легко переконатись у виконанні всіх аксіом геометрії Лобачевського.

Аксіома 1.1 вимагає, щоб кожні дві точки визначали пряму. Ця вимога на абсолютному крузі виконується, бо через будь-які дві внутрішні точки A і D круга можна провести хорду AD, яка є *Л*-прямою AD.

Аксіома 1.2 стверджує, що кожні дві різні точки визначають одну і тільки одну пряму. У даній реалізації ця аксіома виконується, оскільки через дві різні внутрішні точки (A і D) абсолютного круга можна провести одну і тільки одну хорду (AD), яка є єдиною *Л*-прямою AD, що проходить через *Л*-точки A і D.

За аксіомою 1.3 на кожній прямій існує принаймні дві точки і існують три точки, які не лежать на одній прямій. В евклідовому розумінні на відкритій хорді абсолюта лежить скільки завгодно внутрішніх точок абсолютного круга і існують три точки всередині абсолютного круга, які не лежать на одній прямій.

У розумінні понять геометрії Лобачевського це означає, що на кожній *Л*-прямій існують принаймні дві *Л*-точки і існують три *Л*-точки, які не належать одній *Л*-прямій.

Оскільки відношення «лежати між» для точок прямої таке ж, як і для точок хорди абсолютного круга, а це відношення має такий самий зміст і в розумінні Лобачевського, то вимоги аксіом порядку виконуються в даній реалізації для *Л*-точок і *Л*-прямих.

У розширеній евклідовій площині завжди можна вибрати таку автоморфну колінеацію, що абсолют (коло) переходить в абсолют, внутрішні точки даного круга (абсолютного круга) переходять у внутрішні точки цього ж круга.

Аксіому 3.1 конгруентності, наприклад, у даній реалізації можна сформулювати так:

Якщо A, B – дві внутрішні точки абсолютного круга на хорді a і A' – внутрішня точка абсолютного круга на тій самій або на іншій хорді a', то на хорді a' з даного боку від точки A' існує і тільки одна така точка B', що відрізок $A'B'$ є образом відрізка AB у колінеарному перетворенні, автоморфному відносно абсолюта та абсолютного круга.

Вибравши таке колінеарне перетворення, що образом точки B хорди a буде точка B' хорди a' по заданий бік від точки A', та врахувавши означення конгруентності в даній реалізації, переконуємося, що аксіома 3.1 виконується.

Аналогічно переконуємося, що інші аксіоми конгруентності також виконуються на абсолютному крузі для *Л*-точок, *Л*-відрізків та *Л*-кутів.

Для перевірки аксіом *неперервності* в реалізації Бельтрамі – Клейна розглядається принцип Дедекінда, еквівалентний аксіомам Архімеда і Кантора відносно аксіом перших трьох груп. Справедливість принципу Дедекінда у даній реалізації випливає з того, що він для евклідового відкритого відрізка (хорди абсолюта) справджується.

Отже, у реалізації Бельтрамі – Клейна справджується абсолютна геометрія. Залишається перевірити, чи виконується аксіома паралельності Лобачевського.

Візьмемо на абсолютному крузі довільну хорду BC і не належну їй довільну точку D (рис. 1.94). У розумінні евклідових понять через точку D можна провести безліч хорд, які перетинають хорду $BC = a$

(наприклад, хорда AD), і безліч хорд, які не перетинають хорду a (наприклад, хорди a_1, a_2, b_1, b_2).

У розумінні Лобачевського звідси маємо, що через $Л$-точку D можна провести скільки завгодно $Л$-прямих, які перетинають $Л$-пряму a, і не менше двох $Л$-прямих, які не перетинають $Л$-пряму $a = BC$. Хорди $DB = a_2$ і $DC = a_1$, які проходять через точки B і C абсолюта, що не належать до $Л$-точок, є граничними серед $Л$-прямих, які проходять через $Л$-точку D і не перетинають $Л$-пряму $a = BC$. Отже, $Л$-прямі a_1 і a_2 відіграють роль паралельних прямій a.

Таким чином, у реалізації Бельтрамі – Клейна виконуються всі аксіоми планіметрії Лобачевського. Тому планіметрія Лобачевського несуперечлива настільки, наскільки несуперечлива планіметрія Евкліда.

Відзначимо, що в реалізації Бельтрамі – Клейна одночасно з доведенням несуперечливості геометрії Лобачевського доведено і незалежність п'ятого постулату Евкліда.

32.2. Реалізація Пуанкаре

Ідея реалізації геометрій, усвідомлення їх реалізацій на множинах різних об'єктів, особливо після завершення аксіоматичної побудови евклідової геометрії, набула широкого розвитку. Наприкінці XIX ст. і на початку XX ст. було створено цілий ряд різноманітних реалізацій аксіоматики як евклідової, так і неевклідових геометрій. Декілька реалізацій аксіоматики планіметрії Лобачевського запропонував відомий французький математик і філософ ***А. Пуанкаре*** (1854–1912). Розглянемо одну з них, об'єктами якої є об'єкти евклідової півплощини.

Нехай довільна горизонтальна пряма m розбиває площину Евкліда на дві півплощини. Одну з них назвемо верхньою (над прямою m).

Введемо означення основних понять планіметрії Лобачевського. *$Л$-точками* назвемо евклідові точки верхньої півплощини. Точки прямої m не належать до $Л$-точок (рис. 1.95).

$Л$-прямими назвемо евклідові півкола, що лежать у верхній півплощині і ортогональні до прямої m (тобто мають центр на прямій m), а також евклідові півпрямі верхньої півплощини, перпендикулярні до прямої m. На рис. 1.95, наприклад, це $Л$-пряма a і $Л$-пряма n.

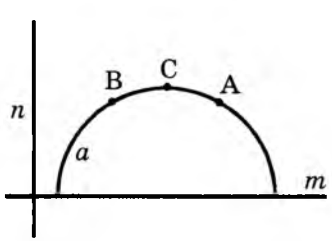


Рис. 1.95

Відношення *належності і порядку* для $Л$-точок і $Л$-прямих такі ж, як в евклідовому розумінні для точок, півкіл і променів верхньої півплощини.

Переконаємось, що в даній реалізації виконуються аксіоми абсолютної геометрії (за Гільбертом).

Нехай a – півколо у верхній півплощині, точка A належить півколу a. Тоді будемо говорити, що $Л$-точка A лежить на $Л$-прямій a. При такій домовленості легко перевірити виконання планіметричних аксіом першої групи – аксіом належності 1.1–1.3.

Справді, аксіома 1.1 виконується, оскільки через дві різні точки верхньої півплощини завжди можна провести півколо a, ортогональне з прямою m.

Оскільки через дві точки верхньої півплощини можна провести не більше одного півкола, ортогонального прямій m, то аксіома 1.2 справедлива. Виконання аксіоми 1.3 випливає з того, що на евклідовому півколі a верхньої півплощини існує скільки завгодно точок, як і скільки завгодно точок, які не лежать на півколі a.

Виконання аксіом порядку 2.1–2.3 випливає з того, що порядок точок на $Л$-прямій a збігається з порядком точок на евклідовому півколі a, яке зображує $Л$-пряму у верхній півплощині (рис. 1.95).

Перевірка справедливості аксіоми 2.4 (Паша) проілюстрована на рис. 1.96: $Л$-пряма a, перетинаючи $Л$-сторону AB в $Л$-точці M, перетинає ще одну $Л$-сторону BC в $Л$-точці N $Л$-трикутника ABC і не може мати спільних точок з $Л$-стороною BC (доведення цього факту для евклідового криволінійного трикутника ABC опускаємо).

Виконання аксіом *неперервності* випливає з того, що при введеному в такий спосіб порядку точок на $Л$-прямій (як і на евклідовому півколі) на ній виконується принцип неперервності Дедекінда, еквівалентний аксіомам Архімеда і Кантора.

Дещо складнішим видається доведення аксіом *конгруентності*. Дамо означення $Л$-відрізків і $Л$-кутів через об'єкти евклідової площини.

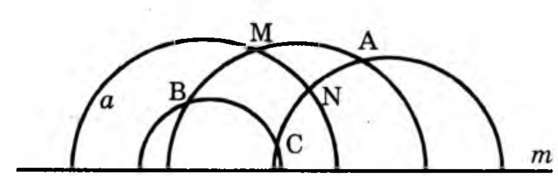


Рис. 1.96

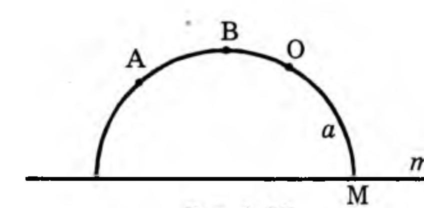


Рис. 1.97

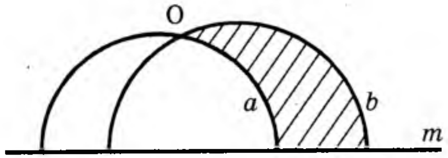


Рис. 1.98

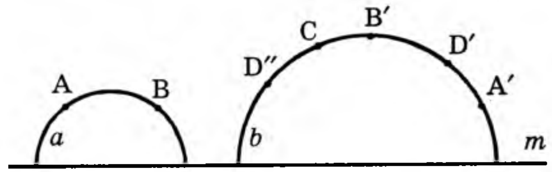


Рис. 1.99

Л-відрізком AB назвемо дугу евклідового півкола з кінцями A і B. *Л-півпряма* з початком у точці O зображується дугою OM, кінець M якої лежить на прямій m, точка M не належить до $Л$-точок (рис. 1.97). $Л$-кутом з вершиною O будемо називати сукупність двох $Л$-півпрямих, що виходять з точки O (рис. 1.98).

Поняття *конгруентності* відрізків і кутів введемо за допомогою перетворення *інверсії* відносно кіл, ортогональних з прямою m, при цьому вважатимемо, що поняття інверсії та її властивості відомі. Інверсія відносно таких кіл відображає точки верхньої евклідової півплощини в точки цієї ж півплощини.

Означення 5.6. *Л-відрізок AB* конгруентний *Л-відрізку A′B′*, якщо існує така скінченна послідовність інверсій, що їх композиція відображає евклідову кругову дугу AB на кругову дугу $A'B'$.

При такому означенні конгруентності $Л$-відрізків аксіома 3.1 справджується. Дійсно, нехай дані два півкола a і b із центрами на прямій m, на півколі a дана дуга AB, а на півколі b дана точка C (рис. 1.99). Виберемо інверсію з центром на прямій m так, щоб півколо a відобразилось на півколо b. При цьому точки A і B півкола a перейдуть у деякі точки A' і B' на півколі b. Тоді за властивостями інверсії існує інверсія з центром на прямій m, яка відображає півколо b само в себе так, що або точка A' переходить у точку C, або точка B' переходить у точку C. У першому випадку точка B' перейде в деяку точку D' півкола b, а в другому випадку точка A' перейде в деяку точку D'' півкола b. Точки D' і D'' розміщені по різні боки від точки C.

Відповідно до означення конгруентності $Л$-відрізків маємо

$Л - AB \cong Л - CD'$ і $Л - AB \cong Л - CD''$.

Звідси випливає справедливість аксіоми 3.1 в даній реалізації. Аналогічно доводиться виконання аксіом 3.2, 3.3, 3.5.

Означення 5.7. *Л-кути* $(h;\, k)$ і $(h';\, k')$ називаються *конгруентними*, якщо існує така послідовність інверсій з центрами на прямій m, що їх композиція дуги півкіл, які зображують сторони *Л-кута* $(h;\, k)$, відображає на дуги півкіл, що зображують сторони *Л-кута* $(h';\, k')$.

Перевіримо виконання аксіоми 3.4.

Нехай дано $Л$-кут $(h;\, k)$ з вершиною A і $Л$-промінь h' з початком A' (рис. 1.100). За властивостями інверсії з центром на прямій m існує послідовність інверсій, у результаті яких $Л$-пряма a перейде в $Л$-пряму a' так, що точка A перейде в точку A', а $Л$-промінь h – у $Л$-промінь h'. При цьому $Л$-пряма b перейде в якусь $Л$-пряму b', що проходить через точку A', і $Л$-промінь k перейде в $Л$-промінь k' $Л$-прямої b'. За означенням конгруентності кутів $Л$-кут $(h;\, k)$ буде конгруентний $Л$-куту $(h';\, k')$.

Якщо взяти за коло інверсії коло a, то $Л$-промінь k' відобразиться в $Л$-промінь k'', розміщений по другий бік від $Л$-променя h. Тоді за означенням 5.7 $Л$-кут $(h;\, k)$ буде конгруентний $Л$-куту $(h';\, k'')$.

Далі можна відобразити $Л$-промінь h в k і навпаки.

Отже, $Л$-кут $(h;\, k)$ конгруентний $Л$-куту $(k;\, h)$.

Повторюючи ще раз цю ж послідовність інверсій, переконаємось, що $Л$-кут $(h,\, k)$ конгруентний сам собі.

Таким чином, усі вимоги аксіоми 3.4 виконуються в даній реалізації, а разом з нею і всі аксіоми конгруентності, і всі аксіоми абсолютної геометрії.

Залишається з'ясувати, яка ж аксіома паралельності справджується в даній реалізації.

Візьмемо у верхній евклідовій півплощині з межею m півколо a з центром на прямій m і точку A, що не належить півколу a.

Зрозуміло, що через точку A можна провести безліч півкіл з центрами на прямій m, які перетинають півколо a і які не перетинають його.

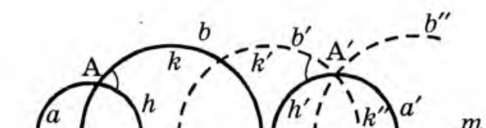


Рис. 1.100

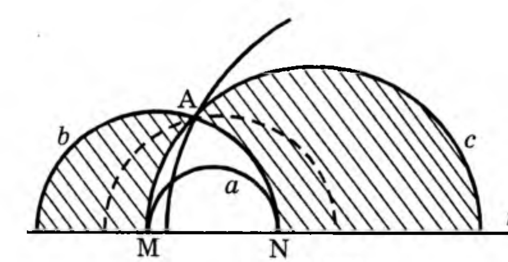


Рис. 1.101

Серед множини таких півкіл буде два півкола b і c, які дотикаються півкола a в точках M і N на прямій m (рис. 1.101).

Оскільки точки M і N не належать до $Л$-точок, то півкола b і c належать множині $Л$-прямих, які не перетинають $Л$-прямої a.

Отже, у пучку $Л$-прямих, що проходять через $Л$-точку A, існує нескінченна множина $Л$-прямих, які не перетинають $Л$-прямої a, і нескінченна множина $Л$-прямих, які перетинають $Л$-пряму a.

Звідси випливає, що в реалізації Пуанкаре на евклідовій площині справджується аксіома *паралельності Лобачевського.* Роль граничних $Л$-прямих, тобто паралельних за Лобачевським $Л$-прямій a, відіграють евклідові півкола b і c, які в пучку $Л$-прямих, що проходять через точку A, відділяють одну від іншої множини $Л$-прямих, що перетинають $Л$-пряму a і що не перетинають її.

Отже, запропонована А. Пуанкаре реалізація аксіом геометрії в образах планіметрії Евкліда є моделлю планіметрії Лобачевського. Тому планіметрія *Лобачевського несуперечлива настільки, наскільки несуперчливою є планіметрія Евкліда.*

Звідси також випливає, що аксіома паралельності Евкліда (п'ятий постулат) і аксіома паралельності Лобачевського *не є наслідками аксіом абсолютної геометрії, вони незалежні* від аксіом абсолютної геометрії.

Примітка. Відома також реалізація Пуанкаре аксіом планіметрії Лобачевського на евклідовому крузі – абсолютному крузі. Ця інтерпретація аналогічна інтерпретації Бельтрамі – Клейна, але роль $Л$-прямих відіграють дуги евклідових кіл, ортогональних з абсолютом.

Контрольні запитання

1. Які вимоги повинна задовольняти система аксіом геометрії?
2. Яка система аксіом називається несуперечливою? Повною? Незалежною?
3. Що таке реалізація (інтерпретація) системи аксіом?
4. Яким чином будується арифметична (декартова) реалізація системи аксіом евклідової геометрії за О.В. Погорєловим? Який конкретний зміст надається в цій реалізації таким основним поняттям як «точка», «пряма», «довжина відрізка», «належати»?
5. Покажіть, що в декартовій інтерпретації основних понять евклідової геометрії виконуються: а) аксіоми належності; б) аксіома існування відрізка даної довжини; в) аксіома паралельних.
6. Обґрунтуйте несуперечливість системи аксіом евклідової геометрії за О.В. Погорєловим.

7. Які реалізації системи аксіом математичної теорії називаються ізоморфними?
8. Доведіть, що коли всі реалізації системи аксіом ізоморфні, то ця система аксіом повна.
9. Наведіть схематичне доведення повноти системи аксіом евклідової геометрії за О.В. Погорєловим.
10. Дайте схематичне доведення незалежності аксіоми паралельних та аксіоми існування відрізка даної довжини.
11. Який конкретний зміст надається в арифметичній реалізації основним поняттям системи аксіом Вейля?
12. Обґрунтуйте несуперечливість системи аксіом Вейля в арифметичній інтерпретації.
13. Доведіть незалежність деяких аксіом системи Вейля.
14. Покажіть, що система аксіом Вейля повна.
15. Який конкретний зміст надається основним поняттям площини Лобачевського в інтерпретації Бельтрамі – Клейна?
16. Наведіть приклади реалізації деяких аксіом абсолютної геометрії в інтерпретації Бельтрамі – Клейна.
17. Доведіть, що в реалізації Бельтрамі – Клейна виконується аксіома паралельності Лобачевського.
18. Який конкретний зміст надається основним поняттям площини Лобачевського в реалізації Пуанкаре?
19. Наведіть приклади реалізації деяких аксіом абсолютної геометрії в інтерпретації Пуанкаре.
20. Доведіть, що в інтерпретації Пуанкаре реалізується аксіома паралельності Лобачевського.

6 Розділ

Елементи геометрії Рімана

§ 33. Поняття про геометрію Рімана

Геометрія Евкліда одержується з абсолютної геометрії приєднанням до неї аксіоми паралельності, за якою через точку, взяту поза прямою, можна провести не більше однієї прямої, яка не перетинає дану пряму, та всіх наслідків з цієї аксіоми. Аналогічно, щоб дістати геометрію Лобачевського, треба до абсолютної геометрії приєднати аксіому Лобачевського, за якою через дану точку, не належну даній прямій, можна провести не менше двох прямих, що не перетинають дану пряму, та всі наслідки з цієї аксіоми.

Виникає запитання: а чи не можна побудувати геометрію, в якій би через дану точку, взяту поза прямою, не проходило б жодної прямої, яка не перетинає дану? Виявляється, що таку геометрію також можна побудувати. Уперше її відкрив видатний німецький математик ***Георг Бернхард Ріман*** (1826–1866), основні її положення викладені в його праці «Про гіпотези, які лежать в основах геометрії» (написаній у 1854 р., а опублікованій після смерті автора в 1868 р. Дедекіндом). В основі його геометрії лежить така аксіома: «Будь-які дві прямі, розміщені в одній площині, перетинаються».

Отже, в геометрії Рімана паралельних прямих не існує. Аксіоми абсолютної геометрії сумісні тільки з двома аксіомами паралельності: це аксіома Евкліда і аксіома Лобачевського. Тому геометрію Рімана не можна побудувати приєднанням аксіоми Рімана та її наслідків до абсолютної геометрії, не змінивши відповідним чином системи аксіом абсолютної геометрії. У геометрії Рімана з аксіом абсолютної геометрії залишаються в силі тільки аксіоми належності, доповнені аксіомою Рімана. Сформулюємо їх по Гільберту.

33.1. Аксіоми належності

Аксіома 1.1. Які б не були дві точки A і B, існує пряма a, яка проходить через кожну з цих точок.

Аксіома 1.2. Які б не були дві точки A і B, існує не більше однієї прямої, яка проходить через кожну з цих точок.

Аксіома 1.3. На кожній прямій лежать принаймні дві точки. Існує принаймні три точки, що не лежать на одній прямій.

Аксіома 1.4 (Рімана). Кожна пара прямих, що лежать в одній площині, перетинаються.

З'ясуємо, які властивості має пряма в площині Рімана. Нехай у цій площині дано пряму a і точку A, яка не лежить на ній. Розглянемо пучок прямих, які проходять через точку A (рис. 1.102).

За аксіомою Рімана всі прямі цього пучка перетинають пряму a. Оскільки дві прямі перетинаються в одній точці, що випливає з аксіом належності, то між прямими пучка і точками прямої a має місце взаємно однозначна відповідність. Нехай пряма b пучка перетинає пряму a в деякій точці C. За властивостями симетрії відносно прямої AP, перпендикулярної прямій a, пряма b повинна перетинати пряму a в точці C', симетричній точці C відносно прямої AP.

Таким чином, прямі a і b перетинаються у двох точках, що суперечить аксіомам належності. Щоб позбутись цієї суперечності, треба вважати, що точки C і C' зливаються в одну точку. Це означає, що пряма a замкнена. Отже, прямі в геометрії Рімана замкнені.

Із замкненості прямої Рімана випливає ряд особливостей прямої і площини Рімана.

1. Пряму Евкліда і Лобачевського будь-яка її точка поділяє на два промені. Будь-яка точка прямої Рімана не поділяє її на два промені, а лише розрізає.
2. Будь-які дві точки прямої в геометрії Евкліда і Лобачевського поділяють її на відрізок і два промені, а в геометрії Рімана дві точки прямої визначають два відрізки, які взаємно доповнюють один одного.
3. Площина Рімана – замкнена поверхня, тому будь-яка її пряма не розділяє її на дві півплощини (рис. 1.103).

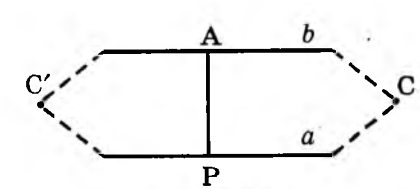


Рис. 1.102

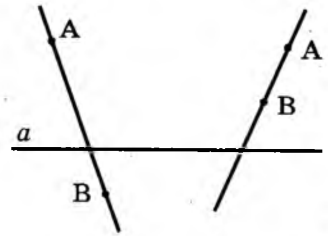


Рис. 1.103

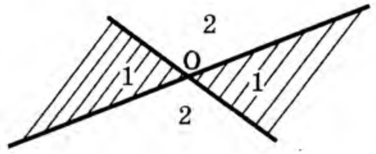


Рис. 1.104

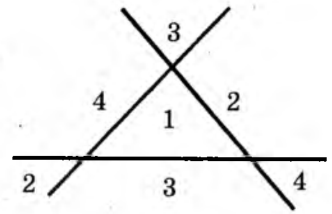


Рис. 1.105

Справді, нехай a – пряма Рімана в площині Рімана. Тоді для будь-яких двох точок A і B, що не лежать на прямій a, пряма AB ділиться на два відрізки, з яких один перетинає пряму a, а другий не перетинає. Тому не можна сказати, лежать точки A і B по один бік від прямої a чи по різні боки від неї.

4. Будь-які дві прямі a і b площини Рімана розділяють цю площину на дві частини, кожна з яких утворює кут (рис. 1.104). Якщо O – точка перетину прямих a і b, то при точці O утворюються два кути, які взаємно доповнюють один одного до розгорнутого, вони називаються *суміжними кутами.*
5. Із замкнутості площини Рімана випливає, що будь-які три її прямі, які не проходять через одну точку, розбивають площину Рімана на чотири частини (трикутники), тоді як такі три прямі розбивають площину Евкліда і Лобачевського на сім частин (рис. 1.105).

33.2. Розміщення точок на прямій Рімана

У зв'язку з тим що пряма Рімана замкнута, для трьох точок A, B, C цієї прямої поняття «лежати між» втрачає певний зміст, оскільки кожна з них лежить між двома іншими, тому поняття «лежати між» не характеризує взаємного розміщення даних трьох точок.

Для характеристики взаємного розміщення точок на прямій Рімана вводиться поняття *розділеності двох пар точок.* Нехай A, B, C, D – чотири різні точки прямої Рімана (на рис. 1.106 пряма Рімана зображена замкненою лінією – колом). Точки A і B поділяють «пряму» на дві частини. Якщо C і D належать різним частинам, то кажуть, що пара точок A, B розділяє пару точок C, D; якщо ж точки C і D належать одній і тій самій частині «прямої», то пара A, B не розділяє пару C, D.

Розділеність пар A, B і C, D позначатимемо так: $A, B \div C, D$, а нерозділеність $A, B \mathrel{\dot{-}} C, D$.

Основні властивості поняття «розділеність двох пар точок» можна описати групою аксіом, яка замінює другу групу аксіом порядку Гільберта.

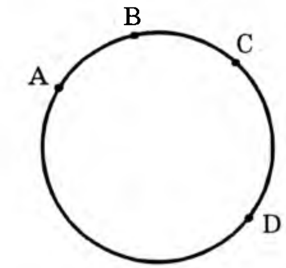


Рис. 1.106

Друга група. ***Аксіоми розміщення***

2.1. Якщо $A, B \div C, D$, то чотири точки A, B, C, D різні і належать одній прямій a.

2.2. Якщо A і B – різні точки прямої a, то на цій прямій існують такі дві точки M і N, що $A, B \div M, N$.

2.3. Якщо $A, B \div C, D$, то $C, D \div A, B$.

2.4. Якщо $A, B \div C, D$, то $A, B \div D, C$.

2.5. Якщо $A, B \div C, D$, то не може бути $A, C \div B, D$.

2.6. Якщо A, B, C, D – різні точки прямої, то справджується одне і тільки одне з відношень: або $A, B \div C, D$, або $A, C \div B, D$, або $A, D \div B, C$.

2.7. Якщо $A, B \div C, D$ і $A, C \div B, E$, то $A, C \div D, E$.

2.8. Якщо чотири прямі пучка перетинають дві будь-які прямі відповідно в точках A, B, C, D і A_1, B_1, C_1, D_1 і якщо $A, B \div C, D$, то $A_1, B_1 \div C_1, D_1$.

Зміст цих аксіом зрозумілий, якщо на рисунку пряму Рімана зобразити у вигляді замкнутого овалу, наприклад кола.

Не зупиняючись на аксіомах конгруентності та неперервності, відзначимо ще ряд тверджень геометрії Рімана, які відрізняються від відповідних тверджень геометрії Евкліда і Лобачевського.

1. Сума внутрішніх кутів трикутника більша 180°. Існують трикутники з двома і трьома прямими кутами. Отже, у геометрії Рімана здійснюється гіпотеза тупого кута Саккері.
2. Зовнішній кут трикутника не завжди більший внутрішнього, не суміжного з ним; він може бути і меншим або рівним куту, з ним не суміжним.
3. Довжина кожної прямої скінченна і дорівнює π.
4. Периметр будь-якого трикутника менший 2π.
5. Площа всієї площини скінченна і дорівнює 2π.
6. Площа трикутника пропорційна його кутовому надлишку.
7. Геометричним місцем точок, рівновіддалених від даної прямої, є коло.

§ 34. Елементи сферичної геометрії

34.1. Основні поняття сферичної геометрії

Означення 6.1. Сферою називається фігура, яка складається з усіх точок простору, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається *центром сфери*. Відстань від точки сфери до її центра називається *радіусом сфери*.

Відрізки, які сполучають дві точки сфери і проходять через центр, називаються *діаметрами*, а кінці діаметра – *діаметрально протилежними точками*. Фігура називається *сферичною*, якщо всі її точки лежать на одній і тій самій сфері.

Сферична геометрія вивчає геометричні властивості фігур, розміщених на сфері. Основними поняттями сферичної геометрії є поняття *точки* і *великого кола* сфери. Позначимо точки літерами A, B, C, ..., а великі кола і їх частини літерами a, b, c,.. . Сферичну поверхню з центром O і радіусом R позначатимемо (O, R), або сфера O.

Пригадаємо ряд тверджень, що лежать в основі сферичної геометрії:

1. Переріз сфери будь-якою площиною є колом. Площина, що проходить через центр, називається *діаметральною* площиною, а лінія її перетину зі сферою – *великим колом*. Великі кола сфери ділять її на дві рівні частини. Площина великого кола є *площиною симетрії* сфери, а центр сфери – її *центром симетрії*.
2. Через дві недіаметрально протилежні точки сфери можна провести велике коло, і притому тільки одне. Два великих кола сфери перетинаються у двох точках. Взагалі два будь-які кола, що лежать на одній і тій самій сфері, можуть перетинатись не більш як у двох точках, а саме в тих точках, де лінія перетину їх площин перетинає сферу.

34.2. Відстань між двома точками на сфері

Важливим є поняття про найкоротшу відстань між двома точками на сфері. У геометрії Евкліда найкоротшою відстанню між двома точками є відрізок прямої, що сполучає ці точки. На сфері найкоротшою відстанню між точками є дуга великого кола, що проходить через ці точки.

Означення 6.2. Довжина найкоротшої лінії, що сполучає дві точки A і B на сфері, називається *сферичною відстанню* між точками A і B.

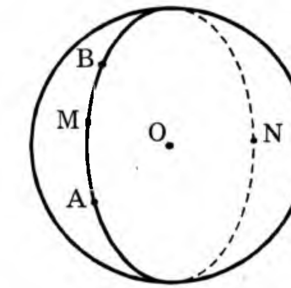


Рис. 1.107

Теорема 6.1. Сферичною відстанню між двома точками на сфері є дуга великого кола, менша від 180°.

Не приводячи доведення цієї теореми, відзначимо, що дві точки A і B на великому колі визначають дві дуги, з яких одна – AMB – менша 180°, а друга – ANB – більша 180° (рис. 1.107). Тому вказівка в теоремі, що розглядають лише одну з цих дуг (меншу 180°), є суттєвою.

Введемо поняття *полюса* і *поляри*, які надалі часто використовуються у сферичній геометрії.

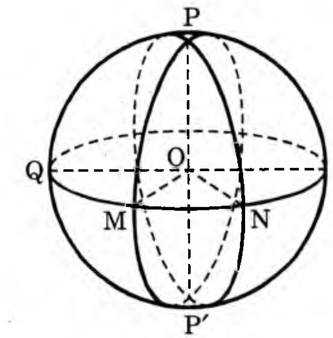


Рис. 1.108

Означення 6.3. Діаметр, перпендикулярний до площини якого-небудь великого кола сфери, перетинає її у двох точках P і P', які називаються *полюсами* цього кола або його дуги (рис. 1.108). Велике коло QMR називають *геометричним екватором*, або *полярою*, точок P і P'.

Неважко переконатись у справедливості такої теореми.

Теорема 6.2. Усі точки поляри рівновіддалені від свого полюса на сферичну відстань, яка дорівнює 90°.

Означення 6.4. Кутом на сфері називається фігура, утворена деякою точкою (наприклад, P) і двома півколами (наприклад, PMP' і PNP'), спільним кінцем яких є ця точка; точка P називається *вершиною* кута, півкола – його *сторонами*. Позначатимемо сферичний кут, як і на евклідовій площині, через $\angle MPN$ (рис. 1.108).

Сферичний $\angle MPN$ вимірюється дугою MN, що лежить між його сторонами, для якої вершина кута (точка P) є полюсом.

34.3. Сферичні трикутники

Означення 6.5. Сферичним трикутником називається фігура, утворена трьома дугами великих кіл, які перетинаються в трьох точках (наприклад, трикутник ABC на рис. 1.109).

Дуги, що утворюють трикутник, називають *сторонами*, а точки їх перетину – *вершинами* трикутника. Слід зазначити, що в той час, коли сторони плоского трикутника є відрізками прямої і вимірюються лінійними одиницями, сторони сферичного трикутника є дугами великих кіл і вимірюються дуговими одиницями – *градусами*, або *радіанами*.

Якщо вершини сферичного трикутника ABC (рис. 1.109) сполучимо з центром сфери O і через кожну пару радіусів OA, OB, OC проведемо площини, то дістанемо тригранний кут $OABC$, який відповідає сферичному трикутнику ABC.

У стереометрії доводяться такі властивості плоских кутів тригранного кута:

1. Кожний з плоских кутів тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів, але більший за їх різницю.
2. Сума трьох плоских кутів тригранного кута більша від нуля і менша від 360°.

У тригранному куті $OABC$ плоскі його кути вимірюються дугами, на які вони спираються, тобто сторонами сферичного трикутника ABC, що надає можливість перенести зазначені властивості і на сферичний трикутник.

Теорема 6.3. Кожна сторона сферичного трикутника менша від суми двох інших і більша за їх різницю.

Доведення. Справедливість теореми випливає із співвідношення $\angle AOC < \angle AOB + \angle BOC$ для плоских кутів тригранного кута $OABC$ і умови про те, що $\angle AOC$ вимірюється дугою b, $\angle AOB$ – дугою c, $\angle BOC$ – дугою a (рис. 1.109). Звідси для сферичного трикутника маємо: $b < a + c$.

Для доведення другої частини теореми перенесемо один із членів останньої нерівності $b < a + c$ з правої частини в ліву, дістанемо: $b - c < a$.■

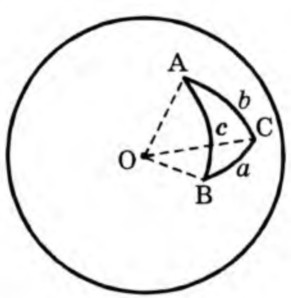


Рис. 1.109

Наслідок. Півпериметр сферичного трикутника завжди більший від кожної його сторони, тобто

$$\frac{1}{2}(a+b+c) > b.$$

Теорема 6.4. Сума сторін (периметр) сферичного трикутника завжди менша від 360° і більша від нуля.

Доведення. Замінивши у співвідношенні

$0^\circ < \angle AOC + \angle BOC + \angle AOB < 360^\circ$

плоскі кути сторонами сферичного трикутника, які їх вимірюють, матимемо: $0^\circ < b + c + a < 360^\circ$ (рис. 1.109).

Введемо поняття *полярного* сферичного трикутника, яке зручно використати при доведенні теорем сферичної геометрії.

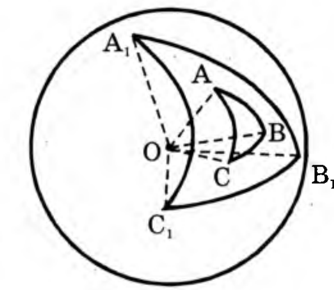


Рис. 1.110

Означення 6.6. Сферичний трикутник $A_1B_1C_1$, називається *полярним* відносно сферичного трикутника ABC, якщо точка A_1 є полюсом великого кола BC, яке лежить з того самого боку, що й точка A_1. Аналогічну властивість мають точки B_1 і C_1.

Для побудови сферичного трикутника $A_1B_1C_1$ полярного відносно сферичного трикутника ABC, візьмемо на сфері з центром O сферичний трикутник ABC (рис. 1.110). Побудуємо радіус OA_1, який перпендикулярний до площини великого кола BC і лежить від неї по один бік з радіусом OA; точка A_1 буде полюсом великого кола BC. Аналогічно будуємо радіус OB_1, перпендикулярний до площини великого кола AC по один бік з радіусом OB_1, і радіус OC_1, перпендикулярний до площини великого кола AB по один бік з радіусом OC.

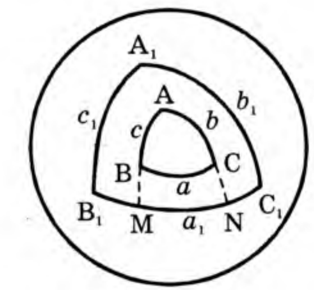


Рис. 1.111

Тоді точки B_1 і C_1 будуть полюсами поляр AC і AB відповідно.

Отже, сферичний трикутник $A_1B_1C_1$ буде полярним відносно сферичного трикутника ABC.

Можна довести, що коли трикутник $A_1B_1C_1$ полярний відносно трикутника ABC, то і трикутник ABC буде полярним відносно трикутника $A_1B_1C_1$, тобто трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ будуть взаємно полярними.

Теорема 6.5. Кут даного трикутника і відповідна сторона полярного відносно даного трикутника в сумі дорівнюють 180°, тобто

$$\angle A + a_1 = 180^\circ. \qquad (6.1)$$

Доведення. Нехай трикутник ABC взаємно полярний з трикутником $A_1B_1C_1$ (рис. 1.111). Продовжимо сторони AB і AC до перетину зі стороною B_1C_1 відповідно в точках M і N. Оскільки вершина A є полюсом дуги B_1C_1 за умовою, то дуга MN є мірою кута A. Сторона $B_1C_1 = a_1$ розділяється точками M і N на три частини – B_1M, MN і NC_1. Запишемо очевидні рівності:

$\angle A = \cup MN$,

$\cup a_1 = \cup B_1M + \cup MN + \cup NC_1$.

Додавши ліві і праві їх частини, дістанемо:

$\angle A + a_1 = B_1M + MN + NC_1 = B_1N + MC_1$.

Але $\cup B_1N = 90^\circ$, оскільки точка B_1 є полюсом дуги AC, на продовженні якої лежить точка N, і $\cup MC_1 = 90^\circ$, оскільки точка C_1 є полюсом дуги AB, на продовженні якої лежить точка M. Отже, $\angle A + a_1 = 180^\circ$.
Теорему доведено.■

Застосовуючи такі самі міркування до кожного з кутів трикутника ABC, матимемо: $\angle A + a_1 = 180^\circ$, $\angle B + b_1 = 180^\circ$, $\angle C + c_1 = 180^\circ$.

Теорема 6.6. Сторона даного трикутника і відповідний кут полярного відносно нього трикутника в сумі дорівнюють 180°, тобто

$$\angle A + a_1 = 180^\circ,\ \angle B + b_1 = 180^\circ,\ \angle C + c_1 = 180^\circ. \qquad (6.2)$$

Справедливість цієї теореми випливає з того, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ взаємно полярні.
Властивості взаємно полярних трикутників, виражені рівностями (6.1) і (6.2), мають важливе значення для сферичної геометрії. За їх допомогою деякі властивості і формули, виведені для сторін сферичного трикутника, можна перенести на його кути, і навпаки, що значно спрощує виведення ряду формул і співвідношень.

34.4. Сума кутів сферичного трикутника

Теорема 6.7. У будь-якому сферичному трикутнику різниця суми двох будь-яких кутів і третього завжди менша двох прямих кутів.

Доведення. За властивостями полярних трикутників, розглянутих раніше, маємо: $a_1 + b_1 > c_1$, $a_1 = 180^\circ - \angle A$, $b_1 = 180^\circ - \angle B$, $c_1 = 180^\circ - \angle C$.
Зробивши в нерівності заміну, дістанемо:

$$(180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) > 180^\circ - \angle C,$$

або після спрощення:

$$\angle A + \angle B - \angle C < 180^\circ,$$

що й треба було довести.■

Теорема 6.8. У будь-якому сферичному трикутнику сума кутів завжди менша від 540° і більша від 180°, тобто

$$180^\circ < \angle A + \angle B + \angle C < 540^\circ.$$

Доведення. Розглянемо сферичний трикутник ABC і полярний відносно нього трикутник $A_1B_1C_1$. За теоремою 6.4 у кожному сферичному трикутнику $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$. Для трикутника $A_1B_1C_1$, полярного відносно трикутника ABC, вона теж справджується, запишемо подвійну нерівність як дві нерівності, а саме:

$$a_1 + b_1 + c_1 < 360^\circ, \qquad (6.3)$$

$$a_1 + b_1 + c_1 > 0^\circ. \qquad (6.4)$$

За властивостями сферичних полярних трикутників маємо:

$$a_1 = 180^\circ - \angle A,\ b_1 = 180^\circ - \angle B,\ c_1 = 180^\circ - \angle C. \qquad (6.5)$$

Підставивши в нерівність (6.3) замість a_1, b_1, c_1 їх вирази через праві частини рівностей (6.5), дістанемо:

$$(180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) < 360^\circ,$$

або після спрощення $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$.
Першу частину теореми доведено.
Виконавши таку саму підстановку виразів (6.5) у нерівність (6.4), матимемо:

$$(180^\circ - \angle A) + (180^\circ - \angle B) + (180^\circ - \angle C) > 0^\circ,$$

або після спрощення

$$\angle A + \angle B + \angle C < 540^\circ.$$

Теорему доведено.■

Наслідок. Сума кутів у сферичному трикутнику є величина змінна і завжди більша від 180°, тобто $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ + \varepsilon$.

Означення 6.7. Різниця $\angle A + \angle B + \angle C - 180^\circ = \varepsilon$ між сумою кутів сферичного трикутника і сумою кутів трикутника називається ***сферичним надвишком трикутника.*** Зрозуміло, що $0^\circ < \varepsilon \leq 360^\circ$.

Зауважимо, що у сферичному трикутнику поняття бісектриси, медіани і висоти, а також співвідношення між сторонами і кутами мають такий зміст, як і в трикутнику на площині.

Зокрема мають місце такі твердження:

1. Проти рівних сторін сферичного трикутника лежать рівні кути і навпаки.
2. У будь-якому сферичному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона і навпаки.
3. У рівнобедреному сферичному трикутнику кути, що лежать проти рівних сторін, рівні.

34.5. Площа сферичного трикутника

Хоча завдання вимірювання площ сферичних многокутників аналогічне такому завданню для плоских многокутників, але вимірювання площ на сфері значно відрізняється від вимірювання площ на площині. Насамперед знайдемо площу сферичного *двокутника*.

Означення 6.8. Сукупність двох діаметрально протилежних точок (P і P_1 сфери O) і двох півкіл (PMP_1 і PNP_1), кінцями яких є ці точки, називається *сферичним двокутником*. Півкола, які утворюють двокутник, називаються його *сторонами*, а їх спільні кінці – його *вершинами* (рис. 1.107).

Теорема 6.9. Площа сферичного двокутника пропорційна величині його кута.

Доведення. Двокутники, кути яких рівні між собою, рівні, а тому, за властивістю інваріантності площі, мають одну й ту саму площу. Якщо кут деякого двокутника дорівнює сумі кутів двох інших двокутників, то площа першого дорівнює сумі площ двох інших двокутників (за властивістю адитивності).

Звідси випливає, що площа сферичного двокутника повинна бути пропорційною до величини його кутів:

$$S(\alpha) = 2k\alpha, \tag{6.6}$$

де $S(\alpha)$ – площа двокутника, α – його кут, $2k$ – коефіцієнт пропорційності. ■

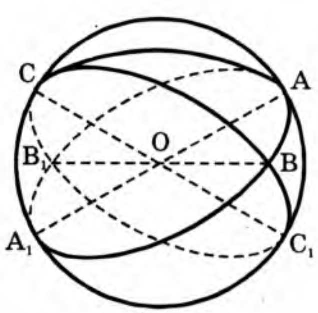


Рис. 1.112

Теорема 6.10. Площа сферичного трикутника пропорційна до його сферичного надвишку.

Доведення. Нехай ABC – даний сферичний трикутник (рис. 1.112). Позначимо через A_1, B_1, C_1 точки сфери, діаметрально протилежні точкам A, B, C. Тоді для кожного кута даного сферичного трикутника буде побудований сферичний двокутник, що йому відповідає: для $\angle A$ – двокутник BAA_1C, для $\angle B$ – двокутник CBB_1A, для кута C – двокутник BCC_1A.

За властивістю адитивності можна записати, що

$$S(\Delta ABC) + S(\Delta A_1BC) = S(BAA_1C), \tag{6.7}$$

де $S(\Delta ABC)$, $S(\Delta A_1BC)$ – площі сферичних трикутників ABC і A_1BC, а $S(BAA_1C)$ – площа сферичного двокутника з вершинами A,A_1, сторони якого проходять через точки B і C.

Взявши до уваги рівність (6.6), рівність (6.7) можна записати так:

$$S(\Delta ABC) + S(\Delta A_1BC) = 2k\alpha.$$

Аналогічно дістанемо:

$$S(\Delta ABC) + S(\Delta AB_1C) = 2k\beta,$$

$$S(\Delta ABC) + S(\Delta ABC_1) = 2k\gamma,$$

де α, β, γ – кути даного сферичного трикутника.

З трьох останніх рівностей маємо:

$$2S(\Delta ABC) + (S(\Delta ABC) + S(\Delta A_1BC) + S(\Delta AB_1C) + S(\Delta ABC_1)) =$$
$$= 2k(\alpha + \beta + \gamma). \tag{6.8}$$

За властивістю інваріантності площі дістанемо $S(\Delta ABC_1) = S(\Delta A_1B_1C)$, а за властивістю адитивності суму (6.8) площ у дужках можна замінити площею півсфери, що дорівнює $2k\pi$, як площа двокутника з кутом $\alpha = \pi$. Тоді рівність (6.8) набуде вигляду

$$S(\Delta ABC) = k(\alpha + \beta + \gamma - \pi),$$

або

$$S(\Delta ABC) = k\varepsilon,$$

де $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma > \pi$ – сферичний надвишок.

Теорему доведено. ■

Наслідок. Оскільки для сферичного трикутника $\alpha + \beta + \gamma > \pi$, то сферичний надвишок завжди *додатний*.

34.6. Зовнішній кут сферичного трикутника

Теорема 6.11. Зовнішній кут сферичного трикутника менший від суми двох внутрішніх, не суміжних з ним, але більший за їх різницю.

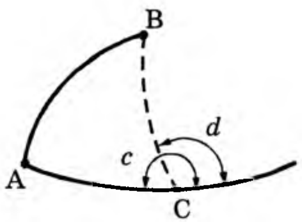


Рис. 1.113

Доведення. Позначимо зовнішній кут трикутника через d (рис. 1.113). Тоді $d + c = 180^\circ$; за попередньою теоремою $\angle A + \angle B + \angle C > 180^\circ$; звідси $\angle A + \angle B + \angle C > d + c$, або $\angle A + \angle B > d$.

Для доведення другої частини теореми використаємо теорему 6.7, за якою $\angle A + \angle B - \angle C < 180^\circ$, або аналогічно $\angle A - \angle B + \angle C < 180^\circ$. Звідси $\angle A - \angle B < 180^\circ - \angle C$, тобто $\angle A - \angle B < d$.

Теорему доведено.■

34.7. Поняття руху і рівності на сфері

Поняття руху на сфері можна ввести аналогічно до відповідного поняття на площині: *рухом* на сфері називається таке перетворення сфери, при якому зберігається відстань між точками. Отже, якщо фігура F перетворюється у фігуру F' на сфері рухом, то при цьому будь-які дві точки A і B фігури F переходять у такі точки A' і B' фігури F', що $AB = A'B'$.

Основні властивості рухів на площині переносяться відповідно на рухи сфери, але рухи на сфері мають деякі властивості, яких не мають рухи на площині. Зокрема, оскільки відстань між двома діаметрально протилежними точками сфери одна й та сама і дорівнює двом радіусам сфери, то *при будь-якому радіусі сфери діаметрально протилежні точки переходять у діаметрально протилежні точки сфери.*

Найпростішими рухами сфери є *поворот сфери навколо будь-якої осі,* що проходить через центр сфери, *симетрія сфери відносно будь-якої площини,* що проходить через центр сфери, *симетрія сфери відносно її центра.*

При повороті сфери навколо її діаметра MM' (вісь повороту) на кут α кожна точка A сфери, крім точок M і M', описує дугу кола, яке лежить у площині, перпендикулярній до осі MM', тобто кожне таке коло повертається у цій площині на кут α в одному і тому самому напрямі (рис. 1.114). Поворот сфери навколо цього діаметра MM' має

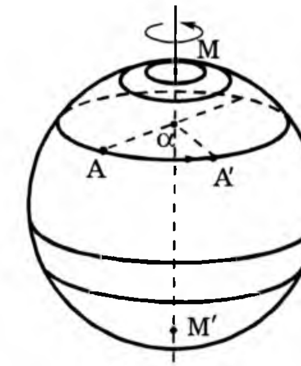


Рис. 1.114

дві нерухомі точки – це точки M і M', тоді як на площині нерухомою точкою повороту є *єдина точка* площини – центр повороту. За аналогією до цього діаметрально протилежні точки M і M' називають *центрами повороту*, тобто поворот на сфері має *два центри повороту – M і M'.*

Яким рухом на сфері можна сумістити діаметрально протилежні точки M і M'? Очевидно, що коли провести діаметр BB', перпендикулярний до діаметра MM', то при повороті навколо осі BB' на кут 180° точка M перейде в точку M'. Такі точки M і M' називають *симетричними відносно центра O* сфери. Точка O – центр симетрії. Отже, *центральну симетрію відносно центра сфери можна розглядати як поворот на кут 180° навколо певним чином вибраного діаметра.*

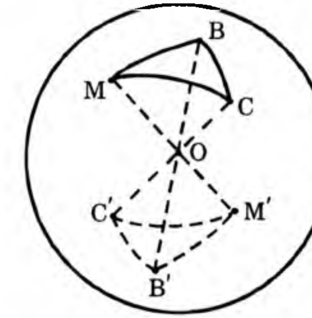


Рис. 1.115

Зрозуміло, що центральносиметричні фігури на сфері можна сумістити рухом сфери. На рис. 1.115 зображено центральносиметричні трикутники MBC і $M'B'C'$; відрізки MM', BB', CC' є діаметрами сфери O, відповідні пари точок є кінцями діаметрів – діаметрально протилежними точками.

Означення 6.9. Дві точки M і M' називаються *симетричними відносно деякого великого кола k*, якщо велике коло MM' перпендикулярне до кола k і одна з дуг, що має своїми кінцями точки M і M', ділиться великим колом k пополам.

Зазначимо, що і друга дуга з тими самими кінцями M і M' ділиться великим колом k пополам. (рис. 1.116).

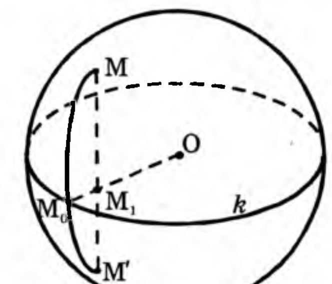


Рис. 1.116

Аналогічно фігура F' на сфері називається *симетричною фігурі F на цій самій сфері відносно кола k,* якщо кожна точка фігури F' є симетричною певній точці фігури F відносно великого кола k і, навпаки, кожна точка фігури F є симетричною певній точці фігури F' відносно цього самого великого кола k. Велике коло k при цьому відіграє роль осі симетрії. Можна довести, що *дві точки, симетричні на сфері відносно деякого її великого кола k, симетричні у*

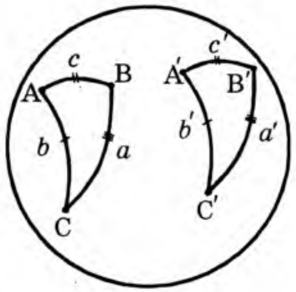


Рис. 1.117

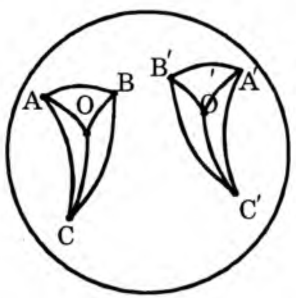


Рис. 1.118

просторі відносно площини, яка перетинає сферу по великому колу k. У даному випадку $MM' \perp OM_0$ і $MM_1 = M_1M'$.

Як і в планіметрії, *композиція будь-яких двох рухів сфери теж є рухом сфери.*

Поняття *рівності фігур на сфері* можна ввести аналогічно до того, як це робиться для фігур на площині. По-перше, дві сферичні фігури називаються *рівними*, якщо вони мають рівні відповідні елементи. По-друге, *дві сферичні фігури називаються рівними, якщо якимось рухом на сфері одна з них відображається на другу*, при цьому вершини однієї фігури переходять у вершини другої так, що порядок вершин зберігається. У шкільному курсі геометрії доводиться, що для площини такі два означення рівності фігур рівносильні [39, п. 90].

Зауважимо, що рівність фігур означують ще й так: дві фігури називаються *рівними*, якщо одну з них можна сумістити з другою накладанням. Зрозуміло, що у фігур, які при накладанні суміщаються, рівні всі відповідні елементи (рис. 1.117.).

Але обернене твердження для сферичних фігур не завжди правильне. Наприклад, всі елементи трикутника ABC дорівнюють відповідним елементам трикутника $A'B'C'$ (рис. 1.118), але сумістити їх накладанням не можна, бо вони мають протилежну орієнтацію. Для таких трикутників замість терміна «рівні» вживають термін «симетричні».

Існують чотири ознаки рівності сферичних трикутників (як і на площині Лобачевського). Перші три ознаки формулюються як і для плоских трикутників, крім того, рівними є трикутники з рівними відповідними кутами. Доведення ознак рівності сферичних трикутників, розміщених на одній сфері або на двох сферах однакового радіуса, проводиться за допомогою ознак рівності відповідних тригранних кутів з вершинами в центрі сфери.

§ 35. Несуперечливість планіметрії Рімана

Для доведення несуперечливості планіметрії Рімана достатньо побудувати її реалізацію в образах геометрії Евкліда. В одній з таких реалізацій використовується сфера в евклідовому просторі.

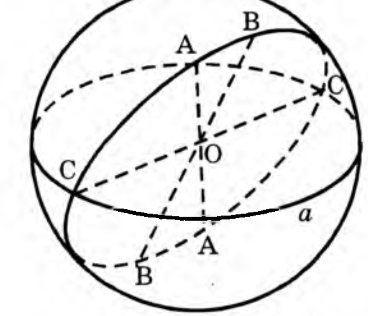


Рис. 1.119

Нехай маємо сферу S одиничного радіуса з центром у точці O (рис. 1.119). Введемо визначення основних понять планіметрії Рімана.

Р-точкою будемо називати будь-яку пару діаметрально протилежних точок даної сфери, тобто будь-яку пару діаметрально протилежних точок сфери S будемо розглядати як один об'єкт.

Р-прямою будемо називати будь-яке велике коло сфери S.

Р-площиною будемо називати всю сферу S.

Будемо говорити, що *Р-точка A лежить на Р-прямій a*, якщо точки сфери, які утворюють *Р-точку A*, лежать на великому колі сфери S, яке зображує *Р-пряму a*.

При таких визначеннях основних понять легко переконатись, що аксіоми першої групи належності площини Рімана виконуються в даній реалізації.

Аксіоми **1.1**, **1.2** вимагають, щоб через будь-які дві *Р-точки* проходила *Р-пряма* і тільки одна. Це справджується, бо через будь-які дві пари діаметрально протилежних точок сфери можна провести одне і тільки одне велике коло сфери.

Аксіома **1.3** вимагає, щоб на кожній *Р-прямій* існували принаймні дві *Р-точки.* Це виконується, бо на кожному великому колі існує дві пари (навіть скільки завгодно пар) діаметрально протилежних точок.

Аналогічно переконуємось, що існують три *Р-точки*, які не лежать на одній *Р-прямій.*

За аксіомою **1.4** будь-які різні *Р-прямі* перетинаються і притому тільки в одній *Р-точці.* Це має місце, оскільки кожні два різні великі кола на сфері перетинаються в єдиній парі діаметрально протилежних точок сфери.

Властивість замкнутості і скінченності *Р-прямої* на сфері очевидна, бо *Р-пряма* зображується великим колом сфери.

Група аксіом порядку евклідової площини в планіметрії Рімана замінена аксіомами розміщення точок на прямій; в основі аксіом цієї (другої) групи аксіом лежить поняття *розділеності* (*нерозділеності*) двох пар точок прямої. Нехай A, B, C, D – чотири *Р-точки* деякої *Р-прямої*, задані в певному порядку. Можливі два істотно різні випадки розміщення *Р-точок A, B, C, D*: 1) перші дві *Р-точки A* і *B розділяють* дві наступні *Р-точки C* і *D* (рис. 1.120*а*); 2) перші дві

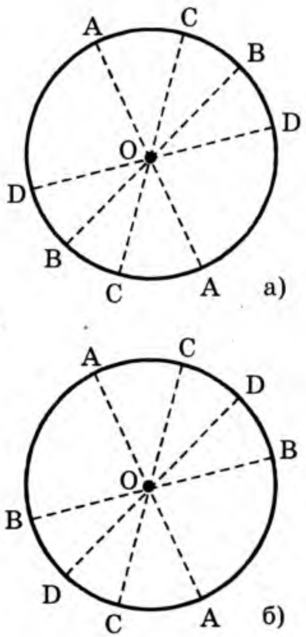


Рис. 1.120

Р-точки A і B *не розділяють* наступні дві *Р-точки* C і D (рис. 1.120*б*).

Враховуючи, що *Р-прямі* – це великі кола сфери, то поняття «розділеності двох пар точок» прямої, а також виконання всіх аксіом розміщення другої групи є досить наочним і легко перевіряється.

Введемо ще деякі планіметричні поняття.

Р-відрізком AB будемо називати будь-яку з двох пар протилежних дуг AB великого кола, які проходять через точки A і B. Отже, дві *Р-точки* A і B *Р-прямої* визначають на ній *два Р-відрізки*: один зображується парою протилежних дуг, які не містять кінці діаметра CC, а другий – парою протилежних дуг, яким належать діаметрально протилежні точки C (рис. 1.119).

З рис. 1.119 видно, що які б не були *Р-точки* A і B, що не належать *Р-прямій* a, *Р-пряма* AB перетинає *Р-пряму* a в єдиній *Р-точці* C. Отже, тільки один із двох *Р-відрізків*, що визначаються на *Р-прямій* AB *Р-точками* A і B, перетинає *Р-пряму* a у *Р-точці* C, а другий не перетинає її. Звідси випливає, що *Р-пряма* a не поділяє *Р-площину* на дві *Р-півплощини*.

Р-кутом у даній реалізації будемо називати одну із двох пар протилежних двокутників, на які розбивається сфера двома великими колами; вони відіграють роль *сторін Р-кута*.

Мірою Р-кута будемо вважати величину відповідного двогранного кута, що лежить між двома площинами великих кіл сфери – *сторін Р-кута*.

Довжиною Р-відрізка AB назвемо величину плоского кута, що лежить між двома діаметрами сфери AA і BB, тобто довжину дуги великого кола, що зображує *Р-відрізок* AB.

Звідси випливає, що кожна *Р-пряма* має *Р-довжину*, що дорівнює довжині половини великого кола, тобто π.

Р-трикутник ABC зображується двома сферичними трикутниками ABC. *Р-кути* A, B, C такого *Р-трикутника* вимірюються двогранними кутами тригранного кута $OABC$ з вершиною в точці O, а *Р-сторони* a, b, c *Р-трикутника* вимірюються плоскими кутами того ж тригранного кута.

В евклідовій геометрії сума двогранних кутів тригранного кута більша $2d$, а сума його плоских кутів менша $4d$. У термінах реалізації на сфері дістанемо, що сума *Р-кутів трикутника* більша π, а *Р-периметр* його менший 2π.

Р-площею фігури у площині Рімана будемо називати площу відповідної фігури на сфері. Виходячи з властивостей сферичної геометрії, переконуємось, що *площа Р-трикутника* ABC дорівнює його надлишку $A + B + C - \pi$, а площа всієї *Р-площини* дорівнює площі півсфери, тобто 2π.

Домовимось далі називати два *Р-відрізки конгруентними*, якщо існує рух сфери S по самій собі або дзеркальне відображення цієї сфери відносно якої-небудь її діаметральної площини, при якому один із цих *Р-відрізків* накладається на другий. Аналогічно визначається конгруентність *Р-кутів* і конгруентність будь-яких інших *Р-фігур*.

Використовуючи властивості руху і рівності фігур на сфері, можна пересвідчитись у справедливості всіх аксіом конгруентності площини Рімана в їх реалізації на сфері.

Аксіома неперервності Дедекінда (аксіома IV) має місце в геометрії Рімана, оскільки дві *Р-точки Р-прямої* в даній реалізації поділяють цю *Р-пряму* на два відрізки.

Аксіоматика геометрії Рімана складається з чотирьох перевірених груп. Реалізація аксіом геометрії Рімана та наслідків з них на евклідовій сфері дає право стверджувати, що *геометрія Рімана несуперечлива настільки, наскільки несуперечливою є геометрія Евкліда.*

Розглянута реалізація планіметрії Рімана на сфері є однією з багатьох можливих її реалізацій. Як приклад наведемо ще одну із моделей ріманової площини, об'єктами якої знову є об'єкти евклідової планіметрії, доповнені *нескінченно віддаленими (або невласними)* точками. При цьому будемо вважати, що:

1) кожна пряма a має одну невласну точку;
2) паралельні прямі мають спільну невласну точку;
3) непаралельні прямі мають різні невласні точки;
4) множину невласних точок всіх прямих будь-якої площини назвемо невласною прямою;
5) множину всіх невласних точок простору назвемо невласною площиною.

Відомо, що за таких умов невласні елементи вводяться в проективній геометрії. Тому евклідів простір, доповнений невласними точками, невласними прямими і невласною площиною, називається проективним простором.

Відношення належності точок прямій будемо розуміти як в евклідовій геометрії. Тоді легко перевірити, що виконуються перші три аксіоми належності евклідової площини, крім того, будь-які дві прямі перетинаються. Отже, аксіоми належності рімановоі площини виконуються. Звідси випливає, що пряма в цій реалізації – замкнута лінія, одна точка прямої не розбиває її на дві частини, пряма не розбиває площини на дві частини, площина є замкненою поверхнею.

Відношення порядку точок на проективній прямій визначається за допомогою поняття розділеності (нерозділеності) двох пар точок, тому виконуються аксіоми розміщення точок прямої Рімана.

Відношення конгруентності фігур вводиться в цій реалізації за допомогою центрального проектування: дві фігури площини називаються конгруентними, якщо конгруентними є проекції цих фігур на сфері.

Отже, у новій реалізації всі об'єкти знаходяться в таких взаємних відношеннях, як відповідні їм об'єкти реалізації рімановоі площини на сфері. Тому обидві моделі по-різному реалізують одну й ту ж ріманову планіметрію.

У розглянутих моделях показана реалізація рімановоі планіметрії. Модель тривимірної геометрії Рімана можна дістати шляхом ототожнення діаметрально протилежних точок тривимірної сфери у чотиривимірному просторі Евкліда або за допомогою проективної геометрії в просторі.

§ 36. Різні геометрії і реальний простір

36.1. Поняття геометричного простору

Ми ознайомились з деякими фактами геометрії Евкліда, геометрії Лобачевського, геометрії Рімана. При цьому побачили, що заміна лише однієї аксіоми геометрії Евкліда (аксіоми паралельних) іншою приводить до іншої геометрії. Аналогічно можна замінити інші аксіоми евклідової геометрії, що приведе до одержання нових геометрій. Наприклад, вилучивши аксіому Архімеда, одержимо неархімедову геометрію. Взагалі за аксіому можна взяти будь-яку теорему – наприклад, теорему Піфагора. Тоді, переконструювавши відповідно систему аксіом, дістанемо непіфагорову геометрію і відповідний простір, в якому вона виконується.

Відомо, що геометрія вивчає просторові форми та співвідношення об'єктів дійсного світу. Тому система аксіом, що покладена в основу геометрії, не може бути довільною; аксіоми формулюються з урахуванням того емпіричного матеріалу, який накопичений геометрією, і так, щоб увесь цей матеріал міг бути виведеним з них логічними міркуваннями.

Мало вимагати від системи аксіом, щоб в ній не було внутрішніх протиріч; необхідно, щоб в аксіомах відображалися в загальному вигляді дійсні співвідношення між дійсними об'єктами дійсного матеріального світу. Виявити ці співвідношення можна тільки шляхом глибокого і всебічного вивчення природи, навколишньої дійсності.

Геометрія оперує поняттями, які виникають з досвіду в результаті певної абстракції об'єктів реального світу, при якій беруться до уваги лише деякі властивості реальних об'єктів.

У строго логічних міркуваннях при доведенні теорем доводиться мати справу тільки з такими властивостями об'єктів – вони і мають бути відзначені в аксіомах і означеннях.

Звідси випливає, *що геометричним простором,* визначеним даною системою аксіом, називається множина об'єктів, що називаються геометричними фігурами, взаємне відношення яких задовольняє вимоги аксіом даної системи.

Отже, можна говорити про *евклідів простір* як про сукупність об'єктів, які задовольняють систему аксіом геометрії Евкліда, або про *простір Лобачевського* як про множину об'єктів, які задовольняють систему аксіом геометрії Лобачевського, чи про *простір Рімана* як про сукупність об'єктів, що задовольняють вимоги системи аксіом геометрії Рімана.

З огляду на існування різних геометрій виникає запитання: «Яка з геометрій має місце в реальному фізичному просторі? Не можуть же вони бути правильними одночасно, маючи суперечливі твердження». Щоб відповісти на це запитання, треба уточнити, що означає «вважати геометрію правильною». На розглянутому матеріалі ми переконались, що всі три геометрії не містять в собі суперечливих тверджень, що вони логічно несуперечливі, логічно повноцінні, рівноправні, тому кожна з них правильна.

Але кожна геометрична система при вивченні просторових форм і співвідношень між ними, як уже зазначалося, абстрагується від ряду конкретних властивостей об'єктів простору, а значить, на кожному конкретному етапі розвитку лише наближено відтворює дійсність. Тому ніяка геометрична система не може бути визначена як завершена, як така, що єдино правильно відображає властивості простору.

Звідси випливає, що правильніше ставити таке запитання: «Яка з геометрій краще розкриває геометричні властивості фізичного простору у відповідності з тими знаннями, що ми маємо про нього в даний час?»

З життєвого досвіду переконуємось, що на даний час, в даних умовах найповніше відображає властивості реального простору, що нас оточує, саме геометрія Евкліда.

36.2. Поняття про лінії і поверхні сталої кривини

Лінії, які допускають ковзання самих по собі, називаються *лініями сталої кривини.*

У геометрії Евкліда лініями сталої кривини є пряма і коло. У площині Лобачевського таких ліній чотири – пряма, коло, еквідистанта і орицикл.

Кривина прямої лінії дорівнює нулю ($k = 0$). Кривина кола – величина, обернена до радіуса $\left(k = \dfrac{1}{R}\right)$. Кривина орицикла в площині Лобачевського має величину також $k = \dfrac{1}{R}$, де R – радіус кривини площини Лобачевського. Кривина еквідистанти залежить від її висоти, але при одній і тій же висоті кривина еквідистанти стала.

Як було з'ясовано раніше, планіметрія Лобачевського реалізується на псевдосфері, тобто на поверхні сталої від'ємної кривини, тому і кривина ліній, і кривина площини Лобачевського *від'ємна.*

Планіметрія Рімана реалізується на сферичній поверхні, яка має сталу *додатну* кривину $k = \dfrac{1}{R}$, тому лінії на площині Рімана і сама площина Рімана мають сталу *додатну* кривину.

Отже, спільним для геометрій Евкліда, Лобачевського, Рімана, крім понять абсолютної геометрії, є те, що кожна з них є *геометрією поверхонь сталої кривини.*

Відзначимо, що Ф. Клейн у зв'язку з властивостями ліній другого порядку (за кількістю нескінченно віддалених точок) назвав геометрію Евкліда *параболічною* (пряма має одну нескінченно віддалену точку, як і парабола), геометрію Лобачевського – *гіперболічною* (пряма Лобачевського має дві нескінченно віддалені точки, як і гіпербола), геометрію Рімана *еліптичною* (пряма Рімана – замкнена, як і еліпс).

36.3. Відстань між двома точками

На площині Евкліда в прямокутній декартовій системі координат відстань двох нескінченно близьких точок дорівнює величині, квадратом якої є

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{6.9}$$

де символом d позначено диференціал відповідної функції.

Твердження про існування двох взаємно перпендикулярних прямих на площині є еквівалентним V постулату Евкліда, який суперечить аксіомі паралельності Лобачевського, тому в площині Лобачевського не існує прямокутної декартової системи координат.

Відомо, що в площині Евкліда геометричним місцем точок, рівновіддалених від даної прямої, є *пряма,* паралельна даній. У площині Лобачевського таке геометричне місце точок буде не прямою, а кривою опуклою лінією, яку назвали *еквідистантою.* З урахуванням цього в системі координат, аналогічній прямокутній декартовій, на площині Лобачевского квадрат відстані між двома нескінченно близькими точками визначається за формулою

$$ds^2 = dx^2 + ch^2\frac{x}{R}dy^2, \tag{6.10}$$

де символом ch позначено гіперболічний косинус, який дорівнює

$$ch\frac{x}{R} = \frac{e^{\frac{x}{R}} + e^{\frac{-x}{R}}}{2},$$

тут e – трансцендентне число, що має значення $e = 2{,}718...$, а R – радіус кривини відповідного простору.

Якщо побудувати аналогічну систему координат на площині Рімана, то квадрат відстані між двома точками визначається формулою

$$ds^2 = dx^2 + \cos^2\frac{x}{R}dy^2. \tag{6.11}$$

Зіставляючи формули (6.9), (6.10), (6.11), бачимо, що в усіх трьох геометріях квадрат відстані між нескінченно близькими точками дорівнює квадратичній формі від диференціалів координат, причому на площинах Евкліда, Лобачевського і Рімана вибрані спеціальні системи координат. За властивостями квадратичних форм ніяким перетворенням системи координат жодну із форм (6.9), (6.10), (6.11) не можна перевести одна в іншу.

Контрольні запитання

1. У чому відмінність геометрії Рімана від Евклідової геометрії і геометрії Лобачевського?
2. Сформулюйте аксіоми належності точок і прямих площин Рімана.
3. Назвіть особливості прямої і площини Рімана.
4. Сформулюйте аксіоми розміщення точок на прямій Рімана.
5. Назвіть основні поняття сферичної геометрії.
6. Як визначається відстань між двома точками на сфері?
7. Дайте означення полюса і поляри на сфері.
8. Дайте означення сферичного кута. Чим він вимірюється?
9. Дайте означення сферичного трикутника. Яка залежність між його сторонами?
10. Доведіть теорему про суму кутів сферичного трикутника.
11. Доведіть теорему про площу сферичного трикутника.
12. Доведіть теорему про зовнішній кут сферичного трикутника.
13. Введіть поняття руху і рівності на сфері.
14. Побудуйте реалізацію планіметрії Рімана на сфері і доведіть несуперечливість аксіом планіметрії Рімана в ній.
15. Що розуміється під геометричним простором?

Розділ **7**

Аксіоматика шкільного курсу геометрії

§ 37. Огляд різних підходів до аксіоматичної побудови шкільного курсу геометрії

Починаючи з III ст. до н.е. протягом двох тисяч років зразком викладу геометричного матеріалу були «Початки» Евкліда, зміст яких брався за основу написання підручників з геометрії для різних навчальних закладів.

Перший у Росії підручник під назвою «Генеральна геометрія» був виданий у 1765 р. Н.Г. Курчановим, учнем Л.Ф. Магницького. Цей підручник складався з трьох розділів: *лонгіметрія*, в якому розглядались суміжні та вертикальні кути, ознаки паралельності прямих та ін.; *планіметрії* і *стереометрії*.

Дещо пізніше російські педагоги Е.М. Головін, С.Е. Гур'єв, Т.Д. Осиповський, Ф.І. Буссе видали ряд підручників з геометрії для гімназій, реальних училищ та інших середніх навчальних закладів. Ці підручники вже складались з двох традиційних розділів – *планіметрії* і *стереометрії*. Особливо популярним був підручник «Елементарна геометрія в обсязі гімназичного курсу» професора Московського університету А.Ю. Давидова, цей підручник багаторазово видавався з 1864 р. по 1922 р.

Заслуженою популярністю користувався підручник з геометрії для середньої школи А.П. Кисельова, виданий вперше в кінці XIX ст. Тривалий час в школах України геометрію вивчали за цим підручником [17].

У вступі до планіметрії були сформульовані *основні властивості площини* і *прямої*, які пізніше в § 28 названі аксіомами. Тут же наведені три аксіоми з «Початків» Евкліда. Доведення планіметричних тверджень проводилось далі без посилання на ці аксіоми (в основному використовувався метод накладання). У стереометрії А.П. Кисельова сформульовані три властивості площини, названі теж аксіомами, які частково використовувались при доведенні теорем. Про яку-небудь систему аксіом, аксіоматичний метод у підручнику А.П. Кисельова не йдеться.

Суть аксіоматичного методу побудови геометрії, короткий зміст «Початків» Евкліда і систему аксіом Д. Гільберта викладено в додатках «Про аксіоми геометрії» проф. Н.Д. Глаголєва до стереометрії А.П. Кисельова.

У 70-ті роки минулого століття в школах України (як і в інших республіках СРСР) планіметрія вивчалась за навчальним посібником, створеним авторським колективом під керівництвом акад. А.М. Колмогорова (А.М. Колмогоров, О.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. Геометрія: Навчальний посібник для 6–8 класів середньої школи. – К.: Рад. школа, 1973). У першому розділі – «Початкові поняття геометрії» – введені *основні* (без означення) поняття стереометрії: *точка*, *пряма*, *площина*, *відстань* між двома точками (п. 2). Потім (п. 4) сформульовані три *основні властивості відстані*, на основі яких доведено твердження про те, що для будь-яких трьох точок A, B і C відстань AC більша або дорівнює різниці відстаней AB і BC. У цьому ж пункті введене поняття *аксіоми*, сформульована *аксіома прямої*, на основі якої доведена теорема про те, що дві прямі можуть мати не більше однієї спільної точки. Далі формулюються твердження, одні з яких не доводяться, інші доводяться, але термін «аксіома» не вживається, лише в п. 32 (с. 121) сформульована аксіома *паралельності* і доведено ряд тверджень.

Отже, системи аксіом, на якій би будувалась планіметрія, у ході викладення матеріалу не сформульовано, аксіоматичний метод не реалізовано.

У додатках «Про логічну побудову геометрії» з'ясовано суть логічної будови геометрії та запропонована одна із можливих систем аксіом, відповідна системі викладу геометричного матеріалу в даному посібнику. Ця система аксіом складається з дванадцяти аксіом, поділених на п'ять груп: 1) аксіоми належності (3); 2) аксіоми відстані (3); 3) аксіоми порядку (4); 4) аксіома рухомості (1); 5) аксіома паралельних (1).

У 80-ті роки минулого століття з'явилося декілька спроб побудувати шкільний курс геометрії на аксіоматичній основі. Це навчальний посібник О.В. Погорєлова, авторського колективу, очолюваного О.Д. Александровим, посібник Л.С. Атанасяна та ін.

Відомо, що за основу планіметрії можна взяти різні системи аксіом, тому і побудова планіметрії може бути здійснене різними шляхами. Але, незважаючи на різні підходи до побудови планіметрії, в ній вивчають одні й ті ж геометричні фігури і дістають одні й ті ж їх властивості, виражені в аксіомах і теоремах: це теорема Піфагора, теореми про суму кутів трикутника, про площу трикутників і многокутників, ознаки рівності трикутників, операції над векторами і т.д.

§ 38. Система аксіом Л.С. Атанасяна

Один із варіантів аксіоматики шкільної геометрії для загальноосвітніх середніх шкіл запропонований авторським колективом під керівництвом проф. Л.С. Атанасяна [7].

Основними *об'єктами* (неозначуваними поняттями) в ній є *точка*, *пряма* і *площина*, основними *відношеннями* між основними об'єктами – *належність*, *лежати між*, *накладання* (рівність), *міра* відрізка. Крім того, використовуються загальноматематичні поняття *множина*, *число* та ін.

У *додатках* до підручника з геометрії для 7–9 класів сформульовано 16 аксіом *планіметрії* [6]:

1. Кожній прямій належать принаймні дві точки.
2. Існує принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.
3. Через будь-які дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.
4. Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.
5. Кожна точка O прямої розділяє її на дві частини (два промені) так, що будь-які дві точки одного променя лежать по один бік від точки O, а будь-які дві точки різних променів лежать по різні боки від точки O.
6. Кожна пряма a розділяє площину на дві частини (дві півплощини) так, що будь-які дві точки однієї і тієї ж півплощини лежать по один бік від прямої a, а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні боки від прямої a.
7. Якщо при накладанні збігаються кінці двох відрізків, то збігаються і самі відрізки.
8. На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок, рівний даному, і притому тільки один.

9. Від будь-якого променя в даній півплощині можна відкласти кут, рівний даному нерозгорнутому куту, і притому тільки один.
10. Будь-який кут hk можна сумістити накладанням з рівним йому кутом h_1k_1 двома способами: 1) так, що промінь h збігається з променем h_1, а промінь k – з променем k_1; 2) так, що промінь h збігається з променем k_1, а промінь k – з променем h_1.
11. Будь-яка фігура рівна сама собі.
12. Якщо фігура Φ рівна фігурі Φ_1, то фігура Φ_1 рівна фігурі Φ.
13. Якщо $\Phi_1 = \Phi_2$ і $\Phi_2 = \Phi_3$, то $\Phi_1 = \Phi_3$.
14. При вибраній одиниці вимірювання відрізків довжина кожного відрізка виражається додатним числом.
15. При вибраній одиниці вимірювання відрізків для будь-якого додатного числа існує відрізок, довжина якого виражається цим числом.
16. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Підкреслюємо, що цей перелік аксіом планіметрії приведений в додатках до підручника, а в процесі викладення матеріалу лише деякі з цих аксіом виділені курсивом і не називаються аксіомами. Крім того, зрозуміло, що деякі з перелічених аксіом можна довести як теореми, наприклад, аксіому 5.

Отже, курс планіметрії в цьому підручнику фактично побудований не аксіоматично.

У підручнику з геометрії для 10–11 класів цих же авторів [7] уже у вступі сформульовані три аксіоми *стереометрії*.

A$_1$. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, проходить площина, і притому тільки одна.

A$_2$. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то всі точки прямої лежать у цій площині.

A$_3$. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму, на якій лежать всі спільні точки цих площин.

Далі доводяться два наслідки з перелічених аксіом:
1. Через пряму і точку, яка їй не належить, проходить площина, і притому тільки одна.
2. Через дві прямі, що перетинаються, проходить площина, і притому тільки одна.

При введенні нових понять і доведенні теорем використовуються відомі з планіметрії твердження і деякі аксіоми.

У *додатках* «Про аксіоми геометрії» до цього підручника знову перелічено 20 аксіом, на основі яких можна було б, на думку авторів, побудувати шкільний курс геометрії. Формулювання аксіом містять як планіметричні, так і стереометричні твердження. Аксіоми розбиті на групи.

Аксіоми першої групи характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин.
1. На кожній прямій і в кожній площині є точки.
2. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій, і принаймні чотири точки, які не лежать на одній площині.
3. Через будь-які дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.
4. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, проходить площина, і притому тільки одна.
5. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і всі точки прямої лежать у цій площині.
6. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають спільну пряму, на якій лежать всі спільні точки цих площин.
7. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.
8. Кожна точка O прямої розділяє її на дві частини – два промені – так, що будь-які дві точки одного й того ж променя лежать по один бік від точки O, а будь-які дві точки різних променів лежать по різні боки від точки O.
9. Кожна пряма a, що лежить у площині, розділяє цю площину на дві частини (дві півлощини) так, що будь-які дві точки однієї і тієї ж півплощини лежать по один бік прямої a, а будь-які дві точки різних півплощин лежать по різні боки від прямої a.
10. Кожна площина α розділяє простір на дві частини (два півпростори) так, що будь-які дві точки одного й того ж півпростору лежать по один бік від площини α, а будь-які дві точки різних півпросторів лежать по різні боки від площини α.

Друга група аксіом належить до понять *накладання* і *рівності* фігур.

Перед формулюванням аксіом цієї групи вводиться відношення *накладання* як відображення простору на себе, при якому виконуються перелічені нижче аксіоми 11–17. Крім того, використовується поняття *рівності* фігур, яке визначається так.

Нехай Φ і Φ_1 – дві фігури; якщо існує накладання, при якому фігура Φ відображається на фігуру Φ_1, то говорять, що фігуру Φ можна сумістити накладанням з фігурою Φ_1 або що фігура Φ рівна фігурі Φ_1.

Формулювання аксіом 11–17 збігається з формулюванням аксіом 7–13 в додатках до підручника геометрії для 7–9 класів.

Третя група аксіом пов'язана з вимірюванням відрізків: це аксіоми 18, 19, вони мають той самий зміст, що і аксіоми 14–15 у планіметрії.

Четверта група – це аксіома паралельності.

20. У будь-якій площині через точку, що не лежить на даній прямій цієї площини, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Наведено два приклади доведення теорем: першої ознаки рівності трикутників та рівності двох прямих трикутних призм за рівними основами і рівними висотами.

§ 39. Система аксіом О.Д. Александрова

Спроба аксіоматичної побудови курсу геометрії для учнів шкіл і класів з поглибленим вивченням математики здійснена авторським колективом під керівництвом академіка О.Д. Александрова у навчальних посібниках з геометрії для 8–9 і 10–11 класів [3]. Формулювання аксіом у цих посібниках передбачає, що учням відома арифметика дійсних чисел і поняття додатної величини.

Основні об'єкти планіметрії: *точка і пряма.*

Основні відношення: *належність* (для точки і прямої), *лежати між* (для трьох точок, які лежать на одній прямій).

Система аксіом розбита на п'ять груп.

І група. ***Аксіоми належності***

1.1. Через кожні дві точки проходить пряма, і притому тільки одна.

1.2. На кожній прямій існує принаймні дві точки. Існують принаймні три точки, які не лежать на одній прямій.

II група. ***Аксіоми порядку***

2.1. Із кожних трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

2.2. Кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

Перед формулюванням аксіоми 2.2 вводиться поняття *відрізка* і *півплощини*, а після неї – поняття *променя.*

III група. ***Аксіоми відстані***

3.1. Кожним двом точкам ставиться у відповідність додатна величина, яка називається відстанню між цими точками.

Вводиться позначення відстані між точками A і B: $|AB|$ або $|BA|$.

3.2. *Для будь-якої відстані* r на заданому промені з початком O існує точка A, для якої $|OA| = r$.

Цю аксіому ще називають аксіомою *відкладання* відрізка.

3.3. Якщо точка B лежить між точками A і C, *то* $|AB| + |BC| = |AC|$ (аксіома адитивності довжини відрізка).

3.4. Для будь-яких трьох точок A, B, C має місце нерівність $|AB| + |BC| \geq |AC|$.

Далі вводиться поняття *руху* як відображення, при якому зберігаються відстані.

IV група. ***Аксіоми рухомості***

4.1. Нехай промінь l з початком у точці O лежить на межі півплощини α, а промінь l' з початком у точці O' лежить на межі півплощини α'. Тоді існує такий рух, який переводить точку O в O', промінь l в l' і півплощину α в α'.

V група. ***Аксіоми паралельності Евкліда***

5.1. Для кожної прямої a і кожної точки A, яка не лежить на прямій a, існує не більше однієї прямої, що проходить через точку A і не перетинає прямої a.

Переходячи до стереометрії, зазначимо, що поняття *площини* в даній системі аксіом не є неозначуваним.

Означення 7.1. *Площиною* називається фігура, на якій виконується планіметрія і для якої справджуються аксіоми стереометрії.

Аксіоми стереометрії

Аксіома 1 (аксіома площини). У просторі існують площини. Через кожні три точки простору проходить площина.

З цієї аксіоми випливає, що в просторі існує більше однієї площини.

Аксіома 2 (аксіома перетину площин). Якщо дві площини мають спільну точку, то їх перетином є їх спільна пряма.

Аксіома 3 (аксіома належності прямої площині). Якщо пряма проходить через дві точки даної площини, то вона лежить у цій площині.

Перед формулюванням наступної аксіоми вводиться поняття *півплощини.*

Аксіома 4 (аксіома розбиття простору площиною). Кожна площина розбиває простір на два півпростори.

Аксіома 5 (аксіома відстані). Відстань між будь-якими двома точками простору не залежить від того, на якій площині, що містить точки, вона виміряна.

Після того як вибрано одиничний відрізок, довжина кожного відрізка виражається додатним числом.

Аксіома відстані надає можливість порівнювати фігури на різних площинах, зокрема застосувавши теореми про рівність і подібність трикутників, розміщених у різних площинах.

Зазначимо, що знову є лише вказівка на те, що планіметрію можна побудувати аксіоматично на основі перелічених аксіом, але фактично це не реалізовано.

§ 40. Система аксіом О.В. Погорєлова

У 1982–83 навчальному році у школах України (та інших республік СРСР), починаючи з 6 класу, геометрію стали вивчати за навчальним посібником академіка О.В. Погорєлова. Основний зміст цього посібника був опублікований у 1972 році в книзі «Элементарная геометрия» [29], яка подавалась на конкурс шкільного підручника з геометрії. В результаті експерименту з викладання геометрії за посібником О.В. Погорєлова у школах Харківської області, міст Києва і Севастополя цей посібник удосконалювався (1977–1982 рр.), і варіант «Геометрія 6–10» з 1982 р. Міністерством освіти СРСР і Міністерством освіти УРСР рекомендований у практику викладання геометрії в середній школі як основний навчальний посібник.

Основне завдання у викладанні геометрії автор нового посібника визначив так: «Пропонуючи цей курс, ми виходили з того, що головне завдання викладання геометрії в школі – навчити учнів логічно міркувати, аргументувати свої твердження, доводити. Дуже небагато з тих, що закінчать школу, будуть математиками, тим більше геометрами. Будуть і такі, що у своїй практичній діяльності жодного разу не використають теорему Піфагора. Проте навряд чи знайдеться хоч би один, якому не доведеться міркувати, аналізувати, доводити» [29, с. 7].

Можна виділити такі науково-педагогічні особливості цього посібника:

1) традиційний зміст і аксіоматична побудова;
2) економний виклад матеріалу і організуюча роль запитань для повторення;
3) єдність теорії і практики.

Відносно традиційного змісту О.В. Погорєлов зауважив: «Увесь багатовіковий досвід викладання елементарної геометрії з часів Евкліда доводить раціональність традиційної системи. Удосконалення її, пов'язане із загальним розвитком науки, не повинне стосуватися її розумних і глибоко продуманих основ» [29, с. 7].

Дедуктивна побудова геометрії визначається її аксіоматикою. Взагалі не слід змішувати аксіоматичну побудову шкільного курсу геометрії з аксіоматичною побудовою геометрії як науки. Спроби авторів ототожнювати їх при написанні шкільних підручників приводили до невдач. Тому досить популярна система аксіом Гільберта для побудови шкільної геометрії не підходить. Для дедуктивної побудови шкільного курсу геометрії необхідно мати просту, природну, зрозумілу для учнів систему аксіом. Цим вимогам найбільше відповідає система аксіом О.В. Погорєлова. В його посібнику здійснено систематизований виклад геометричного матеріалу на базі оригінальної і економної системи аксіом. При цьому аксіоматичний виклад ведеться від початку курсу. Автор вважає, що з педагогічної точки зору необхідно як можна раніше виховати в учнів мотивовану потребу аргументувати свої міркування, доводити нові твердження.

Курс геометрії в підручнику О.В. Погорєлова «Геометрія 7–11» [28] побудовано строго дедуктивно: усі аксіоми у вигляді основних властивостей найпростіших геометричних фігур сформульовані в першому параграфі. По суті, у цьому параграфі закладені основи курсу геометрії.

Основними поняттями є *точка*, *пряма*, *площина*, *належати* для точок і прямих, *лежати між* для точок на прямій, *міра* (довжина відрізка, градусна міра кута).

Формулювання аксіом планіметрії і їх кількість у різних виданнях навчального посібника дещо змінювались, уточнювались. Наведемо їх формулювання за підручником [28]. *Система аксіом* (за цим підручником) складається з *дев'яти* аксіом планіметрії і *трьох* аксіом стереометрії. З методичних міркувань і для зручності викладу матеріалу аксіоми стереометрії сформульовані на початку стереометрії (§ 15). У підручнику [28] аксіоми не розбиті на групи, а мають порядкові номери.

І. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

ІІ. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

ІІІ. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля.

Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

VII. Від будь-якої півпрямої в дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Аксіоми стереометрії

C_1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.

C_2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

C_3. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Звертаємо увагу на те, що у формулюванні аксіом I–IX відсутнє слово площина, оскільки вони формулювались у планіметрії, де всі об'єкти геометрії розміщені в одній площині.

У стереометрії нескінченно багато площин, тому при формулюванні аксіом I–IX в стереометрії необхідно в кожній з них підкреслювати, що названі об'єкти лежать в одній площині.

Наприклад, аксіома IV матиме в просторі таке уточнене формулювання:

IV. Пряма, що належить площині, розбиває цю площину на дві півплощини.

Такі уточнення стосуються і аксіом VII, VIII, IX при їх формулюванні в стереометрії.

У міру потреби перед формулюванням аксіом вводяться *означувані* поняття: *відрізок, промінь (півпряма), кут, розгорнутий кут, трикутник, рівні відрізки, рівні кути, рівні трикутники, паралельні прямі* та ін.

Відзначимо деякі особливості формулювання аксіом, означень і доведення теорем.

1. У багатьох підручниках з планіметрії для середньої школи період введення системи аксіом розтягувався до закінчення вивчення планіметрії. Пропонувалось спочатку вивчати геометрію на рівні наочних уявлень та інтуїтивно зрозумілих висновків без логічного їх обґрунтування, накопичуючи певні суттєві геометричні відомості, а після завершення вивчення планіметрії перейти до аксіоматичного викладу матеріалу, тобто спочатку основний зміст планіметрії вивчався емпірично. Але при цьому не виконувалось основне завдання – не формувалось наукове, дедуктивне мислення учнів.

На відміну від такого погляду на побудову і вивчення систематичного курсу геометрії, починаючи з планіметрії, у підручнику О.В. Погорєлова враховуються вікові можливості учнів 7–9 класів і використання наочних та інтуїтивних прийомів поєднується зі строго науковим, дедуктивним викладом (і вивченням) геометричного матеріалу уже з перших уроків геометрії в 7 класі. При цьому ставиться завдання не заучування аксіоматичних доведень, а поступового оволодіння ними; а також завдання доведення всіх тверджень, які не входять у число основних властивостей найпростіших геометричних фігур. Саме з урахуванням цього спочатку не вживається поняття аксіоми, воно замінене більш зрозумілим поняттям «основні властивості», які емпірично відомі учням з програми математики 1–6 класів. Лише в кінці § 1 (п. 13) читаємо: «Твердження, які містять формулювання основних властивостей найпростіших фігур, не доводяться і називаються *аксіомами*. Слово «аксіома» походить від грецького слова *аксіос* і означає «твердження, що не викликає сумнівів».

Під час доведення теорем дозволяється користуватися основними властивостями найпростіших фігур, тобто аксіомами, а також уже доведеними властивостями, тобто *теоремами*. Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони нам видаються очевидними, користуватись не можна.

При доведенні теорем можна користуватися рисунком, як геометричним записом того, що виражається словами. Під час міркувань не дозволяється використовувати властивості фігур, які видно з рисунка, якщо не можна обґрунтувати їх, спираючись на аксіоми і теореми, доведені раніше».

2. Вимірювання геометричних величин займає значну частину шкільного курсу геометрії, зокрема при розв'язуванні задач. У той же час введення понять вимірювання відрізків і кутів є одним із найскладніших для учнів 7 класу. Ці поняття можна ввести по-різному. Один із способів введення поняття величини відрізка і кута, який використовується в інших підручниках з геометрії, базується на понятті накладання, точніше, переміщення, бо накладання можна

виконати тільки *уявно*. При заміні поняття «довжина» поняттям «відстань» треба формулювати аксіоми *відстані*.

Взагалі питання вимірювання довжини відрізка прямої еквівалентне питанню побудови теорії дійсних чисел, оскільки можна встановити взаємно однозначну відповідність між точками прямої і множиною дійсних чисел. Але цей шлях для учнів 7–9 класів також не підходить.

Тому О.В. Погорєлов у своєму підручнику, враховуючи вікові та пізнавальні можливості учнів, починаючи з 7 класу обходить теоретичні питання вимірювання довжин відрізків та величин кутів, замінивши їх достатньою мірою адекватними моделями – відповідно масштабною лінійкою і транспортиром, що не знижує наукового рівня розуміння основних властивостей вимірювання відрізків і кутів. Тоді аксіоми III і V стають цілком доступними для учнів 7 класу.

3. Досить важливим у геометрії є поняття *рівності фігур*. У багатьох шкільних підручниках геометрії поняття рівності вводиться на основі властивостей *руху*, при цьому формулюються властивості (аксіоми) руху, які важко сприймаються на рівні 7 класу.

О.В. Погорєлов у своєму підручнику поняття рівності відрізків і кутів вводить на основі аксіом III і V вимірювання (п. 9 § 1):

«Два *відрізки* називаються *рівними*, якщо вони мають однакову довжину.

Два *кути* називаються *рівними*, якщо вони мають однакову кутову міру в градусах.

Трикутники називаються *рівними*, якщо в них відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні. При цьому відповідні сторони мають лежати проти відповідних кутів».

В означенні рівності трикутників особливо підкреслюється, що рівними мають бути *відповідні* сторони і *відповідні* кути, чого раніше в подібних означеннях не було.

Вводячи аксіому VIII, О.В. Погорєлов виключив використання досить складних за змістом і абстрактних аксіом руху і забезпечив можливість аксіоматичного викладу матеріалу про ознаки рівності трикутників.

Аксіома VIII про існування рівних трикутників дуже проста за формулюванням, доступна учням 7 класу і конструктивна: кожний учень може переконатись в існуванні трикутника, рівного даному, за допомогою побудови.

Пізніше, у 8 класі, після вивчення властивостей рухів поняття рівності фігур вводиться узагальнено: дві фігури називаються рівними, якщо вони переводяться одна в іншу певним рухом (§ 9).

Геометрична система будується не тільки на аксіомах (основних властивостях) і теоремах, а й на *означеннях*.

У підручнику О.В. Погорєлова даються означення всіх понять, які використовуються при побудові геометрії. Більшість означень понять дано так, що в них правильно і послідовно закріплюються результати діяльності мислення. Використовуються в основному означення двох видів – описові (дескриптивні) і конструктивні. Прикладами конструктивних означень є означення трикутника, кола тощо. Наприклад, трикутник визначається не як частина площини, а як фігура, утворена трьома точками, що не лежать на одній прямій, і трьома відрізками, які попарно сполучають ці точки. Взагалі, до вивчення § 13 «Площі фігур» та § 20 «Об'єми тіл» у підручнику О.В. Погорєлова планіметричні, а потім і стереометричні фігури розглядаються як *каркасні*, що більше відповідає фактичному виконанню рисунків або конструкцій (моделей) цих фігур.

4. У підручнику О.В. Погорєлова немає прийнятої в інших навчальних посібниках *символіки*. Надмірне захоплення символікою в 7 класі лише гальмує розвиток логічного мислення учнів, оскільки водночас необхідно стежити за логікою міркувань і вникати в зміст застосовуваних символів. Автор дотримується традиційної точки зору на використання символіки: формування понять неможливе без слів, а мислення в поняттях неможливе без усного мовлення. Експериментальні дослідження показали, що учні краще розуміють матеріал без використання спеціальної символіки. Звичайно, вчителеві зручно використовувати більше символіки для скорочених записів на дошці і в зошитах доведення теорем і розв'язання задач. Але затрати часу на засвоєння символіки не компенсуються скороченими записами, основний час уроку треба витрачати на навчання учнів міркувати.

5. Наприкінці кожного параграфа підручника з геометрії є запитання для повторення, за допомогою яких здійснюється *контроль* знань, умінь, навичок учнів. У цих запитаннях передбачено, що учень має вивчити напам'ять, що повинен уміти довести, а що просто пояснити на прикладах. На оцінку знань учнів істотно впливає і вміння розв'язувати задачі з підручника.

Отже, як видно з короткого огляду особливостей викладу матеріалу геометрії, запропонована система аксіом є науковою основою підручника О.В. Погорєлова, вона доступна учням. Всі планіметричні аксіоми розміщені на початку курсу геометрії, вони дають можливість побудувати курс геометрії дедуктивно, на високому науковому рівні. Звертаємо увагу на те, що ця система аксіом є науковою основою для засвоєння найважливіших понять курсу геометрії, таких, як відрізки, кути, рівність відрізків і кутів, рівність трикутників, паралельність прямих, сума кутів трикутника тощо.

Традиційна побудова курсу, в якому основним методом доведення є використання ознак рівності трикутників, приводить до того, що доведення з посиланням на аксіоми триває недовго: досить швидкий перехід до теорем про рівність трикутників дозволяє далі використовувати їх для доведення всіх наступних тверджень і розв'язання задач без прямого посилання на аксіоми.

Зрозуміло, що не треба семикласникам пояснювати суть аксіоматичного методу побудови геометрії. Це, по-перше, не вимагається програмою, по-друге, у процесі вивчення геометрії учні поступово звикатимуть до ідеї її дедуктивної побудови, а закінчивши вивчення планіметрії, дістануть загальне уявлення про геометрію як логічну науку.

Таким чином, вибрана О.В. Погорєловим система аксіом шкільного курсу геометрії надала можливість досягти досить високого рівня доведення тверджень, а логічна послідовність викладення матеріалу і знайдені автором нові математичні підходи до викладення важких розділів дозволили значно скоротити зміст і обсяг підручника.

Метрична система аксіом О.В. Погорєлова дозволяє уже з 8-го класу ефективно використовувати при доведенні геометричних тверджень координатний метод і цим самим зменшити обсяг матеріалу, а також створити умови для здійснення внутрішньопредметних зв'язків геометрії і алгебри.

Традиційний зміст і аксіоматична побудова геометрії в підручнику «Геометрія 7–10» О.В. Погорєлова, його внутрішньопредметні зв'язки і орієнтація на учнів – усе це має єдину мету: розвивати в учнів логічне мислення.

Контрольні запитання

1. Які ви знаєте підручники з геометрії для середніх навчальних закладів Росії в XIX ст.?
2. Дайте коротку характеристику змісту підручника з геометрії для середньої школи А.П. Кисельова [16; 17].
3. Дайте коротку характеристику змісту підручника з геометрії для середньої школи за ред. А.М. Колмогорова [19].
4. Назвіть основні (неозначувані) поняття і відношення в аксіоматиці підручника з геометрії для 7–9 класів за ред. Л.С. Атанасяна [6; 7].

5. Назвіть аксіоми планіметрії підручника з геометрії для 7–9 класів за ред. Л.С. Атанасяна [6; 7].
6. Назвіть аксіоми стереометрії та наслідки з них за підручником з геометрії для 10–11 класів за ред. Л.С. Атанасяна.
7. Дайте характеристику системи аксіом підручника з геометрії для 8–9 класів для шкіл і класів з поглибленим вивченням математики за ред. О.Д. Александрова [2].
8. Назвіть аксіоми стереометрії підручника з геометрії для 10–11 класів за ред. О.Д. Александрова [3].
9. З'ясуйте основне завдання у викладанні геометрії за підручником з геометрії для 7–11 класів О.В. Погорєлова [29].
10. Назвіть основні поняття і відношення аксіоматики підручника з геометрії для 7–11 класів О.В. Погорєлова [28].
11. Сформулюйте аксіоми планіметрії підручника з геометрії для 7–11 класів О.В. Погорєлова [28].
12. Сформулюйте аксіоми стереометрії та наслідки з них підручника з геометрії для 7–11 класів О.В. Погорєлова [28].
13. Дайте характеристику основних особливостей, відмінностей підручника О.В. Погорєлова від інших шкільних підручників з геометрії для середньої школи.

Частина II

ПРОЕКТИВНА ГЕОМЕТРІЯ

1 Розділ

Побудова проективного простору

§ 1. Центральне проектування в евклідовому просторі

Проективна геометрія вивчає властивості геометричних фігур, які не змінюються при будь-якому центральному проектуванні. Тому необхідно вивчити властивості такого проектування.

Нехай задано дві площини ω, ω′ і точку S, яка не лежить в жодній з цих площин (рис. 2.1). Між точками цих площин встановимо таку відповідність, що будь-якій точці A площини ω відповідає точка A' площини ω′, яка є перетином прямої SA з площиною ω′. Встановлена таким чином відповідність між точками площин ω і ω′ називається *центральним проектуванням* або *перспективною відповідністю*. Точка S називається *центром* проектування (*центром перспективи*), точка A' називається *центральною проекцією* (*перспективою*) точки A в площині ω′, пряма SA – *проектуючою* прямою, площина ω′ – *площиною проекцій* або *площиною зображення*. Точку A' ще називають *образом* точки A, а точку A – *прообразом* точки A'.

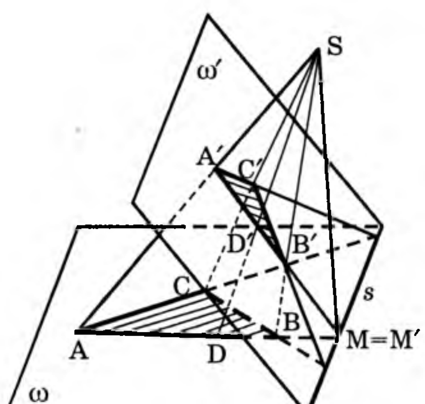


Рис. 2.1

Якщо в площині ω візьмемо іншу точку B і побудуємо її центральну проекцію B' у площині ω′, то відрізок $A'B'$ є центральною проекцією відрізка AB в площині ω′, пряма $A'B'$ – центральна проекція прямої AB. Якщо C' – центральна проекція точки C, то трикутник $A'B'C'$ є центральною проекцією трикутника ABC.

Точки прямої s перетину площин ω і ω′ відповідають самі собі, вони називаються *подвійними* (наприклад, точка $M = M'$).

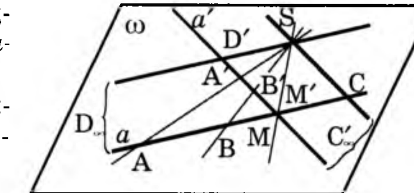


Рис. 2.2

Точка D прямої AB відображається на точку D' прямої $A'B'$, бскільки прямі AB і $A'B'$ лежать в одній проектуючій площині SAB.

Якщо в площині ω задано фігуру F, всі точки якої мають образи в площині ω′, то в площині ω′ дістанемо фігуру F', яка називається *центральною проекцією* (*перспективою*) фігури F. Фігуру F ще називають *оригіналом*, а фігуру F' – *зображенням* оригінала.

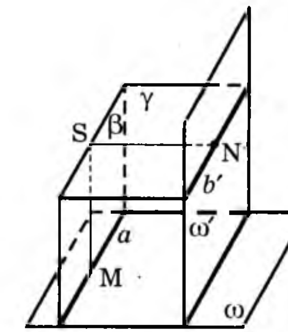


Рис. 2.3

Аналогічно можна встановити перспективну відповідність між точками двох прямих на площині. Нехай маємо дві прямі a і a' у площині ω. Візьмемо у цій площині точку S, яка не належить жодній з прямих a і a', за центр проектування і будемо проектувати точки прямої a на точки прямої a'. Наприклад, точці A прямої a відповідає точка A' перетину прямої a' з проектуючою прямою SA. Точка A' є центральною проекцією точки A. Аналогічно точка B' прямої a' є центральною проекцією точки B прямої a, а пряма a' – центральна проекція прямої a (рис. 2.2).

Із способу встановлення перспективної відповідності випливає, що центральною проекцією точки є точка, якщо вона існує; проекцією прямої, що не проходить через центр проектування, є пряма; точки, що лежать на одній прямій, відображаються на точки, що лежать на відповідній прямій; прямі, що проходять через одну точку (пучок прямих), переходять у прямі, що також проходять через одну точку, тобто інцидентність точок і прямих при центральному проектуванні не порушується.

Але не кожна точка прямої a має образ на прямій a': точка $C \in a$, для якої проектуюча пряма SC паралельна прямій a', не має образу, бо пряма SC не перетинає прямої a'. Аналогічно точка D' прямої a', для якої пряма SD' паралельна прямій a, не є образом ніякої точки прямої a (рис. 2.2).

Нехай у просторі між площинами ω і ω′ встановлена перспективна відповідність з центром S. Проведемо через точку S площину β паралельно площині ω′ і площину γ паралельно площині ω (рис. 2.3).

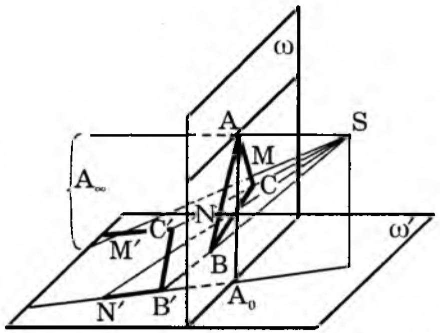


Рис. 2.4

Тоді ніяка точка M прямої a перетину площин ω і β не має образу на площині ω′($\beta \parallel \omega' \Rightarrow a \parallel \omega'$), оскільки пряма SM паралельна площині ω′, тобто не має з цією площиною жодної спільної точки. Усі інші точки площини ω мають образи у площині ω′.

Аналогічно ніяка точка N' прямої b' перетину площини ω′ з площиною γ не має прообразу в площині ω, оскільки пряма SN' паралельна площині ω і тому не має з цією площиною жодної спільної точки; усі інші точки площини ω′ мають прообрази в площині ω.

Таким чином, якщо взяти фігуру F у площині ω, до складу якої входять точки прямої a, то її зображення в площині ω′ не буде повним, оскільки точки фігури F, які лежать на прямій a, не матимуть образів. З іншого боку, на зображенні можуть бути точки, прообразів яких немає в оригіналі – це точки прямої b'.

Отже, *перспективна відповідність в евклідовому просторі не є взаємно однозначною.*

Приклад 1. Дано трикутник ABC в площині ω і точку S, яка не лежить у площині ω. Побудувати центральну проекцію трикутника ABC в площині ω′ при умові, що центр S проектування і вершина A трикутника ABC рівновіддалені від площини ω′.

Розв'язання. Центральною проекцією точки B буде точка B', точки C – точка C', сторони BC – відрізок $B'C'$ (рис. 2.4). Оскільки проектуючий промінь SA паралельний площині ω′, то точка A не має в площині ω′ образу у вигляді звичайної точки, образом буде нескінченно віддалена точка. Тому $B'N' \parallel C'M' \parallel SA$. Отже, в евклідовому просторі центральне проектування не є взаємно однозначним.

§ 2. Побудова проективного простору

Наявність зазначених дефектів відповідності, яка встановлюється центральним проектуванням в евклідовому просторі, не дає можливості використати метод центрального проектування в повному обсязі для вивчення властивостей фігур, які не змінюються при цьому проектуванні. Тому для вивчення проективних властивостей фігур евклідів простір необхідно доповнити деякими об'єктами так, щоб у

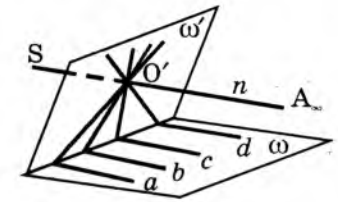


Рис. 2.5

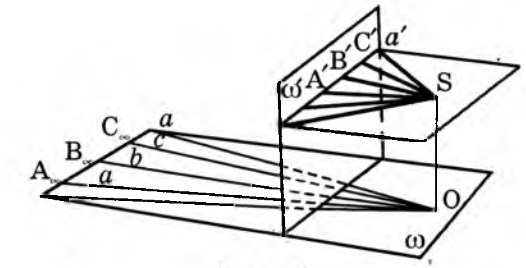


Рис. 2.6

новому доповненому просторі перспективна відповідність стала *взаємно однозначною*.

Уперше таке доповнення здійснив французький математик і архітектор ***Ж. Дезарг*** (1591–1661), який ввів поняття нескінченно віддалених точок і прямих.

Щоб перспективна відповідність між точками двох прямих (див. рис. 2.2) стала взаємно однозначною, необхідно, щоб пряма SC, паралельна прямій a', тепер мала з нею спільну точку, тобто треба припустити, що паралельні прямі теж перетинаються. За точку перетину паралельних прямих домовились вважати нескінченно віддалену точку цих прямих, тобто пряма a' доповнюється нескінченно віддаленою точкою, яку позначають індексом «∞», точкою C'_∞.

Аналогічно пряму a доповнено нескінченно віддаленою точкою D_∞ як точкою перетину паралельних прямих a і SD'. Нескінченно віддалену точку ще називають *невласною точкою*, на відміну від усіх власних (звичайних) точок прямої.

Означення 1.1. *Невласною точкою* називають спільну точку двох паралельних прямих.

Отже, пучок паралельних прямих має одну спільну невласну точку (рис. 2.5). Можна сказати, що сукупність паралельних прямих є пучком прямих з невласним центром.

Означення 1.2. Евклідова пряма, доповнена невласною точкою, називається *проективною прямою.*

Введемо далі поняття невласної прямої.

На евклідовій площині можна провести безліч прямих різних напрямів через будь-яку точку площини. Кожну з цих прямих доповнимо невласною точкою, їх буде нескінченна множина. Нехай на площині ω маємо прямі $a, b, c, \ldots$, їм належать невласні точки A_∞, B_∞,

C_∞, ... відповідно. Виберемо точку S за центр проектування (рис. 2.6). Щоб провести з точки S проектуючий промінь до невласної точки A_∞, треба провести пряму $SA' \parallel a$, де A' – точка перетину площини ω' з променем SA'. Аналогічно одержуємо точки B', C' і т.д. в площині ω' як точки перетину з ω' променів $SB' \parallel b$, $SC' \parallel c$. Усі проектуючі промені SA', SB', SC' паралельні площині ω, тому вони лежать у площині, що перетинає площину ω' по прямій, на якій лежать точки A', B', C'. Точки цієї прямої є центральними проекціями невласних точок A_∞, B_∞, C_∞ прямих a, b, c площини ω.

Отже, геометричним місцем образів A', B', C', ... площини ω' невласних точок A_∞, B_∞, C_∞, ... прямих a, b, c, ... різних напрямів площини ω є власна пряма в площині ω'. Оскільки побудована відповідність з невласними точками має бути взаємно однозначною, то всі невласні точки прямих площини ω повинні лежати на одній прямій, яку називають нескінченно віддаленою або невласною прямою.

Означення 1.3. *Невласною прямою* площини називається множина всіх невласних точок даної площини.

Наслідок. Паралельні площини перетинаються по невласній прямій. Пучок паралельних площин має одну спільну невласну пряму.

Означення 1.4. Евклідова площина, доповнена невласною прямою, називається *проективною площиною*.

Означення 1.5. Множина всіх невласних точок і всіх невласних прямих називається *невласною площиною.*

Кожна власна пряма з невласною площиною має одну спільну точку – невласну точку прямої. Кожна власна площина має з невласною площиною одну спільну пряму – невласну пряму площини. Інших невласних точок, не належних невласній площині, у просторі не існує.

З попередніх міркувань також випливає, що невласна точка однієї прямої переходить у власну точку другої прямої (рис. 2.2), невласна пряма однієї площини відображається у власну пряму іншої площини центральним проектуванням (рис. 2.5). Отже, властивість бути невласною точкою або невласною прямою не зберігається при центральному проектуванні, тобто невласні і власні елементи простору можна розглядати рівноправними в перспективній відповідності.

Означення 1.6. Евклідів простір, доповнений невласними точками, невласними прямими і невласною площиною, називається *проективним простором*.

Побудова проективного простору за допомогою доповнення евклідового простору невласними елементами є однією з моделей проективного простору, найбільш зрозумілою і зручною при вивченні властивостей його об'єктів. Цю модель ще називають *основною моделлю* проективного простору. Існують і інші моделі цього простору.

Невласні елементи простору визначають за допомогою власних елементів, а саме:

1) невласна точка A_∞ може бути задана власною прямою a, якій вона належить, або будь-якою прямою пучка чи в'язки паралельних прямих з невласним центром A_∞;
2) невласна пряма b_∞ може бути задана власною площиною ω, якій вона належить, а також за допомогою будь-якої площини, що входить до складу пучка паралельних площин з невласною віссю b_∞. Невласну пряму b_∞ можна задати також за допомогою двох невласних точок A_∞ і B_∞, які їй належать і визначаються двома власними непаралельними прямими.

Отже, невласні елементи проективного простору можна задати за допомогою відповідних власних (звичайних) елементів.

§ 3. Аксіоми евклідової геометрії

Поняття проективного простору одержане з евклідового простору доповненням його невласними елементами. Тому і при вивченні властивостей проективного простору часто будемо звертатись до відповідних властивостей евклідового простору, підкреслюючи їх спільність і відмінність. Оскільки властивості евклідового простору визначаються його аксіомами, то розглянемо аксіоматику евклідового простору.

Існують різні системи аксіом евклідової геометрії (Д. Гільберта, М. Пієрі, В. Кагана, Ф. Шура, Г. Вейля, Д. Біркгофа, А. Колмогорова, О. Погорєлова та інші). Найбільш популярною виявилася система аксіом німецького математика ***Д. Гільберта*** (1862–1943), уперше опублікована в 1899 р. у творі «Основи геометрії».

Основними (неозначуваними) об'єктами геометрії в аксіоматиці Д. Гільберта є *точка*, *пряма*, *площина*.

Основними (неозначуваними) відношеннями між основними об'єктами є *належність* (інцидентність), *між* і *конгруентність* (рівність).

Система аксіом складається з 20 аксіом, поділених на 5 груп: 1) аксіоми належності; 2) аксіоми порядку; 3) аксіоми конгруентності; 4) аксіоми неперервності; 5) аксіома паралельності.

1 група. ***Аксіоми належності***

1.1. Які б не були дві різні точки A і B, існує пряма a, якій належать точки A і B.

1.2. Існує не більше однієї прямої a, якій належать дві дані точки A і B.

1.3. Кожній прямій a належить принаймні дві точки A і B. Існують принаймні три точки, які не належать одній прямій.

1.4. Які б не були три точки A, B, C, що не належать одній прямій, існує площина α, якій належать точки A, B, C. Кожній площині належить принаймні одна точка.

1.5. Які б не були три точки A, B, C, які не належать одній прямій, існує не більше однієї площини, якій належать точки A, B, C.

1.6. Якщо дві точки A і B прямої a належать площині α, то кожна точка прямої a належить площині α.

1.7. Якщо дві площини α і β мають спільну точку A, то їм належить принаймні ще одна спільна точка B.

1.8. Існує принаймні чотири точки, які не належать одній площині.

2 група. ***Аксіоми порядку***

2.1. Якщо точка B лежить між точками A і C, то A, B, C – різні точки однієї прямої і B також лежить між C і A.

2.2. Які б не були точки A і C, існує принаймні одна точка B на прямій AC така, що C лежить між A і B.

2.3. Серед будь-яких трьох точок прямої існує не більше однієї, що лежить між двома іншими.

2.4. (*Аксіома Паша*). Нехай A, B, C – три точки, що не лежать на одній прямій, і a – деяка пряма в площині ABC, якій не належить жодна з точок A, B, C. Тоді, якщо пряма a проходить через яку-небудь точку відрізка AB, то вона проходить також або через точку відрізка AC, або через точку відрізка BC.

Формулювання аксіом третьої групи (конгруентності) опускаємо, оскільки в них йдеться про метричні властивості, які в проективній геометрії не мають місця.

4 група. ***Аксіома неперервності (аксіома Дедекінда)***

4.1. Якщо всі точки M деякої прямої, що лежать між точками A і B, розбити на два класи K_1 і K_2, що мають властивості:

1) кожна точка M належить до одного з цих класів, точка A належить до першого класу K_1, а точка B – до другого класу K_2;
2) кожна точка M_1 першого класу K_1, яка відмінна від точки A, лежить між A і M_2, де M_2 – будь-яка точка другого класу K_2, то існує тільки одна точка C така, що точки P, які лежать між A і C, належать до першого класу, а точки Q, що лежать між C і B, – до другого класу.

5 група. ***Аксіома паралельності***

5.1. Нехай a – деяка пряма, A – точка, що не належить прямій a; тоді в площині, що визначається точкою A і прямою a, можна провести не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму a.

Множину точок, прямих і площин, які задовольняють усі аксіоми зазначених п'яти груп, називають *евклідовим простором*, а науку, що вивчає властивості цього простору, – *евклідовою геометрією*.

Детальніше аксіоматику евклідового простору та наслідки з неї було розглянуто в частині 1 «Основи геометрії».

§ 4. Аксіоми проективної геометрії

Основними об'єктами проективної геометрії є точки, проективні прямі і проективні площини проективного простору. Основними відношеннями між основними об'єктами є відношення належності (інцидентності), відношення порядку і відношення неперервності.

Оскільки в проективній геометрії не зберігаються метричні властивості фігур, а також відсутнє поняття паралельності, то відсутні відповідні їм групи аксіом. Система аксіом проективної геометрії складається з трьох груп: 1) належності; 2) порядку; 3) неперервності.

Проективна пряма і проективна площина відрізняються від відповідних понять евклідової геометрії наявністю невласних елементів, тому формулювання аксіом, які лежать в основі проективної геометрії, відрізняються від аксіом евклідової геометрії більшою загальністю.

§ 5. Аксіоми належності проективної геометрії

В аксіомах належності називаються властивості трьох основних відношень, які пов'язують точки, прямі і площини: належність точки прямій, належність точки площині, належність прямої площині.

В аксіомах належності 1.1–1.8 евклідової геометрії йдеться лише про ті властивості точок, прямих і площин, які є інваріантами центрального проектування.

Але аксіомам належності проективної геометрії зручно дати інше, більш загальне формулювання.

1 група. ***Аксіоми належності***

Н.1. Дві різні точки A і B завжди належать одній і тільки одній прямій.

Н.2. Дві різні площини α і β завжди належать одній і тільки одній прямій.

Н.3. Точка A і пряма a, яка їй не належить, завжди належать одній і тільки одній площині.

Н.4. Площина α і пряма a, яка їй не належить, завжди належать одній і тільки одній точці.

Н.5. Існують принаймні чотири точки, що не належать як одній прямій, так і одній площині.

Н.6. Якщо точка A належить прямій a, а пряма a належить площині α, то точка A належить площині α.

Сформульовані аксіоми належності справедливі як для власних, так і для невласних елементів, тобто мають більш загальний зміст, ніж відповідні аксіоми евклідової геометрії.

Розглянемо, як знайти (побудувати) відповідні елементи при наявності невласних елементів.

Аксіома Н.1 вимагає, щоб будь-які дві різні точки визначали тільки одну пряму. Якщо обидві точки A і B власні, то це буде пряма AB, якій належать точки A і B.

Нехай маємо власну точку A і невласну точку B_∞, задану власною прямою b (рис. 2.7). Прямою, яка проходить через власну точку A і невласну точку B_∞, буде пряма a, проведена через точку A паралельно прямій b. Паралельні прямі a і b мають спільну точку B_∞, отже, пряма a – шукана.

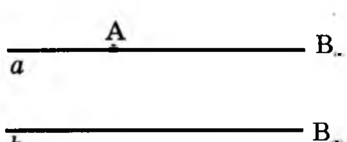


Рис. 2.7

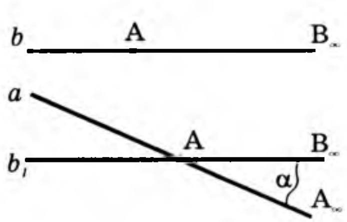


Рис. 2.8

Нехай обидві дані точки A_∞ і B_∞ – невласні, вони задаються двома (непаралельними) власними прямими a і b (рис. 2.8). Через довільну точку A прямої a проведемо пряму b_1, паралельну прямій b. Тоді пряма b_1 проходить через невласну точку B_∞. Прямі a і b_1, які перетинаються в точці A, визначають площину α, якій належать невласні точки A_∞ і B_∞. Отже, точки A_∞ і B_∞ належать невласній прямій a_∞ площини α. Пряма a_∞ площини α і буде шуканою.

Переконаємось далі, що вимоги аксіоми Н.2 також виконуються і для невласних елементів.

Зрозуміло, що коли обидві площини α і β власні, то існує пряма, яка їм належить, власна або невласна (коли $\alpha \parallel \beta$).

Якщо одна із площин, наприклад α, є невласною, то спільною прямою площин a_∞ і β є невласна пряма, яка належить площині β. Інших випадків з двома площинами не існує, бо в проективному просторі є тільки одна невласна площина.

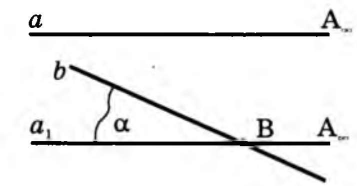


Рис. 2.9

Аксіома Н.3 вимагає, щоб пряма a і точка A, яка їй не належить, визначали завжди тільки одну площину. У випадку власної точки A і власної прямої a вимоги аксіоми виконуються.

Нехай дана точка A_∞ – невласна, задана власною прямою a, і пряма b – власна. Площину, яка належить точці A_∞ і прямій b, можна побудувати так, як зображено на рис. 2.9. Через довільну точку B прямої b проведемо пряму $a_1 \parallel a$, вона перетинає пряму b в точці B. Прямі b і a_1 визначають належну їм єдину площину α, якій належить і пряма b, і точка A_∞ як невласна точка прямої a_1.

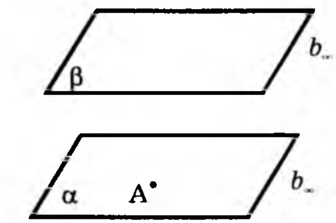


Рис. 2.10

Якщо точка A – власна, а пряма a_∞ – невласна, задана площиною β, то належною їм площиною буде площина α, яка паралельна площині β і проходить через точку A (рис. 2.10).

Аксіома Н.4 вимагає, щоб площина α і пряма b, яка їй не належна, завжди мали єдину спільну точку. Ця аксіома справедлива в евклідовому просторі лише тоді, коли пряма b не паралельна площині β. У проективному просторі і в цьому випадку площина β і пряма b мають єдину спільну точку – невласну точку прямої b.

Якщо пряма b_∞ – невласна, задана належною їй власною площиною β, то спільною точкою прямої b_∞ і площини α є невласна точка A_∞ прямої a перетину площин α і β.

У випадку, коли площина a_∞ – невласна, а пряма b – власна, шуканою їх спільною точкою є невласна точка B_∞ прямої b, яка і належить площині α_∞.

Оскільки всі невласні прямі належать єдиній невласній площині, а за змістом аксіоми Н.4 пряма a не належить площині α, то випадок невласної прямої a_∞ і невласної площини α_∞ виключається.

Отже, проведений аналіз аксіом Н.1–Н.4 свідчить, що для відношення належності власні і невласні елементи проективного простору є рівноправними.

Наслідки з аксіом належності

1. Три різні точки A, B і C, які не належать одній прямій, належать одній і тільки одній площині.

Справді, за аксіомою Н.1 існує пряма AB, якій належать точки A і B. Оскільки точка C не належить прямій AB, то за аксіомою Н.3 пряма AB і точка C визначають одну і тільки одну площину, якій належать точки A, B і C.

2. Три різні площини α, β, γ, які не належать одній прямій, належать одній і тільки одній точці.

Справедливість цього твердження випливає з того, що за аксіомою Н.2 існує пряма a, яка належить площинам α і β, причому площина γ не належить прямій a. За аксіомою Н.4 існує єдина точка A, яка належить прямій a і площині γ. Отже, ця точка A належить усім трьом площинам, оскільки за аксіомою Н.6 точка A належить площинам α і β.

3. Якщо дві точки прямої належать площині, то і всі інші точки прямої належать цій площині.

Цей наслідок доведемо методом від супротивного. За умовою дві точки A і B належать площині α. Припустимо, що пряма AB не належить площині α. Тоді за аксіомою Н.4 існує одна і тільки одна точка, яка належить прямій a і площині α. А це суперечить умові, тому припущення неправильне.

4. Якщо дві площини належать одній точці, то і спільна пряма цих площин належить цій точці.

Справді, нехай A – спільна точка двох площин α і β і пряма a належить обом площинам α і β, існування якої випливає з аксіоми Н.2. Припустимо, що пряма a не проходить через точку A. Тоді за аксіомою Н.3 існує єдина площина, яка визначається прямою a і точкою A, а це суперечить умові, оскільки за умовою кожна з площин α і β належить і прямій a, і точці A.

5. Існує чотири площини, що не належать одній прямій і не належать одній точці.

Справедливість цього наслідку випливає з того, що за аксіомою Н.5 існують чотири точки, які не належать як одній прямій, так і одній площині. Жодні три з цих чотирьох точок не можуть належати одній прямій, оскільки в противному разі четверта з них з цією прямою визначала б площину, якій би належали всі чотири точки (аксіома Н.3).

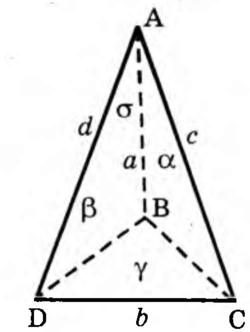


Рис. 2.11

Позначимо чотири точки, що не належать як одній прямій, так і одній площині, літерами A, B, C, D (рис. 2.11). За наслідком 1 кожні три з них належать певній площині, їх буде чотири: $\alpha(A, B, C)$, $\beta(A, B, D)$, $\gamma(A, B, D)$ і $\delta(A, C, D)$. Кожні дві з них повинні належати одній певній прямій (за аксіомою Н.2): $a = \alpha \infty \beta$, $b = \gamma \infty \delta$, $c = \alpha \infty \delta$, $d = \beta \infty \delta$. Цими прямими є прямі, що визначаються парами даних точок (аксіома Н.1). Наприклад, площини α і β належать прямій AB, оскільки ця пряма має з кожною з них дві спільні точки, тому не може не належати кожній з них. Іншої прямої, яка б належала площинам α і β, не може бути (аксіома Н.2).

Крім того, аналогічно можна довести, що пряма CD є єдиною прямою, яка належить площинам γ і δ. Прямі AB і CD різні, бо в противному разі чотири точки A, B, C, D лежали б на одній прямій.

Площини β, γ, δ не належать одній прямій, тому вони належать одній точці (наслідок 2). Цією точкою буде точка D. Площина α не може належати точці D, оскільки їй належать точки A, B і C, і тоді всі чотири точки належали б одній площині. Отже, площини α, β, γ і δ не належать одній точці.

Існує багато інших наслідків з аксіом належності проективного простору, на деяких з них зупинимось пізніше. Аксіоми належності і наслідки з них використовуються при розв'язуванні задач, доведенні теорем.

Задача 1. Дано дві невласні точки A_∞ і B_∞ прямими, що не перетинаються, і власна точка C. Побудувати площину, якій би належали точки A_∞, B_∞, C.

Розв'язання. Площина однозначно визначається трьома точками, які не лежать на одній прямій. Невласні точки A_∞ і B_∞ задані прямими a і b, які не перетинаються, тому прямі a і b мимобіжні, лежать у різних площинах, а точки A_∞ і B_∞ не лежать на одній прямій.

Отже, точки A_∞, B_∞, C визначають площину, і тільки одну.

Щоб побудувати цю площину, проведемо через точку C пряму a', паралельну прямій a, і пряму b', паралельну прямій b. Прямі a' і b', що перетинаються в точці C, визначають єдину шукану площину, яка містить точку C і невласні точки A_∞ і B_∞ як точки перетину пар паралельних прямих $a \parallel a'$ і $b \parallel b'$.

§ 6. Відношення порядку елементів проективного простору

6.1. Відношення порядку точок на проективній прямій

Відношення порядку точок на проективній прямій визначається властивостями проективної прямої, які значною мірою відрізняються від властивостей евклідової прямої.

1. Проективна пряма є замкненою лінією.

Цю властивість можна пояснити такими міркуваннями. Нехай маємо пряму s і точку S, яка не належить прямій s. Візьмемо точку S за центр пучка прямих $S(a, b, c, \ldots)$ і встановимо відповідність між прямими пучка S і точками прямої s, вважаючи відповідною прямій пучка точку перетину цієї прямої з прямою s. Така відповідність між прямими пучка S і точками прямої s називається *перспективною відповідністю*.

Наприклад, точці A прямої s відповідає пряма SA і навпаки. Оскільки проективна пряма – це евклідова пряма, доповнена невласною точкою, то перспективна відповідність між пучком прямих $S(a, b, c, \ldots)$ і точками прямої s є взаємно однозначною (бієктивною). Прямій n пучка S, паралельній прямій s, відповідає невласна точка прямої s – точка N_∞ (рис. 2.12). Всі прямі пучка дістанемо поворотом однієї з прямих пучка на 180°, наприклад, повернувши пряму a пучка S на 180°, дістанемо всі прямі пучка. Повертаючи промінь SA проти руху стрілки годинника, дістанемо промінь n_1, паралельний прямій s, у цьому випадку променю n_1 відповідає невласна точка N_∞ прямої s при русі по ній вправо.

Аналогічно, повертаючи промінь SA за рухом стрілки годинника, дістанемо положення променя n_2 прямої n, паралельної прямій s, якому відповідає також невласна точка прямої s при русі точки A по ній вліво. Оскільки пряма s має одну невласну точку N_∞, то при русі по прямій s вправо і при русі по прямій s вліво ми дістаємо одну й ту ж невласну точку N_∞. Отже, проективна пряма замикається у своїй невласній точці.

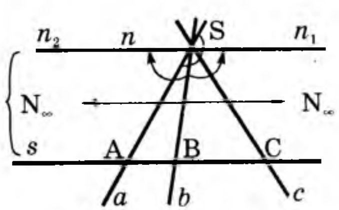


Рис. 2.12

Більш наочно властивість замкнутості проективної прямої можна проілюструвати на прикладі встановлення перспективної відповідності між точками даної прямої s і точками кола K, вибравши на ньому точку S за центр пучка проектуючих

прямих (рис. 2.13). Відповідними назвемо точку A прямої s і точку A' кола K, якщо вони лежать на одній прямій пучка S. Як і в попередньому прикладі, між точками прямої s і точками кола K встановлюється взаємно однозначна перспективна відповідність. Точці S ставиться у відповідність точка перетину дотичної до кола K в точці S з прямою s. Оскільки коло – замкнена лінія, то і їй відповідна в перспективній відповідності пряма s має бути замкненою лінією.

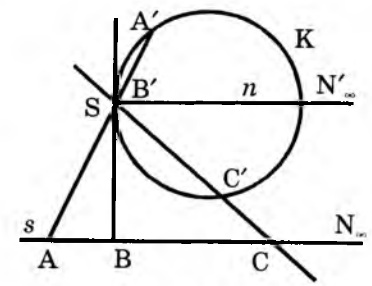


Рис. 2.13

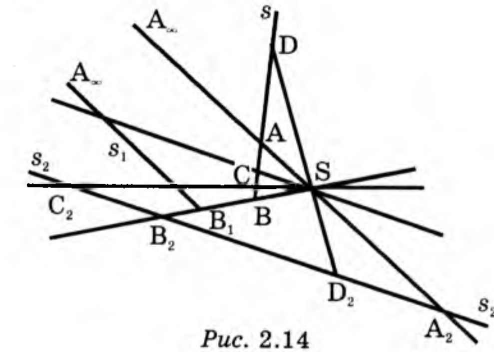


Рис. 2.14

2. Проективна пряма двома своїми точками розбивається на два відрізки.

Відомо, що евклідова пряма двома своїми точками A і B розбивається на три частини: відрізок і два промені, а однією – на два промені. Оскільки проективна пряма – замкнена лінія, то будь-яка одна точка не розбиває її на частини, а лише розрізає, розмикає. Аналогічно будь-які дві точки A і B проективну пряму розділяють на два відрізки: AB без невласної точки і $A\infty B$ – з невласною точкою. До кожного з відрізків треба віднести і подільчі точки A і B. На проективній прямій точки власна і невласна рівноправні, тому одержані відрізки AB і $A\infty B$ також рівноправні в проективному відношенні, при центральному проектуванні відрізок AB може відображатись на відрізок $A_\infty B$ і навпаки. На рис. 2.14 центральне проектування пучком прямих з центром S відображає власний відрізок AB прямої s у відрізок $A_\infty B_1$ прямої s_1, паралельної проектуючому променю SA, один кінець якого A_∞ є невласною точкою, а проекцією відрізка AB прямої s на пряму s_2 є відрізок $A_2\infty B_2$.

Отже, центральним проектуванням відрізок AB може відобразитись на відрізок $A\infty B$ з невласною точкою, тобто має місце властивість 3.

3. Поняття «відрізок прямої» є інваріантом центрального проектування, тобто є проективним поняттям.

Розглянемо далі розміщення точок на проективній прямій. Відомо, що в евклідовій геометрії належність точки відрізку встановлюється відношенням «лежати між»: точка C лежить між точками A і B, точка D не лежить між точками A і B на прямій s (рис. 2.14)

При перспективному відображенні прямої s на пряму s_2 з центра S точки A, B, C, D відобразяться на точки A_2, B_2, C_2, D_2, причому точка C_2 уже не лежить між точками A_2 і B_2 (рис. 2.14). Отже, відношення «лежати між» не є інваріантом перспективної відповідності, тому це відношення не є проективним, його не розглядають у проективній геометрії.

Цей факт випливає з того, що проективна пряма замкнута, а на замкненій лінії не можна визначити, яка з трьох даних точок лежить між двома іншими, у чому легко переконатись для трьох точок кола.

Основним відношенням, на якому ґрунтується поняття порядку точок на проективній прямій, є *розділеність двох пар різних точок прямої.* На рис. 2.14 пара точок (A, B) прямої s *розділяється* парою точок (C, D). При центральному проектуванні прямої s на пряму s_2 з центра S дістаємо на прямій s_2 відповідні точки A_2, B_2, C_2, D_2. Точки C_2 і D_2 наче помінялись місцями відносно точок C і D прямої s: точка C лежала між A і B, а точка C_2 не лежить між A_2 і B_2; точка D не лежить між точками A і B, а її відповідна точка D_2 лежить між точками A_2 і B_2. Але і на прямій s пара (A, B) розділяється парою (C, D), і на прямій s_2 пара (A_2, B_2) розділяється парою (C_2, D_2).

Аналогічно на рис. 2.15 пара точок (A, B) не розділяється парою (C, D) на прямій s. Образи точок A, B, C, D при перспективному відображенні з центра S – точки A_2, B_2, C_2, D_2 прямої s_2 теж розміщені так, що пара (A_2, B_2) не розділяється парою (C_2, D_2).

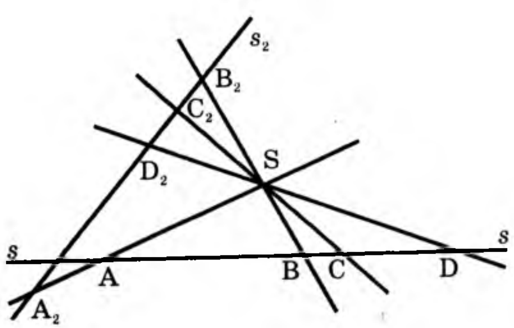


Рис. 2.15

Будемо позначати роздільність пар символом $\div$, а нерозділеність пар символом $\because$.

Тоді на рис. 2.14 $(A, B) \div (C, D)$, а на рис. 2.15 $(A, B) \because (C, D)$, або відповідно $(A, C) \because (B, D)$ і $(A, C) \div (B, D)$.

4. Розділеність (або нерозділеність) двох пар точок однієї прямої s є інваріантом при будь-якому перспективному відображенні цієї прямої s на іншу пряму s_2.

6.2. Аксіоми порядку проективної геометрії

В аксіомах порядку встановлюються властивості розділеності (нерозділеності) двох пар точок проективної прямої. Групу аксіом порядку сформулюємо такими твердженнями:

П.1. Дві різні точки A і B прямої розбивають усі інші точки цієї прямої на два класи.

Означення 1.7. Кожний з класів, доповнений точками A і B, називається *відрізком*.

Означення 1.8. Якщо точки C і D належать різним класам розбиття точками A і B, то пари точок (A, B) і (C, D) називаються *розділеними*. Пишуть: $(A, B) \div (C, D)$.

Якщо точки C і D належать одному класу, то пари точок (A, B) і (C, D) називаються *нерозділеними*; записують $(A, B) \because (C, D)$.

П.2. Якщо $(A, B) \div (C, D)$, то і $(C, D) \div (A, B)$.

П.3. Будь-які чотири точки прямої можна тільки єдиним способом розбити на дві розділені пари.

П.4. Центральне проектування переводить дві розділені пари в дві розділені пари.

З аксіом належності та аксіом порядку проективної геометрії можна логічними міркуваннями дістати ті відношення порядку, які мають місце в проективному просторі, поширити їх на інші об'єкти цього простору, зокрема ввести поняття розділеності пар прямих і пар площин пучка.

Задача 1.2. Дано п'ять точок A, B, C, D, E однієї проективної прямої. За допомогою аксіом порядку довести, що коли пара (A, B) розділяє пару (C, D) і пара (A, B) не розділяє пару (D, E), то пара (A, B) розділяє пару (C, E).

Розв'язання. За умовою задачі пара точок $(A, B) \div (C, D)$, тому точки C і D належать різним відрізкам, на які точки A і B розбивають дану проективну пряму, нехай $C \in AB$ і $D \in A\infty B$. Крім того, пара $(A, B) \because (D, E)$, тому точки D і E належать одному відрізку. Нехай $D \in A\infty B$ і $E \in A\infty B$. Отже, точка $C \in AB$, а точка $E \in A\infty B$, тобто пара $(A, B) \div (C, E)$ (рис. 2.16).

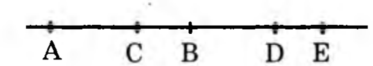


Рис. 2.16

6.3. Властивості відношення порядку на проективній площині

Розглянемо властивості відношення порядку на проективній площині, зіставляючи їх з відповідними властивостями цього відношення на евклідовій площині.

Будь-яка пряма a на евклідовій площині α *розбиває* її на дві півплощини, або області, зі спільною межею a. Якщо точки A і B належать різним областям, то відрізок AB обов'язково перетне пряму a, тоді як дві точки A і C однієї області можна сполучити відрізком, який не перетинає прямої a (рис. 2.17а).

1. Будь-яка пряма a проективної площини не розбиває її на дві області.

Ця властивість випливає з того, що дві точки A і B розбивають проективну пряму на два відрізки AB і $A\infty B$, один з яких перетинає пряму a, інший не перетинає. Отже, які б не були точки A і B і яка б не була пряма a, завжди знайдеться відрізок AB або $A\infty B$, який не перетинає прямої a (рис. 2.17б).

2. Дві прямі проективної площини розбивають її на дві області.

Дві прямі a і b, що перетинаються, евклідової площини α розбивають її на чотири області, позначені на рис. 2.18а цифрами 1, 2, 3, 4. Відрізок, що сполучає дві точки площини, може перетинати обидві прямі (відрізок AB перетинає прямі a і b в точках N і M) або одну пряму (відрізок BC перетинає пряму b в точці L).

На проективній площині (рис. 2.18б) дві прямі a і b розбивають площину на дві області, позначені цифрами 1, 1 і 2, 2. Це випливає з того, що точки A і B можна сполучити відрізком AB, який перетинає прямі a і b в точках N і M, що лежать на відрізку AB. Тому відрізок $A\infty B$ не може перетинати прямі a і b. Це означає, що точки A і B належать одній області 1, 1. Точки C і D належать різним областям, бо кожний з відрізків CD і $C\infty D$ перетинає одну з даних прямих:

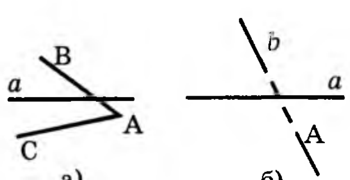


Рис. 2.17

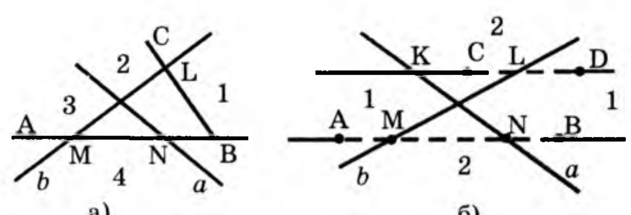


Рис. 2.18

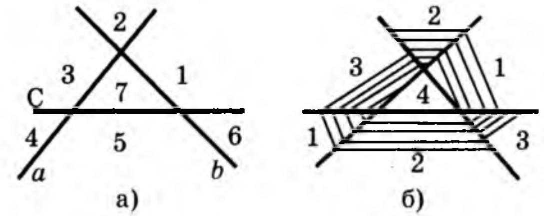


Рис. 2.19

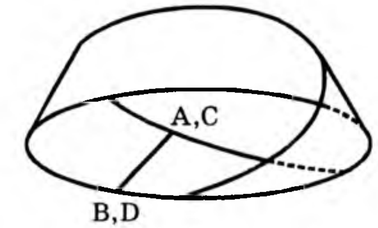


Рис. 2.20

відрізок CD перетинає пряму b в точці L, а відрізок $C\infty D$ перетинає пряму a в точці K.

3. Три прямі проективної площини розбивають її на чотири області.

Три прямі a, b, c, що попарно перетинаються в евклідовій площині, розбивають її на 7 областей, позначених на рисунку 2.19а цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

На рис. 2.19б показано чотири області, на які прямі a, b, c розбивають проективну площину.

4. Проективна площина є замкненою і однобічною.

Поверхні евклідового простору (площина, сфера, циліндр та інші) *двобічні*, в них один бік можна пофарбувати одним кольором, а інший бік – іншим кольором. З одного боку такої поверхні не можна перейти на інший, не переходячи через її межу (тобто не протикаючи її). Двобічна поверхня розпадається на дві частини, якщо її розрізати по будь-якій замкненій лінії.

Але існують і *однобічні* поверхні: переміщуючись по такій поверхні, можна всю її пофарбувати одним кольором. Уперше приклад однобічної поверхні знайшли німецькі математики *А. Мебіус* (1790–1868) і *Й. Лістінг* (1808–1882): вона ввійшла в математику під назвою «листок Мебіуса». Така поверхня утвориться, якщо склеїти кінці прямокутної смужки паперу $ABCD$, спочатку повернувши один кінець на 180° (рис. 2.20).

Можна переконатись, що проективна площина також *однобічна*, але на відміну від листа Мебіуса проективна площина *замкнена і безмежна.* Якщо проективну площину розрізати по прямій a (замкнена лінія), то вона не розпадеться на дві частини, а розгорнеться на площину, причому точки прямої a будуть відігравати роль невласних точок. Тоді всі прямі площини, точки перетину яких належали прямій

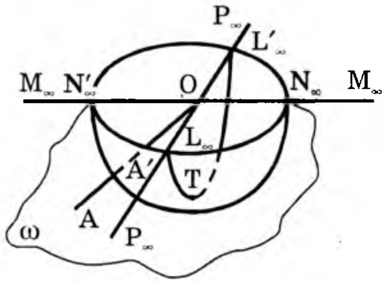


Рис. 2.21

a, стануть паралельними, тобто ми дістанемо евклідову площину, доповнену невласними елементами.

У всьому сказаному можна переконатись на моделі проективної площини. Існує декілька моделей проективної площини. Розглянемо одну із них на модифікованій півсфері.

Уявимо собі півсферу F з центром у точці O, яка дотикається до площини ω у точці T (рис. 2.21). Центральним проектуванням з центром O будемо проектувати всі точки проективної площини ω на поверхню півсфери: точці A площини поставимо у відповідність точку A' перетину поверхні півсфери з проектуючим променем OA. Кожна власна точка площини ω при цьому матиме образ на півсфері. Образами невласних точок площини ω будуть точки перетину граничного кола півсфери з проектуючими променями, паралельними площині ω. Такими променями на рис. 2.21 будуть OM_∞ і OP_∞. Кожний з них перетинає півсферу у двох точках на граничному колі, це точки N_∞ і N'_∞ прямої OM_∞ і точки L_∞, L'_∞ на прямій OP_∞.

Щоб зберегти взаємно однозначну відповідність між точками півсфери і точками площини ω, треба домовитись вважати пари точок (N_∞, N'_∞) і (L_∞, L'_∞) за одну точку як образи невласних точок прямих OM_∞ і OP_∞ відповідно. При такій домовленості можна вважати *півсферу F моделлю проективної площини.*

Кожна пряма площини ω зобразиться на цій моделі півколом, дві кінцеві точки якого приймаються за одну точку. Звідси випливає *замкненість проективної прямої* та *замкненість проективної площини* («пряма» лінія не розбиває її на дві окремі частини).

Наведені властивості проективної прямої та проективної площини переконують у тому, наскільки вони відрізняються від властивостей евклідової прямої та евклідової площини.

6.4. Відношення неперервності проективного простору

Аксіом перших груп – належності та порядку – ще недостатньо для вивчення всіх властивостей проективного простору, їх треба доповнити аксіомою неперервності, оскільки відношення неперервності не випливає з аксіом належності та порядку. Такою аксіомою може бути проективна форма аксіоми *Дедекінда* (1831–1916).

Д.1. Нехай усі точки відрізка AB розбито на два класи, причому точка A належить до першого, а точка B – до другого класу. Позначимо через M довільну точку першого класу, відмінну від точки A, а через N – точку другого класу, відмінну від B. Якщо для будь-якої пари точок M і N справджується умова $(A, N) \div (M, B)$, то тоді існує така точка C відрізка AB, яка належить одному з класів так, що $(A, C) \div (M, N)$ і $(C, B) \div (M, N)$ для всіх точок M і N, відмінних від точки C.

На основі сформульованих аксіом трьох груп – належності, порядку і неперервності – можна самостійно побудувати проективний простір і вивчити його властивості.

§ 7. Основні геометричні форми

Основні геометричні форми проективної геометрії групуються за ступенями. До одного й того ж ступеня належать ті форми, між елементами яких можна встановити взаємно однозначну відповідність.

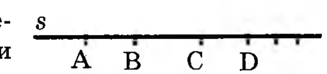


Рис. 2.22

Форми першого ступеня

1. *Прямолінійний ряд точок* – це множина всіх точок, які належать одній прямій, що називається *носієм* ряду, позначають $s(A, B, C, D, \dots)$, де s – дана пряма, $A, B, C, D, \dots$ – точки на ній (рис. 2.22).

2. *Пучок прямих* – це множина всіх прямих даної площини, які належать даній точці, що називається *носієм* або *центром пучка* (рис. 2.23). Позначають $S(a, b, c, d, \dots)$.

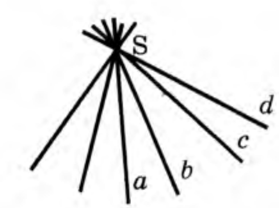


Рис. 2.23

3. *Пучок площин* – це множина всіх площин, які належать одній прямій, що називається *носієм*, або *віссю, пучка* (рис. 2.24). Позначають $s(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Форми другого ступеня

1. *Плоске поле точок* – це множина всіх точок даної площини, яка називається *носієм поля.* Позначають $\alpha(A, B, C, \dots)$.

2. *Плоске поле прямих* – це множина всіх прямих даної площини, яка називається *носієм* цього *поля.* Позначають $\alpha(a, b, c, \dots)$.

3. *В'язка прямих* – це множина всіх прямих простору, які належать даній точці, що називається *носієм*, або *центром, в'язки.*

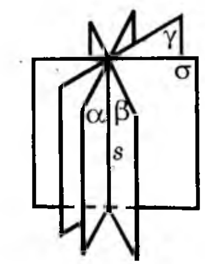


Рис. 2.24

4. *В'язка площин* – це множина усіх площин, які належать даній точці, що називається *носієм*, або *центром*, *в'язки*.

Форми третього ступеня

1. *Простір точок* – множина всіх точок проективного простору, який відіграє роль *носія* точок.

2. *Простір площин* – множина всіх площин проективного простору, який є *носієм* площин.

§ 8. Принципи двоїстості в проективній геометрії

Аналізуючи формулювання аксіом належності, основних геометричних форм проективного простору та наслідків з них, легко помітити симетричність речень стосовно слів «точка» і «площина». Наприклад, аксіому H.2 дістаємо з аксіоми H.1 заміною слова «точка» словом «площина». Аналогічно дістаємо аксіому H.4 з аксіоми H.3, при цьому в обох випадках слово «пряма» залишається без зміни. Така ж симетричність існує в означеннях основних форм проективного простору. Наприклад, прямолінійний ряд точок – це множина усіх точок, які належать одній прямій. Замінивши слово «точок» на слово «площин», дістаємо означення пучка площин як множини всіх площин, які належать одній прямій.

Аналогічна симетричність слів «точка» і «площина» має місце в наслідках, теоремах, які доводяться на основі аксіом належності. Наприклад: «Три точки, які не належать одній прямій, належать одній і тільки одній площині». Замінивши слово «точка» на слово «площина», дістаємо нове твердження: «Три площини, які не належать одній прямій, належать одній і тільки одній точці».

Отже, всі аксіоми належності та наслідки з них у проективному просторі симетричні відносно слів «точка» і «площина», тобто мають двоїстий характер. Цей факт у проективній геометрії відомий під назвою *принципу двоїстості в просторі*, який можна сформулювати так.

Якщо в якому-небудь істинному твердженні про належність елементів проективного простору (точок, прямих, площин) всюди слово «точка» замінити словом «площина» і слово «площина» – словом «точка», а слово «пряма» залишити без змін, то дістанемо також істинне твердження в проективному просторі.

Принцип двоїстості в просторі ще називають *великим принципом двоїстості*. Він є результатом доповнення елементів евклідового

простору невласними елементами, що дало змогу узагальнити аналогічні твердження евклідового простору, уникнути окремих винятків. Наприклад, замість твердження в евклідовій геометрії: «Дві різні прямі мають одну спільну точку, якщо вони не паралельні» – в проективній геометрії маємо твердження: «Дві різні прямі завжди мають одну спільну точку».

Принцип двоїстості має місце і на площині. Плоске поле точок визначається, з одного боку, як множина всіх точок даної площини, з іншого – як множина усіх прямих даної площини.

Аналогічно прямолінійний ряд точок – це множина всіх точок, які належать одній прямій, а пучок прямих – це множина всіх прямих, які належать одній точці. У кожному із цих двох прикладів друге твердження одержується з першого заміною слова «точка» словом «пряма», слова «пряма» – словом «точка», а слово «площина», якщо воно є, залишається без зміни. Наявність таких двоїстих тверджень для проективної площини називають *принципом двоїстості на площині*, або *малим принципом двоїстості*.

Якщо в будь-якому істинному твердженні про належність основних елементів проективної площини (точок і прямих) всюди слово «точка» замінити словом «пряма», слово «пряма» – словом «точка», то дістанемо також істинне твердження на проективній площині.

Приклади

1. Дві різні точки завжди належать одній і тільки одній прямій.

1′ (двоїсте 1). Дві різні прямі завжди належать одній і тільки одній точці.

2. Для будь-яких трьох точок існує не більше трьох прямих, які їм належать.

2′ (двоїсте 2). Для будь-яких трьох прямих існує не більше трьох точок, які їм належать.

Зауважимо, що принципи двоїстості можна застосувати не до всіх тверджень проективної геометрії, а лише до тих, в яких йдеться про належність точок, прямих і площин.

Існує ряд фігур, двоїстих за малим і великим принципами двоїстості. Розглянемо деякі з них, що будуть використовуватись надалі.

3. *Тривершинником* ABC називається множина, яка складається з трьох точок A, B, C, що не належать одній прямій, і трьох прямих AB, AC, BC, які належать цим точкам попарно.

Двоїстою за малим принципом двоїстості буде фігура, яку називають тристоронником.

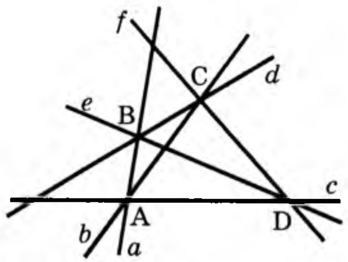


Рис. 2.25

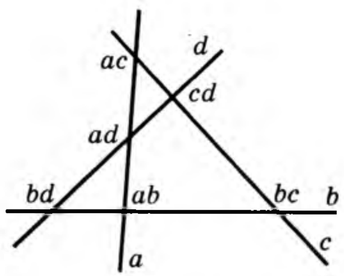


Рис. 2.26

3′. *Тристоронником abc* називається множина, яка складається з трьох прямих a, b, c, що не належать одній точці, і трьох точок A, B, C, які належать цим прямим попарно.

Двоїстою тривершиннику за великим принципом двоїстості буде фігура, яку називають тригранником.

3″. *Тригранником* $\alpha\beta\gamma$ називається множина, яка складається з трьох площин α, β, γ, що не належать одній прямій, і трьох прямих a, b, c, які належать цим площинам попарно.

4. *Повним чотиривершинником* називається плоска фігура, яка складається з чотирьох точок A, B, C, D, жодні три з яких не належать одній прямій, і шести прямих AB, AC, AD, BC, BD, CD, що належать цим точкам попарно (рис. 2.25).

Двоїстою за малим принципом двоїстості буде фігура, яку називають повним чотиристоронником.

4′. *Повним чотиристоронником* називається плоска фігура, яка складається з чотирьох прямих a, b, c, d, жодні три з яких не належать одній точці, і шести точок ab, ac, ad, bc, bd, cd, які належать цим прямим попарно (рис. 2.26).

§ 9. Теорема Дезарга

Одна з основних теорем проективної геометрії названа іменем *Ж. Дезарга* (1591–1661) – французького математика і архітектора, основоположника проективної та нарисної геометрії. Хоч проективна геометрія як самостійна математична дисципліна була оформлена лише в XIX ст. працями Понселе, Штейнера, Штаудта та інших вчених, проте окремі задачі на зображення фігур мали проективний зміст значно раніше.

Дезарг у своїх геометричних дослідженнях застосовував перспективне зображення. Він перший ввів у геометрію нескінченно віддалені точки, прямі, площину, поняття полярності, дав завершене вчення про інволюцію пар точок, розглянув інволюцію чотирьох точок та прямих. Теорема Дезарга про трикутники, про яку йтиме мова, дає змогу виконувати перспективні побудови в одній площині. Існує декілька теорем Дезарга, опублікованих у творі «Загальний метод зображення предметів у перспективі» 1636 року.

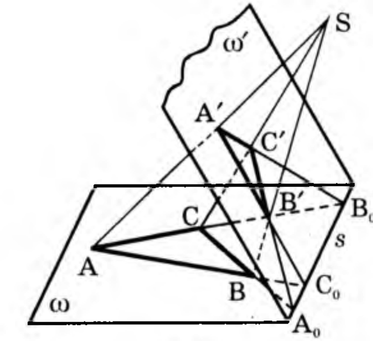


Рис. 2.27

Теорема Дезарга. Якщо три прямі, яким належать відповідні вершини двох даних трикутників, належать одній точці, то три точки, належні парам відповідних сторін цих трикутників, належать одній прямій.

Доведення. Доведення теореми розглянемо для двох випадків.

1. Нехай дані два трикутники ABC і $A'B'C'$ розміщені в різних площинах ω і ω', які перетинаються по прямій s, і такі, що прямі AA', BB', CC' проходять через відповідні вершини даних трикутників і перетинаються в точці S (рис. 2.27). Можна вважати, що трикутник $A'B'C'$ є образом трикутника ABC в перспективній відповідності з центром S.

Прямі AA' і BB' визначають площину γ, в якій лежать сторони AB і $A'B'$ даних трикутників, тому ці прямі перетинаються, нехай в точці C_0, причому точка C_0 належить трьом площинам – ω, ω' і γ. Аналогічно дістанемо, що точка A_0 перетину BC і $B'C'$ належить трьом площинам – ω, ω' і α, утвореній прямими BB' і CC', а точка B_0 перетину прямих AC і $A'C'$ належить трьом площинам – ω, ω' і β, утвореній прямими AA' і CC'. Отже, точки A_0, B_0, C_0 перетину відповідних сторін даних трикутників належать одночасно площинам ω і ω', тому точки A_0, B_0, C_0 належать прямій s перетину площин ω і ω'.

Теорему доведено.■

Теорема, обернена теоремі Дезарга. Якщо три точки, які належать відповідним сторонам двох даних трикутників, належать одній прямій, то три прямі, належні парам відповідних вершин цих трикутників, належать одній точці.

Доведення. Пари відповідних сторін даних трикутників ABC і $A'B'C'$ утворюють три площини: AB і $A'B'$ – площину γ, AC і $A'C'$ – площину β, BC і $B'C'$ – площину α, які мають спільну точку S, отже, утворюють тригранник з вершиною S (рис. 2.27). Площини α, β, γ, попарно перетинаючись, утворюють прямі AA', BB', CC', які є ребрами тригранника, а ребра тригранника повинні проходити через його вершину S. Отже, прямі AA', BB', CC' перетинаються в одній точці S.

Теорему доведено.■

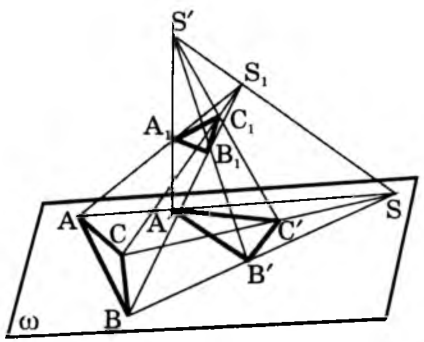


Рис. 2.28

2. Дані трикутники ABC і $A'B'C'$ лежать в одній площині ω (рис. 2.28) і розміщені так, що прямі AA', BB', CC' перетинаються в точці S. Візьмемо точку S', яка не належить площині ω, і на прямій SS' – точку S_1, відмінну від точок S і S'. Проведемо прямі S_1A, S_1B, S_1C і $S'A'$, $S'B'$, $S'C'$. Прямі S_1A і $S'A'$ належать площині ASS', тому перетинаються в точці A_1. Аналогічно переконуємось, що існують точки $B_1 = S_1B \times S'B'$ і $C_1 = S_1C \times S'C'$.

Точки A', B', C' є образами точок A_1, B_1, C_1 у центральному проектуванні з центра S' на площину ω. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать у різних площинах і задовольняють умову теореми Дезарга в першому (просторовому) випадку. За доведеним, точки перетину пар прямих $BC \times B_1C_1 = P$, $AC \times A_1C_1 = R$ лежать на одній прямій (на рис. 2.28 точки P, Q, R і пряма s не зображені).

При проектуванні з точки S' на площину ω відрізки B_1C_1 A_1C_1, A_1B_1 перейдуть відповідно у відрізки $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, а точки P, Q, R і відрізки BC, AC, AB залишаться незмінними, оскільки лежать у площині ω. Тому точками перетину прямих BC і $B'C'$, AC і $A'C'$, AB і $A'B'$ будуть точки P, Q, R, які лежать на прямій s. Теорема доведена і в другому випадку.■

Правильність теореми, оберненої теоремі Дезарга на площині, випливає з того, що її можна одержати за малим принципом двоїстості з прямої теореми Дезарга, її формулювання збігається з формулюванням оберненої теореми в першому випадку.

§ 10. Конфігурація Дезарга

Означення 1.9. *Конфігурацією* називають фігуру, яка складається з m точок і n прямих, причому кожній з n прямих належить m' точок, а кожній із m точок належить n' прямих тієї ж фігури.

Кожну конфігурацію характеризують чотири числа m, n, m', n', тому таку конфігурацію позначають символом

$$\left(\frac{m}{n'}; \frac{n}{m'}\right).$$

Якщо в конфігурації однакова кількість точок і прямих, тобто $m = n$, то і $m' = n'$. У цьому випадку конфігурацію позначають символом $\left(\frac{m}{n'}\right)$.

Прикладом конфігурації є фігура, утворена двома трикутниками ABC і $A'B'C'$ разом з трьома прямими AA', BB', CC', що проходять через точку S, і трьома точками A_0, B_0, C_0 перетину пар відповідних сторін даних трикутників, які лежать на одній прямій s (рис. 2.29), тобто фігура, яка задовольняє теорему Дезарга. Тому цю конфігурацію називають *конфігурацією Дезарга.*

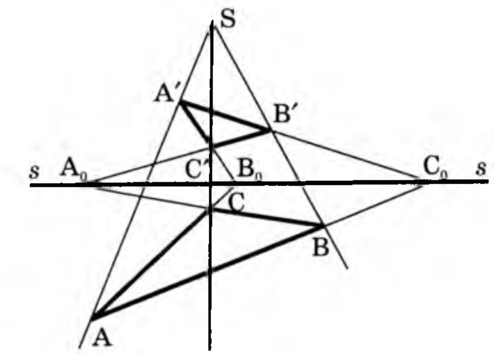


Рис. 2.29

Точку S називають *точкою Дезарга*, пряму s – *прямою Дезарга*, а трикутники ABC і $A'B'C'$ – *дезарговими трикутниками.*

Конфігурація Дезарга складається з десяти точок: це шість вершин двох трикутників, три точки перетину пар відповідних сторін і одна точка S перетину прямих, що проходять через відповідні вершини трикутників, і десяти прямих – це шість сторін двох трикутників, три прямі, що проходять через пари відповідних вершин, і прямої, якій належать три точки перетину відповідних сторін даних трикутників.

Ця конфігурація має таку властивість, що кожній з десяти прямих належать три точки фігури, а кожній з десяти точок належать три прямі цієї ж фігури. Тому конфігурацію Дезарга зображують символом $\left(\frac{10}{3}\right)$.

Зауважимо, що всі прямі і всі точки конфігурації Дезарга рівноправні між собою, тобто будь-яку точку з даних десяти можна взяти за точку Дезарга або будь-яку з десяти прямих можна взяти за пряму Дезарга. Розглянемо це на прикладах.

Задача 1.3. Приймаючи точку C_0 за точку Дезарга, знайти в цій конфігурації вершини відповідних трикутників і дезаргову пряму.

Розв'язання. Використаємо рис. 2.29. Через точку C_0 проходять три прямі, які належать відповідним вершинам двох трикутників; це прямі $A'B'$, A_0B_0, AB. Три точки, що залишились, повинні лежати на одній прямій – прямій Дезарга. Це точки C, S, C', вони є точками перетину відповідних сторін шуканих трикутників. Щоб знайти вершини відповідних трикутників, треба із трьох пар A' і B', A_0 і B_0, A і B точки (літери) розмістити в циклічному порядку по три (щоб наступна пара починалась з букви, якою закінчується попередня пара). У даному випадку такими парами будуть:

$$B_0A \times A_0B = C,$$
$$AA' \times BB' = S,$$
$$A'B_0 \times B'A_0 = C'.$$

Отже, відповідними трикутниками в даній конфігурації з дезарговою точкою C_0 і дезарговою прямою CSC' будуть трикутники B_0AA' і A_0BB'.

Задача 1.4. Приймаючи пряму, на якій лежать точки A_0, C, B конфігурації Дезарга, за дезаргову пряму, знайти точку Дезарга і відповідні трикутники.

Розв'язання. Використаємо рис. 2.29. Пам'ятаючи, що в точках, які належать дезарговій прямій, перетинаються відповідні сторони шуканих трикутників, знайдемо, що це будуть пари точок:

$$A_0 = B'C' \times B_0C_0,$$
$$B = B'S \times AC_0,$$
$$C = B_0A \times SC'.$$

Щоб знайти вершини шуканих трикутників, треба пари точок, які утворюють сторони трикутників, розмістити циклічно, щоб дістати замкнений цикл.

Якщо ми записали $A_0 = B'C' \times B_0C_0$, то наступні пари повинні починатись літерами, якими закінчились попередні пари: $C = C'S \times B_0A$. Щоб це виконувалось, треба в записі перетину пар для точки A_0 поміняти місцями точки B_0 і C_0. Дістанемо:

$$A_0 = B'C' \times C_0B_0,$$
$$C = C'S \times B_0A,$$
$$B = SB' \times AC_0'.$$

Отже, шуканими є трикутники $B'C'S$ і C_0B_0A. Точка A', що залишилась, буде точкою Дезарга. Професор М.І. Кованцов розробив декілька правил-схем, за якими можна відшукувати порядок вершин дезаргових трикутників у конфігурації Дезарга (див. [18], с. 77–78).

Теорема Дезарга має широке застосування при розв'язуванні задач. Розглянемо декілька таких задач.

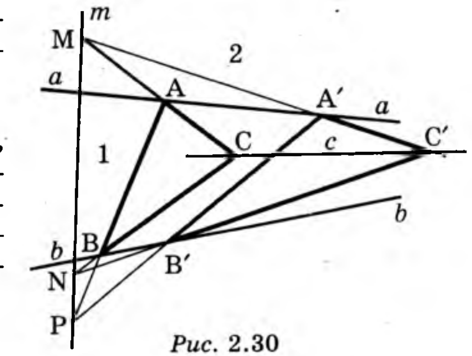


Рис. 2.30

Задача 1.5. На площині задані прямі a і b, які перетинаються за межами рисунка, і точка C, яка не належить цим прямим. Користуючись теоремою Дезарга, побудувати пряму, яка проходить через точку C і недоступну точку перетину прямих a і b.

Розв'язання.

1-й спосіб. Дві прямі a і b ділять проективну площину на дві області, які позначимо цифрами 1 і 2. Тому при розв'язанні задачі можливі два випадки розміщення точки C. Нехай точка C лежить в області 1 (рис. 2.30). Перетнемо прямі a і b довільною прямою m і візьмемо на ній довільні точки M і N. Проведемо прямі MC і NC, які перетнуть прямі a і b відповідно в точках A і B. P – точка перетину прямої m з прямою AB. Через точку M проведемо довільно іншу пряму, яка перетне пряму a в точці A'. Точку A' сполучимо з точкою P, а точку перетину прямої b з прямою $A'P$ позначимо через B'. Проведемо пряму NB', яка перетне пряму MA' в точці C'. Пряма CC' – шукана, вона проходить через недоступну точку перетину прямих a і b.

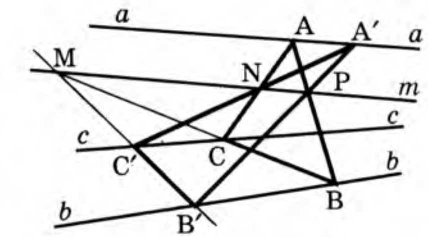


Рис. 2.31

Правильність побудови випливає безпосередньо з теореми, оберненої до теореми Дезарга, у застосуванні до трикутників ABC і $A'B'C'$.

2-й спосіб. Візьмемо довільно точки A і B відповідно на даних прямих a і b. Сполучивши точки A, B, C відрізками, дістанемо трикутник ABC (рис. 2.31). Проведемо довільно пряму m так, щоб вона перетнула сторони трикутника ABC нехай в точках M, N, P. Далі будуємо трикутник $A'B'C'$ так, щоб дві його вершини A' і B' лежали на прямих a і b, а сторони $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ проходили відповідно через точки P, N, M. Трикутники ABC і $A'B'C'$ задовольняють обернену теорему Дезарга: три точки P, N, M перетину пар відповідних сторін цих трикутників лежать на одній прямій m. Тому прямі AA', BB', CC' належать одній точці – точці Дезарга. Отже, пряма CC' – шукана.

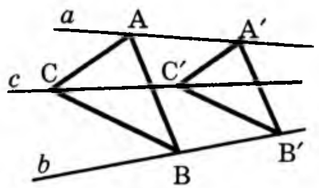


Рис. 2.32

3-й спосіб. Візьмемо довільно точки A і B відповідно на прямих a і b, дістанемо трикутник ABC (рис. 2.32)

Через довільно взяту точку A', на прямій a проведемо прямі $A'B' \parallel AB$ і $A'C' \parallel AC$, а через точку B' – пряму $B'C' \parallel BC$. Одержимо трикутник $A'B'C'$. Трикутники ABC і $A'B'C'$ задовольняють обернену теорему Дезарга, тому прямі AA', BB', CC' перетинаються в одній точці – точці Дезарга. Отже, пряма CC' – шукана.

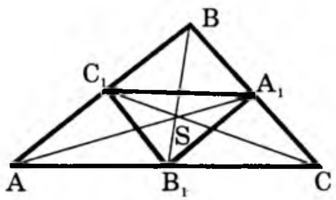


Рис. 2.33

Задача 1.6. Використовуючи теорему Дезарга, довести, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай у трикутнику ABC точки A_1, B_1, C_1 – середини сторін BC, AC, AB відповідно (рис. 2.33). Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ задовольняють теорему, обернену теоремі Дезарга: оскільки $AC \parallel A_1C_1$, $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, то три невласні точки перетину пар відповідних сторін цих трикутників належать одній прямій – невласній прямій площини трикутників. Тоді три прямі AA_1, BB_1, CC_1 (а це медіани ΔABC), що сполучають відповідні вершини цих трикутників, перетинається в одній точці S – точці Дезарга.

Примітка. Цю задачу можна розв'язати різними способами, у тому числі методом гомотетії; ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ – гомотетичні.

Вправи

1.7. Що являє собою піраміда, якщо її вершина є невласною точкою?
1.8. Що являє собою конус, якщо його вершина є невласною точкою?
1.9. Що означає термін «мимобіжні прямі», якщо: а) одна з них невласна; б) обидві невласні?
1.10. У пучку прямих, що визначається прямими a і b, провести пряму c, що проходить через невласну точку даної прямої d, яка не належить даному пучку. Усі прямі лежать в одній площині.
1.11. Які з аксіом належності проективної геометрії справедливі в евклідовій геометрії, а які ні?
1.12. Користуючись лише проективними аксіомами належності та наслідками з них, довести таке твердження проективної геометрії: «Якщо a і b – дві мимобіжні прямі, A – точка, не належна жодній із цих прямих, то існує одна і тільки одна пряма, яка належить точці A і перетинає прямі a і b».

1.13. Скільки відрізків на проективній прямій визначають три її точки?
1.14. Скільки різних областей на проективній площині утворюють чотири прямі, що: а) проходять через одну точку; б) жодні три з яких не проходять через одну точку?
1.15. Дано п'ять точок A, B, C, D, E однієї прямої. За допомогою проективних аксіом порядку довести, що коли пара (A, B) розділяє пару (C, D) і пара (A, B) розділяє пару (C, E), то пара (A, B) не розділяє пару (D, E).
1.16. Сформулювати твердження, двоїсте за малим принципом двоїстості аксіомі Н.6.
1.17. Сформулювати твердження, двоїсте за великим принципом двоїстості такому твердженню: «Три точки, які не належать одній прямій, належать одній площині».
1.18. Сформулювати твердження, двоїсте за малим і великим принципами двоїстості такому твердженню: «Для трьох точок існує не більше трьох прямих, належних цим точкам попарно».
1.19. Сформулювати означення нерозділених (розділених) пар прямих в пучку, двоїсте за малим принципом двоїстості означенню нерозділених (розділених) пар точок прямої.
1.20. Сформулювати означення нерозділеності (розділеності) пар площин у пучку, двоїсте за великим принципом двоїстості означенню нерозділеності (розділеності) пар точок прямої.
1.21. Сформулюйте твердження, двоїсті за малим принципом двоїстості проективним аксіомам порядку.
1.22. Взявши довільну точку конфігурації Дезарга за дезаргову точку, знайти вершини відповідних трикутників і дезаргову пряму.
1.23. Взявши довільну пряму конфігурації Дезарга за дезаргову пряму, знайти вершини відповідних трикутників і дезаргову точку.
1.24. Які особливості має конфігурація Дезарга, якщо точка S перетину прямих, які сполучають відповідні вершини двох даних трикутників, є невласною точкою?
1.25. Які особливості має конфігурація Дезарга, якщо пряма, на якій лежать точки перетину відповідних сторін двох даних трикутників (дезаргова пряма), є невласною?
1.26. Які особливості має конфігурація Дезарга, якщо одна пара відповідних вершин даних двох трикутників лежить на невласній прямій?
1.27. Які особливості має конфігурація Дезарга, якщо дезаргова пряма і точка Дезарга невласні?
1.28. В евклідовій площині дано дві непаралельні прямі і точка, яка не належить жодній з них. За допомогою тільки лінійки через дану точку провести пряму, паралельну даній.

2 Розділ

Основні поняття проективної геометрії форм першого ступеня

До форм першого ступеня належать прямолінійний ряд точок (пряма), пучок прямих і пучок площин. Найважливішим і одночасно найпростішим серед них є прямолінійний ряд точок, оскільки пучок прямих – це двоїсте поняття прямолінійного ряду точок за малим принципом, а пучок площин – двоїсте першому за великим принципом двоїстості. Тому більше уваги в цьому розділі приділяється властивостям, особливостям прямолінійного ряду точок.

Як уже зазначалося при введенні поняття порядку точок на проективній прямій, просте відношення трьох точок прямої як основний інваріант афінного перетворення не є інваріантом центрального проектування, тобто не є проективною властивістю точок прямої. Тому для встановлення порядку точок на проективній прямій було введено поняття розділеності (нерозділеності) двох пар точок прямої. Саме чотири точки прямої, їх подвійне та гармонічне відношення, відіграють важливу роль у встановленні проективних властивостей форм першого ступеня.

§ 11. Подвійне відношення чотирьох точок прямої

Просте відношення трьох точок A, B і C евклідової прямої визначається як відношення двох відрізків AC і BC і записується

$$(AB, C) = \frac{AC}{BC}.$$

Звичайно відрізки AC і BC не мають невласних елементів. Роль даних трьох точок не однакова. Точка C називається *роздільчою*, а точки A і B – *основними*, або *базисними*.

Просте відношення трьох точок прямої є інваріантом паралельного проектування, одним із важливих понять афінної геометрії.

Інваріантом центрального проектування є так зване *подвійне відношення чотирьох точок прямої.*

Означення 2.1. *Подвійним відношенням* чотирьох точок прямої називається відношення двох простих відношень:

$$\lambda = (AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}.$$

Пара точок (A, B) називається *основною* (або базисною) парою, а пара точок (C, D) – *роздільчою* парою подвійного відношення чотирьох точок. Рівнозначними терміну «подвійне» є терміни «складне» або «ангармонічне» відношення.

Властивості подвійного відношення чотирьох точок прямої

1. Якщо $(A, B) \div (C, D)$, то $(AB, CD) < 0$.

Доведення. Оскільки пара точок (A, B) розділяється парою (C, D), то точки C і D належать різним відрізкам, утвореним точками A і B. Нехай точка C належить відрізку AB, а точка D – відрізку $A\infty B$ (рис. 2.34). Тоді просте відношення $(AB, C) = \frac{AC}{BC} < 0$ (бо відрізки AC і BC протилежно напрямлені), а відношення $(AB, D) = \frac{AD}{BD} > 0$ (відрізки AD і BD однаково напрямлені). Отже,

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} < 0.$$

Рис. 2.34

2. Якщо $(A, B) \mathrel{\ddot{-}} (C, D)$, то $(AB, CD) > 0$.

Доведення. Якщо $(A, B) \mathrel{\ddot{-}} (C, D)$, то точки C і D належать одному з відрізків – або AB, або $A\infty B$. В обох випадках прості відношення точок A, B і C, одного знаку, тому і $(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} > 0$ (рис. 2.35а, б).

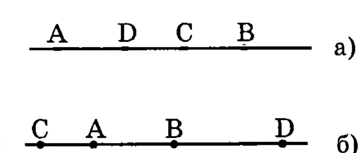


Рис. 2.35

3. Величина подвійного відношення (AB, CD) не зміниться, якщо пари (A, B) і (C, D) поміняти місцями: $(AB, CD) = (CD, AB)$.

Доведення.

$$(AB, CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{(CD, A)}{(CD, B)} = (CD, AB).$$

4. Величина подвійного відношення не зміниться від перестановки букв в обох парах одночасно, тобто $(AB, CD) = (BA, DC)$.

Доведення. За властивостями пропорції

$$(AB, CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = (BA, DC).$$

5. Подвійне відношення змінить свою величину на обернену, якщо поміняти порядок букв в одній парі, тобто

$$(AB, CD) = \frac{1}{(BA, CD)} = \frac{1}{(AB, DC)}.$$

Доведення. Нехай переставлені букви другої пари. Тоді

$$(AB, DC) = \frac{(AB, D)}{(AB, C)} = \frac{1}{\dfrac{(AB, C)}{(AB, D)}} = \frac{1}{(AB, CD)} = \frac{1}{\lambda}, \text{ де } \lambda = (AB, CD).$$

Якщо переставити букви першої пари, то

$$(BA, CD) = (CD, BA) = \frac{1}{(CD, AB)} = \frac{1}{(AB, CD)} = \frac{1}{\lambda}.$$

6. При перестановці середніх або крайніх букв величина подвійного відношення чотирьох точок прямої набуває значення, що доповнює перше до одиниці, тобто $(AC, BD) = 1 - (AB, CD)$ і $(DB, CA) = 1 - (AB, CD)$.

Доведення. Доведемо першу рівність

$$(AC, BD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{AB(CA + AD)}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CA + AB \cdot AD}{CB \cdot AD} =$$

$$= \frac{AB \cdot CA + (AC + CB)AD}{CB \cdot AD} = \frac{AB \cdot CA + AC \cdot AD}{CB \cdot AD} + 1 = \frac{AC(BA + AD)}{CB \cdot AD} + 1 =$$

$$= 1 - \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = 1 - (AB, CD) = 1 - \lambda.$$

Другий випадок доводиться аналогічно.

Оскільки (AB, CD) містить чотири точки, то число подвійних відношень дорівнює числу перестановок з чотирьох елементів без повторень, тобто числу 24. Але з урахуванням властивостей 3, 4 серед цього числа перестановок будуть однакові перестановки, а саме по чотири:

$$(AB, CD) = (CD, AB) = (DC, BA) = (BA, DC).$$

Тому будемо мати всього шість різних за значенням подвійних відношень.

Якщо позначити $(AB, CD) = \lambda$, то, враховуючи зазначені властивості, дістанемо всі шість подвійних відношень для чотирьох точок A, B, C, D:

1) $(AB, CD) = \lambda$;

2) $(AB, DC) = \dfrac{1}{\lambda}$;

3) $(AC, BD) = 1 - \lambda$;

4) $(AC, DB) = \dfrac{1}{1 - \lambda}$;

5) $(AD, BC) = 1 - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda}$;

6) $(AD, CB) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$.

Приклад 1. Дано чотири точки A, B, C, D прямої s такі, що відстані одна від одної рівні. Обчислити всі значення, які може мати подвійне відношення цих точок.

Розв'язання.

Позначимо відстані між послідовними парами через a:

$$AB = BC = CD = a.$$

Тоді

1) $\lambda = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \dfrac{2a \cdot 2a}{a \cdot 3a} = \dfrac{4}{3}$; 2) $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{3}{4}$; 3) $1 - \lambda = 1 - \dfrac{4}{3} = -\dfrac{1}{3}$;

4) $\dfrac{1}{1 - \lambda} = -3$; 5) $1 - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{4}$; 6) $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = 4$.

§ 12. Координати точки на проективній прямій

Теорема 2.1. Якщо A, B, C – три фіксовані точки прямої, а точка D переміщується по прямій, то кожному положенню точки D відповідає одне і тільки одне значення подвійного відношення *(AB, CD)*.

Доведення. Припустимо супротивне: нехай двом різним положенням точки D – D_1 і D_2 відповідають рівні значення подвійних відношень при фіксованих точках A, B, C, тобто

$$(AB, CD_1) = (AB, CD_2)$$

або

$$\frac{(AB, C)}{(AB, D_1)} = \frac{(AB, C)}{(AB, D_2)}.$$

Звідси $(AB, D_1) = (AB, D_2)$.

Але одержана рівність можлива лише тоді, коли точки D_1 і D_2 збігаються. Таким чином, кожному положенню точки D на прямій при фіксованих точках A, B, C відповідає цілком певне значення подвійного відношення (AB, CD) і навпаки.

Теорему доведено.■

На основі доведеної теореми можна ввести координати точки на прямій.

Означення 2.2. *Координатою точки D*, що визначає положення цієї точки на прямій при фіксованих точках A, B, C на цій прямій, називається подвійне відношення чотирьох точок прямої $\lambda_D = (AB, CD)$.

З'ясуємо, яких значень набуває λ для фіксованих точок. Якщо точка D збігається з точкою C, то маємо:

$$\lambda_C = (AB, CC) = \frac{(AB, C)}{(AB, C)} = 1.$$

Коли точка D займе положення точки B, то дістанемо:

$$\lambda_B = (AB, CB) = \frac{(AB, C)}{(AB, B)} = \frac{AC}{BC} : \frac{AB}{BB} = \frac{AC \cdot BB}{BC \cdot AB} = 0.$$

Якщо точка D наближається до точки A, то цей випадок можна розглядати як граничний, тобто

$$\lambda_A = \lim_{D \to A}(AB, CD) = \lim_{D \to A}\frac{(ABC)}{(ABD_\infty)} = \infty.$$

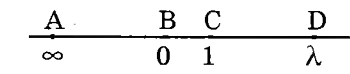


Рис. 2.36

Отже, фіксовані точки B, C, A мають відповідно проективні координати 0, 1, ∞ (рис. 2.36).

Три довільні різні точки A, B, C прямої a, взяті в певному порядку, утворюють на ній *проективний репер* (ABC); точка A при цьому називається *першою точкою* репера, їй відповідає координата ∞, точка B – його *друга точка*, їй відповідає координата O, C – його *одинична точка*, їй відповідає координата 1. За допомогою вибраного репера кожній точці D прямої a ставиться у відповідність єдине дійсне число $x(=\lambda)$, яке називається *неоднорідною проективною координатою* точки D відносно вибраного репера.

Але приписування одній з точок репера (точці A) координати ∞ створює певні незручності в практичному використанні. Тому поряд з неоднорідною проективною координатою точки прямої вводять так звані *однорідні проективні координати* точки.

Нехай точка D прямої a має неоднорідну координату x, її однорідні координати x_1, x_2 визначаються рівністю $x = \dfrac{x_1}{x_2}$, в якій хоча б одне з чисел x_1, x_2 має бути відмінним від нуля. Записують $D(x_1 : x_2)$. Тоді перша точка A репера має координати $(1 : 0)$, друга точка B – координати $(0 : 1)$, третя точка C – координати $(1 : 1)$, а довільна точка D – $(x_1 : x_2)$. Очевидно, що при будь-якому дійсному числі a $x_1 : x_2 = \alpha x_1 : \alpha x_2$, тому точки з координатами $(x_1 : x_2)$ і $(\alpha x_1 : \alpha x_2)$ збігаються.

Задача 2.1. Дано три точки $A(-1)$, $B(3)$, $C(2)$ відносно декартової системи координат на прямій. Знайти координати четвертої точки D, якщо $(AB, CD) = -2$.

Розв'язання. За умовою задачі

$$-2 = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{2+1}{2-3} : \frac{x_D + 1}{x_D - 3} = \frac{3}{-1} : \frac{x_D + 1}{x_D - 3}$$

Звідси $x_D = 11$. Отже, шуканою є точка $D\,(11)$. В однорідних координатах $D\,(\alpha 11 : \alpha)$.

Задача 2.2. Знайти подвійне відношення (AB, CD) чотирьох точок прямої $A(0)$, $B(1)$, $C(-2)$, $D(4)$, заданих декартовими координатами.

Розв'язання. За умовою задачі

$$(AB,CD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{x_C-x_A}{x_C-x_B}:\frac{x_D-x_A}{x_D-x_B}=\frac{-2}{-3}:\frac{4}{3}=\frac{1}{2}>0.$$

Пара точок (C, D) не розділяє пару (A, B).

§ 13. Подвійне відношення чотирьох прямих пучка

Поняття пучка прямих є двоїстим поняттю прямолінійного ряду точок за малим принципом двоїстості. Тому поняття подвійного відношення чотирьох прямих пучка можна ввести аналогічно введенню поняття подвійного відношення чотирьох точок прямої, тобто через відношення двох простих відношень трьох прямих пучка.

Нехай маємо дві довільні прямі a, b пучка з центром у точці S. Будь-які дві прямі пучка утворюють два кути (дві пари рівних вертикальних кутів). Проведемо ще одну довільну пряму p пучка S і домовимось вибирати той з двох кутів, утворених двома прямими пучка S, який не містить прямої p (рис. 2.37). У такий спосіб вибраному куту приписуватимемо знак (+) або (–) залежно від того, збігається порядок його сторін з напрямом проти руху годинникової стрілки чи з напрямом за стрілкою годинника. Позначимо величину кута між прямими a і b символом $\left(\widehat{ab}\right)$. Візьмемо три довільні прямі a, b, c пучка з центром у точці S.

Означення 2.3. *Простим відношенням* трьох прямих a, b, c пучка S називають величину

$$(ab,c)=\frac{\sin\left(\widehat{ac}\right)}{\sin\left(\widehat{bc}\right)}.$$

Пара прямих (ab) називається *основною* або *базисною*, а пряма c – *роздільчою* (рис. 2.38).

У зв'язку з домовленістю про знак кута просте відношення трьох прямих a, b, c пучка буде від'ємним, якщо пряма c належить куту (a, b).

Нехай a, b, c, d – чотири прямі, що належать пучку з центром S.

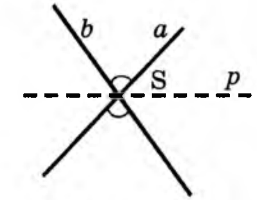


Рис. 2.37

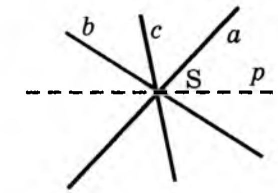


Рис. 2.38

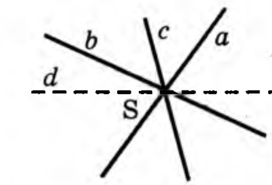


Рис. 2.39

Означення 2.4. *Подвійним відношенням* чотирьох прямих a, b, c, d пучка S називається величина

$$(ab,cd)=\frac{(ab,c)}{(ab,d)}=\frac{\sin\left(\widehat{ac}\right)}{\sin\left(\widehat{bc}\right)}:\frac{\sin\left(\widehat{ad}\right)}{\sin\left(\widehat{bd}\right)}.$$

У подвійному відношенні (ab, cd) перша пара вважається *основною*, або *базисною*, друга пара (cd) – *роздільчою* (рис. 2.39).

Просте відношення трьох прямих пучка і подвійне відношення чотирьох прямих пучка визначається через синуси кутів, утворених прямими пучка. Оскільки значення синусів однакові для кутів α і $180^\circ-\alpha$, то значення відношень (ab, c) і (ab, cd) не залежить від вибору фіксованої прямої p пучка, і надалі пряму p на рисунках не фіксуватимемо.

За малим принципом двоїстості подвійне відношення чотирьох прямих пучка має такі самі властивості, як і складне відношення чотирьох точок прямої. Зокрема, подвійне відношення чотирьох прямих пучка (ab, cd) додатне, якщо пара прямих (a, b) не розділяється парою (c, d). Якщо $(a, b) \div (c, d)$, то $(ab, cd) < 0$.

Поняття подвійного відношення чотирьох прямих пучка є інваріантним при центральному проектуванні.

§ 14. Перспективні ряди точок і пучки прямих

Означення 2.5. Відповідність між точками прямолінійного ряду і прямими пучка називається *перспективною*, якщо точки ряду проектуються відповідними прямими пучка.

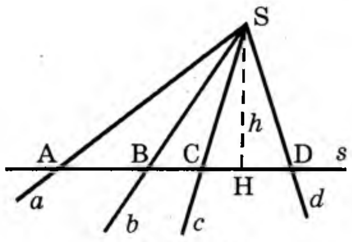


Рис. 2.40

Прямолінійний ряд точок і пучок прямих називаються *перспективними*, якщо між їх відповідними елементами встановлена перспективна відповідність. Для позначення перспективної відповідності вживають символ $\overline{\overline{\wedge}}$. При перетині пучка прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$ прямою s дістанемо ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$, перспективний пучку S, якщо $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ (рис. 2.40). Перспективність ряду точок і пучка прямих взаємна, тобто якщо $s \overline{\overline{\wedge}} S$, то і $S \overline{\overline{\wedge}} s$.

Теорема 2.2. Подвійне відношення чотирьох точок прямолінійного ряду дорівнює подвійному відношенню чотирьох прямих пучка, перспективного цьому ряду.

Доведення. Нехай маємо ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$, перспективний пучку прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$, тобто $S \overline{\overline{\wedge}} s$ (рис. 2.40). Треба довести, що $(AB, CD) = (ab, cd)$.

Трикутники SAC, SBC, SAD, SBD мають спільну висоту $SH = h$. Запишемо дві формули для обчислення площі трикутника SAC:

$$\frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot SC \cdot \sin\left(\widehat{ac}\right).$$

Звідси $AC = \dfrac{SA \cdot SC}{h} \sin\left(\widehat{ac}\right).$

Аналогічно знайдемо, що

$$BC = \frac{SB \cdot SC}{h} \sin\left(\widehat{bc}\right), \quad AD = \frac{SA \cdot SD}{h} \sin\left(\widehat{ad}\right),$$

$$BD = \frac{SB \cdot SD}{h} \sin\left(\widehat{bd}\right).$$

Тоді

$$(AB, CD) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{\sin\left(\widehat{ac}\right) \cdot \sin\left(\widehat{bd}\right)}{\sin\left(\widehat{bc}\right) \cdot \sin\left(\widehat{ad}\right)} = (ab, cd).$$

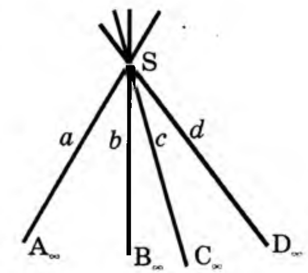


Рис. 2.41

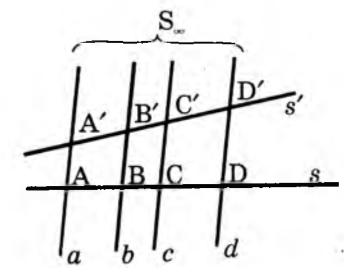


Рис. 2.42

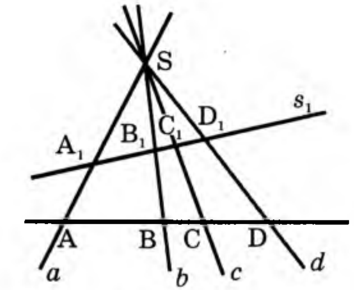


Рис. 2.43

Знаки складних відношень (AB, CD) і (ab, cd) завжди будуть однаковими, бо якщо $(A, B) \div (C, D)$, то і $(a, b) \div (c, d)$; якщо $(A, B) \dot{-} (C, D)$, то і $(a, b) \dot{-} (c, d)$.

Теорему доведено. ■

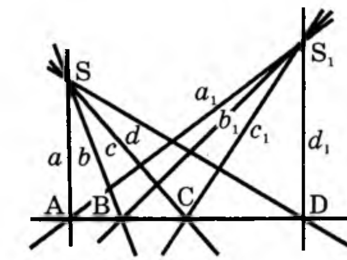


Рис. 2.44

Доведена теорема надає можливість поширити поняття перспективної відповідності на невласні елементи. Зокрема, носієм прямолінійного ряду може бути невласна пряма, тоді всі точки цього ряду будуть невласними.

Означення 2.6. *Подвійним відношенням чотирьох невласних точок* A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ називають подвійне відношення чотирьох прямих пучка з власним ценром S, які проектують ці точки (рис. 2.41).

Величина подвійного відношення чотирьох прямих, які проектують невласні точки, не залежить від вибору центра пучка. За доведеною теоремою $(A_\infty B_\infty, C_\infty D_\infty) = (ab, cd)$.

Аналогічно вводиться поняття подвійного відношення чотирьох прямих з невласним центром S_∞.

Означення 2.7. *Подвійним відношенням чотирьох прямих пучка* з невласним центром S_∞ називають подвійне відношення чотирьох точок перетину прямих пучка з довільною власною прямою s, яка не проходить через точку S_∞ (рис. 2.42).

Величина подвійного відношення (ab, cd) не залежить від вибору прямої s, оскільки $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.

Означення 2.8. Два ряди точок $s(A, B, C, D, \ldots)$ і $s_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots)$ називають *перспективними*, якщо їх відповідні точки проектуються одними й тими самими прямими пучка прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$ (рис. 2.43).

Зрозуміло, що для всіх перспективних рядів точок $(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1)$.

Означення 2.9. Два пучки прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$ і $S_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots)$ називаються *перспективними*, якщо вони проектують з різних центрів S і S_1 один і той же ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$ (рис. 2.44).

Для двох перспективних пучків прямих $(ab, cd) = (a_1b_1, c_1d_1)$.

§ 15. Поняття проективної відповідності у формах першого ступеня

Нехай маємо пучок прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$ і перспективний йому ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$ (рис. 2.45).

Ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$ спроектуємо з іншого центра S_1 і перетнемо пучок $S_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots)$ прямою s_1. Дістанемо новий ряд точок $s_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots)$, перспективний пучку S_1.

Потім з центра S_2 спроектуємо ряд точок s_1 і перетнемо пучок прямих $S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots)$ прямою s_2. Дістанемо новий ряд точок $s_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots)$, перспективний ряду s_1.

Отже, маємо $S \overline{\overline{\wedge}} S_1$, $S \overline{\overline{\wedge}} s$, $S_1 \overline{\overline{\wedge}} s$, $S_1 \overline{\overline{\wedge}} s_1$, $S_1 \overline{\overline{\wedge}} S_2$, $S_2 \overline{\overline{\wedge}} s_1$, $s \overline{\overline{\wedge}} s_1$, $s_1 \overline{\overline{\wedge}} s_2$.

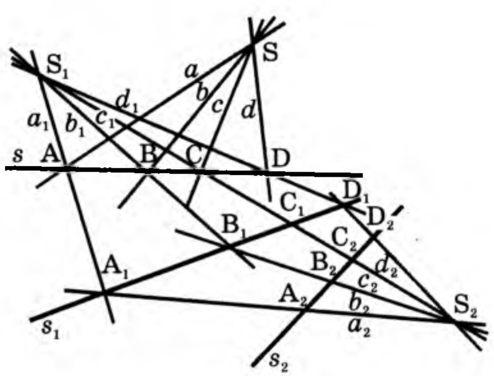


Рис. 2.45

Але ряди точок s і s_2, пучки S і S_2 не перспективні. За теоремою 2.2 § 14

$(AB, CD) = (A_1B_1, C_1D_1) = (A_2B_2, C_2D_2)$,

$(ab, cd) = (a_1b_1, c_1d_1) = (a_2b_2, c_2d_2)$.

Таким чином, існують ряди точок і пучки прямих, які не перспективні, а подвійні відношення відповідних елементів рівні між собою:

$(AB, CD) = (A_2B_2, C_2D_2)$, $(ab, cd) = (a_2b_2, c_2d_2)$,

$(AB, CD) = (a_2b_2, c_2d_2)$, $(A_2B_2, C_2D_2) = (a_2b_2, c_2d_2)$.

Означення 2.10. Відповідність між елементами образів першого ступеня називається *проективною*, якщо вона є результатом скінченного числа послідовно виконаних перспективних відображень.

Прямолінійний ряд точок $s(A, B, C, D, \ldots)$ і пучок прямих $S(a, b, c, d, \ldots)$, між елементами яких встановлено проективну відповідність, називаються *проективними*. Для позначення проективної відповідності між елементами образів першого ступеня вживають символ $\overline{\wedge}$. Тоді

$s(A, B, C, D, \ldots) \overline{\wedge} s_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \ldots)$;

$S(a, b, c, d, \ldots) \overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots)$;

$s(A, B, C, D, \ldots) \overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \ldots)$.

Зважаючи на те, що при проективній відповідності зберігається величина подвійного відношення елементів форм першого ступеня, можна дати інше означення їх проективності.

Означення 2.11. Будь-які дві форми першого ступеня, у яких подвійні відношення довільних чотирьох пар відповідних елементів рівні між собою, називаються *проективними*.

Таке означення проективної відповідності належить швейцарському математику *Я. Штейнеру* (1796–1863) – одному із творців проективної геометрії. Основна його праця «Систематичний розвиток залежності геометричних образів один від одного» (1834). У ній Я. Штейнер намагався побудувати проективну геометрію так званим суто синтетичним методом, тобто без використання аналітичних методів.

Пізніше буде розглянуто інше означення проективної відповідності між геометричними образами, дане німецьким математиком К. Штаудтом.

Означення 2.12. *Проективним перетворенням прямолінійного ряду точок* (пучка прямих) називають відображення ряду точок s на ряд точок s_2 (пучка S на пучок S_2), яке є композицією декількох перспективних відображень (означення Понселе).

Звідси випливає, що подвійне відношення чотирьох точок ряду (чотирьох прямих пучка) залишається інваріантом проективного перетворення.

Проективна геометрія на площині вивчає ті властивості фігур, які залишаються інваріантними при всіх проективних перетвореннях площини.

Теорема 2.3. Проективна відповідність двох форм першого ступеня цілком визначається заданням трьох пар відповідних елементів.

Доведення. Сформульовану теорему в математиці називають *основною теоремою проективної відповідності за Штейнером.*

Нехай точкам A, B, C ряду s відповідають точки A', B', C' ряду s', причому ряди s і s' проективні, тобто має бути

$$(AB, CD) = (A'B', C'D') = \lambda,$$

де λ – координата точки D. Оскільки при будь-якому виборі точки D на ряді s координата λ_D однозначно визначається, а ця координата дорівнює координаті точки D', то із рівності $(A'B', C'D') = \lambda$ положення точки D' на прямій s' цілком визначається.

Теорему доведено.■

Аналогічна теорема має місце для інших форм першого ступеня.

Наслідок. Якщо у двох проективних рядів точок, розміщених на одному й тому ж носії (на прямій s), три пари відповідних точок збігаються, то і всі інші пари відповідних точок також збігаються.

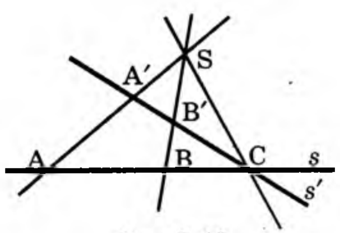


Рис. 2.46

Теорема 2.4. Для того, щоб дві проективні форми першого ступеня були перспективні, необхідно і достатньо, щоб їх спільний елемент сам собі відповідав.

Доведення.

<u>Необхідність.</u> Нехай $s(A, B, C, D, \ldots) \barwedge s'(A', B', C', D', \ldots)$ (рис. 2.46). Тоді існує пучок $S(a, b, c, d, \ldots)$, прямі якого проектують ці ряди, причому пара відповідних точок лежить на одній і тій самій прямій пучка. Нехай C – спільна точка рядів s і s'. Пряма SC пучка повинна перетнути ряд s' у точці, що відповідає точці C ряду S, але точка C – спільна для обох рядів, тому пряма SC перетинає обидва ряди точок в одній і тій же точці C. Отже, точка C сама собі відповідає.

<u>Достатність</u>. Нехай проективна відповідність рядів s і s' задана трьома парами відповідних точок A, A'; B, B'; C, C', де C – спільна точка рядів – сама собі відповідає. Знайдемо точку S, перетину прямих AA' і BB'. Тоді, провівши пряму SC, дістанемо два перспективних ряди як точки перетину прямих пуч-

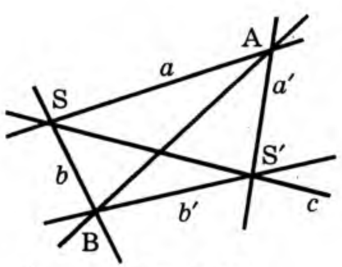


Рис. 2.47

ка S з прямими s і s', тобто будемо мати три відповідні пари точок (A, A'), (B, B'), (C, C'). Але ці ж пари визначають і проективну відповідність рядів s і s'. Враховуючи, що три пари відповідних точок однозначно визначають проективну відповідність, доходимо висновку, що дані ряди точок є перспективними з центром перспективності в точці S.

Теорему доведено.■

Справедливість даної теореми для двох проективних пучків прямих S і S' випливає з малого принципу двоїстості, оскільки пучок прямих двоїстий за цим принципом ряду точок (рис. 2.47).

§ 16. Побудова проективної відповідності рядів і пучків

Задача 2.3. Дано три пари відповідних точок двох проективних рядів s_1 і s_2: A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Побудувати для довільної точки D_1 першого ряду відповідну точку D_2 другого ряду.

Побудова.

Нехай $s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ і $s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ – два дані проективні ряди точок (рис. 2.48). На ряді s_1 візьмемо довільну точку D_1. Треба побудувати точку D_2 на ряді s_2, відповідну точці D_1 у даній відповідності. Для цього через одну пару відповідних точок, наприклад A_1 і A_2, проведемо пряму A_1A_2 і на ній виберемо довільні точки S_1 і S_2 за центри двох перспективних з рядами s_1 і s_2 пучків. Із точок S_1 і S_2 спроектуємо точки першого і другого рядів відповідно. Одержані пучки $S_1(S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1, \ldots)$ і $S_2(S_2A_2, S_2B_2, S_2C_2, \ldots)$ перспективні, оскільки мають пряму S_1S_2, яка сама собі відповідає.

Знайдемо точки перетину двох пар відповідних прямих:

$$B = S_1B_1 \times S_2B_2 \text{ і } C = S_1C_1 \times S_2C_2.$$

Пряма BC називається *віссю перспективності пучків* S_1 і S_2, вона перетне пряму S_1S_2 в точці A. Побудову точки D_2, відповідної точці D_1, виконаємо за допомогою двох перспективних відповідностей. Для цього проведемо пряму S_1D_1 до перетину з віссю перспективності s в точці D. Шуканою точкою D_2 буде точка перетину ряду s_2 з прямою S_2D.

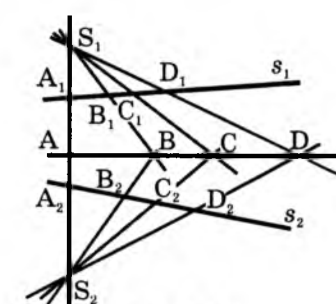


Рис. 2.48

Доведення.

$s_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \doublebarwedge s(A, B, C, D)$,

$s(A, B, C, D) \doublebarwedge s_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$.

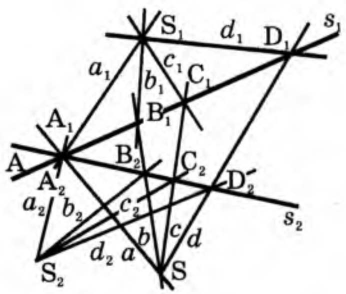


Рис. 2.49

Тому

$s_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \barwedge s_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$.

Аналогічно можна для будь-якої точки ряду s_1 побудувати відповідну точку на ряді s_2 і навпаки.

Задача 2.4. Дано три пари відповідних прямих двох проективних пучків S_1 і S_2: a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2. Побудувати для довільної прямої d_1 пучка S_1 відповідну пряму d_2 пучка S_2.

Побудова. Нехай $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ – два проективні пучки прямих, проективність яких задана трьома парами відповідних прямих: a_1,a_2; b_1,b_2; c_1,c_2 (рис. 2.49). Проведемо в пучку S_1 довільну пряму d_1. Треба побудувати її відповідну пряму d_2 в пучку S_2. Побудуємо пучок $S(a, b, c, \ldots)$, перспективний обом даним пучкам. Для цього через точку A перетину однієї пари відповідних прямих, наприклад a_1 і a_2, проведемо дві довільні прямі s_1 і s_2, які перетинають відповідно прямі пучка S_1 у точках A_1, B_1, C_1 і пучка S_2 в точках A_2, B_2, C_2 (точки A_1 і A_2 збігаються). Ряди точок $s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ і $s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ перспективні, оскільки перспективні проективним пучкам S_1 і S_2, а спільна точка цих рядів $A_1 = A_2$ відповідає сама собі. Тому існує пучок прямих, які проектують відповідні точки обох рядів s_1 і s_2. Центром S такого пучка буде точка перетину прямих B_1B_2 і C_1C_2. Точка S називається *центром перспективності рядів* s_1 і s_2.

Для побудови прямої d_2 пучка S_2, відповідної довільній прямій d_1 пучка S_1, проведемо пряму d_1 до перетину з рядом s_1 у точці D_1. Шуканою прямою d_2 буде пряма S_2D_2, де D_2 – точка перетину ряду s_2 з прямою D_1S.

Доведення.

$S_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \doublebarwedge S(a, b, c, d)$,

$S(a, b, c, d) \doublebarwedge S_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$,

тому

$S_1(a_1, b_1, c_1, d_1) \barwedge S_2(a_2, b_2, c_2, d_2)$.

Задача 2.5. Проективна відповідність ряду s і пучка S задана трьома точками A, B, C ряду s і відповідними їм прямими a, b, c пучка S. Побудувати ще одну пару відповідних елементів.

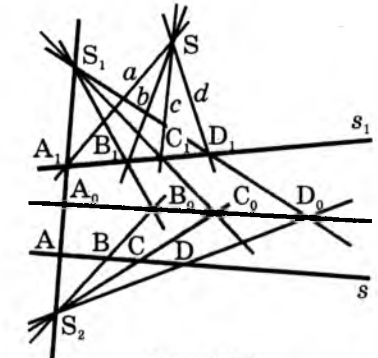


Рис. 2.50

Розв'язання. Побудова відповідних елементів ряду s і пучка S, заданих трьома парами відповідних елементів, зводиться до однієї з двох попередніх побудов.

Нехай дано $S(a, b, c, \ldots) \barwedge s(A, B, C, \ldots)$ (рис. 2.50).

Перетнемо прямі пучка S довільною прямою s_1; на прямій s_1 дістанемо точки A_1, B_1, C_1, причому $s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots) \doublebarwedge S(a, b, c, \ldots)$.

Звідси маємо, що

$s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots) \barwedge s(A, B, C, \ldots)$.

Візьмемо в пучку S довільну пряму d, вона перетне пряму s_1 у точці D_1. Тоді, як це виконувалось у задачі 2.3, на прямій s знайдемо точку D, відповідну точці D_1. Точка D прямої s буде відповідною прямій d пучка S. Дійсно, $(ab, cd) = (A_1B_1, C_1D_1)$, але $(A_1B_1, C_1D_1) = (AB, CD)$, тому $(ab, cd) = (AB, CD)$.

Отже, пряма d пучка S і точка D ряду s є відповідними в даній проективній відповідності.

Аналогічно будуються інші пари відповідних елементів ряду s і проективного з ним пучка S.

§ 17. Гармонізм точок ряду і прямих пучка

У проективній геометрії важливим для вивчення проективних властивостей фігур є спеціальне розміщення чотирьох елементів якої-небудь форми першого ступеня, яке називають *гармонізмом.*

Поняття гармонізму чотирьох точок ряду і чотирьох прямих пучка можна ввести за допомогою *подвійного відношення.*

Означення 2.13. Чотири точки A, B, C, D однієї прямої називаються *гармонічно розміщеними*, якщо їх подвійне відношення дорівнює -1, тобто $(AB, CD) = -1$. Позначають $(AB \overset{h}{-} CD)$.

За властивостями подвійного відношення чотирьох точок прямої звідси маємо, що пара точок (A, B) розділена парою точок (C, D), тобто $(A, B) \div (C, D)$.

За означенням подвійного відношення

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = -1 \text{ або } (AB, C) = -(AB, D).$$

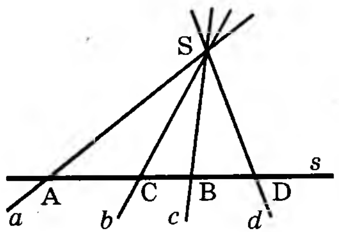


Рис. 2.51

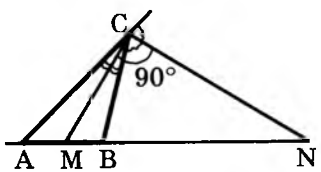


Рис. 2.52

З останньої рівності випливає, що точки C і D ділять відрізок AB внутрішньо і зовнішньо в однаковому відношенні.

Означення 2.14. Чотири промені a, b, c, d пучка S називають *гармонічно розміщеними*, якщо вони проектують гармонічну четвірку точок ряду (рис. 2.51).

Оскільки величина подвійного відношення чотирьох точок прямої дорівнює величині подвійного відношення чотирьох прямих пучка, які проектують ці точки, то величина гармонічно розміщених чотирьох прямих пучка дорівнює −1: $(ab, cd) = -1$.

Звідси також випливає, що гармонізм чотирьох точок прямої є інваріантом проективного перетворення.

Прикладом гармонічно розміщених чотирьох прямих пучка можуть бути дві сторони трикутника та бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів, утворених цими сторонами (рис. 2.52).

Справді, нехай у трикутнику ABC CM – бісектриса внутрішнього кута, а CN – бісектриса зовнішнього кута при вершині C. Оскільки бісектриса кута ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні бічним сторонам, то маємо:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{BC} \text{ і } \frac{AN}{BN} = \frac{AC}{BC}.$$

$$\text{Звідси } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{BN}, \text{ або } \frac{AM}{BM} = -\frac{AN}{BN}, \text{ або } (AB, M) = -(AB, N).$$

Отже, $(AB, MN) = -1$, тобто точки A, B, M, N утворюють гармонічну четвірку точок прямої.

Аналогічно прямі AC, BC, MC, NC утворюють гармонічну четвірку прямих.

Якщо трикутник ABC – рівнобедрений ($AC = BC$), то одна з його бісектрис (CM) перпендикулярна до прямої AB, а інша (CN) паралельна стороні AB. Тому точкою перетину CN з AB є невласна точка N_∞, у той же час точка M є серединою відрізка AB.

Отже, для середини M відрізка AB четвертою гармонічною точкою є невласна точка N_∞ прямої AB. У цьому випадку $(AB, M) = -1$, $(AB, N_\infty) = +1$, $(AB, MN_\infty) = -1$.

Якщо $(AB, CD) = -1$, то говорять, що пара точок (A, B) гармонічно розділяється парою точок (C, D) або що точки A і B гармонічно спряжені з точками C і D.

За властивостями подвійного відношення чотирьох точок прямої $(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB) = (DC, BA) = 1$.

Тому пари точок (A, B) і (C, B), які утворюють гармонічну четвірку, рівноправні, тобто ці пари гармонічно спряжені одна з одною.

Розглянемо задачу на побудову четвертої гармонічної точки до трьох даних. Існує декілька способів розв'язання цієї задачі.

Задача 2.6. На прямій s дано три точки A, B, C. Побудувати четверту гармонічну точку D, спряжену з точкою C.

Побудова.

1-й спосіб (на основі властивостей бісектрис трикутника).

На прямій s дано три точки A, B, C (рис. 2.53), з них A і B – базисні, C – роздільча. Побудуємо довільне коло, яке проходить через точки A і B. Дугу AB точкою M ділимо навпіл і проводимо пряму MC до перетину з колом у точці N. Через точку N проводимо пряму, перпендикулярну прямій MN, ця пряма перетне пряму s у шуканій точці D такій, що $(AB, CD) = -1$.

Доведення. Оскільки $\cup AM = \cup MB$, то MN – бісектриса кута N трикутника ABN. $ND \perp MN$, тому ND – бісектриса зовнішнього кута при вершині N. За властивостями бісектрис трикутника ABN маємо:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AN}{BN} \text{ і } \frac{AD}{BD} = \frac{AN}{BN}.$$

$$\text{Звідси } \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{BD}, \text{ або } \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}, \text{ або } (AB, C) = -(AB, D).$$

Отже, $(AB, CD) = -1$.

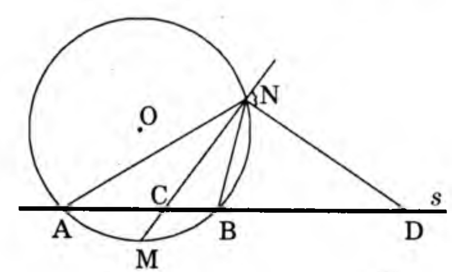


Рис. 2.53

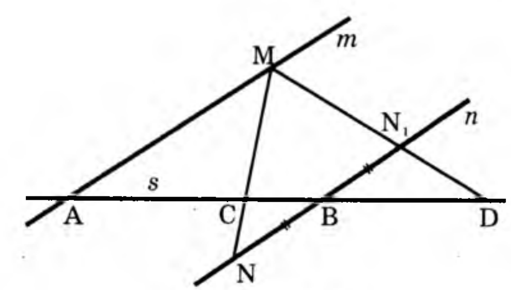


Рис. 2.54

2-й спосіб (на основі подібних трикутників).

Нехай на прямій s дано три точки A, B, C, з них A і B – базисні, C – роздільча (рис. 2.54). Через точки A і B проведемо дві паралельні прямі m і n довільного напряму, а через точку C – довільну січну, яка перетне пряму m у точці M і пряму n у точці N. На прямій n відкладемо відрізок $BN_1 = BN$. Пряма MN_1 перетне пряму s у шуканій точці D такій, що $(AB, CD) = -1$.

Доведення. Трикутники AMD і BN_1D подібні ($AM \parallel BN_1$), тому

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BN_1}.$$

З подібності трикутників AMC і BNC маємо $\frac{AC}{CB} = \frac{AM}{BN}$.

Але $BN = BN_1$, тому $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{CB}$ або $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}$, тобто $(AB, CD) = -1$.

3-й спосіб (за гармонічними властивостями повного чотиривершинника) буде розглянуто в наступному параграфі.

Побудова четвертої гармонічної прямої d до трьох даних прямих a, b, c пучка S не викликає труднощів, оскільки така побудова просто зводиться до побудови четвертої гармонічної точки до трьох даних. Достатньо даний пучок прямих $S(a, b, c)$ перетнути довільною прямою s, при цьому на прямій s буде три точки A, B, C. Задача на побудову прямої d зводиться до побудови точки D такої, щоб $(AB, CD) = -1$. Тоді шуканою буде пряма $SD = d$.

§ 18. Повний чотиривершинник

На відміну від звичайних чотирикутників (утворених з чотирьох точок (вершин) і чотирьох відрізків, що ці точки послідовно сполучають), які вивчаються в геометрії, у проективній геометрії велике практичне застосування має так званий *повний чотиривершинник* (у деяких посібниках теж «чотирикутник»).

Означення 2.15. Повним чотиривершинником називається фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не належать одній прямій, і шести прямих, що визначаються парами даних точок.

Дані точки називаються ***вершинами***, а прямі – ***сторонами*** повного чотиривершинника. На рис. 2.55 маємо повний чотиривершинник $ABCD$, у якого A, B, C, D – вершини, AB, BC, CD, DA, AC, BD – сторони. Пари сторін AB і CD, BC і AD, AC і BD називаються ***протилежними*** сторонами.

Точки M, N, L перетину протилежних сторін називаються ***діагональними*** точками: $M = AC \times BD$, $N = AB \times CD$, $L = AD \times BC$.

Прямі ML, MN, NL, що проходять через діагональні точки, називаються ***діагоналями*** повного чотиривершинника $ABCD$.

Теорема 2.5. На кожній діагоналі повного чотиривершинника є гармонічна четвірка точок, утворена двома діагональними точками і точками перетину цієї діагоналі з парою сторін, які проходять через третю діагональну точку.

Доведення. Позначимо через F і E точки перетину діагоналі LN зі сторонами DB і AC, що проходять через третю діагональну точку M:

$F = LN \times BD$, $E = LN \times AC$.

Треба довести, що $(LN, FE) = -1$ (рис. 2.55).

Для доведення спроектуємо з точки D, як із центра, точки L, N, F, E на пряму AC. Дістанемо точки A, C, M, E такі, що

$$(LN, FE) = (AC, ME). \tag{2.1}$$

Одержану четвірку A, C, M, E спроектуємо із центра B на пряму LN, дістанемо точки N, L, F, E такі, що

$$(AC, ME) = (NL, FE). \tag{2.2}$$

З рівностей (2.1) і (2.2) маємо: $(LN, FE) = (NL, FE) = \frac{1}{(LN, FE)}$, а звідси $(LN, FE)^2 = 1$, $(LN, FE) = \pm 1$.

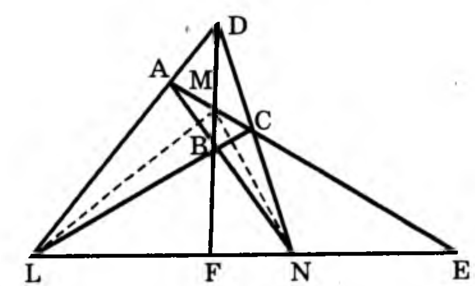


Рис. 2.55

Оскільки прямі AC і BD різні, то різні й точки F, E, тому $(LN, FE) \neq 1$, що могло бути лише при збіганні точок F і E.

Отже, $(LN, FE) = -1$.

Теорему доведено. ■

Теорема 2.6. На кожній стороні повного чотиривершинника є гармонічна четвірка точок, утворена двома його вершинами, однією діагональною точкою і точкою перетину цієї сторони з діагоналлю, що проходить через дві інші діагональні точки.

Доведення. Доведемо, наприклад, що на стороні AC є гармонічна четвірка точок, утворена вершинами A, C, діагональною точкою M, яка лежить на стороні AC, і точкою E перетину сторони AC з діагоналлю LN (рис. 2.55).

У теоремі 2.5 доведено, що $(LN, FE) = -1$. Спроектуємо з центра D точки L, N, F, E на пряму AC, дістанемо точки A, C, M, E. Оскільки гармонізм четвірки точок прямої є інваріантом проективного (і перспективного) відображення, то $(AC, ME) = (LN, FE) = -1$.

Теорему доведено.■

Теорема 2.7. Кожна пара протилежних сторін повного чотиривершинника ділиться гармонічно парою діагоналей, які проходять через точку перетину цих сторін.

Доведення. На рисунку 2.55 візьмемо пару протилежних сторін AD, BC та діагоналі LM, LN і доведемо, що ці чотири прямі пучка з центром у точці L утворюють гармонічну четвірку.

Для доведення досить з точки L спроектувати цими прямими точки A, C, M, E. Оскільки точки A, C, M, E утворять гармонічну четвірку (за теоремою 2.6), то і прямі LA, LC, LM, LE утворять гармонічну четвірку.

Теорему доведено.■

Прикладом повного чотиривершинника може бути звичайний паралелограм $ABCD$, до сторін якого віднесені і його діагоналі, тобто матимемо фігуру з чотирьох вершин і шести сторін AB, BC, CD, DA, AC і BD (рис. 2.56). Дві пари протилежних сторін (як паралельних сторін) перетинаються у невласних точках $L_\infty = AD \times BC$, $K_\infty = AB \times DC$, а третя пара – у власній точці M: $M = AC \times BD$.

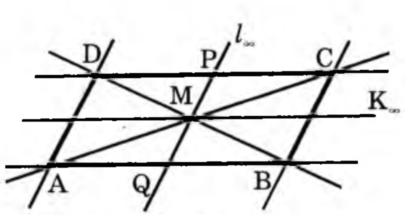


Рис. 2.56

На кожній із шести сторін маємо гармонічну четвірку точок. Наприклад, на стороні AB маємо $(AB, QK_\infty) = -1$. Точка Q є серединою відрізка AB, тому їй гармонічно спряженою буде невласна точка K_∞. На цій фігурі справджуються й інші властивості повного чотиривершинника.

Гармонічні властивості повного чотиривершинника можна використати для побудови четвертої гармонічної точки до трьох даних. У § 17 дано два інші способи такої побудови.

Задача 2.7. На прямій дано три точки A, B, C. Побудувати четверту гармонічну точку D, спряжену з точкою C.

Побудова. Дано три точки A, B, C на прямій s, причому точка C лежить між точками A і B (рис. 2.57).

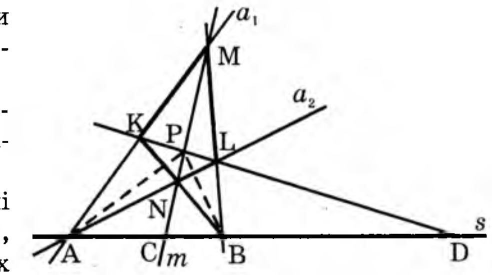


Рис. 2.57

Проведемо через точку A дві довільні прямі a_1, a_2, а через точку C пряму m так, щоб вона перетнула прямі a_1 і a_2 в точках M, N відповідно. Потім проводимо пряму BM, яка перетне пряму a_2 в точці L, і пряму BN, яка перетне пряму a_1 у точці K. Пряма KL перетне пряму s в шуканій точці D.

Доведення. $MLNK$ – повний чотиривершинник, діагональними точками якого є точки A, B, P, а діагональними прямими – прямі AB, AP, BP. За властивостями повного чотиривершинника на діагоналі AB розміщена гармонічна четвірка точок, дві з яких є діагональні точки A, B, а дві інші – точки C і D перетину цієї діагоналі AB з парою протилежних сторін, які переходять через третю діагональну точку P (теорема 2.5). Отже, $(AB, CD) = -1$.

Зазначимо, що ця побудова виконується лише однобічною лінійкою.

Гармонічні властивості повного чотиривершинника можна використовувати при розв'язуванні ряду задач евклідової геометрії.

Задача 2.8. На прямій a дано відрізок AB і його середину M. За допомогою однобічної лінійки через дану точку C провести пряму, паралельну прямій a.

Розв'язання.

Побудова. Нехай дано пряму a, відрізок AB на ній, точку M – середину відрізка AB і точку C, яка не лежить на прямій a (рис. 2.58). Через точки A і C проведемо пряму і на ній візьмемо довільну точку N. Потім проведемо прямі MN, NB, BC. Позначимо через L точку перетину прямих BC і MN, а через D – точку перетину прямих AL і BN. Пряма CD буде шуканою прямою, паралельною даній прямій a.

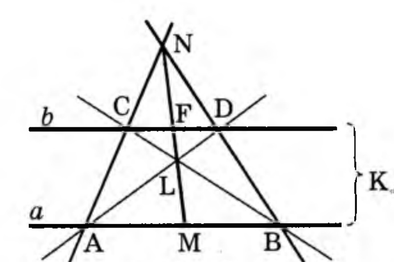


Рис. 2.58

Доведення. Справедливість побудови ґрунтується на основі гармонічних властивостей повного чотиривершинника $NCLD$. У ньому пряма AB є діагоналлю, а на діагоналі повного чотиривершинника розміщена гармонічна четвірка точок, утворених двома діагональними точками A і B і точками перетину цієї діагоналі з парою протилежних сторін NL і CD, які проходять через третю діагональну точку F. Однією з двох останніх є точка M – середина відрізка AB, іншою є невласна точка K_∞ прямої a як гармонічно спряжена середині M відрізка AB. Оскільки точкою перетину прямих AB і CD є невласна точка, то пряма $CD = b$ паралельна прямій $AB = a$.

§ 19. Поняття повного чотиристоронника

Фігурою, двоїстою повному чотиривершиннику за малим принципом двоїстості, є *повний чотиристоронник*.

Означення 2.16. *Повним чотиристоронником* називається фігура, яка складається з чотирьох прямих, жодні три з яких не належать одній точці, і шести точок, що визначаються парами цих прямих.

Дані чотири прямі a, b, c, d називаються *сторонами*, а шість точок (a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, d), і (d, a) перетину даних прямих називаються *вершинами* повного чотиристоронника.

У повного чотиристоронника є три пари протилежних вершин: (a, b) і (c, d); (b, c) і (d, a); (b, d) і (a, c).

Прямі n, l, m, які сполучають пари протилежних вершин, називаються *діагоналями*, а точки їх перетину – *діагональними точками* (рис. 2.59).

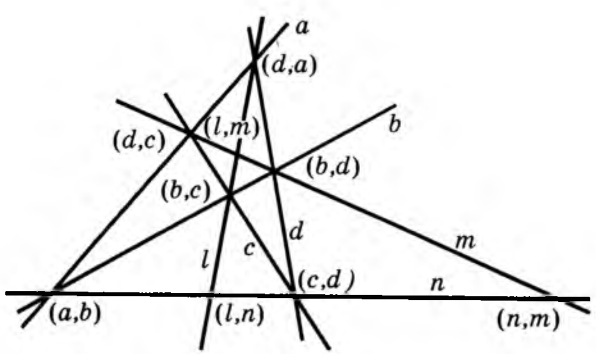


Рис. 2.59

Повний чотиристоронник має гармонічні властивості, які можна одержати із відповідних властивостей повного чотиривершинника (теореми 2.5, 2.6, 2.7) за малим принципом двоїстості.

Сформулюємо одну з них, двоїсту теоремі 2.5.

Через кожну діагональну точку (l, m) повного чотиристоронника проходить гармонічна четвірка прямих, утворена двома діагоналями l, m і двома прямими, які сполучають дану точку (l, m) з двома вершинами ((a, b) і (c, d)), що належать третій діагоналі n.

§ 20. Проективні ряди (і пучки) зі спільним носієм

Нехай маємо два проективні ряди точок

$s(A, B, C, \ldots) \overline{\wedge}\, s'(A', B', C', \ldots)$.

Якщо сумістити носії цих рядів – прямі s і s', то дістанемо два проективні ряди точок на одній і тій самій прямій, тобто два проективні ряди зі *спільним носієм*, який надалі позначатимемо буквою u: $u(A, B, C, \ldots) \overline{\wedge}\, u(A', B', C', \ldots)$.

Аналогічно вводиться поняття двох проективних пучків із спільним носієм. Спільним носієм двох пучків є їх центр.

При суміщенні носіїв двох проективних рядів або пучків частина відповідних елементів може збігатися. Кожний елемент двох форм першого ступеня зі спільним носієм, що збігається із своїм відповідним елементом, називається *подвійним*. Якщо всі точки одного ряду збігаються з відповідними точками другого ряду або всі прямі одного пучка – з відповідними прямими другого пучка, то маємо *тотожну відповідність* двох рядів або двох пучків.

Розглядатимемо лише нетотожні ряди точок. Відповідь на запитання, скільки подвійних точок можуть мати два нетотожні проективні ряди точок, розміщені на спільному носії u, дає теорема Штаудта, названа ім'ям німецького математика *К. Штаудта* (1798–1867), який вніс значний вклад в оформлення проективної геометрії як самостійної геометричної дисципліни.

Теорема 2.8. (*Штаудта*). Два нетотожні проективні ряди точок з спільним носієм можуть мати не більше двох подвійних точок.

Доведення. Нехай два проективні ряди $(A, B, C, \ldots)$ і $(A', B', C', \ldots)$ розміщені на спільному носії u, причому збігаються три пари відповідних точок – A і A', B і B', C і C'. За властивістю проективності рядів для будь-якої іншої пари відповідних точок цих рядів має місце рівність $(AB, CD) = (A'B', C'D')$, або в даному припущенні $(AB, CD) = (AB, CD')$. З останньої рівності за теоремою 2.1 § 12 випливає, що D збігаються з D'. Оскільки пара точок D і D' – довільна, то всі відповідні точки рядів s і s' збігаються, тобто ці ряди тотожні, що суперечить умові.

Теорему доведено. ∎

Аналогічне твердження має місце для інших форм першого ступеня, їх одержують з доведеної теореми за малим і великим принципом двоїстості.

З теореми Штаудта випливає, що два проективні ряди точок зі спільним носієм можуть мати або два подвійні елементи, або один, або жодного.

В існуванні кожного з цих випадків переконаємось на прикладах.

Задача 2.9. Побудувати проективну відповідність двох рядів із спільним носієм, яка має дві подвійні точки.

Побудова. Нехай маємо прямолінійний ряд точок $s(A, B, C, \ldots)$ (рис. 2.60). Спроектуємо його на пряму u, яка перетинає пряму s у точці X, із двох центрів S_1 і S_2, вибраних так, що пряма S_1S_2 перетинає пряму u в точці Y.

На прямій u дістанемо два проективні ряди точок:

$(A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\wedge} (A_2, B_2, C_2, \ldots)$.

Зрозуміло, що ці проективні ряди точок із спільним носієм мають дві подвійні точки X і Y, вони належать як до одного ряду, так і до другого.

Задача 2.10. Побудувати проективну відповідність двох рядів точок із спільним носієм, яка б мала одну подвійну точку.

Побудова. Побудова виконується аналогічно попередній, але центри S_1 і S_2 проектуючих пучків вибираються так, щоб пряма S_1S_2 проходила через точку X перетину прямої s з прямою u (рис. 2.61).

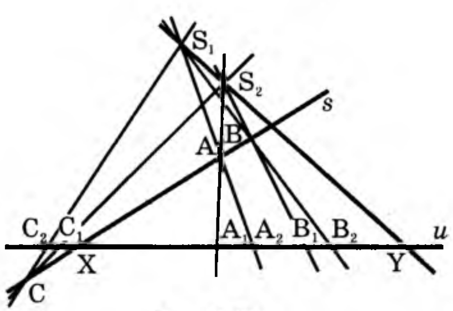


Рис. 2.60

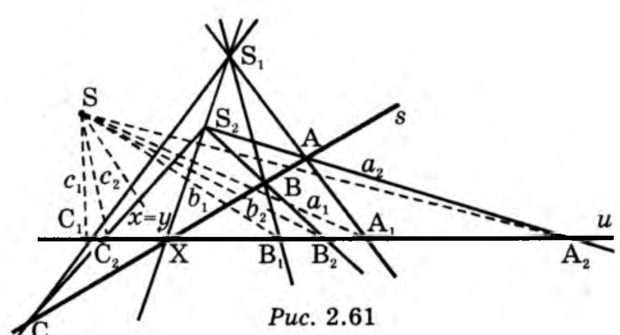


Рис. 2.61

Задача 2.11. Побудувати проективну відповідність двох рядів точок із спільним носієм, яка б не мала подвійних точок.

Побудова. Для побудови проективної відповідності двох рядів точок із спільним носієм, яка б не мала подвійних точок, сумістимо центри S_1 і S_2 проектуючих пучків, тобто проектування будемо виконувати двома проективними пучками прямих із спільним носієм S такими, що відповідні прямі другого пучка $(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ одержуються за допомогою повороту відповідних прямих першого пучка $(a, b, c, \ldots)$ у певному напрямі на один і той же кут φ. Зрозуміло, що такі два пучки прямих проективні і не можуть мати подвійних прямих. У такій самій відповідності будуть і перспективні їм ряди точок, тобто $(A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\wedge} (A_2, B_2, C_2, \ldots)$ і не мають подвійних точок (рис. 2.62).

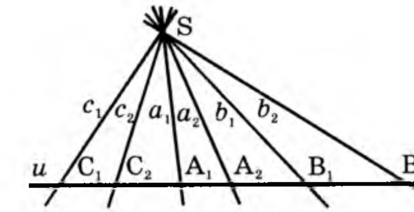


Рис. 2.62

Побудову проективної відповідності двох пучків із спільним носієм краще звести до побудови аналогічних рядів точок. Зокрема, виконавши побудову проективної відповідності двох рядів точок, які мають одну подвійну точку X (рис. 2.61), проектуємо цю відповідність рядів двома пучками зі спільним носієм S (на рис. 2.61 – штрихові лінії) і дістанемо проективну відповідність двох пучків $(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ із спільним носієм S, яка має одну подвійну пряму SX.

Аналогічно можна побудувати проективну відповідність двох пучків зі спільним носієм, яка має або дві подвійні прямі, або не має жодної подвійної прямої.

Означення 2.17. Проективна відповідність двох форм першого ступеня зі спільним носієм називається *гіперболічною*, якщо ця відповідність має два подвійні елементи, *параболічною*, якщо вона має один подвійний елемент, і *еліптичною*, якщо подвійних елементів вона не містить.

У розглянутих задачах маємо проективну відповідність двох рядів із спільним носієм гіперболічну (задача 2.9), параболічну (задача 2.10), еліптичну (задача 2.11).

Задача 2.12. Симетрія відносно точки на прямій є гіперболічною проективною відповідністю двох рядів із спільним носієм.

Розв'язання. Нехай на прямій u задано центральну симетрію точок з центром O. Тоді будь-якій точці A відповідає така точка A', що

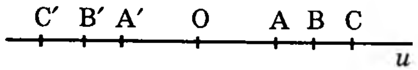


Рис. 2.63

$OA = OA'$, точці B – така точка B', що $OB = OB'$, точці C – така точка C', що $OC = OC'$ (рис. 2.63).

Оскільки точка O є серединою всіх відрізків, утворених парами відповідних точок, то у проективній відповідності двох рядів точок $s(A, B, C)$ і $s'(A', B', C')$ зі спільним носієм u, визначеній трьома парами відповідних точок A і A', B і B', C і C', точка O і невласна точка O'_∞ прямої a самі собі відповідають, тобто є подвійними точками даної відповідності.

Задача 2.13. Нехай маємо два пучки прямих $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ із спільним носієм S. Між прямими цих пучків встановимо таку відповідність, що кожній прямій одного пучка відповідає їй перпендикулярна пряма другого, тобто відповідні пари $a_1 \perp a_2$, $b_1 \perp b_2$, $c_1 \perp c_2$.

Покажемо, що в такий спосіб встановлена відповідність між пучками S_1 і S_2 є проективною відповідністю, тобто що

$$(a_1b_1, c_1d_1) = (a_2b_2, c_2d_2).$$

Справді, $$(a_1b_1, c_1d_1) = \frac{\sin\left(\widehat{a_1c_1}\right)\cdot \sin\left(\widehat{b_1d_1}\right)}{\sin\left(\widehat{b_1c_1}\right)\cdot \sin\left(\widehat{a_1d_1}\right)},$$

$$(a_2b_2, c_2d_2) = \frac{\sin(a_2c_2)\cdot \sin\left(\widehat{b_2d_2}\right)}{\sin\left(\widehat{b_2c_2}\right)\cdot \sin\left(\widehat{a_2d_2}\right)}$$

Оскільки $\angle a_1c_1 = \angle a_2c_2$ як гострі кути з відповідно перпендикулярними сторонами, то і синуси рівних кутів рівні. Аналогічно для кутів $\widehat{a_2d_2}$ і $\widehat{a_1d_1}$, $\widehat{b_1c_1}$ і $\widehat{b_2c_2}$, $\widehat{b_1d_1}$ і $\widehat{b_1d_2}$.

Отже, $(a_1b_1, c_1d_1) = (a_2b_2, c_2d_2)$, тому в такий спосіб встановлена відповідність між прямими пучків $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ є проективною відповідністю.

Перпендикулярні прямі не можуть збігатися, тому розглянута відповідність не має подвійних елементів – вона *еліптична*.

Задача 2.14. Спряжені діаметри лінії другого порядку утворюють проективну відповідність двох пучків прямих зі спільним центром.

Розв'язання. З аналітичної геометрії відомо, що *діаметром еліпса (гіперболи)* називається пряма, яка ділить навпіл паралельні хорди; така пряма обов'язково проходить через центр еліпса (гіперболи). *Діаметром параболи* називається будь-яка пряма, паралельна її осі, а також сама вісь. Два діаметри еліпса (гіперболи) називаються *спряженими*, якщо один з них ділить навпіл всі хорди, паралельні другому діаметру.

Можна довести, що два пучки, відповідними прямими яких є спряжені діаметри центральної лінії другого порядку, *проективні*.

У *еліпса* жодні два спряжені діаметри не можуть збігатися, тобто пучки, утворені спряженими діаметрами еліпса, не мають подвійних прямих, вони утворюють *еліптичну* відповідність.

У *гіперболи* спряженими діаметрами, які збігаються, є асимптоти гіперболи. Отже, спряжені діаметри гіперболи утворюють проективну *гіперболічну* відповідність двох пучків із спільним носієм.

У випадку *параболи* вісь, як діаметр, сама собі спряжена, тобто маємо *параболічну* відповідність двох пучків із спільним носієм (невласна точка осі параболи).

Звідси і взято назву типів проективної відповідності в образах першого ступеня.

Теорема 2.9. Кожна пара відповідних елементів гіперболічної проективної відповідності двох форм першого ступеня утворює з двома подвійними елементами стале подвійне відношення.

Доведення.

Доведемо теорему для двох проективних рядів точок. Нехай (A_1, A_2) і (B_1, B_2) – дві пари відповідних точок двох проективних рядів точок із спільним носієм, а X, Y – подвійні точки цієї відповідності. Тоді

$$(XY, A_1B_1) = (XY, A_2B_2),$$

або

$$\frac{(XY, A_1)}{(XY, B_1)} = \frac{(XY, A_2)}{(XY, B_2)}.$$

Переставивши середні члени пропорції, дістанемо:

$$\frac{(XY, A_1)}{(XY, A_2)} = \frac{(XY, B_1)}{(XY, B_2)}.$$

Отже, $(XY, A_1A_2) = (XY, B_1B_2)$. Теорему доведено.■

§ 21. Інволюція

Нехай $s(A, B, C, \dots)$ і $s'(A', B', C', \dots)$ – два проективні ряди точок із спільним носієм u, відповідність між якими задана трьома парами відповідних точок – A і A', B і B', C і C'. Кожну точку прямої u можна віднести як до першого, так і до другого ряду (рис. 2.64). З'ясуємо, як знайти для довільної точки D прямої u, віднесеної до першого ряду, їй відповідну точку D' прямої u, віднесену до другого ряду. Візьмемо за точку першого ряду точку D, яка збігається з точкою C' другого ряду. Ця побудова з'ясована в задачі 2.3 § 16. Пригадаємо побудову.

Спроектуємо точки A, B, C ряду u з довільного центра S_1, а точки A', B', C' ряду u – з довільного центра S_2. Дістанемо два проективних пучки прямих $S_1(S_1A,\ S_1B,\ S_1C,\ \dots)$ і $S_2(S_2A',\ S_2B',\ S_2C',\ \dots)$. Через точку перетину однієї пари відповідних прямих S_1A і S_2A' – точку $A_1 = A_2$ проведемо дві прямі s_1 і s_2, на яких дістанемо в перетині з прямими пучків S_1 і S_2 два проективні і перспективні ряди точок $s_1(A_1, B_1, C_1, \dots)$ і $s_2(A_2, B_2, C_2, \dots)$. Оскільки ряди s_1 і s_2 перспективні, то існує центр перспективності S_0, який знаходимо як точку перетину прямих B_1B_2 і C_1C_2. Заготовку для побудови точки D' зроблено. Проводимо пряму S_1D, яка перетинає пряму s_1 у точці D_1, потім пряму D_1S_0, яка перетне пряму s_2 у точці D_2. Шукана точка D' – це точка перетину прямої S_2D_2 з прямою u. При такій побудові може бути випадок, коли точці D', віднесеній до першого ряду, відповідною точкою другого ряду буде точка D, раніше віднесена до першого ряду. Існування цього випадку можна довести такими міркуваннями.

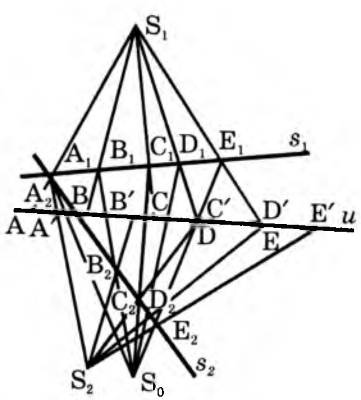


Рис. 2.64

Наприклад, доведемо, що коли точку C віднесемо до другого ряду, позначивши її літерою D', то точка D, відповідна точці D', збігається з точкою C'. Справді, при цьому будемо мати

$$(AB,\ CD) = (A'B',\ C'D') = (BA,\ C'C),$$

звідси

$$(AB,\ CD) = (AB,\ CC').$$

Отже, точка C' збігається з точкою D ($D = C'$).

Про точки D і D' говорять, що вони відповідають одна одній *взаємно*.

Теорема 2.10. Якщо між точками двох рядів із спільним носієм встановлена така проективна відповідність, при якій одна пара точок відповідає одна одній взаємно, то й кожна пара відповідних точок цих рядів відповідає одна одній взаємно.

Доведення. Нехай проективна відповідність рядів u_1 і u_2 із спільним носієм u задана трьома парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Припустимо, що точки A_1 і A_2 взаємно відповідають одна одній. Віднесемо до першого ряду точки A_2 і B_2 (до u_1). Тоді чотирьом точкам першого ряду A_1, A_2, B_1, B_2 послідовно відповідатимуть чотири точки другого ряду A_2, A_1, B_2, B'_2. Тому

$$(A_1B_1,\ A_2B_2) = (A_2B_2,\ A_1B'_2), \text{ або } (A_2B_2,\ A_1B_1) = (A_2B_2,\ A_1B'_2).$$

Звідси маємо, що точки B_1 і B'_2 збігаються, тобто точки B_1 і B_2 взаємно відповідають одна одній. Оскільки пару відповідних точок B_1 і B_2 взяли довільно, то так себе поводитимуть і всі інші відповідні пари двох рядів при у такий спосіб встановленій відповідності.

Теорему доведено.■

Означення 2.18. Проективна відповідність між двома рядами точок із спільним носієм, при якій кожна пара відповідних точок є взаємно відповідною, називається *інволюційною* відповідністю або просто *інволюцією.*

При інволюційній відповідності двох рядів кожна пара відповідних елементів не залежить від того, яку точку пари віднести до першого, а яку – до другого ряду.

Аналогічно вводиться поняття інволюційної відповідності проективних пучків прямих із спільним носієм.

Теорема 2.11. Інволюція у формах першого ступеня повністю визначається заданням двох пар відповідних елементів.

Доведення. Нехай інволюція двох рядів із спільним носієм задана двома парами відповідних точок A і A', B і B' (рис. 2.65).

Тоді $s(A, B, A', B', \dots) \barwedge s'(A', B', A, B, \dots)$, тобто із задання двох пар інволюційно відповідних точок фактично маємо чотири пари відповідних точок двох проективних рядів s і s'. Для задання проективної відповідності двох рядів точок достатньо трьох пар відповідних точок. Тому інволюція двох рядів s і s' на прямій u цілком визначена заданням двох пар інволюційно відповідних точок A і A', B і B'.

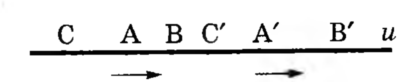


Рис. 2.65

Теорему доведено.■

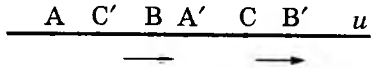


Рис. 2.66

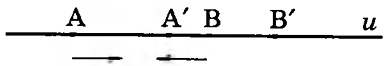


Рис. 2.67

Аналогічно доводиться теорема для двох інволюційно відповідних пучків.

Інволюційні пари (A, A') і (B, B') можуть або розділяти одна одну, або не розділяти, або збігатись. Розглянемо ці три випадки.

1. Нехай пари (A, A') і (B, B'), що визначають інволюцію на прямій u, *розділяють* одна одну (рис. 2.66): $(A, A') \div (B, B')$.

У цьому випадку якщо одна точка A рухається в певному напрямі, то їй відповідна точка A' теж має рухатися в тому самому напрямі, оскільки якби точка A' рухалась у протилежному напрямі, то при проходженні її через точку B їй відповідна точка не могла б проходити через точку B'.

Візьмемо ще одну пару (C, C') відповідних точок прямої u, причому якщо точка C першого ряду s лежить після A', але перед B', то у другому ряді s' їй відповідна точка C' повинна лежати після A, але перед B. Зрозуміло, що в цьому випадку пару (C, C') повинна розділяти інша пара – або (A, A'), або (B, B'). Звідси випливає, що в даному випадку дві відповідні одна одній точки не можуть збігатись.

Аналогічну ситуацію маємо в інволюції двох пучків, коли $(a, b) \div (c, d)$.

Означення 2.19. Інволюція форм першого ступеня, в якій не існує дійсних подвійних елементів, називається *еліптичною.*

Прикладом еліптичної інволюції двох пучків прямих є розглянутий раніше приклад пучка прямих, утворених двома сторонами трикутника і двома бісектрисами внутрішнього і зовнішнього кутів, утворених даними сторонами. При перетині цього пучка довільною прямою ряд точок на цій прямій, який проектується відповідними прямими пучка, також є еліптичною інволюцією.

Іншим прикладом еліптичної інволюції в пучках прямих є задача 2.13 § 20 про проективну відповідність двох пучків із взаємно перпендикулярними прямими, а також задача 2.14 § 20 у випадку еліпса.

2. Розглянемо випадок, коли інволюція точок прямої визначається двома парами (A, A') і (B, B') відповідних точок, які ***не розділяють*** одна одну (рис. 2.67): $(A, A') \ddot{-} (B, B')$.

У цьому випадку якщо точка A переміщується в одному напрямі, то точка A', їй відповідна, повинна переміщуватись у протилежному напрямі. Справді, якби точки A і A' рухались в одному напрямі $AA'B$, то при русі точки A на відрізку AA', який не містить точок B і B', відповідна їй точка A' описала б відрізок $A'_\infty A$, на якому лежать точки B і B', а це неможливо, оскільки при проходженні точки A' через B' точка A не зможе знаходитись у точці B. Отже, точки A і A' рухаються в протилежних напрямах. Тоді й інші відповідні пари також рухаються в протилежних напрямах, коли $(A, A') \ddot{-} (B, B')$.

При такому русі точки A і A' можуть суміститись, тобто утворити *подвійну точку* інволюції. За теоремою Штаудта (§ 21), проективна відповідність форм першого ступеня зі спільним носієм не може мати більше двох подвійних елементів.

Отже, у випадку, коли інволюційні пари $(A, B) \ddot{-} (C, D)$, може бути дві подвійні точки.

Означення 2.20. Інволюція форм першого ступеня, в якій є два подвійні елементи, називається *гіперболічною.*

Теорема 2.12. Подвійні елементи гіперболічної інволюції гармонічно розділяють кожну пару відповідних елементів.

Доведення. Нехай X і Y – подвійні елементи інволюції, A і A' – пара відповідних точок інволюції. Тоді

$$(XY, AA') = (XY, A'A).$$

За властивостями подвійного відношення від перестановки місцями букв однієї пари значення подвійного відношення змінюється на обернене, тобто

$$(XY,\ AA') = \frac{1}{(XY,\ A'A)}.$$

З одержаних останніх двох рівностей маємо

$$(XY, A'A)^2 = 1 \text{ або } (XY, A'A) = \pm 1.$$

Але при $(XY, A'A) = +1$ точки A і A' збігаються, тобто пара (A, A') буде третьою подвійною точкою даної інволюції, що для нетотожної інволюції неможливо. Отже, $(XY, A'A) = -1$.

Теорему доведено.■

Прикладом гіперболічної інволюції є *центральна симетрія.* Подвійними точками в ній є центр симетрії O і невласна точка O_∞ прямої.

Справді, центр симетрії і невласна точка прямої гармонічно поділяють будь-яку пару симетричних точок. Будь-яка пара центрально-симетричних точок завжди взаємно симетрична.

З поняттям точки, інволюційно відповідної невласній точці прямої, пов'язане поняття *центра інволюції*.

Означення 2.21. Центром інволюції на прямій u називається точка O, відповідна невласній точці O_∞ прямої u в даній інволюції.

З поняттям центра пов'язані деякі важливі властивості інволюції.

Теорема 2.13. Добуток відстаней двох відповідних точок до центра інволюції є величиною сталою.

Доведення. Нехай на прямій u інволюція задана парою відповідних точок (A, A') і (B, B'), O – центр інволюції. Тоді оскільки інволюція є окремим випадком проективної відповідності, то

$$(AB, OO_\infty) = (A'B', O_\infty O).$$

Запишемо цю рівність через відношення трьох точок:

$$\frac{(ABO)}{(ABO_\infty)} = \frac{(A'B'O_\infty)}{(A'B'O)}.$$

Враховуючи, що $(ABO_\infty) = (A'B'O_\infty) = 1$, з попередньої рівності маємо

$$(ABO) = \frac{1}{(A'B'O)} \text{ або } \frac{AO}{BO} = \frac{B'O}{A'O},$$

а звідси $AO \cdot A'O = BO \cdot B'O = k$, де k – стала величина.
Теорему доведено. ■

З'ясуємо суть сталої величини k.
Для подвійної точки X $XO \cdot XO = k$ або $(XO)^2 = k$, звідки $XO = \pm\sqrt{k}$.
Залежно від того, яких значень буде набувати k, відстань XO може виражатись дійсним числом, коли $k > 0$, уявним при $k < 0$ і рівним нулю при $k = 0$.
Якщо $k > 0$, то маємо дві *дійсні* подвійні точки X і Y, розміщені по різні боки від центра O інволюції на відстані

$$OX = +\sqrt{k}, \quad OY = -\sqrt{k}.$$

З цього випливає, що при $k > 0$ маємо *гіперболічну* інволюцію. Для будь-якої пари відповідних точок A і A' добуток $OA \cdot OA' > 0$, тому точки A і A' в гіперболічній інволюції розташовані по один бік від точки O на прямій u.

Якщо $k < 0$, то відстань подвійної точки X від центра O інволюції *уявна*, тобто така інволюція не має дійсних подвійних точок, а це має місце в *еліптичній* інволюції.

Якщо $k = 0$, то для будь-якої пари (A, A') відповідних точок $AO \cdot A'O = 0$. Це означає, що одна з точок пари відповідних точок збігається з центром O інволюції. Оскільки в цьому випадку інволюція має одну подвійну точку (дві сумістилися), то інволюція буде параболічною.

Випадок, коли обидва подвійні елементи інволюції сумістяться, можна розглядати як граничний випадок гіперболічної інволюції. За попередньою теоремою 2.12 подвійні елементи цієї інволюції гармонічно розділяють будь-яку пару відповідних елементів. Тому при суміщенні подвійних елементів один із відповідних елементів кожної пари обов'язково повинен суміститися з подвійним елементом. Це означає, що єдиний (суміщений) подвійний елемент інволюції відповідає будь-якій точці спільного носія. Практично цей випадок не використовують, оскільки він не відповідає поняттю про проективну відповідність. Але для узагальнення всіх випадків цей винятковий випадок називають *параболічною* інволюцією.

§ 22. Друга теорема Дезарга

Нехай маємо повний чотиривершинник $KLMN$ і пряму s, яка перетинає пари його протилежних сторін у парах точок A і A', B і B', C і C' (рис. 2.68). Одержані три пари точок на прямій s знаходяться в певній залежності, яка виражається другою теоремою Дезарга (першою називають теорему Дезарга про трикутники).

Теорема Дезарга (друга). Три пари точок перетину протилежних сторін повного чотиривершинника з довільною прямою s належать одній і тій самій інволюції.

Доведення. Три пари точок перетину (A, A'), (B, B'), (C, C') визначають на прямій s проективну відповідність (рис. 2.68).

Доведемо, що ця проективна відповідність є інволюцією, тобто що $(AA', BC) = (A'A, B'C')$.

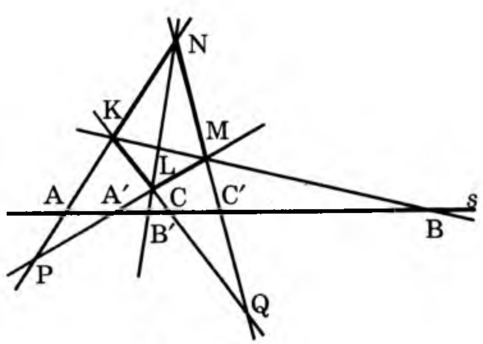


Рис. 2.68

Для цього треба довести, що точкам A, B, C відповідають точки A', B', C', причому точки A і A' відповідають одна одній взаємно. Виберемо за центр проектування точку K і спроектуємо з неї точки A, A', B, C на пряму LM. Дістанемо:

$$(AA', BC) = (PA', ML).$$

Потім одержані точки P, A', M, L спроектуємо із центра N знову на пряму s. Дістанемо

$$(PA', ML) = (AA', C'B').$$

За властивістю подвійних відношень від перестановки букв у кожній парі величина подвійного відношення не зміниться, тому

$$(AA', B'C') = (A'A, B'C').$$

Теорему доведено. ■

За малим принципом двоїстості можна сформулювати теорему Дезарга для пучків із спільним носієм у такому вигляді.

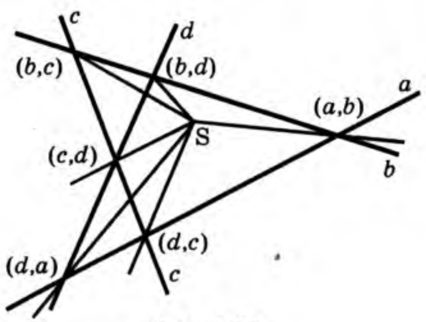


Рис. 2.69

Друга теорема Дезарга (для пучків прямих). Три пари протилежних вершин повного чотиристоронника проектуються з довільної точки площини трьома парами прямих, належних одній і тій самій інволюції прямих (рис. 2.69).

Другу теорему Дезарга можна використати для побудови відповідних елементів заданої двома парами відповідних точок інволюції.

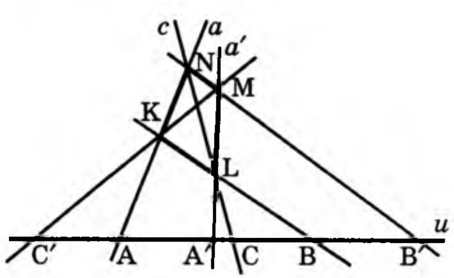


Рис. 2.70

Задача 2.15. Гіперболічна інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок (A, A') і (B, B'). Побудувати для довільної точки C прямої u її відповідну точку C'.

Розв'язання.

Побудова. Через точки A і A' проведемо довільні прямі a і a'. Через точку C проведемо довільну пряму c так, щоб вона перетнула прямі a і a', нехай у точках N і L (рис. 2.70).

Проводимо прямі BL, $B'N$ і знаходимо точки їх перетину з прямими a і a' відповідно в точках K і M. Тоді пряма MK перетне пряму u в шуканій точці C'.

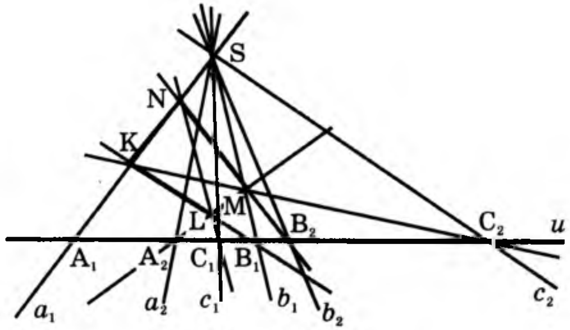


Рис. 2.71

Доведення. $KLMN$ – повний чотиривершинник, одна пара протилежних сторін KN і LM проходить через точки A і A', друга пара KL і NM – через точки B і B', а третя пара NL і MK – через точки C і C'. Отже, задовольняється умова другої теореми Дезарга, за якою пара точок C і C' належить до гіперболічної інволюції, визначеної парою відповідних точок A і A', B і B'.

Зауважимо, що побудова виконується однією лінійкою. Аналогічно виконується побудова інволюційних пар точок в інших випадках.

Задача 2.16. Гіперболічна інволюція в пучку прямих задана двома парами відповідних прямих a_1 і a_2, b_1 і b_2. Побудувати пряму c_2, відповідну даній прямій c_1 у цій інволюції.

Розв'язання.

Побудова. Нехай гіперболічна інволюція пучків $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ із спільним носієм $S = S_1 = S_2$ визначена парами прямих a_1 і a_2, b_1 і b_2 (рис. 2.71).

Перетнемо прямі пучків довільною прямою u, на ній одержимо два ряди точок $u_1(A_1, B_1, \ldots)$ і $u_2(A_2, B_2, \ldots)$, які теж утворюють гіперболічну інволюцію. Прямій c_1 на прямій u відповідає точка C_1. Одним із відомих способів, наприклад, за другою теоремою Дезарга, побудуємо точку C_2, інволюційно відповідну точці C_1 у даній інволюції. Пряма $SC_2 = S_2C_2$ буде шуканою прямою c_2.

Доведення. Як і в попередній задачі.

§ 23. Геометрична інтерпретація інволюції

Нехай інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A і A', B і B' (рис. 2.72).

Через довільну точку P, яка не лежить на прямій u, і пари відповідних точок проведемо два кола $(AA'P)$ і $(BB'P)$, які перетинаються в іншій точці Q (точки P і Q можуть збігатись).

Відомо, що пряма PQ є радикальною віссю побудованих кіл. Точка O перетину прямих PQ і u є центром інволюції. Це випливає з властивості січної u, яка перетинає кола в точках A і A', B і B':

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OP \cdot OQ = k.$$

Візьмемо на прямій u довільну точку C і побудуємо їй відповідну точку C'. Для цього через точки C, P, Q проведемо коло, яке перетне пряму u в шуканій точці C'.

Справді, $OC \cdot OC' = OP \cdot OQ = k$.

Оскільки точка C взята довільно на прямій u, то цим самим доведено теорему. ■

Теорема 2.14. Довільна пряма u перетинає кожне коло даного пучка кіл у парах точок однієї інволюції.

Залежно від взаємного розміщення прямої u і кіл пучка можливі три випадки.

1. Пряма u перетинає радикальну вісь PQ у зовнішній відносно кіл пучка точці O, тобто точка O належить відрізку $P\infty Q$ (рис. 2.72). У цьому випадку пари відповідних точок (A, A') і (B, B') не розділяють одна одну, тому маємо на прямій u *гіперболічну інволюцію*. У даному пучку кіл є два кола, які дотикаються до прямої u, при цьому дві точки перетину стягуються в одну точку дотику. Отже, точки X і Y дотику кіл до прямої u є *подвійними точками*. Щоб побудувати подвійні точки, використаємо властивості січних і дотичних до кола, проведені з однієї зовнішньої точки: проведемо з точки O дотичну OT до одного з кіл пучка, тоді $OT^2 = OP \cdot OQ$. Звідси випливає, що

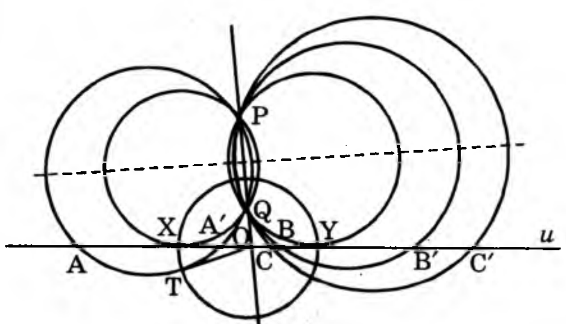


Рис. 2.72

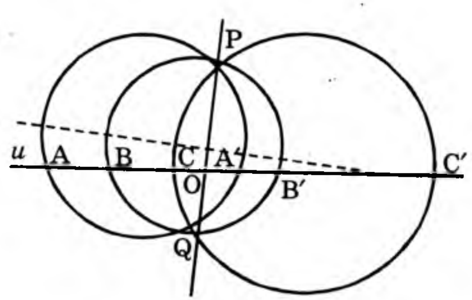


Рис. 2.73

подвійними точками інволюції будуть точки перетину прямої u з колом $(O;\ OT)$.

2. Пряма u перетинає відрізок PQ у внутрішній точці O (рис. 2.73), яка і в цьому випадку є центром інволюції, утвореній парами точок (A, A'), (B, B') перетину прямої u з колами пучка. З точки O не можна провести дотичної ні до жодного кола пучка, ні до жодного кола, що проходило б через точки P, Q і дотикалося б до прямої u. Отже, дійсних подвійних точок у такий спосіб утворена інволюція не має. Через те що точки P і Q пучка кіл лежать по різні боки від прямої u, точки перетину кожного кола пучка з прямою u лежать по різні боки від точки O, тобто точки кожної пари цієї інволюції розділяються точками кожної іншої пари цієї ж інволюції.

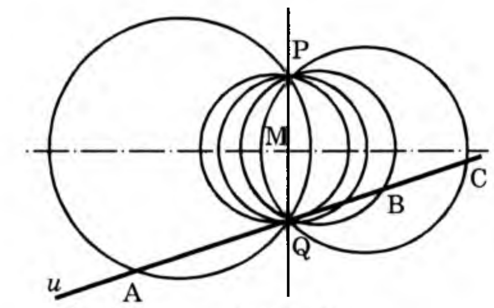


Рис. 2.74

Отже, у цьому випадку маємо *еліптичну* інволюцію на прямій u.

3. Пряма u проходить через один кінець відрізка PQ, нехай через точку Q (рис. 2.74). У цьому випадку одна точка перетину кожного кола пучка з прямою збігається з точкою Q, тому кожній точці A прямої u в цій інволюції відповідає точка A', що збігається з точкою Q. Існує одне коло пучка, яке дотикається до прямої u в точці Q, тому точка Q відіграє роль подвійної точки даної інволюції. Отже, у цьому випадку маємо *параболічну* інволюцію на прямій u.

Побудова відповідних точок інволюції на прямій u зводиться до побудови кіл, які належать пучку кіл з радикальною віссю PQ.

§ 24. Проективні відображення форм першого ступеня в координатах

24.1. Проективне відображення двох рядів точок у координатах

Поняття координат точки на проективній прямій введено через подвійне відношення чотирьох точок прямої, три з яких фіксовані (§ 12).

Залежність між координатами x і x' пари відповідних точок двох проективних рядів із спільним носієм встановлюється таким твердженням.

Теорема 2.15. Проективне відображення точки $M(x)$ одного ряду в точку $M'(x')$ другого ряду виражається в координатах дробово-лінійною функцією вигляду

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

де a, b, c, d – дійсні числа, які визначаються координатами точок, що встановлюють проективне відображення і задовольняють нерівність $ad - bc \neq 0$.

Доведення. Нехай маємо проективну відповідність між точками двох рядів, визначену трьома парами відповідних (фіксованих) точок M_1, M_2, M_3 і M'_1, M'_2, M'_3 на спільному носії, який приймемо за координатну пряму з початком у точці O. Позначимо координати цих точок $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, $M_3(x_3)$, $M'_1(x'_1)$, $M'_2(x'_2)$, $M'_3(x'_3)$. Але

$$(M_1M_2, M_3M) = \frac{(M_1M_2, M_3)}{(M_1M_2, M)} = \frac{M_1M_3}{M_2M_3} : \frac{M_1M}{M_2M}.$$

У координатах

$$(M_1M_2, M_3M) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Аналогічно

$$(M'_1M'_2, M'_3M') = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x' - x'_1}{x' - x'_2}.$$

Тоді

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x' - x'_1}{x' - x'_2}.$$

Останню рівність перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{x' - x'_1}{x' - x'_2} = \frac{\dfrac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2}}{\dfrac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}} \cdot \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Оскільки точки M_1, M_2, M_3, M'_1, M'_2, M'_3 фіксовані, координати їх відомі, то перший множник у правій частині є якесь число. Позначимо його через ν. Тоді

$$\frac{x' - x'_1}{x' - x'_2} = \nu \cdot \frac{x - x_1}{x - x_2}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно x', дістанемо

$$x' = \frac{(x'_1 - \nu x'_2)x + (\nu x_1 x'_2 - x_2 x'_1)}{(1-\nu)x + (\nu x_1 - x_2)}.$$

Позначимо $x'_1 - \nu x'_2 = a$, $\nu x_1 x'_2 - x_2 x'_1 = b$, $1 - \nu = c$, $\nu x_1 - x_2 = d$. Тоді з попередньої рівності

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}. \qquad (2.3)$$

Умова $ad - bc \neq 0$ необхідна, оскільки при $ad - bc = 0$ $ad = bc$, тому $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = q$

і $x' = \dfrac{ax+b}{cx+d} = q\dfrac{cx+d}{cx+d} = q$,

тобто координата x' не залежить від x.

Теорему доведено. ■

Наслідок. Якщо перейти до однорідних проективних координат, позначивши

$$x = \frac{x_1}{x_2}, \qquad x' = \frac{x'_1}{x'_2},$$

то формула (2.3) набуде вигляду

$$\left.\begin{aligned} \rho x'_1 &= ax_1 + bx_2, \\ \rho x'_2 &= cx_1 + dx_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.3')$$

Задача 2.17. Проективну відповідність на прямій у звичайних декартових координатах задано формулою

$$x' = \frac{x+4}{2x-2}.$$

Знайти координату точки A', відповідної точці $A(2)$.

Розв'язання. За умовою $x = 2$, тоді за даною формулою знайдемо координату x' точки A':

$$x' = \frac{2+4}{4-2} = 3.$$

Отже, точці $A(2)$ відповідає точка A' (3).

Задача 2.18. Проективну відповідність на прямій в однорідних координатах задано формулами:

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= 3x_1 - 4x_2, \\ \rho x_2' &= 2x_1 - 3x_2. \end{aligned}\right\}$$

Знайти координати точки B', відповідної точці $B(3{:}1)$.

Розв'язання. Підставивши у дані формули замість x_1 і x_2 координати точки $B(3{:}1)$, дістанемо

$$\left.\begin{aligned} \rho x_1' &= 3\cdot 3 - 4\cdot 1 = 5\rho, \\ \rho x_2' &= 2\cdot 3 - 3\cdot 1 = 3\rho. \end{aligned}\right\}$$

Отже, точці $B(3{:}1)$ відповідає точка $B'(5{:}3)$.

24.2. Інволюція в координатах

Інволюція точок прямої є окремим випадком проективної відповідності двох рядів точок із спільним носієм, тому залежність між координатами відповідних точок задовольняється формулою (2.3), але оскільки в інволюції відповідність між двома точками взаємна, то для інволюції формула (2.3) дещо спрощується.

Справді, якщо записати рівність (2.3) у вигляді рівняння

$$cx'x + dx' - ax - b = 0,$$

то для інволюційних точок ліва частина має бути симетричною відносно x і x', тобто повинна задовольнятись при заміні літери x літерою x', і навпаки. Саме така симетрія характеризує інволюцію, ця вимога виконується, коли $d = -a$.

Отже, аналітично інволюція визначається формулою

$$x' = \frac{ax+b}{cx-a}. \tag{2.4}$$

Для подвійних елементів інволюції $x = x'$, тоді з рівності (2.4) дістанемо

$$cx^2 - 2ax - b = 0. \tag{2.5}$$

Корені цього рівняння будуть координатами подвійних точок інволюції. Кількість коренів рівняння (2.5) залежить від значення дискримінанту $a^2 + bc$.

Якщо $a^2 + bc > 0$, то рівняння (2.5) має два дійсних кореня, тобто інволюція матиме дві подвійні точки – буде гіперболічна інволюція.

Якщо $a^2 + bc < 0$, то рівняння (2.5) дійсних розв'язків не має, тобто в такій інволюції дійсних подвійних точок не існує – маємо еліптичну інволюцію.

Якщо $a^2 + bc = 0$, то буде один розв'язок рівняння (2.5), тобто інволюція має одну подвійну точку – маємо параболічну інволюцію.

Задача 2.19. Інволюція на прямій задана формулою

$$x' = \frac{2x+1}{x-2}.$$

Відносячи дану точку $A(1)$ спочатку до першого ряду, а потім до другого, знайти їй інволюційно відповідні точки.

Розв'язання. Якщо точку $A(1)$ віднести до першого ряду, то $x = 1$. За даною формулою знайдемо $x' = -3$. Отже, точці A (1) першого ряду відповідає точка $A'(-3)$ другого ряду.

Віднесемо точку $A(1)$ до другого ряду, тобто $x' = 1$. Тоді за даною формулою знайдемо $x = -3$. Отже, точці $A(1)$ другого ряду відповідає точка $A'(-3)$ першого ряду. Точки A і A' взаємно відповідні.

Задача 2.20. Визначити тип інволюції точок на прямій, заданій формулою

$$x' = \frac{-0{,}5x+2}{x+0{,}5}.$$

Розв'язання. Запишемо дану формулу у вигляді рівняння зі змінною x при умові, що $x = x'$, дістанемо

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Отже, дана інволюція має дві подвійні точки, тобто маємо гіперболічну інволюцію.

Задача 2.21. Інволюція на прямій задана двома парами відповідних точок $A(-1)$ і $A'(2)$, $B(2)$ і $B'(3)$. Знайти формули цієї інволюції (координати декартові).

Розв'язання. Формули інволюції в декартових координатах мають вигляд $x' = \dfrac{ax+b}{cx-a}$. Треба знайти a, b, c. Для цього у формулу підставимо замість x і x' спочатку координати точок A і A', потім B і B'. Дістанемо систему двох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a-b-4c=0, \\ 4a+b-3c=0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи у відношеннях є

$$\frac{a}{b}=-\frac{7}{13}; \qquad \frac{c}{b}=-\frac{5}{13}.$$

Звідси $a = 7$, $b = -13$, $c = 5$ і формула $x' = \dfrac{7x-13}{5x-7}$. При $x = x'$ дістанемо рівняння $5x^2 - 14x + 13 = 0$. Дискримінант цього рівняння $D = 196 - 260 < 0$, тому рівняння не має дійсних коренів, а, отже, дана інволюція еліптична.

Проективні відображення і інволюцію пучків прямих у координатах можна дістати аналогічними міркуваннями, використовуючи інваріантність подвійного відношення чотирьох прямих пучка, вираженого через кутові коефіцієнти прямих.

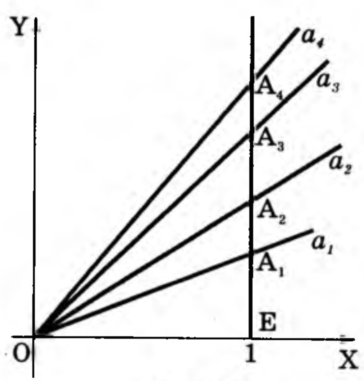


Рис. 2.75

Для цього центр O пучка беремо за початок координат (рис. 2.75) і запишемо рівняння прямих a_1, a_2, a_3, a_4 пучка як прямих, що проходять через початок координат і мають відповідні кутові коефіцієнти k_1, k_2, k_3, k_4, у вигляді

$$y = k_1x; \qquad (a_1)$$
$$y = k_2x; \qquad (a_2)$$
$$y = k_3x; \qquad (a_3)$$
$$y = k_4x; \qquad (a_4)$$

Пряма $x = 1$ ($OE = 1$) перетне прямі пучка O відповідно в точках $A_1(1, y_1)$, $A_2(1, y_2)$, $A_3(1, y_3)$, $A_4(1, y_4)$. Тоді $(a_1a_2, a_3a_4) = (A_1A_2, A_3A_4)$. Але

$$(A_1A_2, A_3A_4) = \frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2} = \frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} : \frac{k_4-k_1}{k_4-k_2}.$$

Отже,

$$(a_1a_2, a_3a_4) = \frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} : \frac{k_4-k_1}{k_4-k_2}. \qquad (2.6)$$

Подальші міркування такі ж, як і для одержання формул (2.3), (2.4) і (2.5).

Задача 2.22. Чотири прямі пучка задані рівняннями:

$y = -x$, $y = 3x$, $y = 2x$, $y = 4x$.

Знайти значення подвійного відношення цих прямих.

Розв'язання. Позначимо дані прямі a_1: $y = -x$, a_2: $y = 3x$, a_3: $y = 2x$, a_4: $y = 4x$. Тоді кутові коефіцієнти відповідно дорівнюють $k_1 = -1$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 4$. Подвійне відношення

$$(a_1a_2, a_3a_4) = \frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} : \frac{k_4-k_1}{k_4-k_2} = \frac{2+1}{2-3} : \frac{4+1}{4-3} = -\frac{3}{5}.$$

Отже, $(a_1a_2, a_3a_4) = -\dfrac{3}{5}$.

Задача 2.23. Задано три прямі $y = 2x$, $y = -x$, $y = 4x$ своїми рівняннями відносно декартової системи координат. Знайти рівняння четвертої прямої, гармонічно спряженої з прямою $y = 4x$.

Розв'язання. Позначимо дані прямі a_1: $y = 2x$, a_2: $y = -x$, a_3: $y = 4x$, а шукану пряму через a_4. За умовою задачі $(a_1a_2, a_3a_4) = -1$, або через кутові коефіцієнти прямих

$$\frac{k_3-k_1}{k_3-k_2} : \frac{k_4-k_1}{k_4-k_2} = \frac{4-2}{4+1} : \frac{k_4-2}{k_4+1} = -1,$$

де k_4 – кутовий коефіцієнт шуканої прямої a_4.

Звідси $k_4 = \dfrac{8}{7}$ і рівняння шуканої прямої $y = \dfrac{8}{7}x$.

Вправи

2.24. Дано точки $A(1)$, $B(4)$, $C(3)$, $D(-2)$ прямої. Знайти подвійне відношення (AB, CD).

2.25. Дано точки $A(3)$, $B(1)$, $C(-2)$. Знайти координату x точки D, якщо $(AB, CD) = -3$.

2.26. Дано точки $A(4)$, $B(2)$. Знайти пару точок C і D, які б гармонічно розділяли пару (A, B).

2.27. Знайти всі значення подвійного відношення чотирьох точок прямої $A(2)$, $B(3)$, $C(0)$, $D(5)$, заданих декартовими координатами.

2.28. Знайти всі значення подвійного відношення чотирьох точок розширеної прямої $A(3)$, $B(8)$, $C(-1)$, $D(5)$.

2.29. Проективна відповідність двох прямолінійних рядів точок s_1 і s_2 задана трьома парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Побудувати декілька пар відповідних точок.

2.30. Проективна відповідність двох прямолінійних рядів точок s_1 і s_2 задана трьома парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Побудувати точку першого ряду, відповідну невласній точці другого ряду, і навпаки.

2.31. Проективна відповідність двох пучків прямих S_1 і S_2 задана трьома парами відповідних прямих a_1 і a_2, b_1 і b_2, c_1 і c_2. Побудувати декілька пар відповідних прямих цих пучків.

2.32. Проективна відповідність двох прямолінійних рядів точок s_1 і s_2 задана трьома парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2. Побудувати точки, відповідні спільній точці обох рядів, відносячи її спочатку до одного, а потім до другого ряду.

2.33. Дано три пари відповідних прямих двох проективних пучків. Побудувати прямі, що відповідають спільній прямій обох пучків, відносячи її спочатку до першого, а потім до другого пучка.

2.34. У площині дано два перспективні пучки $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$. Побудувати в цих пучках взаємно перпендикулярні відповідні прямі.

2.35. Дано три прямі a, b, c одного пучка з центром S. Побудувати четверту пряму d цього пучка, гармонічно спряжену з прямою b.

2.36. На двох прямих, що перетинаються у власній точці, розташовані два проективні ряди точок s_1 і s_2. Нехай A_1 і A_2 – довільна пара відповідних точок цих рядів. Довести, що коли спроектувати з точки A_1 точки ряду s_2, а з точки A_2 – точки ряду s_1, то одержані пучки будуть перспективними.

2.37. Дано дві паралельні прямі a і b. За допомогою тільки однобічної лінійки поділити навпіл відрізок AB прямої a.

2.38. Дано дві паралельні прямі a і b і точку N, яка не належить цим прямим. За допомогою тільки однобічної лінійки через точку N провести пряму, паралельну даним прямим.

2.39. Чи залежить гармонічна спряженість чотирьох точок прямої від порядку розміщення компонент кожної пари?

2.40. Дано чотири точки A, B, C, D на прямій. Чи може бути таке розміщення цих точок, при якому хоча б два значення подвійних відношень із шести можливих були рівні між собою?

2.41. Дано точки A, B, C на прямій AB. Побудувати точку D, гармонічно спряжену з точкою C відносно точок A і B, при умові, що точка C не належить відрізку AB. (Побудову виконати трьома способами).

2.42. Дано три прямі a, b, c пучка з невласним центром. Побудувати в цьому пучку четверту пряму d, гармонічно спряжену з прямою c відносно пари a і b.

2.43. Побудувати два проективні пучки S_1 і S_2 із спільним носієм S, які мають дві подвійні прямі.

2.44. Еліптична інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A і A', B і B'. Побудувати за допомогою тільки однобічної лінійки точку C', відповідну даній точці C в цій інволюції.

2.45. Еліптична інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A і A', B і B'. Побудувати за допомогою пучка кіл центр інволюції і точку C', відповідну даній точці C.

2.46. Гіперболічна інволюція на прямій u задана двома парами відповідних точок A і A', B і B'. Побудувати за допомогою пучка кіл центр інволюції, подвійні точки інволюції і точку C', відповідну даній точці C у цій інволюції.

2.47. Еліптична інволюція в пучку прямих задана двома парами відповідних прямих a_1 і a_2, b_1 і b_2. Побудувати пряму c_2, відповідну даній прямій c_1 в цій інволюції.

2.48. Проективну відповідність точок на прямій у звичайних декартових координатах задано формулою

$$x' = \frac{2x+1}{x-3}.$$

Знайти координати точки $M(x)$, образом якої є точка $M'(-5)$.

2.49. Проективну відповідність на прямій в однорідних проективних координатах задано формулами

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + 4x_2, \\ \rho x_2' = 3x_1 - 2x_2. \end{cases}$$

Знайти координати точки A', відповідної точці $A(3{:}2)$.

2.50. Проективну відповідність на прямій в однорідних координатах задано формулами

$$\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + x_2, \\ \rho x_2' = 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Знайти формули оберненого перетворення.

2.51. Дано три точки прямої $A(0)$, $B(2)$, $C(3)$ декартовими координатами. Знайти четверту точку D, гармонічно спряжену з точкою A.

2.52. Дано три точки прямої $A(1)$, $B(4)$, $C(-2)$ декартовими координатами на прямій. Знайти четверту гармонічну точку D, спряжену з точкою B.

2.53. Чотири прямі пучка задані рівняннями $y = x$, $y = 2x$, $y = 0{,}5x$, $y = 4x$.

Знайти подвійне відношення даних чотирьох прямих.

2.54. Довести, що чотири прямі, з яких дві – осі прямокутної декартової системи координат, а дві інші – бісектриси координатних кутів, утворюють чотири гармонічно спряжені прямі.

2.55. Дано три прямі пучка $y = -2x$, $y = x$, $y = 3x$ своїми рівняннями відносно декартової системи координат. Знайти рівняння четвертої гармонічної прямої, спряженої з прямою $y = 3x$.

2.56. Визначити тип інволюції на прямій, заданій формулою

$$x' = \frac{x+4}{2x-1}.$$

2.57. Інволюція на прямій задана двома парами відповідних точок $A(1)$ і $A'(-2)$, $B(2)$ і $B'(-7)$. Знайти формулу цієї інволюції.

2.58. Інволюція на прямій задана формулою

$$x' = \frac{x+3}{2x-1}.$$

Відносячи точку $M(-2)$ спочатку до першого ряду, а потім до другого, знайти інволюційно відповідні їй точки.

Розділ **3**

Лінії другого порядку на проективній площині

§ 25. Означення і основні властивості ряду точок другого порядку

У цьому і наступних параграфах будуть введені поняття *ряду точок другого порядку* і *пучка прямих другого порядку*.

Тому, щоб уникнути непорозуміння, надалі «прямолінійний ряд точок» будемо називати «рядом точок *першого* порядку», аналогічно «пучок прямих» – «пучком прямих *першого* порядку».

Нехай проективна відповідність між прямими двох пучків першого порядку з центрами в точках S_1 і S_2 задана трьома парами відповідних прямих (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2):

$$S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots) \barwedge S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots).$$

Позначимо перетин відповідних прямих цих пучків точками $A = a_1 \times a_2$, $B = b_1 \times b_2$, $C = c_1 \times c_2$ (рис. 2.76).

Означення 3.1. Множина точок A, B, C, ... перетину відповідних прямих двох проективних пучків першого порядку називається *рядом точок другого порядку*. Пучки прямих $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ при цьому називаються *твірними пучками* цього ряду другого порядку.

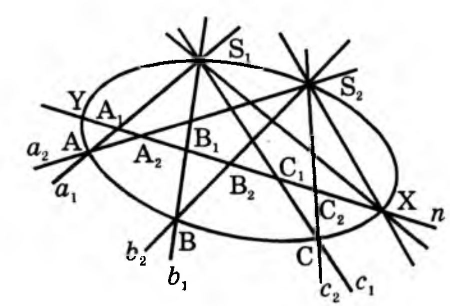


Рис. 2.76

Розглянемо деякі властивості ряду другого порядку.

1. Ряд другого порядку, утворений двома перспективними пучками першого порядку, розпадається на два ряди першого порядку – вісь перспективності твірних пучків і спільної прямої цих пучків.

Доведення. Нехай пучки $S_1(a_1, b_1, c_1, \dots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ перспективні, пряма s_1 – їх вісь перспективності, s_2 – спільна пряма пучків, тобто $s_2 = S_1S_2$ (рис. 2.77). Відповідні прямі пучків S_1 і S_2 перетинаються в точках A, B, C, які лежать на осі перспективності і, за означенням 3.1, належать точкам ряду другого порядку.

Спільна пряма $s_2 = S_1S_2$ перетинає пряму s_1 у точці X. Прямій $S_1X = s_2$ першого пучка відповідає пряма $S_2X = s_2$ другого пучка, тобто спільна пряма s_2 пучків S_1 і S_2 сама собі відповідає, тому кожна точка прямої s_2 належить як прямій першого пучка, так і прямій другого пучка. Отже, кожна точка спільної прямої $s_2 = S_1S_2$ теж належить до ряду другого порядку. Властивість 1 доведена.

2. Центри S_1 і S_2 твірних проективних пучків першого порядку належать до точок ряду другого порядку.

Доведення. Нехай ряд другого порядку $(A, B, C, \dots)$ утворений двома проективними пучками

$$S_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \barwedge S_2(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

Спільну пряму $S_1S_2 = s_1$ віднесемо до першого пучка S_1; тоді їй у другому пучку буде відповідати пряма t_2 (рис. 2.78). Аналогічно, вважаючи пряму $S_1S_2 = s_1$ прямою другого пучка S_2, знайдемо їй відповідну пряму t_1 у першому пучку S_1. Тоді точки $S_1 = s_2 \times t_1$ і $S_2 = s_1 \times t_2$ є точками перетину відповідних прямих пучків S_1 і S_2,

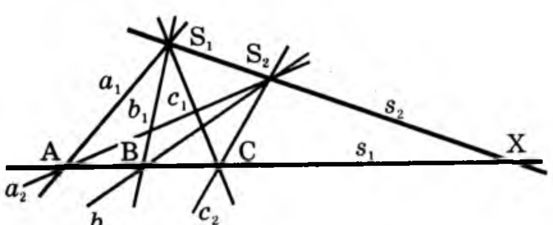


Рис. 2.77

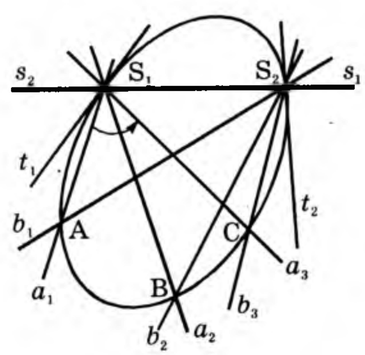


Рис. 2.78

тому вони належать до точок ряду другого порядку. Властивість 2 доведена.

3. Довільна пряма не може мати з рядом другого порядку більше двох спільних точок.

Доведення. Нехай пряма n перетинає прямі пучків S_1 і S_2 в точках A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Оскільки пучки S_1 і S_2 проективні, то утворені ними на прямій n ряди точок $(A_1, B_1, C_1, \dots)$ і $(A_2, B_2, C_2, \dots)$ також проективні. Але два проективні ряди точок із спільним носієм, як було доведено раніше, не можуть мати більше двох подвійних точок, якщо ряди не тотожні (рис. 2.76).

Подвійними точками на носії n є точки ряду другого порядку, наприклад точки X і Y. Властивість 3 доведена.

4. Прямі t_1 і t_2 пучків S_1 і S_2 відповідно, які відповідають спільній прямій S_1S_2, віднесеній до пучків S_2 або S_1, називаються *дотичними* до ряду другого порядку в точках S_1 і S_2.

Доведення. Покажемо, що означення дотичних у центрах твірних проективних пучків S_1 і S_2 має такий самий зміст, що і звичайна дотична до кривої лінії, – граничне положення січної.

Для цього уявимо довільну пряму a_1 пучка S_1 рухомою, тобто такою, що обертається навколо точки S_1 у певному напрямі, наприклад, проти руху стрілки годинника. Якщо пряма a_1, описуючи пучок прямих S_1, зближається з положенням прямої $S_1S_2 = s_1$, то точка A описує ряд точок другого порядку, наближаючись до точки S_2. Одночасно пряма b_1 теж рухається в цьому напрямі, і коли пряма a_1 збігається з прямою $s_1 \in S_1$, то пряма b_1 збігається з прямою $t_2 \in S_2$, а точка A збігається з точкою S_2. Отже, у цьому випадку пряма t_2 є граничним положенням прямої b_1, коли точка A збігається з точкою S_2, тобто пряма t_2 є дотичною до ряду другого порядку в точці S_2. Аналогічно можемо дійти висновку, що пряма t_1 займає граничне положення прямої a_1 (рис. 2.78).

5. Точки ряду другого порядку проектуються з будь-яких двох точок цього ряду двома проективними пучками (*теорема Штейнера*).

Доведення. Нехай ряд другого порядку $(A, B, C, D, \dots)$ утворено двома проективними пучками з центрами в точках S_1 і S_2 (рис. 2.79). Прямі S_1A і S_2A, S_1B і S_2B, S_1C і S_2C є парами відповідних прямих твірних пучків.

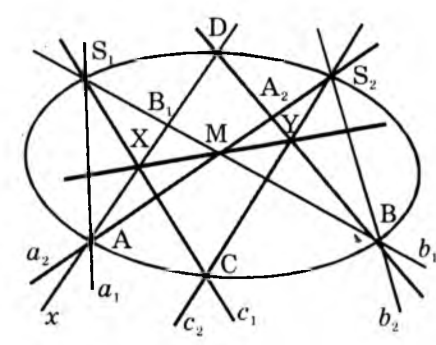


Рис. 2.79

Положення точок A, B зафіксуємо, а точка C – рухома, тобто якщо точка C описує даний ряд другого порядку, то відповідні прямі S_1C і S_2C описують пучки S_1 і S_2. Нехай $X = S_1C \times AD$, $Y = S_2C \times BD$. При переміщенні точки C промінь S_1C опише на прямій AD перспективний ряд першого порядку з носієм $x = AD$, а промінь S_2C опише на прямій BD перспективний ряд першого порядку з носієм $y = BD$.

Оскільки пучок $S_1(S_1C) \overset{=}{\wedge}$ ряду (x), а пучок $S_2(S_2C) \overset{=}{\wedge}$ ряду (y), то ряд $(x) \overline{\wedge}$ ряду (y).

Спільним елементом рядів x і y є точка $D = AD \times BD$, тобто точка D сама собі відповідає у цій проективній відповідності, тому ряди x і y не лише проективні, а й перспективні. Центром перспективності буде точка M перетину прямих AS_2 і S_1B, оскільки точці $A = S_1A \times S_2A$ першого ряду відповідає точка $A_2 = S_2A \times BD$, точці $B_1 = S_1B \times AD$ першого ряду відповідає точка $B = S_2B \times BD$ другого ряду.

Точки X і Y як відповідні точки двох проективних рядів визначають пряму, що проходить через точку M – центр перспективності, тобто точки X, Y, M лежать на одній прямій, положення якої визначається точками S_1, S_2, A, B і не залежить від вибору точок C і D.

Тепер розглянемо два пучки прямих з центрами в точках A і B, відповідними прямими яких будемо вважати прямі, що проектують точки другого порядку: AS_1 і BS_1, AD і BD, AS_2 і BS_2, AC і BC. Треба довести, що ці пучки проективні. Зафіксуємо точки S_1, S_2, C ряду другого порядку, точка D – рухома. Коли точка D описує ряд другого порядку, то відповідні промені AD і BD утворюють в перетині з прямими S_1C і S_2C два перспективні пучкам ряди точок першого порядку. Позначимо їх, як і раніше, $x = S_1C$ і $y = S_2C$, тобто маємо

ряд $x \overset{=}{\wedge}$ пучку $A(AD)$,

ряд $y \overset{=}{\wedge}$ пучку $B(BD)$.

Враховуючи, що відповідні точки X і Y цих рядів завжди лежать на одній прямій з точкою M, положення якої не залежить від положення точок C і D, то ряди x і y перспективні, а пучки з центрами в точках A і B, які їх проектують, – проективні. Оскільки точки A і B ряду другого порядку вибрані довільно, то можна стверджувати, що *будь-які дві точки ряду другого порядку можна взяти за центри твірних пучків цього ряду.*

Ця властивість рядів другого порядку відіграє важливу роль у подальшій побудові проективних тверджень в образах першого

ступеня. Доведення цієї властивості належить Я. Штейнеру, тому її називають *теоремою Штейнера або основною теоремою рядів другого порядку.*

6. У кожній точці ряду другого порядку можна побудувати дотичну до цього ряду, і до того ж тільки одну.

Доведення. Правильність цієї властивості випливає з попередніх властивостей. Справді, у властивості 4 з'ясовано, що в центрах S_1 і S_2 твірних пучків ряду другого порядку можна побудувати дотичні як прямі, що відповідають спільній прямій S_1S_2 цих пучків, віднесеній то до пучка S_1, то до пучка S_2. За властивістю 5 будь-яка точка ряду другого порядку може бути центром твірного пучка, тому в кожній точці ряду другого порядку можна побудувати дотичну і тільки одну до цього ряду.

7. Ряд точок другого порядку повністю визначається будь-якими його п'ятьма точками, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай дано п'ять точок ряду другого порядку, жодні три з них не лежать на одній прямій: A, B, C, D, E (рис. 2.80). Будь-які дві з них, наприклад точки A і B, візьмемо за центри пучків: $A(AC, AD, AE, \ldots)$ і $B(BC, BD, BE, \ldots)$. Три пари відповідних прямих AC і BC, AD і BD, AE і BE визначають проективну відповідність цих пучків, які утворюють ряд точок другого порядку.

Усі названі властивості ряду точок другого порядку притаманні лініям другого порядку (еліпсу, колу, гіперболі, параболі). Це дає підставу ототожнити ряд другого порядку з лінією другого порядку.

Означення 3.2. Ряд точок другого порядку на проективній площині називають *лінією другого порядку.*

Криву (ряд точок) другого порядку позначають символом k^2:

$k^2\,(A, B, C, \ldots)$,

де A, B, C, ... – точки кривої (ряду) другого порядку.

Далі будемо вживати термін «лінія другого порядку» нарівні з терміном «ряд точок другого порядку».

Приклад 1. Лінія другого порядку задана п'ятьма її точками. Побудувати шосту точку цієї лінії.

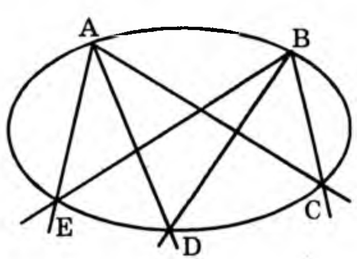


Рис. 2.80

Розв'язання. П'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, визначають лінію другого порядку. Нехай дано п'ять точок A, B, C, D, E (їх можна взяти довільно за дотримання зазначеної умови). Виберемо дві з них, наприклад A і B, за центри твірних пучків ряду другого порядку. Встановимо проективне відображення пучків, при якому відповідні прямі перетинаються в точках C, D, E заданої лінії другого порядку k^2:

$$A(AC, AD, AE, ...) \barwedge B(BC, BD, BE, ...).$$

Проведемо в пучку A довільну пряму m і побудуємо її відповідну m' в пучку B (задача 2.4 § 16). Точка M перетину прямих m і m' належить лінії k^2, визначеній точками A, B, C, D, E.

§ 26. Теорема Паскаля

Як уже було з'ясовано (властивість 7), лінія другого порядку повністю визначається заданням п'яти її точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Будь-яка шоста точка цієї лінії має задовольняти певні нові умови, які випливають із властивості 5 попереднього параграфа. Справді, повернемось до рис. 2.79, де взято шість точок лінії другого порядку – S_1, S_2, A, B, C, D. Якщо ці точки розмістити в певному порядку і сполучити послідовно відрізками, то одержимо фігуру, яку називають *шестивершинником*.

Означення 3.3. Фігура, яка складається із шести точок ряду другого порядку і шести відрізків, які послідовно з'єднують ці точки, називається *шестивершинником,* вписаним у лінію другого порядку.

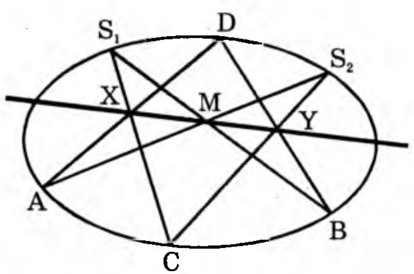


Рис. 2.81

Розглянемо шестивершинник S_1CS_2ADB (рис. 2.81). Точки S_1, C, S_2, A, D, B – його *вершини*, відрізки S_1C, CS_2, S_2A, AD, DB, BS_1 – *сторони*. Сторони шестивершинника, які в заданій послідовності відокремлені двома іншими сторонами при їх обході в одному з двох можливих напрямів, називаються *протилежними*. Такими парами є S_1C і AD, CS_2 і DB, S_2A і BS_1, вони попарно перетинаються в точках X, Y, M. При доведенні властивості 5 (основної теореми рядів другого порядку) було встановлено, що точки X, Y, M

лежать на одній прямій. Цю властивість вписаного в лінію другого порядку шестивершинника відкрив французький математик Б. Паскаль (1623–1662), тому вона має назву теореми Паскаля.

Теорема 3.1 (Паскаля). У кожному шестивершиннику, вершини якого належать лінії другого порядку, три точки перетину протилежних сторін лежать на одній прямій.

Цю теорему формулюють ще так.

Теорема 3.1′. У кожному шестикутнику, вписаному в лінію другого порядку, точки перетину пар протилежних сторін лежать на одній прямій.

Пряму, на якій лежать три точки перетину пар протилежних сторін шестивершинника, називають *прямою Паскаля*, позначають буквою p.

Положення прямої Паскаля визначається встановленим порядком вершин шестивершинника. Якщо цей порядок змінити, то дістанемо новий шестивершинник з тими самими вершинами. Кількість різних перестановок із шести елементів без повторення дорівнює

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Але серед них кожний шестивершинник порахований шість разів, оскільки від кругової перестановки вершин дістанемо один і той же шестивершинник, наприклад, $S_1CS_2ADB = CS_2ADBS_1 = \ldots$ і т. д. Крім того, кожний шестивершинник порахований двічі (у даному порядку і зворотному: $S_1CS_2ADB = BDAS_2CS_1$).

Отже, всього різних шестивершинників з одними й тими ж вершинами буде $720 : (6 \cdot 2) = 60$. Кожному з них відповідає пряма Паскаля, тобто шість різних точок лінії другого порядку визначають 60 прямих Паскаля.

Теоремою Паскаля в проективні формі сформульована *умова належності* шостої точки лінії другого порядку, визначеної п'ятьма іншими точками цієї кривої. Цю умову зручно використати для побудови нових точок лінії другого порядку за даними п'ятьма точками. Розглянемо цю побудову.

Задача 3.1. Дано п'ять точок лінії другого порядку. Побудувати шосту точку цієї лінії.

Розв'язання. Нехай дано п'ять точок лінії другого порядку S_1, C, S_2, A, D, які будемо вважати вершинами шестивершинника, у якому

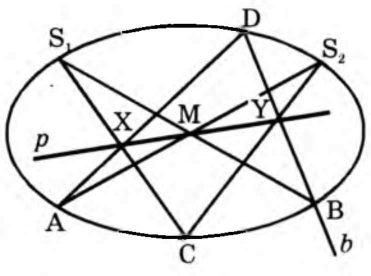


Рис. 2.82

невідома вершина B. Дані п'ять вершин визначають пару протилежних сторін шестивершинника, а отже, і одну точку прямої Паскаля:

$$X = S_1C \times AD.$$

Шосту вершину B будемо шукати на довільно вибраній прямій b, проведеній через вершину D, яка в перетині з прямою CS_2 визначить ще одну точку Y прямої Паскаля, а отже, і саму пряму Паскаля XY (рис. 2.82). Пряма Паскаля перетинає пряму AS_2 в точці M перетину третьої пари протилежних сторін шестивершинника. Тому точка B – це точка перетину прямої p Паскаля з прямою S_1M.

Пряму b вибрали довільно. Змінюючи положення прямої b, що проходить через точку D, будемо знаходити нові точки лінії другого порядку.

Теорема 3.2 (обернена теоремі Паскаля). Якщо три точки перетину пар протилежних сторін шестивершинника належать одній прямій, то його шість вершин належать одній і тій самій лінії другого порядку.

Доведення. У справедливості оберненої теореми Паскаля можна переконатись з огляду на такі міркування. Нехай протилежні сторони шестивершинника S_1CS_2ADB перетинаються в точках X, Y, M, що лежать на одній прямій (рис. 2.82). П'ять вершин A, D, B, S_1, C визначають однозначно ряд другого порядку k^2.

Якщо припустити, що сторона CS_2 даного шестивершинника перетинає лінію k^2 в точці S'_2, то дістанемо новий шестивершинник $ADBS_1CS'_2$, вершини якого належать лінії другого порядку k^2. За теоремою Паскаля в застосуванні до одержаного шестивершинника пряма S'_2A повинна проходити через точку M, а тому точка S'_2 має збігатися з точкою S_2.

Теорему доведено.■

§ 27. Окремі випадки теореми Паскаля

Теорема Паскаля залишається правильною і в тих випадках, коли шестивершинник, вписаний в лінію другого порядку, вироджується в п'яти-, чотири-, тривершинник при суміщенні двох і більше вершин

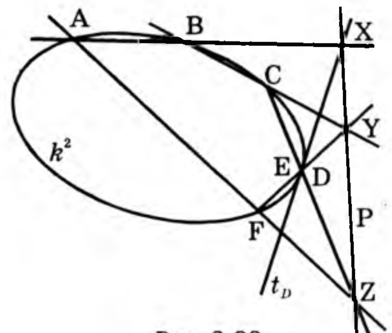


Рис. 2.83

або коли лінія другого порядку розпадається на дві лінії першого порядку. Якщо дві вершин зближаються і в граничному випадку збігаються, то сторона, якій належали ці дві точки, стає дотичною до ряду другого порядку в цій точці.

1. Припустимо, що в шестивершиннику $ABCDEF$ вершини D і E збіглися, тоді сторона DE перетворилась у дотичну t_D у точці D. При цьому дістали п'ятивершинник $ABCDF$, вписаний у лінію другого порядку k^2 (рис. 2.83). На прямій p Паскаля лежать точки

$X = AB \times t_D$,

$Y = BC \times FD$,

$Z = CD \times AF$.

Отже, має місце теорема Паскаля для п'ятивершинника.

Теорема 3.3 (для п'ятивершинника). У кожному п'ятивершиннику, вписаному в лінію другого порядку, точки перетину двох пар несуміжних сторін і точка перетину п'ятої сторони з дотичною в протилежній вершині належать одній прямій.

2. Нехай шестивершинник $ABCDEF$ вироджується у чотривершинник $ABCD$. Оскільки у чотиривершиннику є дві пари протилежних вершин, то можна вважати, що у кожній парі збіглися по дві вершини, а відповідні сторони стали дотичними. Обидві пари протилежних вершин рівноправні, тому дотичні у протилежних вершинах повинні перетинатись на прямій Паскаля.

Отже, у цьому випадку на прямій Паскаля матимемо не три, а чотири точки перетину двох пар протилежних сторін і двох пар дотичних у протилежних вершинах. Звідси випливає теорема Паскаля для чотиривершинника.

Теорема 3.4 (для чотиривершинника). У кожному чотиривершиннику, вписаному в лінію другого порядку k^2, дві точки перетину двох пар протилежних сторін і дві точки перетину двох пар дотичних у протилежних вершинах лежать на одній прямій.

На рис. 2.84 у чотиривершиннику $ABCD$

$X = AB \times DC$, $Y = BC \times DA$,

$Z = t_A \times t_C$, $U = t_B \times t_D$.

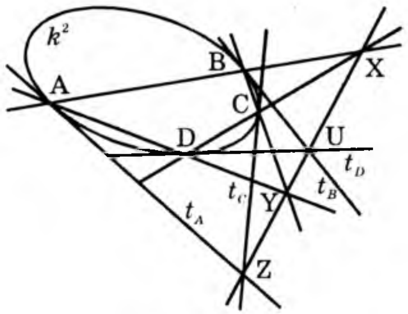


Рис. 2.84

3. Тривершинник дістанемо у випадку, коли кожна вершина подвійна, тобто маємо три пари вершин і три дотичні в кожній вершині. Звідси одержуємо формулювання теореми Паскаля для тривершинника.

Теорема 3.5 (для тривершинника). У кожному тривершиннику, вписаному в лінію другого порядку, три точки перетину його сторін з дотичними в протилежних вершинах належать одній прямій.

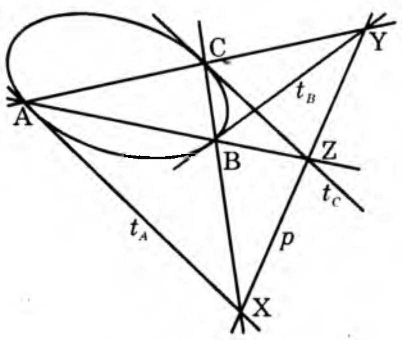


Рис. 2.85

На рис. 2.85

$X = t_A \times BC$,

$Y = t_B \times AC$,

$Z = t_C \times AB$.

XYZ – пряма Паскаля.

Як основну теорему Паскаля для загального випадку, так і її окремі випадки можна використати для побудови нових точок або дотичних до лінії другого порядку, заданої елементами, що її визначають.

Наприклад, у випадку п'ятивершинника пряма Паскаля визначається двома точками Y і Z перетину двох пар несуміжних сторін BC і DF, CD і AF, а п'ята сторона AB в перетині з прямою YZ дає точку X. Тоді пряма DX – дотична до даної кривої в точці D (рис. 2.83).

Аналогічно у випадку тривершинника ABC пряма Паскаля визначається двома точками $X = AC \times t_B$, $Y = BC \times t_A$. Третя пряма (сторона) AB перетинає пряму XY у точці Z. Тоді пряма $ZC = t_C$ – дотична в точці C (рис. 2.85).

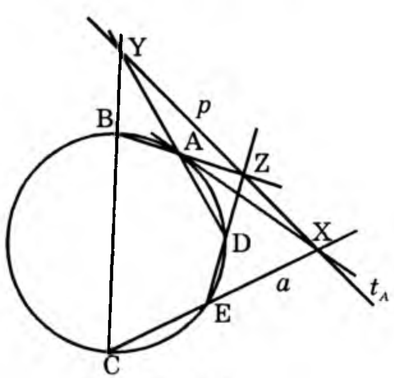


Рис. 2.86

Задача 3.2. Дано чотири точки лінії другого порядку і дотична в одній з них. Побудувати п'яту точку заданої кривої.

Розв'язання. Дано точки A, B, C, D лінії другого порядку і дотичну t_A в точці A (рис. 2.86).

Через точку C проведемо довільну пряму a і на ній будемо знаходити точку даної кривої.

Застосуємо теорему Паскаля для п'ятивершинника, вписаного в лінію другого порядку. Пряму Паскаля визначають точки $X = a \times t_A$ і $Y = CB \times DA$. Знайдемо на прямій XY точку $Z = XY \times BA$. Тоді пряма ZD перетне пряму a в точці E, яка належить даній лінії другого порядку.

Правильність побудови випливає з теореми Паскаля для п'ятивершинника $ABCDE$.

§ 28. Конфігурація Паскаля – Паппа

Теорема Паскаля має місце і тоді, коли ряд другого порядку розпадається на два ряди першого порядку. При цьому шість вершин шестивершинника розміщуються по три на кожному носії рядів першого порядку. Нехай вершини A, E, C лежать на носії s_1, а вершини B, D, F – на носії s_2 (рис. 2.87). Тоді у шестивершинника $ABCDEF$ пари протилежних сторін перетинаються в точках $X = AB \times DE$, $Y = BC \times EF$, $Z = CD \times FA$, які належать одній прямій – прямій Паскаля.

Цей випадок був відомий ще стародавнім грецьким вченим під назвою теореми Паппа (III ст. н.е.).

Утворена в цьому випадку фігура складається з дев'яти прямих – AB, BC, CD, DE, EF, FA, s_1, s_2, p і дев'яти точок – A, B, C, D, E, F, X, Y, Z, причому на кожній прямій лежать три точки і через кожну точку проходять три прямі. Отже, маємо конфігурацію $\left(\frac{9}{3}\right)$, яка має назву *конфігурації Паскаля – Паппа.*

У цій конфігурації всі дев'ять прямих рівноправні, тобто будь-яку з них можна взяти за пряму Паскаля.

Задача 3.3. У конфігурації Паскаля – Паппа вибрати довільну з дев'яти прямих за пряму Паскаля і знайти всі інші елементи конфігурації.

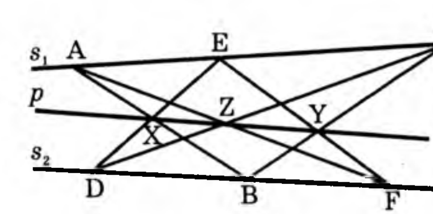


Рис. 2.87

Розв'язання. Нехай, наприклад, прямою Паскаля вибрана пряма DC (рис. 2.87). Тоді точками перетину пар протилежних сторін є точки D, C, Z. Інші шість точок – вершини шестивершинника. Щоб встановити порядок його вершин, розмістимо пари протилежних

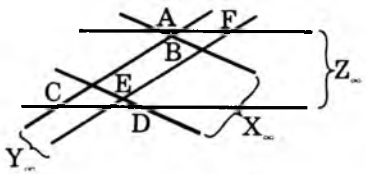


Рис. 2.88

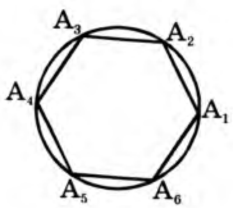


Рис. 2.89

вершин циклічно: через точку D проходять прямі XE і BF, через точку C – прямі AE і BY, через точку Z – прямі AF і XY, тобто

$$D = BF \times EX,$$

$$Z = FA \times XY,$$

$$C = AE \times YB.$$

Отже, якщо на прямій Паскаля лежать точки D, Z і C, то вершини шестивершинника повинні розміститись у такому порядку – $BFAEXY$.

Задача 3.4. Зобразити конфігурацію Паскаля – Паппа для випадку, коли прямою Паскаля є невласна пряма.

Розв'язання. Пряма Паскаля буде невласною прямою тоді і тільки тоді, коли в шестивершиннику, вписаному в лінію другого порядку, пари протилежних сторін паралельні. У загальному випадку маємо рис. 2.88.

У шестивершиннику $ABCDEF$ $AB \parallel DE \Rightarrow AB \times DE = X_\infty$; $BC \parallel EF \Rightarrow \Rightarrow BC \times EF = Y_\infty$; $CD \parallel AF \Rightarrow CD \times AF = Z_\infty$. Отже, пряма Паскаля, якій належать точки X_∞, Y_∞, Z_∞ – невласна.

За приклад шестивершинника, у якому прямою Паскаля є невласна пряма, можна взяти правильний шестикутник, вписаний у коло (рис. 2.89), і чотирикутник, вписаний у коло, в якому діагоналями є взаємно перпендикулярні діаметри кола.

§ 29. Означення і основні властивості пучка другого порядку. Теорема Бріаншона

Поняття пучка другого порядку можна ввести за малим принципом двоїстості з ряду точок другого порядку.

Означення 3.4. *Пучком (прямих) другого порядку* називають множину прямих, які проходять через пари відповідних точок двох проективних рядів точок першого порядку.

За означенням пучок другого порядку визначається заданням двох проективних рядів першого порядку. Нехай маємо

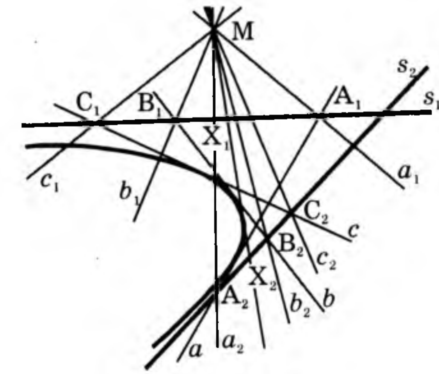


Рис. 2.90

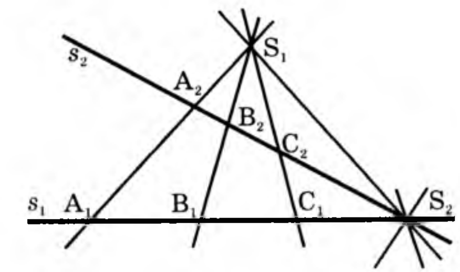


Рис. 2.91

$$s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots) \barwedge s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots).$$

Прямі $A_1A_2 = a$, $B_1B_2 = b$, $C_1C_2 = c$ і т. д. утворюють пучок прямих другого порядку (рис. 2.90), який позначатимемо S^2 $(a, b, c, \ldots)$. Проективні ряди s_1 і s_2 першого порядку називають твірними рядами пучка S^2.

Зрозуміло, що для побудови інших прямих пучка другого порядку треба спочатку побудувати нові пари відповідних точок даних проективних рядів першого порядку.

Властивості пучка прямих другого порядку можна дістати з властивостей ряду точок другого порядку за малим принципом двоїстості:

1. Через довільну точку площини може проходити не більше двох прямих пучка другого порядку (рис. 2.90).
2. Якщо проективні ряди першого порядку s_1 і s_2 перспективні, то пучок другого порядку S^2 розпадається на два пучки першого порядку з центрами S_1 – центром перспективності і S_2 – спільній точці твірних рядів s_1 і s_2 (рис. 2.91).
3. Носії s_1 і s_2 твірних проективних рядів першого порядку належать до прямих пучка другого порядку S^2.
4. Образ, двоїстий дотичній до ряду другого порядку за малим принципом двоїстості, називається *точкою дотику.*

Поняття точки дотику можна ввести аналогічно введенню поняття дотичної до ряду другого порядку. Нехай s_1 і s_2 – два твірні проективні ряди першого порядку, A_1 і A_2 – пара відповідних точок цих

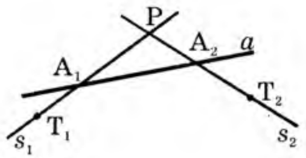


Рис. 2.92

рядів, P – точка перетину носіїв s_1 і s_2, $a = A_1A_2$ – пряма пучка другого порядку (рис. 2.92).

Точці P, віднесеній до ряду s_1, відповідає точка T_2 ряду s_2, а точці P, віднесеній до ряду s_2, відповідає точка T_1 ряду s_1. Тоді точки T_1 і T_2 є точками *дотику* прямих s_1 і s_2 відповідно.

5. Будь-які дві прямі пучка другого порядку можна взяти носіями двох проективних рядів першого порядку, які утворюють цей пучок другого порядку.
6. Кожна пряма пучка другого порядку має одну і тільки одну точку дотику.

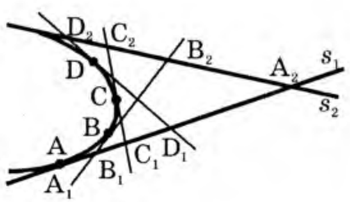


Рис. 2.93

Означення 3.5. Множина точок дотику прямих пучка другого порядку називається *лінією другого класу*.

На основі цього означення лінія другого класу є *обгорткою* пучка прямих другого порядку, тобто кожна пряма пучка другого порядку є *дотичною* до кривої другого класу в одній з її точок (рис. 2.93).

У курсі аналітичної геометрії доводиться, що лінія другого класу є також і лінією другого порядку, хоча для ліній порядку більше двох порядок і клас не збігаються.

7. Пучок прямих другого порядку визначається заданням будь-яких його п'яти прямих, жодні три з яких не належать одній точці.

Справедливість названих властивостей пучка другого порядку випливає за малим принципом двоїстості з аналогічних властивостей ряду точок другого порядку, хоча їх можна довести.

Для прикладу наведемо доведення властивості 1.

Нехай s_1 і s_2 – два проективні ряди першого порядку, M – довільна точка площини (рис. 2.90). Спроектувавши з точки M точки рядів s_1 і s_2, дістанемо два проективні пучки першого порядку зі спільним носієм M:

$$M(a_1, b_1, c_1, \ldots) \barwedge M(a_2, b_2, c_2, \ldots).$$

Припустимо, що пряма x є подвійною прямою цих пучків, тоді вона перетинає прямі s_1 і s_2 у парі відповідних точок X_1 і X_2, тому пряма $x = X_1X_2$ належить пучку другого порядку. І навпаки, якщо пряма x проходить через точку M і належить пучку другого порядку,

то вона визначає пару відповідних прямих MX_1 і MX_2 у проективних пучках першого порядку зі спільним носієм M. Але прямі MX_1 і MX_2 збігаються, тому пряма x є подвійною прямою пучків першого порядку з центром M. Отже, кожна пряма пучка другого порядку, яка проходить через точку M, є подвійною прямою проективних пучків першого порядку. Оскільки два проективні пучки першого порядку зі спільним носієм не можуть мати більше двох подвійних прямих, то через точку M не може проходити більше двох прямих, які належать пучку другого порядку.

Пучок прямих другого порядку, як зазначалося, однозначно визначається заданням своїх будь-яких п'ятьох прямих, жодні три з яких не належать одній точці. Належність шостої прямої цьому пучку другого порядку має задовольняти певні умови. Ці умови і становлять зміст теореми, яку довів на початку XIX ст. французький математик *Ш. Бріаншон* (1785–1864) і яка названа його ім'ям.

Фігурою, двоїстою за малим принципом двоїстості шестивершиннику, є шестисторонник.

Означення 3.6. ***Шестисторонником*** називається фігура, утворена шістьма прямими пучка другого порядку, жодні три з яких не належать одній точці.

На рис. 2.94 шестисторонник утворений прямими a, b, c, d, e, f пучка другого порядку, які називаються його ***сторонами***. Точки перетину сусідніх сторін називаються його ***вершинами***, це точки $A = a \times f$, $B = b \times a$, $C = c \times b$, $D = d \times c$, $E = e \times d$, $F = f \times e$. Пари вершин через дві називаються *протилежними* вершинами – A і D, B і E, C і F.

Оскільки шестисторонник – фігура, двоїста за малим принципом шестивершиннику, то відносно нього повинна бути справедливою теорема, двоїста теоремі Паскаля для шестивершинника. Це і буде теорема Бріаншона.

Теорема 3.6 (Бріаншона). У кожному шестисторонннику, сторони якого належать прямим пучка другого порядку, три прямі, що сполучають його протилежні вершини, належать одній точці. Ця точка називається *точкою Бріаншона*.

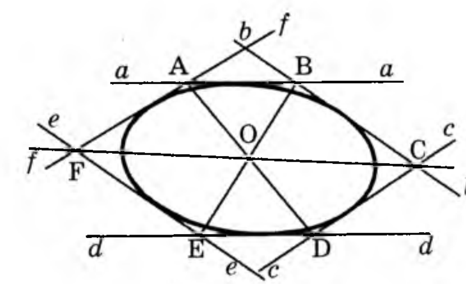


Рис. 2.94

На рис. 2.94 $AD \times BE \times CF = O$, O – точка Бріаншона.

Враховуючи поняття лінії другого класу, теорему Бріаншона можна сформулювати ще так.

Теорема 3.6′. У кожному шестисторонніку, описаному навколо лінії другого класу, три прямі, що сполучають його протилежні вершини, перетинаються в одній точці.

Справедливою буде і теорема, обернена теоремі Бріаншона, оскільки вона двоїста теоремі, оберненій теоремі Паскаля.

Теорема 3.7 (обернена теоремі Бріаншона). Якщо три прямі, що належать протилежним вершинам шестисторонника, належать одній точці, то його шість сторін належать одному й тому самому пучку другого порядку (кривій другого класу).

Теорема Бріаншона залишається справедливою і в тих випадках, коли точки дотику двох сусідніх сторін шестисторонника збігаються, тобто коли шестисторонник перетворюється у п'яти-, чотири-, тристоронник. Теорема Бріаншона для цих випадків має такий зміст.

Теорема 3.8 (для п'ятисторонника). У кожному п'ятисторонніку, описаному навколо кривої другого класу (другого порядку), прямі, що сполучають дві пари несуміжних вершин, і пряма, що сполучає п'яту вершину з точкою дотику протилежної сторони, перетинаються в одній точці.

Теорема 3.9 (для чотиристоронника). У кожному чотиристоронніку, описаному навколо кривої другого класу (другого порядку), дві прямі, що сполучають дві пари протилежних вершин, і дві прямі, що сполучають точки дотику протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

Теорема 3.10 (для тристоронника). У кожному тристоронніку, описаному навколо кривої другого класу (другого порядку), три прямі, що сполучають його вершини з точками дотику протилежних їм сторін, проходять через одну точку.

Теорему Бріаншона можна застосувати і в тому випадку, коли пучок другого порядку розпадається на два пучки першого порядку. У випадку розпаду ряду другого порядку на два ряди першого порядку одержуємо конфігурацію Паскаля – Паппа $\left(\dfrac{9}{3}\right)$. Але ця конфігурація сама собі двоїста за малим принципом двоїстості, тому у випадку розпаду пучка другого порядку на пучки першого порядку дістанемо ту ж саму конфігурацію $\left(\dfrac{9}{3}\right)$ відносно точок і прямих.

Як за теоремою Паскаля шість точок ряду другого порядку утворюють 60 прямих Паскаля, так і шість прямих пучка другого порядку дають 60 точок Бріаншона.

За допомогою теореми Бріаншона можна розв'язати задачі на побудову дотичних, точок дотику ліній другого порядку, заданих елементами, що їх визначають.

Задача 3.5. Пучок другого порядку заданий п'ятьма його прямими. Побудувати нову пряму цього пучка.

Розв'язання. Нехай дані п'ять прямих a, b, c, d, f, які визначають пучок другого порядку. Треба провести нову пряму пучка, наприклад таку, яка проходить через точку E прямої d. Відомо, що через одну точку площини можна провести не більше двох прямих, належних даному пучку. Однією з таких прямих є пряма d. Для побудови другої прямої використаємо теорему Бріаншона: побудуємо точку O Бріаншона для шестисторонника, утвореного даними прямими a, b, c, d, f і шуканою прямою e. Позначивши $A = f \times a$, $B = a \times b$, $C = b \times c$, $D = c \times d$ і враховуючи точку E на прямій d, знайдемо $O = AD \times BE$.

Тоді пряма CO перетне пряму f у шостій вершині F, протилежній точці C шестисторонника. Пряма $FE = e$ – шукана. Змінюючи положення точки E на прямій d, знайдемо різні прямі заданого пучка (рис. 2.94).

Задача 3.6. Дано чотири дотичні до лінії другого порядку і точка дотику на одній з них. Побудувати точку дотику на другій з даних дотичних.

Розв'язання. Приймемо дані дотичні a, b, c, d за сторони чотиристоронника $ABCD$: $A = a \times b$, $B = b \times c$, $C = c \times d$, $D = d \times a$ (рис. 2.95). Тоді точкою Бріаншона буде точка $O = AC \times BD$. Нехай дана точка дотику M на прямій a. Тоді пряма MO в перетині з дотичною c визначає точку дотику N.

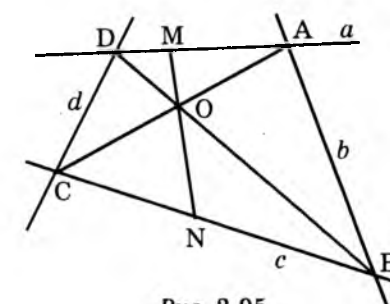


Рис. 2.95

§ 30. Полюс і поляра. Полярна відповідність

Нехай на площині дана лінія другого порядку k^2 і довільна точка P, яка їй не належить (рис. 2.96). Через точку P проведемо дві довільні січні, що перетинають лінію k^2 в точках A, B і C, D. Розглядаючи чотирикутник $ACBD$ як повний чотиривершинник, знайдемо його діагональні точки:

$$P = AB \times CD,\ Q = AD \times BC,\ R = AC \times BD.$$

Тоді пряма QR – його діагональ.

За гармонічними властивостями повного чотиривершинника на його стороні AB маємо гармонічну четвірку точок, утворену вершинами A, B, діагональною точкою P і точкою F перетину сторони AB з діагоналлю QR. Аналогічно на стороні CD маємо гармонічну четвірку точок, утворену вершинами C, D, діагональною точкою P і точкою E перетину сторони CD з діагоналлю QR.

Отже, чотири точки Q, R, F, E лежать на одній прямій, позначимо її через p.

Застосовуючи до чотиривершинника $ACBD$ теорему Паскаля, знайдемо, що точки Q і R перетину його протилежних сторін і точки M і N перетину пар дотичних у протилежних вершинах лежать на одній прямій. Таким чином, на прямій p лежать шість точок Q, R, F, E, M, N. Оскільки пряма визначається своїми двома точками, то пряму p можна задати різними способами, зокрема за допомогою лише однієї січної AB, проведеної через дану точку P. Справді, четверта гармонічна F до трьох точок A, B, P і точка M перетину дотичних до лінії k^2 в точках A і B визначають пряму p. Таким чином, положення прямої p не залежить від вибору другої січної CD, а отже, і від вибору повного чотиристоронника.

Означення 3.7. Пряму p, відповідну даній точці P відносно даної лінії другого порядку k^2, називають *полярою* точки P, а точку P – *полюсом* прямої p.

Зважаючи на те що на полярі p розміщені шість точок, можна дати різні означення поляри.

Означення 3.8. *Полярою p* точки P називається пряма, на якій лежать точки перетину дотичних до лінії другого порядку в кінцях хорд, проведених через полюс P.

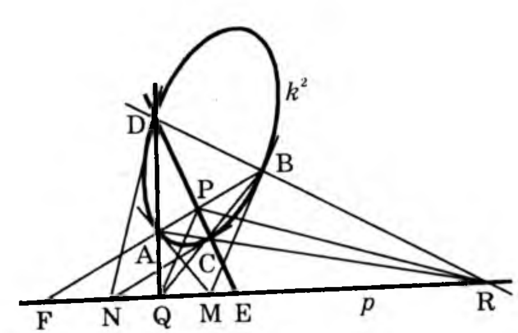


Рис. 2.96

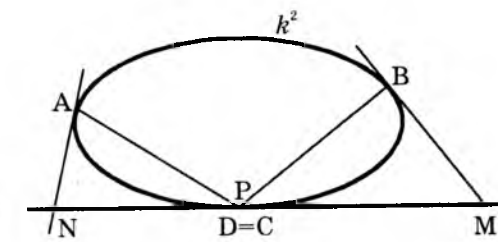


Рис. 2.97

Означення 3.9. *Полярою p* точки P називається пряма, на якій лежать точки, гармонічно спряжені з точкою P і точками перетину з лінією другого порядку хорд, проведених через полюс P.

Означення 3.10. *Полярою p* точки P називається діагональ повного чотиривершинника, вписаного в лінію другого порядку і для якого точка P є діагональною точкою, що проходить через дві інші діагональні точки.

Кожне із означень поляри визначає цілком зрозумілий спосіб її побудови.

Означення 3.11. *Полюсом P* поляри p називається точка, полярою якої є пряма p.

Для побудови полюса P, якщо дана поляра p не має спільних точок з даною лінією другого порядку k^2, зручно використати означення 3.8 поляри. Для цього досить на полярі p взяти дві довільні точки N, M і провести з них дотичні до k^2. Хорди, проведені через одержані точки дотику, перетинаються в точці P – полюсі поляри p. Все раніше сказане про полюс і поляру стосувалось випадку, коли полюс P лежав у внутрішній частині лінії другого порядку, при цьому поляра p не мала спільних точок з лінією k^2 (за означенням).

Для знаходження поляри точки P, яка належить лінії другого порядку, також використаємо означення 3.8. Проведемо через точку P дві довільні хорди PA і PB і побудуємо дотичні до k^2 в кінцях хорд (рис. 2.97). Кінці D і C хорд сумістилися з точкою P, тому дотичні DN і CM збігаються з дотичною до k^2 в точці P. Точки N і M перетину пар дотичних AN і DN, MC і MB лежать на цій же прямій.

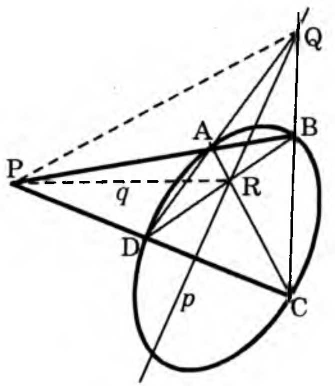


Рис. 2.98

Отже, *полярою точки P, яка лежить на лінії k^2, є дотична в точці P.*

Для побудови поляри точки P, яка лежить зовні лінії другого порядку, можна використати означення 3.10. Нехай маємо лінію другого порядку k^2 і точку P, яка лежить зовні k^2 (рис. 2.98). Проведемо через точку P дві довільні січні, які перетинають лінію k^2 в точках A, B, C, D. Точка P є діагональною точкою повного чотиривершинника $ABCD$, вписаного в лінію другого порядку, тому за означенням 3.10 дві інші діагональні точки R і Q визначають поляру $p = RQ$ точки P.

Розглянемо трикутник PQR, утворений трьома діагональними точками повного чотиривершинника $ABCD$, вписаного в лінію другого порядку k^2. За означенням 3.10 кожна з його сторін як діагональ повного чотиривершинника є полярою протилежної вершини: сторона (діагональ) QR є полярою вершини P, сторона PQ – поляра вершини R, сторона PR – поляра вершини Q. У той же час вершини P, Q, R є полюсами протилежних сторін (рис. 2.98).

Означення 3.12. Трикутник, у якого кожна вершина є полюсом протилежної сторони, називається *полярним трикутником*.

З усього сказаного про полюс і поляру відносно даної лінії другого порядку випливає, що кожній точці P площини відповідає певна пряма p – поляра точки P і навпаки.

Означення 3.13. Відповідність між точками і прямими площини, при якій кожній точці P площини ставиться у відповідність певна пряма p (її поляра) цієї ж площини і кожній прямій p площини ставиться у відповідність певна точка P (її полюс) цієї ж площини, називається *полярною відповідністю*.

Полярна відповідність має властивість *взаємності*.

Теорема 3.11. Якщо поляра якої-небудь точки проходить через другу точку, то поляра другої точки проходить через першу точку.

Доведення. Сформульоване твердження має назву *принципу взаємності* полюса і поляри.

Нехай поляра p точки P відносно лінії другого порядку k^2 проходить через точку Q (рис. 2.98). Доведемо, що при цьому поляра q точки Q проходить через точку P. Для цього проведемо через точку P довільну січну, яка перетне лінію k^2 в точках A і B. Проведемо пряму QA до перетину з k^2 в точці D, а потім проведемо січну PD до перетину з k^2 в точці C. Одержимо повний чотиривершинник $ABCD$ з діагональними точками P, Q, R, які утворюють полярний трикутник. За його властивостями і означенням 3.10 діагональ PR є полярою q точки Q, тобто поляра q точки Q проходить через полюс P.

Теорему доведено.■

Властивості полюса і поляри використовуються в геометричних побудовах.

Задача 3.7. Побудувати дотичні до лінії другого порядку за допомогою лише однієї лінійки.

Розв'язання. Нехай маємо накреслену лінію другого порядку k^2 і зовнішню точку P (рис. 2.99).

Через точку P проведемо три промені, які перетинають k^2 відповідно в точках A, B; C, D; M, N. Діагональні точки Q і R утворених чотиривершинників $ABDC$ і $CDNM$, вписаних у лінію другого порядку k^2, визначають поляру p точки P. Точки T_1 і T_2 перетину поляри P з лінією k^2 є точками дотику дотичних з точки P до k^2. Прямі PT_1 і PT_2 – шукані дотичні.

Правильність побудови випливає з означення полюса і поляри та принципу взаємності.

Задача 3.8. Дано (накреслено) лінію другого порядку і точку P всередині неї. Через точку P провести хорду, яка б ділилась нею навпіл.

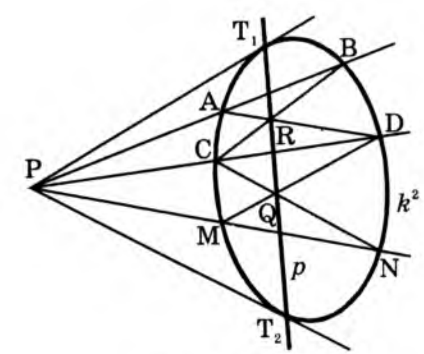


Рис. 2.99

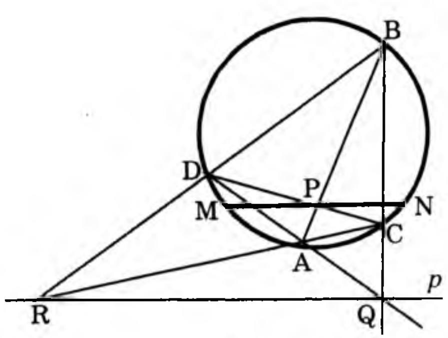


Рис. 2.100

Розв'язання. Побудуємо поляру p точки P і через точку P проведемо хорду MN, паралельну полярі p (рис. 2.100). Хорда MN – шукана, $MP = PN$. Для доведення цього використаємо означення 3.9 поляри, за яким $(MN, PL) = -1$, де L – четверта гармонічна до полюса P і точок M, N перетину з даною кривою довільної січної MN, яка проходить через полюс P. За побудовою $MN \parallel p$, тому точка їх перетину є невласною точкою прямої MN (або p). За проективним означенням середини відрізка точка P ділить хорду MN навпіл.

Вправи

3.9. Лінія другого порядку задана своїми п'ятьма точками, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Побудувати ще декілька точок цієї лінії. Побудову виконати двома способами:
1) за допомогою двох твірних проективних пучків першого порядку;
2) за допомогою теореми Паскаля.

3.10. Дано п'ять прямих пучка другого порядку, жодні три з яких не проходять через одну точку. Побудувати ще декілька прямих цього пучка. Побудову виконати двома способами:
1) за допомогою двох твірних проективних рядів першого порядку;
2) за допомогою теореми Бріаншона.

3.11. Лінія другого порядку задана п'ятьма точками, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Побудувати дотичні до цієї лінії в двох даних точках.

3.12. Два проективні ряди точок першого порядку $s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ і $s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ задано трьома парами відповідних точок. Побудувати на прямих s_1 і s_2 точки їх дотику.

3.13. Два кути сталої величини α і β обертаються навколо їх вершин A і B так, що точка M перетину двох сторін AM і BM цих кутів ковзає по прямій m. Встановити, яку лінію описує точка N перетину двох інших сторін цих кутів.

3.14. Дві прямі обертаються навколо нерухомих точок з однаковою кутовою швидкістю в однакових або в протилежних напрямах. Яку лінію описує в кожному випадку точка перетину прямих?

3.15. Знайти геометричне місце вершин C трикутника ABC, сторони якого обертаються навколо трьох нерухомих точок K, M, N, а дві вершини A і B ковзають по двох нерухомих прямих a і b.

3.16. Основа трикутника нерухома, а вершина описує пряму. Яку лінію описує точка перетину висот?

3.17. Дано п'ять точок лінії другого порядку і пряму, яка проходить через одну з них. Знайти другу точку перетину прямої з даною кривою.

3.18. Дано п'ять точок лінії другого порядку. Побудувати дотичну в одній з них.

3.19. Дано чотири точки лінії другого порядку і дотичну в одній з них. Побудувати дотичну в другій з даних точок.

3.20. Лінія другого порядку задана п'ятьма точками, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Побудувати точки її перетину з прямою, яка не проходить через дані точки.

3.21. Дано три точки лінії другого порядку і дотичні у двох із них. Через одну із даних точок проведена пряма a. Побудувати другу точку перетину прямої a з заданою кривою.

3.22. Дано три точки лінії другого порядку і дотичні у двох із них. Побудувати дотичну в третій з даних точок.

3.23. Дано п'ять дотичних a, b, c, d, e до кривої другого порядку і точку M на одній з них. Через точку M провести другу дотичну до кривої.

3.24. Дано п'ять дотичних a, b, c, d, e до кривої другого порядку. Побудувати точку дотику прямої a.

3.25. Дано чотири дотичні t_1, t_2, t_3, t_4 до лінії другого порядку і точку дотику прямої t_1. Побудувати декілька інших дотичних до цієї лінії.

3.26. Дано чотири дотичні до лінії другого порядку і точку дотику на одній з них. Визначити точку дотику другої з даних дотичних.

3.27. Дано три дотичні a, b, c до лінії другого порядку і точки дотику дотичних a і b. Побудувати декілька інших дотичних до цієї кривої.

3.28. Дано три дотичні a, b, c до лінії другого порядку і точки дотику на a і b. Побудувати точку дотику третьої дотичної c.

3.29. Дано чотири точки параболи, одна з них невласна. Побудувати дотичну до параболи в одній з даних точок.

3.30. Дано дві дотичні до параболи і точки дотику на них. Визначити напрям осі параболи.

3.31. Вибравши у конфігурації Паскаля – Паппа будь-яку з дев'яти прямих за пряму Паскаля, знайти шестивершинник, який задовольняє теорему Паскаля.

3.32. Побудувати поляру даної точки P відносно даної лінії другого порядку k^2 (різними способами) у випадках, коли: а) точка P зовнішня; б) точка P внутрішня; в) точка P лежить на лінії k^2.

3.33. Побудувати полюс P даної прямої p відносно даної лінії другого порядку k^2: а) пряма p перетинає k^2; б) пряма p дотикається до k^2; в) пряма p не має спільних точок з k^2.

3.34. Дана лінія другого порядку k^2 і точка P поза нею. Побудувати з точки P дотичні до кривої k^2.

3.35. Побудувати рисунок конфігурації Паскаля – Паппа для того випадку, коли одна з її точок є невласною.

3.36. Дано чотири точки перетину двох прямих, що виходять з точки P, з лінією другого порядку k^2, останні точки якої невідомі. Побудувати поляру точки P.

3.37. Дано дві пари дотичних з точок A і B до лінії другого порядку k^2 (крива не накреслена). Побудувати полюс P прямої AB відносно лінії k^2.

3.38. Дано вершину і сторону полярного трикутника, яка проходить через дану вершину. Побудувати полярний трикутник при умові, що основна лінія другого порядку накреслена і дана вершина лежить: а) всередині кривої, б) зовні кривої.

Розділ **4**

Проективні перетворення форм другого ступеня

§ 31. Колінеація плоских полів

Поширимо поняття проективного перетворення на форми другого ступеня – плоске поле точок і плоске поле прямих. Раніше ми вже зустрічались з поняттям колінеарності як властивості прямої відображатися в пряму при центральному проектуванні, при перспективній відповідності.

Означення 4.1. *Колінеарним відображенням (колінеацією)* двох плоских полів називається таке взаємно однозначне відображення їх елементів, при якому:
1) кожній точці одного поля відповідає точка другого;
2) кожній прямій одного поля відповідає пряма другого;
3) парі інцидентних елементів одного поля відповідає також пара інцидентних елементів другого.

Теорема 4.1. Відповідні форми першого ступеня двох колінеарних полів завжди проективні.

Доведення. Нехай плоскі поля ω і ω' колінеарні (рис. 2.101). Візьмемо в них відповідні прямі u і u', які є носіями прямолінійних рядів точок: $u(A, B, C, D, \ldots)$ і $u'(A', B', C', D', \ldots)$. Треба довести, що $u \barwedge u'$. Для доведення покажемо, що гармонічній четвірці точок ряду u відповідає гармонічна четвірка точок ряду u'. Нехай $(AB, CD) = -1$. У площині ω, як носії першого плоского поля, побудуємо повний чотиривершинник, який проектує цю гармонічну четвірку точок і при цьому пряма u була б діагоналлю, точки A і B – діагональними точками.

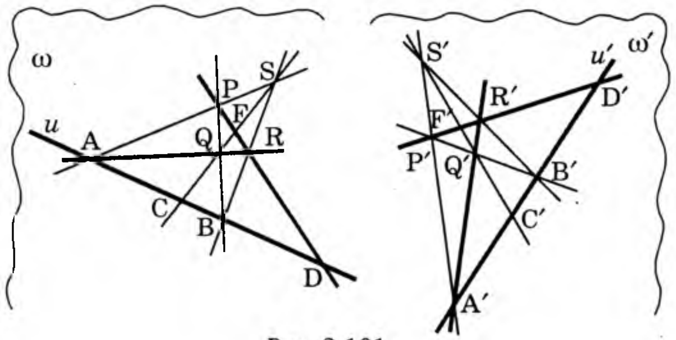


Рис. 2.101

Для цього через точку A проведемо довільні прямі AP і AQ, а через точку C – січну пряму, яка перетинає пряму AP в точці S і пряму AQ в точці Q. Точки S і Q сполучимо з точкою B і позначимо через $P = AS \times BQ$, через $R = SB \times AQ$. Дістали повний чотиривершинник $SPQR$, у якого точки A і B є діагональними. Тоді, за властивостями повного чотиривершинника, пряма PR пройде через точку D, оскільки прямі SQ і PR – третя пара його протилежних сторін.

На площині ω' ряду u відповідає ряд u', точкам A, B, C, D ряду u відповідають точки A', B', C', D', повному чотиривершиннику $SPQR$ – повний чотиривершинник $S'P'Q'R'$. Оскільки площини ω і ω' колінеарні, то всі відношення належності точок і прямих зберігаються, тобто повний чотиривершинник $S'P'Q'R'$ проектує на ряді u' гармонічну четвірку точок A', B', C', D'.

Теорему доведено.■

Аналогічно можна переконатися в проективності відповідних пучків прямих першого порядку двох колінеарних полів.

Наслідок. Колінеарне перетворення плоских полів ω і ω' називається *проективним* перетворенням поля ω в поле ω'.

Теорема 4.2 (про задання колінеації). Колінеація двох плоских полів ω і ω' повністю визначається заданням чотирьох пар відповідних точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій.

Доведення. Нехай точкам A, B, C, D плоского поля ω відповідають точки A', B', C', D' поля ω' у колінеації цих полів (рис. 2.102). Тоді відповідні пари точок визначають відповідні в колінеації прямі: прямим $u = AB$ і $v = CD$ відповідають прямі $u' = A'B'$ і $v' = C'D'$. Точці $O = AB \times CD$ відповідає точка $O' = A'B' \times C'D'$.

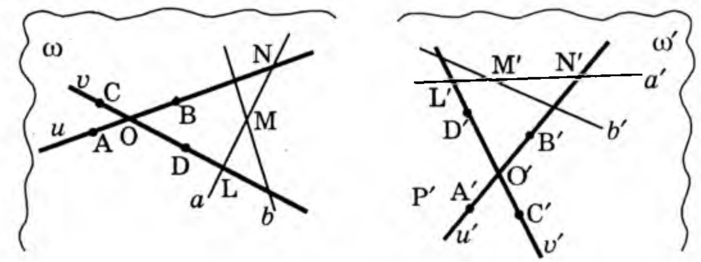


Рис. 2.102

Три пари відповідних точок A і A', B і B', O і O' визначають проективну відповідність рядів u і u'. Аналогічно три пари відповідних точок C і C', D і D', O і O' визначають проективну відповідність рядів v і v'.

Візьмемо в площині ω довільну точку M і проведемо через неї дві довільні прямі a і b. Нехай пряма a перетинає прямі u і v відповідно в точках N і L. За встановленою проективною відповідністю рядів u і u' для точки $N \in u$ можемо знайти відповідну їй точку $N' \in u'$. Аналогічно, точці $L \in v$ знайдемо відповідну точку $L' \in v'$. Точки N' і L' визначають пряму a' у площині ω', відповідну прямій a площини ω.

У такий самий спосіб знайдемо образ b' площини ω' прямої b площини ω. Точка $M' = a' \times b'$ є образом точки $M \in \omega$.

Теорему доведено.■

§ 32. Гомології

Перспективне відображення площини ω на площину ω' з довільного центра S є колінеацією, оскільки при цьому виконуються вимоги означення колінеації. У цьому випадку відповідність між площинами ω і ω' називають *перспективною колінеацією*.

Центр проектування – точка S – називається *центром*, а пряма s перетину площин ω і ω' – *віссю* перспективної колінеації. Спроектуємо площину ω на ω_1 із центра S_1. Тоді трикутнику ABC площини ω буде відповідати перспективно колінеарний йому трикутник $A_1B_1C_1$ площини ω_1 (рис. 2.103). Потім з іншого центра S_2 спроектуємо площину ω_1 на площину ω', дістанемо нову перспективну колінеацію, яка відображає площину ω_1 на ω'. При цьому трикутник $A_1B_1C_1$ відобразиться

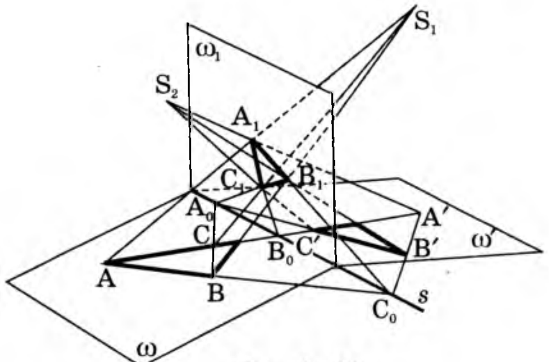


Рис. 2.103

на відповідний йому трикутник $A'B'C'$. Відповідність між площинами ω і ω′, одержана в результаті послідовного виконання двох перспективних колінеацій, буде колінеацією. Якщо площини ω і ω′ суміщаються, то дістанемо колінеацію двох плоских полів із *спільним носієм*. Розглянемо властивості колінеації двох плоских полів із спільним носієм.

1. Якщо два колінеарні поля зі спільним носієм мають чотири подвійні точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій, то такі колінеарні поля тотожні.
2. Якщо два колінеарні поля зі спільним носієм мають чотири подвійні прямі, жодні три з яких не проходять через одну точку, то такі колінеарні поля тотожні.
3. Два нетотожні колінеарні поля зі спільним носієм можуть мати спільний трикутник, вершини і сторони якого самі собі відповідають.

Ці властивості є наслідками теореми 4.2 § 31.

4. Якщо колінеація має точково-інваріантну пряму, то всі прямі, які сполучають відповідні точки, подвійні.

Дійсно, нехай A і A' – пара відповідних точок і s – точково-інваріантна пряма, тобто всі її точки подвійні, X – точка перетину прямої AA' з прямою s. Точка X сама собі відповідає, тому прямій AX одного поля відповідає пряма $A'X$ другого поля. Але AX і $A'X$ – це одна й та ж пряма, тобто пряма $a = AA'$ – подвійна.

5. Точка перетину двох подвійних прямих при колінеації подвійна.

Це випливає з того, що подвійні прямі самі собі відповідають, тому точка перетину подвійних прямих також сама собі відповідає.

6. Нетотожна колінеація, яка має точково-інваріантну пряму s, може мати не більше однієї подвійної точки S, яка не належить прямій s, притому всі подвійні прямі проходять через точку S.

Доведення. Оскільки колінеація нетотожна, то існують неподвійні пари відповідних точок, наприклад A і A', B і B'. Прямі $a = AA'$ і $b = BB'$ за властивістю 4 подвійні, точка їх перетину S також подвійна (властивість 5).

Якщо припустити, що дана колінеація має іншу подвійну точку S_1, відмінну від S і не належну прямій s, то можна вибрати на прямій s такі точки X і Y, що жодні три з точок X, Y, S, S_1 не лежать на одній прямій. Але тоді колінеація буде тотожною, що суперечить умові. Отже, точка S – єдина подвійна точка, що не належить прямій s, тому всі подвійні прямі проходять через точку S.

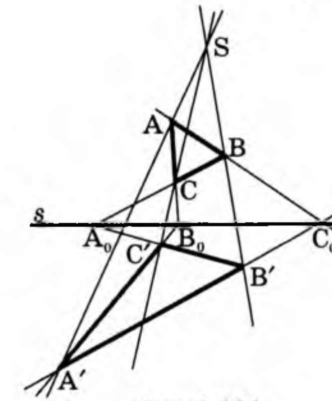


Рис. 2.104

Означення 4.2. **Колінеарна відповідність двох плоских полів із спільним носієм, в якій існує точково-інваріантна пряма s і одна подвійна точка S, що не належить прямій s, називається *гомологією*. Точка S називається *центром гомології*, а пряма s – *віссю гомології*.**

Усі точки осі гомології подвійні. Два трикутники, які задовольняють теорему Дезарга – *гомологічні* (рис. 2.104).

Точка S Дезарга – центр гомології, дезаргова пряма s – вісь гомології.

Перетворення площини в себе, що визначається гомологією, називається *перетворенням гомології* або просто *гомологією*.

Теорема 4.3. **Перетворення гомології на площині повністю визначається заданням осі s, центра S і однієї пари відповідних точок.**

Доведення. Нехай дана пряма s – вісь гомології, точка S – центр гомології, A і A' – пара відповідних точок.

Візьмемо на прямій s дві точки B і C такі, щоб вони не лежали на прямій AA'. Тоді маємо чотири пари відповідних точок, три з яких – B, C, S – подвійні. За теоремою 4.2 § 31 гомологія як окремий вид колінеації визначається заданням чотирьох пар відповідних точок.

Теорему доведено.■

Задача 4.1. Побудувати пару відповідних точок у гомології, заданій центром S, віссю s і парою відповідних точок A і A'.

Розв'язання. Нехай маємо пряму s, точку S, їй не належну, і пару відповідних точок A і A'. Для довільної точки B площини побудуємо гомологічний їй образ B'.

Для цього проводимо пряму AB до перетину з прямою s у точці C_0. Шуканою точкою B' буде точка перетину прямої $A'C_0$ з прямою SB (рис. 2.105а, б).

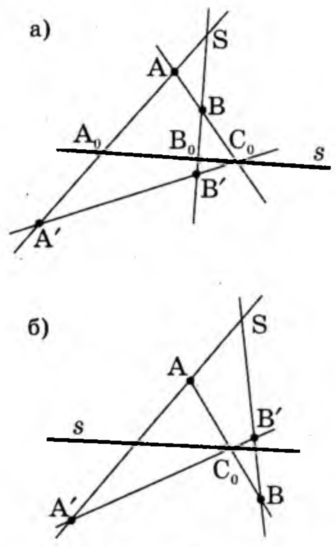


Рис. 2.105

У такий спосіб побудована точка B' задовольняє означення гомотетії.

Гомологію називають *гармонічною*, якщо кожну пару відповідних у гомології точок A і A' гармонічно поділяють центр гомології S і точка перетину прямої AA' з віссю s гомології.

Центр гомології в окремому випадку може належати осі гомології, така гомологія називається *особливою*.

Якщо центр гомології – невласна точка, то прямі, що сполучають відповідні точки, паралельні між собою; така гомологія буде перспективно-афінним перетворенням площини (вправа 4.10).

Якщо вісь гомології – невласна пряма, то прямі, що сполучають образи, і прямі, що сполучають прообрази, паралельні між собою; така гомологія буде гомотетією з центром S (вправа 4.11).

У випадку, коли і центр гомології невласний, і вісь гомології невласна пряма, то гомологія – паралельне перенесення (вправа 4.12).

§ 33. Проективні координати на площині

Проективну систему координат можна одержати з декартової проективним перетворенням останньої. Нехай у площині ω маємо деяку декартову систему координат XOY, в якій E (1; 1) – одинична точка, $M(x, y)$ – довільна точка площини (рис. 2.106а). Виконаємо проективне (колінеарне) відображення площини ω на площину ω′ і знайдемо образ декартової системи координат у площині ω′.

На площині ω прямі E_2E і M_2M перетинають вісь OX в її невласній точці X_∞, а прямі E_1E і M_1M перетинають вісь OY в її невласній точці Y_∞. При перспективному відображенні площини ω на площину ω′ невласні точки X_∞ і Y_∞ можуть відображатись на власні точки X' і Y', а невласна пряма $X_\infty Y_\infty$ площини ω – у власну пряму $X'Y'$ площини ω′. Точки M, M_1, M_2, E, E_1, E_2 перейдуть відповідно у точки M', M'_1, M'_2, E', E'_1, E'_2, належні відповідним прямим. Отже, зображення декартової системи координат на рис. 2.106а перейде в її колінеарний образ на рис. 2.106б.

Раніше (§ 12) було введено поняття проективної координати точки на прямій за допомогою подвійного відношення чотирьох точок

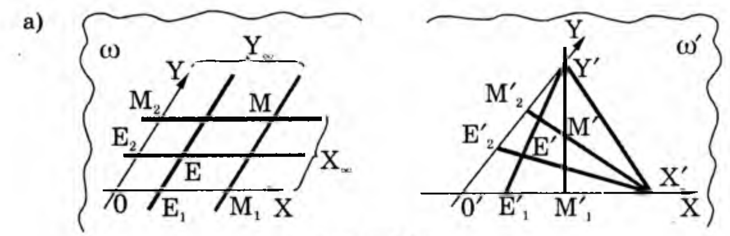


Рис. 2.106

прямої. Оскільки подвійне відношення є інваріантом перспективного, а отже, і колінеарного, відображення, то декартові координати точки виразимо теж через подвійне відношення чотирьох точок. Дістанемо

$$x = \frac{OM_1}{OE_1} = (M_1E_1, O) = (M_1E_1, OX_\infty),$$

$$y = \frac{OM_2}{OE_2} = (M_2E_2, O) = (M_2E_2, OY_\infty).$$

Після колінеарного перетворення координати x і y точки M перейдуть в координати x' і y' точки M':

$$x' = (M'_1E'_1, O'X'),$$

$$y' = (M'_2E'_2, O'Y'). \qquad (4.1)$$

Одержані вирази x' і y' називають *проективними координатами* точки M', при цьому $x' = x$, $y' = y$, оскільки

$$(M_1E_1, OX_\infty) = (M'_1E'_1, O'X'),$$

$$(M_2E_2, OY_\infty) = (M'_2E'_2, O'Y').$$

Таким чином, система проективних координат на площині може бути задана трикутником $O'X'Y'$, який називається *базисним*, або *координатним*, і одиничною точкою E'.

Координатний трикутник проективної системи координат можна брати незалежно від декартової системи координат. Зауважимо, що вершини і сторони цього трикутника рівноправні між собою. Тому довільну точку M і одиничну точку E можна проектувати з будь-якої вершини трикутника $O'X'Y'$ на протилежну сторону (рис. 2.107).

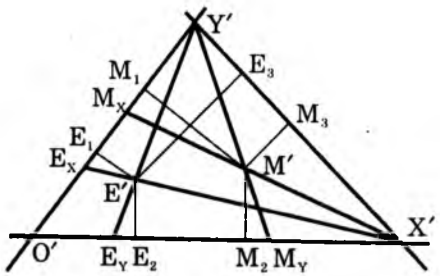


Рис. 2.107

Позначимо проекції точок E' і M' з точки X' на сторону $O'Y'$ через E_x і M_x, а з точки Y' на сторону $X'O'$ – через E_y і M_y. Тоді проективні координати точки M' виражаються формулами

$$x' = (M_y E_y, O'X'),$$

$$y' = (M_x E_x, O'Y'). \qquad (4.2)$$

Але якщо точку M' взяти на прямій $X'Y'$, то точка M_x збігається з точкою Y', а точка M_y – з точкою X'. Тоді матимемо

$$x' = (X'E_y, O'X') = \frac{X'O' \cdot E_y X'}{E_y O' \cdot X'X'},$$

$$y' = (Y'E_x, O'Y') = \frac{Y'O' \cdot E_x Y'}{E_x O' \cdot Y'Y'}.$$

Враховуючи, що $X'X' = Y'Y' = 0$, бачимо, що координати точок прямої $X'Y'$ залишаються невизначеними.

Щоб позбутись цього недоліку, вводять *однорідні проективні координати*, позначаючи $x' = \frac{x'_1}{x'_3}$, $y' = \frac{x'_2}{x'_3}$, де x'_1, x'_2, x'_3 – однорідні проективні координати точки на площині.

Користуючись властивостями подвійного відношення чотирьох точок і подвійного відношення чотирьох прямих пучка, які їх проектують, з'ясуємо геометричний зміст однорідних проективних координат x'_1, x'_2, x'_3. Для цього опустимо з точок M' і E' перпендикуляри на сторони координатного трикутника $X'Y'O'$. Нехай M_1, M_2, M_3, E_1, E_2, E_3 – основи цих перпендикулярів відповідно на сторонах $Y'O'$, $X'O'$, $X'Y'$ (рис. 2.107). Тоді, позначивши сторони координатного трикутника $Y'O' = a$, $X'O' = b$, $X'Y' = c$, а проектуючі прямі $X'M_x = a_1$, $X'E_x = b_1$, $Y'M_y = a_2$, $Y'E_y = b_2$, матимемо:

$$\frac{x'_1}{x'_3} = x' = (M_y E_y, O'X') = (a_2 b_2, ac) = \frac{(a_2 b_2, a)}{(a_2 b_2, c)} =$$

$$= \frac{\sin(\widehat{a_2 a})}{\sin(\widehat{b_2 a})} : \frac{\sin(\widehat{a_2 c})}{\sin(\widehat{b_2 c})} = \frac{\sin(\widehat{a_2 a})}{\sin(\widehat{a_2 c})} : \frac{\sin(\widehat{b_2 a})}{\sin(\widehat{b_2 c})} =$$

$$= \frac{M'M_1}{M'M_3} : \frac{E'E_1}{E'E_3} = \frac{M'M_1}{E'E_1} : \frac{M'M_3}{E'E_3}.$$

Отже,

$$\frac{x'_1}{x'_3} = \frac{M'M_1}{E'E_1} : \frac{M'M_3}{E'E_3}.$$

Аналогічно знайдемо, що

$$\frac{x'_2}{x'_3} = \frac{M'M_2}{E'E_2} : \frac{M'M_3}{E'E_3}.$$

Позначивши відстані точки M' до сторін координатного трикутника $M'M_1 = d_1$, $M'M_2 = d_2$, $M'M_3 = d_3$, а відстані одиничної точки E' відповідно $E'E_1 = e_1$, $E'E_2 = e_2$, $E'E_3 = e_3$, дістанемо

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3}. \qquad (4.3)$$

Остання рівність встановлює зв'язок проективних однорідних координат точки площини з її відстанями до сторін координатного трикутника.

Однорідні проективні координати x'_1, x'_2, x'_3 точки M' пропорційні відношенню відстаней точки M' до відстаней одиничної точки E' від сторін координатного трикутника.

Задача 4.2. Сторонами базисного трикутника проективної системи координат відносно декартової системи координат, є прямі

$$x - 2 = 0, \qquad (4.4)$$

$$y + 3 = 0, \qquad (4.5)$$

$$3x - 2y + 6 = 0, \qquad (4.6)$$

а одиничною точкою – точка $E(1;\ 2)$. Знайти однорідні проективні координати точки M, декартові координати якої $(3;\ 4)$.

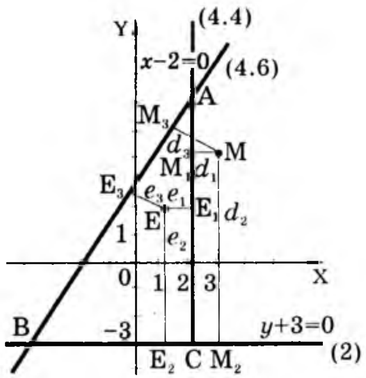


Рис. 2.108

Розв'язання. Нехай точка M має однорідні проективні координати $x_1 : x_2 : x_3$. Тоді

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3},$$

де d_1, d_2, d_3 – відстані точки M, а e_1, e_2, e_3 – відстані точки E від сторін базисного трикутника ABC (рис. 2.108).

Якщо загальне рівняння прямої в декартовій системі координат XOY записати у вигляді $Ax + By + C = 0$, то відстань точки $M(x_1, y_1)$ до цієї прямої обчислюється за формулою

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Підставивши у цю формулу замість x_1 і y_1 координати точок M і E, а замість A, B, C – коефіцієнти даних рівнянь сторін базисного трикутника, знайдемо:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -5 : 7 : 7.$$

Отже, точка M має однорідні проективні координати (–5; 7; 7).

§ 34. Колінеація в координатах

Нехай система проективних координат встановлена координатним трикутником $O'X'Y'$ і одиничною точкою E'. Тоді рівняння сторін цього трикутника відносно певної декартової системи координат можна записати у такому вигляді:

$$\begin{matrix} (Y'O') & \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0, \\ (O'X') & \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0, \\ (X'Y') & \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 = 0, \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.7)$$

Якщо вважати ліві частини цих рівнянь нормальними, то відстані d_1, d_2, d_3 точки $M'(x, y)$ до сторін координатного трикутника, де x, y – декартові координати точки M', задовольнятимуть такі відношення:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}{e_1} : \frac{\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2}{e_2} : \frac{\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3}{e_3}.$$

В однорідних декартових координатах $\left(x = \dfrac{x_1}{x_3},\ y = \dfrac{x_2}{x_3}\right)$ остання рівність набуде вигляду

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = (a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3) : (a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3) : (a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3)$$

або, після введення множника пропорційності ρ, у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} \rho x'_1 &= a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3, \\ \rho x'_2 &= a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3, \\ \rho x'_3 &= a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \rho \neq 0. \qquad (4.8)$$

Рівняннями (4.8) однорідні проективні координати x'_1, x'_2, x'_3 точки виражені через однорідні декартові координати x_1, x_2, x_3 лінійно.

Розв'язавши рівняння (4.8) відносно x_1, x_2, x_3, дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \rho' x_1 &= a'_1x'_1 + b'_1x'_2 + c'_1x'_3, \\ \rho' x_2 &= a'_2x'_1 + b'_2x'_2 + c'_2x'_3, \\ \rho' x_3 &= a'_3x'_1 + b'_3x'_2 + c'_3x'_3, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 & c'_1 \\ a'_2 & b'_2 & c'_2 \\ a'_3 & b'_3 & c'_3 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \rho' \neq 0. \qquad (4.9)$$

За допомогою формул (4.8) і (4.9) можна одержати формули переходу від однієї системи проективних координат до іншої системи проективних координат. Нехай маємо дві системи однорідних проективних координат, заданих трикутниками $O'X'Y'$, $\overline{O}'\overline{X}'\overline{Y}'$ і одиничними точками E' і $\overline{E}'$. Тоді, виражаючи декартові однорідні координати точки M' через її проективні однорідні координати в системі $(\overline{O}'\overline{X}'\overline{Y}', \overline{E}')$ за формулами (4.9), дістанемо:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\rho}' x_1 &= \overline{a}'_1\overline{x}'_1 + \overline{b}'_1\overline{x}'_2 + \overline{c}'_1\overline{x}'_3, \\ \overline{\rho}' x_2 &= \overline{a}'_2\overline{x}'_1 + \overline{b}'_2\overline{x}'_2 + \overline{c}'_2\overline{x}'_3, \\ \overline{\rho}' x_3 &= \overline{a}'_3\overline{x}'_1 + \overline{b}'_3\overline{x}'_2 + \overline{c}'_3\overline{x}'_3, \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} \overline{a}'_1 & \overline{b}'_1 & \overline{c}'_1 \\ \overline{a}'_2 & \overline{b}'_2 & \overline{c}'_2 \\ \overline{a}'_3 & \overline{b}'_3 & \overline{c}'_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (4.10)$$

Підставивши значення x_1, x_2, x_3 з рівностей (4.10) у рівності (4.8), дістанемо формули *перетворення однієї системи однорідних проективних координат в іншу*, які можна записати так:

$$\left.\begin{aligned}\rho x_1' &= A_1\overline{x}_1' + B_1\overline{x}_2' + C_1\overline{x}_3',\\ \rho x_2' &= A_2\overline{x}_1' + B_2\overline{x}_2' + C_2\overline{x}_3',\\ \rho x_3' &= A_3\overline{x}_1' + B_3\overline{x}_2' + C_3\overline{x}_3',\end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4.11}$$

За формулами (4.9) § 33 можна знайти координати вершин базисного трикутника $O'X'Y'$. Справді, для вершини X' $d_2 = d_3 = 0$, тому $X'_1(x : 0 : 0)$ або $X'_1(1 : 0 : 0)$. Аналогічно $X'_2(0 : 1 : 0)$ і $X'_3(0 : 0 : 1)$.

Можна переконатись, що перетворення площини, встановлене формулами (4.11), є колінеацією. Покажемо, що при цьому перетворенні пряма відображається на пряму.

В однорідних декартових координатах пряма записується рівнянням $mx_1 + nx_2 + px_3 = 0$. Застосовуючи формули (4.9), дістанемо рівняння прямої в однорідних проективних координатах:

$$mx_1 + nx_2 + px_3 = \frac{m}{\rho'}(a_1'x_1' + b_1'x_2' + c_1'x_3') + \frac{n}{\rho'}(a_2'x_1' + b_2'x_2' + c_2'x_3') +$$

$$+ \frac{p}{\rho'}(a_3'x_1' + b_3'x_2' + c_3'x_3') = Mx_1' + Nx_2' + Px_3' = 0.$$

Отже, в однорідних координатах пряма теж зображується рівнянням першого степеня, тому перетворення, визначене формулами (4.11), є колінеацією.

Далі встановимо, якими формулами виражається колінеація плоского поля в декартових координатах, тобто покажемо, що формули (4.11) залишаються правильними і в тому випадку, коли під координатами x_1', x_2', x_3' і $\overline{x}_1', \overline{x}_2', \overline{x}_3'$ будемо розуміти не проективні, а однорідні декартові координати точки M і відповідної їй точки M'. За формулами (4.8) знайдемо:

$$\frac{x_1'}{x_3'} = \frac{a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3}{a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3},$$

$$\frac{x_2'}{x_3'} = \frac{a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3}{a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3}.$$

Щоб перейти до звичайних декартових координат, треба покласти $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$; $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$; $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$.

Тоді

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}; \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}. \tag{4.12}$$

Формули (4.12) виражають проективне перетворення (колінеацію) в декартових координатах.

Звідси випливає справедливість такого твердження.

Колінеарне перетворення плоского поля в декартових координатах виражається дробово-лінійними функціями.

З формул (4.12) також випливає, що колінеація визначається заданням чотирьох пар точок, вісім координат яких дають можливість визначити вісім параметрів формул (4.12) у відношеннях до дев'ятого.

§ 35. Поняття про кореляцію

У § 30 введено поняття полярної відповідності. Узагальненням полярної відповідності є кореляційна відповідність, або просто *кореляція.*

Означення 4.3. *Кореляційною відповідністю* (*кореляцією*) двох плоских полів називають таку взаємно однозначну відповідність між елементами цих полів, при якій:
1) кожній точці одного поля відповідає пряма другого;
2) кожній прямій одного поля відповідає точка другого;
3) парі інцидентних елементів одного поля відповідає пара інцидентних відповідних елементів другого поля.

З цього означення зрозуміло, що послідовне виконання двох кореляцій (композиція кореляцій) є колінеацією. Кореляційні поля, як і колінеарні, можуть мати різні носії – площини, або один спільний носій – кореляція на площині.

Теорема 4.4. Відповідні форми першого ступеня двох кореляційних площин проективні.

Доведення. Доведення теореми можна провести на основі гармонічних властивостей повного чотиривершинника і повного чотиристоронника. Нехай площини ω і ω' знаходяться в кореляційній відповідності.

У площині ω побудуємо повний чотиривершинник $KLMN$, на його діагоналі AB одержимо гармонічну четвірку точок A, B, C, D з носієм

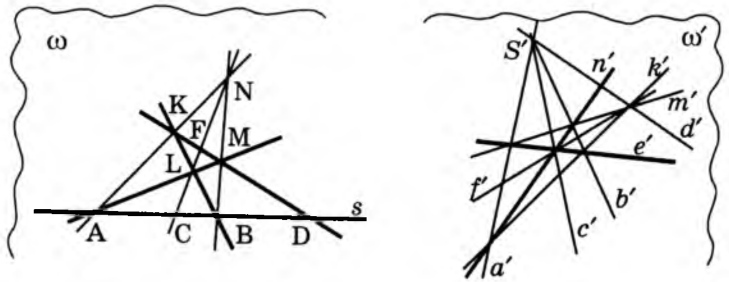


Рис. 2.109

s. На площині ω' прямій s відповідає по кореляції точка S', точкам A, B, C, D прямої s – прямі a', b', c', d' пучка S' (рис. 2.109).

Повному чотиривершиннику $KLMN$ відповідає повний чотиристоронник $k'l'm'n'$. Оскільки інцидентність відповідних елементів при кореляції зберігається, то образом діагоналі $AB = s$ буде діагональна точка S' чотиристоронника $k'l'm'n'$, образом діагональних точок A, B будуть діагоналі a', b', образами точок C і D, що проходять через третю діагональну точку F чотиривершинника $KLMN$, будуть прямі c' і d', які визначають третю діагональ f'. За властивостями повного чотиристоронника $k'l'm'n'$ четвірка прямих a', b', c', d' є гармонічною.

Теорему доведено.■

Теорема 4.5. Кореляційна відповідність двох площин повністю визначається заданням чотирьох пар відповідних елементів форм першого ступеня (чотирьох точок однієї площини і чотирьох відповідних прямих другої).

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що при цьому для довільної точки M однієї площини можна побудувати відповідну їй пряму m' другої.

Нехай дані чотири точки A, B, C, D площини ω і відповідні їм чотири прямі a', b', c', d' площини ω'. Візьмемо на площині ω довільну точку M (рис. 2.110). Позначимо через F точку перетину прямих AC і BD, $K = MB \times AC$, $L = MC \times BD$. Тоді точка M визначається як точка перетину прямих BK і CL.

У площині ω' прямим AC і BD відповідають точки перетину прямих a', c' і b', d', точці F – пряма f', яка проходить через точки (a', c') і (b', d'). До трьох прямих a', c', f', що проходять через точку (a', c'), побудуємо четверту пряму k' таку, щоб $(a'c', f'k') = (AC, FK)$.

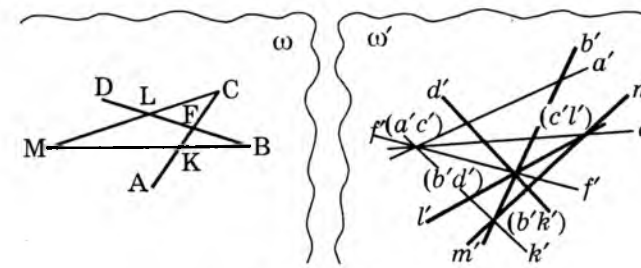


Рис. 2.110

Аналогічно до трьох прямих b', d', f' пучка (b', d') будуємо четверту пряму l' таку, щоб $(b'd', f'l') = (BD, FL)$. Одержані точки $(b'k')$ і $(c'l')$ є відповідними прямим BK і CL, тому пряма m', яка проходить через ці точки, відповідає точці M перетину прямих BK і CL.

Теорему доведено.■

Зауважимо, що всі побудови при доведенні теорем 4.4 і 4.5 виконувались тільки однобічною лінійкою.

§ 36. Рівняння проективної прямої

Застосування методу координат на проективній площині дещо ускладнюється наявністю на ній невласних елементів. Щоб уникнути цих ускладнень, користуються однорідними проективними координатами. У § 12 введено поняття однорідних проективних координат точки прямої на основі подвійного відношення чотирьох точок прямої – як наслідок неоднорідних координат.

Введемо поняття однорідних проективних координат точки на проективній площині. Нехай ω – проективна площина, введемо на ній декартову систему координат. Якщо точка M – власна точка площини, то у вибраній системі координат на площині вона визначається координатами x і y.

Розглянемо три числа x, y, 1 і візьмемо множину N всіх трійок x_1, x_2, x_3 чисел, пропорційних трійці x, y, 1; тобто $x_1 : x_2 : x_3 = x : y : 1$, або $x_1 = \lambda x$, $x_2 = \lambda y$, $x_3 = \lambda$, де λ набуває всіх дійсних значень, крім нуля. Оскільки $x_3 \neq 0$, то $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$.

Означення 4.4. Будь-яка трійка чисел $x_1 : x_2 : x_3$ з даної множини N називається *однорідними координатами* точки M.

Якщо M – невласна точка площини ω, то вона визначається пучком паралельних прямих. Візьмемо будь-який вектор $\bar{a} \neq \bar{0}$, колінеарний прямим пучка, і нехай $\bar{x}, \bar{y}$ – координати цього вектора. Розглянемо трійку чисел $\bar{x}, \bar{y}, \bar{0}$ і візьмемо множину $\overline{N}$ всіх трійок чисел $x_1 : x_2 : x_3$, пропорційних трійці $\bar{x}, \bar{y}, \bar{0}$, тобто $x_1 : x_2 : x_3 = \bar{x} : \bar{y} : \bar{0}$ або $x_1 = \lambda\bar{x}$, $y_1 = \lambda\bar{y}$, $x_3 = \bar{0}$, де λ – будь-яке дійсне число, відмінне від нуля.

Означення 4.5. Будь-яка трійка чисел $x_1 : x_2 : 0$ з даної множини $\overline{N}$ називається *однорідними координатами* невласної точки M.

Отже, поняття координат введене як для власних, так і невласних точок площини ω. При цьому якщо на звичайній (евклідовій) площині кожна точка визначається певною упорядкованою парою чисел, то на проективній площині кожній точці ставиться у відповідність навіть не трійка чисел, а ціла множина пропорційних упорядкованих трійок чисел.

Перейдемо до рівняння проективної прямої.

На евклідовій площині будь-яка пряма в декартових координатах задається рівнянням першого степеня відносно змінних x і y і навпаки.

На проективній площині має місце аналогічне твердження.

Теорема 4.6. Будь-яка проективна пряма на проективній площині задається лінійним однорідним рівнянням між однорідними координатами точок цієї прямої, і навпаки: будь-яке лінійне однорідне рівняння першого степеня з трьома змінними визначає на проективній площині проективну пряму.

Доведення. Нехай m – довільна проективна пряма, що лежить у проективній площині. Якщо ця пряма власна (звичайна), то в декартовій системі координат вона визначається рівняннями першого степеня

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

де або $A \neq 0$, або $B \neq 0$.

Візьмемо на проективній прямій власну точку $M(x, y)$; тоді її координати будуть задовольняти рівняння (4.13). Для власної точки M її однорідні координати $x_1 : x_2 : x_3$ такі, що $x_3 \neq 0$, $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$. Тому

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0, \text{ або } Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0. \qquad (4.14)$$

Якщо ж точка M – *невласна* точка прямої m, то вектор $\bar{a}(-B; A)$ не дорівнює нулю і паралельний прямій m. Якщо прийняти, що $x_1 : x_2 : x_3 = -B : A : 0$, тобто $x_1 = -\lambda B$, $x_2 = \lambda A$, $x_3 = 0$, то дістанемо

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = A(-\lambda B) + B(\lambda A) + C \cdot 0 = 0.$$

Отже, рівняння (4.14) задовольняється і координатами невласної точки прямої m.

Якщо ж точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$ не лежить на прямій, то її координати не задовольняють рівняння (4.14). Дійсно, для власної точки $M(x_1 : x_2 : x_3)$ $x_3 \neq 0$, тому $x = \dfrac{x_1}{x_3}$, $y = \dfrac{x_2}{x_3}$ будуть декартовими координатами точки M і ця точка не лежить на звичайній прямій (4.13), тому

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C \neq 0 \text{ і } Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 \neq 0.$$

Нехай тепер m – невласна пряма площини ω, тобто вона є множиною всіх невласних точок проективної площини. За означенням 4.5 для всіх таких точок $x_3 = 0$, тому *рівняння невласної прямої в однорідних координатах* має вигляд

$$x_3 = 0. \qquad (4.15)$$

Цим самим доведено, що пряма проективної площини задається однорідним лінійним рівнянням

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0,$$

де або $A \neq 0$, або $B \neq 0$, або $C \neq 0$.

Аналогічно доводиться і обернене твердження. ■

§ 37. Канонічні рівняння ліній другого порядку в проективних координатах. Проективна класифікація ліній другого порядку

Означення 4.6. *Лінією другого порядку* на проективній площині називається множина точок, координати яких задовольняють однорідне рівняння другого степеня

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0. \quad (4.16)$$

у заданому репері $R = (OXYE)$.

Нехай $x_1 : x_2 : x_3$ – однорідні координати точки на проективній площині. Тоді декартові неоднорідні координати x і y власних точок будуть виражатися через однорідні координати співвідношеннями

$$x = \frac{x_1}{x_3},\ y = \frac{x_2}{x_3},\ x_3 \neq 0.$$

Звідси випливає, що декартові координати власних точок лінії другого порядку задовольняють рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x\ y + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (4.17)$$

Це рівняння лінії другого порядку на евклідовій площині. Лінія другого порядку (4.16) на проективній площині відрізняється від лінії (4.17) на евклідовій площині тими невласними точками, в яких лінія (4.16) перетинається з невласною прямою $x_3 = 0$. Координати цих невласних точок визначаються системою рівнянь

$$\begin{cases} x_3 = 0, \\ a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \end{cases} \quad (4.18)$$

яку дістаємо з рівняння (4.16) при $x_3 = 0$. Позначимо

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Можливі такі випадки:

1. $\delta > 0$. Тоді рівняння $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$ має лише один дійсний розв'язок $x_1 = x_2 = 0$. Але однорідні координати точки не

можуть одночасно перетворюватись в нуль, тому що в цьому випадку невласна пряма $x_3 = 0$ не має з лінією (4.16) ні жодної спільної точки. Отже, у цьому випадку лінія (4.16) складається тільки з власних точок, декартові координати яких задовольняють рівняння (4.17), тобто рівняння (4.17) визначає *еліптичну лінію* другого порядку: *еліпс*, якщо його задовольняють координати більше однієї точки; або *одну точку* (точку перетину двох уявних прямих); або *уявний еліпс*.

2. $\delta < 0$. Якщо $\delta < 0$, то рівняння

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0$$

має два дійсні різні розв'язки, тобто невласна пряма $x_3 = 0$ перетинає лінію (4.16) у двох різних точках. Отже, лінія (4.16) складається з усіх власних точок лінії (4.17) і двох невласних точок, координати яких визначаються із системи (4.18).

Таким чином, при $\delta < 0$ лінія (4.17) є *гіперболічного типу*, тобто або *гіперболою*, або *парою прямих, що перетинаються*. Рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}x\ y + a_{22}y^2 = 0$$

у випадку, коли рівняння (4.17) є рівнянням гіперболи, визначає асимптотичні напрями цієї гіперболи. Тому в цьому випадку лінія (4.16) є гіперболою, доповненою невласними точками її асимптот. Якщо ж рівняння (4.17) визначає дві прямі, що перетинаються, то рівняння (4.16) визначає також дві прямі, доповнені їх невласними точками.

3. $\delta = 0$. У цьому випадку система (4.18) має єдиний ненульовий розв'язок:

$$x_1 : x_2 : x_3 = -a_{12} : a_{11} : 0 = a_{22} : -a_{12} : 0,$$

тобто невласна пряма $x_3 = 0$ має з лінією (4.16) тільки одну спільну точку.

Отже, у випадку $\delta = 0$ лінія (4.17) або є *параболою*, або складається з двох *паралельних прямих* (дійсних або уявних), або з *двох прямих, що збігаються*.

Якщо рівняння (4.17) є рівнянням *параболи*, то рівняння

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

визначає напрями прямих, паралельних її діаметрам, а лінія (4.16) є параболою, доповненою невласною точкою її діаметрів.

У випадку, коли рівняння (4.17) визначає дві паралельні прямі або дві прямі, що збігаються, то лінія, яку визначає рівняння (4.16), складається з власних точок цих прямих з їх невласними точками.

Можливий випадок, коли коефіцієнти $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$. При цьому рівняння (4.16) набуває вигляду

$$2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

Воно визначає лінію, яка складається з двох прямих – невласної прямої $x_3 = 0$ і прямої $2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$.

Якщо при цьому $a_{13} = a_{23} = 0$, то лінія, яку визначає рівняння (4.16), є подвійною невласною прямою $x_3 = 0$ і прямою $2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = 0$.

Відомо, що кожна квадратична форма

$$\varphi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 \qquad (4.19)$$

деяким невиродженим лінійним перетворенням

$$\begin{cases} x_1 = a_1x_1' + b_1x_2' + c_1x_3', \\ x_2 = a_2x_1' + b_2x_2' + c_2x_3', \\ x_3 = a_3x_1' + b_3x_2' + c_3x_3' \end{cases} \qquad (4.20)$$

може бути зведена до вигляду

$$\varphi' = \varepsilon_1 x_1'^2 + \varepsilon_2 x_2'^2 + \varepsilon_3 x_3'^2, \qquad (4.21)$$

де ε_1, ε_2, ε_3 можуть набувати значення +1, −1, 0. При цьому яким би невиродженим перетворенням (4.20) форма (4.19) не зводилась до вигляду (4.21), кількість квадратів, відмінних від нуля, а також кількість додатних і від'ємних квадратів у виразі (4.21) завжди одна й та сама.

Геометрично це означає, що кожна лінія другого порядку, задана рівнянням

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 = 0,$$

проективним перетворенням може бути зведена до одного з таких п'яти типів:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ (уявний овал);

2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (овальна лінія);

3) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ (дві уявні прямі);

4) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (дві дійсні різні прямі);

5) $x_1^2 = 0$ (дві прямі, що збігаються).

Жодну з цих п'яти ліній не можна перевести в іншу ніяким проективним перетворенням.

Отже, на проективній площині існує *п'ять* типів ліній другого порядку, тоді як на евклідовій площині – дев'ять типів.

Вправи

4.3. Колінеарне перетворення між елементами двох плоских полів ω і ω' із спільним носієм задано чотирма парами відповідних точок A і A', B і B', C і C', D і D'. Побудувати в полі ω' точку M', відповідну даній у площині ω точці M.

4.4. Колінеація двох плоских полів ω і ω' із спільним носієм задана чотирма парами відповідних точок A і A', B і B', C і C', D і D'. У полі ω дана пряма m, яка не належить жодній з даних точок. Побудуйте в полі ω' пряму m', відповідну прямій m поля ω.

4.5. Колінеація двох плоских полів ω і ω' із спільним носієм задана чотирма парами відповідних прямих a і a', b і b', c і c', d і d'. Побудувати в полі ω' точку M', відповідну даній точці M поля ω.

4.6. Колінеарна відповідність двох плоских полів ω і ω' із спільним носієм задана чотирма парами відповідних прямих a і a', b і b', c і c', d і d'. Побудувати в полі ω' пряму m', відповідну даній у полі ω прямій m.

4.7. Дано центр S, вісь s і пару відповідних у гомології точок A і A'. Вибравши довільну точку B площини, побудувати їй відповідну, вважаючи її перший раз точкою поля ω, а другий раз – точкою поля ω'.

4.8. Гомологія задана центром S, віссю s і парою відповідних точок A і A'. На прямій AA' дано точку B. Побудувати відповідну їй точку B'.

4.9. Гомологія задана центром S і двома парами відповідних прямих a і a', b і b'. Для даної точки B поля ω побудувати відповідну точку B' плоского поля ω'.

4.10. Гомологія задана невласним центром S_∞, власною віссю s і парою відповідних точок A і A'. Побудувати для даної точки M поля ω відповідну точку M' поля ω'.

4.11. Гомологія задана центром S, парою відповідних точок A і A' та невласною віссю s. Побудувати для даної точки B поля ω відповідну точку B' поля ω'.

4.12. Гомологію задано невласним центром S_∞, невласною віссю s_∞ і парою відповідних точок A і A'. Для даної точки М плоского поля ω побудувати відповідну точку M' плоского поля ω′.

4.13. Колінеація плоского поля в однорідних проективних координатах задана формулами

$$\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + x_2 - 3x_3, \\ \rho x_2' = x_1 - 3x_2 - 2x_3, \\ \rho x_3' = 3x_1 - x_2 + x_3. \end{cases}$$

Знайти образи точок $A(-1 : 2 : 1)$, $B(2 : 0 : -1)$ у даному перетворенні.

4.14. Знайти координати вершин базисного трикутника OXY в однорідних проективних координатах.

4.15. Сторони базисного трикутника проективної системи координат відносно декартової системи координат задано рівняннями

$$x - 4 = 0,$$
$$y + 3 = 0,$$
$$x - y - 1 = 0.$$

Знайти однорідні проективні координати точки D, якщо її декартові координати (1; 3), а одиничною є точка $E(2; -1)$.

4.16. Сторонами базисного трикутника проективної системи координат є прямі $x - 4 = 0$, $y - 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$, а одиничною точкою – точка $E(3; 2)$ відносно декартової системи координат. Знайти декартові координати точки D, однорідні проективні координати якої $(1 : 2 : 1)$.

4.17. Написати в однорідних проективних координатах рівняння сторін базисного (координатного) трикутника і рівняння довільної прямої, що проходить через одну з його вершин.

4.18. Лінія другого порядку проходить через вершини координатного трикутника. Написати її рівняння в однорідних проективних координатах.

4.19. Знайти рівняння прямих, які відповідають осям координат і невласній прямій XY, у колінеації, що визначається в декартових координатах формулами

$$x' = \frac{x + 2y + 1}{x + y + 2}, \quad y' = \frac{2x - y + 3}{x + y + 2}.$$

4.20. Колінеарне перетворення плоских полів у декартових координатах задано формулами

$$x' = \frac{2x + y - 1}{x + y + 1}, \quad y' = \frac{x - y + 5}{x + y + 1}.$$

Знайти формули оберненого перетворення.

4.21. Знайти в декартових координатах формули колінеарного перетворення, яке перетворює одиничний квадрат $O(0; 0)$, $E_1(1; 0)$, $E_2(0; 1)$, $E(1; 1)$ у ромб $O'(0; 0)$, $E'_1(4; 1)$, $E'_2(-4; 1)$, $E'(0; 2)$.

4.22. Колінеарне перетворення плоского поля ω у плоске поле ω′ задане чотирма парами відповідних точок: $A(0 : 1 : 2)$ і $A'(1 : 0 : 0)$, $B(1 : -2 : 1)$ і $B'(0 : 0 : 1)$, $C(1 : 1 : -1)$ і $C'(2 : 1 : 1)$, $D(-1 : 2 : 2)$ і $D'(1 : 0 : 1)$. Знайти формули цього перетворення в однорідних проективних координатах.

5

Р о з д і л

Група проективних перетворень та її підгрупи

§ 38. Група проективних перетворень (колінеацій)

Нехай маємо множину G геометричних перетворень $f_1, f_2, f_3, \dots$. За бінарну операцію на множині G візьмемо *композицію* двох перетворень f_1 і f_2, тобто кожній упорядкованій парі геометричних перетворень (f_1, f_2) із G відповідає нове геометричне перетворення $f \in G$ таке, що $f = f_2 \circ f_1$.

Означення 5.1. Множина G всіх геометричних перетворень фігури F називається *групою*, якщо в цій множині:
1) композицією будь-яких двох перетворень множини G є перетворення цієї ж множини;
2) композиція перетворень асоціативна;
3) тотожне перетворення f_0 належить множині G;
4) для кожного перетворення f множини G існує обернене перетворення f^{-1}.

Перелічені в цьому означенні чотири умови називаються *груповими* властивостями. Щоб переконатись, що певна множина геометричних перетворень утворює групу, треба довести виконання усіх групових властивостей на цій множині. В елементарній геометрії доводилось, що групу геометричних перетворень площини утворюють множина всіх паралельних перенесень площини, множина усіх поворотів із спільним центром, множина усіх переміщень площини, множина усіх подібних перетворень площини.

Доведемо, що множина проективних перетворень площини (колінеацій) утворює групу. Позначимо множину всіх колінеацій площини $\{K\} = \{ K_1, K_2, K_3, \dots\}$.

1. Розглянемо композицію двох колінеацій K_1 і K_2, тобто $\omega_1 = K_1(\omega)$ і $\omega_2 = K_2(\omega_1)$. Візьмемо на площині ω пряму a і їй належну точку A. У площині ω_1 прямій a відповідає пряма a_1, точці A – точка A_1 в колінеації K_1. Інцидентність точки і прямої колінеацією не порушується, тому точка A_1 належить прямій a_1:

$$A_1 = K_1(A),\ a_1 = K_1(a),\ A_1 \in a_1. \tag{5.1}$$

Колінеація K_2 відображає площину ω_1 на площину ω_2, пряму $a_1 \in \omega_1$ – у пряму $a_2 \in \omega_2$, точку $A_1 \in \omega_1$ у точку $A_2 \in \omega_2$, тобто

$$a_2 = K_2(a_1),\ A_2 = K_2(A_1),\ A_2 \in a_2. \tag{5.2}$$

Отже, у результаті послідовного виконання двох колінеацій K_1 і K_2 площина ω переходить у площину ω_2, пряма a – у пряму $a_2 \in \omega_2$, точка A – у точку A_2, причому із $A \in a$ випливає, що $A_2 \in a_2$.

Із співвідношень (5.1) і (5.2) маємо:

$$A_2 = K_2(A_1) = K_2(K_1(A)) \Rightarrow A_2 = (K_2 \circ K_1)(A),$$
$$a_2 = K_2(a_1) = K_2(K_1(a)) \Rightarrow a_2 = (K_2 \circ K_1)(a).$$

Таким чином, композиція двох колінеацій є колінеацією.

2. З множини $\{K\}$ візьмемо три колінеації K_1, K_2, K_3. Нехай

$A \in \omega,\ a \in \omega,\ A \in a$.

Тоді $A_1 = K_1(A),\ a_1 = K_1(a),\ A_1 \in a_1$;

$A_2 = K_2(A_1),\ a_2 = K_2(a_1),\ A_2 \in a_2;\ \ A_2 = (K_2 \circ K_1)(A)$,

$a_2 = (K_2 \circ K_1)(a)$.

$$A_3 = K_3(A_2) = (K_3 \circ K_2)(A_1) = [(K_3 \circ K_2) \circ K_1](A), \tag{5.3}$$

$$a_3 = K_3(a_2) = (K_3 \circ K_2)(a_1) = [(K_3 \circ K_2) \circ K_1](a) \tag{5.4}$$

або

$$A_3 = [K_3 \circ (K_2 \circ K_1)](A), \tag{5.3'}$$

$$a_3 = [K_3 \circ (K_2 \circ K_1)](a). \tag{5.4'}$$

У результаті композиції $(K_3 \circ K_2) \circ K_1$ точка A переходить в точку A_3, пряма a – у пряму a_3, $A \in a \Rightarrow A_3 \in a_3$, і композиція $K_3 \circ (K_2 \circ K_1)$ теж переводить точку A в точку A_3, пряму a – у пряму a_3, і належність не порушується: $A \in a$, то $A_3 \in a_3$, тобто $(K_3 \circ K_2) \circ K_1 = K_3 \circ (K_2 \circ K_1)$.

Отже, композиція колінеацій асоціативна.

3. Припустимо, що колінеація відображає кожну точку A площини ω в точку A, пряму a – у пряму a і при цьому інцидентність точки і прямої не порушується, тобто всі елементи площини залишаються нерухомими. Таке перетворення площини називається *тотожним*. Але при цьому вимоги означення колінеацій виконуються. Тому серед множини колінеацій існує *тотожна колінеація* K_0.

4. Оскільки колінеації є взаємно однозначними відображеннями однієї площини на іншу, то для кожної колінеації K із множини $\{K\}$ існує у множині $\{K\}$ обернене перетворення K^{-1}, яке також є колінеацією. Якщо колінеація K відображає площину ω на площину ω_1, а потім виконаємо колінеацію K^{-1}, то площина ω_1 відобразиться на площину ω, тобто будемо мати тотожну колінеацію. Отже, композиція колінеації K і її оберненої колінеації K^{-1} є тотожною колінеацією: $K \circ K^{-1} = K_0$.

Таким чином, у множині всіх колінеацій виконуються всі групові властивості, тому множина всіх колінеацій утворює групу колінеацій, або групу проективних перетворень. Предметом проективної геометрії є інваріанти групи проективних перетворень.

§ 39. Група афінних перетворень (як підгрупа групи проективних перетворень)

При афінних перетвореннях площини ω у площину ω' точка відображається на точку, пряма – на пряму, інцидентність точки і прямої не порушується. Отже, афінні перетворення є колінеаціями. Але афінні перетворення, крім того, мають ще такі властивості, як інваріантність паралельності прямих та інваріантність простого відношення трьох точок, яких немає в проективних перетвореннях.

Теорема 5.1. Щоб колінеація була афінною, необхідно і достатньо, щоб невласна пряма площини ω відображалась на невласну пряму відповідної площини ω'.

Доведення.

1. Необхідність. Нехай між площинами ω і ω' встановлено афінну відповідність. Тоді двом паралельним прямим $m \parallel n$ площини ω відповідають у площині ω' теж паралельні прямі $m' \parallel n'$. Але на проективній площині «паралельні» прямі перетинаються у невласній точці M_∞. Оскільки інцидентність точок при афінному перетворенні не порушується, то невласній точці M_∞ буде відповідати невласна точка M'_∞ перетину прямих m' і n'. Точка M_∞ належить невласній прямій u_∞ площини ω, а точка M'_∞ належить невласній прямій u'_∞ площини ω', тому невласна пряма u_∞ відображається на невласну пряму u'_∞. Отже, якщо між площинами ω і ω' встановлена афінна відповідність, то невласній прямій u_∞ площини ω відповідає невласна пряма u'_∞ площини ω'. Необхідність доведена.

2. Достатність. Нехай площини ω і ω' знаходяться в колінеарній відповідності, причому невласній прямій u_∞ площини ω відповідає невласна пряма u'_∞ площини ω', а прямій $m \in \omega$ відповідає пряма $m' \in \omega'$. Візьмемо на прямій m три точки A, B, C і знайдемо відповідні їм точки A', B', C' на прямій m', відповідній прямій m. За умовою теореми невласній точці M_∞ прямої m відповідає невласна точка M'_∞ прямої m'. Подвійне відношення чотирьох точок є інваріантом колінеації, тому $(AB, CD_\infty) = (A'B', C'D'_\infty)$. Але $(AB, CD_\infty) = (AB, C)$ і $(A'B', C'D'_\infty) = (A'B', C')$, то $(AB, C) = (A'B', C')$.

Одержали інваріант афінної колінеації, яким вона повністю визначається, а це свідчить, що дана колінеація є афінною.

Теорему доведено. ■

Наслідок. Якщо два плоскі поля ω і ω' мають спільний носій – площину ω, то при афінних колінеаціях невласна пряма u_∞ площини ω перетворюється сама в себе.

Теорема 5.2. Афінні колінеації утворюють групу.

Доведення. У проективній площині ω будь-яку пряму можна назвати невласною. Нехай пряма u_∞ – невласна. Встановимо афінну колінеацію між елементами площини ω, тоді пряма u_∞ відображається на себе. Покажемо, що множина всіх афінних колінеацій $\{A\}$ утворює групу.

Нехай A_1 і A_2 – дві афінні колінеації множини $\{K\}$, тоді композиція $A_1 \circ A_2$ цих колінеацій теж буде колінеацією, бо невласна пряма u_∞ сама собі відповідає: $A_1 \circ A_2 = A$. Отже, перша групова властивість виконується. Аналогічно можна переконатись, що виконуються і всі інші групові властивості.

Таким чином, множина афінних колінеацій утворює групу перетворень $\{A\}$. Але в групі $\{A\}$ є такі властивості (паралелізм і просте відношення трьох точок), яких немає в групі $\{K\}$. Тому група афінних перетворень $\{A\}$ є підгрупою групи проективних перетворень $\{K\}$.

Геометрія, яка вивчає інваріанти групи афінних колінеацій, називається *афінною*.

Властивості фігур називаються *афінними*, якщо вони не змінюються при афінних колінеаціях. З'ясуємо деякі афінні властивості фігур на проективній площині.

1. Візьмемо довільну пряму проективної площини за невласну пряму u_∞. Кожна точка невласної прямої u_∞ невласна, тому якщо дві прямі a і b мають спільну точку A_∞ на прямій u_∞, то треба вважати прямі a і b «паралельними» в афінному розумінні. Якщо прямим a і b відповідають у вибраній колінеації прямі a' і b', то вони теж повинні перетинатись у точці A'_∞ на прямій u_∞, тобто прямі a' і b' теж «паралельні» (рис. 2.111).

Отже, *паралельність прямих є інваріантом групи афінних перетворень $\{A\}$, це поняття афінне.*

2. Аналогічно можна дістати узагальнене поняття простого відношення трьох точок прямої. Нехай пряма u_∞ – невласна. На прямій a візьмемо три точки A, B, C – власні, D_∞ – точка перетину прямої a з прямою u_∞ невласна. Тоді $(AB, CD_\infty) = (AB, C)$ (рис. 2.112). В афінній колінеації пряма u_∞ відображається сама на себе, тому невласній точці D_∞ відповідає невласна точка D'_∞ прямої a', афінно відповідної прямій a, точкам A, B, C відповідають точки A', B', C'. Оскільки подвійне відношення чотирьох точок прямої не змінюється при будь-якій колінеарній відповідності, то $(AB, CD_\infty) = (A'B', C'D'_\infty)$. Оскільки $(AB, CD_\infty) = (AB, C)$, $(A'B', C'D'_\infty) = (A'B', C')$, то $(AB, C) = (A'B', C')$.

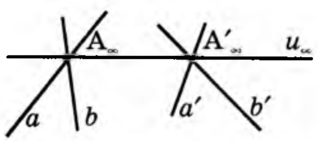


Рис. 2.111

Отже, *просте відношення трьох точок прямої є інваріантом групи афінних перетворень $\{A\}$, тобто це поняття афінне.*

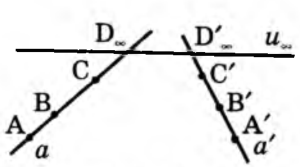


Рис. 2.112

3. Ділення відрізка *навпіл* є тим випадком, коли подільча точка гармонічно спряжена з невласною точкою прямої. Тому точка B ділить відрізок AC навпіл, якщо $(AC, BD_\infty) = -1$ (рис. 2.112).

Отже, *властивість точки ділити відрізок пополам є поняттям афінним.*

4. З'ясуємо суть афінних координат точки на проективній площині. Нехай проективна система координат задана трикутником $O'X'Y'$, в якому пряма $X'Y'$ – невласна. Тоді, оскільки з афінного погляду пряма $X'Y'$ – нескінченно віддалена, то $O'X' \parallel E'_2E'$, $O'Y' \parallel E'_1E'$, $M'_2M' \parallel O'X'$, $M'_1M' \parallel O'Y'$.

Неоднорідні координати x' і y' точки M':

$$x' = (M'_1E'_1, O'X') = (M'_1E'_1, O') = \frac{M'_1O'}{E'_1O'},$$

$$y' = (M'_2E'_2, O'Y') = (M'_2E'_2, O') = \frac{M'_2O'}{E'_2O'}.$$

Отже, *афінні координати точки на проективній площині є окремим випадком проективних координат, коли невласна (нескінченно віддалена) пряма площини відображається сама на себе.*

Аналогічно можна ввести інші афінні поняття на проективній площині.

5. Розглянемо афінні властивості *ліній другого порядку*. Як уже зазначалося, при центральному проектуванні, а отже, і при проективному перетворенні лінія другого порядку одного типу може відображатись в лінію другого порядку іншого типу (коло – в еліпс, еліпс – в гіперболу чи параболу і т.д). Тому в проективній геометрії всі невироджені лінії другого порядку належать одному класу і називаються *овалами*, і вивчаються лише ті їх властивості, які є спільними, незмінними для кола, еліпса, гіперболи, параболи при центральному проектуванні, тобто вивчаються лише їх проективні властивості як властивості ряду другого порядку.

Основною особливістю лінії другого порядку є те, що будь-яка пряма з будь-якою лінією другого порядку не може мати більше двох спільних точок, тобто їх може бути дві, одна або жодної. На проективній площині таку ж властивість має і невласна пряма. Поділ ліній другого порядку на гіперболи, параболи і еліпси пов'язаний саме з кількістю точок перетину цієї лінії з невласною прямою.

У проективному розумінні кількість спільних точок лінії k^2 з невласною прямою не є величиною сталою, оскільки при проективному перетворенні невласна пряма може відображатись на власну.

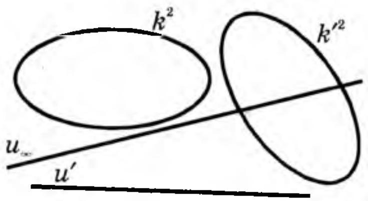


Рис. 2.113

На рис. 2.113 крива k^2 – «еліпс», а її образ k'^2 – гіпербола.

При афінному перетворенні невласна пряма відображається сама на себе, тому кількість точок перетину лінії другого порядку з невласною прямою u_∞ є інваріантом, є афінною властивістю. Тому *класифікація ліній другого порядку на еліпси, гіперболи, параболи є афінною.*

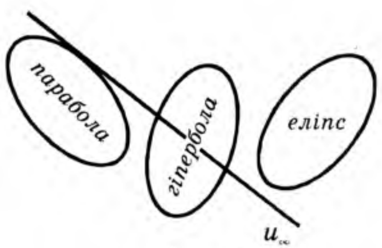


Рис. 2.114

Гіперболою називають лінію другого порядку, яка має з невласною прямою дві дійсні точки перетину. Лінія другого порядку, яка має з невласною прямою одну спільну точку, називається *параболою*; лінія другого порядку, яка не має з невласною прямою дійсних спільних точок, називається *еліпсом* (рис. 2.114).

Центром лінії другого порядку називається точка, яка ділить навпіл усі хорди, що проходять через неї. Звідси випливає, що центр кривої k^2 гармонічно спряжений з невласною точкою прямої, на якій лежить хорда. Множина таких невласних точок є невласною прямою площини. Отже, з проективної точки зору *центром лінії другого порядку є полюс невласної прямої площини.* За властивостями полюса і поляри: якщо крива k^2 не має спільних точок з невласною прямою, то центром такої лінії є внутрішня точка (еліпс); якщо крива k^2 має одну спільну точку з невласною прямою (парабола), то її центром є ця спільна точка, тобто центром параболи є невласна точка; якщо крива k^2 має дві спільні точки з невласною прямою (гіпербола), то її центром є зовнішня точка. Оскільки при афінних колінеаціях невласна пряма переходить сама в себе, то центр лінії другого порядку при таких перетвореннях переходить у центр відповідної лінії. Тому *поняття центра лінії другого порядку є афінним поняттям.*

Аналогічно можна переконатись, що проективні поняття спряжених точок і спряжених діаметрів лінії другого порядку також є і афінними поняттями, оскільки вони визначаються через полюс і поляру.

§ 40. Евклідова геометрія з проективної точки зору

В афінній колінеації не зберігається форма фігури: квадрат відображається на паралелограм, коло – на еліпс і т.д. Форма фігури зберігається в евклідовій (метричній) геометрії. З'ясуємо, інваріанти якої підгрупи колінеацій вивчає евклідова геометрія. Одним із важливих інваріантів евклідової геометрії є поняття перпендикулярності прямих. Розглянемо це поняття з погляду афінних перетворень, в яких поняття перпендикулярності прямих не є інваріантом. Візьмемо два пучки прямих з спільним центром S і встановимо відповідність таку, що кожній прямій a першого пучка відповідною в другому пучку є пряма a', перпендикулярна прямій a. Тоді кути між парами відповідних прямих рівні між собою.

Означення 5.2. Два пучки прямих, в яких кути між будь-якими відповідними парами прямих рівні, називаються *рівними* (конгруентними).

Оскільки подвійні відношення чотирьох прямих пучка виражаються через синуси рівних кутів, утворених прямими пучка, то в рівних пучках подвійні відношення чотирьох прямих рівні між собою. Тому відповідність перпендикулярних прямих у даному пучку S *проективна.* Крім того, кожна пара перпендикулярних прямих взаємно відповідна: якщо $a \to a'$, то $a' \to a$. Отже, ця відповідність у пучку S є інволюцією, її називають *ортогональною інволюцією.*

Жодні дві відповідні (перпендикулярні) прямі не можуть збігатися, тому ортогональна інволюція не має подвійних прямих, тобто вона є *еліптичною інволюцією прямих пучка.*

На невласній прямій відповідні прямі пучка S проектують відповідні пари невласних точок, які утворюють на ній також еліптичну інволюцію невласних точок.

Означення 5.3. Еліптична інволюція точок невласної прямої називається *абсолютною інволюцією.*

Звідси випливає таке проективне означення перпендикулярності прямих.

Означення 5.4. Дві прямі називаються *перпендикулярними,* якщо їх невласні точки є парою відповідних точок абсолютної інволюції.

Означення 5.5. Невласна пряма і абсолютна інволюція на ній називаються *абсолютом площини.*

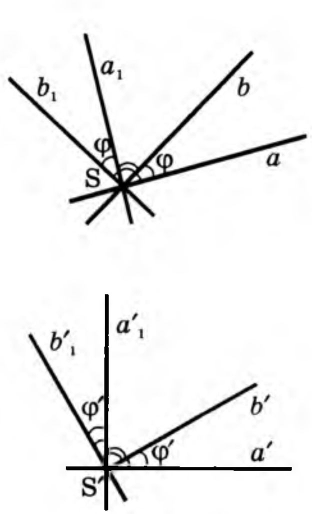


Рис. 2.115

Отже, група перетворень евклідової геометрії повинна залишати незмінним абсолют площини, тобто треба знайти таку множину колінеацій, інваріантом в якій була б не тільки невласна пряма, а й абсолютна інволюція на ній. Позначимо цю множину $\{\Pi\}$. Можна довести, що така множина $\{\Pi\}$ утворює *групу*. Дійсно, композиція будь-яких двох колінеацій Π_1 і Π_2 з множини $\{\Pi\}$ є теж колінеацією $\Pi_3 = \Pi_2 \circ \Pi_1$ з множини $\{\Pi\}$, оскільки кожна з колінеацій Π_1 і Π_2 переводить абсолют площини в себе. Аналогічно множна переконатись у виконанні інших групових властивостей.

З попередніх міркувань випливає, що колінеації з множини $\{\Pi\}$ будь-яку пару перпендикулярних прямих переводять теж у пару перпендикулярних прямих. Крім того, можна довести інваріантність будь-якого кута в таких колінеаціях.

Теорема 5.3. Кожна колінеація Π з групи $\{\Pi\}$ відображає кут, утворений двома прямими пучка S, у рівний йому кут, утворений двома відповідними прямими пучка S'.

Доведення. Нехай маємо пучок прямих з центром $S(a, b, \ldots)$. Позначимо гострий кут $\angle(a, b) = \varphi$. Проведемо прямі $a_1 \perp a$ і $b_1 \perp b$ (рис. 2.115).

Тоді $\angle(a_1, b_1) = \varphi < 90^\circ$.

Колінеація $\Pi \in \{\Pi\}$ відображає четвірку прямих a, b, a_1, b_1 у четвірку відповідних прямих a_1, b_1, a'_1, b'_1. Але колінеації з $\{\Pi\}$ зберігають перпендикулярність прямих, тому $a'_1 \perp a'$ і $b'_1 \perp b'$.

Обчислимо подвійне відношення чотирьох прямих a, b, a_1, b_1:

$$(ab, a_1b_1) = \frac{\sin(\widehat{a, a_1})\sin(\widehat{b, b_1})}{\sin(\widehat{b, a_1})\sin(\widehat{a, b_1})} = \frac{1}{\cos\varphi \cdot \cos\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad \varphi < 90^\circ.$$

Аналогічно для четвірки прямих a', b', a'_1, b'_1 знайдемо

$$(a'b', a'_1b'_1) = \frac{1}{\cos^2\varphi'}, \quad \varphi' < 90^\circ.$$

Оскільки $(ab, a_1b_1) = (a'b', a'_1b'_1)$, то $\dfrac{1}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi'}$ і $\varphi = \varphi'$.■

Наслідки

1. Відповідні в колінеаціях $\{\Pi\}$ трикутники подібні. Дійсно, за доведеною теоремою відповідні кути рівні при колінеаціях $\{\Pi\}$, а два трикутники з рівними відповідними кутами подібні.
2. Відповідні в колінеаціях $\{\Pi\}$ многокутники подібні. Справедливість наслідку 2 випливає з того, що відповідні многокутники можна розбити на скінченне число трикутників.
3. Будь-яка фігура Φ колінеаціями з множини $\{\Pi\}$ відображається на подібну їй фігуру Φ'.
4. Відношення двох відповідних відрізків у колінеаціях $\{\Pi\}$ має сталу величину.

Справді, якщо два відрізки AB і CD колінеацією Π відобразились на відрізки $A'B'$ і $C'D'$, то чотирикутники $ABCD$ і $A'B'C'D'$ подібні, тому $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{CD}{C'D'}$.

Доведена теорема 5.3 та наслідки з неї дають можливість зробити такий висновок:

колінеації Π є перетвореннями подібності. Групу колінеацій $\{\Pi\}$ називають групою подібності.

Оскільки в групі $\{\Pi\}$ мають місце всі інваріанти афінної групи $\{A\}$, а крім того, мають місце інваріанти, яких немає в групі $\{A\}$, то група подібності є *підгрупою* групи афінних колінеацій, а отже, і підгрупою всіх колінеацій (проективних).

Групу подібності ще називають *головною* групою евклідової геометрії (за означенням Ф. Клейна).

Отже, предметом евклідової геометрії є інваріанти групи подібності.

Твердження евклідової геометрії можна довести, користуючись абсолютом площини. Приведемо декілька прикладів.

Теорема 5.4. Через будь-яку точку A в площині можна провести одну і тільки одну пряму, перпендикулярну даній прямій.

Доведення. Нехай дана пряма a, позначимо її невласну точку A_∞. В абсолютній інволюції існує єдина точка A'_∞, відповідна точці A_∞. Точці A'_∞ відповідає власна пряма $a' = AA'_\infty$, яка буде перпендикулярною до прямої a (за означенням 5.4).

Теорема 5.5. Довести, що висоти трикутника перетинаються в одній точці.

Доведення. Нехай у трикутнику $BB_1 \perp AC$ і $AA_1 \perp BC$ – висоти трикутника, O – точка їх перетину.

Назвемо пряму u_∞ невласною, тоді точки $A'_\infty = BC \times u_\infty$ і $A''_\infty = AA_1 \times u_\infty$, $B'_\infty = AC \times u_\infty$ і $B''_\infty = BB_1 \times u_\infty$ – дві пари відповідних точок в абсолютній інволюції. Треба довести, що $CO \perp AB$, тобто щоб точки $C'_\infty = AB \times u_\infty$ і $C''_\infty = CO \times u_\infty$ були парою відповідних точок у цій же абсолютній інволюції (рис. 2.116).

За другою теоремою Дезарга три пари протилежних сторін повного чотиривершинника $ABCO$ перетинають пряму u_∞ у трьох парах відповідних точок однієї інволюції, тобто

AO і BC перетинають u_∞ в точках A'_∞ і A''_∞,

BO і AC перетинають u_∞ в точках B'_∞ і B''_∞,

CO і AB перетинають u_∞ в точках C'_∞ і C''_∞.

Пари точок A'_∞ і A''_∞, B'_∞ і B''_∞ належать абсолютній інволюції, тому точки C'_∞ і C''_∞ також є парою відповідних точок абсолютної інволюції. Отже, $CO \perp AB$, тобто третя висота CC_1 трикутника ABC теж проходить через точку O перетину перших двох висот AA_1 і BB_1.

Теорему доведено.∎

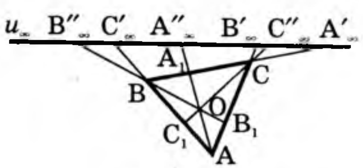


Рис. 2.116

Теорема 5.6. Довести, що діагоналі паралелограма $ABCD$ діляться точкою перетину навпіл.

Доведення. Нехай діагоналі AC і BD перетинаються в точці M, а пари протилежних сторін $AD \times BC = P_\infty$, $AB \times CD = R_\infty$ (рис. 2.117).

Тоді пряма $P_\infty R_\infty = u_\infty$ – невласна пряма, оскільки точки P_∞ і R_∞ – невласні. Приймемо паралелограм $ABCD$ за повний чотиривершинник. Якщо позначити точки перетину його сторін BD і AC з невласною прямою u_∞ через F_∞ і E_∞, то дістанемо гармонічні четвірки точок $(DB,\ MF_\infty) = -1$ і $(AC,\ ME_\infty) = -1$. Звідси випливає, що точка M є серединою сторін AC і BD (як гармонічно спряжена з невласними точками F_∞ і E_∞). Отже, діагоналі AC і BD паралелограма точкою їх перетину діляться навпіл.

Теорему доведено.∎

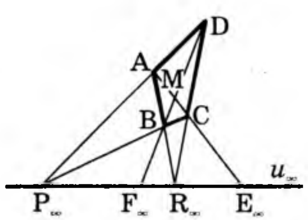


Рис. 2.117

Задача 5.1. Дано невласну пряму і абсолютну інволюцію на ній, а також дано сторону AB і напрям m діагоналі AC прямокутника. Побудувати прямокутник.

Розв'язання. Нехай абсолютна інволюція на невласній прямій u_∞ задана двома парами відповідних невласних точок P_∞, P'_∞, і R_∞, R'_∞ (рис. 2.118).

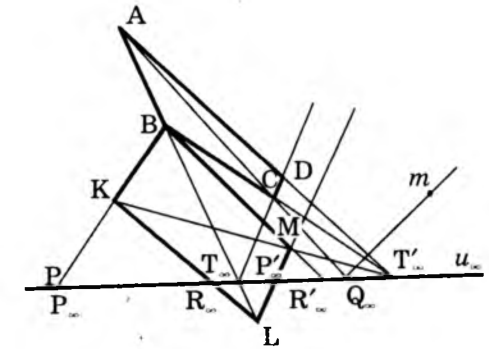


Рис. 2.118

Продовжимо дану сторону AB шуканого прямокутника до перетину з невласною прямою u_∞ в точці T_∞. Точку перетину даної прямої m з прямою u_∞ позначимо через Q_∞. Тоді діагональ AC прямокутника пройде через точку Q_∞. Побудуємо повний чотиривершинник $KLMB$, тоді за другою теоремою Дезарга знайдемо точку $T'_\infty = KM \times u_\infty$, відповідну точці T_∞ в даній інволюції.

Потім знайдемо точки $C = T'_\infty B \times AQ_\infty$ і $D = T_\infty C \times T'_\infty A$.

У такий спосіб побудований чотирикутник $ABCD$ є шуканим прямокутником. У ньому пари протилежних сторін AD і BC, AB і DC перетинаються у невласних точках T'_∞ і T_∞, тому вони попарно паралельні, а кути – прямі, оскільки кут BAD – прямий за побудовою.

§ 41. Група рухів

Пригадаємо деякі властивості рухів в евклідовій геометрії.

Означення 5.6. ***Рухом*** називається перетворення площини, яке зберігає відстані між відповідними точками.

Властивості

1. Рух відображає пряму в пряму і зберігає взаємне розміщення точок прямої.

   Дійсно, нехай точки A, B, C лежать на прямій a, причому точка B лежить між точками A і C (рис. 2.119). Тоді $AC = AB + BC$. A', B', C' – образи точок A, B, C при якомусь русі f. За означенням руху $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $A'C' = AC$, тому $A'B' + B'C' = A'C'$, а це означає, що точки

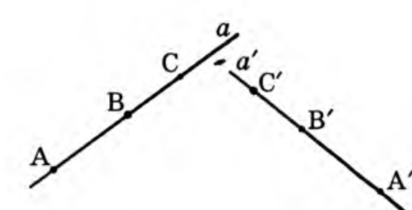


Рис. 2.119

A', B', C' лежать на одній прямій a' і точка B' лежить між точками A' і C'.

2. Рух відображає відрізок у рівний йому відрізок, промінь у промінь.
3. Рух зберігає просте відношення трьох точок прямої.
4. Рух зберігає величину кутів, утворених відповідними прямими.
5. Відповідні при русі фігури рівні.

Прикладами рухів є *паралельне перенесення, центральна і осьова симетрії, поворот навколо точки.*

На основі того, що довжина відрізка є інваріантом руху, можна довести, що множина рухів *утворює групу рухів.*

Зрозуміло, що група рухів є підгрупою групи подібності, а отже, підгрупою афінних і проективних колінеацій.

Геометрією групи рухів є *метрична* геометрія Евкліда.

В елементарній евклідовій геометрії доводиться, що кожний рух можна подати як *композицію певної кількості осьових симетрій.*

Тому щоб дати проективне тлумачення рухів, досить ввести поняття осьової симетрії як окремого виду колінеацій.

Нехай маємо осьову симетрію з віссю s і трикутник ABC. Образом цього трикутника в даній осьовій симетрії є трикутник $A'B'C'$, при цьому прямі AA', BB', CC' паралельні між собою і перпендикулярні осі симетрії s. Прямі AA', BB', CC' належать пучку прямих з центром у невласній точці S_∞ (рис. 2.120), вісь симетрії s – незмінна, усі її точки – подвійні. Тому осьову симетрію можна розглядати як афінну гомологію з центром у невласній точці S_∞ і віссю s гомології (прямі, що проходять через точку S_∞, подвійні, вісь симетрії s – подвійна пряма). Оскільки прямі AA', BB', CC' перпендикулярні осі s, то у випадку осьової симетрії центру S_∞ гомології відповідає в абсолютній інволюції невласна точка S'_∞ осі гомології s.

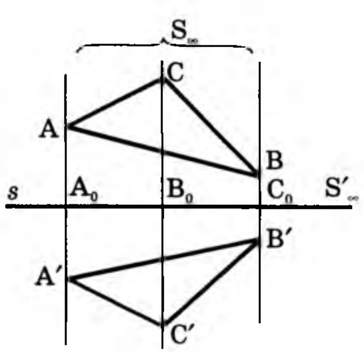


Рис. 2.120

На основі цього можна дати *проективне* означення осьової симетрії.

Означення 5.7. Осьова симетрія є *афінною гомологією*, невласний центр якої відповідає в абсолютній інволюції невласній точці осі гомології.

Оскільки в осьовій симетрії вісь симетрії відображається на себе, а всі прямі, що сполучають відповідні точки, перпендикулярні осі симетрії, то можна сказати, що *осьова симетрія перетворює абсолютну інволюцію в себе.*

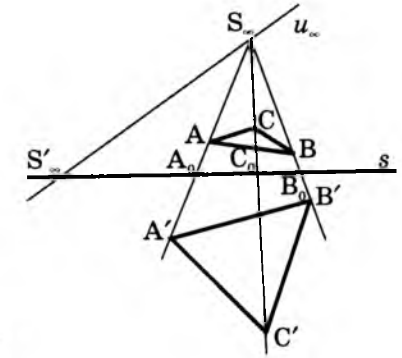


Рис. 2.121

Проективне зображення осьової симетрії можна дістати таким чином. Візьмемо довільну пряму u_∞ за невласну з абсолютною інволюцією на ній (рис. 2.121). Осьова симетрія є афінною гомологією, невласний центр якої відповідає у вибраній інволюції невласній точці осі гомології. Отже, центром S такої осьової симетрії (гомології) буде невласна точка, відповідна невласній точці S'_∞ осі симетрії $s(S'_\infty = u_\infty \times s)$. Звідси випливає, що прямі, які сполучають відповідні точки, проходять через невласну точку S_∞. Побудувавши точку S_∞ як образ точки S'_∞ в еліптичній інволюції на прямій u_∞, зможемо будувати образи даних точок в осьовій симетрії. Наприклад, для побудови точки A', симетричної точці A, проводимо пряму $S_\infty A$, яка перетне пряму s у точці A_0. Тоді точка A' є четвертою гармонічною до трійки точок S_∞, A_0, A, спряженою з точкою A. Аналогічно будуємо образи точок B і C. На рис. 2.121 маємо трикутники ABC і $A'B'C'$, симетричні відносно прямої s.

Зауважимо, що точки A_0, B_0, C_0 є середини відрізків AA', BB', CC' як гармонічно спряжені невласній точці S_∞ відповідно прямих AA', BB', CC'.

Проективні означення паралельного перенесення, повороту навколо точки, центральної симетрії можна дістати як композицію двох певним чином підібраних осьових симетрій [25, § 71].

§ 42. Групова точка зору на геометрію

Раніше з групової точки зору розглянуто проективну, афінну і евклідову геометрії. Тепер сформулюємо групову точку зору на геометрію у загальному вигляді.

Нехай дані множина $M = \{A, B, C, \ldots\}$, елементи якої назвемо *точками*, і група $H = \{f_1, f_2, \ldots\}$ перетворень множини M. Будь-яку множину точок, як підмножину множини M, будемо називати фігурою F.

Означення 5.8. Фігура F_1 називається *еквівалентною* фігурі F_2, якщо в групі H існує перетворення, яке фігурі F_1 ставить у відповідність фігуру F_2. Позначають $F_1 \sim F_2$.

Відношення еквівалентності має *властивості:*

1) *рефлексивності*, тобто кожна фігура F еквівалентна сама собі;
2) *симетричності*, тобто якщо фігура F_1 еквівалентна фігурі F_2, то фігура F_2 також еквівалентна фігурі F_1;
3) *транзитивності*, тобто якщо фігура F_1 еквівалентна фігурі F_2, а фігура F_2 еквівалентна фігурі F_3, то фігура F_1 еквівалентна фігурі F_3.

Отже, еквівалентність фігур має ті самі властивості, що і відношення рівності фігур.

Геометричними властивостями фігури називають такі її властивості, які інваріантні відносно перетворень групи H.

З названих властивостей еквівалентності випливає, що геометричні властивості еквівалентних фігур однакові.

Означення 5.9. Множина всіх геометричних властивостей фігур називається *геометрією* групи H у просторі M.

Такий погляд на геометрію вперше висловив німецький математик Ф. Клейн у своїй Ерлангенській програмі (1872).

Поряд з геометрією групи H можна розглядати і геометрію її підгрупи K. Дві фігури F_1 і F_2, еквівалентні в геометрії підгрупи K, завжди еквівалентні і в геометрії групи H, оскільки перетворення f групи K, яке переводить фігуру F_1 в фігуру F_2, буде належати і групі H. Обернене твердження неправильне: перетворення групи H може не належати до перетворень її підгрупи K. Тому дві фігури, еквівалентні в геометрії групи H, можуть бути нееквівалентними в геометрії підгрупи K. Отже, поняття еквівалентності фігур зменшується за обсягом при переході від геометрії групи до геометрії її підгрупи.

Для геометричних властивостей має місце обернене співвідношення: властивість, інваріантна відносно групи H, буде інваріантною і в підгрупі K, але із інваріантності властивості відносно підгрупи K не випливає її інваріантність відносно всієї групи H.

Раніше було показано, що афінна група є підгрупою проективної групи, до афінної групи входять ті перетворення, які залишають незмінною невласну пряму площини, афінні властивості фігури – це проективні властивості відносно невласної прямої. Головна група (група подібності) – це група евклідової геометрії. До неї належать ті проективні перетворення, які залишають незмінним абсолют евклідової площини; евклідові властивості фігур – це проективні властивості фігури відносно абсолюта.

Групова точка зору відіграла досить суттєву роль у розвитку сучасної геометрії.

§ 43. Історичні відомості про розвиток ідей проективної геометрії

Вивчення предметів навколишнього середовища приводило до встановлення геометричних закономірностей різноманітного характеру, зокрема закономірностей, пов'язаних з вимірюванням геометричних тіл, тобто *метричних* закономірностей, з одного боку, і закономірностей *позиційних*, які залежать від взаємного розміщення тіл та їх елементів – з іншого. Вивчення метричних закономірностей привело до створення метричної геометрії (геометрії Евкліда), а вивчення позиційних – до створення геометрії, яка дістала назву *геометрії положення* або *проективної геометрії.*

Виникнення і розвиток ідей проективної геометрії має безпосередній зв'язок з намаганням людини в різні історичні епохи зображувати навколишні предмети на яких-небудь поверхнях.

Перші геометричні твердження, які тепер відносять до проективних, з'являються ще в математиків Стародавньої Греції. Зокрема, в «Конічних перерізах» Аполлонія з Перги (250–190 рр. до н.е.) введено поняття полюса і поляри відносно конічного перерізу, автору були відомі гармонічні властивості повного чотирикутника. Декілька таких тверджень знаходимо у «Математичних зібраннях» грецького математика Паппа Олександрійського (3–4 ст.). Зокрема, леми XII і XIII сьомої книги цього твору становлять відому теорему Паппа, яку тепер розглядають як окремий випадок теореми Паскаля.

У творі «Математичні колекції» грецького математика Серена (II ст.) знаходимо зачатки поняття про інволюцію, зокрема про інволюційне відношення трьох пар точок, яке було відкрите значно пізніше.

Одне з основних понять проективної геометрії – перспективні відображення – також виникло у стародавні часи, що зумовлювалось потребою у будівництві різних споруд (гробниць для єгипетських фараонів), фортечних укріплень, замків.

Древні греки були обізнані з методами горизонтального і вертикального проектування, з мистецтвом написання декорацій, яке вони називали *сценографією*. Сценографія стала основою *перспективи*. Відкриття центральної перспективи (стенографічної проекції) пов'язують з ім'ям грецького астронома Гіппарха (180–125 рр. до н.е.).

Проте ідеї старогрецьких математиків у галузі проективної геометрії не були систематизовані і не привертали уваги серед багатьох тверджень метричного характеру.

Справжній розквіт вчення про перспективу, про зображення просторових об'єктів припадає на епоху Відродження. Першим написав книгу про перспективу (близько 1446 р.) італійський архітектор Альберті (1402–1472). Дещо пізніше відомості про зображення систематизував П'єро де Франческі в праці «Про перспективу і живопис» (близько 1480 р.).

Визначний художник, вчений, інженер Леонардо да Вінчі (1452–1519) вніс великий вклад у розвиток вчення про перспективу, він написав «Трактат про перспективу», де систематизував закони про перспективу, які так плідно використовували видатні майстри італійського живопису – Рафаель, Мікеланджело, Тіціан та ін.

Видатний представник епохи Відродження в Німеччині Альберт Дюрер (1471–1528) написав книгу «Настанови про вимірювання», в якій докладно розробив основи малювання, способи зображення плоских і просторових фігур.

Слід відзначити також «Шість книг про перспективу» італійського вченого Гвідубальдо дель Монте (1545–1607), де подано розв'язання майже всіх основних задач перспективи.

З наукового погляду зору важливе значення мав твір про перспективу, написаний Гвідо Убальді в 1600 р.: у ньому розроблено загальне вчення про точки сходження, дано 23 правила побудови перспективи і зроблено перші кроки у встановленні поняття *колінеації*.

Глибока розробка вчення про перспективу сприяла розвитку ідей проективної геометрії в XVII ст.

Особливо слід відзначити доробок французького архітектора і геометра Жірара Дезарга (1593–1662). У 30-х роках XVII ст. він видав декілька праць, в яких вперше застосував метод координат для побудови перспективних масштабів, цим самим заклавши основи аксонометрії. Користуючись перспективою як основним методом дослідження, Дезарг дійшов висновку про необхідність введення нескінченно віддалених елементів простору. Він вважав, що всі паралельні прямі перетинаються в нескінченно віддаленій точці, і саме це стало початком проективного уявлення про простір (модель); ввів поняття пучка прямих, розглядав сукупність паралельних прямих як пучок з нескінченно віддаленим центром, а сукупність паралельних площин – як пучок площин, що перетинаються по нескінченно віддаленій прямій. Значним внеском Дезарга є його дослідження інволюційної відповідності точок прямолінійного ряду, йому ж належить введення самого терміна «інволюція». Він дав класифікацію інволюційної відповідності, знайшов подвійні точки гіперболічної інволюції і встановив

їх властивість гармонічно поділяти точки, що є відповідними в інволюції. Широке застосування в проективній геометрії має теорема про гомологічні трикутники, названа його ім'ям. Фактично Дезарг ввів майже всі основні поняття проективної геометрії.

Праці Дезарга заклали наукові основи проективної геометрії, тому цілком справедливо його вважають основоположником проективної геометрії.

Дослідження Дезарга успішно продовжив інший видатний французький математик – Блез Паскаль (1623–1662), який у віці 16 років у вигляді афіші (щоб привернути увагу) опублікував працю «Досвід про конічні перерізи». У цій праці Паскаль довів теорему про шестикутник, вписаний у конічний переріз, спочатку для кола, а потім за допомогою проектування поширив на інші конічні перерізи. Дезарг назвав цю теорему іменем Паскаля. Значення цієї теореми для конічних перерізів винятково важливе, оскільки вона встановлює проективний зв'язок шести точок конічного перерізу: якщо дано п'ять точок (вони визначають конічний переріз), то належність шостої точки даному конічному перерізу має задовольняти певні умови, які сформульовані в теоремі Паскаля.

Як відомо, у цей же період французькі математики Декарт (1596–1650) і Ферма (1601–1665) відкрили метод координат, захоплення яким відволікло увагу математиків від досліджень Дезарга і Паскаля на півтора століття. Лише наприкінці XVIII ст. і на початку XIX ст. вимоги практики, розвитку виробництва знову привернули увагу математиків до геометрій, зокрема до проективної.

Наприкінці XVIII ст. відомий французький геометр Гаспар Монж (1746–1818) у своїх працях з нарисної геометрії систематизував способи горизонтального і вертикального проектування.

Основними методами нарисної геометрії є:

1) метод ортогонального проектування на дві взаємно перпендикулярні площини (метод Монжа);
2) метод аксонометричного проектування;
3) метод лінійної перспективи.

У кожному з цих методів проектування просторових фігур здійснюється за допомогою паралельного і центрального проектування. Оскільки в проективній геометрії маємо справу саме з такими проектуваннями, їх властивостями, то можна сказати, що *проективна геометрія становить теоретичну базу для нарисної геометрії*.

Спробу відновити синтетичну геометрію древніх зробив відомий французький державний діяч і математик Л. Карно (1753–1823) у своїй праці «Геометрія положення», але істотних результатів у цьому напрямі досягти не зміг. До речі, йому належить термін «повний чотирикутник».

Особливо важливе значення для становлення проективної геометрії як науки мали праці французького геометра Жана-Віктора Понселе (1788–1867). Спираючись на ідеї Г. Монжа і Л. Карно та використовуючи центральне проектування і принцип двоїстості, Понселе заклав основи сучасної проективної геометрії. У своєму головному творі «Трактат про проективні властивості фігур», написаному під час перебування в російському полоні в Саратові (з весни 1913 р. до осені 1914 р.), Понселе, як Дезарг і Паскаль, використовує центральне проектування для дослідження геометричних властивостей фігур.

Він стверджує: «Усі відношення або властивості, які справедливі одночасно для даної фігури і для її проекції, будуть називатись проективними відношеннями або властивостями». Тому він вивчає властивості кола, які не змінюються при центральному проектуванні, і переносить їх на інші конічні перерізи як відповідні колу. Аналогічно властивості паралелограма переносить на будь-який чотирикутник як його центральну проекцію.

Понселе ввів поняття нескінченно віддаленої прямої як лінії перетину двох паралельних площин. Незмінність подвійного відношення чотирьох елементів (точок або прямих), яке було відоме до нього, він поклав в основу побудови проективної геометрії. Понселе завершив вчення про полюс і поляру, на основі чого прийшов до принципу двоїстості.

У цей же період були опубліковані праці офіцерів французької служби Жергонна (1771–1859) і Бріаншона (1785–1864). На основі теорії поляр Бріаншон довів теорему про шестисторонник, описаний навколо лінії другого порядку (класу), ця теорема названа його ім'ям. Жергонн уперше висловив думку, що принцип двоїстості випливає з двоїстості аксіом інцидентності.

Суттєве значення для розвитку проективної геометрії мала праця німецького математика Мебіуса (1790–1868) «Барицентричне числення» (1827), в якій реалізовано аналітичний виклад проективної геометрії і дослідження проективних властивостей дістало повне узагальнення. Мебіус довів проективність подвійного відношення чотирьох точок прямої, проаналізував точкові перетворення простору і запропонував їх класифікацію – рух, подібність, афінне перетворення, колінеація.

Швейцарський математик Якоб Штейнер (1796–1863) мав надзвичайну просторову інтуїцію, здатність уявляти і комбінувати

геометричні форми. Тому не дивно, що він став одним із творців проективної геометрії. Основна його праця – «Систематичний розвиток залежності геометричних образів один від одного» (1834). У ній Штейнер намагався побудувати геометрію так званим суто синтетичним методом (без використання аналітичного апарату). Крім систематичного викладу основ проективної геометрії, Штейнер дає проективне означення лінії другого порядку як сукупності точок перетину відповідних прямих двох проективних пучків першого порядку.

Проте Штейнеру не вдалося побудувати систему проективної геометрії, повністю вільної від метричних методів. У його працях цього періоду яскраво виявилися елементи теоретико-множинних уявлень у проективній геометрії.

Майже одночасно зі Штейнером і незалежно від нього побудовою синтетичної проективної геометрії на основі подвійного відношення займався французький геометр Мішель Шаль (1793–1880). У своїй праці «Курс вищої геометрії» (1852) він виклав ідеї, близькі до ідей Мебіуса і Штейнера. М. Шаль вперше поставив питання проективного обґрунтування евклідової геометрії. Його праці відіграли значну роль у поширенні методів проективної геометрії.

Логічну побудову проективної геометрії без застосування метрики вдалося здійснити німецькому математику Штаудту (1798–1867). Свої дослідження він виклав у книгах «Геометрія положення» (1847) і «Нариси з геометрії положення» (1860). На відміну від Штейнера і Шаля, які брали за вихідне поняття подвійного відношення, Штаудт за основу викладу проективної геометрії бере поняття гармонічної четвірки, яке можна встановити чисто геометрично за допомогою поняття повного чотиривершинника. За Штаудтом, два ряди (пучки) називаються проективними, якщо між їх елементами встановлена взаємно однозначна відповідність так, що кожній гармонічній групі одного відповідає гармонічна група іншого.

Оскільки проективне перетворення площини і простору можна означити за допомогою проективної відповідності між формами першого ступеня, робиться висновок, що всю проективну геометрію можна обґрунтувати, не використовуючи метричних властивостей. Проективні координати точки Штаудт також вводить без використання метрики.

Можливість чисто геометричного обґрунтування проективної геометрії привела до ідеї побудувати проективним шляхом саму метричну геометрію. Вирішення цього завдання подано в працях англійського математика Келі (1821–1895) і німецького математика Ф. Клейна (1849–1925). Суть їх робіт полягає в тому, що метричні властивості фігур можна розглядати як їх проективні відношення до особливих геометричних образів, що називаються «абсолютами».

Раніше було з'ясовано, що метричні колінеації визначаються як такі, що залишають незмінним абсолют площини. За абсолют площини взято невласну пряму і абсолютну інволюцію на ній. Інваріанти таких колінеацій становлять предмет евклідової метричної геометрії.

Такий підхід до вивчення геометричних властивостей об'єктів виявився настільки загальним, що його поширили, крім евклідової, і на інші (неевклідові) геометричні системи. Наприклад, Клейн показав, що на проективній основі можна обґрунтувати метричну геометрію Лобачевського, взявши за абсолют овальну криву другого порядку, і еліптичну геометрію Рімана, якщо за абсолют площини взяти нульову (уявну) криву другого порядку.

Подальші дослідження зводились до з'ясування питання про можливість викладу властивостей кривих вищих порядків на проективній основі.

Вправи

5.2. Якщо пряма a перпендикулярна до прямої b, то пряма b перпендикулярна до прямої a. Довести.

5.3. Довести, що через будь-яку точку A можна провести тільки одну пряму b, перпендикулярну даній прямій a.

5.4. Довести, що множина подібних перетворень площини утворює групу перетворень.

5.5. Довести, що множина рухів площини утворює групу перетворень.

5.6. На площині дано невласну пряму u_∞ і власну пряму a. Через дану власну точку M провести пряму, паралельну прямій a.

5.7. Дано невласну пряму u_∞ і відрізок AB. Знайти середину відрізка AB.

5.8. Дано довільний чотирикутник $ABCD$. Приймаючи його за паралелограм, побудувати невласну пряму площини.

5.9. На площині дано невласну пряму u_∞ і три вершини A, B, C паралелограма. Побудувати його четверту вершину.

5.10. Дано невласну пряму u_∞ і трикутник ABC. Побудувати медіани трикутника.

5.11. Дано невласну пряму u_∞ і паралелограм $ABCD$. Довести, що прямі, які з'єднують середини протилежних сторін AB і CD, BC і DA, паралельні відповідно сторонам BC і AB.

5.12. Дано невласну пряму u_∞ і трикутник ABC. Довести, що середня лінія трикутника паралельна відповідній стороні.

5.13. Дано середини M і N двох відрізків AB і AC, які мають спільний початок у точці A. Побудувати паралелограм, в якому суміжними сторонами є відрізки AB і AC.

5.14. Накреслено лінію другого порядку. Вважаючи дану точку O центром даної лінії, побудувати невласну пряму площини.

5.15. Дано невласну пряму u_∞, сторону AB, напрям m_1 сторони AD, напрям m_2 діагоналі BD паралелограма. Побудувати паралелограм.

5.16. Дано невласну пряму u_∞, діагональ AC паралелограма $ABCD$, пряму m, яка визначає напрям другої діагоналі BD, і пряму n, яка визначає напрям сторони AB. Побудувати паралелограм.

5.17. Дано невласну пряму u_∞ площини, центр O і хорду AB лінії другого порядку. Побудувати напрям діаметра, спряженого з хордою AB.

5.18. Дано невласну пряму u_∞, лінію другого порядку (накреслену), яка не має спільних точок з прямою u_∞, і довільну пряму m. Побудувати дотичні до заданої лінії, паралельні прямій m.

Частина III

МЕТОДИ ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР

1 Розділ

Загальні відомості про зображення фігур на площині

§ 1. Проекційні методи зображення

Кожний плоский предмет можна з точністю до подібності зобразити на площині (папері), тому що існують інструменти, матеріали, які залишають слід (крейда, олівець, ручка). Але не існує матеріалів, інструментів, за допомогою яких можна було б дістати сталий слід у просторі, тому ми змушені користуватися зображеннями просторових фігур на площині.

Зображувану просторову фігуру називають *оригіналом*, утворену при цьому плоску фігуру називають *зображенням* просторової фігури на площині (рисунком), а сама ця площина називається *площиною зображення* або *площиною проекцій*.

Сукупність правил, які визначають як, знаючи оригінал, побудувати його зображення, називається *методом зображення*.

Існує багато різних методів зображення, але ми ознайомимося лише з деякими найпростішими з них. На практиці використовуються переважно *проекційні методи* зображення, оскільки при цьому забезпечується максимальне наближення зображення до зорового сприймання оригіналу. Тому проекційні методи є найбільш *наочними*.

Проекційними називаються всі методи, в яких точка зображення або є безпосередньою проекцією точки оригінала, або після проектування виконується ще яке-небудь перетворення (подібне, перспективно-афінне, проективне).

Проектування здійснюється за допомогою прямих, які утворюють пучок або з власним центром (центральний), або з невласним центром (паралельний). У цій частині посібника ми розглядатимемо лише

відображення тривимірного простору на площину проекційними методами, в яких проектування виконується за допомогою пучка прямих – центрального пучка або пучка паралельних прямих. Отже, ми розглядатимемо методи зображення, які ґрунтуються на: 1) *методі центрального проектування* і 2) *методі паралельного проектування.*

§ 2. Основні вимоги до зображення

При побудові зображення просторової фігури на площині будь-яким методом проектування зображення втрачає деякі властивості оригіналу, оскільки різні частини фігури нахилені до площини зображення під різними кутами, а тому зазнають різних спотворень. Проекція фігури не є точною копією оригінала. Тому виникає потреба визначити вимоги до рисунків, на яких зображено просторові фігури, і вибрати метод проектування, що оптимально задовольняв би ці вимоги.

Основними вимогами до зображення є: *правильність рисунка, його наочність, вимірність, простота у побудові, повнота й метрична визначеність зображення.*

Рисунок-зображення називається *правильним*, якщо існує таке розміщення фігури відносно площини проекцій і такий спосіб проектування, при яких його зображення *подібне* одержаній проекції. Якщо такої проекції не існує, то рисунок *неправильний.* Пояснимо це на прикладах.

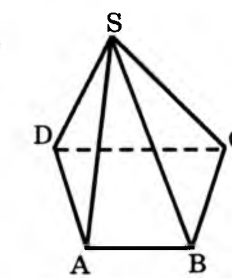


Рис. 3.1

Задача 1.1. На рис. 3.1 зображена правильна чотирикутна піраміда. Чи правильне це зображення?

Розв'язання. Покажемо, що це зображення правильне. Справді, якщо взяти піраміду, в основі якої лежить квадрат $ABCD$, і поставити її основою на площину рисунка, сумістивши основу з квадратом $A'B'C'D'$, то пряма, яка сполучає вершину S' піраміди з точкою S, визначає напрям паралельного проектування, при якому проекція піраміди збігається з рисунком (рис. 3.2.).

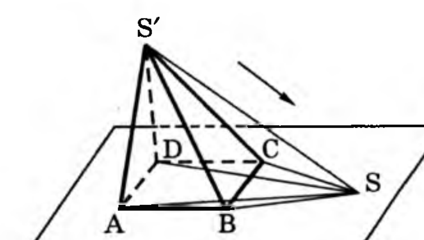


Рис. 3.2

Рис. 3.1 мало наочний, незвичний, але за означенням правильний.

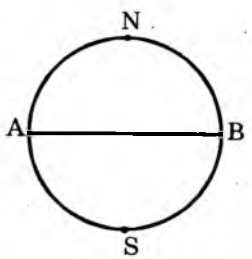


Рис. 3.3

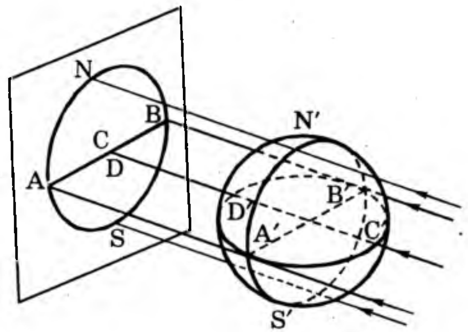


Рис. 3.4

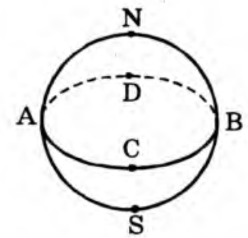


Рис. 3.5

Задача 1.2. Чи правильне зображення кулі на рис. 3.3?

Розв'язання. На рис. 3.3 зображена куля, її переріз по великому кругу AB і полюси N і S на перпендикулярі до площини перерізу. Покажемо, що рисунок правильний. Справді, нехай куля, що зображується, має діаметр $A'B'$, рівний AB. Помістимо кулю так, щоб площина $A'B'C'D'$ перерізу була перпендикулярна площині проекцій. Потім спроектуємо цю кулю на площину проекцій ортогонально (рис. 3.4). Одержимо проекцію, рівну фігурі, заданій на рис. 3.3. За означенням рис. 3.3 правильний, хоча мало наочний.

Задача 1.3. Чи правильне зображення кулі на рис. 3.5?

Розв'язання. На рис. 3.5 зображено кулю, її переріз по великому кругу $ACBD$ і полюси N, S на лінії, яка обмежує паралельну проекцію сфери. Але це може бути лише в тому випадку, коли прямі, які проектують полюси, будуть дотикатися до сфери (як у попередньому прикладі). При цьому круг $ACBD$ зобразиться відрізком, а не еліпсом. Оскільки на рис. 3.5 великий круг зображено еліпсом, то точки N і S повинні лежати всередині лінії, яка обмежує проекцію сфери.

Отже, зображення кулі на рис. 3.5 неправильне.

Зображення просторової фігури називається *наочним*, якщо за цим зображенням можна дістати правильне уявлення про оригінал, тобто якщо зображення викликає зорове сприйняття, аналогічне тому, яке викликає оригінал (за формою, а не за кольором, матеріалом тощо). Наочність зображення необхідна тоді, коли рисунок використовується як *ілюстрація* фігури, тобто для створення уявлення про фігуру, а не

для розв'язування з його допомогою якої-небудь задачі, коли він використовується як рисунок-модель. Звичайно, неправильний рисунок не може бути наочним, він дає хибне уявлення про зображену фігуру, його наочність оманлива (як на рис. 3.5). На рис. 3.6 зображення кулі наочне, правильне, воно створює повне уявлення про кулю.

Наочним рисунком здебільшого користуються в навчальному процесі як у вищій, так і в середній школі.

Під *вимірюваністю* зображення розуміють можливість за рисунком сформувати уявлення про розміри окремих частин оригінала, а також можливість точно відновити зображувану фігуру. Такі рисунки потрібні в інженерній, конструкторській практиці, коли за даним рисунком виготовляють деталі механізмів заданих розмірів. Як досягається вимірюваність рисунка, детально буде з'ясовано пізніше.

Рисунок називають *метрично визначеним*, якщо він визначає оригінал з точністю до подібності. Отже, тільки метрично визначений рисунок дає можливість виконувати вимірювання. Існують різні способи забезпечення його метричної визначеності. Окремі з них будуть розглянуті для конкретних методів зображення.

Зображення називають *простим у виконанні*, якщо, виконуючи правильні додаткові побудови, не доводиться користуватися складними допоміжними побудовами. Зрозуміло, що в аудиторії, у класі на занятті немає можливості витрачати час на складні допоміжні побудови.

Рисунок називається *повним*, якщо за належністю всіх елементів на рис. можна визначити належність цих елементів оригіналу в просторі.

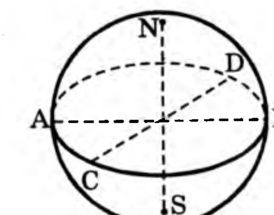


Рис. 3.6

Задача 1.4. Чи можна за рис. 3.7 визначити, що прямі a' і b' перетинаються?

Розв'язання. Якщо нічого невідомо про прямі a' і b', зображені на рис. 3.7, то дати відповідь на запитання неможливо. Отже, рис. 3.7 неповний. Якщо ж відомо, що прямі a' і b' лежать в одній площині, то за даним зображенням можна сказати, що прямі a' і b' перетинаються, тобто в цьому випадку рисунок повний.

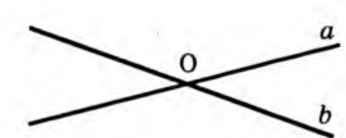


Рис. 3.7

Відзначимо, що рисунок плоскої фігури завжди повний, а рисунок просторової фігури може бути і повним, і неповним.

Приклади повних рисунків і способів досягнення повноти зображень будуть наведені при розгляді відповідних методів зображення.

Зазначені вимоги до зображення просторових фігур мають певні суперечності: метричновизначене зображення не буде простим у виконанні і наочним; наочне зображення не завжди дає можливість визначити розміри фігури-оригінала. Тому в нарисній геометрії використовуються найрізноманітніші методи зображення залежно від мети і їх призначення.

Наприклад, художники завжди користуються методом центрального проектування, що забезпечує достатню наочність, хоча визначити розміри оригінала за таким зображенням досить важко. Але людину, яка розглядає художній твір, картину, цікавить у першу чергу те, що зобразив художник. Інженери і конструктори, які розробляють рисунки для виготовлення деталей механізму, дбають про метричну визначеність зображення з тим, щоб за допомогою рисунка робітник зміг виготовити деталь певних розмірів, тому вони користуються методом ортогонального проектування на дві і більше площин, хоча наочність зображення при цьому втрачається (метод Монжа).

Найпоширенішими є методи зображення, в яких досягається певний компроміс між вимогами до зображення. Серед них – метод паралельного проектування, при якому наочність зображення дещо менш виразна, ніж при центральному проектуванні, але визначення розмірів оригінала значно спрощується. За допомогою методу паралельного проектування будуються зображення просторових фігур у шкільних і вузівських підручниках з геометрії, на класній дощці, у зошитах учнів.

§ 3. Центральне проектування

Нехай маємо деяку просторову фігуру, наприклад $A'B'C'D'$, площину P і точку S, яка не належить ні тетраедру, ні площині P (рис. 3.8). Проведемо пряму SA' до перетину з площиною P в точці A. Точка A називається *центральною проекцією* точки A'. Точка S називається *центром проектування*, пряма SA' – *проектуючою прямою*, площина P – *площиною проекцій* або *площиною зображення*.

Побудувавши аналогічно проекції всіх точок фігури $A'B'C'D'$, дістанемо *центральну проекцію* даної фігури на площині P. Фігуру $ABCD$ ще називають *зображенням* фігури $A'B'C'D'$ або її *перспективою*. Отже, центральне проектування повністю визначається заданням

точки S – центра проектування і площини проекцій P.

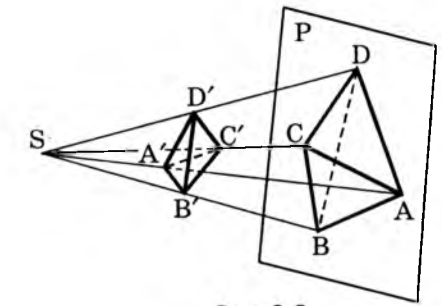


Рис. 3.8

Зображення, одержані центральним проектуванням, досить наочні, вони використовуються там, де вимагається максимальне наближення зображення до зорового сприйняття оригінала (в архітектурі, в образотворчому мистецтві).

Уявлення про центральне проектування ми дістанемо безпосередньо з досвіду: це зображення тіні предмета при його освітленості точковим джерелом; зображення на фотоплівці, кіноекрані тощо. Однак центральне проектування не часто використовується в навчальному процесі школи і вищих навчальних закладів у зв'язку з дещо складним виконанням рисунків. Крім того, центральна проекція значно спотворює геометричні властивості фігури, перетворюючи квадрати в трапеції, кола в еліпси, змінюючи величини кутів, довжини відрізків тощо.

Відзначимо окремі властивості центрального проектування.

1. Центральною проекцією точки є точка.

Дійсно, через точку S і будь-яку точку A' простору можна провести тільки одну пряму, яка в перетині з площиною проекцій P визначає точку A – центральну проекцію точки A'.

Зрозуміло, що *винятком* є точки, які лежать у площині, що проходить через точку S паралельно площині P. Для таких точок проектуючі прямі паралельні площині P, тому власної точки перетину не існує. Якщо евклідову площину P доповнити невласними (нескінченно віддаленими) елементами, то і в цьому випадку точкам площини, що проходять через точку S паралельно площині P, відповідають невласні точки розширеної площини P. Зауважимо, що обернене твердження неправильне: точка A є центральною проекцією кожної точки проектуючої прямої SA' (рис. 3.8).

2. Кожна непроектуюча пряма проектується в пряму. Проектуюча пряма проектується в точку.

Нехай пряма $A'B'$ непроектуюча, тобто не проходить через точку S, тоді кожна точка цієї прямої, наприклад точки A' і B', проектується відповідно прямими SA' і SB' у точки A і B площини P (рис. 3.8), які визначають пряму AB – проекцію прямої $A'B'$. Всі точки прямої $A'B'$ лежать у проектуючій площині $SA'B'$, тому і всі проектуючі прямі

SA', SB' та інші лежать у цій площині. Отже, проекції всіх точок прямої $A'B'$ належать лінії перетину площини P і проектуючої площини $SA'B'$, тобто прямій AB.

Якщо пряма $A'B'$ проектуюча, тобто проходить через точку S, але не лежить у площині, що проходить через точку S, паралельно площині P, то вона сама себе проектує: кожна точка цієї прямої проектується в одну й ту саму точку – точку перетину цієї прямої з площиною P.

Винятком є прямі, які лежать у площині α, що проходять через точку S паралельно площині P. У цьому випадку кожна пряма такої площини паралельна площині P, тому точки цих прямих в евклідовій площині центральних проекцій не мають. Якщо евклідову площину доповнити невласними елементами, тобто мати модель проективної площини, то проектуючі прямі площини α відображаються у невласні точки площини P, а непроектуючі – в одну й ту ж невласну пряму площини P.

3. Інцидентність точок і прямих центральним проектуванням не порушується, тобто якщо в просторі точка A' належить прямій a', то центральна проекція A точки A' лежить на центральній проекції a прямої a' також.

Якщо в просторі прямі a' і b' перетинаються в точці A', то центральні проекції a і b перетинаються в точці A, яка є центральною проекцією точки A'.

Доведення цієї властивості аналогічне попередньому.

4. Центральною проекцією будь-якої непроектуючої площини є вся площина P, а проектуючої площини – пряма (власна або невласна) площини P.

Доведення опускаємо.

5. Кожна фігура F′, яка лежить у непроектуючій площині Q, паралельній площині проекцій P, проектується в подібну їй фігуру F (рис. 3.9).

Дійсно, при такому розміщенні площин P і Q фігури $F' \subset Q$ і $F \subset P$ гомотетичні з центром гомотетії S.

6. Подвійне відношення чотирьох точок прямої є інваріантом центрального проектування.

Нехай точки A', B', C', D' належать прямій a' у просторі, а точки A, B, C, D, належні прямій a, є центральними проекціями точок A', B', C', D'. Тоді $(A'B', C'D') = (AB, CD)$ (рис. 3.10).

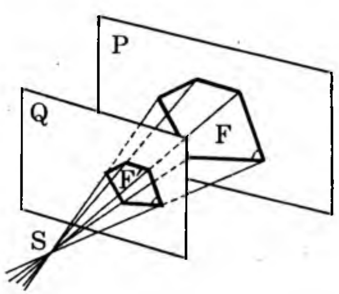


Рис. 3.9

Доведення цієї властивості вміщено в курсі проективної геометрії (частина II, § 14).

Відзначимо, що при центральному проектуванні одна фігура (оригінал у просторі) відображається в іншу фігуру в площині проекцій. Тому центральне проектування є *перетворенням* у просторі, тобто *перспективним перетворенням*, а зображення, проекція оригінала називається *перспективою*. Ці терміни вживають переважно в образотворчому мистецтві.

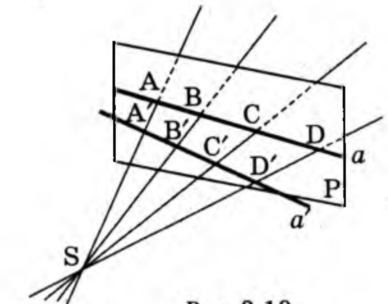


Рис. 3.10

§ 4. Паралельне проектування

Нехай дано тетраедр $A'B'C'D'$ і площину P. Через кожну вершину тетраедра проведемо в певному напрямі паралельні прямі AA', BB' і т.д., які перетнуть площину P в точках A, B, C, D (рис. 3.11). Сполучивши ці точки відрізками, дістанемо фігуру $ABCD$, яка називається *паралельною проекцією тетраедра $A'B'C'D'$* на площину P. Пряма AA' називається *проектуючою прямою*, а площина P – *площиною проекцій*. Такий спосіб одержання паралельної проекції фігури називається *паралельним проектуванням* у певному напрямі. Отже, паралельне проектування повністю визначається заданням *напряму проектування* і *площини проекцій*.

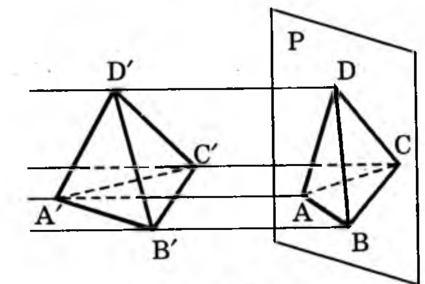


Рис. 3.11

Означення 1.1. *Паралельною проекцією точки* називається точка перетину проектуючої прямої, проведеної паралельно заданому напряму, з площиною проекцій.

Щоб одержати паралельну проекцію фігури, треба побудувати паралельні проекції точок, що визначають положення цієї фігури. На рис. 3.11 фігуру $A'B'C'D'$ визначають її вершини, тому, побудувавши паралельні проекції A, B, C, D вершин, дістали паралельну проекцію $ABCD$ даної фігури, сполучивши відрізками побудовані точки.

На рис. 3.12 паралельне проектування на площину P прямої a' задане напрямом m. Пряму визначають дві її точки, тому, побудувавши проекції A, B двох її точок A' і B', одержимо проекцію $AB = a$ даної прямої.

Перетворення однієї фігури F' в іншу F паралельним проектуванням називають *перспективно-афінним* або *спорідненим перетворенням*.

Паралельне проектування називається *прямокутним (ортогональним)*, якщо напрям проектування перпендикулярний до площини проекцій, і *косокутним* в інших випадках.

Метод паралельного проектування широко використовується в навчальному процесі середньої та вищої школи завдяки тому, що він забезпечує достатньо повну наочність зображення просторових фігур на площині і простий у реалізації.

Розглянемо основні властивості паралельних проекцій.

1. Паралельною проекцією точки є точка.

Справедливість цієї властивості випливає із способу побудови: через дану точку можна провести тільки одну пряму, паралельну даній у даному напрямі, тому буде й єдина точка перетину проектуючого променя з площиною проекцій, тобто єдина паралельна проекція даної точки в площині проекцій.

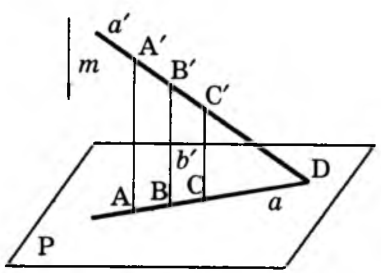


Рис. 3.12

Але обернене твердження неправильне: точка A площини P є проекцією всіх точок проектуючої прямої (рис. 3.12).

2. Паралельною проекцією прямої, непаралельної напряму проектування, є пряма, а паралельної напряму проектування – точка.

Справді, нехай пряма $A'B' = a'$ проектується на площину P у заданому напрямі m (рис. 3.12). Тоді проектуючі прямі всіх точок прямої a' паралельні між собою і лежать в одній площині – проектуючій площині, яка перетинає площину P по прямій a, на якій лежать проекції A, B, C, ... точок A', B', C', ... прямої a'. Отже, паралельною проекцією прямої a', непаралельної прямій m, є пряма a.

Обернене твердження неправильне: пряма лінія може бути проекцією будь-якої кривої лінії, розміщеної у проектуючій площині, а також площини, паралельної напряму проектування (рис. 3.13).

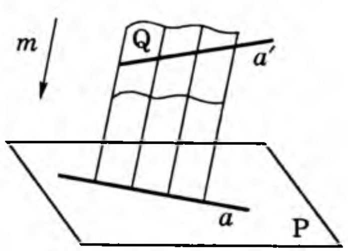


Рис. 3.13

Якщо пряма $b' = B'B$ паралельна напрямку проектування m, то ця пряма перетинає площину P в єдиній точці B, яка є паралельною проекцією всіх точок прямої b' (рис. 3.12).

3. Інцидентність точок і прямих при паралельному проектуванні не порушується.

Правильність цієї властивості випливає з попередніх міркувань (рис. 3.12).

4. Відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх паралельних проекцій.

Нехай на прямій a' взято точки A', B', C', на прямій a площини P їм відповідають точки A, B, C при паралельному проектуванні у напрямі m, D – точка перетину прямих a і a' (рис. 3.12). Прямі a і a' утворюють у проектуючій площині $A'B'BA$ кут $A'DA$, сторони якого перетинають прямі $A'A \parallel B'B \parallel C'C$, тому вони відтинають на сторонах кута пропорційні відрізки: $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB}$. Звідси випливає, що *порядок точок на прямій не порушується паралельним проектуванням.*

5. Проекції двох паралельних прямих паралельні між собою.

Дійсно, оскільки $a' \parallel b'$, то проектуючі площини Q і R також паралельні між собою, а тому вони перетинають площину проекцій P по паралельних прямих, тобто $a \parallel b$ (рис. 3.14).

6. Відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню паралельних проекцій цих відрізків.

Нехай дані відрізки $A'B'$ і $C'D'$ паралельні (рис. 3.15).

Проведемо в проектуючих площинах Q і R $A'M' \parallel AB$ і $C'N' \parallel CD$, де AB і CD – паралельні проекції відрізків $A'B'$ і $C'D'$ відповідно. Оскільки $AB \parallel CD$ (за властивістю 5), то $A'M' \parallel C'N'$. Тоді трикутники $A'B'M'$ і $C'D'N'$ подібні (відповідні сторони паралельні), звідси $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{A'M'}{C'N'}$.

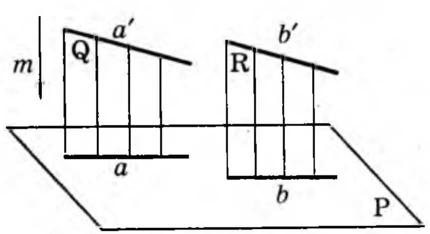


Рис. 3.14

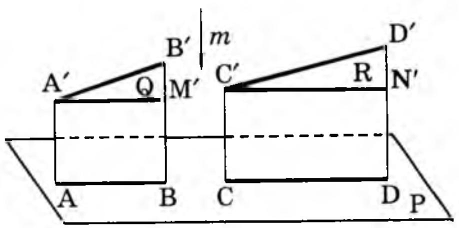


Рис. 3.15

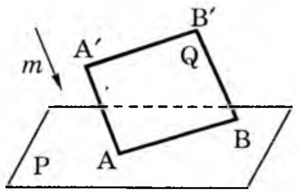


Рис. 3.16

Але $A'M' = AB$ і $C'N' = CD$, тому $\dfrac{A'B'}{C'D'} = \dfrac{AB}{CD}$.

7. Довжина відрізка прямої, паралельної площині проекцій, дорівнює довжині його паралельної проекції.

Нехай $A'B' \parallel P$, AB – паралельна проекція відрізка $A'B'$ (рис. 3.16). Тоді $AB \parallel A'B'$ і $A'A \parallel B'B$, тому $A'B' = AB$ ($A'B'BA$ – паралелограм).

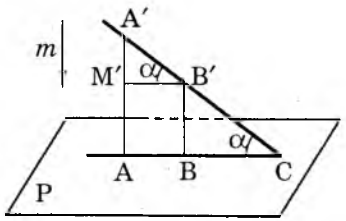


Рис. 3.17

8. При ортогональному проектуванні довжина проекції відрізка прямої дорівнює добутку довжини відрізка – оригіналу і косинуса кута його нахилу до площини проекцій.

Нехай напрям паралельного проектування m перпендикулярний до площини проекцій P, а кут між прямою $A'B'$ і її ортогональною проекцією AB дорівнює α (рис. 3.17). Проведемо $B'M' \parallel P$, тоді в прямокутному трикутнику $A'B'M'$ $\angle M'B'A' = \alpha$ і $M'B' = A'B' \cdot \cos\alpha$. Але $M'B' = AB$ (за властивістю 7), тому $AB = A'B' \cdot \cos\alpha$.

Нагадаємо, що властивості фігур, які не змінюються при деякому геометричному перетворенні, називаються *інваріантними* в даному перетворенні. Незмінні параметри (числові величини) фігур називають їх *інваріантами*.

Паралельне проектування є перетворенням просторової фігури F' у фігуру F на площині, тому названі властивості встановлюють, що колінеарність і паралельність пари прямих є інваріантними властивостями паралельного проектування, а відношення трьох точок прямої є його інваріантом.

Зображення методом паралельного проектування одержується у два кроки:

1) усі точки оригіналу проектуються в даному напрямі на площину проекцій;
2) одержане у площині зображення збільшується або зменшується у певне число разів – виконують подібне перетворення відповідно до потрібних розмірів рисунка. Від цього форма зображення не змінюється.

§ 5. Жорсткі та вільні зображення

При використанні проекційних методів зображення виникають такі проблеми:

1) як, маючи оригінал, побудувати його зображення;
2) що можна сказати про оригінал, маючи його зображення?

Відповіді на ці запитання залежать від виду зображення – жорсткого чи вільного.

Означення 1.2. Зображення називається *жорстким*, якщо відомі всі параметри, що характеризують метод зображення і положення оригіналу.

Наприклад, нехай треба зобразити куб, довжина ребра якого дорівнює 1 м, методом паралельного проектування на площину P. Цей метод характеризується двома параметрами – кутом φ нахилу напряму проектування до площини проекцій P і коефіцієнтом k подібності, тобто множником k, на який треба помножити всі відрізки, одержані в площині зображення проектуванням.

У випадку ортогонального проектування положення куба визначається двома параметрами, наприклад, двома кутами α, β з трьох α, β, γ, утворених проектуючою прямою з ребрами куба, що виходять з однієї вершини. Для цих кутів має місце залежність $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, тому незалежними можуть бути лише два з них.

Отже, якщо $\varphi = 60^\circ$, $k = 0{,}4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, то зображення куба метрично визначене.

Правильне й обернене твердження: знаючи параметри, що характеризують проектуючий апарат і положення оригіналу, можна визначити метричні параметри куба (паралелепіпеда), зображеного на рисунку.

Жорсткі зображення застосовують в інженерній практиці, а їх методи викладені в підручниках з нарисної геометрії.

Означення 1.3. Зображення просторової фігури на площині називається *вільним*, якщо при його виконанні параметри, що характеризують проектуючий апарат і положення оригіналу, невідомі або не враховуються.

Наприклад, побудувати вільне зображення куба означає, що зображення куба будується незалежно від того, як він розміщений у просторі відносно площини проекцій.

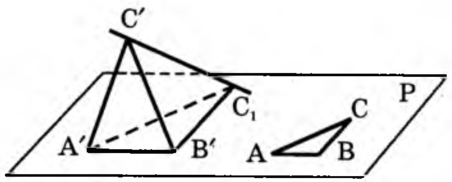


Рис. 3.18

Вільне зображення будують і використовують у навчальному процесі з *ілюстративною* метою, хоча інколи ним користуються й інженери.

Але «вільне» зображення фігури не означає, що воно виконане недбало. Вільне зображення вимагає, щоб у просторі знайшлось положення якої-небудь фігури, проекція якої на площині сумістилася б з даним рисунком. Якщо цього не трапиться, то рисунок неправильний, а тому не може бути й наочним.

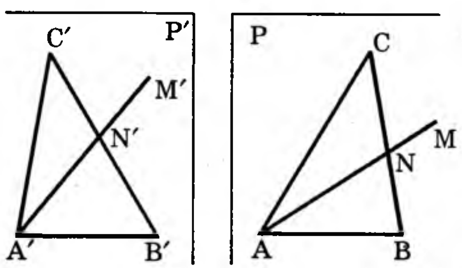


Рис. 3.19

Щоб вільне зображення було правильним, необхідно дотримуватись певних правил. Розглянемо ці правила на прикладі зображення плоских фігур методом паралельного проектування на одну площину.

Теорема 1.1. Кожний даний трикутник можна зобразити будь-яким трикутником.

Доведення. Нехай маємо два трикутники: оригінал $A'B'C'$ і довільний трикутник ABC. Проведемо через сторону $A'B'$ площину P, яка не є площиною трикутника $A'B'C'$ (рис. 3.18). У площині P побудуємо на стороні $A'B'$ трикутник $A'B'C_1$, подібний трикутнику ABC. Візьмемо напрям $C'C_1 = m$ за напрям проектування. Тоді проекцією трикутника $A'B'C'$ на площину P буде трикутник $A'B'C_1$, подібний трикутнику ABC.

Теорему доведено.■

Теорема 1.2. Якщо для трьох неколінеарних точок A', B', C' плоскої фігури F' відомі їх зображення A, B, C, то зображення всіх точок фігури F' однозначно визначені.

Доведення. Дано три неколінеарні точки A', B', C', які утворюють трикутник $A'B'C'$, і точки A, B, C – зображення точок A', B', C' у площині P (рис. 3.19).

Візьмемо довільну точку M' фігури F' і покажемо, що можна побудувати її проекцію M на площині P. Позначимо через N' точку перетину прямої $C'B'$ з прямою $A'M'$. Тоді за властивістю 4 паралельного проектування $\frac{C'B'}{C'N'} = \frac{CB}{CN}$, тому точку N на прямій CB можна

побудувати як четверту пропорційну до трьох даних. Використовуючи цю ж властивість і відношення $\frac{A'N'}{N'M'} = \frac{AN}{NM}$, можна побудувати точку M. Якщо пряма $A'M'$ паралельна прямій $B'C'$, то і $AM \parallel BC$, тому точку M знайдемо з пропорції $\frac{AM}{BC} = \frac{A'M'}{B'C'}$ (за властивістю 6).

Теорему доведено.■

Наслідок. З доведених теорем випливає, що *довільність* побудови зображення допускається лише для трьох неколінеарних точок фігури (трикутника), а всі інші точки зображення треба будувати за вказаним у теоремі 1.2 правилом.

Отже, чотирикутник довільно зобразити не можна.

Розглянемо декілька прикладів на побудову зображення даних фігур та їх елементів.

Задача 1.5. Побудувати зображення прямокутного трикутника з катетами a і $2a$, в якому з вершини прямого кута проведені медіана і висота (паралельним проектуванням).

Розв'язання. Зображенням даного прямокутного трикутника є довільний трикутник ABC (за теоремою 1.1) (рис. 3.20). Медіана $C'D'$ зображується медіаною CD (за властивістю 4).

Для побудови зображення висоти $C'F'$ використаємо відношення, в якому основа F' висоти ділить гіпотенузу $A'B'$ ($A'F' : F'B'$).

Відомо, що відрізки гіпотенузи, на які вона ділиться основою висоти, відносяться як квадрати відповідних катетів, тобто $\frac{A'F'}{F'B'} = \frac{A'C'^2}{C'B'^2} = \frac{a^2}{4a^2} = \frac{1}{4}$.

Отже, на стороні AB треба побудувати точку F, для якої $AF : FB = 1 : 4$, тоді CF – зображення висоти $C'F'$.

Примітка. Аналогічно міркують при побудові зображення бісектриси кута, використовуючи її властивість.

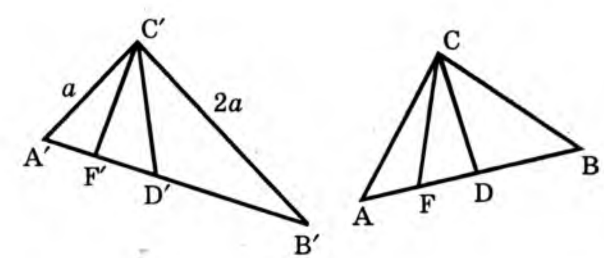


Рис. 3.20

Задача 1.6. Побудувати паралельну проекцію довільного чотирикутника.

Розв'язання. Нехай дано чотирикутник $A'B'C'D'$ у просторі. У площині проекцій три точки A, B, C можна вибрати довільно і вважати їх проекціями точок A', B', C'. Проведемо діагоналі $A'C'$ і $B'D'$, які перетнуться у точці O'. Потім на прямій BO знаходимо точку D таку, щоб $BO : OD = B'O' : O'D'$. Чотирикутник $ABCD$ – паралельна проекція даного чотирикутника $A'B'C'D'$.

Отже, зображенням довільного чотирикутника може бути будь-який чотирикутник, у якого діагоналі діляться точкою перетину в тих же відношеннях, що й в оригіналі (рис. 3.21).

Задача 1.7. Побудувати паралельну проекцію квадрата.

Розв'язання. Оскільки паралельність прямих є інваріантною властивістю паралельного проектування, то даний паралелограм зображується довільним паралелограмом. Квадрат є паралелограмом, але з прямими кутами. Величина кута між прямими не зберігається при паралельному проектуванні, тому зображенням даного квадрата буде довільний паралелограм (рис. 3.22).

Цей факт можна пояснити ще так. Провівши діагональ $A'C'$, дістали два трикутники. Зображенням трикутника $A'B'C'$ є будь-який трикутник ABC (рис. 3.22). Потім ABC добудовуємо до паралелограма. Отже, щоб побудувати зображення квадрата паралельним проектуванням, треба накреслити довільний паралелограм. Таким чином, якщо в площині зображено паралелограм, то не можна сказати, якого виду паралелограм маємо на зображенні, оригіналом при цьому може бути прямокутник, квадрат, ромб, паралелограм.

Задача 1.8. З'ясувати, яка фігура є паралельною проекцією трапеції.

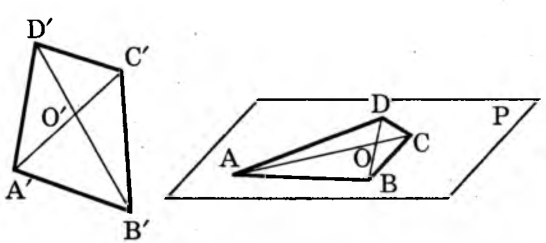


Рис. 3.21

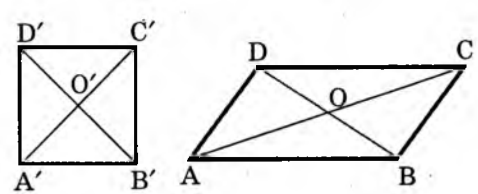


Рис. 3.22

Розв'язання. З усіх властивостей трапеції при паралельному проектуванні зберігаються паралельність основ і відношення їх довжин. Тому зображенням трапеції буде також трапеція з даним відношенням основ (якщо воно дане).

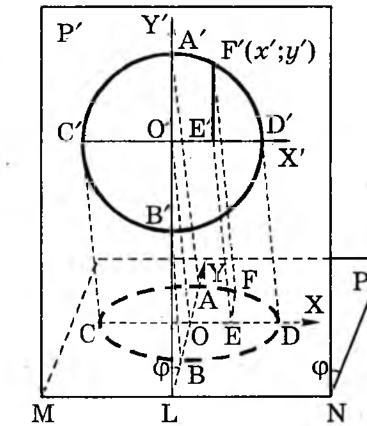


Рис. 3.23

§ 6. Паралельна проекція кола

Теорема 1.3. Паралельною проекцією кола є еліпс.

Доведення. Нехай у площини P' лежить коло $k'(O', R')$, $A'B'$ і $C'D'$ – його взаємно перпендикулярні діаметри, F' – довільна точка кола (рис. 3.23).

На площині P' виберемо прямокутну декартову систему координат $X'O'Y'$, осями якої є діаметри $C'D'$ і $A'B'$. Площина проекцій P перетинається з площиною P' по прямій MN і утворює з нею кут φ. Проведемо пряму $A'B'$ до перетину з MN у точці L. Пряма $C'D' \parallel MN$, тому $C'D' \parallel P$ і $F'E' \parallel O'Y'$.

Виконаємо ортогональне проектування кола (O', R'), його діаметрів, точок F' і E' на площину P. Дістанемо LA – проекція LA', точки A, B, C, D, F, E – проекції відповідно точок A', B', C', D', F', E'; XOY – проекція системи координат $X'O'Y'$ площини P'. Оскільки $O'A' = O'B'$, $O'C' = O'D'$, то за властивостями паралельного проектування $OA = OB = b$, $OC = OD = a$, $C'D' = CD = 2R' = 2a$. Позначимо $AO = b$, тоді $AB = 2b$.

У площині P' в системі координат $X'O'Y'$ рівняння кола $x'^2 + y'^2 = R'^2$.

$F'(x', y')$ – довільна точка кола, $F(x, y)$ – її зображення в площині P. За властивостями паралельного проектування $\dfrac{A'O'}{F'E'} = \dfrac{AO}{FE}$, або $\dfrac{a}{y'} = \dfrac{b}{y}$. Звідси $y' = \dfrac{ay}{b}$ і $x = x'$. Підставимо ці значення у рівняння кола, дістанемо: $x^2 + \dfrac{a^2y^2}{b^2} = a^2$ або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Це рівняння еліпса.

Теорему доведено.■

Наслідки.

1. Взаємно перпендикулярні діаметри кола зображуються спряженими діаметрами еліпса.
2. Центр кола зображується центром еліпса.

3. Дотичні до кола зображуються дотичними до еліпса.
4. Квадрат, описаний навколо кола, зображується паралелограмом, описаним навколо еліпса.

Доведена теорема і наслідки з неї дають можливість побудувати точки еліпса різними способами.

Задача 1.9. Побудувати еліпс, заданий спряженими діаметрами.

Розв'язання. Дано два спряжені діаметри еліпса AC і BD (рис. 3.24б). Побудувати еліпс означає, що треба побудувати скільки завгодно його точок, тобто вказати правило, за яким можна побудувати довільну точку еліпса. Використаємо той факт, що навколо еліпса можна описати паралелограм, сторони якого паралельні даним спряженим діаметрам еліпса. Цей паралелограм є паралельною проекцією квадрата, описаного навколо кола, проекцією якого є шуканий еліпс.

Тому візьмемо довільне коло і опишемо навколо нього квадрат. Позначимо точки дотику через A', B', C', D' (рис. 3.24а). Діаметри $A'C'$ і $B'D'$ взаємно перпендикулярні, їх можна вважати за пару діаметрів кола, які переходять у спряжені діаметри AC і BD еліпса. Розділимо радіус $O'B'$ на декілька рівних частин (на рис. 3.24а – на чотири частини) і $B'F'$ – на стільки ж рівних частин. Позначимо точки поділу від точки O' до B' і від точки F' до B'. Позначимо точку з номером $1'$ на $O'B'$ через M', а на $F'B'$ – через N'. Тоді точка $L' = C'M' \times A'N'$ належить колу.

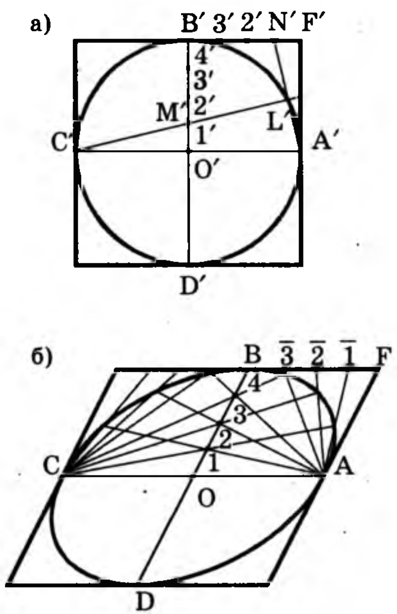


Рис. 3.24

Дійсно, з рівності трикутників $O'M'C'$ і $F'N'A'$ випливає, що $A'N' \perp C'M'$.

Паралельною проекцією квадрата буде паралелограм, відрізки OB і BF будуть розділені на рівні частини кожний, але OB і BF вже не будуть рівні між собою. За даними відрізками AC і BD будуємо паралелограм, вважаючи ці відрізки середніми лініями паралелограма. Відрізок OB ділимо на рівні частини, точки поділу позначаємо 1, 2, 3, 4, починаючи від точки O; відрізок FB ділимо на стільки ж рівних частин і точки поділу позначаємо $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ від F до B. Точки перетину $C1 \times A\overline{1}$, $C2 \times A\overline{2}$, $C3 \times A\overline{3}$, ... належать еліпсу (рис. 3.24б).

Інший спосіб побудови еліпса за його даними спряженими діаметрами розглянуто в § 29 ч. 3.

Розділ 2

Метод Монжа

§ 7. Поняття про метод Монжа

Побудова зображення просторових фігур паралельним проектуванням на площину досить проста і тому широко використовується в практиці. Метод паралельного проектування удосконалювався з часом. З розвитком виробництва, техніки першочергове значення у зображенні предметів набуло питання про застосування методу, який би забезпечував точність і зручність зображення, тобто можливість точно встановити місце кожної точки зображення відносно інших точок.

Ортогональну проекцію якого-небудь тіла на дану площину P, як окремий випадок паралельного проектування, одержуємо, опускаючи з кожної точки цього тіла перпендикуляри на площину P. Перетин цих перпендикулярів з площиною P і дає його ортогональну проекцію в площині P. Тому для ортогонального проектування фігур на площину правильні ті твердження, які були встановлені для паралельного проектування. Зокрема, проекції паралельних прямих паралельні між собою; відношення відрізків двох паралельних прямих дорівнює відношенню їх проекцій; проекції рівних і паралельних відрізків рівні і паралельні.

Нагадаємо також, що проекцією кола є еліпс, причому перпендикулярні діаметри кола проектуються у спряжені діаметри еліпса. Цими властивостями паралельного проектування ми в подальшому будемо користуватися.

Але ортогональна проекція просторової фігури на *одну* площину не дає повного уявлення про фігуру, що зображується.

Візьмемо, наприклад, прямокутний паралелепіпед $ABCDEFKL$ (рис. 3.25) і спроектуємо його ортогонально на площину, паралельну

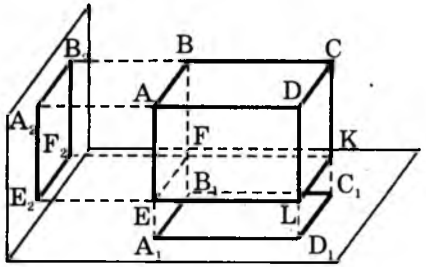


Рис. 3.25

площині грані $ABCD$. Проекцією паралелепіпеда буде прямокутник $A_1B_1C_1D_1$, рівний прямокутнику $ABCD$.

Ця проекція паралелепіпеда дає можливість визначити довжину двох ребер AB і AD, але не дає можливості знайти його третій вимір AE, тому за зображенням $A_1B_1C_1D_1$ ми не можемо уявити конкретної фігури-оригіналу.

Аналогічно, виконавши ортогональне проектування даного паралелепіпеда на площину, паралельну площині грані $ABFE$, одержимо зображення у вигляді прямокутника $A_2B_2F_2E_2$, за яким можемо визначити довжину його ребер $AB = A_2B_2$ і $AE = A_2E_2$, але не можемо знайти довжину третього виміру AD, тому і за цим зображенням відновити оригінал неможливо.

Розглядаючи одночасно обидві проекції на двох площинах, переконуємось, що три виміри AB, AD, AE оригіналу, які його повністю визначають, можна знайти. Отже, ортогональні проекції фігури на дві взаємно перпендикулярні площини однозначно визначають положення всіх точок оригіналу.

Означення 2.1. Зображення просторової фігури його двома ортогональними проекціями на дві взаємно перпендикулярні площини називають *методом Монжа*.

Цей метод вперше був науково обґрунтований французьким геометром *Гаспаром Монжем* (1746–1818) у творі *«Нарисна геометрія»*, опублікованому в 1799 році. У ньому Г. Монж сформулював сукупність правил простих побудов, за допомогою яких вдалося розв'язати найважливіше завдання точного зображення тіла його ортогональними проекціями, а також ряд окремих задач, пов'язаних з таким зображенням. Метод Г. Монжа дістав найширше використання серед усіх відомих методів зображення і донині є найбільш вживаним при складанні технічних рисунків.

Зауваження. Ідея зображення оригінала за допомогою двох проекцій належить не Г. Монжу. Її запропонував ще давньоримський архітектор *Вітрувій*. Але Г. Монж вперше науково обґрунтував цей метод, надавши йому системного характеру і показавши, що можна не лише зобразити будь-який предмет за допомогою двох проекцій, а й, користуючись зображенням, розв'язувати відповідні геометричні задачі.

§ 8. Проекції точки на дві площини

Проектуючий апарат методу Г. Монжа розглянемо на прикладі побудови проекцій точки ортогональним проектуванням на дві взаємно перпендикулярні площини.

Візьмемо дві взаємно перпендикулярні площини; одну з них назвемо ***горизонтальною площиною проекцій***, позначатимемо H, другу – ***вертикальною*** або ***фронтальною*** площиною проекцій, позначатимемо V. Ці площини поділяють увесь простір на чотири *квадранти*. Лінія перетину площин проекцій H і V називається *віссю проекцій*, позначатимемо її через x (рис. 3.26).

Вісь проекцій розділяє площини проекцій на чотири півплощини H_1, H_2, V_1, V_2, які мають такі назви:

H_1 – передня горизонтальна півплощина,

H_2 – задня горизонтальна півплощина,

V_1 – верхня фронтальна півплощина,

V_2 – нижня фронтальна півплощина.

Першим назвемо квадрант, утворений передньою горизонтальною півплощиною H_1 і верхньою фронтальною півплощиною V_1, інші називаються в порядку, протилежному руху годинникової стрілки.

Вважатимемо, що спостерігач знаходиться в першому квадранті, тому безпосередньо бачить, що є в цьому квадранті, усе інше приховується площинами проекцій.

Нехай у просторі дана точка A' у першому квадранті (рис. 3.26). Опустивши з точки A' перпендикуляри на площини H і V, знайдемо її проекції: на площині H – точку $\overline{A}_1$, на площині V – точку A_2. Точку $\overline{A}_1$ називають *горизонтальною* проекцією точки A', точку A_2 – її *фронтальною* проекцією.

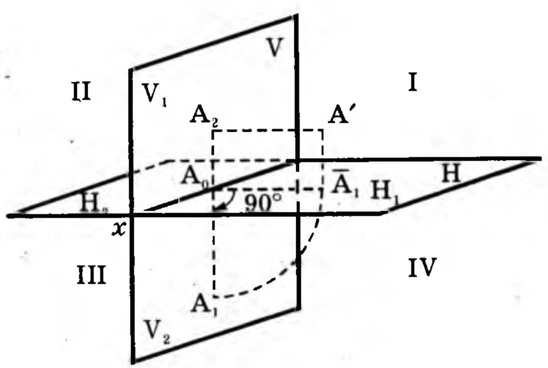


Рис. 3.26

Надалі всюди будемо позначати точкою з індексом 1 – горизонтальну проекцію, з індексом 2 – фронтальну.

Проведемо через точки A', $\overline{A}_1$, A_2 проектуючу площину. Оскільки $A'\overline{A}_1 \perp H$ і $A'\overline{A}_2 \perp V$, то ця площина буде перпендикулярною до площин H і V, а тому буде перпендикулярною

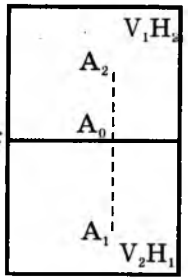


Рис. 3.27

і до лінії їх перетину x. Пряму x називають *віссю проекцій*. Позначимо через A_0 точку перетину площини $A'\bar{A}_1A_2$ з віссю проекцій, тоді $A'\bar{A}_1 = A_2A_0$, $A'A_2 = \bar{A}_1A_0$. Отже, якщо $\bar{A}_1$ і A_2 – дві проекції однієї і тієї ж точки A' на площини H і V, то перпендикуляри, опущені з точок $\bar{A}_1$ і A_2 на вісь проекцій, перетинаються на цій осі. Таким чином, за даним положенням точки A' у просторі, завжди можна знайти її ортогональні проекції на площинах H і V.

Правильне й обернене твердження: за даними ортогональними проекціями $\bar{A}_1$ і A_2 в площинах H і V можна визначити положення точки A' у просторі. Такою точкою буде точка перетину перпендикулярів, проведених через точки $\bar{A}_1$ і A_2 до площин H і V. Ці перпендикуляри лежать в одній проектуючій площині, тому завжди перетинаються.

Виконаємо далі поворот площини H навколо осі x на 90° за рухом годинникової стрілки, при цьому площина H суміститься з площиною V: задня горизонтальна півплощина H_2 суміститься з верхньою фронтальною півплощиною V_1, а передня горизонтальна півплощина H_1 суміститься з нижньою фронтальною півплощиною V_2 (рис. 3.27). Фронтальна проекція A_2 точки A' залишається на місці, а горизонтальна проекція $\bar{A}_1$ займе таке положення A_1 у півплощині V_2, що $A_0A_1 = A_0\bar{A}_1$, і точки A_1 і A_2 лежать на спільному перпендикулярі до осі x.

Точку A_1 також називають *горизонтальною проекцією* точки A'. Відстань A_0A_2 дорівнює відстані точки A' до площини H, а відстань A_0A_1 дорівнює відстані точки A' до площини V.

Означення 2.2. Сукупність двох ортогональних проекцій A_1 і A_2 на дві взаємно перпендикулярні площини H і V, суміщених після проектування точки A' поворотом навколо осі x на 90° за рухом годинникової стрілки, називається *комплексним рисунком* або *епюром* (франц. *epure* – рисунок, проект).

Застосування комплексного рисунка розробив Г. Монж, тому зображення оригінала за допомогою епюра називають *методом Монжа*. Пряма A_1A_2 називається *лінією зв'язку*.

При побудові епюра будемо вважати, що суміщена площина збігається з площиною рисунка.

Очевидно, що будь-які дві точки на епюрі, розташовані на одному перпендикулярі до осі, завжди можна взяти за горизонтальну і фронтальну проекції деякої точки простору. Дійсно, повернувши площини

проекцій до початкового положення (рис. 3.26) і встановивши в цих точках перпендикуляри до площин H і V, знайдемо єдину точку в просторі.

Площини H і V розбивають простір на чотири квадранти. Ми розглянули проекції точки A', розміщеної у першому квадранті, і переконалися, що в цьому випадку горизонтальна проекція A_1 на епюрі розміщена нижче від осі проекцій, а фронтальна A_2 – вище від осі проекцій (рис. 3.27). Залежно від розташування точки в просторі її проекції на епюрі матимуть різні положення.

Якщо точка C' лежить у II квадранті, то при суміщенні площин H і V обидві проекції C_1 і C_2 будуть знаходитись над віссю проекцій x (рис. 3.28.).

Якщо точка D' знаходиться в III квадранті, то після суміщення площин H і V горизонтальна проекція D_1 буде над віссю x, а фронтальна D_2 – під віссю x.

Якщо точка B' лежить у IV квадранті, то після суміщення площин H і V обидві проекції B_1 і B_2 лежатимуть нижче осі x.

Якщо точка E' лежить у півплощині H_1, то її горизонтальна проекція E_1 лежить нижче осі x, а фронтальна E_2 – на осі x, а якщо точка F' лежить у півплощині H_2, то її горизонтальна проекція F_1 лежить вище осі x, а фронтальна F_2 – на осі x.

Якщо точка M' лежить у площині V, то її горизонтальна проекція M_1 лежить на осі x, а фронтальна M_2 збігається з точкою M'.

Нарешті, якщо точка N' лежить на осі x, то її обидві проекції збігаються з точкою N'.

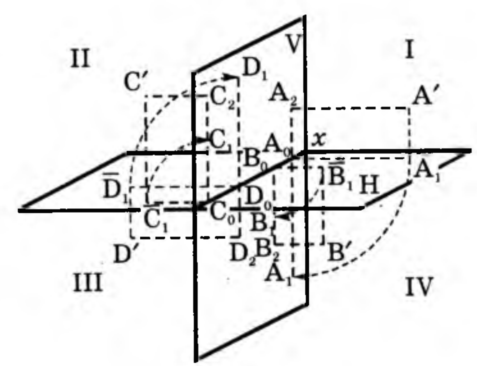


Рис. 3.28

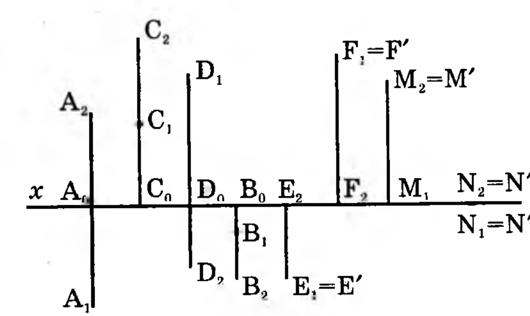


Рис. 3.29

Відзначимо, що обидві проекції можуть збігатися не лише для точок осі x. Це, очевидно, буде в тих випадках, коли точка лежить у II або в IV квадрантах на однаковій відстані від площин проекцій.

Точку A', задану проекціями A_1 і A_2, будемо позначати $A'(A_1, A_2)$ або просто (A_1, A_2).

На рис. 3.29 зображені проекції розглянутих точок на епюрі.

За даним епюром точки можна визначити її положення в просторі відносно площин H і V.

Наприклад, якщо горизонтальна проекція точки на епюрі лежить нижче осі x, то сама точка в просторі знаходиться перед фронтальною площиною, а якщо фронтальна проекція лежить вище осі x, то точка в просторі розміщена над горизонтальною площиною H.

§ 9. Система трьох площин проекцій. Проекції точки

Для визначення положення точки в просторі необхідно і достатньо мати її проекції на двох взаємно перпендикулярних площинах H і V.

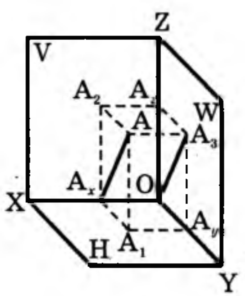


Рис. 3.30

Проте в інженерній практиці при зображенні складних деталей машин двох проекцій іноді мало, недостатньо для повного уявлення про характер деталі, тому систему двох взаємно перпендикулярних площин H і V доповнюють третьою площиною W, перпендикулярною до площин H і V. Площину W називають *профільною площиною проекцій* (рис. 3.30). Лінії перетину кожної пари площин називають *осями проекцій* – вісь $x(H \times V)$, вісь $y(H \times W)$, вісь $z(V \times W)$.

Позначимо через O точку перетину осей проекцій. Ця точка одночасно є проекцією осі x на площину W, проекцією осі y на площину V і проекцією осі z на площину H.

Щоб одержати епюр площин проекцій H, V, W з їх просторового зображення, треба площину H повернути на 90° за рухом годинникової стрілки до суміщення з площиною V навколо осі x, а площину W теж на 90° проти руху стрілки годинника навколо осі z до суміщення з площиною V (рис. 3.31).

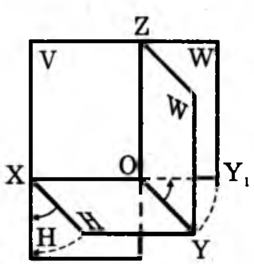


Рис. 3.31

Для осі OY відмічають два положення: OY і OY_1.

При суміщенні площини H з площиною V додатний напрям осі OY суміщається з від'ємним напрямом осі OZ і, навпаки, від'ємний напрям осі OY суміщається з додатним напрямом осі OZ.

Наочне зображення площин H, V, W, точки A і її проекцій (A_1 – горизонтальна, A_2 – фронтальна, A_3 – профільна) дано на рис. 3.30, а епюр – на рис. 3.32а,б.

На епюрах горизонтальна і фронтальна проекції A_1 і A_2 розміщені на одному перпендикулярні до осі x – на лінії зв'язку A_1A_2; фронтальна і профільна проекції A_2 і A_3 лежать на перпендикулярі до осі z – на лінії зв'язку A_2A_3.

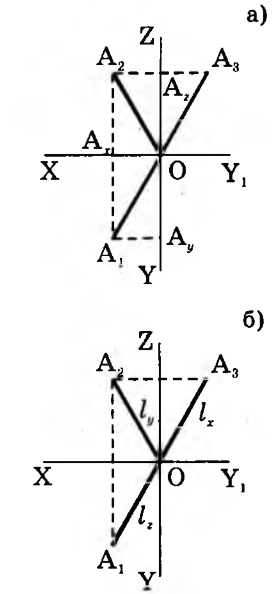


Рис. 3.32

Відстані точки A від площин проекцій на наочному зображенні вимірюється відрізками $AA_1 = A_zA_x = OA_z$ до площини H, $AA_2 = A_1A_x = OA_y$ до площини V, $AA_3 = A_1A_y = A_2A_z = OA_x$ до площини W; на епюрі: A_2A_x – до площини H, A_1A_x – до площини V, A_3A_z – до площини W, де O – точка перетину осей проекцій. Відстані точки A до осей проекцій вимірюються на наочному зображенні відрізками AA_x – до осі x, AA_y – до осі y, AA_z – до осі z. Але $AA_x = OA_3$, $AA_y = OA_2$, $AA_z = OA_1$, тому на епюрах відстані точки A до осей проекцій вимірюються відрізками $OA_3 = \ell_x$ – до осі x, $OA_2 = \ell_y$ – до осі y, $OA_1 = \ell_z$ – до осі z (рис. 3.32).

Отже, відстані деякої точки A в просторі до площин проекцій і до осей проекцій можна знайти за епюром точки A.

Положення точки A в просторі відносно площин проекцій однозначно визначається її двома проекціями, тому третю проекцію брати довільною не можна, третя проекція повністю визначається двома даними.

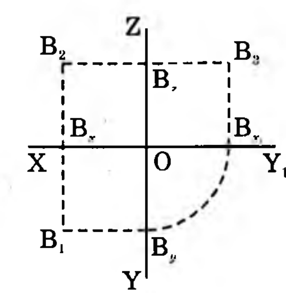


Рис. 3.33

Задача 2.1. Побудувати на епюрі: 1) горизонтальну проекцію B_1 точки B, заданої її проекціями B_2 і B_3; 2) фронтальну проекцію C_2 точки $C(C_1, C_3)$.

Розв'язання.

1. Через точку B_2 проводимо пряму B_2B_x, перпендикулярну осі OX, на ній повинна лежати шукана проекція B_1 (рис. 3.33). Через точку B_3 проводимо пряму, перпендикулярну осі OY_1 до перетину в точці B_{y_1}. На осі OY відкладемо відрізок $OB_y = OB_{y_1}$, і через точку B_y проведемо пряму, паралельну осі OX, до перетину з прямою B_2B_x в шуканій точці B_1 (рис. 3.33). За даними проекціями B_2 і B_3 можна сказати, що точка B знаходиться у першому октанті.

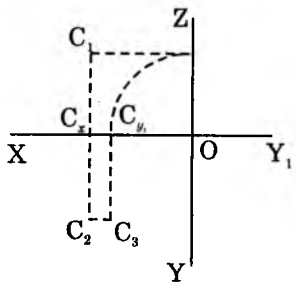


Рис. 3.34

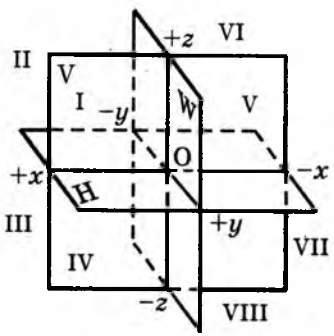


Рис. 3.35

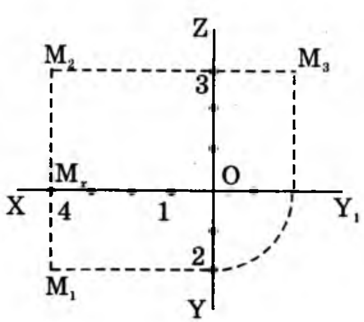


Рис. 3.36

2. За даними проекціями C_1 і C_3 можна сказати, що точка C знаходиться в третьому октанті. Побудова точки C_2 показана на рис. 3.34.

У багатьох випадках буває зручно задавати точки їх координатами відносно системи трьох координатних площин. Якщо точка A задана прямокутними координатами, то за площини координатної системи можна взяти площини проекцій H, V, W, точку O перетину осей проекцій x, y, z беруть за початок координат. Координатами точки A називають три числа x, y, z, які дорівнюють відстаням від площин W, V і H, тобто довжини відрізків AA_3, AA_2, AA_1 (рис. 3.30).

Площини H, V, W розбивають простір на вісім тригранних кутів, які називаються *октантами* (лат. *octo* – вісім). Знаки координат точки залежать від того, в якому октанті знаходиться точка (рис. 3.35), вони наведені в таблиці.

На епюрі площин проекцій H, V, W маємо такі знаки координат: абсциса x (по осі OX) вліво від точки O – додатна, вправо – від'ємна; ордината y (по осі OY) вниз від точки O – додатна, вище – від'ємна; апліката z (по осі OZ) вище точки O – додатна, нижче – від'ємна.

Октант	Знаки координат		
	x	y	z
1	+	+	+
2	+	–	+
3	+	–	–
4	+	+	–
5	–	+	+
6	–	–	+
7	–	–	–
8	–	+	–

Задача 2.2. Побудувати епюри точок $M(4;\ 2;\ 3)$ і $N(2;\ -1;\ 3)$.

Розв'язання. Нехай маємо епюр площин H, V, W і одиницю довжини, однакову на всіх трьох осях проекцій. За даними координатами точки M можна сказати, що точка M знаходиться в першому октанті. Щоб побудувати епюр точки M, відкладемо відрізок $OM_x = 4$ на осі OX вліво від точки O, відрізок $M_xM_1 = 2$ на перпендикулярі, проведеному через точку M_x до осі OX нижче від неї, і на цьому ж перпендикулярі відрізок $M_xM_2 = 3$ вище від осі OX (рис. 3.36).

Точка M_1 – горизонтальна проекція, точка M_2 – фронтальна проекція точки M. Профільну проекцію M_3 будуємо одним із зазначених раніше способів.

Епюр точки N побудований на рис. 3.37.

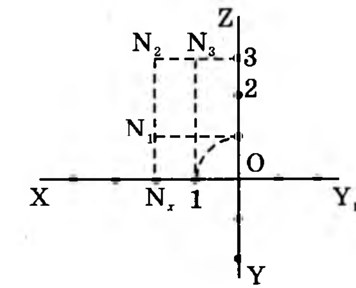


Рис. 3.37

§ 10. Проекції прямої

10.1. Прямі загального положення

Зрозуміло, що ортогональними проекціями прямої завжди будуть прямі, крім того випадку, коли пряма в просторі перпендикулярна до однієї з площин проекцій.

Означення 2.3. Пряма, не перпендикулярна і не паралельна жодній з площин проекцій, називається *прямою загального положення.*

Ортогональну проекцію прямої на площині проекцій можна одержати двома способами: або як лінію перетину цієї площини з площиною, проведеною через дану пряму перпендикулярно площині проекцій, або за ортогональними проекціями двох довільних точок даної прямої, оскільки положення прямої повністю визначається двома її точками. У більшості випадків будемо надавати перевагу другому способу.

Візьмемо пряму загального положення a. Одна проекція прямої не визначає положення прямої в просторі, оскільки провівши через цю проекцію площину, перпендикулярну до площини проекцій, знайдемо, що різні лінії цієї площини матимуть одну й ту ж ортогональну проекцію. Тому необхідно будувати дві проекції даної прямої на дві площини. Для

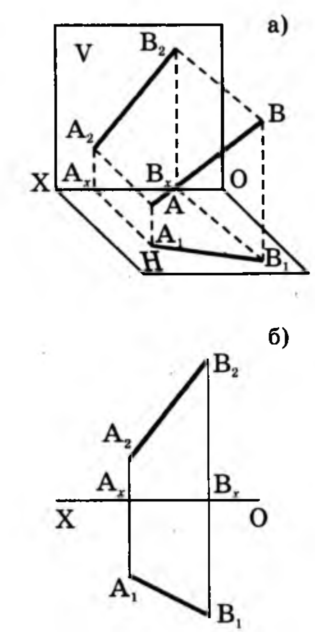


Рис. 3.38

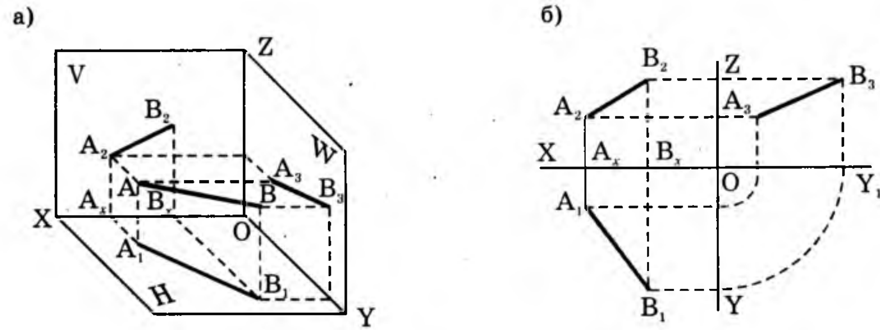


Рис. 3.39

знаходження проекцій прямої a візьмемо на ній дві довільні точки A і B, побудуємо їх ортогональні проекції в площинах H і V, які і визначать горизонтальну і фронтальну проекції прямої. Переважно такими точками на прямій будуть кінці відрізка, належного даній прямій. Крім того, вважатимемо (для спрощення зображення), що зображуваний відрізок прямої, знаходиться повністю в одному (першому) квадранті.

На рис. 3.38а,б дано наочне просторове зображення відрізка AB і його епюр на дві площини H і V, а на рис. 3.39а,б – на три площини H, V, W.

Оскільки побудова зображення прямої зводиться до побудови проекцій двох її точок, а побудову проекцій точок на дві і три взаємно перпендикулярні площини вже розглянуто для всіх можливих положень точок, то побудову просторового зображення прямої загального положення і всіх інших окремих її розміщень відносно площин проекцій та відповідних епюрів будемо розглядати лише для першого квадранта (октанта), а інші випадки – у вправах.

10.2. Прямі, паралельні одній з трьох площин проекцій

Крім загального положення відносно площин проекцій, пряма в просторі може займати ряд інших положень.

Означення 2.4. Пряма, паралельна горизонтальній площині проекцій, називається *горизонтальною прямою* або *горизонталлю.*

Оскільки всі точки горизонтальної прямої рівновіддалені від площини H, то фронтальна проекція горизонталі паралельна осі

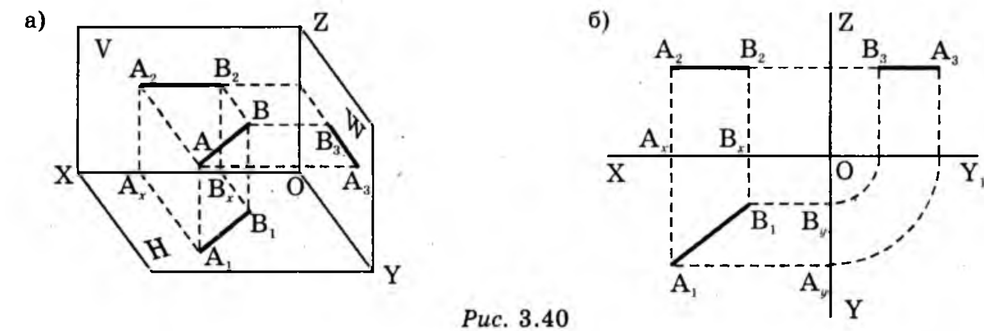


Рис. 3.40

$OX(A_2B_2 \parallel OX)$, профільна проекція A_3B_3 паралельна осі $OY(OY_1)$ $(A_3B_3 \parallel OY)$, а горизонтальна проекція відрізка горизонталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проектується $(A_1B_1 = AB)$.

На рис. 3.40а дано наочне просторове зображення відрізка AB горизонтальної прямої, а на рис. 3.40б – його епюр.

Означення 2.5. Пряма, паралельна фронтальній площині проекцій, називається *фронтальною прямою,* або *фронталлю.*

Усі точки фронталі однаково віддалені від площини V, тому горизонтальна проекція C_1D_1 фронталі CD паралельна осі OX, профільна проекція C_3D_3 паралельна осі OZ, а фронтальна проекція C_2D_2 відрізка CD фронталі дорівнює натуральному відрізку прямої, що проектується $(C_2D_2 = CD)$. На рис. 3.41а дано просторове зображення відрізка CD прямої на три площини H, V, W, а на рис. 3.41б – його епюр.

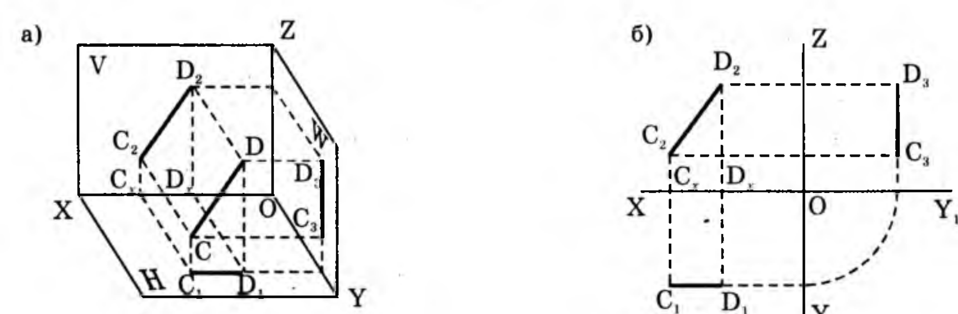


Рис. 3.41

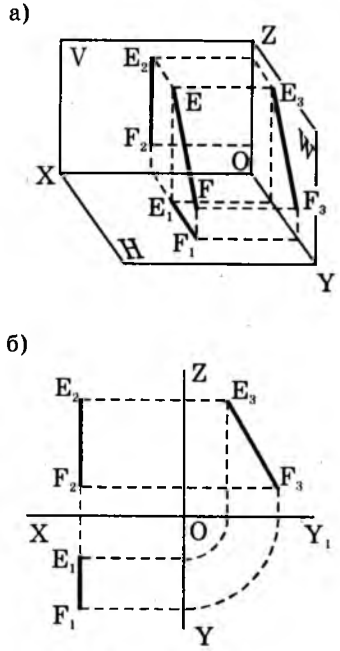


Рис. 3.42

Означення 2.6. Пряма, паралельна профільній площині проекцій, називається *профільною прямою.*

Оскільки всі точки профільної прямої однаково віддалені від площини W, то горизонтальна проекція E_1F_1 і фронтальна проекція E_2F_2 перпендикулярні до осі OX, а профільна проекція E_3F_3 дорівнює натуральному відрізку EF прямої, що проектується ($E_3F_3 = EF$).

Просторове зображення відрізка EF профільної прямої і його епюр виконане на рис. 3.42а,б.

10.3. Прямі, паралельні двом із трьох площин проекцій

Якщо пряма паралельна двом площинам проекцій, то вона перпендикулярна до третьої і проектується на неї в точку. На дві інші площини проекцій відрізок такої прямої проектується в натуральну величину. Епюр відрізка AB прямої, паралельної площинам H і V, дано на рис. 3.43. Відрізок AB проектується на площини H і V у натуральну величину, а на площину W – у точку.

На рис. 3.44 і 3.45 подано епюр відрізка CD прямої, паралельної площинам H і W, та відрізка EF прямої, паралельної площинам V і W.

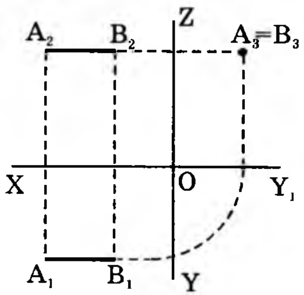


Рис. 3.43

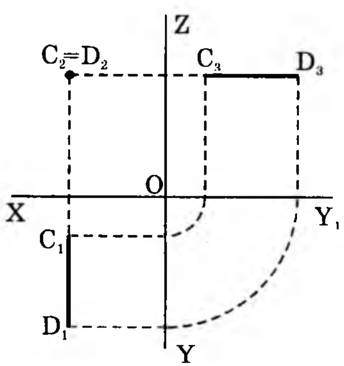


Рис. 3.44

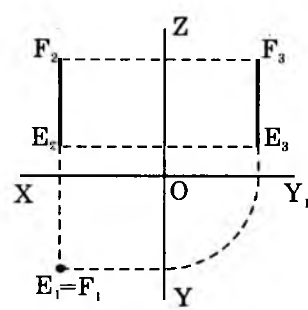


Рис. 3.45

10.4. Прямі, розміщені в площинах проекцій

Якщо пряма MN лежить у площині H, то її горизонтальна проекція M_1N_1 збігається з прямою MN, фронтальна проекція M_2N_2 лежить на осі OX, а профільна проекція M_3N_3 – на осі OY. Просторове зображення відрізка MN такої прямої та епюр відрізка MN дано на рис. 3.46а,б.

На рис. 3.47 і 3.48 подані епюри відрізків KL і QR, які належать відповідно прямим KL і QR, що лежать у площинах V і W.

Якщо пряма належить двом площинам проекцій, то вона належить їх лінії перетину, тобто одній із осей проекцій, тому дві проекції такої прямої збігаються з відповідною віссю проекцій, а третьою проекцією буде точка.

Епюр різних положень прямої відносно двох площин проекцій H і V подано на рис. 3.49. На ньому AB – пряма загального положення, CD – горизонталь, EF – фронталь, NM – профільна пряма, KL – пряма, паралельна осі OX, PR – пряма, перпендикулярна площині V, SQ – пряма, перпендикулярна площині H, GT – пряма, що лежить у площині H, UI – пряма, що лежить у площині V, a – пряма, що збігається з віссю проекцій OX.

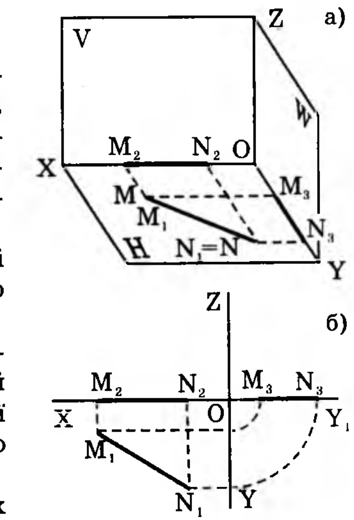


Рис. 3.46

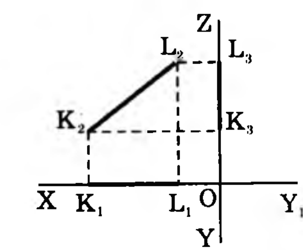


Рис. 3.47

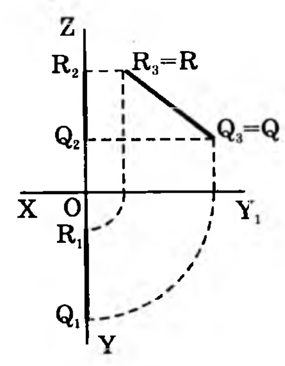


Рис. 3.48

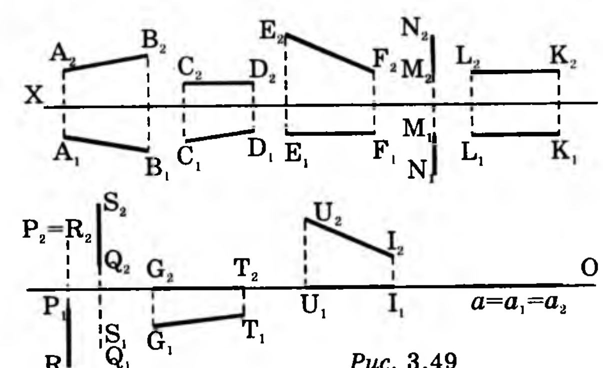


Рис. 3.49

§ 11. Сліди прямої

Означення 2.7. *Слідом прямої* називається точка перетину прямої з площиною проекцій.

Слід прямої у площині H називається *горизонтальним*, у площині V – *фронтальним*, у площині W – *профільним.*

У системі трьох площин проекцій H, V, W пряма загального положення має три сліди; пряма, паралельна одній з площин проекцій, – два, а пряма, паралельна двом площинам проекцій, має один слід.

Знаходження слідів прямої розглянемо на просторовому рисунку з двох площин проекцій H і V.

Нехай AB – просторова пряма загального положення відносно площин H і V (рис. 3.50а), A_1B_1 – її горизонтальна проекція, A_2B_2 – фронтальна. Горизонтальний слід прямої – це точка M перетину прямої AB з площиною H, тому горизонтальна проекція M_1 горизонтального сліду M прямої AB збігається з самим слідом ($M = M_1$), а фронтальна проекція M_2 цього сліду лежить на осі OX.

Фронтальний слід прямої AB – це точка N перетину прямої AB з площиною V, а тому фронтальна проекція N_2 фронтального сліду N збігається з самим слідом ($N = N_2$), а горизонтальна проекція N_1 цього сліду лежить на осі OX.

Аналогічним є розміщення проекцій на епюрі (рис. 3.50б). Звідси випливає правило знаходження слідів прямої за її проекціями на епюрі (і в просторі).

Щоб знайти горизонтальний слід прямої AB, треба продовжити фронтальну проекцію A_2B_2 прямої до перетину з віссю OX в точці M_2, потім через точку M_2 провести пряму, перпендикулярну осі OX, до перетину з горизонтальною проекцією A_1B_1 у точці M. Точка $M_1 = M$ – горизонтальний слід прямої AB, вона ж і горизонтальна проекція M_1 горизонтального сліду M, а точка M_2 – фронтальна проекція горизонтального сліду.

Аналогічно формулюється правило знаходження фронтального сліду N прямої AB: $A_1B_1 \times OX = N_1$, $N_1N_2 \perp OX$; $N_2 = N_1N_2 \times A_2B_2$. $N = N_2$ – фронтальний слід прямої AB, який збігається з його фронтальною проекцією N_2, N_1 – горизонтальна проекція фронтального сліду N.

За даними слідами M і N (у площинах H і V) на епюрі можна побудувати проекції прямої. Для цього треба знайти фронтальну проекцію M_2 горизонтального сліду M (він же M_1) на осі OX і горизонтальну проекцію N_1 фронтального сліду $N = N_2$ на осі OX.

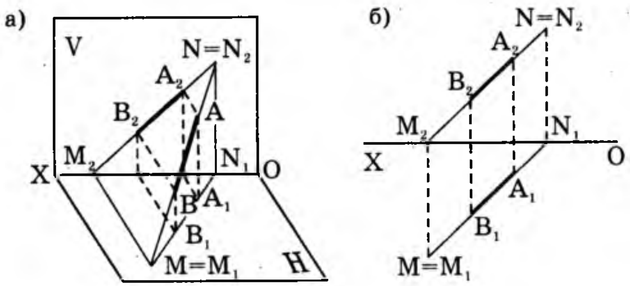


Рис. 3.50

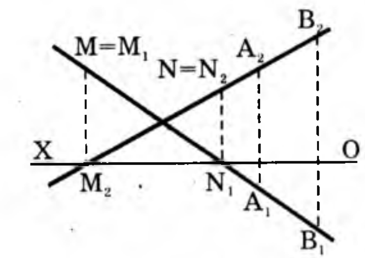


Рис. 3.51

Пряма MN_1 – горизонтальна проекція, NM_2 – фронтальна проекція прямої AB (рис. 3.50б).

Сліди M і N прямої розділяють її на частини, розміщені в різних квадрантах, на які простір розбивають площини H і V.

Тому за даними проекціями прямої або даними слідами прямої можна визначити її положення в просторі відносно площин проекцій, встановити, через які квадранти пряма проходить.

Задача 2.3. Знаючи проекції прямої AB, знайти її сліди і визначити, через які квадранти вона проходить.

Розв'язання. Нехай задано епюр прямої AB проекціями A_1B_1 і A_2B_2 (рис. 3.51). Точка $M_2 = OX \times A_2B_2$ – фронтальна проекція горизонтального сліду M прямої AB.

Проведемо $M_2M_1 \perp OX$, тоді $M_1 = A_1B_1 \times M_2M_1$ – горизонтальна проекція горизонтального сліду, вона ж горизонтальний слід прямої AB. Точка $N_1 = A_1B_1 \times OX$ – горизонтальна проекція сліду N. Проведемо $N_1N_2 \perp OX$, тоді $N_2 = A_2B_2 \times N_1N_2$ – фронтальна проекція фронтального сліду, вона ж – фронтальний слід N прямої AB. Отже, $M_1 = M$ і $N_2 = N$ – горизонтальний і фронтальний сліди прямої AB.

Оскільки M_1 лежить вище осі OX, то вона є горизонтальною проекцією точки M, що лежить у задній горизонтальній півплощині. Точка N_2 лежить вище осі OX, тому вона є фронтальною проекцією точки N, що лежить у верхній фронтальній півплощині. Отже, пряма AB проходить через перший, другий і третій квадранти. Задача розв'язана. Побудова профільних слідів прямих проводиться аналогічно.

§ 12. Положення точки і прямої

Інцидентність точки і прямої паралельним проектуванням не порушується. На основі цієї властивості паралельного проектування можна сформулювати *умову належності точки прямій* у просторі. Якщо точка в просторі належить прямій, то проекції цієї точки належать однойменним з ними проекціям прямої.

На рис. 3.52 дано епюр прямої $a(a_1, a_2)$ і декількох точок у просторі. Тоді згідно з умовою належності точки прямій на даному епюрі точки $A(A_1, A_2)$, $B(B_1, B_2)$, $C(C_1, C_2)$ лежать на прямій $a(a_1, a_2)$, оскільки їх проекції лежать на однойменних з ними проекціях прямої: $A_1 \in a_1$, $B_1 \in a_1$, $C_1 \in a_1$, $A_2 \in a_2$, $B_2 \in a_2$, $C_2 \in a_2$. Точка $P(P_1, P_2)$ не лежить на прямій a, оскільки хоча проекції точки P і лежать на проекціях прямої a, але не на відповідних проекціях: $P_1 \in a_2$, $P_2 \in a_1$. Точки $D(D_1, D_2)$, $E(E_1, E_2)$, $F(F_1, F_2)$ не належать прямій a , тому що проекції точок $E_2 \notin a_2$, але $E_1 \in a_1$; $D_2 \in a_2$, але $D_1 \notin a_1$; $F_1 \notin a_1$ і $F_2 \notin a_2$.

Отже, якщо хоч одна із проекцій точки не лежить на відповідній проекції прямої, то точка не лежить на прямій.

Задача 2.4. Відрізок BC заданий двома проекціями B_1C_1 і B_2C_2. Знайти на епюрі зображення точки D, віддаленої від площини H на відстані 2 см.

Розв'язання. Відстань точки D від площини H проектується на площину V в натуральну величину. Тому фронтальна проекція D_2 точки D знаходиться на проекції B_2C_2 на відстані 2 см від осі проекцій (рис. 3.53).

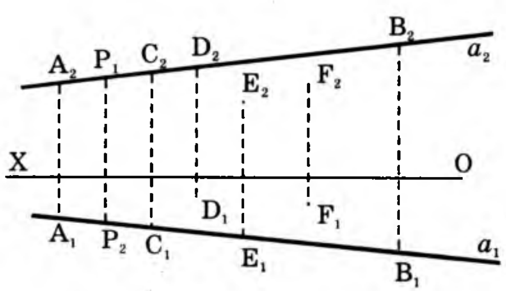


Рис. 3.52

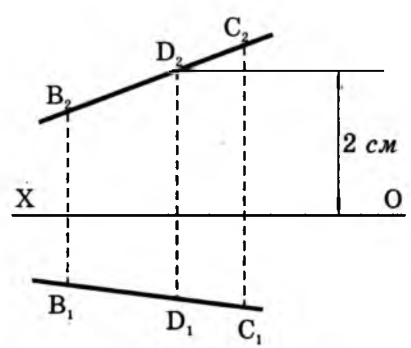


Рис. 3.53

Для знаходження точки D_2 проводимо на відстані 2 см від осі OX пряму, паралельну осі проекцій, ця пряма перетне відрізок B_2C_2 в точці D_2. Точку D_1 знайдемо як точку перетину лінії зв'язку, проведену через точку D_2, з горизонтальною проекцією B_1C_1 відрізка BC.

§ 13. Взаємне положення двох прямих

Дві прямі у просторі можуть *перетинатися*, бути *паралельними* або *мимобіжними*.

13.1. Паралельні прямі

За властивостями паралельного проектування *однойменні проекції двох паралельних прямих завжди паралельні між собою*, тобто горизонтальні проекції паралельні між собою, фронтальні проекції паралельні між собою, профільні проекції паралельні між собою.

Для прямих загального положення справедливе й обернене твердження: якщо дві однойменні проекції прямих попарно паралельні, то прямі у просторі паралельні. Для паралельності прямих незагального положення треба, щоб були паралельні між собою попарно проекції на кожній з трьох площин проекцій H, V і W. На рис. 3.54 маємо епюр двох паралельних прямих AB і CD загального положення на двох площинах H і V. Легко переконатись, що і профільні проекції цих прямих паралельні між собою.

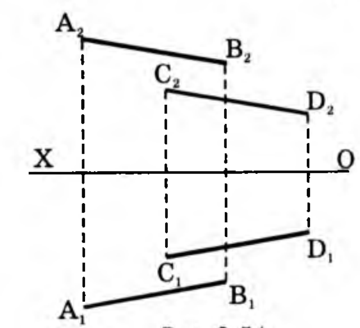


Рис. 3.54

На рис. 3.55 однойменні горизонтальні і фронтальні проекції профільних прямих паралельні попарно, але цього недостатньо для їх паралельності в просторі: оскільки профільні проекції A_3B_3 і C_3D_3 не паралельні між собою, то прямі AB і CD не паралельні.

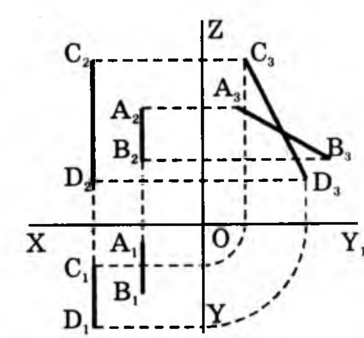


Рис. 3.55

Задача 2.5. Через дану точку $A(A_1, A_2)$ провести пряму, паралельну даній прямій $b(b_1, b_2)$ загального положення.

Розв'язання. Оскільки пряма $b(b_1, b_2)$ загального положення, то достатньо двох проекцій для

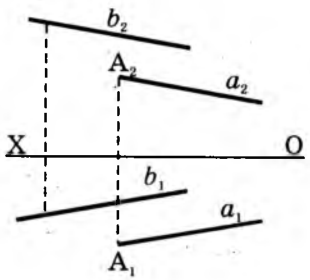


Рис. 3.56

визначення паралельності прямих. Побудова прямої $a(a_1, a_2)$, паралельної прямій $b(b_1, b_2)$, зводиться до проведення через точку A_1 прямої a_1, паралельної прямій b_1, і через точку A_2 прямої a_2, паралельної прямій b_2 (рис. 3.56).

13.2. Прямі, що перетинаються

Інцидентність точок і прямих паралельним проектуванням не порушується, тому якщо точка M належить обом прямим AB і CD у просторі, то проекція точки M повинна належати проекціям A_1B_1 і C_1D_1, тобто повинна бути точкою їх перетину.

Отже, *якщо прямі в просторі перетинаються, то їх однойменні проекції перетинаються між собою в точках, які є проекціями точки перетину даних прямих, причому ці точки-проекції повинні лежати на одному й тому ж перпендикулярі до відповідної осі проекцій.*

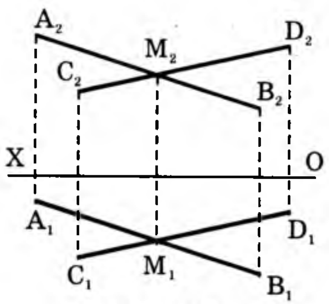


Рис. 3.57

Для прямих загального положення достатньо мати проекції точки перетину на дві площини (рис. 3.57). У випадку, коли хоч одна з двох прямих паралельна одній з площин проекцій і на епюрі дані проекції тільки на двох інших площинах, то не завжди прямі в просторі перетинаються, хоч їх однойменні проекції перетинаються.

На рис. 3.58 наведено приклад, коли дві проекції прямих AB і CD задовольняють умову існування точки перетину, але одна із прямих профільна, тому за цими двома проекціями ще не можна з певністю стверджувати, що прямі AB і CD перетинаються.

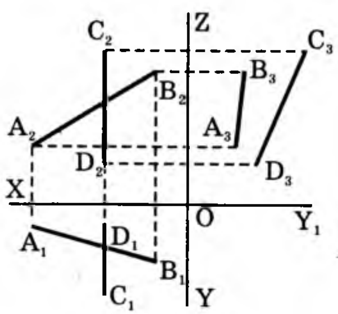


Рис. 3.58

Тут необхідно побудувати треті проекції цих прямих, які і визначать, перетинаються прямі AB і CD чи ні.

Профільні проекції A_3B_3 і C_3D_3 не перетинаються, тому просторові прямі AB і CD не перетинаються.

13.3. Мимобіжні прямі

Означення 2.8. Дві прямі в просторі називаються ***мимобіжними***, якщо вони не паралельні і не перетинаються.

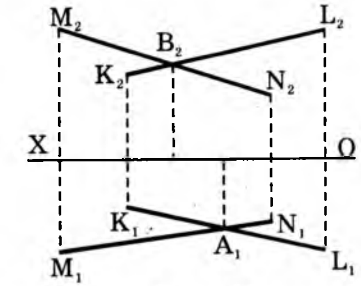


Рис. 3.59

На рис. 3.59 зображені мимобіжні прямі MN і KL: їх однойменні проекції перетинаються $M_1N_1 \times K_1L_1 = A_1$ і $M_2N_2 \times K_2L_2 = B_2$, але точки A_1 і B_2 не лежать на спільному перпендикулярі до осі OX, пряма A_1B_2 не є лінією зв'язку.

Мимобіжні прямі зображені також на рис. 3.55, 3.58.

Мимобіжні прямі загального положення визначаються двома проекціями, як на рис. 3.59, а для з'ясування питання, чи є дані прямі мимобіжними, якщо обидві або хоч одна з них незагального положення, необхідно побудувати ще третю проекцію, як на рис. 3.55.

§ 14. Площина

14.1. Задання площини на епюрі

Безпосередньо ортогонально спроектувати можна лише площину, яка перпендикулярна до площини проекції. Тому для побудови зображення площини використовують елементи, які повністю визначають положення площини в просторі і які можна побудувати.

Площина в просторі повністю визначається:

1) трьома неколінеарними точками;
2) прямою і точкою, яка їй не належить;
3) двома прямими, що перетинаються;
4) двома паралельними прямими;
5) трикутником або будь-якою іншою плоскою фігурою.

Відповідно до цього на епюрі площина може бути задана:

1) проекціями трьох її неколінеарних точок;
2) проекціями прямої і точки, яка не належить прямій;
3) проекціями двох прямих, що перетинаються;
4) проекціями двох паралельних прямих;
5) проекціями трикутника або іншої плоскої фігури.

Схематично на рис. 3.60 дано задання площини на епюрі різними способами. Легко переконатися, що кожна з форм задання площини може бути зведена до кожної іншої.

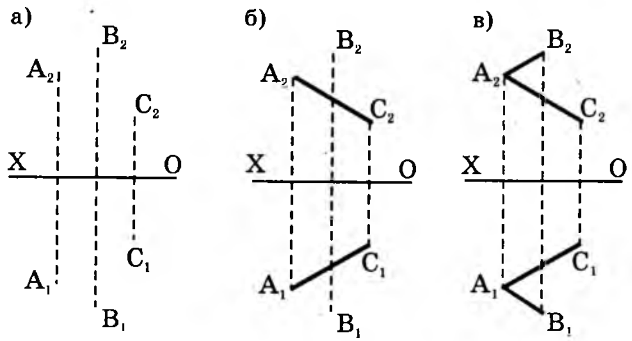


Рис. 3.60

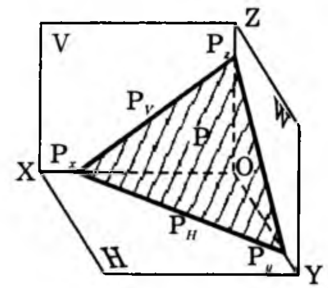


Рис. 3.61

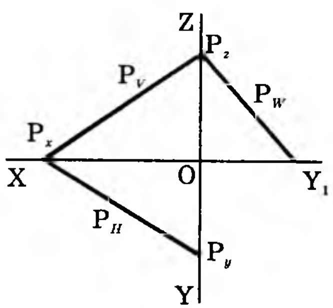


Рис. 3.62

При розв'язуванні практичних задач часто застосовують зображення площини на епюрі за допомогою прямих ліній, по яких вона перетинає площини проекцій H, V, W.

Означення 2.9. *Слідом площини* називається пряма, по якій ця площина перетинається з площиною проекцій.

Пряма перетину даної площини P з горизонтальною площиною проекцій називається *горизонтальним слідом площини*, позначають P_H, з фронтальною площиною проекцій – *фронтальним слідом*, позначають P_V, з профільною площиною проекцій – *профільним слідом*, позначають P_W.

Положення площини в просторі повністю визначається заданням двох її слідів. Кожна пара слідів площини перетинається на відповідній осі проекцій, ця точка перетину називається точкою *сходження* слідів. Площина загального положення має слід у кожній площині проекцій, ці сліди утворюють *трикутник слідів* (рис. 3.61).

На рис. 3.61 дано наочне зображення площини слідами P_H, P_V, P_W; точки сходження $P_x = P_H \times P_V$, $P_y = P_H \times P_W$, $P_z = P_V \times P_W$, а на рис. 3.62 – епюр площини P, заданої слідами P_H, P_V, P_W.

Слід площини на площині проекцій збігається зі своєю проекцією на цій площині, а друга проекція цього сліду лежить на відповідній осі проекцій.

Сліди площини у площинах проекцій завжди можна знайти, якщо вони існують, при будь-якому заданні площини.

Задача 2.6. Знайти сліди площини, заданої на епюрі двома прямими, що перетинаються.

Розв'язання. Нехай площина P задана на епюрі проекціями двох прямих AB і BC площини, що перетинаються в точці $B(B_1, B_2)$. Для побудови слідів площини P треба знайти проекції двох точок горизонтального сліду і двох точок фронтального сліду. За правилом знаходження слідів прямої в площинах проекцій знаходимо горизонтальні сліди $M = M_1$ і $N = N_1$ прямих AB і BC та їх фронтальні сліди L_2 і K_2 (рис. 3.63).

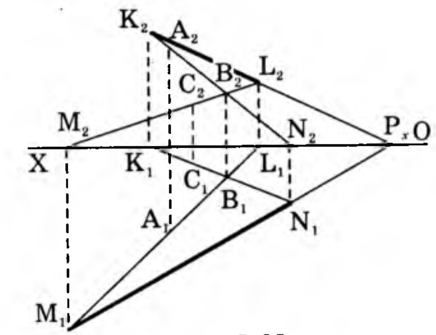


Рис. 3.63

M_1N_1 – горизонтальний слід площини P, L_2K_2 – фронтальний, $M_1N_1 \times L_2K_2 = P_x$ – точка сходження слідів.

Якщо необхідно зобразити не лише частину даної площини, розміщеної в першому квадранті, то треба на епюрі продовжити сліди, накреслені тільки для півплощин H і V, за точку сходження P_x позначивши їх P_{V_1} і P_{H_1} (рис. 3.64).

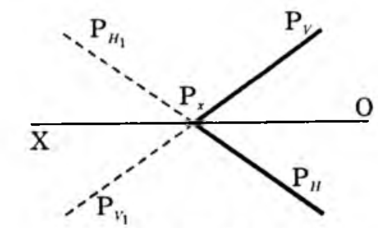


Рис. 3.64

Тоді частина площини P, яка розміщена в другому квадранті, визначається слідами P_{H_1} і P_V, у третьому – P_{H_1} і P_{V_1}, у четвертому – слідами P_H і P_{V_1}. Отже, за даними слідами площини P на епюрі можна вказати, у якому квадранті розглядається площина P. Відзначимо, що кут між слідами на епюрі не дорівнює куту, утвореному слідами площини в просторі. Це випливає з властивостей тригранного кута: сума двох плоских кутів кожного тригранного кута більша третього плоского кута. Тому кут, утворений слідами P_H і P_V на епюрі, більший кута між слідами P_H і P_V у просторі.

14.2. Характерні розміщення площини відносно площин проекцій

Означення 2.10. Площину, не перпендикулярну жодній з площин проекцій, називають площиною *загального положення.*

Площина загального положення перетинає кожну з осей проекцій. Сліди такої площини утворюють *трикутник слідів* $P_xP_yP_z$ (рис. 3.61).

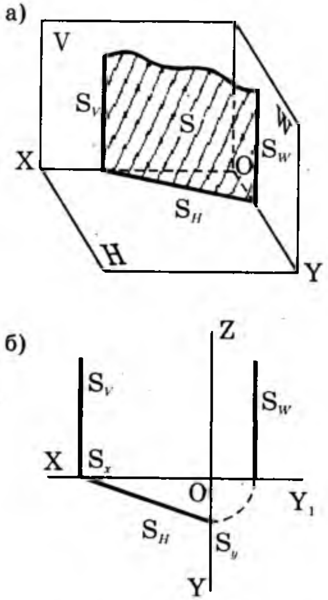


Рис. 3.65

Означення 2.11. Площина, перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, називається *горизонтально проектуючою площиною.*

Горизонтально проектуюча площина S паралельна осі проекцій OZ (рис. 3.65).

Фронтальний слід її S_V перпендикулярний до площини H і до осі OX, тобто паралельний осі проекцій OZ. Профільний слід S_W також паралельний осі OZ. Горизонтальний слід S_H горизонтально проектуючої площини може утворювати з віссю проекцій OX довільний кут; цей кут є лінійним кутом двогранного кута, утвореного площиною S і площиною V, оскільки він розміщений у площині H, перпендикулярній до обох площин S і V. Кут між слідами S_H і S_V, як і кут між S_H і S_W, в просторі дорівнює 90° кожний.

Горизонтальні проекції всіх точок, які належать горизонтально проектуючій площині S, розміщуються на горизонтальному сліді S_H цієї площини.

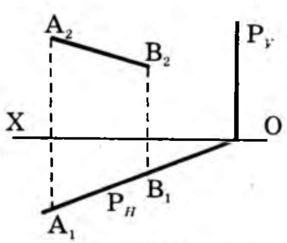


Рис. 3.66

Задача 2.7. Через пряму $AB(A_1B_1, A_2B_2,)$ провести горизонтально проектуючу площину P.

Розв'язання. Горизонтальний слід P_H площини P збігається з горизонтальною проекцією A_1B_1. Через точку перетину горизонтального сліду P_H з віссю проекцій OX проводимо пряму, перпендикулярну осі OX, – це буде фронтальний слід P_V горизонтально проектуючої площини P (рис. 3.66).

Означення 2.12. Площина, перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається *фронтально проектуючою площиною.*

Фронтально проектуюча площина T паралельна осі OY (рис. 3.67).

Горизонтальний слід її T_H перпендикулярний до площини V і до осі OX, тобто паралельний осі OY. Профільний слід T_W перпендикулярний до осі OZ. Фронтальний слід T_V фронтально проектуючої площини T може утворювати з віссю проекцій OX будь-який кут; цей кут є лінійним кутом двогранного кута між площинами T і H. Кут між T_H і T_V, як і кут між T_V і T_W, у просторі дорівнює 90° кожний.

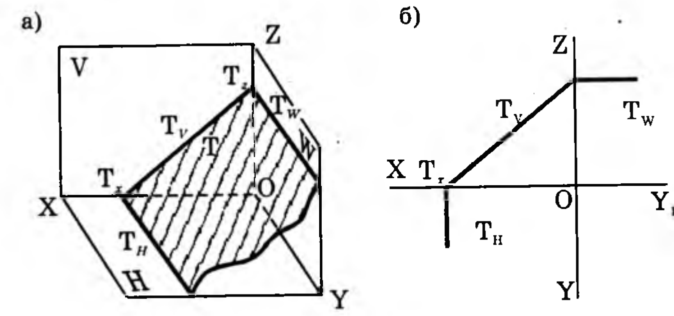


Рис. 3.67

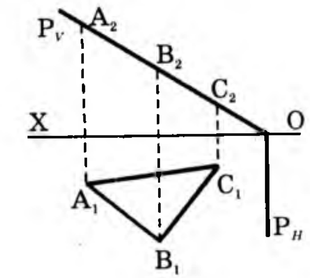


Рис. 3.68

Фронтальні проекції всіх точок, які належать фронтально проектуючій площині, розміщуються на фронтальному сліді T_V цієї площини.

Задача 2.8. Фронтальна проекція $A_2B_2C_2$ трикутника ABC сумістилась з фронтальним слідом P_V фронтально проектуючої площини P. Як розміщено трикутник ABC відносно площини P?

Розв'язання. За властивістю фронтальної проекції фронтально проектуючої площини P трикутник ABC лежить у площині P (рис. 3.68).

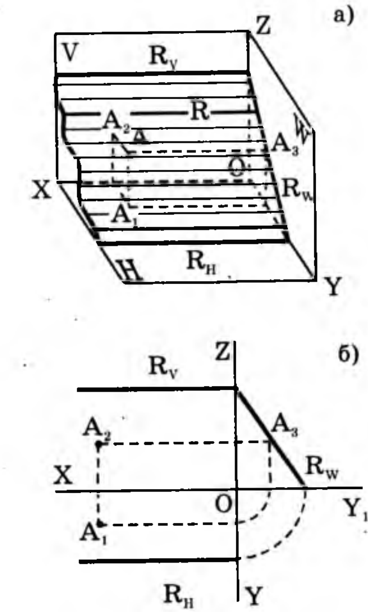


Рис. 3.69

Означення 2.13. Площина, перпендикулярна до профільної площини проекцій, називається *профільно проектуючою площиною.*

Профільно проектуюча площина R паралельна осі проекцій OX (рис. 3.69). Горизонтальний і фронтальний сліди цієї площини паралельні також осі OX, тобто паралельні між собою. Кут, утворений слідом R_W і віссю OY (OY_1 на епюрі), є лінійним кутом двогранного кута між площинами R і V. Кут між R_H і R_W та кут між R_V і R_W в просторі дорівнюють по 90° кожний.

Профільні проекції всіх точок, які належать профільно проектуючій площині, розміщуються на профільному сліді R_V цієї площини.

Означення 2.14. Площина, паралельна горизонтальній площині проекцій, називається *горизонтальною площиною.*

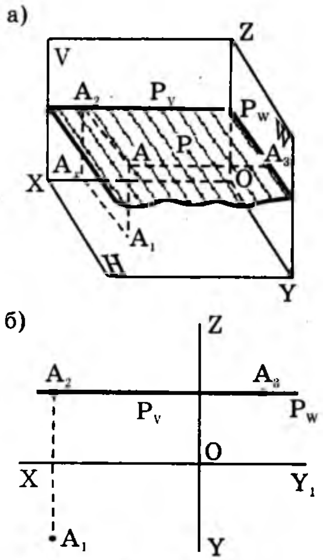


Рис. 3.70

Горизонтальна площина P є окремим випадком проектуючих площин: вона одночасно і фронтально, і профільно проектуюча. Тому її фронтальний P_V і профільний P_W сліди перпендикулярні до осі проекцій OZ, на них проектуються всі точки, фігури, що лежать у горизонтальній площині. Кожна плоска фігура, яка лежить у горизонтальній площині, проектується на площину проекцій H у натуральну величину (рис. 3.70). Горизонтального сліду горизонтальна площина не має.

Означення 2.15. Площина, паралельна фронтальній площині проекцій, називається *фронтальною площиною.*

Ця площина перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій H і до профільної площини проекцій W, тому горизонтальний і профільний сліди фронтальної площини P перпендикулярні до осі OY, а фронтальний слід відсутній (рис. 3.71).

Всі точки фронтальної площини проектуються на горизонтальний і профільний сліди. Кожна плоска фігура такої площини на фронтальну площину проекцій проектується в натуральну величину.

Означення 2.16. Площина, паралельна профільній площині проекцій, називається *профільною площиною.*

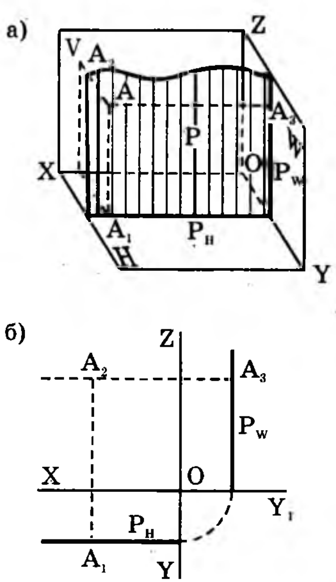


Рис. 3.71

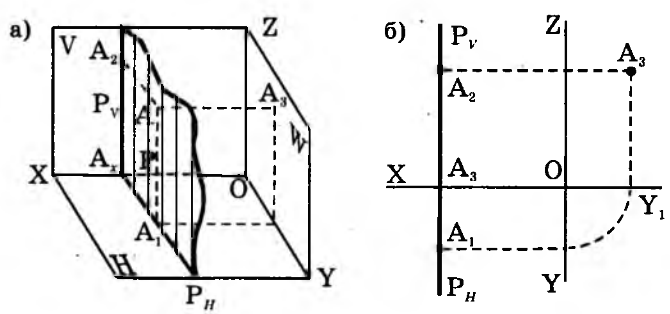


Рис. 3.72

Зрозуміло, що профільна площина P перпендикулярна до площин проекцій H і V, тому її горизонтальний і фронтальний сліди перпендикулярні осі OX. На ці сліди проектуються всі точки і плоскі фігури площини P. Горизонтальний і фронтальний сліди профільної площини P на епюрі збігаються в одну пряму, перпендикулярну до осі OX. Кожна плоска фігура, яка лежить у профільній площині P, проектується на профільну площину проекцій у натуральну величину (рис. 3.72).

Означення 2.17. Площина, яка проходить через вісь проекцій OX, називається *осьовою площиною.*

Осьова площина P є окремим випадком профільно проектуючих площин, вона перетинається з площинами проекцій H і V по осі OX, тому її сліди P_H і P_V збігаються з віссю OX, а профільний слід проходить через точку O. Профільний слід P_W визначає натуральну величину кутів нахилу осьової площини P до площин H і V (рис. 3.73).

Оскільки сліди P_H і P_V осьової площини збігаються, то для визначення положення такої площини в просторі за епюром на площинах H і V необхідно задати яку-небудь точку $A(A_1, A_2)$, що належить цій площині.

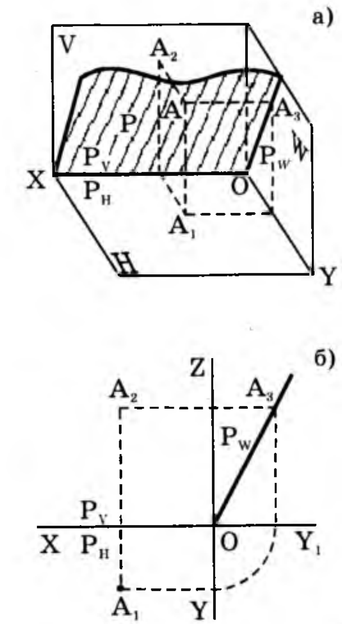


Рис. 3.73

§ 15. Прямі лінії на площині

Для побудови зображення прямої лінії, яка лежить у даній площині, використовують відомі з елементарної геометрії твердження:

1. Пряма належить площині, якщо вона проходить через дві точки, що лежать на цій площині.
2. Пряма належить площині, якщо вона проходить через точку, що лежить у цій площині, і паралельна прямій, що також лежить у цій площині.
3. Прямі у площині можуть займати різні положення відносно площин проекцій H і V.

15.1. Пряма загального розміщення

Означення 2.18. Пряма a, що лежить у площині P і не паралельна жодній з площин проекцій, називається *прямою загального положення.*

Якщо площина P загального положення задана слідами P_H і P_V і пряма AB загального положення лежить у цій площині, то проекції прямої AB повинні перетинати площини проекцій, причому точки її перетину повинні лежати на відповідних слідах площини P: горизонтальна проекція горизонтального сліду прямої повинна лежати на горизонтальному сліді P_H, а фронтальна проекція фронтального сліду прямої повинна лежати на фронтальному сліді P_V (рис. 3.74).

Отже, *пряма належить площині, якщо сліди прямої знаходяться на однойменних слідах площини.*

Задача 2.9. Побудувати зображення прямої a загального положення, що лежить у заданій слідами P_H і P_V площині P загального положення.

Розв'язання. Оскільки пряма a загального положення, то одну з її проекцій можна взяти довільно, нехай це буде пряма a_1. Знаходимо горизонтальний слід $M = M_1$ прямої a як точку перетину прямої a_1 з P_H (рис. 3.74). Точка N_1 перетину a_1 з OX буде горизонтальною проекцією фронтального сліду $N = N_2$ прямої a. Проведемо через точку M пряму, перпендикулярну осі проекцій OX, вона перетне вісь OX в точці M_2 – фронтальній проекції горизонтального сліду, а перпендикуляр, проведений через точку N_1 до прямої OX, перетне слід P_V в точці $N_2 = N$ – фронтальному сліді прямої a. Тоді пряма $N_2M_2 = a_2$ – фронтальна проекція прямої a, що лежить у площині $P(P_H, P_V)$.

Нехай площина P задана прямою BC і точкою A, яка не належить прямій BC. Тоді пряма, проведена через точку A паралельно прямій BC також належить площині P. Звідси випливає ще таке правило побудови проекцій прямої, яка належить даній площині: *пряма належить площині, якщо одна її проекція паралельна одному з слідів цієї площини, а друга проекція має з іншим слідом площини спільну точку.* Прикладами таких прямих є горизонталь і фронталь площини.

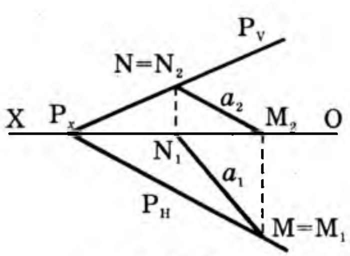


Рис. 3.74

15.2. Горизонталь площини

Означення 2.19. Пряма h, яка лежить у даній площині і паралельна горизонтальній площині проекцій H, називається *горизонталлю площини.*

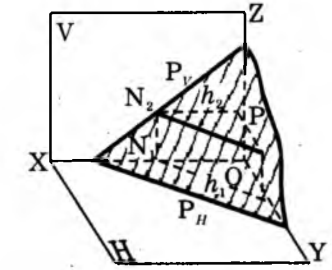


Рис. 3.75

Горизонталь h площини P, як і кожна горизонталь простору, проектується на фронтальну площину V прямою, паралельною осі OX. Горизонтальна проекція h_1 горизонталі h площини P буде паралельною горизонтальному сліду P_H площини P. Треба мати на увазі, що на епюрі сліди прямих, що лежать у площині P, розміщені завжди на однойменних слідах цієї площини (рис. 3.75).

Зрозуміло, що горизонталь h площини має лише один слід – фронтальний N, що лежить на фронтальному сліді площини.

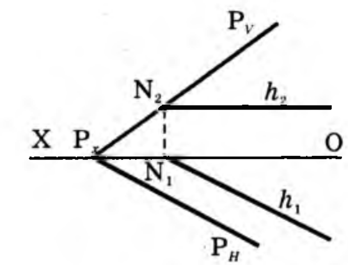


Рис. 3.76

Задача 2.10. Площина P задана слідами P_H і P_V. Побудувати довільну горизонталь цієї площини.

Розв'язання. Оскільки треба побудувати довільну горизонталь h площини P, заданої слідами, то побудову проекцій горизонталі можна почати з довільного вибору або горизонтальної проекції h_1, паралельної до горизонтального сліду P_H площини P, або фронтальної проекції h_2, паралельної осі проекцій OX (рис. 3.76).

Нехай через довільну точку N_1 осі OX проведена пряма h_1 паралельно сліду площини P_H. Точка N_1 є горизонтальною проекцією фронтального сліду $N_2 = N$ фронталі (рис. 3.76). Проведемо через точку N_1 пряму, перпендикулярну осі OX, вона перетне слід P_V у точці $N_2 = N$ – це буде фронтальна проекція фронтального сліду прямої h. Через точку $N_2 = N$ проведемо пряму h_2, паралельну осі OX, вона й буде фронтальною проекцією прямої h.

15.3. Фронталь площини

Означення 2.20. Пряма f, яка лежить у даній площині P і паралельна фронтальній площині проекцій V, називається *фронталлю площини P.*

Із наочного просторового зображення видно, що горизонтальна проекція f_1 фронталі f паралельна осі OX, а фронтальна f_2 – паралельна

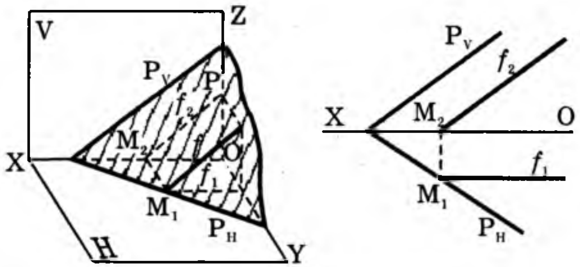


Рис. 3.77

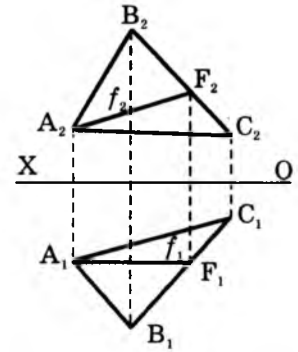


Рис. 3.78

фронтальному сліду P_V площини P. Фронталь f площини P має лише один слід $M = M_1$ – горизонтальний, він лежить на горизонтальному сліді P_H площини (рис. 3.77).

Площина на епюрі може бути задана не тільки своїми слідами, і для побудови прямої, що лежить у даній площині, не обов'язково спочатку будувати сліди площини.

Задача 2.11. Площина задана трикутником ABC. Побудувати проекції фронталі f, яка проходить через вершину A.

Розв'язання. Дано трикутник $A_1B_1C_1$ – горизонтальна проекція, трикутник $A_2B_2C_2$ – фронтальна проекція трикутника ABC, який визначає площину P (рис. 3.78). Побудову починаємо з проведення горизонтальної проекції f_1 через точку A_1 паралельно осі OX, ця проекція перетинає сторону B_1C_1 у точці F_1. Далі будуємо фронтальну проекцію F_2 на стороні B_2C_2. $f_2 = A_2F_2$ – фронтальна проекція фронталі f.

15.4. Профільна пряма

Означення 2.21. Пряма, яка лежить у даній площині P і паралельна профільній площині проекцій W, називається ***профільною прямою площини P.***

Горизонтальна і фронтальна проекції профільної прямої a площини P паралельні осі проекцій OZ і лежать на спільному перпендикулярі до осі OX на епюрі, а профільна проекція a_3 паралельна профільному сліду P_W площини P. Тому якщо площина P задана слідами,

то побудову проекцій її профільної прямої зручно починати з побудови профільної проекції. Якщо ж площина P задана іншим способом, то побудову проекцій її профільної прямої краще починати з побудови горизонтальної проекції, яка паралельна осі OY_1, або фронтальної проекції, яка паралельна осі OZ.

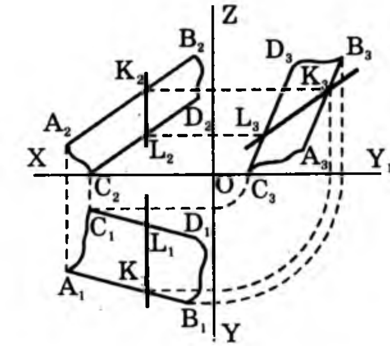


Рис. 3.79

Задача 2.12. Площина P задана на епюрі проекціями двох її паралельних прямих. Побудувати довільну профільну пряму площини P.

Розв'язання. Площина P задана двома паралельними прямими $AB \parallel CD$ (рис. 3.79).

На епюрі $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ – горизонтальні проекції, $A_2B_2 \parallel C_2D_2$ – фронтальні проекції прямих AB і BC. Для побудови проекцій профільної прямої проводимо довільну пряму, паралельну осі OZ, нехай вона перетне паралельні прямі в точках L_2 і K_2 відповідно. K_2L_2 – фронтальна проекція довільної профільної прямої площини, визначеної паралельними прямими $AB \parallel CD$. Далі будуємо профільні проекції A_3B_3, C_3D_3 паралельних прямих AB, CD і профільну проекцію K_3L_3 профільної прямої KL площини P.

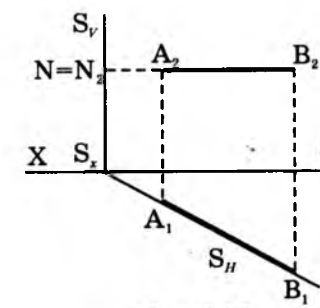


Рис. 3.80

§ 16. Прямі в проектуючих площинах

16.1. Горизонтально проектуюча площина

Горизонтальні проекції всіх точок, які лежать у горизонтально проектуючій площині, у тому числі й точки горизонталі цієї площини, розміщуються на горизонтальному сліді цієї площини, а фронтальна проекція горизонталі паралельна осі OX. На рис. 3.80 дано епюр горизонталі AB, яка лежить у горизонтально проектуючій площині S.

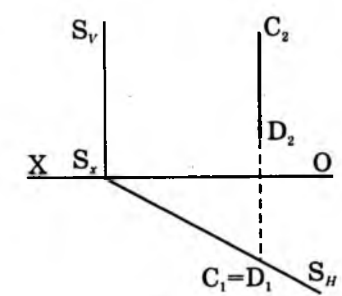


Рис. 3.81

Нехай пряма CD – фронталь горизонтально проектуючої площини S. Тоді її фронтальна

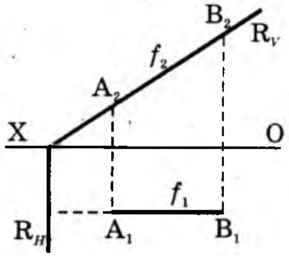


Рис. 3.82

проекція C_2D_2 перпендикулярна осі OX, тобто паралельна фронтальному сліду площини S, а горизонтальною проекцією фронталі CD є точка $C_1 = D_1$ на горизонтальному сліді S площини S_H (рис. 3.81).

16.2. Фронтально проектуюча площина

Фронтальні проекції всіх точок, які лежать у фронтально проектуючій площині R, у тому числі і фронталі f цієї площини, розміщуються на фронтальному сліді R_V цієї площини, а горизонтальна проекція f_1 паралельна осі OX. На рис. 3.82 дано епюр фронталі AB фронтально проектуючої площини R.

Нехай пряма CD – горизонталь фронтально проектуючої площини R. Тоді її горизонтальна проекція C_1D_1 перпендикулярна осі OX, тобто паралельна горизонтальному сліду R_H площини R, а фронтальною проекцією є точка $C_2 = D_2$ на фронтальному сліді R_V площини R (рис. 3.83).

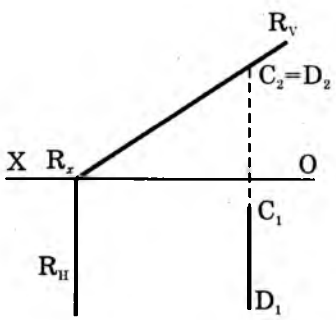


Рис. 3.83

Задача 2.13. Площина P задана слідами P_V, P_H. Побудувати горизонтальну проекцію прямої AB, яка лежить у площині P і задана фронтальною проекцією A_2B_2.

Розв'язання.

1-й спосіб (за допомогою слідів прямої AB). Нехай площина P задана слідами P_V, P_H, а пряма AB, яка їй належить, задана фронтальною проекцією A_2B_2 (рис. 3.84).

Знайдемо фронтальний слід $N = N_2$ прямої AB як точку перетину A_2B_2 з P_V, фронтальну проекцію M_2 горизонтального сліду прямої AB, горизонтальну проекцію N_1 фронтального сліду на осі OX і горизонтальний слід $M = M_1$ на сліді площини P_H. MN_1 – горизонтальна проекція прямої AB, яка лежить у площині P.

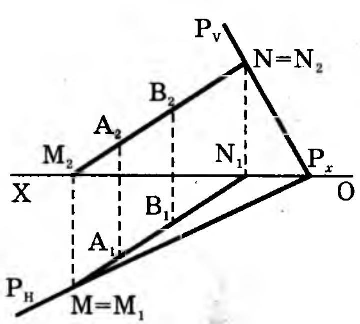


Рис. 3.84

2-й спосіб (за допомогою горизонталей площини). Нехай площина P задана слідами P_H, P_V і відома фронтальна проекція A_2B_2 прямої AB, яка належить площині P (рис. 3.85). Через точки A_2 і B_2

проведемо фронтальні проекції A_2N_2 і B_2M_2 допоміжних горизонталей площини P. За точками N_2 і M_2 визначаємо положення їх горизонтальних проекцій N_1 і M_1 на осі OX. Далі проводимо паралельно сліду P_H горизонтальні проекції A_1N_1 і B_1M_1 допоміжних горизонталей AN і BM. Проводячи через точки A_2 і B_2 лінії зв'язку, знайдемо точки A_1 і B_1 як точки перетину ліній зв'язку з горизонтальними проекціями допоміжних горизонталей. Пряма A_1B_1 – горизонтальна проекція прямої AB, яка лежить у площині P.

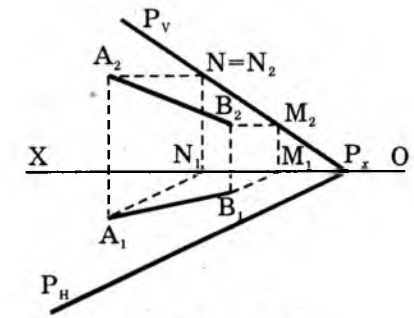


Рис. 3.85

§ 17. Точка на площині

Побудова точки, яка належить даній площині, передбачає побудову в цій площині прямої, яка проходить через дану точку.

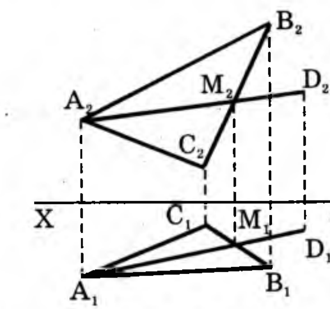


Рис. 3.86

Задача 2.14. Площина задана трикутником ABC. Побудувати фронтальну проекцію точки D, яка належить даній площині, горизонтальна проекція D_1 відома.

Розв'язання. На епюрі дано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ і фронтальну проекцію $A_2B_2C_2$ трикутника ABC, який визначає площину P, і дана точка D_1 – горизонтальна проекція точки D, яка належить площині P (рис. 3.86). Для побудови фронтальної проекції D_2 проведемо пряму, яка лежить у площині P, наприклад пряму AD, оскільки точки A і D належать площині P. Горизонтальна проекція A_1D_1 перетинає сторону B_1C_1 у точці M_1. Знайдемо фронтальну проекцію M_2 точки M, яка лежить на фронтальній проекції B_2C_2. Пряма AM належить площині P, тому фронтальна проекція D_2 точки D повинна лежати на фронтальній проекції A_2M_2.

§ 18. Взаємне розміщення двох площин

Дві площини можуть перетинатися або бути паралельними. Ознака паралельності двох площин в курсі середньої школи формулюється так:

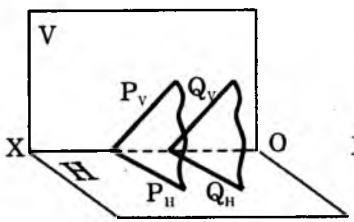


Рис. 3.87

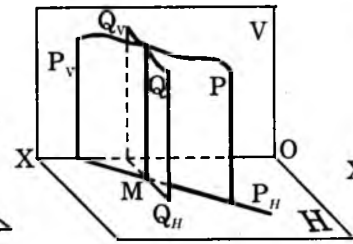


Рис. 3.88

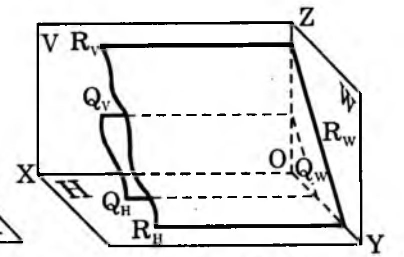


Рис. 3.89

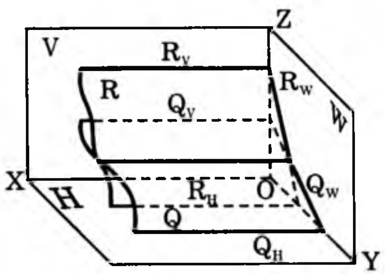


Рис. 3.90

якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Такими прямими можуть бути, наприклад, сліди двох даних площин. Звідси випливає умова паралельності двох площин, заданих на епюрі своїми слідами.

Якщо однойменні сліди двох площин попарно паралельні, то площини паралельні між собою.

На рис. 3.87 площини $P \parallel Q$, бо $P_V \parallel Q_V$, $P_H \parallel Q_H$. Сформульована умова стосується площин, заданих слідами, що перетинаються. При цьому якщо хоч одна пара однойменних слідів перетинається, то площини також перетинаються (рис. 3.88).

Якщо сліди обох площин Q і R у площинах проекцій H і V паралельні, то це не означає, що ці площини паралельні: вони можуть бути паралельними (рис. 3.89) або перетинатися (рис. 3.90).

Для з'ясування цього питання необхідно розглянути сліди цих площин у третій площині проекцій – профільній площині W: якщо профільні сліди площин паралельні, то і площини паралельні (рис. 3.89), а якщо профільні сліди площин перетинаються, то і площини перетинаються (рис. 3.90).

§ 19. Основні метричні задачі

До *метричних* належать задачі, що передбачають встановлення справжньої форми фігури, визначення натуральних величин відрізків і кутів, проведення прямих і площин під заданим кутом до

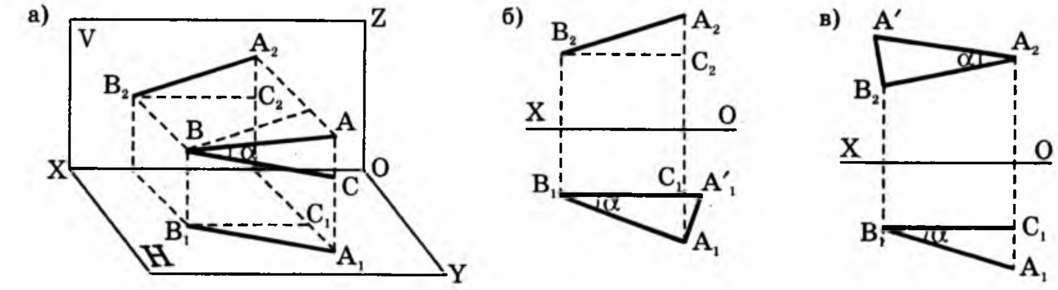


Рис. 3.91

інших прямих і площин тощо. Для розв'язання таких задач, крім повноти зображення, потрібно, щоб це зображення було метрично визначеним.

Задача 2.15. Знайти довжину відрізка AB за його даними проекціями A_1B_1 і A_2B_2 на площинах H і V.

Розв'язання. Розглянемо спочатку просторове зображення відрізка AB (рис. 3.91а): A_1B_1 – його горизонтальна проекція, A_2B_2 – його фронтальна проекція.

Проведемо через точку B пряму, паралельну горизонтальній проекції A_1B_1, вона перетне проектуючу пряму AA_1 у точці C. Тоді $BC = B_1A_1$ і $\angle ACB = 90^\circ$. Отже, відрізок AB можна розглядати як гіпотенузу прямокутного трикутника ABC, катет BC якого дорівнює горизонтальній проекції A_1B_1 відрізка AB, а другий катет AC дорівнює різниці аплікат точок A і B: $AC = z_A - z_B$. Тому знаходження довжини відрізка AB за його епюром можна виконати в такій послідовності: беремо горизонтальну проекцію A_1B_1 за перший катет прямокутного трикутника, проводимо через точку A_1 пряму, перпендикулярну до A_1B_1, і на ній відкладаємо різницю аплікат точок A і B – відрізок $A_1A'_1 = A_2C_2 = z_A - z_B$, де $B_2C_2 \parallel OX$ (рис. 3.91б). Гіпотенуза $B_1A'_1$ побудованого прямокутного трикутника $B_1A_1A'_1$ дорівнює натуральній величині відрізка AB.

Натуральну величину відрізка AB можна також визначити з прямокутного трикутника, першим катетом якого є фронтальна проекція A_2B_2, а другим катетом є різниця ординат точок A і B, тобто відрізок $B_2A' = A_1C_1 = y_A - y_B$ (рис. 3.91в).

Задача 2.16. Знайти натуральну величину кута нахилу прямої до площини проекції.

Розв'язання. Натуральну величину кута нахилу даної прямої AB до площини проекції можна визначити за допомогою прямокутного трикутника, який будували для визначення довжини відрізка AB. Справді, на просторовому зображенні (рис 3.91а) кут ABC є кутом між прямою AB і площиною проекції H. Його натуральна величина виражена на рис. 3.91б кутом $A_1B_1A'_1$, тобто гострим кутом α, утвореним горизонтальною проекцією A_1B_1 і гіпотенузою $B_1A'_1$ прямокутного трикутника $A_1B_1A'_1$. Аналогічно натуральна величина кута нахилу прямої AB до площини проекцій V виражена на епюрі кутом B_2A_2A' (рис. 3.91в).

Примітка. Натуральна величина кута нахилу даної прямої до площини проекції, а також довжина відрізка можуть бути визначені іншими способами, зокрема способами перетворення проекцій (переміщенням, поворотом осей тощо). Ці способи розглядаються в курсі нарисної геометрії.

Задача 2.17. Побудувати епюр прямої, що проходить через дану точку A перпендикулярно до площини, заданої слідами, та знайти точку її перетину з площиною P.

Розв'язання. Із курсу геометрії відомо, що пряма перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих цієї площини, які проходять через основу перпендикуляра. Роль таких прямих можуть відігравати сліди площин. Звідси маємо, що *якщо пряма перпендикулярна до площини, то горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтального сліду площини, а фронтальна проекція перпендикулярна до фронтального сліду площини.*

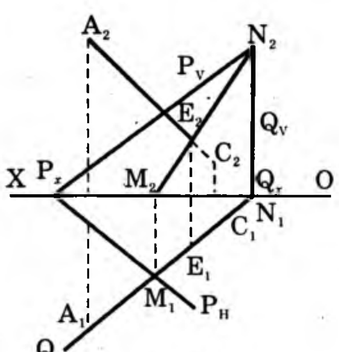


Рис. 3.92

Отже, щоб через дану точку A провести перпендикуляр до площини $P(P_H, P_V)$, досить з фронтальної проекції A_2 точки A опустити перпендикуляр A_2C_2 на фронтальний слід P_V площини, а з горизонтальної проекції A_1 точки A опустити перпендикуляр A_1C_1 на горизонтальний слід P_H даної площини. Прямі A_1C_1 і A_2C_2 будуть проекціями прямої AC, перпендикулярної до площини P (рис. 3.92).

Для знаходження точки перетину прямої AC з площиною P проведемо через пряму AC допоміжну площину Q, перпендикулярну до площини H, і знайдемо лінію перетину площин P і Q. Оскільки сліди

цих площин перетинаються в точках M і N, то пряма MN і буде їх перетином. Точка перетину $E(E_1, E_2)$ прямих AC і MN є точкою перетину перпендикуляра AC з площиною P.

Вправи

2.18. Точка A, яка знаходиться у четвертому октанті, задана двома проекціями (A_1, A_2) на епюрі. Побудувати її профільну проекцію A_3.

2.19. Точка B, яка знаходиться у шостому октанті, задана на епюрі проекціями (B_2, B_3). Побудувати її горизонтальну проекцію.

2.20. Точка C задана своїми координатами відносно площин проекцій H, V, W: $C(-3; 2; 4)$. Побудувати епюр точки C.

2.21. Точка D задана своїми координатами відносно площин проекцій H, V, W: $D(-4; -3; 2)$. Побудувати епюр точки D.

2.22. Побудувати комплексний рисунок (епюр) і просторове зображення відрізка AB, якщо його кінці мають координати $A(3; 2; 1)$ і $B(1; 3; 3)$.

2.23. У якому квадранті простору знаходиться відрізок AB, якщо його кінці мають координати $A(3; -5; 6)$ і $B(5; -2; 6)$?

2.24. Відрізок AB прямої загального положення заданий своїми двома проекціями A_2B_2 і A_3B_3. Побудувати третю його проекцію A_1B_1, просторове зображення відрізка AB і визначити координати його кінців.

2.25. Точка $A(A_1, A_2)$ лежить на прямій $a(a_1, a_2)$. За даним положенням точки $A_2 \in a_2$ побудувати точку $A_1 \in a_1$.

2.26. Побудувати сліди прямої a, заданої на епюрі проекціями (a_1, a_2).

2.27. Пряма $a(a_1, a_2)$ лежить у площині, заданій на епюрі прямими $b(b_1, b_2)$ і $c(c_1, c_2)$, що перетинаються в точці $A(A_1, A_2)$. За заданою проекцією a_2 побудувати проекцію a_1 прямої a.

2.28. Точка $A(A_1, A_2)$ лежить у площині P, заданій слідами P_H і P_V. За заданою проекцією A_1 побудувати проекцію A_2.

2.29. Площина P задана трикутником ABC. Побудувати горизонталь площини P, яка проходить через точку C.

2.30. Площина R задана слідами. Побудувати фронталь f площини R, віддалену від площини V на 12 мм.

2.31. Через точку A і точку сходження P_X слідів площини P побудувати сліди площини P.

2.32. Побудувати сліди площини R, заданої паралельними прямими AB і CD.

2.33. Площина P загального положення задана слідами P_H і P_V. Побудувати фронтальну проекцію точки A, яка належить площині P, якщо відома її горизонтальна проекція A_1.
2.34. Площини P і Q задані на епюрі своїми слідами P_H, P_V і Q_H, Q_V відповідно. Побудувати лінію перетину цих площин.
2.35. Побудувати проекції точки перетину прямої $a(a_1; a_2)$ з площиною P, яка задана слідами P_H і P_V.
2.36. Площина задана трикутником ABC. Через точку A провести перпендикуляр до цієї площини.
2.37. Визначити кут γ нахилу прямої AB до профільної площини проекцій W.
2.38. За даними проекціями A_1B_1 і A_2B_2 відрізка AB знайти проекцію точки C, яка ділить відрізок AB у відношенні 2:3.

Розділ 3

Метод аксонометрії

§ 20. Основні поняття аксонометрії

Термін «аксонометрія» утворився з двох слів давньогрецької мови: *аксон* – вісь і *метрео* – вимірюю. Суть методу аксонометричного проектування полягає в тому, що дана фігура разом з осями просторової прямокутної декартової системи координат, до якої вона віднесена, проектується паралельними прямими на деяку площину.

Цю площину називають *площиною аксонометричних проекцій*, або *картинною площиною*. Для забезпечення належної наочності зображення напрям проектуючих променів доцільно брати не паралельним жодній з координатних площин. Нехай дано точку A', віднесену до прямокутної декартової системи координат $O'X'Y'Z'$ у просторі з однаковою одиницею довжини e на всіх трьох осях координат. Координати точки A' – числа x', y', z' – це відстані точки A' до координатних площин $X'O'Z'$, $X'O'Y'$, $Y'O'Z'$ (рис. 3.93).

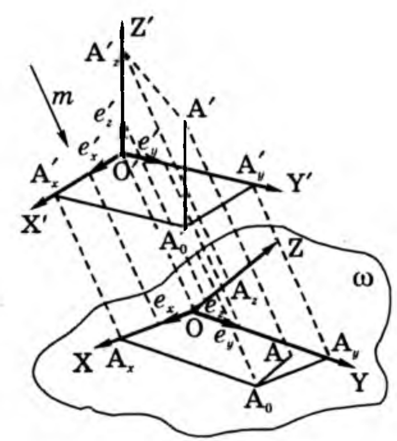


Рис. 3.93

Координати точки A' відносно вибраної системи координат можна безпосередньо виміряти в дійсній, натуральній величині, тому прямокутну декартову систему координат ще називають *натуральною системою координат у просторі*. Відрізок e, взятий за одиницю вимірювання, називають *натуральним масштабом*, координатні осі $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ – *натуральними осями*.

На кожній з координатних осей відкладемо від точки O одиничний відрізок e, позначимо ці відрізки відповідно e'_x, e'_y, e'_z. Тоді кожна точка A' матиме певні координати, так звані *натуральні координати*. Опустимо з точки A' перпендикуляр на площину $X'O'Y'$, позначимо його основу через A'_0, а з точки A'_0 опустимо перпендикуляри на осі $O'X'$ і $O'Y'$, дістанемо точки A'_x і A'_y. Тоді натуральними координатами точки A' з певним знаком будуть числа $x' = \frac{O'A'_X}{e'_X}$; $y' = \frac{O'A'_Y}{e'_Y}$; $z' = \frac{O'A'_Z}{e'_Z}$.

Ламана $O'A'_xA'_0A'$ називається *координатною ламаною*. Далі виконуємо за вибраним напрямом паралельне проектування точки A' разом із натуральною системою координат $O'X'Y'Z'$ на площину ω – площину аксонометричних проекцій. Дістанемо зображення $OXYZ$, яке називається *аксонометричною системою координат*, осі OX, OY, OZ – називаються *аксонометричними осями координат*, проекції e_x, e_y, e_z натуральних масштабів e'_x, e'_y, e'_z – *аксонометричні масштаби* на аксонометричних осях; OA_xA_0A – проекція координатної ламаної. Оскільки проектування паралельне, то $AA_0 \parallel OZ$, $A_xA_0 \parallel OY$.

§ 21. Коефіцієнти спотворення на аксонометричних осях

Натуральні осі координат $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ у загальному випадку нахилені до площини ω під різними кутами, рівність відрізків та їх проекцій не є інваріантом паралельного проектування, тому аксонометричні масштабні одиниці e_x, e_y, e_z у загальному випадку не дорівнюють натуральній одиниці e і не рівні між собою.

Отже, при паралельному проектуванні натуральної системи координат $O'X'Y'Z'$ на площину ω одиничні відрізки і відрізки координатної ламаної зазнають деякого спотворення.

> ***Означення 3.1.*** Відношення довжини відрізка аксонометричної проекції до довжини натурального відрізка називається *коефіцієнтом* (або *показником*) *спотворення* довжини відрізка.

Позначимо коефіцієнти спотворення довжин відрізків на аксонометричних осях OX, OY, OZ (або їм паралельних) через $\overline{e}_x$, $\overline{e}_y$, $\overline{e}_z$ відповідно.

Враховуючи властивості паралельного проектування, а саме, що відношення паралельних проекцій дорівнює відношенню їх паралельних натуральних відрізків і навпаки, маємо:

$$\frac{OA_x}{O'A'_x} = \frac{e_x}{e'_x} = \overline{e}_x, \quad \frac{A_xA_0}{A'_xA'_0} = \frac{e_y}{e'_y} = \overline{e}_y, \quad \frac{A_0A}{A'_0A'} = \frac{e_z}{e'_z} = \overline{e}_z.$$

Оскільки, $e'_x = e'_y = e'_z = 1$, то $e_x = \overline{e}_x$, $e_y = \overline{e}_y$, $e_z = \overline{e}_z$, і надалі коефіцієнти спотворення на аксонометричних осях будемо позначати e_x, e_y, e_z. Звертаємо увагу на те, що коефіцієнти спотворення e_x, e_y, e_z для кожної аксонометричної осі однакові для координатної ламаної будь-якої точки. Крім того, $\frac{OA_x}{e_x} = \frac{O'A'_x}{e'_x} = x$, $\frac{A_xA_0}{e_y} = \frac{A'_xA'_0}{e'_y} = y$, $\frac{A_0A}{e_z} = \frac{A'_0A'}{e'_z} = z$.

Отже, якщо визначити координати аксонометричної проекції точки A новими аксонометричними одиницями, то числа – координати точки A і координати її аксонометричної проекції будуть однаковими.

Зрозуміло, що коли відомі коефіцієнти спотворення, положення аксонометричних осей на площині ω і натуральні координати точки $A'(x', y', z')$, то можна побудувати аксонометричне зображення точки A', тобто координатну ламану точки A, оскільки її ланками будуть відрізки $OA_x = e_x \cdot x'$, $A_xA_0 = e_y \cdot y'$, $A_0A = e_z \cdot z'$. Аналогічно, маючи аксонометричне зображення точки A', можна знайти натуральні координати точки A': $x' = \frac{OA_x}{e_x}$; $y' = \frac{A_xA_0}{e_y}$; $z' = \frac{A_0A}{e_z}$.

Отже, одержане в аксонометрії зображення точки, а тому і фігури, дає можливість здійснити вимірювання просторової фігури за трьома взаємно перпендикулярними напрямами – осями координат. Звідси й виникла назва «аксонометрія», тобто «вимірювання за осями».

Такий спосіб проектування тіла разом із координатними осями, з якими це тіло нерухомо пов'язане, називається *аксонометричним методом*, а саме зображення – *аксонометричною проекцією*.

§ 22. Основна теорема аксонометрії

Різним положенням координатних осей у просторі і різним напрямам проектування відповідають різні положення аксонометричних осей і різні довжини аксонометричних одиниць у площині проекції, тобто різні коефіцієнти спотворення.

Виникає запитання: у якій залежності перебувають напрями аксонометричних осей і коефіцієнти спотворення від напряму проектування і положення натуральних осей координат у просторі?

Це запитання цікавило багатьох геометрів другої половини XIX ст. і було розв'язане у 1853 р. німецьким геометром *К. Польке*. Він показав, що при довільному виборі аксонометричних одиниць завжди знайдеться таке положення тригранника в просторі і такий напрям проектування, при яких натуральний координатний тригранник з рівними ребрами спроектується у наперед вибрану систему аксонометричних осей.

Теорема 3.1 (Польке). Будь-які три відрізки, що виходять з однієї точки на площині, можна взяти за паралельні проекції трьох рівних і взаємно перпендикулярних відрізків у просторі.

Ця теорема має назву основної теореми аксонометрії.

Доведення К. Польке було досить складним і неелементарним, воно ґрунтувалось на фокальних властивостях поверхонь другого порядку.

У 1864 р. німецький геометр *А. Шварц* (1843–1921) не тільки значно спростив доведення Польке, а й узагальнив саму теорему. У різних посібниках теорему Польке – Шварца формулюють по-різному. Подамо одне з формулювань цієї теореми і відповідне доведення (За Глаголєвим Н.А.).

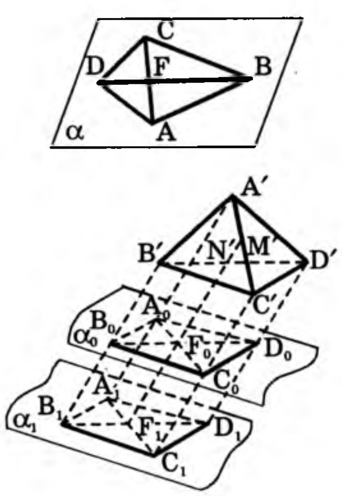


Рис. 3.94

Теорема 3.2 (Польке – Шварца). Будь-який невироджений чотирикутник разом з його діагоналями можна вважати паралельною проекцією тетраедра, подібного наперед заданому.

Доведення. Нехай дано довільний чотирикутник $ABCD$ на площині α, F – точка перетину його діагоналей, і довільний тетраедр $A'B'C'D'$ у просторі (рис. 3.94).

Покажемо, що можна так вибрати напрям паралельного проектування і положення площини проекції, що тетраедр $A'B'C'D'$ спроектується в чотирикутник, подібний чотирикутнику $ABCD$. Після цього, змінюючи розміри тетраедра, залишаючи його собі подібним, можна досягти того, що його проекція буде дорівнювати чотирикутнику $ABCD$.

Оскільки при паралельному проектуванні зберігається інцидентність і просте відношення трьох

точок, то на протилежних ребрах $A'C'$ і $B'D'$ тетраедра візьмемо такі точки M' і N', що

$$(AC, F) = (A'C', M') \text{ і } (BD, F) = (B'D', N'). \qquad (3.1)$$

Через точки M' і N' проведемо пряму, а через вершини тетраедра – прямі, паралельні прямій $M'N'$, які разом з площинами, що проходять через них, утворюють чотирикутну призму. Виконаємо переріз цієї призми площиною, перпендикулярною до бічних ребер, у перерізі одержимо певний чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$, точка F_1 перетину діагоналей якого лежатиме на прямій $M'N'$.

Тоді $(A_1C_1, F_1) = (A'C', M')$ і $(B_1D_1, F_1) = (B'D', N')$, а враховуючи рівність (3.1), одержимо $(A_1C_1, F_1) = (AC, F)$ і $(B_1D_1, F_1) = (BD, F)$. Звідси випливає, що існує афінне перетворення площини α у площину α_1, при якому образом чотирикутника $ABCD$ є чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$.

Будь-яке афінне перетворення площини α в площину α_1 можна одержати як композицію подібного перетворення і ортогонального проектування, тому чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ можна розглядати як ортогональну проекцію чотирикутника, подібного чотирикутнику $ABCD$. Оскільки ребра одержаної чотирикутної призми перпендикулярні площині чотирикутника $A_1B_1C_1D_1$, то на ребрах цієї призми можуть бути розміщені вершини чотирикутника, подібного чотирикутнику $ABCD$. Отже, призму можна перетнути такою площиною α_0, що в перерізі з призмою одержимо чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$, подібний чотирикутнику $ABCD$. При цьому чотирикутник $A_0B_0C_0D_0$ буде паралельною проекцією тетраедра $A'B'C'D'$ на площині α_0.

Теорему доведено.■

Основна теорема аксонометрії – *теорема Польке* – є наслідком *теореми Пальке – Шварца*. Дійсно, сполучивши кінці трьох даних відрізків, що виходять з однієї точки на площині, одержимо чотирикутник, який можна розглядати як паралельну проекцію тетраедра довільної форми, у тому числі й тетраедра з прямим двогранним кутом і рівними бічними ребрами.

Теорему Польке – Шварца можна сформулювати ще так:

будь-які чотири незв'язні точки A, B, C, D площини α можна розглядати як паралельні проекції на цю площину вершин тетраедра, подібного до даного тетраедра $A'B'C'D'$.

§ 23. Типи аксонометричних проекцій

Теорема Польке – Шварца дає можливість при побудові зображення тіла в аксонометричній проекції *довільно* вибрати напрями аксонометричних осей координат і масштаби на цих осях, тобто користуватися так званою *вільною* аксонометрією.

Але щоб зображення було досить повним і найбільш наочним, зручним у використанні, практично застосовують аксонометричні проекції певних типів. Спрощення побудови рисунка і відновлення оригіналу за рисунком можна досягти шляхом вибору напряму проектування і коефіцієнтів спотворення. При будь-якому аксонометричному проектуванні відбувається спотворення дійсних розмірів оригіналу за всіма трьома його вимірами або за деякими з них. Залежно від того, чи коефіцієнти спотворення однакові на всіх трьох координатних осях, чи однакові на двох з них, чи різні на всіх трьох осях, розрізняють три типи аксонометричних проекцій:

1) *ізометрична аксонометрія* (або просто *ізометрія*), коли всі три коефіцієнти спотворення рівні між собою;
2) *диметрична аксонометрія* (або просто *диметрія*), коли два із трьох коефіцієнтів спотворення рівні між собою;
3) *триметрична аксонометрія* (або просто *триметрія*), коли всі коефіцієнти спотворення різні.

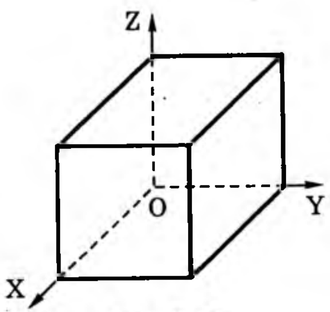


Рис. 3.95

Залежно від напряму проектування відносно площини проекцій аксонометричні проекції поділяються на два види:

- *прямокутні (ортогональні)* – проектуючі промені перпендикулярні до площини проекції;
- *косокутні* – при довільному напрямі проектуючих променів.

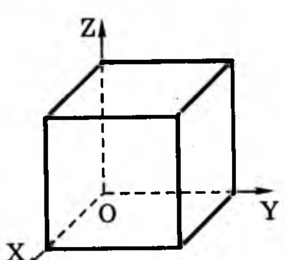


Рис. 3.96

При прямокутному аксонометричному проектуванні площину проекції вибирають так, щоб вона перетинала всі три координатні осі, тобто щоб площина проекцій не була паралельною жодній з координатних площин. Це робиться для того, щоб кожна точка оригіналу мала окрему проекцію і проекції різних точок оригіналу не збігалися.

При косокутному проектуванні площина проекцій може займати будь-яке положення, яке не залежить від вибору напряму проектування. Із косокутних аксонометричних проекцій частіше використовують так звані *фронтальні* косокутні проекції, коли площина проекцій паралельна одній з площин координат, наприклад площині YOZ, або просто суміщається з нею (рис. 3.95). При такому проектуванні проектуючі промені однаково нахилені до осей OY і OZ, тому аксонометрична вісь координат OX утворює з осями OY і OZ кути по 135°. Коефіцієнти спотворення на осях OY і OZ дорівнюють одиниці, а коефіцієнт спотворення на осі OX залежить від кута між напрямом проектування і площиною проекцій. Якщо цей кут взяти рівним 45°, то й третій коефіцієнт спотворення буде рівний одиниці, тобто матимемо ізометрію, яку в цьому випадку називають *ковальєрною проекцією* або *воєнною перспективою*. На рис. 3.95 дано зображення куба в ковальєрній проекції.

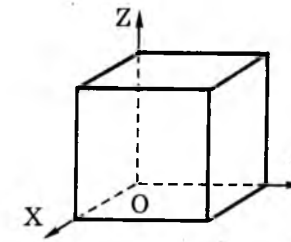


Рис. 3.97

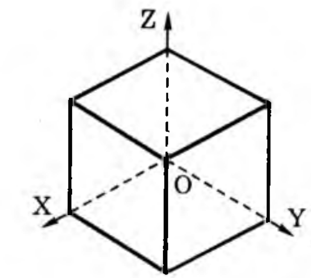


Рис. 3.98

Якщо ж кут α відмінний від 45°, то проекції будуть диметричними. Практично третій коефіцієнт спотворення беруть рівним 0,5 або 0,75. На рис. 3.96 подано зображення куба при $e_y = e_z = 2e_x$. Такого виду аксонометрія має назву *кабінетної проекції*.

Часто вісь OX спрямовують так, щоб вона утворювала з віссю OZ кут 120°. Таке розміщення осей показано на рис. 3.97, при цьому також $e_y = e_z = 2e_x$ (рис. 3.97).

Положення аксонометричних осей координат відносно площини проекцій, при якому одержимо ортогональну *ізометрію*, визначається таким положенням цієї площини, щоб вона відтинала на координатних осях рівні відрізки. Зображення куба в ортогональній ізометрії показано на рис. 3.98. Зображення за формою має вигляд правильного шестикутника.

§ 24. Прямокутні аксонометричні проекції

При аксонометричному зображенні коефіцієнти спотворення пов'язані між собою певними співвідношеннями, які залежать від кута, що утворює напрям проектування з площиною аксонометричних проекцій. Розглянемо, як пов'язані між собою коефіцієнти спотворення в прямокутній (ортогональній) проекції.

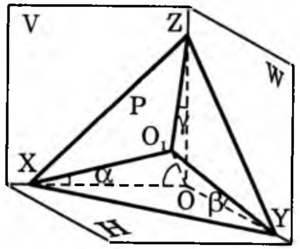


Рис. 3.99

Візьмемо площину аксонометричних проекцій P так, щоб вона перетинала всі три координатні осі OX, OY, OZ відповідно в точках X, Y, Z (рис. 3.99). У випадку прямокутних аксонометричних проекцій відрізок OO_1 перпендикулярний до площини P, точка O_1 є аксонометричною проекцією точки O, відрізки O_1X, O_1Y, O_1Z – аксонометричні проекції відрізків OX, OY, OZ відповідно.

Площина P перетинає координатні площини XOY, XOZ, YOZ по прямих XY, XZ, YZ відповідно, які називаються *слідами* площини P в координатних площинах. Вони утворюють трикутник XYZ, який називається *трикутником слідів*.

Трикутники OXO_1, OYO_1, OZO_1 – прямокутні, прямі кути при вершині O_1, а відрізки OX, OY, OZ на осях – гіпотенузи. Тому $\frac{O_1X}{OX} = \cos\alpha$, $\frac{O_1Y}{OY} = \cos\beta$, $\frac{O_1Z}{OZ} = \cos\gamma$. Але відношення $\frac{O_1X}{OX}$, $\frac{O_1Y}{OY}$, $\frac{O_1Z}{OZ}$ є коефіцієнтами спотворення e_x, e_y, e_z. Отже, $e_x = \cos\alpha$, $e_y = \cos\beta$, $e_z = \cos\gamma$. Для відрізка OO_1 косинуси кутів $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, доповняльних до кутів α, β, γ є *напрямними косинусами*. Тому

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1 = 1.$$

Оскільки $\alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \beta_1$, $\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma_1$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1,$$

або $1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$, а звідси

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

Отже,

$$e_X^2 + e_Y^2 + e_Z^2 = 2. \qquad (1)$$

Цим доведено теорему, яка виражає залежність між коефіцієнтами спотворення ортогонального аксонометричного проектування. ■

Теорема 3.3. Сума квадратів коефіцієнтів спотворення в прямокутній аксонометрії дорівнює двом.

Наслідок 1. У прямокутній ізометрії $e_x = e_y = e_z$, тоді $3e_x^2 = 2$. Отже, $e_x = e_y = e_z = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0{,}82$.

Наслідок 2. У прямокутній диметрії $e_x = e_z$, а $e_y = \frac{1}{2}e_x$, тоді $2e_x^2 + \frac{1}{4}e_x^2 = 2$, $e_x^2 = \frac{8}{9}$; $e_x = e_z = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}94$, $e_y = 0{,}47$.

Наслідок 3. У прямокутних аксонометричних проекціях аксонометричні осі є висотами трикутника слідів.

Дійсно, якщо $OO_1 \perp P$, то $OK \perp XY$ і, за теоремою про три перпендикуляри, $ZK \perp XY$. Аналогічно $XM \perp YZ$, і точка O' є точкою перетину висот трикутника слідів XYZ (рис. 3.100). Отже, якщо задано трикутник слідів, то можна побудувати аксонометричні осі, провівши висоти цього трикутника.

Наслідок 4. У прямокутних аксонометричних проекціях трикутник слідів гострокутний.

Це випливає з того, що точка перетину висот трикутника слідів є внутрішньою точкою трикутника, а це можливо лише для гострокутного трикутника.

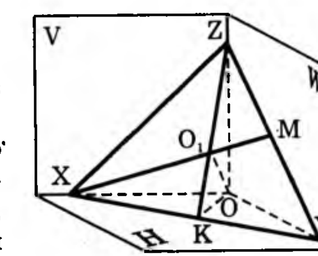


Рис. 3.100

Наслідок 5. Кути між аксонометричними осями в прямокутній аксонометрії тупі.

Дійсно, оскільки трикутник слідів гострокутний, то кут між висотами доповнює гострий кут до 180°, наприклад, $\angle MO'K = 180° - \angle MYK$. Але $\angle MYK$ – гострий, тому $\angle MO'K$ – тупий. Звідси маємо, що в прямокутній аксонометрії розміщення осей має бути таким, що кути між ними тупі (рис. 3.101).

Наслідок 6. Доведена теорема дозволяє проаналізувати, які значення можуть мати коефіцієнти спотворення:

а) оскільки косинус будь-якого кута не може перевищувати одиниці, то кожний з коефіцієнтів спотворення також не може перевищувати одиниці, тобто вони перебувають у межах

$$0 \le e_x \le 1,\ \ 0 \le e_y \le 1,\ \ 0 \le e_z \le 1; \qquad (3.2)$$

б) із співвідношення $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2$ випливає, що з трьох коефіцієнтів спотворення не більше ніж один може бути рівним нулю;

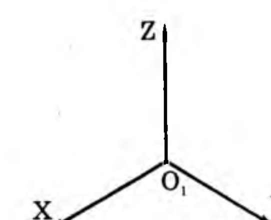


Рис. 3.101

в) якщо один із коефіцієнтів спотворення дорівнює нулю, то кут нахилу відповідної натуральної осі координат до площини P дорівнює нулю, тобто ця вісь перпендикулярна до площини проекції P, а тоді дві інші осі координат будуть паралельними площині P і коефіцієнти спотворення на цих осях будуть рівними одиниці;

г) якщо один із коефіцієнтів спотворення дорівнює одиниці, то косинус кута нахилу відповідної осі координат до площини P дорівнює одиниці, тобто ця вісь паралельна площині P. Тоді на суму квадратів двох інших коефіцієнтів спотворення припадає одиниця і така аксонометрична проекція втрачає наочність (площина проектується в пряму, пряма – в точку);

д) не будь-які три числа, що задовольняють умову (3.2), можуть бути коефіцієнтами спотворення. Із умови (3.2) маємо, що

$$0 \le e_y^2 \le 1,\ \ 0 \le e_y^2 \le 1,\ \ 0 \le e_y^2 \le 1. \tag{3.3}$$

Враховуючи, що $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2$, одержимо:

$$1 \le e_x^2 + e_y^2 \le 2, \quad 1 \le e_x^2 + e_z^2 \le 2, \quad 1 \le e_y^2 + e_z^2 \le 2. \tag{4}$$

Якщо не брати до уваги граничні значення, то в прямокутній аксонометрії сума квадратів двох будь-яких коефіцієнтів спотворення завжди більша одиниці і менша двох.

Отже, якщо задати два коефіцієнти спотворення, то третій довільно брати не можна, він визначатиметься умовою (3.1); при цьому треба стежити, щоб два задані коефіцієнти задовольняли умови (3.1) і (3.4). Наприклад, не можна брати $e_x = 0{,}4$ і $e_y = 0{,}7$, бо сума їх квадратів менша одиниці.

Таким чином, у прямокутній аксонометрії заданням двох коефіцієнтів спотворення визначається третій і напрям аксонометричних осей і, навпаки, заданням аксонометричних осей визначаються коефіцієнти спотворення.

Отже, прямокутна аксонометрія повністю визначається заданням двох параметрів – двома коефіцієнтами спотворення або двома кутами між аксонометричними осями.

§ 25. Прямокутна ізометрична проекція

У прямокутній аксонометрії пряма OO_1 перпендикулярна до площини проекцій P, в якій розміщений трикутник слідів XYZ (рис. 3.102). Коефіцієнти спотворення в ізометричній проекції рівні між собою:

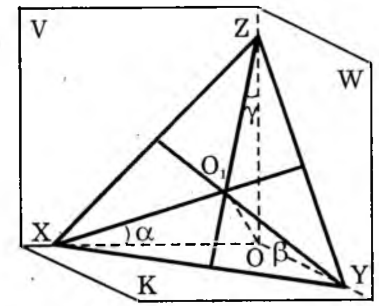


Рис. 3.102

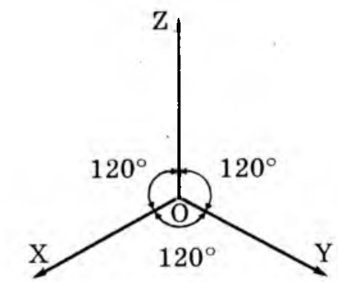


Рис. 3.103

$e_x = e_y = e_z$, тому $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$. Оскільки трикутник XYZ гострокутний, то $\alpha = \beta = \gamma$.

Із прямокутних трикутників OO_1X, OO_1Y, OO_1Z маємо: $OO_1 = OX \cdot \sin\alpha$, $OO_1 = OY \cdot \sin\beta$, $OO_1 = OZ \cdot \sin\gamma$, звідки випливає, що $OX = OY = OZ$. Але ці відрізки є катетами прямокутних трикутників XOZ, XOY, ZOY, тому $XY = XZ = YZ$ і трикутник слідів XYZ для ізометричної проекції рівносторонній. Звідси маємо, що $\angle XO_1Z = \angle XO_1Y = \angle YO_1Z = 120^\circ$. Отже, у прямокутній ізометрії кути між аксонометричними осями дорівнюють 120° (рис. 3.103).

Оскільки в ізометрії коефіцієнти спотворення рівні, то із рівності $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2$ маємо $3e_x^2 = 2$; $e_x = \sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0{,}82$. Отже, при побудові зображення в прямокутній ізометрії натуральні координати точок, які лежать на напрямах осей координат, треба множити на 0,82.

§ 26. Прямокутна диметрична проекція

У диметричній аксонометрії два з трьох коефіцієнтів спотворення рівні між собою, нехай це будуть $e_x = e_z$. Тому практично зручно взяти $e_y = \dfrac{1}{2}e_x$. Тоді, як було з'ясовано раніше, $e_x = e_z \approx 0{,}94$, $e_y \approx 0{,}47$. Оскільки $OX = OZ$, то $XY = ZY$, тобто трикутник слідів XYZ у прямокутній диметрії *рівнобедрений* (рис. 3.104). Позначивши рівним одиниці відрізок OX, знайдемо, що сторона $XZ = \sqrt{2}$. Висота YK трикутника XYZ є одночасно і медіаною, тому її основа K ділить

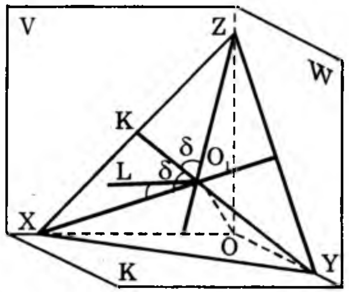


Рис. 3.104

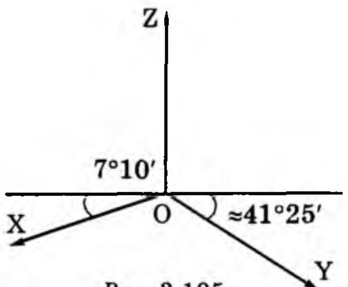


Рис. 3.105

сторону XZ навпіл і має напрям аксонометричної осі O_1Y, тобто $XK = KZ = \frac{XZ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $\angle XO_1K = \angle ZO_1K = \delta$.

Із прямокутного трикутника ZO_1K маємо:

$$\sin\delta = \frac{ZK}{O_1Z} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}75,$$

тому $\delta \approx 48^\circ 35'$, а $2\delta = \angle XO_1Z = 97^\circ 10'$. Тоді два інші кути, утворені з віссю O_1Y, матимуть по $131^\circ 35'$.

Якщо через точку O_1 провести пряму O_1L, перпендикулярну до осі O_1Z, то ця пряма утворить з віссю O_1X кут в $7^\circ 10'$: $\angle XO_1L = \angle XO_1Z - 90^\circ = 97^\circ 10' - 90^\circ = 7^\circ 10'$.

Крім того, гострі кути KO_1L і KZO_1 рівні між собою як кути з відповідно перпендикулярними сторонами, а із трикутника ZKO_1 маємо, що $\angle KZO_1 = 90^\circ - \delta \approx 41^\circ 25'$.

Отже, розміщення осей для диметричної проекції, у якої коефіцієнти спотворення утворюють відношення 1 : 0, 5 : 1, має вигляд як на рис. 3.105.

§ 27. Зведені коефіцієнти спотворення

Як уже зазначалося, коефіцієнти спотворення в ізометрії на всіх осях не перевищують 0,82, а в диметрії – 0,94 (0,47). При побудові аксонометричних проекцій за такими коефіцієнтами спотворення доводиться виконувати обчислювальну роботу, яка інколи може бути значною за обсягом, копіткою: усі розміри об'єкта, паралельні осі OX, треба множити на 0,82, паралельні осі OY – на 0,47, паралельні осі OZ – на 0,94.

Тому в практичних побудовах аксонометричних проекцій користуються не самими коефіцієнтами спотворення, а деякими величинами, пропорційними величинам коефіцієнтів спотворення: $E_x : E_y : E_z = e_x : e_y : e_z$. Ці нові величини, на відміну від фактичних коефіцієнтів спотворення, називають *зведеними коефіцієнтами спотворення.* При цьому один із коефіцієнтів спотворення (найбільший) замінюють одиницею, а інші відповідно перераховують.

В ізометрії, де всі коефіцієнти спотворення рівні 0,82, замінюють їх одиницею. У диметрії коефіцієнти спотворення 0,94 і 0,47 замінюють відповідно на 1 і 0,5.

Якщо позначити через m коефіцієнти зведення, то $E_x = me_x$, $E_y = me_y$, $E_z = me_z$, і формула $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2$ набуде вигляду $E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = 2m^2$, звідси $m = \sqrt{\frac{E_X^2 + E_Y^2 + E_Z^2}{2}}$.

Таким чином, за останніми двома рівностями можна знайти в ортогональній аксонометрії натуральні коефіцієнти спотворення за відомими зведеними.

Заміна значень коефіцієнів спотворення більш зручними в практичному користуванні зведеними коефіцієнтами спотворення не впливає істотно на наочність зображення, а лише пропорційно змінює його розміри, тобто такій заміні відповідає перетворення гомотетії з центром у точці O_1 і коефіцієнтом m.

§ 28. Основні позиційні задачі

28.1. Задання точки

Якщо задані осі і одиничні відрізки на них аксонометричної системи координат, то можна розв'язати всі задачі про взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі, про перетин прямих і площин, про зображення многогранників і т.д.

Розглянемо спочатку, як аксонометрична проекція точки визначає її положення в просторі. Відомо, що положення точки в просторі буде визначено, якщо будуть зафіксовані її координати. Тому, щоб визначити положення точки в просторі за заданою аксонометричною проекцією, достатньо побудувати проекцію її координатної ламаної лінії. Легко переконатись, що проекції всіх ланок координатної ламаної зможемо побудувати, якщо знати лише величину проекції якоїнебудь однієї її ланки або, що те ж саме, величину однієї з координат даної точки.

Дійсно, нехай дано аксонометричну проекцію A деякої точки у просторі, причому абсциса x цієї точки відома. Відкладемо на осі OX відрізок OA_x довжиною x при заданій одиниці e_x: $OA_x = xe_x$. Через точку A_x проведемо пряму, паралельну осі OY, і через точку A пряму, паралельну осі OZ. Точка A_3 перетину цих прямих визначає довжину

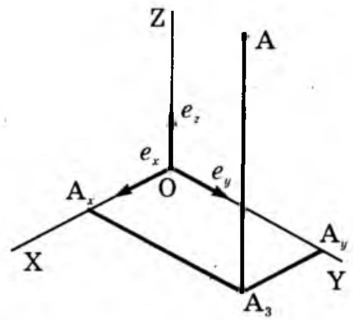


Рис. 3.106

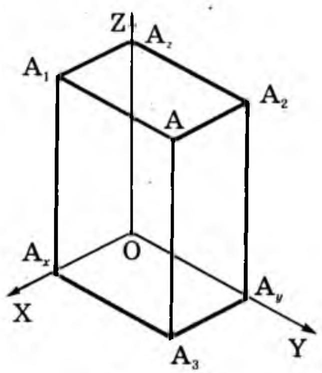


Рис. 3.107

інших ланок шуканої координатної ламаної OA_xA_3A (рис. 3.106). Величини координат точки A будуть такі: $x = \dfrac{OA_x}{e_x}$, $y = \dfrac{A_xA_3}{e_y}$, $z = \dfrac{A_3A}{e_z}$.

Отже, аксонометрична проекція точки і одна з її координат повністю визначають положення точки у просторі відносно відповідної системи координат.

На площині зображення точка A – аксонометрична проекція якоїсь точки A' простору, точка A_3 – проекція проекції точки A в координатній площині XOY. Тому точку A_3 називають *вторинною проекцією* точки A'. Очевидно, що точка A' має три вторинні проекції A_1, A_2, A_3 у трьох координатних площинах. Позначатимемо вторинні проекції індексом 3 (A_3) у площині XOY, індексом 1 (A_1) – у площині XOZ, індексом 2 (A_2) – у площині YOZ.

Побудова вторинних проекцій точки зрозуміла з рис. 3.107. Наприклад, якщо дано точки A і A_3, то для побудови точки A_1 треба провести через точку A_3 пряму, паралельну осі OY, до перетину з віссю OX у точці A_x. Точка A_1 – це точка перетину прямої, проведеної через точку A_x паралельно осі OZ, і прямої, проведеної через точку A паралельно осі OY.

Отже, можна стверджувати, що положення точки в просторі цілком визначається її аксонометричною проекцією і однією з вторинних, або двома вторинними проекціями.

Аксонометрична проекція точки збігається з однією з її вторинних проекцій тоді і тільки тоді, коли точка лежить у відповідній координатній площині.

Зауважимо, що будь-які дві точки на площині аксонометричних проекцій не можна брати за дві вторинні проекції точки простору або за аксонометричну і вторинну проекції. Якщо одну з цих точок взято за аксонометричну проекцію, а другу – за вторинну, то пряма, що сполучає ці точки, повинна бути паралельною одній із аксонометричних осей. Наприклад, якщо вторинною проекцією є точка A_2, то пряма AA_2 завжди повинна бути паралельною осі OX (рис. 3.107).

Якщо ж дві точки на площині аксонометричних проекцій взято за вторинні проекції деякої точки простору, то прямі, паралельні відповідним аксонометричним осям, повинні перетинатись на третій аксонометричній осі. Так, якщо одну з двох точок взято за точку A_2, другу – за точку A_3, то пряма $A_2A_y \parallel OZ$ і пряма $A_3A_y \parallel OX$ повинні перетинатись у точці A_y на осі OY.

Неважко переконатись, що за однією аксонометричною і однією вторинною проекціями точки завжди можна побудувати дві інші вторинні проекції. Також за двома вторинними проекціями завжди можна побудувати третю вторинну і аксонометричну проекцію.

Задача 3.1. Побудувати вторинні проекції B_2, B_3 точки B' за даними аксонометричною проекцією B і вторинною проекцією B_1.

Розв'язання.

Дано: OX, OY, OZ – аксонометричні осі, $B'(B;\ B_1)$.

Побудувати: B_2, B_3.

Побудуємо:

1. $B_1B_x \parallel OZ$, $B_x = B_1B_x \times OX$ (рис. 3.108).
2. $B_xB_3 \parallel OY$.
3. $BB_3 \parallel OZ$, $B_3 = B_xB_3 \times BB_3$.
4. $B_3B_y \parallel OX$, $B_y = B_3B_y \times OY$.
5. $BB_2 \parallel OX$.
6. $B_yB_2 \parallel OZ$, $B_2 = BB_2 \times B_yB_2$.

Точки B_2, B_3 – шукані вторинні проекції точки B'.

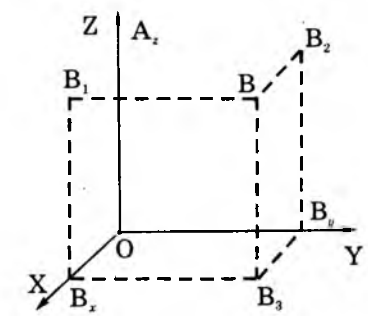


Рис. 3.108

28.2. Задання прямої

Положення прямої лінії повністю визначається заданням двох її точок. Тому для побудови аксонометричної проекції прямої треба побудувати аксонометричні проекції двох її точок. Сполучивши проекції цих точок, одержимо аксонометричну проекцію прямої. Як і точки, пряма має вторинні проекції в координатних площинах, які визначаються відповідними вторинними проекціями точок, що її визначають. Нехай пряма m задана точками M' і N' у просторі. В аксонометричній системі

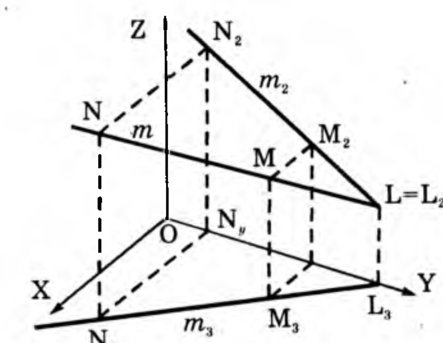


Рис. 3.109

координат ця пряма задана її аксонометричною проекцією $m = MN$ і вторинною проекцією $m_3 = M_3N_3$ (рис. 3.109).

Положення прямої можна визначити її двома вторинними проекціями M_2N_2 і M_3N_3, за цими проекціями можна побудувати її аксонометричну проекцію, як це показано на рис. 3.109.

Точки перетину прямої з координатними площинами називаються *слідами* цієї *прямої* у відповідних площинах. Слід прямої на координатній площині зображується точкою перетину аксонометричної проекції цієї прямої з відповідною вторинною проекцією. Наприклад, аксонометричною проекцією сліду прямої m у площині YOZ є точка L (вона ж L_2) перетину прямих MN і M_2N_2 (рис. 3.109).

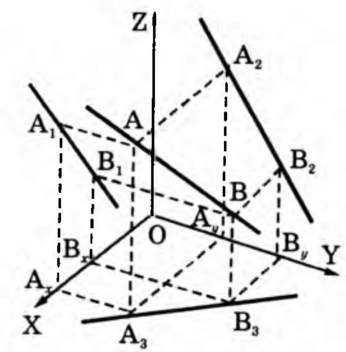


Рис. 3.110

Задача 3.2. Побудувати аксонометричну проекцію і третю вторинну проекцію прямої $A'B'$, заданої вторинними проекціями A_2B_2 і A_3B_3.

Розв'язання. Нехай пряма $A'B'$ задана вторинними проекціями A_2B_2 у площині YOZ і A_3B_3 у площині XOY (рис. 3.110). Треба побудувати аксонометричні проекції A, B і вторинні проекції A_1, B_1 точок A', B'.

Побудуємо:

1. $A_3A \parallel OZ$ і $A_2A \parallel OX$, $A = A_3A \times A_2A$.
2. $B_3B \parallel OZ$ і $B_2B \parallel OX$, $B = B_3B \times B_2B$.
3. $A_3A_x \parallel OY$, $A_x = A_3A_x \times OX$.
4. $A_xA_1 \parallel OZ$ і $AA_1 \parallel OY$, $A_1 = A_xA_1 \times AA_1$.
5. $B_3B_x \parallel OY$, $B_x = B_3B_x \times OX$..
6. $B_xB_1 \parallel OZ$ і $BB_1 \parallel OY$, $B_1 = B_xB_1 \times BB_1$.

AB – аксонометрична проекція прямої $A'B'$.

A_1B_1 – вторинна проекція прямої $A'B'$ у площині XOZ.

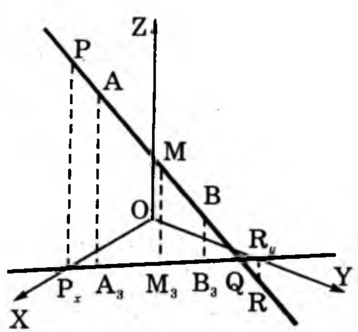


Рис. 3.111

Задача 3.3. Побудувати зображення слідів прямої $A'B'$, заданої точками $A'(A, A_3)$ і $B'(B, B_3)$.

Розв'язання. Нехай пряма $A'B'$ задана аксонометричними проекціями A, B і вторинними проекціями A_3, B_3 на площині XOY (рис. 3.111).

Побудуємо:

1. $Q = Q_3 = AB \times A_3B_3$; Q – слід прямої $A'B'$ у площині XOY.

2. $P_x = A_3B_3 \times OX$.
3. $P_xP \parallel OZ$, $P = P_xP \times AB$, P – слід прямої $A'B'$ у площині XOZ.
4. $R_y = A_3B_3 \times OY$.
5. $R_yR \parallel OZ$, $R = R_yR \times AB$. R – слід прямої $A'B'$ у площині YOZ.

Задача 3.4. Побудувати точку, яка належить даній прямій.

Розв'язання. При паралельному проектуванні інцидентність точки і прямої не порушується. Тому якщо точка M' належить прямій $A'B'$, то її аксонометрична і вторинні проекції лежать на відповідних проекціях прямої.

На рис. 3.111 зображено точку $M'(M, M_3)$, яка належить прямій $A'B'$: $M \in AB$, $M_3 \in A_3B_3$; $MM_3 \parallel OZ$.

28.3. Взаємне розміщення прямих

Нехай дано аксонометричні проекції a і b двох прямих a' і b'. З'ясуємо, при якому розміщенні проекцій ці прямі перетинаються. Розглянемо вторинні проекції a_3 і b_3 цих прямих у площині XOY. Нехай прямі a і b перетинаються в точці A. Вторинна проекція A_3 точки A повинна належати як вторинній проекції a_3, так і вторинній проекції b_3 (за властивістю інцидентності при паралельному проектуванні), тобто точка A_3 є точкою перетину прямих a_3 і b_3 (рис. 3.112). Тому точки A і A_3 лежать на прямій, паралельній осі OZ.

Справедливе й обернене твердження: якщо точки A і A_3 перетину аксонометричних і вторинних проекцій двох прямих лежать на одній прямій, паралельній осі OZ, то ці точки можна вважати аксонометричною і вторинною проекціями деякої точки A' простору. Але ця точка повинна лежати як на одній, так і на другій прямій, тому що її проекція лежить на проекціях цих прямих. Тому прямі a' і b' перетинаються в точці A'.

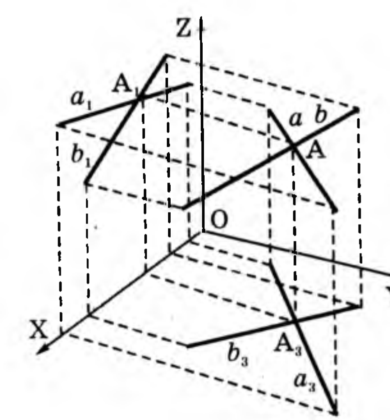


Рис. 3.112

Отже, *щоб прямі перетинались, необхідно і достатньо, щоб* пряма, яка сполучає точку перетину їх аксонометричних проекцій з точкою перетину вторинних проекцій на одну й ту саму площину, була паралельна відповідній осі.

Якщо прямі задані двома вторинними проекціями (a_1, a_2) і (b_1, b_2), то для перетину прямих a'

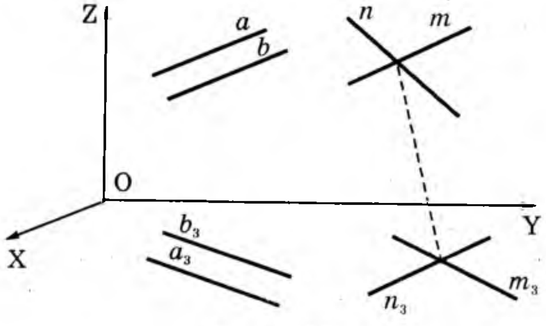


Рис. 3.113

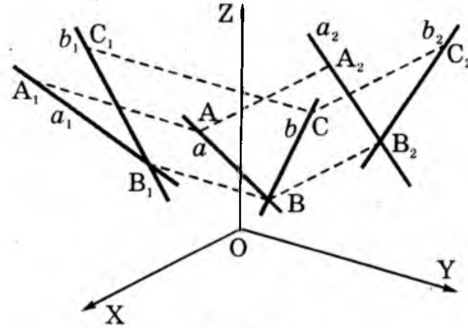


Рис. 3.114

і b' простору треба, щоб прямі, які проходять через точки A_1 і A_3 перетину їх однойменних вторинних проекцій і паралельні відповідно осям OZ і OY, перетинались на осі OX. Паралельність прямих у просторі є інваріантом паралельного проектування, тому аксонометричні проекції і вторинні проекції у кожній з координатних площин паралельних прямих також будуть паралельними. Наприклад, на рис. 3.113 задані паралельні прямі a' і b' аксонометричними проекціями a, b і вторинними проекціями $a_3 \parallel b_3$ у площині XOY. На рис. 3.113 аксонометричні проекції m і n прямих m' і n' перетинаються і вторинні їх проекції m_3 і n_3 перетинаються в площині XOY, але пряма, яка проходить через точки перетину проекцій, не паралельна осі OZ, тому прямі m' і n' у просторі не перетинаються, вони мимобіжні.

Задача 3.5. Побудувати аксонометричну проекцію двох прямих a' і b', що перетинаються, заданих на площині аксонометричних проекцій вторинними проекціями a_1, b_1 і a_2, b_2.

Розв'язання. Нехай прямі a' і b' перетинаються в точці B', її вторинні проекції $B_1 = a_1 \times b_1$, $B_2 = a_2 \times b_2$.

Візьмемо на прямій a' точку A', її вторинні проекції A_1 і A_2. На прямій b' візьмемо точку C', її вторинні проекції C_1 і C_2 (рис. 3.114).

Проведемо через точку A_1 пряму, паралельну осі OY, а через точку A_2 – паралельну осі OX, ці прямі перетнуться в точці A. Через точку B_1 проведемо пряму, паралельну осі OY, а через точку B_2 – паралельну осі OX, ці прямі перетнуться в точці B. Тоді пряма $AB = a$ – аксонометрична проекція прямої a'. Аналогічно прямі, проведені через точку C_1 паралельно осі OY і через точку C_2 паралельно осі OX, у перетині дадуть точку C. Тоді $BC = b$ – аксонометрична проекція прямої b'.

28.4. Задання площини

Положення площини однозначно визначається заданням трьох її неколінеарних точок, або двох прямих, що перетинаються, або двох паралельних прямих, або прямої і неналежної їй точки, що лежить на цій площині. Відповідно в аксонометричних проекціях площина визначається заданням аксонометричних проекцій і вторинних проекцій на одну з координатних площин зазначених елементів. Проте в аксонометрії частіше за все площину задають її *слідами*, тобто лініями її перетину з координатними площинами. Площина загального положення (не паралельна жодній з координатних площин) перетинає всі три координатні площини, тобто має три сліди. Вони утворюють трикутник, який називається *трикутником слідів*.

Відзначимо, що на площині зображення між аксонометричними проекціями і вторинними проекціями точок, які лежать в одній площині, встановлюється перспективно-афінна відповідність, в якій віссю відповідності є аксонометрична (вона ж і вторинна) проекція лінії перетину даної площини з відповідною координатною площиною, тобто слід площини на цій координатній площині.

Дійсно, розглянемо вторинні проекції N_3 і M_3 на площині XOY аксонометричних проекцій точок N і M. Бачимо, що прямі, які сполучають аксонометричні проекції точок з їх вторинними проекціями, паралельні осі OZ, а тому паралельні між собою (рис. 3.115).

Крім того, кожна пряма MN даної площини перетинається з площиною XOY у точці L_3, яка лежить на сліді AB даної площини. Отже, у відповідності, яка встановлюється між аксонометричними і вторинними проекціями точок і прямих, що лежать у даній площині, прямі, які сполучають відповідні точки, паралельні між собою, а кожні дві відповідні прямі перетинаються на одній і тій самій прямій. Тому ця відповідність є *перспективно-афінною* відповідністю з віссю відповідності AB. У цій відповідності два інші сліди площини AC і BC мають собі відповідними осі координат відповідно OY і OX.

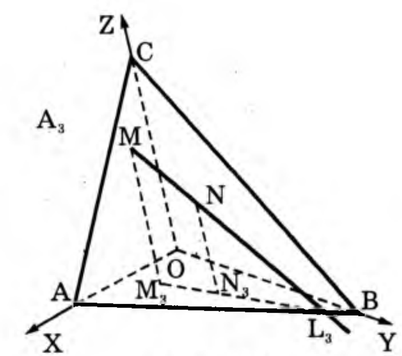


Рис. 3.115

Така ж відповідність встановлюється між аксонометричними проекціями точок площини і двома іншими її вторинними проекціями. Цей факт значно спрощує розв'язування основних позиційних задач, зводячи їх до задач на знаходження відповідних елементів у певній перспективно-афінній відповідності. Звідси також випливає, що пряма належить площині, якщо її сліди належать однойменним слідам площини. Точка належить площині, якщо її проекції належать однойменним проекціям якої-небудь прямої, що належить площині. Площина в аксонометричних проекціях задається своїми двома слідами.

Примітка. 1. При розв'язуванні задач будемо вважати, що всі зображені на рисунку фігури віднесені до прямокутної декартової системи координат у просторі. При цьому вторинні проекції точок знаходяться через зображення на рисунку ортогональних проекцій точки на координатні площини.

2. При розв'язуванні позиційних задач йдеться не про відновлення фігури-оригіналу, тому коефіцієнти спотворення не впливають на побудову зображення, їх не беруть до уваги.

Задача 3.6. Площина ABC задана слідами AB і BC. Побудувати вторинну проекцію даної точки M у цій площині.

Розв'язання.

1-й спосіб. Задання площини ABC її слідами встановлює перспективно-афінну відповідність між площинами аксонометричних і вторинних проекцій її точок на площині XOY. Віссю цієї відповідності є слід AB, напрямом – вісь OZ. Вторинною проекцією точки C є точка O – початок аксонометричної системи координат, тому перспективно-афінна відповідність повністю визначена.

Для знаходження точки M_3, відповідної точці M, проведемо пряму CM до перетину з віссю відповідності в точці N. Відповідною цій прямій буде пряма ON, оскільки точка N сама собі відповідає як точка осі відповідності. Образом точки M буде точка перетину прямої ON з прямою, проведеною через точку M паралельно осі OZ (рис. 3.116).

2-й спосіб (без використання перспективно-афінної відповідності). Проведемо через точку M і вісь OZ площину, вона перетне дану площину по прямій CM, яка перетне слід AB в точці N. Тоді пряма ON – вторинна проекція прямої CM, на ній і лежить шукана точка $M_3 = ON \times MM_3$, де $MM_3 \parallel OZ$.

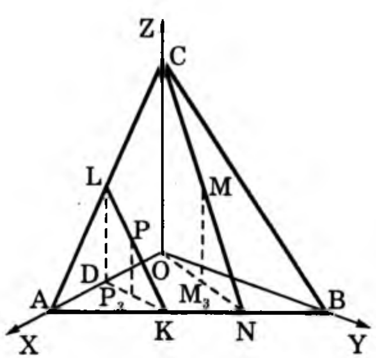


Рис. 3.116

Задача 3.7. Площина ABC задана слідами AB і BC, а її точка P – вторинним слідом P_3. Побудувати точку P.

Розв'язання. Зображення площини ABC і вторинної проекції P_3 точки P цієї площини подано на рис. 3.116. Побудова виконується в такій послідовності.

Через точку P_3 у площині XOY проводимо довільну пряму KD. Пряма, проведена через точку D паралельно осі OZ, перетне слід AC в точці L, перспективно-афінно відповідній точці D. Прямі DK і LK також перспективно-афінні. Точка P_3 належить прямій KD, тому їй відповідна точка P лежить на прямій KL. Отже, точка P – це точка перетину прямої KL з прямою, проведеною через точку P_3 паралельно осі OZ – напряму перспективно-афінної відповідності з віссю AB.

Задача 3.8. Побудувати точку перетину прямої $a'(a, a_3)$ з площиною ABC, заданою слідами.

Розв'язання.

1-й спосіб. Нехай пряма a_3, яка лежить у площині XOY, перетинає слід AB площини в точці N, а вісь OX – у точці M_3. Проведемо $M_3M \parallel OZ$. Тоді пряма MN є відповідною прямій a_3 у перспективно-афінному перетворенні з віссю AB і напрямом OZ. Точкою перетину прямої a' з площиною ABC буде точка D перетину цієї прямої з прямою MN (рис. 3.117).

2-й спосіб. Проведемо через пряму a горизонтально-проектуючу (тобто паралельну осі OZ) площину. Слід цієї площини у площині XOY збігається з a_3, а в площині XOZ – з прямою MM_3. Сполучивши точки перетину однойменних слідів допоміжної площини і площини ABC, одержимо лінію перетину цих площин MN. Шуканою точкою D є точка перетину прямих a і MN (рис. 3.117).

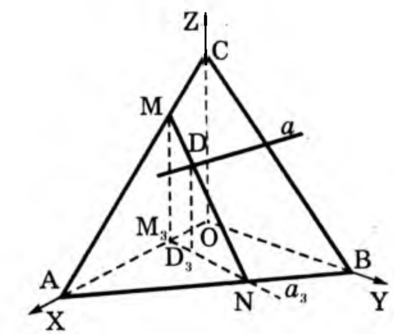


Рис. 3.117

Задача 3.9. Знайти лінію перетину двох площин ABC і $A_1B_1C_1$, заданих своїми слідами.

Розв'язання.

1-й спосіб (на основі перспективно-афінної відповідності). Дві дані площини ABC і $A_1B_1C_1$ визначають на площині зображення дві перспективно-афінні відповідності зі спільним напрямом OZ.

Для цих відповідностей треба знайти спільну пару відповідних прямих. Сліди AB і A_1B_1 є осями цих відповідностей, тому точка N їх перетину є подвійною точкою в обох відповідностях. Аналогічно сліди BC і B_1C_1 в обох відповідностях мають один і той самий образ –

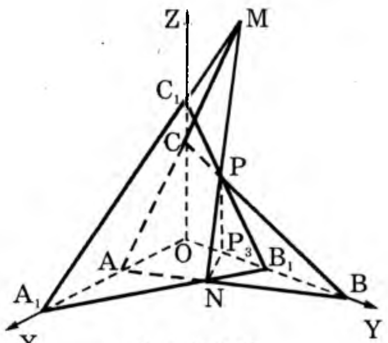


Рис. 3.118

вісь OY, тому точці P їх перетину в обох відповідностях відповідає одна й та сама точка P_3 на осі OY. Звідси випливає, що прямі NP і NP_3 утворюють спільну пару перспективно-афінних прямих в обох відповідностях, тобто пряма NP є лінією перетину площин ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.118).

2-й спосіб. Точки перетину однойменних слідів даних площин є спільними точками обох площин. Отже, точки $N = AB \times A_1B$ і $P = BC \times B_1C_1$ визначають лінію перетину площин ABC і $A_1B_1C_1$ (рис. 3.118). Покажемо, що і третя точка M перетину третьої пари однойменних слідів AC і A_1C_1 лежить на прямій NP. Дійсно, якщо продовжити сліди AC і A_1C_1 до їх перетину в точці M, то лінія перетину площин зустрінеться з площиною XOZ у тій же точці M, оскільки пряма AC лежить у цій площині. Аналогічно пряма NP повинна перетнути пряму A_1C_1 у точці, яка лежить у площині XOZ, але пряма NP з площиною XOZ може мати лише одну спільну точку, тому сліди AC і A_1C_1 даних площин і лінія їх перетину проходять через одну спільну точку M. Твердження про те, що три точки перетину однойменних слідів двох площин ABC і $A_1B_1C_1$ лежать на одній прямій – лінії перетину цих площин, випливає безпосередньо з теореми Дезарга про гомологічні трикутники.

§ 29. Метричні задачі в аксонометрії

Задачі на знаходження дійсних розмірів фігури та її частин за даними їх аксонометричними проекціями і побудова зображень фігур, які мають задані розміри їх частин, називаються *метричними*. Для розв'язування таких задач суттєве значення мають коефіцієнти спотворення.

Оскільки основою аксонометричних проекцій є метод паралельного проектування, то при розв'язуванні метричних задач зручно користуватися *масштабним еліпсом*. Нехай у площині XOY маємо коло одиничного радіуса. Якщо спроектувати осі координат на довільну площину аксонометричних проекцій у довільному напрямі, то коло спроектується в еліпс, а радіуси – у півдіаметри еліпса.

Ці півдіаметри еліпса будуть проекціями одиниць довжини, відкладених у різних напрямах на площині XOY (рис. 3.119). Діаметри

кола, які збігаються з осями координат OX і OY, спроектуються у спряжені діаметри еліпса, довжини яких відповідно дорівнюють $2e_x$, $2e_y$. Побудувавши еліпс за спряженими діаметрами, матимемо можливість визначити аксонометричну одиницю довжини в будь-якому напрямі на площину XOY. Цей еліпс і буде масштабним еліпсом площини XOY.

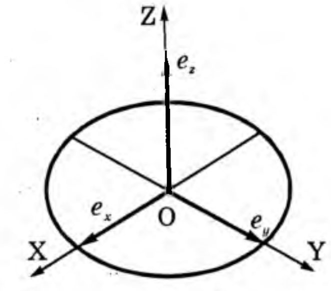


Рис. 3.119

Отже, відрізки e_x, e_y, e_z є половинами довжин спряжених діаметрів масштабних еліпсів у координатних площинах.

Нагадаємо, як побудувати еліпс, заданий парою спряжених діаметрів. Нехай AB і CD – спряжені діаметри еліпса, O – точка їх перетину, вона ділить діаметри навпіл (рис. 3.120). Опишемо коло з центром O і радіусом OA. Побудуємо діаметр $C'D' \perp AB$. Задамо перспективно-афінне перетворення площини віссю відповідності AB і парою відповідних точок C і C'. Трикутники OCC' і ODD' рівні ($OC = OD$, $OC' = OD'$, $\angle COC' = = \angle DOD'$). Тому $DD' \parallel CC'$, а звідси випливає, що точки D і D' відповідні у вибраному перспективно-афінному перетворенні. Взагалі перпендикулярні діаметри $A'B'$ і $C'D'$ кола переходять у спряжені діаметри еліпса. Образом побудованого кола є заданий еліпс, точки якого можуть бути побудовані як образи точок кола. На рис. 3.119 побудовані точки E, F, M еліпса.

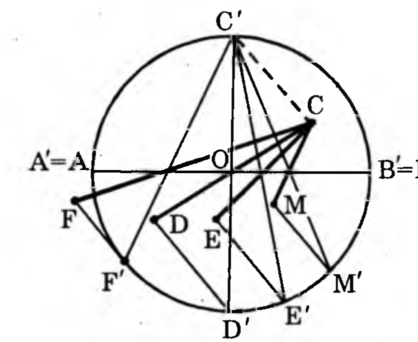


Рис. 3.120

При розв'язуванні задач в аксонометрії часто використовується перспективно-афінне перетворення..

Задача 3.10. Дана аксонометрична проекція відрізка AB, паралельного осі OY. Визначити натуральну довжину цього відрізка.

Розв'язання. При проектуванні довжина відрізка AB зміниться у такому відношенні, в якому змінюються відрізки на осі OY (за властивостями паралельного проектування). Отже, розв'язання задачі зводиться до побудови натурального відрізка $A'B'$ – четвертого пропорційного до відрізків: e – натуральна одиниця довжини, e_y – одиниця на осі OY і AB – аксонометричної проекції відрізка $A'B'$, тобто $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{e}{e_y}$, $A'B' = \dfrac{AB \cdot e}{e_y}$.

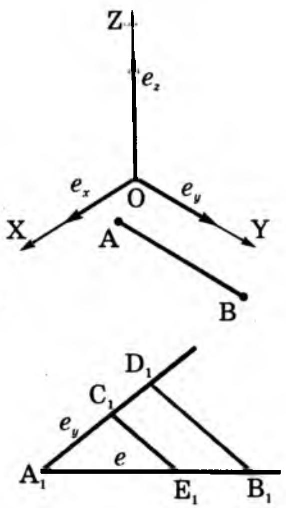


Рис. 3.121

Для побудови відрізка $A'B'$ через довільну точку A_1 проведемо дві прямі під довільним кутом (рис. 3.121). На одній стороні кута відкладаємо відрізок $A_1C_1 = e_y$ і відрізок $A_1D_1 = AB$, а на другій – натуральну одиницю $e = A_1E_1$. Через точку D_1 проводимо пряму $D_1B_1 \parallel C_1E_1$ до перетину з прямою A_1E_1 у точці B_1. Відрізок A_1B_1 – натуральна величина відрізка AB.

Задача 3.11. Побудувати аксонометричну проекцію бісектриси кута ABC, який лежить у площині XOY.

Розв'язання. Побудуємо масштабний еліпс за спряженими діаметрами $2e_x$, $2e_y$ (рис. 3.122). Проводимо його півдіаметри $OM \parallel BA$ і $ON \parallel BC$, ділимо хорду MN точкою K навпіл і проводимо діаметр OK. Пряма $BD \parallel OK$ є аксонометричною проекцією бісектриси кута ABC.

Задача 3.12. Побудувати аксонометричну проекцію перпендикуляра, опущеного з початку координат O' на пряму $A'B'$, яка лежить у площині XOY.

Розв'язання. Якщо в колі (O', R') дана хорда $A'B'$ і точка P' – середина хорди $M'N' \parallel A'B'$, то $O'P' \perp M'N'$, а отже, $O'P' \perp AB$.

Враховуючи інваріантність паралелізму і простого відношення трьох точок при паралельному проектуванні, можна виконати таку побудову. Проведемо у масштабному еліпсі хорду $MN \parallel AB$ і поділимо хорду MN точкою P навпіл. Пряма OP – шукана (рис. 3.123).

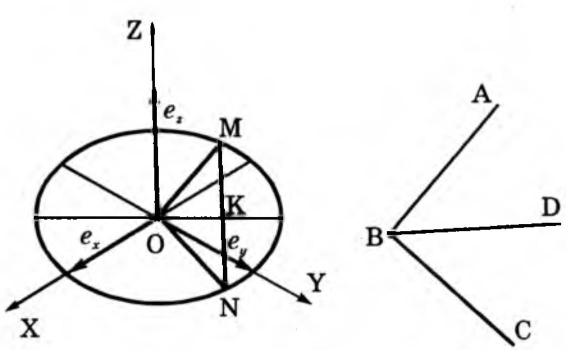


Рис. 3.122

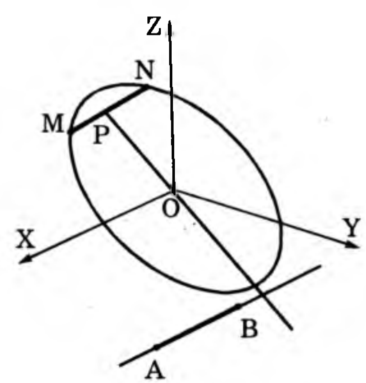


Рис. 3.123

Вправи

3.13. В аксонометричній системі координат точка C' задана вторинними проекціями C_2 і C_3 (у координатних площинах YOZ і XOY відповідно). Побудувати аксонометричну проекцію C і вторинну проекцію C_1.

3.14. Пряма a' задана аксонометричними проекціями її двох точок $A'(A, A_2)$ і $B'(B, B_2)$. Побудувати вторинні проекції A_1B_1 і A_3B_3 цієї прямої.

3.15. Побудувати зображення слідів прямої $A'B'$, заданої аксонометричною проекцією AB і вторинною проекцією A_1B_1 у площині XOZ.

3.16. Дві прямі a' і b', що перетинаються, задані вторинними проекціями a_1, b_1 і a_3, b_3. Побудувати їх аксонометричну проекцію a, b і вторинну проекцію a_2, b_2.

3.17. Побудувати довільну точку на площині ABC, заданій її двома слідами AB і AC.

3.18. Площина задана двома прямими $a'(a, a_3)$ і $b'(b, b_3)$. Знайти точку перетину даної прямої $m'(m, m_3)$ з цією площиною.

3.19. Площину задано двома паралельними прямими $m'(m, m_3)$ і $n'(n, n_3)$. Знайти точку перетину цієї площини з прямою $k'(k, k_3)$.

3.20. Побудувати лінію перетину двох площин, кожна з яких задана двома прямими, що лежать у цих площинах.

3.21. Дано аксонометричну проекцію AB відрізка $A'B'$, який лежить у площині XOY. Побудувати відрізок, рівний відрізку $A'B'$.

3.22. Побудувати відрізок, рівний відрізку $A'B'(AB, A_3B_3)$.

3.23. Із точки O' опустити перпендикуляр на площину ABC, задану слідами AB і AC.

3.24. У площині XOY побудувати квадрат, сторони якого дорівнюють двом одиницям довжини і одна з сторін збігається за напрямом з даною прямою MN.

4 Розділ

Метод лінійної перспективи

§ 30. Основні поняття лінійної перспективи

Метод лінійної перспективи ще називають *методом центрального проектування*. Властивості центрального проектування викладені у розділі I (§ 3).

Введемо основні поняття і термінологію лінійної перспективи. Візьмемо дві взаємно перпендикулярні площини, з яких для зручності одну виберемо горизонтальною, позначимо її P_H, а другу – вертикальною, позначимо її P_V (рис. 3.124).

Горизонтальну площину P_H називають *предметною площиною* (предмети, що зображаються, стоять на ній). Вертикальну площину P_V називають *картинною площиною* або просто *картиною*.

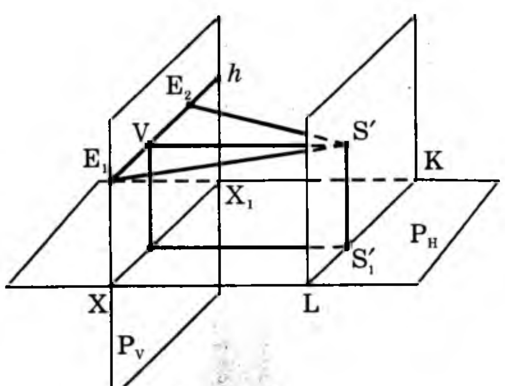


Рис. 3.124

Далі виберемо точку S', що не належить жодній з площин P_H і P_V. Це точка, з якої виконується центральне проектування (око спостерігача) на площину P_V, її називають *точкою зору* або *центром перспективи*. Основа перпендикуляра з точки S' на площину P_H – точка S'_1 – називається *точкою стояння*. Ці назви зумовлені тим, що ми ніби уявляємо спостерігача, який стоїть у точці S'_1 і око якого збігається з точкою S'.

Із точок, що лежать у картинній площині, особливе значення має точка V – основа перпендикуляра, опущеного з точки S' на цю площину, вона називається *головною точкою* картини, а відстань $S'V$ – *головною відстанню*. Пряма перетину площин P_H і P_V називається *основою картини*, а пряма, що проходить через головну точку V паралельно основі картини, називається *лінією горизонту*, позначається h; площина, що проходить через точку зору S' і лінію горизонту h, називається *площиною горизонту* ($S'E_1E_2$).

Дві точки E_1 і E_2 лінії горизонту h, для яких $E_1V = E_2V = S'V$, називаються *дистанційними*, або *фокальними, точками*. E_1 і E_2 – це точки перетину з картинною площиною прямих, які проходять через точку S' паралельно предметній площині і нахилені до картинної площини під кутом 45°. Це випливає з того, що прямокутний трикутник $S'VE_1$ рівнобедрений. На картинній площині суттєву роль відіграє коло з центром V і радіусом $S'V$, яке називається *дистанційним* або *масштабним колом*. Можна сказати, що дистанційним колом називається геометричне місце точок перетину з картинною площиною всіх прямих, що проходять через точку S' і нахилені до картинної площини під кутом 45°.

Зображення предмета (або його частини), одержане на картинній площині P_V за допомогою центрального проектування з точки S', називається його *перспективою* (або *картиною*).

Площина P_0, що проходить через точку стояння S'_1 паралельно площині P_V, називається *нейтральною площиною*, а лінія її перетину з площиною P_H – *нейтральною прямою*. Частина простору, розміщеного над предметною площиною і по той бік від картинної площини, де немає точки зору S' (лівіше від P_V), називається *предметним простором*.

Частина простору, розміщена над предметною площиною P_H між нейтральною і картинною площинами, називається *нейтральним простором*.

Частина простору, яка лежить над предметною площиною P_H і перед нейтральною площиною P_0 (правіше від P_0), називається *уявним простором*.

Предмет, який зображується (проектується), розміщують у предметному просторі. Його проектують ортогонально на предметну площину P_H, а потім за допомогою центрального проектування – на картинну площину.

Зображення на картинній площині P_V в лінійній перспективі називають *картиною*.

Зрозуміло, що введена термінологія проектуючого апарату з лінійної перспективи безпосередньо пов'язана з практикою художників.

§ 31. Основні позиційні задачі

31.1. Лінійна перспектива точки

Позиційними називають задачі про взаємне розміщення точок, прямих і площин у просторі, про їх задання на картині.

Як і в інших методах, у методі лінійної перспективи положення точки на картині однозначно визначається її двома проекціями. З'ясуємо, як знайти ці проекції довільно заданої точки в просторі.

Нехай маємо предметну площину P_H, картинну площину P_V, точку зору S' і довільну точку A', яка лежить у предметному просторі і не належить жодній з площин P_H і P_V (рис. 3.125).

Ортогональна проекція A'_1 точки A' на площину P_H називається *основою точки* A'. Точка A перетину прямої $S'A'$ з картинною площиною P_V називається *перспективою* (або *картиною*) точки A' у площині P_V. Всі точки прямої $S'A'$ мають одну й ту саму перспективу A. Позначимо через A_1 перспективу основи A'_1 точки A' як точку перетину прямої $S'A'_1$ з площиною P_V. Пряма $A'A'_1$, а разом з нею і проектуюча площина $S'A'A'_1$ перпендикулярні до площини P_H, тому пряма AA_1 також перпендикулярна до площини P_H і паралельної їй прямій h.

Звідси зрозуміло, що для даної точки A' предметного простору завжди можна побудувати її перспективу і перспективу її основи, і, навпаки, точка A' у просторі однозначно визначається, якщо задана її перспектива A і перспектива A_1 її основи.

Дійсно, за даною точкою A_1 знайдемо точку A'_1 як точку перетину прямої $S'A_1$ з площиною P_H, а потім і точку A' як перетин прямої $S'A$ з перпендикуляром m, проведеним через точку A'_1 до площини P_H.

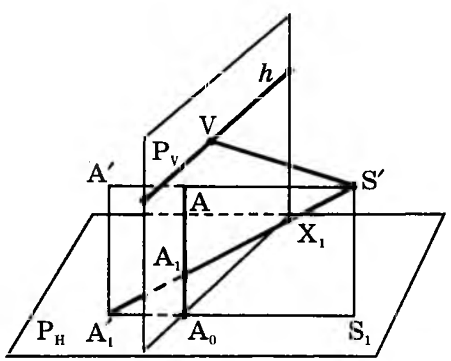


Рис. 3.125

Точку A' простору, яка має перспективу A і перспективу A_1 її основи, будемо позначати так: $A'(A, A_1)$.

Отже, в лінійній перспективі точку задають перспективою точки і перспективою її основи. Таке задання точки забезпечує на картині повноту рисунка.

Взагалі, за перспективу A і перспективу A_1 її основи точки A' простору можна взяти будь-які дві точки картинної площини P_V, які лежать на одній прямій, перпендикулярній до лінії горизонту h.

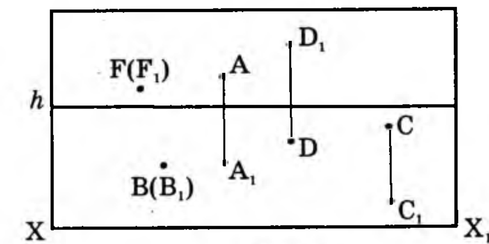


Рис. 3.126

Якщо точка A' лежить у площині P_H, то A' і A'_1 збігаються, тому збігаються і їх проекції A і A_1. Якщо точка A' належить площині P_V, то її основа A'_1 лежить на основі XX_1 картини. Для невласної точки A'_∞ простору основою A'_1 слід вважати невласну точку проекції прямої $S'A'$ на площині P_H, тому точка A_1 у цьому випадку лежить на лінії горизонту h. Якщо одна з точок A і A_1 невласна, то й інша повинна бути невласною. У такому разі точка A' лежатиме в площині, що проходить через точку зору S' паралельно картинній площині P_V. Але на практиці звичайно точки беруть у предметному просторі, тому останній випадок практично не використовується.

За даною перспективою точки і перспективою її основи можна встановити її положення у просторі. Нехай точки A', B', C', D', F' задані в картинній площині своїми двома проекціями (рис. 3.126). Визначимо їх положення у просторі.

Точка A' лежить у предметному просторі над площиною горизонту, оскільки її проекція A лежить над лінією горизонту h.

Точка B' лежить у предметній площині P_H, оскільки $B = B_1$.

Точка C' лежить у предметному просторі під площиною горизонту, оскільки її перспектива C лежить нижче лінії горизонту h.

Точка D' лежить в уявному просторі над площиною горизонту, оскільки перспектива D_1 її основи лежить вище лінії горизонту h, а перспектива D – нижче.

Точка F' лежить в уявному просторі у предметній площині.

31.2. Лінійна перспектива прямої

Візьмемо пряму a', яка не проходить через точку зору S', загального положення відносно площин P_H і P_V (рис. 3.127).

Оскільки положення прямої визначається її двома довільними точками, то для побудови перспективи прямої a' достатньо взяти на ній дві довільні точки A', B', знайти їх основи A'_1, B'_1 на основі a'_1 даної прямої a' і побудувати перспективи A, B точок A', B' та перспективи A_1, B_1 основ A'_1, B'_1. Тоді $AB = a$ – перспектива прямої a', $A_1B_1 = a_1$ – перспектива основи $A'_1B'_1 = a'_1$.

Отже, для будь-якої прямої загального положення в лінійній перспективі можна побудувати її перспективу та перспективу її основи.

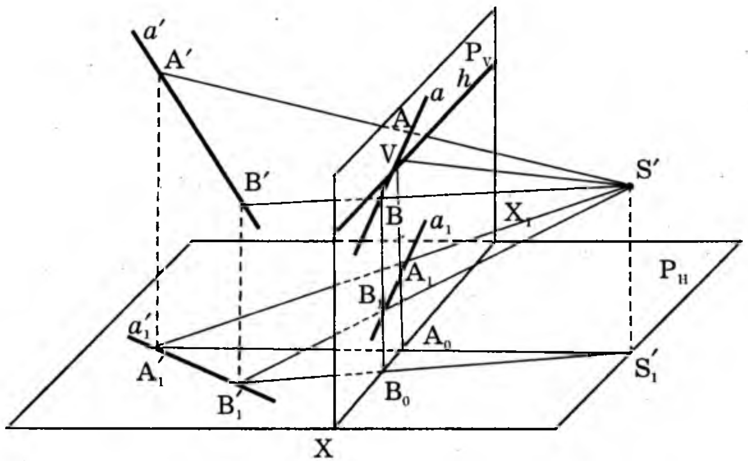


Рис. 3.127

Справедливе й обернене твердження: за даними перспективою прямої та перспективою її основи можна однозначно визначити положення прямої в просторі. Тому будь-які дві прямі картинної площини P_V можна вважати перспективою a якоїсь прямої a' простору і перспективою a_1 її основи a'_1 (при умові, що жодна з прямих a, a_1 не перпендикулярна до лінії горизонту h і не суміщається з невласною прямою площини P_V).

Серед точок прямої a' дві точки набувають особливого значення: одна з них – точка перетину прямої з картинною площиною, її називають ***картинним слідом прямої*** a'; друга – нескінченно віддалена точка. Перспектива нескінченно віддаленої точки прямої a' називається ***точкою сходу прямої*** a'. Щоб побудувати точку сходу прямої, треба через точку зору провести пряму, паралельну даній прямій, і знайти точку її перетину з картинною площиною. Точка сходу прямих, паралельних горизонтальній (предметній) площині P_H, належить лінії горизонту h. Головна точка V є точкою сходу прямих, перпендикулярних до картинної площини P_V. Точки дистанційного кола є точками сходу прямих, які нахилені до картинної площини під кутом 45°.

Точка перетину прямої a' з предметною площиною називається ***предметним слідом*** прямої.

Як і в інших методах зображення, перспективою прямої є пряма; якщо точка належить прямій, то її проекції належать однойменним

проекціям прямої і розміщені на спільному перпендикулярі до основи картини XX_1, а також і до лінії горизонту. Якщо пряма a' паралельна предметній площині P_H, то точка її перетину з площиною P_H і її перспектива будуть невласними ($a \parallel a_1$), а якщо пряма a' лежить у площині P_H, то її перспектива a і перспектива основи a_1 збігаються.

Якщо пряма a' перпендикулярна до площини P_H, то всі її точки мають одну й ту саму основу і перспектива основи прямої a' зводиться до цієї точки. Це необхідна і достатня ознака того, що $a' \perp P_H$.

Прямі (a, a_1) і (b, b_1) перетинаються у просторі тоді і тільки тоді, коли точки перетину перспектив ($a \times b$) і перетину перспектив їх основ ($a_1 \times b_1$) розміщені на спільному перпендикулярі до лінії горизонту.

Пряму на картинній площині можна задати перспективою прямої і перспективою її основи, точкою сходу і одним із слідів, двома слідами (перспективу предметного сліду часто називають просто предметним слідом).

На рис. 3.128 зображено пряму a' і точки на ній в картинній площині. Точки (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) належать прямій $a'(a, a_1)$.

Оскільки точка $B = a \times a_1$ збігається з B_1, а точка D_1 розміщена на основі XX_1 картини P_V, то точки (B, B_1), (D, D_1) є точками перетину прямої $a'(a, a_1)$ з площинами P_H і P_V відповідно. Точка C_1 лежить на лінії горизонту h, тому точка C'_1 площини P_H невласна, тоді точка (C, C_1) є невласною точкою прямої (a, a_1). Точку $C'(C, C_1)$ називають *точкою сходу* прямої a'.

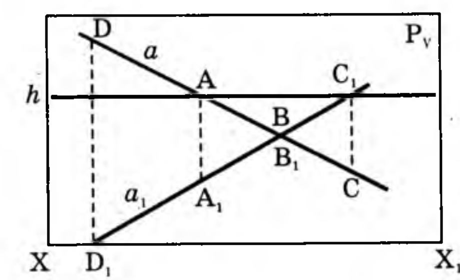


Рис. 3.128

Задача 4.1. Побудувати сліди і точку сходу прямої $a'(a, a_1)$.

Розв'язання.

Дано: основа картини XX_1, лінія горизонту h і пряма $a'(a, a_1)$ на картинній площині P_V (рис. 3.129).

Побудувати: картинний слід $A'_n(A_n, A_{n_1})$, точку сходу $A'_\infty(A_\infty, A_{\infty_1})$.

Побудова. Побудови в лінійній перспективі виконуються на картинній площині P_V, зображеній у вигляді прямокутника з основою картини XX_1 і лінією горизонту h.

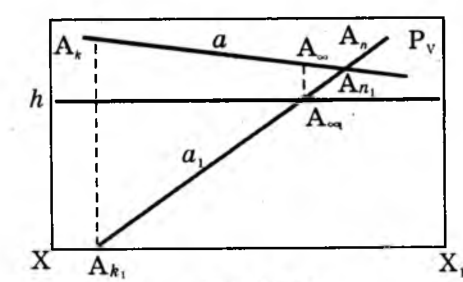


Рис. 3.129

Будуємо:

1) перспективу основи точки сходу $A_{\infty_1} = a_1 \times h$;
2) перспективу точки сходу $A_\infty = A_{\infty_1}A_\infty \times a$, де $A_{\infty_1}A_\infty \perp XX_1$. Точка сходу прямої (a, a_1) побудована: (A_∞, A_{∞_1});
3) перспективу основи картинного сліду $A_{k_1} = a_1 \times XX_1$;
4) перспективу картинного сліду $A_k = A_{k_1}A_k \times a$, де $A_{k_1}A_k \perp XX_1$. Картинний слід прямої (a, a_1) побудовано: (A_k, A_{k_1});
5) предметним слідом прямої (a, a_1) є точка $A_n = A_{n_1} = a \times a_1$.

Задача 4.2. Встановити взаємне розміщення двох прямих a' і b', a' і c', заданих їх перспективою на картинній площині.

Розв'язання. На картинній площині P_V з основою картини XX_1 і лінією горизонту h дані прямі $a'(a, a_1)$, $b'(b, b_1)$, $c'(c, c_1)$.

1. Точки перетину перспектив a і b прямих a', b' та перспектив їх основ M і M_1 лежать на спільному перпендикулярі до основи картини: $MM_1 \perp XX_1$. Тому прямі a' і b' перетинаються.
2. Точки перетину перспектив a і c прямих a' і c' і перетину перспектив їх основ не лежать на одному перпендикулярі до основи картини XX_1, тому прямі a' і c' мимобіжні (рис. 3.130).

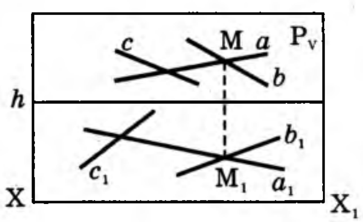


Рис. 3.130

Задача 4.3. Побудувати перспективу прямої, яка проходить через дану точку (A, A_1) паралельно даній прямій (b, b_1).

Розв'язання. Побудувати пряму в лінійній перспективі означає накреслити на картинній площині P_V перспективу цієї прямої і перспективу її основи. Спочатку будуємо точку сходу Q прямої b, для чого з точки Q_1 перетину прямої b_1 і h проводимо до лінії h перпендикуляр, який перетне пряму b у шуканій точці Q (рис. 3.131). Шуканою прямою буде пряма (a, a_1), де $a = AQ$, $a_1 = A_1Q_1$, оскільки за умовою прямі (b, b_1) і (a, a_1) паралельні, тому мають спільну невласну точку (Q, Q_1).

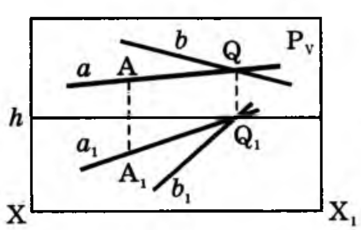


Рис. 3.131

31.3. Лінійна перспектива площини

Нехай у просторі дана площина α, яка не проходить через точку зору S', не збігається з предметною площиною P_H і не перпендикулярна їй. Тоді кожна точка A' площини α матиме дві компоненти у картинній площині P_V: перспективу A точки A' і перспективу A_1 її основи A'_1 (рис. 3.132).

Розглядаючи довільну точку A картинної площини P_V як перспективу деякої точки A' площини α, можна віднести у відповідність точці A точку A_1 у тій же площині P_V: точку A' дістанемо в перетині прямої $S'A$ з площиною α, потім визначається і точка A_1 – перспектива основи A'_1 точки A'. Отже, кожній площині α простору відповідає перетворення Π_α картинної площини P_V, яке є композицією трьох відображень R_1, R_2, R_3, з яких R_1 – перспективне відображення з центром S' площини P_V на площину α, R_2 – ортогональне проектування точок площини α на площину P_H, R_3 – перспективне відображення з центром S' площини P_H на площину P_V. При цьому перетворення R_1 відображає точку A в точку A', R_2 – точку A' в точку A'_1, а R_3 – точку A'_1 в точку A_1.

Звідси випливає, що Π_α – проективне перетворення (колінеація) площини P_V (оскільки воно переводить колінеарні точки в колінеарні). У перетворенні Π_α всі прямі, які сполучають кожний прообраз A з його образом $A_1 = \Pi_\alpha(A)$, перпендикулярні до лінії горизонту h (а отже, і до основи картини XX_1), тобто утворюють пучок прямих з невласним центром S_∞, який є невласною точкою прямої $S'S'_1$. Точка S_∞ у перетворенні Π_α подвійна, оскільки $R_1(S_\infty) = S'S'_1 \times \alpha$, $R_2(S'S'_1 \times \alpha) = S'_1$, $R_3(S'_1) = S_\infty$, тоді і всі прямі пучка S_∞ будуть подвійними (оскільки переводять кожну з прямих $S_\infty A$ у пряму $S_\infty A_1$, яка з нею збігається).

Отже, перетворення Π_α є гомологією з невласним центром S_∞, яка у свою чергу є перспективно-афінним перетворенням площини P_V. Віссю перетворення Π_α є перспектива m прямої m', яка є перетином площин α і V_H. Дійсно, якщо B лежить на прямій m, то точка $B' = R_1(B)$ належить прямій m'. Образом точки B' в B_2 є точка B', а образом точки B' у перетворенні R_3 є точка B.

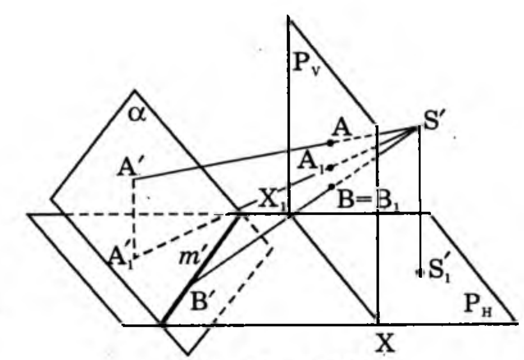


Рис. 3.132

Отже, $\Pi_\alpha(B) = B$; тобто кожна точка прямої m подвійна у перетворенні.

На підставі вище викладеного можна дійти таких висновків:

1) будь-яка площина α, яка не проходить через точку зору S', не збігається з предметною площиною P_H і не паралельна їй, задає перспективно-афінне перетворення Π_α картинної площини P_V; вісь перетворення Π_α, заданого площиною α, називається віссю площини α, вона є перспективою прямої перетину площин α і P_H;
2) площина α повністю визначається заданням її осі і належною їй точкою (A, A_1).

Важливими в застосуванні є дві особливі прямі площини α: перша – це лінія сходу, якою є перспектива невласної прямої площини α, друга – слід площини α, яким є пряма перетину площин α і P_V. Якщо через точку зору S' провести площину β паралельно площині α, то пряма перетину площин β і P_V буде лінією сходу площини α. Звідси випливає, що лінія сходу площини паралельна її сліду.

На рис. 3.133 задана площина α, їй паралельна площина β і проектуючий апарат (площини P_H, P_V, точка сходу S'). На ньому a_k – картинний слід площини α (пряма перетину площин α і P_V);

a'_n – предметний слід площини α (пряма перетину площин α і P_H);

a_{n_1} – перспектива предметного сліду a'_n, $a_{n_1} = a_k$;

a_∞ – перспектива невласної прямої площини α і всіх площин, паралельних α; вона є прямою перетину площин P_V і β, де $\beta \parallel \alpha$ і $S' \in \beta$.

Оскільки $a'_n \subset P_H$, а N'_∞ – невласна точка прямої a'_n, то перспектива N_∞ точки N'_∞ належить лінії горизонту h. Аналогічно з того, що

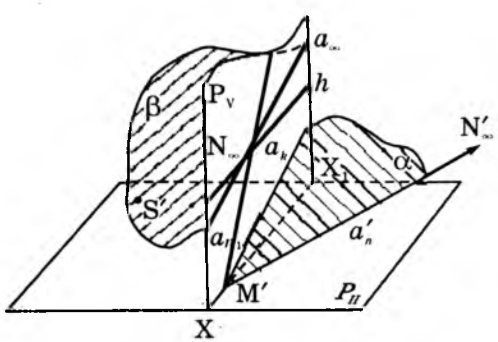


Рис. 3.133

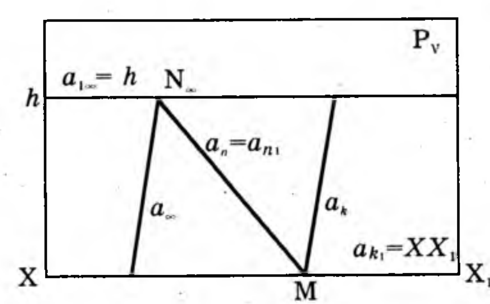


Рис. 3.134

$a'_n \subset \alpha$, випливає, що $N_\infty \in a_\infty$. Таким чином, $N_\infty = h \times a_\infty$, $a_{\infty_1} = h$, $a_{k_1} = XX_1$, $a_{n_1} = a_n$, причому $N_\infty \in a_n$ і $M \in a_n$, де $M = a'_n \times XX_1 = a_k \times XX_1$.

На картині задання площини α має вигляд, як на рис. 3.134.

Якщо площина α проходить через точку зору S', то перспективи всіх її точок лежать на одній прямій – на прямій перетину площин α і P_V. У випадку, коли площина α перпендикулярна площині P_H, перспективи основ усіх її точок лежать на одній прямій.

Площина може бути задана на картині P_V різними способами: або двома її слідами (картинним слідом і перспективою предметного сліду), або трьома точками цієї площини, які не лежать на одній прямій, або двома прямими, що перетинаються, або двома паралельними прямими.

Використання розглянутих понять проілюструємо на прикладах.

Задача 4.4. Площина α проходить через точку (B, B_1) і через пряму (a, a_1). Побудувати вісь, лінію сходу і слід площини α.

Розв'язання. На прямій (a, a_1) беремо довільну точку (A, A_1); пряма (b, b_1), яку проводимо через точки (B, B_1) і (A, A_1), належать площині α ($b = AB$, $b_1 = A_1B_1$). У перспективно-афінному перетворенні S_α картинної площини, відповідному площині α, образ $a_1 = S_\alpha(a)$ прямої a перетинає її в точці, яка лежить на осі перетворення, аналогічне справедливо і для прямої b. Шуканою віссю m площини α є пряма p, що проходить через точки перетину прямих a і a_1, b і b_1 (рис. 3.135).

Лінія горизонту h є перспективою невласної прямої площини P_H, тому точка $R = h \times m$ є перспективою невласної точки прямої m' і належить лінії сходу p площини α. Побудувавши точку сходу Q прямої a (див. задачу 4.1), знайдемо ще одну точку лінії сходу p.

Отже, шуканою лінією сходу площини α є пряма $p = QR$.

Будь-яка точка основи XX_1 картини збігається зі своєю перспективою, тому точка $L = L' = m \times XX_1$ лежить на прямій m' перетину площин P_H і α і належить сліду $q = \alpha \times P_V$. Слід і лінія сходу паралельні між собою, тому, щоб побудувати слід площини α, треба з точки L провести пряму q, паралельну лінії сходу QR.

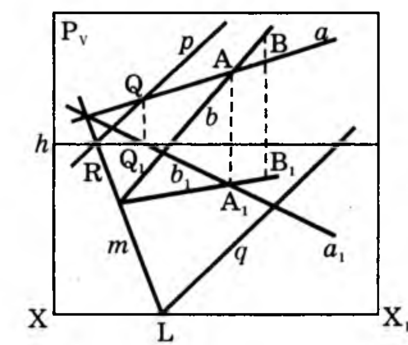


Рис. 3.135

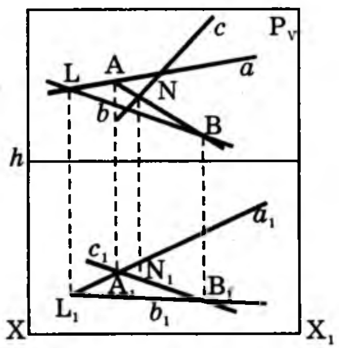


Рис. 3.136

Задача 4.5. Площина α задана прямими (a, a_1), (b, b_1), що перетинаються в точці (L, L_1). Побудувати точку перетину прямої (c, c_1) з площиною α.

Розв'язання. Через дану пряму (c, c_1) проводимо довільну площину β і знаходимо точку перетину прямої (c, c_1) з прямою n' перетину площин α і β. Для спрощення побудови площину β зручно взяти перпендикулярною до предметної площини $P_н$, при цьому перспектива основи прямої n' збігається з прямою c_1 (рис. 3.136).

Далі будуємо точки (A, A_1), (B, B_1), в яких пряма n' перетинає прямі (a, a_1) і (b, b_1): $A_1 = a_1 \times c_1$, $B_1 = b_1 \times c_1$. Пряма n' – це пряма (AB, c_1). Позначимо через N точку перетину AB з c, тоді точка (N, N_1) буде точкою перетину прямої (c, c_1) з площиною α.

§ 32. Метричні задачі

Розглянемо декілька простих метричних задач, тобто задач на знаходження відстані між точками і кутів між прямими, заданими їх перспективним зображенням.

Задача 4.6. Знайти натуральну величину відрізка, який лежить у предметній площині і паралельний картинній площині.

Розв'язання. Перспектива AB відрізка $A'B'$ у такому розміщенні паралельна лінії горизонту h, бо точка сходу є невласною точкою прямої h. Відрізки прямих, які лежать у картинній площині P_V, збігаються з своїми перспективами, тому їх перспектива є натуральною величиною відрізка. Тоді для знаходження натуральної величини відрізка, паралельного картинній площині, достатньо «перемістити» цей відрізок паралельно самому собі до його суміщення з картинною площиною. Це «переміщення» на картинній площині можна виконати таким способом. Нехай A і B перспективи даних точок (рис. 3.137). Побудуємо перспективи двох довільних паралельних прямих, що проходять через ці точки і лежать у предметній площині; їх перспективи будуть мати спільну точку сходу C на лінії горизонту h. Продовживши ці прямі до перетину в точках $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ з основою картини, дістанемо відрізок $\overline{A}'\overline{B}'$, який має натуральну довжину даного відрізка.

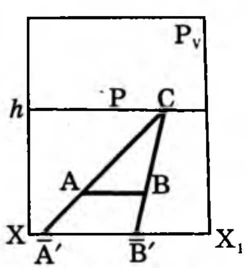


Рис. 3.137

Задача 4.7. Дана перспектива AB відрізка прямої, яка лежить у предметній площині $P_н$ і перпендикулярна до картинної площини. Знайти натуральну величину цього відрізка.

Розв'язання. Точка сходу даної прямої у цьому випадку збігається з головною точкою V картини (бо $A'B' \parallel SV$, рис. 3.138). Нехай E_1 – одна з дистанційних точок ($V_1S_1 = S'V$). Проведемо прямі E_1A і E_1B до перетину з основою картини в точках $\overline{A}'$ і $\overline{B}'$. Довжина відрізка $\overline{A}'\overline{B}'$ дорівнює шуканій довжині.

Дійсно, проведемо AF паралельно h, $D = AF \times E_1B$. Тоді в натурі $A'B' \perp A'D'$ (бо $A'B' \perp XX_1$, $A'D' \parallel XX_1$). $\angle E_1BV = \angle E_1S'V = 45^\circ$. Отже, трикутник ABD в натурі – прямокутний рівнобедрений, $A'B' = A'D'$. Але $A'D' = \overline{A}'\overline{B}'$, тому $A'B' = \overline{A}'\overline{B}'$.

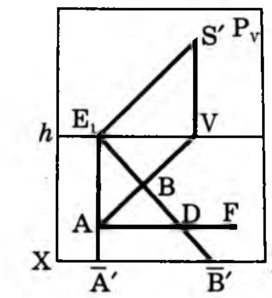


Рис. 3.138

Задача 4.8. Визначити натуральну величину кута між двома прямими a' і b', які лежать у предметній площині.

Розв'язання. Нехай на предметній площині $P_н$ прямі a' і b' перетинаються в точці A' під деяким кутом α, величину якого треба визначити за перспективою a і b його сторін (рис. 3.139).

Якщо через точку стояння S' провести у просторі прямі, паралельні сторонам a' і b' даного кута A', то вони перетнуть картинну площину P_V в точках R і Q сходу сторін кута (на лінії горизонту h): $\angle RS'Q = \angle A'$ (рис. 3.139а). Повернемо кут $RS'Q$ у просторі навколо прямої RQ так, щоб точка S' перейшла в точку S на картинній площині, при цьому $SV \perp h$. Знаючи головну відстань $S'V$, можна побудувати точку S. Тоді кут RSQ має натуральну величину даного кута A'.

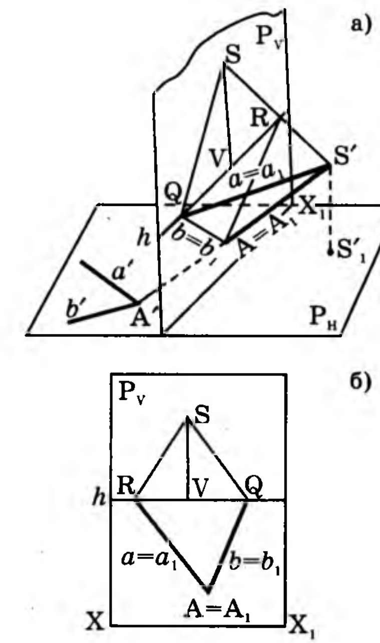


Рис. 3.139

Вправи

4.9. Побудувати перспективу a прямої a' і перспективу a_1 її основи, якщо дано сліди і точка сходу прямої a'.

4.10. Встановити взаємне розміщення трьох прямих a', b', c', заданих їх перспективами на картинній площині.

4.11. Площина R задана трьома точками (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1). Побудувати перспективу точки M', яка лежить у цій площині, якщо задана перспектива її основи M_1.

4.12. Побудувати точку перетину даної прямої (a, a_1) з даною площиною.

4.13. Площину задано трьома точками (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1). Побудувати її вісь, лінію сходу і слід.

4.14. Через точку (M, M_1) провести площину, паралельну площині, заданій трьома точками (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1).

4.15. Знайти натуральну величину відрізка довільного напряму, який лежить у предметній площині і заданий своєю перспективою AB.

4.16. Через дану в предметній площині точку $(A, A_1 = A)$ провести пряму, яка з даною прямою $(a, a_1 = a)$ утворює кут 45°.

Розділ **5**

Метод основної площини

§ 33. Основні поняття методу основної площини

У практичній роботі викладач вищого навчального закладу або вчитель математики в школі не мають можливості в повній мірі використати будь-який з розглянутих методів зображення просторових фігур, оскільки для цього потрібно багато часу на виконання спеціальних побудов, пов'язаних з певним способом проектування, які до того ж незрозумілі для учнів.

З метою наближення методів зображення просторових фігур до практичного використання в навчальному процесі російський геометр *М.Ф. Четверухін* розробив різновид аксонометричного проектування, який дістав назву *методу основної площини*. Суть цього методу полягає в тому, що в просторі фіксується деяка площина α', яка називається *основною площиною*, і вибирається напрям паралельного проектування, за яким точки A', B', C', ... простору проектуються на основну площину α'.

На площині α' одержимо проекції A'_1, B'_1, C'_1, ... Це проектування називається *внутрішнім*.

Потім вибирається площина зображень α, на яку в заданому напрямі проектується площина α', точки A', B', C', ... та їх проекції A'_1, B'_1, C'_1, ..., разом з проектуючими прямими A'_1A', B'_1B', C'_1C', ... Це проектування називається *зовнішнім* (рис. 3.140).

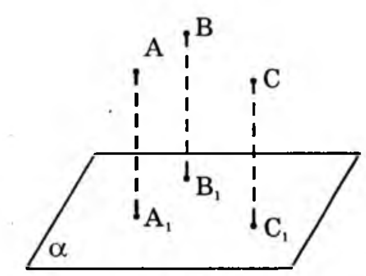


Рис. 3.140

Отже, у площині α одержуємо зображення A, B, C, точок простору і A_1, B_1, C_1 їх проекцій. Проекції A_1, B_1, C_1 називаються основами точок A, B, C. Як і в інших методах проектування, положення точки визначається заданням двох її проекцій.

Оскільки виконувалося паралельне проектування, то проектуючі прямі AA_1, BB_1, CC_1 паралельні між собою, а також зберігаються всі інваріанти паралельного проектування: інцидентність, колінеарність, паралельність і просте відношення трьох точок прямої.

§ 34. Основні позиційні задачі

Задача 5.1. Побудувати точку перетину прямої AB з основною площиною α.

Розв'язання. Точкою перетину прямої AB з площиною α (слідом прямої AB в площині α) є точка O перетину прямої AB з її основою A_1B_1 (рис. 3.141).

Задача 5.2. Побудувати слід площини ABC в основній площині α.

Розв'язання. Слідом площини ABC у площині α називається лінія перетину цих площин. Оскільки лінією перетину двох площин є пряма, то для знаходження сліду площини ABC досить знайти дві точки, які належать шуканому сліду. Такими точками є сліди прямих AB і AC у площині α, це точки $O_1 = AB \times A_1B_1$ і $O_2 = AC \times A_1C_1$ (рис. 3.142). Отже, слідом площини ABC у площині α є пряма O_1O_2.

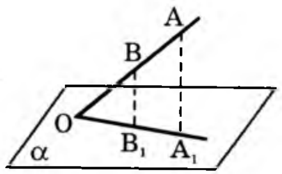


Рис. 3.141

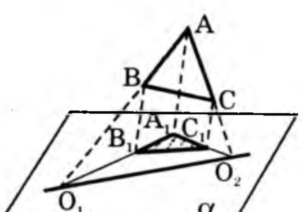


Рис. 3.142

Задача 5.3. Побудувати лінію перетину площин ABC і MNP.

Розв'язання. Лінією перетину двох площин є пряма, тому для її побудови треба знайти дві точки, що їй належать. Для їх знаходження в основній площині α проведемо через точку A_1 пряму, яка перетне сторони B_1C_1, M_1P_1, M_1N_1 відповідно в точках L_1, K_1, S_1.

Ці три точки є основами точок L, K, S, що лежать на прямих BC, MP, MN (рис. 3.143). Прямі AL і KS перетинаються в точці T, оскільки вони лежать в одній проектуючій площині, яка визначається прямими AA_1, SS_1. Точка T належить площині ABC, оскільки вона лежить на прямій AL площини ABC. Але точка T належить і площині MNP, оскільки вона лежить на прямій KS площини MNP. Отже, точка T належить лінії перетину площин ABC і MNP.

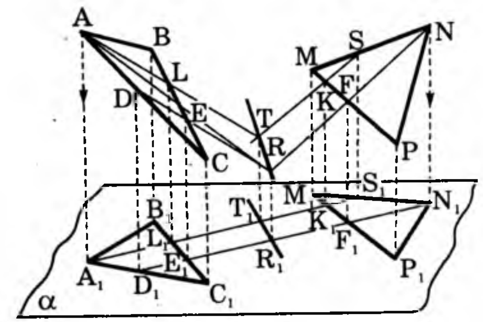


Рис. 3.143

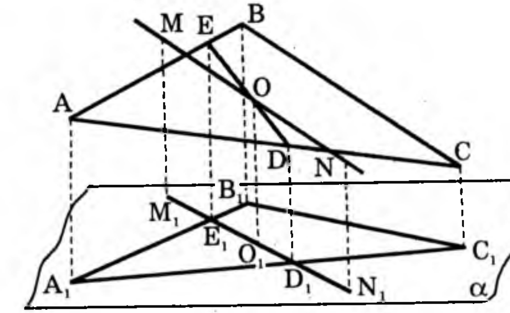


Рис. 3.144

Друга точка R перетину площини ABC і MNP будується аналогічно: побудова розпочинається з проведення прямої, що проходить через точку N_1 і перетинає прямі M_1P_1, B_1C_1, A_1C_1 в точках F_1, E_1, D_1 відповідно.

Пряма TR — шукана пряма перетину площин ABC і MNP, її основою є пряма T_1R_1, де точка T_1 належить прямій K_1S_1, а точка R_1 – прямій D_1E_1.

Задача 5.4. Побудувати точку перетину прямої MN з площиною ABC.

Розв'язання. Нехай $D_1 = A_1C_1 \times M_1N_1$ і $E_1 = A_1B_1 \times M_1N_1$ – основи точок D і E, які лежать на прямих AC і AB відповідно.

Прямі MN і DE лежать в одній проектуючій площині MM_1N_1N, тому перетинаються в точці O, яка й є шуканою точкою перетину прямої MN з площиною ABC. Точка O_1 – основа точки O лежить на прямій M_1N_1 (рис 3.144).

Наслідок. Основні позиційні задачі мають єдиний розв'язок, оскільки на рисунку зображень задано відповідні елементи і їх основи, що є необхідною і достатньою умовою.

§ 35. Зображення просторових фігур

Зображення призм, пірамід, конусів і циліндрів, якими користуються в шкільному і вузівському навчальному процесі, можна розглядати як зображення, побудовані за методом основної площини при умові позиційної повноти.

35.1. Зображення призми

При побудові зображення призми за основну площину беруть площину нижньої основи призми, а напрямом внутрішнього проектування – напрям бічних ребер призми; вершини нижньої основи є основами вершин верхньої основи. Побудову зображення призми розпочинають з побудови зображення її нижньої основи в основній площині, потім через вершини многокутника проводять вертикальні прямі і на кожній з них відкладають рівні між собою відрізки – бічні ребра.

Кінці цих відрізків – вершини верхньої основи, сполучивши їх послідовно відрізками, одержимо зображення призми. На рис. 3.145 зображено правильну шестикутну призму.

Для будь-якої точки M верхньої основи призми основа M_1 будується так, як показано на рис. 3.145. Кожна точка N бічної грані має певну основу N_1, яка лежить на відповідній основі грані. Отже, кожний елемент зображення має свою основу, тому зображення повне.

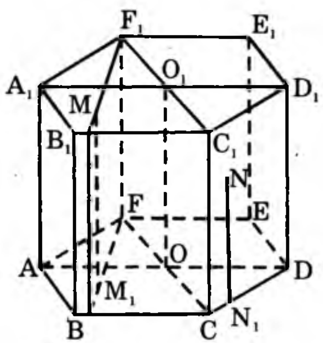


Рис. 3.145

35.2. Зображення піраміди

Основною площиною при побудові зображення піраміди є площина основи піраміди, напрямом внутрішнього проектування – напрям бічного ребра.

Для побудови зображення правильної піраміди спочатку будуємо зображення многокутника, що лежить в основі піраміди, потім знаходимо точку O – центр основи, яка є основою висоти піраміди. Через точку O проводимо вертикальну пряму, вибираємо на ній довільну точку S – зображення вершини піраміди. Точку S сполучаємо з вершинами основи і одержуємо зображення піраміди.

На рис. 3.146 маємо зображення правильної п'ятикутної піраміди. Зображення вершин основи піраміди збігаються з їх основами ($A = A_1$ ...). Основою M_1 точки M, яка належить ребру SB, є точка перетину ребра AB з прямою MM_1, паралельною ребру SA, взятого за напрям внутрішнього проектування. Основа N_1 точки N, взятої на бічній грані BSC, лежить на лінії перетину основної площини з площиною SAN: $N_1 = AP \times MN_1$, де $NN_1 \parallel SA$. Отже, кожний елемент такого зображення піраміди має свою основу, тому зображення повне.

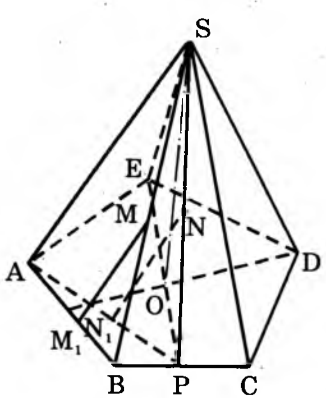


Рис. 3.146

Зауважимо, що при розв'язуванні задач, пов'язаних з пірамідою, зручніше внутрішнім проектуванням взяти центральне проектування з центром S.

35.3. Зображення циліндра

При побудові зображення кругового циліндра основною площиною є площина його нижньої основи. Побудова зображення прямого кругового циліндра не викликає труднощів. Спочатку одним з відомих способів (або користуючись шаблоном) будуємо в основній площині α еліпс, що є зображенням нижньої основи циліндра (рис. 3.147).

Через точку O – центр нижньої основи – проведемо перпендикуляр до площини α і на ньому віді кладемо відрізок OO_1, що є зображенням висоти циліндра. Точка O_1 є центром верхньої основи циліндра; будуємо еліпс з центром O_1, який дорівнює еліпсу нижньої основи і однаково з ним розміщений у площині, паралельній площині α.

Далі проводимо спільні дотичні до побудованих основ циліндра через кінці великих осей еліпсів – це AA_1 і BB_1, при цьому $AA_1 \parallel BB_1 \parallel \parallel OO_1$. Ці спільні дотичні є зображенням контурних твірних циліндра (контурні – ті, що обмежують видиму частину циліндра). Звертаємо увагу на те, що на зображенні циліндра відрізки AB і A_1B_1, які сполучають пари точок дотику основ, проходять відповідно через точки O і O_1, тобто AB і A_1B_1 є великими осями основ циліндра. ABB_1A_1 – прямокутник, осьовий переріз циліндра площиною.

Основою M_1 довільної точки M, що лежить на еліпсі верхньої основи, є точка перетину еліпса нижньої основи з прямою MM_1, паралельною контурній твірній AA_1, яка визначає напрям внутрішнього паралельного проектування. Основою довільної точки N верхньої основи буде точка N_1 нижньої основи, а довільної точки P поверхні циліндра – точка P_1 на еліпсі нижньої основи, як показано на рис. 3.147.

Отже, кожний елемент такого зображення циліндра має свою основу, тому зображення циліндра повне.

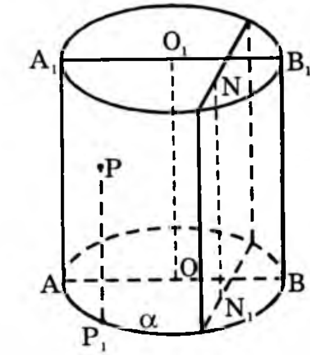


Рис. 3.147

35.4. Зображення конуса

Основною площиною при зображенні кругового конуса є площина α основи конуса. Спочатку у площині α будуємо еліпс, який є зображенням основи конуса (рис. 3.148).

Через центр O основи проводимо пряму, перпендикулярну до площини α. На цій прямій з довільної точки S, яка береться як зображення вершини конуса, проводимо дві дотичні до еліпса, вони зображують контурні твірні конуса. Точки дотику M і N відділяють видиму частину кола основи від невидимої.

Хорда MN не може проходити через точку O, тому що тоді $MN = AB$ була б великою віссю еліпса, а із зображення циліндра маємо, що при $MN = AB$ було б $AS \parallel BS$, що для конуса неможливо. *Це перша помилка*: інколи вважають, що MN проходить через центр основи і що переріз MSN є осьовим перерізом конуса.

З нею пов'язана *друга помилка*: інколи вважають, що круговий конус можна розглядати як фігуру обертання прямокутного трикутника SOA навколо катета SO з радіусом основи OA. Але це неправильно, оскільки точка A (як і точка B) не лежить на контурній твірній конуса. Тому при розв'язуванні задач з конусом за осьовий переріз потрібно брати фронтальну проекцію не з основою AB, а з іншим діаметром еліпса, наприклад діаметром A_1B_1, тому що при досить стиснутих еліпсах по малій осі важко розрізнити точки A і M, B і N.

Третя помилка, якої припускаються при розв'язуванні задач, полягає в тому, що кут MSN між контурними твірними інколи беруть за кут в осьовому перерізі конуса при вершині. Насправді площина MSN не проходить через вісь конуса і не є осьовим перерізом конуса.

При паралельному проектуванні у напрямі твірної SM будь-яка точка L поверхні конуса має основу L_1 на основі конуса (рис. 3.148).

При розв'язуванні задач, пов'язаних з конусом, зручніше внутрішнім проектуванням взяти центральне проектування з центром S.

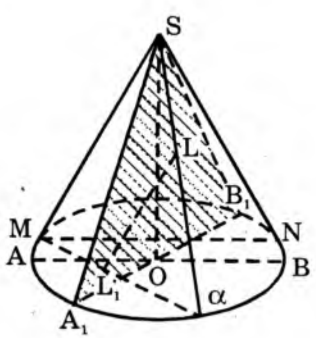


Рис. 3.148

35.5. Зображення зрізаного конуса

Основи прямого зрізаного конуса лежать у паралельних площинах, тому на площині зображаються подібними еліпсами. Для правильної побудови зображення зрізаного конуса зручно визначити осі еліпса у верхній основі. Нехай маємо зображення конуса з віссю SO (рис. 3.149). Через точку O_1, довільно взяту на осі SO, проводимо пряму A_1B_1, паралельну прямій AB. Потім проводимо хорду BC нижньої основи і $B_1C_1 \parallel BC$. Точка C_1 і буде одним кінцем малої осі еліпса – верхньої основи. За знайденими осями будуємо еліпс – верхню основу.

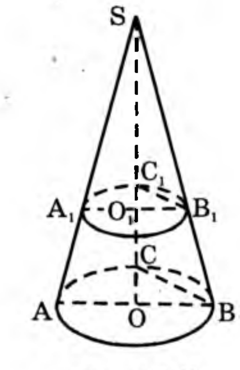


Рис. 3.149

35.6. Зображення кулі

Відомо, що обрисом кулі в ортогональній проекції є коло (рис. 3.150). Але одне контурне коло не створює враження кулі. Тому, крім обрису, на зображенні креслять зображення кола перерізу кулі діаметральною горизонтальною площиною. Це коло перерізу називають *екватором*. Часто на зображенні кулі позначають південний полюс S і північний N – точки перетину кулі з вертикальною віссю кулі. Полюси S і N лежатимуть на обрисі кулі тільки тоді, коли площина екватора перпендикулярна до площини рисунка. Причому екватор зображується відрізком прямої, який збігається з горизонтальним діаметром кулі. Але таке зображення незручне для розв'язування задач. Практично площина екватора нахилена до площини зображення під певним гострим кутом, тоді екватор зображується у вигляді еліпса, а полюси S і N не лежатимуть на обрисі, а будуть внутрішніми точками кола обрису. Нагадаємо декілька способів побудови зображення полюсів.

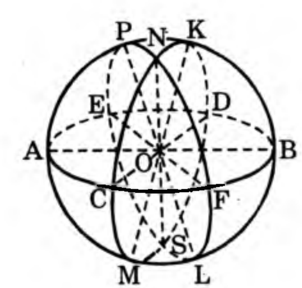


Рис. 3.150

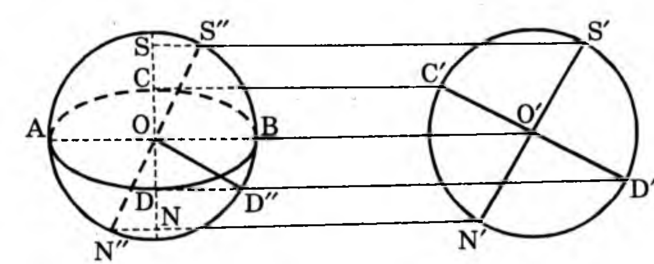


Рис. 3.151

1-й спосіб. Розглянемо проекцію екватора з діаметром $C'D'$ на профільну площину. Проекцією осі буде діаметр $N'S' \perp C'D'$ (рис. 3.151).

На фронтальну площину екватор спроектується в еліпс, більша вісь якого AB дорівнює діаметру обрису кулі, а мала – CD – проекція $C'D'$. Проекціями полюсів будуть точки S і N, які лежать на вісі: $NS \perp AB$. Отже, положення полюсів і величина малої осі екватора залежить від кута нахилу площини екватора до горизонтальної площини проекцій. Іншими словами, положення полюсів повністю визначається заданням малої осі еліпса – екватора.

2-й спосіб. Щоб побудувати зображення полюсів, маючи зображення екватора, можна з точки D (або C) – кінця малої осі еліпса провести $DD'' \perp CD$ до перетину з обрисом у точці D''. Потім точку D'' сполучити з точкою O. Через точку O проводимо $ON'' \perp OD''$, $ON'' = OS''$. Із точок N'' і S'' проводимо $N''N \parallel DD''$ і $S''S \parallel DD''$. Точки N і S – зображення полюсів (рис. 3.151). Практично побудову полюсів виконують простіше: $\Delta ODD'' = \Delta N''NO$ і $ON = OS = DD''$. Тому проводять $DD'' \perp CD$, $DD'' \parallel AB$ і від точки O відкладають $ON = OS = DD''$.

3-й спосіб. Із кінця малої осі точки C, як із центра, радіусом, що дорівнює радіусу обрису кулі, робимо засічку на діаметрі AB – точку D. При цьому $OD = OS = ON$, де S і N – полюси (рис. 3.152). Доведення таке, як і в попередньому способі.

Полюси можна одержати також як точки перетину ще двох діаметральних перерізів кулі, зображення яких мають попарно спільні спряжені діаметри (рис. 3.150).

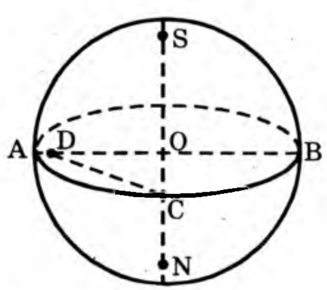


Рис. 3.152

Для побудови взаємно перпендикулярних меридіанів проводимо два взаємно спряжені діаметри CD і EF еліпса-екватора. Далі побудуємо еліпси на спряжених діаметрах CD і NS, EF і NS. Ці еліпси дотикатимуться обриса кулі в точках P, K, L, M і є взаємно перпендикулярними меридіанами (рис. 3.150). Прямі CD, EF і NS є зображенням взаємно перпендикулярних прямих, тому їх можна вважати за зображення координатних осей прямокутної декартової системи координат. Якщо прямі OC, OF і ON розмістити під кутом 120° попарно, то матимемо прямокутну ізометричну проекцію, яку часто застосовують для зображення просторових фігур у геометрії, технічних деталей та вузлів у кресленні.

§ 36. Переріз многогранників площинами

Перерізом многогранника площиною називають *многокутник*, вершинами якого є точки перетину ребер многогранника з цією площиною.

Існують різні способи побудови перерізу многогранника площиною. Розглянемо найелементарніші з них.

36.1. Метод поділу *n*-кутної призми (піраміди) на трикутні

Із даної n-кутної призми (піраміди) виділяється та трикутна, на ребрах якої лежать точки, що визначають площину перерізу. Будується переріз цієї частини призми, а потім переріз інших трикутних призм, які мають спільні частини з виділеною трикутною призмою (пірамідою).

Задача 5.5. Дано п'ятикутну призму $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ і площину, визначену точками $P \in AA_1$, $Q \in BB_1$, $R \in EE_1$. Побудувати переріз призми площиною PQR.

Розв'язання. Виділяємо трикутну призму $ABEA_1B_1E_1$, на ребрах якої дано точки P, Q, R, що визначають площину перерізу (рис. 3.153).

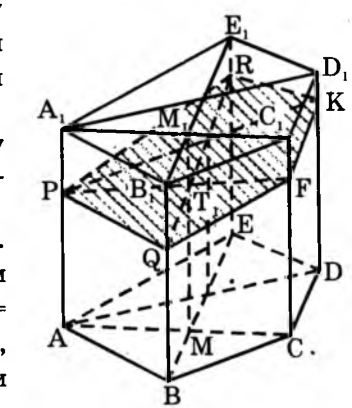


Рис. 3.153

Трикутник PQR – переріз цієї трикутної призми. З виділеною призмою мають спільні частини призми $ABCA_1B_1C_1$ і $ADEA_1D_1E_1$. Будуємо відрізок $MM_1 = BEE_1B_1 \times ACC_1A_1$, точки $T_1 = QR \times MM_1$, $F = PT_1 \times CC_1$. Трикутник PQF – переріз призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною PQR. Точку K будуємо аналогічно побудові точки F. П'ятикутник $PQFKR$ – шуканий переріз.

36.2. Метод слідів січних площин

Суть методу слідів полягає в тому, що будується слід площини перерізу на площині основи або на площині бічної грані многогранника, яким і буде лінія перерізу цих площин. Потім знаходять точки перетину цього сліду з площинами бічних граней і діагональних перерізів многогранника. Ці точки разом із даними точками площини перерізу визначають прямі, яким належать сторони шуканого перерізу. Розглянемо застосування методу слідів до побудови перерізів многогранників площиною.

Задача 5.6. Побудувати переріз трикутної піраміди площиною, заданою її слідом на площині основи піраміди, який не перетинає сторін основи, і точкою на бічній грані піраміди.

Розв'язання. На рис. 3.154 дано зображення піраміди $SABC$, слід MN площини перерізу на площині основи ABC і точку D на грані BSC. Площина SAD має спільну точку E_1 зі слідом MN, а тому і спільну пряму DE_1 з площиною перерізу DMN. Пряма DE_1 перетне сторону SA в якійсь точці K, яка належатиме площині перерізу. Знайдемо точку $F_1 = MN \times AC$. Тоді пряма KF_1 перетне бічне ребро SC в точці F, а пряма FD перетне ребро SB в точці L. KFL – шуканий переріз.

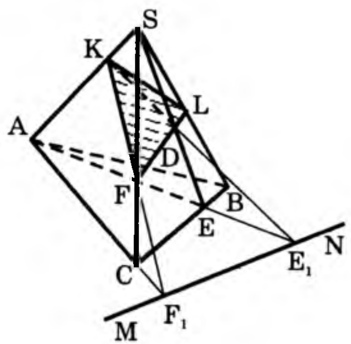


Рис. 3.154

Задача 5.7. Дано чотирикутну призму і три точки на різних бічних ребрах. Побудувати переріз призми площиною, яка проходить через дані на ребрах точки.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – дана чотирикутна призма. M, N, K – дані на її ребрах AA_1, BB_1, CC_1 точки (рис. 3.155). Побудова перерізу призми площиною MNK зводиться до побудови точки перетину ребра DD_1 з площиною перерізу. Використаємо метод слідів: знайдемо слід XY площини MNK у площині $ABCD$ основи призми: $X = AB \times MN$, $Y = BC \times NK$.

Побудуємо точку $Z = XY \times DC$, тоді пряма ZK перетне ребро DD_1 у точці L. Чотирикутник $MNKL$ – шуканий переріз.

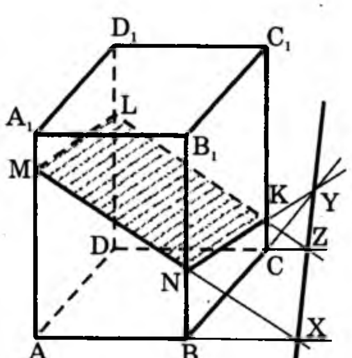


Рис. 3.155

Задача 5.8. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, заданою трьома точками, розміщеними на трьох бічних ребрах призми.

Розв'язання. Нехай дано зображення п'ятикутної призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ і точки K, M, N, які лежать на ребрах BB_1, DD_1 і FF_1 відповідно (рис. 3.156). Щоб

побудувати слід площини KMN у площині основи $ABCDF$ призми, треба знайти дві точки цього сліду. Такими точками будуть точки $X = MN \times FD$ (лежать в одній площині грані FDD_1F_1) і $Y = KN \times FB$ (лежать в одній площині BFF_1B_1).

Пряма XY – слід площини KMN перерізу в площині основи призми. Далі знайдемо точку $Z = XY \times AB$ на сліді, тоді пряма ZK перетне ребро AA_1 у точці P, яка належить шуканому перерізу. Аналогічно знайдемо точку $T = XY \times BC$ таку, що пряма KT перетне ребро CC_1 у точці L. Сполучивши послідовно точки K, L, M, N, P відрізками, одержимо переріз $KLMNP$ призми площиною, заданою точками K, M, N.

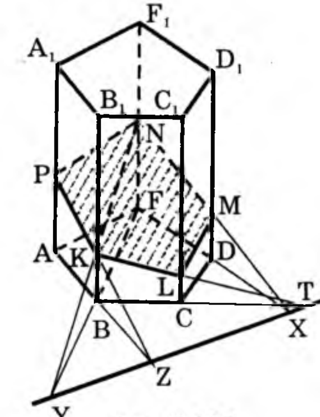


Рис. 3.156

Задача 5.9. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, заданою трьома точками, дві з яких лежать на бічних гранях, а третя – на бічному ребрі.

Розв'язання. Дано зображення п'ятикутної призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ і три точки площини перерізу $M \in FF_1$, $N \in CDD_1C_1$, $K \in ABB_1A_1$ (рис. 3.157). Для знаходження точок перетину січної площини MNK з ребрами призми використаємо метод слідів і паралельне внутрішнє проектування в напрямі бічних ребер призми. Проекціями даних точок M, N, K у площині основи будуть точки F, $N_1 \in DC$ і $K_1 \in AB$. Тоді $X = MK \times FK_1$, $Y = MN \times FN_1$, пряма XY – слід площини перерізу в площині основи призми.

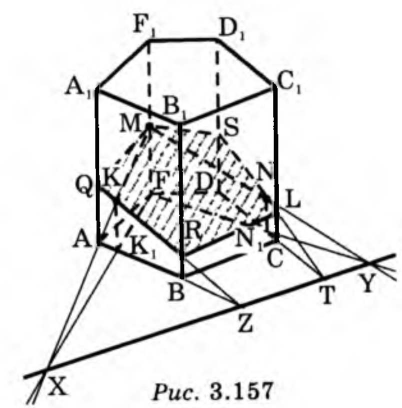


Рис. 3.157

Побудуємо точку $Z = XY \times AB$, тоді $Q = KZ \times AA_1$ і $R = KZ \times BB_1$. Аналогічно, побудувавши точку $T = XY \times DC$, одержимо точки $L = TN \times CC_1$ і $S = TN \times DD_1$.

П'ятикутник $MQRLS$ – шуканий переріз.

Задача 5.10. Побудувати переріз шестикутної призми площиною, заданою слідом MN, який перетинає дві суміжні сторони нижньої основи, і точкою K на стороні верхньої основи.

Розв'язання. Дано зображення шестикутної призми $BDCLEPB_1D_1C_1L_1E_1P_1$, точку K на стороні PE верхньої основи і слід

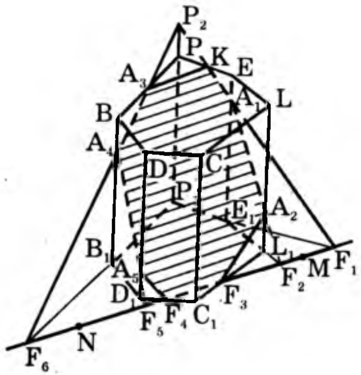


Рис. 3.158

MN площини перерізу на площині нижньої основи призми (рис. 3.158).

Знаходимо точки перетину січної площини з ребрами призми:

1) точку $F_1 = P_1E_1 \times MN$, тоді $A_1 = F_1K \times EE_1$ (у площині грані PEE_1P_1);
2) точку $F_2 = E_1L_1 \times MN$, тоді $A_2 = F_2A_1 \times LL_1$ (у грані ELL_1E_1);
3) точку $F_3 = L_1C_1 \times MN$ (на грані CLL_1C_1);
4) точку $F_4 = D_1C_1 \times MN$ (на грані DCC_1D_1);
5) точку $F_5 = B_1D_1 \times MN$, точку $F_6 = P_1B_1 \times MN$, точку $P_2 = P_1P \times F_1K$. Тоді пряма F_6P_2, яка лежить у грані BPP_1B_1, перетне ребро BP у точці A_3, а ребро BB_1 – у точці A_4. Точки A_3 і A_4 належать площині перерізу;
6) точку $A_5 = DD_1 \times A_4F_5$ (у грані BDD_1B_1). Побудовані точки A_1, A_2, F_3, F_4, A_5, A_4, A_3 разом з даною точкою K визначають шуканий переріз $KA_1A_2F_3F_4A_5A_4A_3$ даної призми.

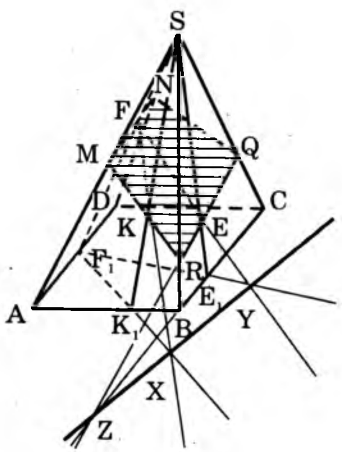


Рис. 3.159

Задача 5.11. Побудувати переріз чотирикутної піраміди площиною, заданою трьома точками на різних бічних гранях піраміди.

Розв'язання. Дано зображення чотирикутної піраміди $SABCD$ і точок E, F, K на бічних гранях SBC, SAD, SAB відповідно. Розв'язання задачі зводиться до знаходження точки перетину січної площини EFK з одним із ребер піраміди. Використаємо метод слідів: побудуємо слід XY січної площини у площині основи піраміди: $X = FK \times F_1K_1$, $Y = FE \times \times F_1E_1$, де E_1, F_1, K_1 – центральні проекції точок F, K, E у внутрішньому проектуванні з центра S на площину основи піраміди.

Для знаходження точки Q на ребрі SC проведемо пряму BC до перетину зі слідом XY у точці Z, тоді $Q = ZE \times SC$ і $R = ZE \times SB$. Далі проводимо пряму RK до перетину з ребром SA в точці M, пряму MF до перетину з ребром SD в точці N (рис. 3.159). Чотирикутник $QRMN$ – шуканий переріз.

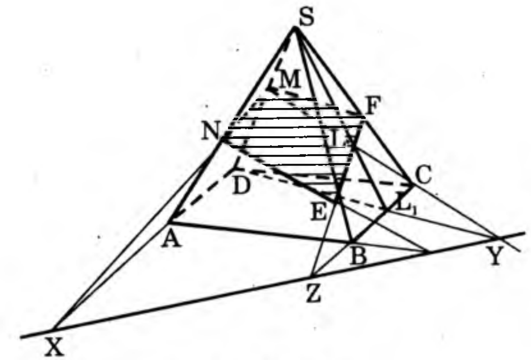


Рис. 3.160

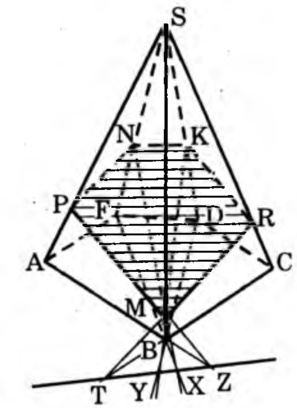


Рис. 3.161

Задача 5.12. Побудувати переріз чотирикутної піраміди площиною, заданою двома точками на бічних ребрах і точкою на грані, яка не містить вказаних ребер.

Розв'язання. На рис. 3.160 дано зображення чотирикутної піраміди $SABCD$, точки M, N – на ребрах SD і SA, точка L – на грані SBC. Знайдемо слід XY площини перерізу MNL на площині основи піраміди: $X = AD \times MN$, $Y = ML \times DL_1$, де L_1 – центральна проекція точки L на стороні BC.

Далі будуємо точку $Z = XY \times CB$, тоді пряма ZL перетне грань SBC по відрізку EF ($E \in SB$, $F \in SC$). Чотирикутник $MNEF$ – шуканий переріз.

Задача 5.13. Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, яка проходить через три точки, дані на бічних ребрах.

Розв'язання. Нехай $SABCDF$ – зображення даної п'ятикутної піраміди і дано точки $M \in SB$, $N \in SF$, $K \in SD$ (рис. 3.161).

Побудову перерізу піраміди площиною MNK виконаємо методом слідів. Знайдемо точки X і Y сліду площини перерізу на площині основи: $X = MN \times FB$, $Y = MK \times DB$, тут точки F, D, B розглядаємо як центральні проекції даних точок N, K, M на площині основи (центр проектування – точка S).

Далі будуємо точку $Z = AB \times XY$, тоді пряма ZM перетне ребро SA в точці P перерізу, а пряма TM, де $T = XY \times CB$, перетне ребро SC в точці R перерізу. Сполучивши послідовно точки перетину, одержимо п'ятикутник $MPNKR$ – шуканий.

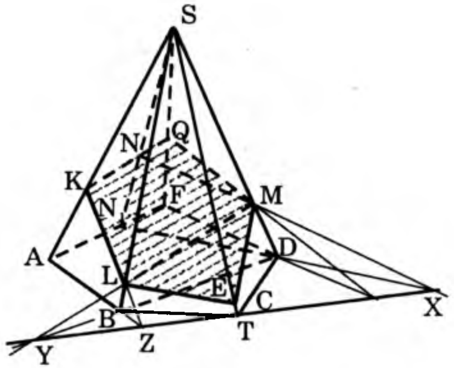


Рис. 3.162

Задача 5.14. Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, заданою трьома точками, дві з яких лежать на бічних ребрах, а одна – на грані піраміди.

Розв'язання. Дано зображення п'ятикутної піраміди $SABCDF$ і точок $L \in SB$, $M \in SD$ і $N \in SAF$ (рис. 3.162).

Побудуємо спочатку слід XY площини перерізу LMN у площині основи піраміди: $X = NM \times N_1D$ (у площині SNM N_1 і D – центральні проекції точок N і M відповідно), $Y = ML \times DB$ (у площині SLM, точки B і D – центральні проекції точок L і M відповідно, S – центр проектування). Далі знайдемо точки перетину січної площини з бічними ребрами піраміди:

1) $K = ZL \times AS$, $K \in SA$; де $Z = XY \times AB$;
2) $Q = KN \times SF$, $Q \in SF$;
3) $E = SC \times MT$, $E \in SC$, де $T = XY \times DC$.

$LKQME$ – шуканий переріз.

36.3. Метод внутрішнього проектування

Метод внутрішнього проектування ґрунтується на тому, що і при паралельному, і при центральному проектуванні інцидентність відповідних елементів зберігається. При побудові перерізів призм внутрішнім проектуванням беруть паралельне проектування у напрямі бічних ребер призми, а у випадку з пірамідами – центральне проектування з центром у вершині піраміди.

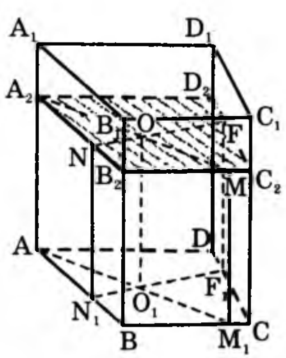


Рис. 3.163

Задача 5.15. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, дані на різних гранях.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – зображення призми, $N \in ABB_1A_1$, $M \in BB_1C_1C$, $F \in CC_1D_1D$ – дані точки площини перерізу (рис. 3.163).

Побудова перерізу передбачає знаходження точки перетину одного з бічних ребер з площиною перерізу. Використаємо метод внутрішнього проектуванння у напрямі бічних ребер призми. Знайдемо точку перерізу на ребрі AA_1. Точки $M_1 \in BC$, $N_1 \in AB$, $F_1 \in CD$ – паралельні проекції даних точок у площині нижньої основи призми. Побудуємо точку $O_1 = N_1F_1 \times AM_1$ і її прообраз $O = NF \times OO_1$, де $OO_1 \parallel AA_1$. Тоді пряма MO перетне ребро AA_1 у точці A_2, яка належить площині перерізу. Далі знайдемо точку $B_2 = A_2N \times BB_1$, точку $C_2 = B_2M \times CC_1$ і точку $D_2 = C_2F \times DD_1$.

Чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$ – шуканий переріз.

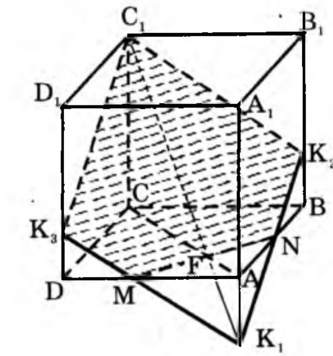


Рис. 3.164

Задача 5.16. Побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через вершину C_1, точку N на ребрі AB і M на ребрі AD.

Розв'язання. Використаємо внутрішнє проектування паралельно бічним ребрам куба на площину нижньої основи: проекцією точки C_1 буде точка C, точки M і N збігаються зі своїми проекціями (рис. 3.164).

Знайдемо точку перетину площини MNC_1 з проектуючою прямою AA_1: $F = MN \times CA$, тоді $K_1 = AA_1 \times C_1F$. Прямі K_1N і K_1M перетинають ребра куба BB_1 і DD_1 у точках K_2 і K_3 відповідно. Многокутник $C_1K_2NMK_3$ – шуканий переріз.

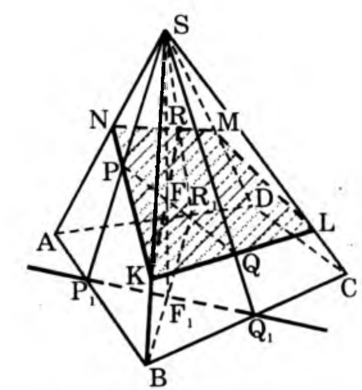


Рис. 3.165

Задача 5.17. Побудувати переріз чотирикутної піраміди площиною, визначеною трьома точками, кожна з яких лежить на одній з граней піраміди.

Розв'язання. Нехай дано піраміду $SABCD$ і три точки P, Q, R, які визначають площину перерізу і розміщені на гранях ASB, BSC, ASD відповідно (рис. 3.165).

За основну площину α візьмемо площину основи піраміди $ABCD$, внутрішнім проектуванням виберемо центральне проектування з центром у вершині піраміди S.

Будуємо вторинні проекції P_1, Q_1, R_1 точок P, Q, R. Проводимо допоміжні прямі P_1Q_1, BR_1, які визначають точку $F_1 = P_1Q_1 \times R_1B$ як вторинну проекцію точки $F = PQ \times SF_1$, що є спільною точкою площини перерізу PQR і проектуючої площини BSR. Будуємо точку $F = SF_1 \times PQ$.

Пряма RF перетне ребро SB у точці K, яка належить перерізу піраміди площиною PQR. Побудувавши точку $K \in SB$, будуємо чотирикутник. $KLMN$ – шуканий переріз.

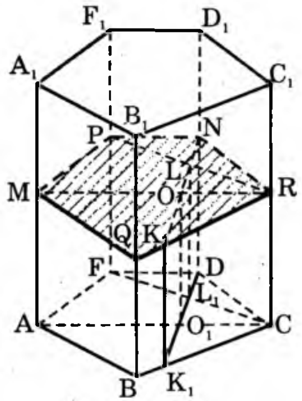


Рис. 3.166

Задача 5.18. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, що проходить через дані три точки, дві з яких лежать на бічних ребрах, а третя – на бічній грані призми.

Розв'язання. Нехай $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ – зображення даної призми, точки $M \in AA_1$, $N \in DD_1$, $K \in BCC_1B_1$ належать площині перерізу (рис. 3.166).

Побудуємо переріз призми методом внутрішнього проектування: точки A, D, K_1 – проекції даних точок M, N, K у площині основи призми. Знайдемо точку $O_1 = AC \times DK_1$ – це проекція точки $O \in NK$ і $O = NK \times OO_1$, де $OO_1 \parallel BB_1$. Тоді пряма MO перетне ребро CC_1 у точці R, а пряма RK перетне ребро BB_1 у точці Q.

Далі побудуємо точку $L_1 = DK_1 \times CF$ та її прообраз $L = KN \times LL_1$, де $LL_1 \parallel BB_1$, тоді пряма RL перетне ребро FF_1 у точці P. Переріз $MQRNP$ – шуканий.

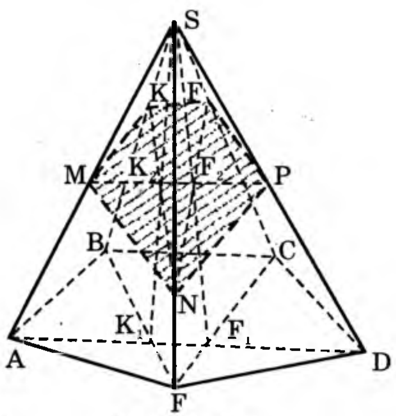


Рис. 3.167

Задача 5.19. Дана п'ятикутна піраміда $SABCDF$. Побудувати її переріз площиною, заданою трьома точками M, N, P на бічних ребрах.

Розв'язання. Дані точки лежать на ребрах $M \in SA$, $N \in SF$, $P \in SD$ піраміди $SABCDF$ (рис. 3.167).

Розв'язання задачі передбачає знаходження точок перетину січної площини MNP з бічними ребрами SB і SC. Використаємо метод центрального внутрішнього проектування на площину основи піраміди з центром S: точки A, F, D – центральні проекції точок M, N, P відповідно, відрізок AD – центральна проекція відрізка MP. Для знаходження точки перетину січної площини з ребром SB проведемо відрізок BF основи, який перетне відрізок AD у точці K_1, ця точка є центральною проекцією точки K_2, яка лежить на відрізку MP : $K_2 = MP \times SK_1$. Тоді точка $K = NK_2 \times SB$ — шукана вершина перерізу на ребрі SB. Аналогічно знаходимо точку F на ребрі SC: проводимо FC, дістанемо точку F_1 в перетині з AD, яка є проекцією точки $F_2 = MP \times SF_1$, а потім і точку $F = NF_2 \times SC$. $MNPFK$ – шуканий переріз.

Задача 5.20. Через середини двох суміжних сторін основи правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, проведена площина, що перетинає три бічні ребра і нахилена до площини основи під кутом α. Знайдіть площу одержаного перерізу.

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – зображення правильної чотирикутної призми (рис. 3.168). Візьмемо точки M і N такі, що $M \in AD$, $N \in AB$, $AB = BC = CD = AD = a$, $AM = MD = AN = NB = \dfrac{a}{2}$.

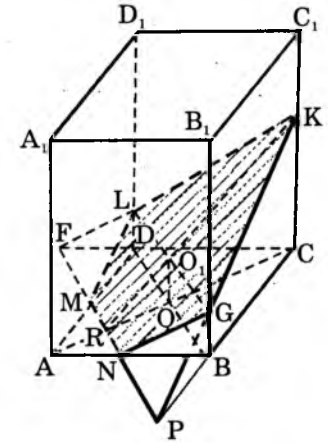


Рис. 3.168

Переріз проходить через пряму MN, що сполучає середини суміжних сторін основи. Тому MN – ребро двогранного кута між площиною основи і площиною перерізу. Прийнявши за одну сторону лінійного кута діагональ AC основи, маємо, що друга його сторона RK повинна лежати в площині діагонального перерізу ACC_1A_1. Дійсно, $RC \perp NM$, тому $RK \perp MN$ і $\angle KRC = \alpha$ ($R = MN \times AC$, $K = CC_1 \times RK$). На бічній грані BB_1C_1C лежить точка K, яка належить і перерізу. Другою точкою, що належить і перерізу, і грані BB_1C_1C, буде точка $P = BC \times MN$, отже, пряма KP є лінією перетину площини грані BB_1C_1C і площини перерізу, вона перетне ребро BB_1 у точці G. Точки N і G – спільні точки перерізу і грані ABB_1A_1, отже, NG – лінія перетину грані ABB_1A_1 з площиною перерізу. Основу призми площина перерізу перетинає по прямій MN. Точка $F = MN \times CD$ є спільною точкою грані CDD_1C_1 і площини перерізу, як і точка K, тому FK – лінія їх перетину і $L = FK \times DD_1$. Отже, перерізом призми площиною є п'ятикутник $GNMLK$.

2. *Обчислення площі перерізу.* П'ятикутник $BCDMN$ є проекцією перерізу $GNMLK$ на площину основи, тому $S_{GNMLK} = S_{BCDMN} \cdot \dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Але $S_{BCDMN} = S_{ABCD} - S_{AMN} = a^2 - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{7}{8}a^2$. Тому $S_{GNMLK} = \dfrac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

Найменше значення площі перерізу буде при $\alpha = 0^\circ$, у цьому випадку перерізом буде п'ятикутник $BCDMN$ і $S_{BCDMN} = \dfrac{7}{8}a^2$. Найбільшою площа перерізу за даної умови задачі буде тоді, коли точка K

суміститься з вершиною C_1, у цьому випадку $tg\alpha = \frac{CC_1}{CR} = \frac{4CC_1}{3a\sqrt{2}} = \frac{CC_1 2\sqrt{2}}{3a}$ і $\alpha = arctg\frac{2\sqrt{2}CC_1}{3a}$ – найбільше допустиме значення кута α. Отже, $0^0 \le \alpha \le arctg\frac{2\sqrt{2}CC_1}{3a}$.

Відповідь. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$.

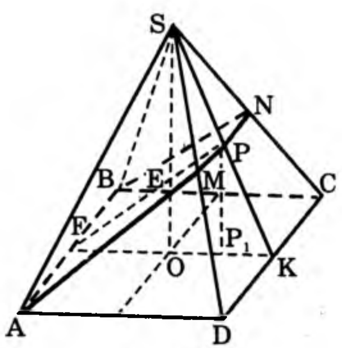


Рис. 3.169

Задача 5.21. Довжина сторони основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Площина, яка проходить через сторону основи піраміди і середню лінію протилежної бічної грані, утворює з площиною основи кут 60°. Обчислити об'єм піраміди.

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Будуємо зображення правильної чотирикутної піраміди $SABCD$: $AB = BC = CD = AD = a$; $SA = SB = SC = SD$ (рис. 3.169).

$ABCD$ – квадрат, проведемо його середні лінії (вісі симетрії). Вершина S проектується в точку O, їх перетину (і діагоналей основи). Проведемо середню лінію MN грані DSC, тоді $MN \parallel DC \parallel AB$ і $ABNM$ – переріз, який має форму рівнобедреної трапеції. PF – її вісь симетрії: $PF \perp AB$, $OF \perp AB$, тоді $\angle OFP = 60°$ – як лінійний кут двогранного кута з ребром AB.

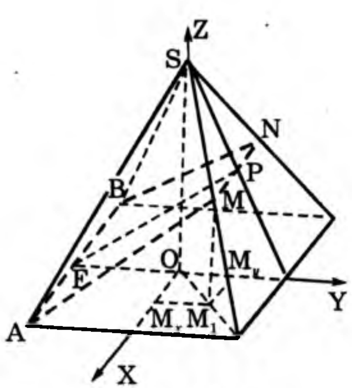


Рис. 3.170

2. *Обчислення об'єму.* $V = \frac{1}{3}QH$; $Q = a^2$. Треба знайти $H = SO$. Це можна зробити різними способами.

1-й спосіб (геометричний). FK – вісь симетрії основи, тоді $FO = OK = \frac{a}{2}$; $OE = \frac{a}{2}tg60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (з ΔOFE). Проведемо $PP_1 \perp FK$, $P_1K = \frac{a}{4}$; $FP_1 = \frac{3}{4}a$. З ΔP_1FP: $PP_1 = FP_1 \cdot tg60° = \frac{3}{4}a\sqrt{3}$, $SO = H = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$ і $V = \frac{a^2}{3}\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

2-й спосіб (координатний). Виберемо систему координат так: осі x і y – середні лінії основи; вісь z – по висоті OS піраміди (рис. 5.170). Площина перерізу при цьому паралельна осі x, тому її рівняння

$$ny + mz + p = 0 \qquad (5.1)$$

Параметри n, m, p знайдемо з умов: $A \in ABNM$ і $M \in ABNM$; їх координати: $A(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0)$ і $M(\frac{a}{4}; \frac{a}{4}; \frac{H}{2})$. $A \in ABNM$, тому

$$n(y + \frac{a}{2}) + mz = 0; \qquad (5.2)$$

$M \in ABNM$, тому $n(\frac{a}{4} + \frac{a}{2}) + m\frac{H}{2} = 0$; звідси $n = -\frac{2mH}{3a}$.

Підставимо значення n в рівняння (5.2): $\frac{2mH}{3a}y + \frac{mH}{3} - mz = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2Hy + aH - 3az = 0$. Для цієї площини вектор нормалі $\vec{n}_1(0; 2H; -3a)$.
Рівняння площини основи піраміди $z = 0$, її вектор нормалі $\vec{n}_2(0; 0; 1)$.

$\angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 60°$, $\cos 60° = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{-3a}{\sqrt{4H^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2}$. Звідси $H = \frac{3\sqrt{3}a}{2}$.

Тоді $V = \frac{1}{3}a^2\frac{3\sqrt{3}a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Відповідь. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Задача 5.22. У правильній шестикутній призмі, сторона основи якої дорівнює a і бічні грані – квадрати, провести площину через сторону нижньої основи і протилежну їй сторону верхньої основи. Обчислити площу побудованого перерізу.

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Нехай $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – зображення правильної шестикутної призми зі стороною основи a (рис. 3.171).

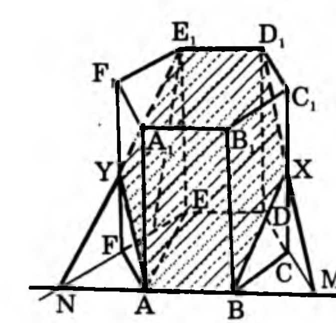


Рис. 3.171

Побудуємо переріз призми площиною, що проходить через сторону AB нижньої основи і сторону E_1D_1 верхньої основи, протилежну стороні AB. За властивостями правильної шестикутної призми $AB \parallel E_1D_1$, вони є сторонами многокутника перерізу. Площина перерізу перетинає грань CC_1D_1D по прямій D_1M, де $M = AB \times DC$.

Пряма D_1M перетинає ребро CC_1 у точці X, тому відрізок D_1X є стороною многокутника перерізу в грані CC_1D_1D.

Аналогічно знаходимо точку Y на ребрі FF_1: $N = AB \times EF$, $Y = E_1N \times FF_1$. Многокутник $ABXD_1E_1Y$ – шуканий переріз.

2. *Обчислення площі перерізу.* Шестикутник у нижній основі призми є ортогональною проекцією шестикутника перерізу, тому площа перерізу $S = \dfrac{S_0}{\cos\alpha}$, де S_0 – площа основи призми, α – кут нахилу площини перерізу до площини основи. Оскільки $EA \perp AB$, то $E_1A \perp AB$ і $\alpha = \angle EAE_1$. Але $EE_1 = a$, $AE = a\sqrt{3}$, тоді $AE_1 = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$ і $\cos\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Площа основи призми $S_0 = 6 \cdot \dfrac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, тоді площа перерізу $S = \dfrac{S_0}{\cos\alpha} = 3a^2$.

Відповідь. $3a^2$.

§ 37. Комбінації просторових фігур

Побудова зображень комбінацій плоских або просторових фігур вимагає дотримання певних додаткових правил. Слід відзначити, що при побудові таких зображень єдиних правил не існує, і в кожному окремому випадку повинен бути свій підхід до виконання зображення. Проте деякі загальні рекомендації можна запропонувати. Зокрема, необхідно звернути увагу на систематичне використання оригіналу; використовуючи оригінал, можна вибрати зручне розташування однієї фігури відносно іншої. Як і раніше, використовуються інваріанти паралельного проектування.

Звертаємо також увагу на те, що в навчально-методичних посібниках для вузів і середньої школи поки що немає єдиного підходу до використання типів ліній при побудові зображень комбінацій фігур. Відомі три різні підходи.

Одні вчені-педагоги вважають вписані і описані тіла непрозорими, тому на рисунку всі лінії вписаного тіла зображуються штрихо-

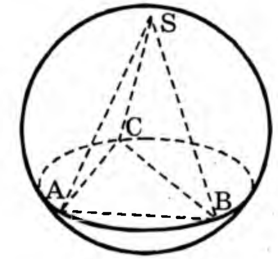


Рис. 3.172

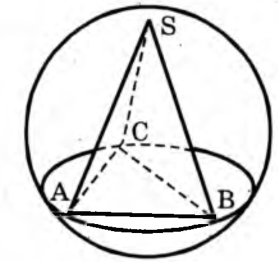


Рис. 3.173

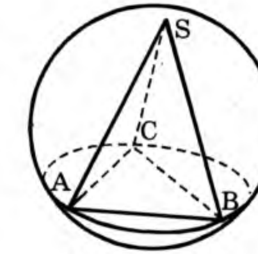


Рис. 3.174

вими лініями (Ж. Адамар, О.В. Погорєлов, М.І. Кованцов, К.С. Барибін, Л.М. Лоповок та ін. – рис. 3.172).

Для інших описане тіло прозоре як для себе, так і для вписаного тіла; а вписане тіло – непрозоре для себе і для описаного тіла; при цьому всі лінії описаного тіла, що не закриті вписаним, зображуються суцільними лініями (З.А. Скопець, Г.Г. Маслова, В.О. Гусєв та ін. – рис. 3.173). Треті вважають описане тіло прозорим для вписаного, але непрозорим для самого себе, а вписане тіло – непрозорим; у цьому випадку кожне тіло в комбінації зображується як непрозоре для себе (Н.М. Бескін, М.Л. Крайзман та ін. – рис. 3.174).

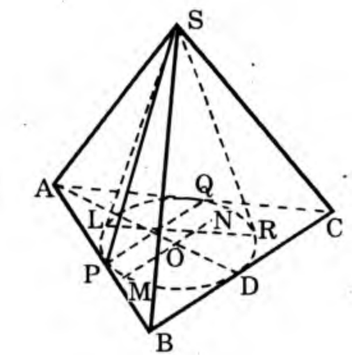


Рис. 3.175

Ми рекомендуємо дотримуватись першої позиції, оскільки таке зображення відповідає загальним вимогам до зображення без домовленостей. Проте у випадках досить складного, насиченого багатьма лініями рисунка з метою його максимальної наочності можна відійти від даної позиції, але при цьому чітко сформулювати домовленість для даного зображення: що будемо вважати прозорим, а що непрозорим.

Розглянемо поради щодо побудови зображень вписаних і описаних фігур на конкретних прикладах у вигляді задач.

Задача 5.23. Побудувати зображення конуса, вписаного в правильну трикутну піраміду.

Розв'язання. Побудова зображення конуса, вписаного в трикутну піраміду, рівнозначна побудові зображення правильної трикутної піраміди, описаної навколо конуса. Тому нехай на рис. 3.175 дано зображення конуса. Побудуємо зображення правильного трикутника, описаного навколо еліпса – основи конуса. З'єднавши вершини одержаного трикутника з вершиною S, матимемо зображення конуса, вписаного в правильну трикутну піраміду.

Задача 5.24. Побудувати зображення циліндра, вписаного в правильну трикутну піраміду, якщо його висота дорівнює половині висоти піраміди.

Розв'язання. Нехай дано зображення правильної трикутної піраміди (рис. 3.176).

Поділивши навпіл зображення O_1S висоти піраміди, знайдемо OO_1 – зображення висоти шуканого циліндра. Через точку O проведемо площину, перпендикулярну висоті O_1S піраміди, яка перетне піраміду по трикутнику ABC.

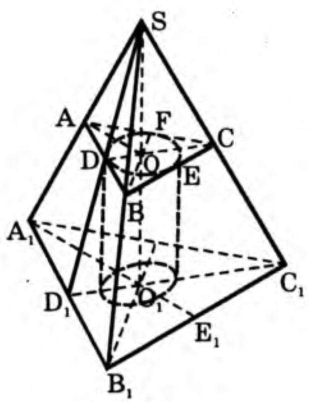


Рис. 3.176

Трикутник ABC можна побудувати, провівши його медіани паралельно медіанам трикутника $A_1B_1C_1$. У трикутник ABC впишемо еліпс – зображення кола верхньої основи циліндра. Шість точок – D, E, F та їм симетричні відносно точки O еліпса – легко визначаються; точки D, E, F – основи медіан трикутника ABC. Відомо, що еліпс повністю визначається п'ятьма точками. Побудову довільної шостої точки еліпса можна виконати за теоремою Паскаля. Щоб побудувати зображення циліндра, вписаного в піраміду, потрібно побудувати такий самий еліпс в основі піраміди і провести його контурні твірні.

Задача 5.25. Куб з ребром a вписаний у правильну чотирикутну піраміду так, що чотири вершини його знаходяться на бічних ребрах, а чотири інші – на основі піраміди. Бічні грані піраміди нахилені до площини основи під кутом α. Знайдіть об'єм піраміди.

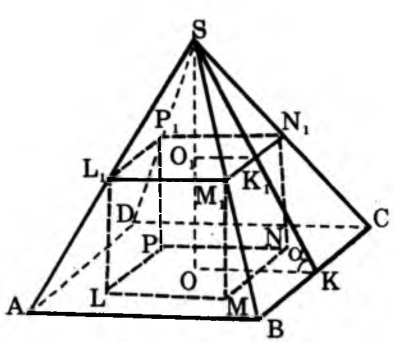


Рис. 3.177

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Будуємо зображення піраміди $SABCD$, основою якої є квадрат $ABCD$, висота SO перпендикулярна до площини основи і проектується в точку перетину діагоналей основи (рис. 3.177).

Проводимо $OK \perp BC$, тоді $SK \perp BC$ і $\angle SKO = \alpha$ як міра кута нахилу бічної грані піраміди до площини основи. У піраміду вписуємо куб так, щоб вершини верхньої основи L_1, M_1, N_1, P_1 лежали на відповідних ребрах піраміди. Площина верхньої основи куба перетинає висоту SO в точці O_1 такій, що $OO_1 = a$. Точку O_1 легко знайти. Потім проводимо $OK_1 \parallel OK$. Точка K_1 лежить на ребрі куба, це дає можливість побудувати точки L_1, M_1, N_1, P_1 (пам'ятаючи, що $M_1N_1 \parallel BC$, $L_1M_1 \parallel AB$ і т.д.). Далі знаходимо вершини нижньої основи куба як ортогональні проекції вершин верхньої основи на площину основи піраміди. При цьому $LL_1 = MM_1 = NN_1 = PP_1 = a$. Точка O є центром нижньої основи вписаного куба. (для контролю: точки L і N належать діагоналі AC, точки M і P – діагоналі BD).

2. *Обчислення об'єму піраміди.* $V = \frac{1}{3}QH$. Висота $H = SO = SO_1 + OO_1 = SO_1 + a$; $SO_1 = H - a$. З подібності трикутників OSK і O_1SK_1 маємо: $\frac{SO}{SO_1} = \frac{KO}{K_1O_1}$, або $\frac{H}{H-a} = \frac{OK}{\frac{a}{2}}$. З ΔSOK: $OK = H\,\mathrm{ctg}\alpha$. Тоді $\frac{H}{H-a} = \frac{2H\,ctg\alpha}{a}$ і звідси $H = \frac{a(1+2ctg\alpha)}{2ctg\alpha} = \frac{a(2+tg\alpha)}{2}$. Сторона основи піраміди $AB = 2OK = 2H\,\mathrm{ctg}\alpha$, тому $AB = \frac{a(2+tg\alpha)}{2tg\alpha}$, а $Q = \frac{a^2(2+tg\alpha)^2}{tg^2\alpha}$.

Отже, об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2(2+2tg\alpha)^2}{tg^2\alpha}\frac{a(2+tg\alpha)}{2} = \frac{a^3(2+tg\alpha)^3}{6tg^2\alpha}.$$

За змістом задачі $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Отже, об'єм піраміди, обчислений за знайденою формулою, виражається дійсним додатним числом для всіх допустимих значень кута α.

Відповідь. $V = \frac{a^3(2+tg\alpha)^3}{6tg^2\alpha}$.

Задача 5.26. У конус вписано піраміду, основою якої є рівнобедрений трикутник з основою a, що стягує дугу α. Плоский кут при вершині

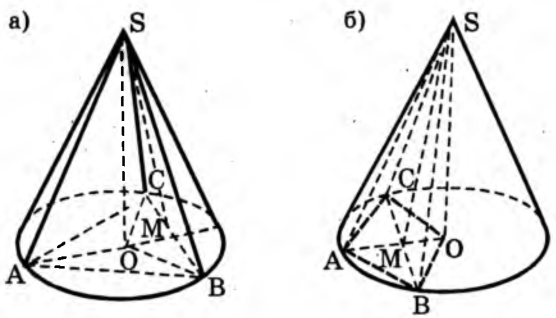


Рис. 3.178

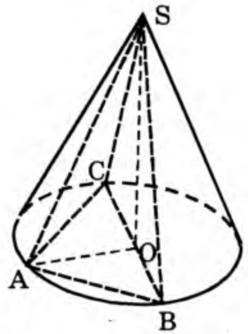


Рис. 3.179

піраміди, що лежить проти сторони a, дорівнює β. Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Будуємо зображення конуса з вершиною S і центром O (рис. 3.178а).

Побудова зображення вписаної в конус піраміди передбачає визначення положення вершин A, B, C основи піраміди на колі основи конуса. Будуємо центральний кут BOC такий, що $\angle BOC = \alpha$, тоді хорда $BC = a$, $\angle BSC = \beta$. Точка M – середина хорди BC, тому $OM \perp BC$, і точка A перетину діаметра, що проходить через точки O і M, з колом буде третьою вершиною основи піраміди. $\angle BAC = \frac{\alpha}{2}$ – як вписаний в коло, $\angle BSM = \frac{\beta}{2}$, $BM = MC = \frac{a}{2}$, $\angle BAM = \frac{\alpha}{4}$.

2. *Визначення об'єму піраміди.* Об'єм піраміди визначається за формулою: $V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}SO$. З ΔABM $AM = \frac{a}{2}ctg\frac{\alpha}{4}$. Тоді

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a\cdot a ctg\frac{\alpha}{4}}{4} = \frac{a^2}{4}ctg\frac{\alpha}{4}.$$

Для знаходження SO обчислимо SM і OM. З ΔBOM $OM = \frac{a}{2}ctg\frac{\alpha}{2}$; з ΔBSM $SM = \frac{a}{2}ctg\frac{\beta}{2}$. Тоді з ΔSOM

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} == \frac{\alpha}{2}\sqrt{ctg^2\frac{\beta}{2} - ctg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^3 ctg\frac{\alpha}{4}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{a^3\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{48\sin^2\frac{\alpha}{4}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

3. Дослідження одержаної формули. За умовою задачі $0^\circ < \alpha < 360^\circ$, $0^\circ < \beta < 180^\circ$, тому $\sin\frac{\alpha}{4} > 0$ і $\sin\frac{\beta}{2} > 0$. Відносно $\frac{\alpha+\beta}{2}$ і $\frac{\alpha-\beta}{2}$ можливі три випадки:

а) $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, тоді $\alpha > \beta$. Дійсно, $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{BM}{OB}$; $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{BM}{SB}$. Оскільки $SB > OB$, то $\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\beta}{2}$ і, враховуючи, що $\frac{\alpha}{2}$ і $\frac{\beta}{2}$ гострі, маємо: $\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$ і $\alpha > \beta$.

Тоді $\frac{\alpha+\beta}{2} < 180^\circ$ і $\frac{\alpha-\beta}{2} < 90^\circ$; отже, $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$ і $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ (рис. 3.178а).

б) $0^\circ < \alpha < 360^\circ$. При цьому $\cup BAC = 360^\circ - \alpha < 180^\circ$. Як і в першому випадку, $\angle BSC < \angle BOC$, тобто $\beta < 360^\circ - \alpha$, тому $\sin\frac{\beta}{2} < \sin\frac{360^0 - \alpha}{2}$. Але $\frac{\beta}{2}$ і $\frac{360^0 - \alpha}{2}$ – гострі кути, тому $\frac{\beta}{2} < \frac{360^0 - \alpha}{2}$; звідси $\alpha + \beta < 360^\circ$ і $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} > 0$. З того, що $\alpha > 180^\circ$ і $\beta > 0^\circ$, маємо $\alpha + \beta > 180^\circ$; $\frac{\alpha+\beta}{2} > 90^\circ$. Оскільки $\alpha < 360^\circ$ і $\beta > 0^\circ$, то $\alpha - \beta < 360^\circ$ і $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ (рис. 3.178б);

в) $\alpha = 180^\circ$ (рис. 3.179), $0^\circ < \beta < 180^\circ$. Тоді $0^\circ < \alpha + \beta < 360^\circ$ і $\alpha - \beta < 180^\circ$, тому $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} > 0$ і $\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} > 0$.

Отже, у всіх можливих випадках об'єм піраміди виражається додатним числом для всіх допустимих значень α і β.

Відповідь. $V = \dfrac{a^3\sqrt{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}}{48\sin^2\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\beta}{2}}$.

Задача 5.27. Куля описана навколо правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює b, а двогранний кут між бічними гранями піраміди дорівнює α. Обчислити об'єм кулі.

Розв'язання.

1. *Побудова зображення.* Будуємо зображення правильної трикутної піраміди $SABC$, вписаної в кулю. В основі її лежить правильний трикутник ABC, вписаний в коло. Вершина S піраміди проектується в центр O_1 описаного навколо трикутника ABC кола, $AB = BC = AC$; $SA = SB = SC = b$ (рис. 3.180).

Проведемо через сторону AB основи площину, перпендикулярну бічному ребру SC : $D = SC \times (ABD)$, $AD \perp SC$, $BD \perp SC$, $\angle ADB = \alpha$, як лінійний кут двогранного кута між бічними гранями. $AD = BD$, як відповідні сторони двох рівних прямокутних трикутників ACD і BCD (у них DC – спільний катет, $AC = BC$). Тому ΔABD – рівнобедрений; проведемо в ньому $DK \perp AB$, тоді $\angle ADK = \angle BDK = \dfrac{\alpha}{2}$, $BK = AK$. Центр O описаної навколо піраміди кулі є точкою перетину висоти піраміди SO_1 з площиною, що проходить через середину будь-якого бічного ребра перпендикулярно до нього.

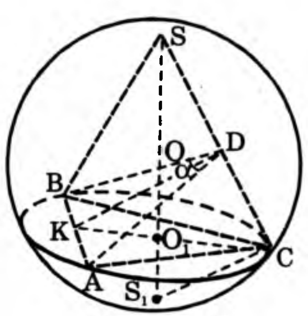


Рис. 3.180

2. *Обчислення об'єму кулі.* $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$. Знайдемо R. $2R = SS_1$. З ΔSCS_1 ($\angle C = 90^\circ$, $SS_1 = 2R$): $SC^2 = SS_1 \cdot SO_1$ або $b^2 = 2R \cdot SO_1$. Звідси

$$R = \frac{b^2}{2SO_1}. \qquad (5.3)$$

Знайдемо SO_1. З подібності трикутників SO_1C і KDC (прямокутні і мають спільний гострий кут) маємо: $\dfrac{SO_1}{KD} = \dfrac{SC}{KC}$. Звідси $SO_1 = \dfrac{SC \cdot KD}{KC}$. $SC = b$, $KD = \dfrac{AB}{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}$ (з ΔADK) і $KC = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ (з ΔAKC). Тоді $SO_1 = \dfrac{b\dfrac{AB}{2}ctg\dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{bctg\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{b\sqrt{3}ctg\dfrac{\alpha}{2}}{3}$. Підставивши значення SO_1 в (5.3), одержимо: $R = \dfrac{3b^2}{2\sqrt{3}bctg\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Тому $V = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{3\sqrt{3}b^3}{8}tg^3\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi b^3 tg^3\dfrac{\alpha}{2}$. За змістом задачі $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $0^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 90^\circ$, тому об'єм кулі виражається додатним дійсним числом при всіх допустимих значеннях кута α.

Відповідь. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi b^3 tg^3\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 5.28. Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, заданою трьома точками, дві з яких лежать на бічних гранях, а третя – на ребрі піраміди.

Розв'язання. Маємо зображення п'ятикутної піраміди $SABCDF$ і точок $N \in SB$, $M \in ASF$, $K \in BSC$ (рис. 3.181). Побудову перерізу виконаємо методом внутрішнього центрального проектування з центром S на площину основи піраміди: точки M_1, K_1, B – центральні проекції даних точок M, K, N. Знайдемо точку $O_1 = M_1K_1 \times BD$ та її прообраз $O = MK \times SO_1$, тоді пряма NO перетне ребро SD в точці P. Далі будуємо точку

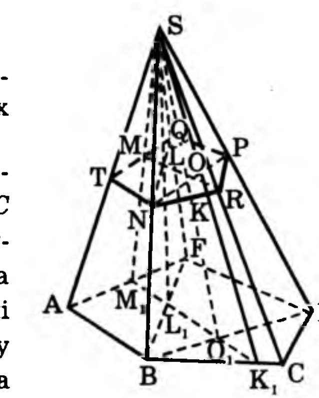


Рис. 3.181

$L_1 = M_1K_1 \times BF$ і її прообраз $L = MK \times SL_1$, тоді пряма NL перетне ребро SF у точці Q, а пряма QM перетне ребро SA в точці T. Крім того, пряма NK перетне ребро SC в точці R. П'ятикутник $NRPQT$ – шуканий переріз.

§ 38. Історичні відомості про становлення методів зображення

Проблема одержання плоских зображень просторових фігур виникла ще в стародавні часи, про що свідчать пам'ятки античного світу, але теорії виконання таких зображень і обґрунтування правил їх одержання тривалий час не було.

Початкові відомості про методи зображення геометричних форм пов'язані з іменами давньогрецьких учених *Анаксагора* (500–428 до н.е.), *Демокріта* (460–380 до н.е.), *Есхіла* (525–456 до н.е.).

Евклід (III ст. до н.е.) у своєму творі «Оптика» формулює 12 аксіом і 61 теорему, на основі яких створює закони бачення форми і розмірів предметів людиною. Інший його твір «Початки» відіграв значну роль у вивченні тривимірного простору, названого *евклідовим простором*.

В епоху Відродження основи методів зображення, які застосовувались у живописі та при складанні архітектурних рисунків, розроблялись художниками і архітекторами. Одним із перших теоретиків методів зображення на геометричній основі був італійський вчений *Леон Батиста Альберті* (1401–1472). У своїх творах «Про живопис» і «Про архітектуру» він розробив математичні основи перспективи за допомогою сітки, яка набула широкого застосування серед архітекторів того часу.

Подальша розробка прийомів графічних побудов була здійснена італійським художником, вченим і інженером *Леонардо да Вінчі* (1452–1519), який у своїх працях з архітектури розробив вчення про закони перспективних зображень, зокрема «спостережливої» перспективи.

Першим ґрунтовним посібником для художників був твір німецького художника *Альбрехта Дюрера* (1471–1528) «Повчання», в якому подано ряд графічних способів побудови плоских і просторових кривих, а також запропоновано оригінальний спосіб побудови перспективи, відомий і нині у науковій літературі як спосіб Дюрера.

Важливе теоретичне значення мало дослідження італійського вченого *Гвідо Убальді* (1545–1607) «Шість книг з перспективи», в якому автор узагальнив здобутки попередників, обґрунтувавши основи теоретичної перспективи.

Значний внесок у розробку теорії перспективи на математичній основі вніс французький математик і архітектор *Ж. Дезарг* (1593–1662), який у своєму творі «Загальний метод зображення предметів у перспективі» застосував метод координат при побудові перспективи.

Різні способи розв'язання основних позиційних задач і визначення властивостей оригіналу за зображенням розробили у своїх творах англійський математик *Ламберт* (1746–1777), французький інженер *Фрезьє* (1682–1773).

Французький математик *Гаспар Монж* (1746–1818) у своєму творі «Нарисна геометрія» (1799) узагальнив і систематизував знання про методи зображення, виклавши послідовну теорію побудови рисунка. Основою праці Г. Монжа є ортогональне проектування на дві взаємно перпендикулярні площини, які суміщаються з площиною рисунка поворотом навколо лінії їх перетину, названою віссю проекції.

Істотне значення в розвитку теорії зображення відіграла основна теорема аксонометрії, сформульована у 1853 році німецьким професором *К. Польке* (1810–1876), елементарне доведення якої запропонував німецький геометр *Г. Шварц* у 1864 р., вона відома нині як *теорема Польке – Шварца.*

Розробкою питань зображення просторових фігур на площині займались російські вчені *Я.А. Севастьянов* (1796–1849), *Н.А. Ринін* (1877–1943), *Е.С. Федоров* (1853–1919), *В.І. Курдюмов* (1853–1904), *М.А. Дешевий* (1865–1945), *М.Ф. Четверухін* (1891–1982), *Н.О. Глаголєв* (1888–1945) та ін.

Вправи

5.29. У площині основи трикутної піраміди дана пряма a, яка не перетинає сторін основи піраміди. Побудувати переріз цієї піраміди площиною, що проходить через пряму a і дану точку на бічному ребрі піраміди.

5.30. У площині основи трикутної призми дана пряма a, яка не перетинає сторін основи призми. Побудувати переріз даної призми площиною, що проходить через пряму a і дану на бічному ребрі точку K. Вибрати положення прямої a і точки K так, щоб у перерізі одержати: а) трикутник, б) чотирикутник.

5.31. Побудувати переріз трикутної призми площиною, заданою слідом, який перетинає дві сторони її нижньої основи, і точкою на бічному ребрі призми.
5.32. Побудувати переріз чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник, площиною, що проходить через сторону основи і точку M на бічному ребрі піраміди.
5.33. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через три точки, дані на її ребрах.
5.34. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, яка проходить через дані дві точки на ребрах і дану точку на грані призми.
5.35. Побудувати переріз чотирикутної призми площиною, заданою слідом MN у площині основи піраміди за межами основи піраміди, і точкою K на бічному ребрі. Слід MN вважати непаралельним стороні основи піраміди.
5.36. На ребрах чотирикутної піраміди дано три точки A_1, B_1, C_1. Побудувати переріз піраміди площиною, яка проходить через ці три точки.
5.37. За даним зображенням п'ятикутної піраміди побудувати лінію перетину двох несуміжних граней.
5.38. Побудувати методом слідів переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через дані на її бічних гранях три точки.
5.39. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, заданою трьома точками, дві з яких лежать на бічних ребрах, а третя – на бічній грані призми.
5.40. Побудувати переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і точку на бічному ребрі.
5.41. Побудувати методом внутрішнього проектування переріз п'ятикутної призми площиною, яка проходить через три точки, дані на її бічних гранях.
5.42. Побудувати переріз п'ятикутної піраміди площиною, заданою трьома точками, що лежать на бічних гранях піраміди (методом внутрішнього проектування).

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Частина II

Розділ 1

1.7. Призма.

1.8. Циліндр.

1.9. а) Якщо a_∞ – невласна пряма, задана площиною α, β – власна пряма, то вони будуть мимобіжними у тому випадку, коли пряма β не паралельна площині α; б) дві невласні прямі не можуть бути мимобіжними, оскільки вони обидві лежать у невласній площині.

1.10. Шуканою прямою c буде пряма, проведена через точку S перетину прямих a і b паралельно прямій d.

1.11. В евклідовій геометрії правильні такі аксіоми належності проективної геометрії – Н.1, Н.3, Н.5, Н.6; неправильні – Н.2, Н.4 (§ 5).

1.12. Шуканою буде пряма перетину площини α, яка визначена прямою a і точкою A, з площиною, проведеною через точку A паралельно прямій b.

1.13. Три точки A, B, C проективної прямої розбивають її на шість відрізків: ABC, BAC, ACB, $AB\infty C$, $BA\infty C$, $AC\infty B$.

1.14. а) Чотири; б) сім.

1.15. За умовою задачі $(A, B) \div (C, D)$. Це означає, що точки C і D належать різним відрізкам, на які точки A і B розбивають проективну пряму, нехай $C \in AB$, $D \in A\infty B$. Крім того, $(A, B) \div (C, E)$, тобто точки C і E також належать різним відрізкам. Оскільки точка $C \in AB$, то $E \in A\infty B$. Отже, точки D і E належать одному й тому самому відрізку, утвореному точками A і B, а саме відрізку $A\infty B$. Тому $(A, B) \overset{\cdot\cdot}{-} (D, E)$.

1.16. Якщо площина α належить прямій a, а пряма a належить точці A, то площина α належить точці A.

1.17. Три площини, які не належать одній прямій, належать одній точці.

1.18. За малим принципом двоїстості: «Для трьох прямих існує не більше трьох точок, належних цим прямим попарно». За великим принципом двоїстості: «Для трьох площин існує не більше трьох прямих, належних цим площинам попарно».

1.19. Якщо прямі c і d належать до одного класу (до різних класів) розбиття прямими a і b пучка прямих, то пари (a, b) і (c, d) називаються *нерозділеними (розділеними)*. Записують $(a, b) \overset{\cdot\cdot}{-} (c, d)$, $((a, b) \div (c, d))$.

1.20. Якщо площини γ і δ належать до одного класу (до різних класів) розбиття площинами α і β пучка площин, то пари площин (α, β) і (γ, δ) називаються *нерозділеними (розділеними)*. Записують $(\alpha, \beta) \overset{\cdot\cdot}{-} (\gamma, \delta)$, $((\alpha, \beta) \div (\gamma, \delta))$.

1.21. П.1′. Дві різні прямі a і b пучка розбивають усі інші прямі цього пучка на два непорожні класи.

П.2′. Якщо $(a, b) \div (c, d)$, то і $(c, d) \div (a, b)$.

П.3′. Будь-які чотири прямі пучка можна тільки єдиним способом розбити на два класи.

П.4′. Центральне проектування переводить дві розділені пари прямих у дві розділені пари прямих.

1.22. Аналогічно до розв'язання задачі 1.3 § 10.

1.23. Аналогічно до розв'язання задачі 1.4 § 10.

1.24. Якщо точка S перетину прямих, які сполучають попарно відповідні вершини двох трикутників ABC і $A'B'C'$, є невласною, то прямі AA', BB', CC' паралельні між собою, а відповідні трикутники ABC і $A'B'C'$ знаходяться у перспективно-афінній відповідності (рис. 2.122).

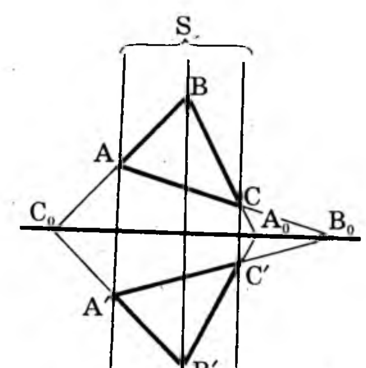


Рис. 2.122

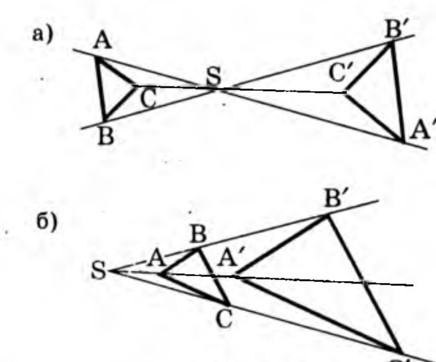


Рис. 2.123

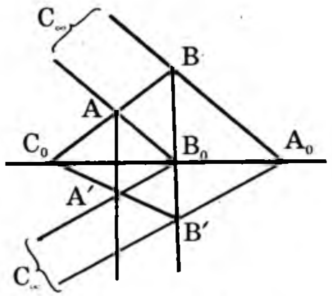


Рис. 2.124

1.25. Якщо дезаргова пряма у конфігурації Дезарга невласна, то відповідні сторони трикутників ABC і $A'B'C'$ попарно паралельні: $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, (рис. 2.123а,б). Особливість конфігурації Дезарга у цьому випадку полягає в тому, що відповідні трикутники гомотетичні в гомотетії з центром у точці S Дезарга і коефіцієнтом гомотетії $k = \dfrac{A'B'}{AB}$.

1.26. Дано два трикутники, у яких пари відповідних вершин A і A', B і B' – власні, а третя пара – невласні точки C_∞ і C'_∞ (рис. 2.124). Тоді дезаргова точка S буде невласною, оскільки паралельним прямим a і b, які визначають вершину C_∞, відповідають також паралельні прямі a' і b', які визначають невласну точку C'_∞. Дезаргова пряма – власна. Відповідні трикутники знаходяться в перспективно афінній відповідності.

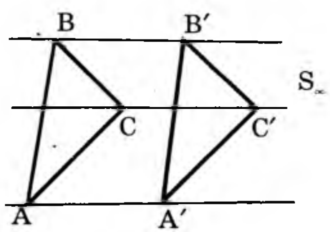


Рис. 2.125

1.27. Якщо дезаргова точка невласна, то прямі AA', BB', CC', що проходять через пари відповідних вершин трикутників ABC і $A'B'C'$, паралельні. Але дезаргова пряма теж невласна, тому відповідні сторони даних трикутників попарно паралельні (рис. 2.125).

Особливістю конфігурації Дезарга в цьому випадку є те, що відповідні трикутники рівні, один із них відображається на другий паралельним перенесенням (рис. 2.125).

1.28. Побудова виконується аналогічно 2-му способу розв′язання задачі 1.5 § 10 при умові, що прямі a і β паралельні.

Розділ 2

2.24. $(AB,CD) = \dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \dfrac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \dfrac{2}{-1} : \dfrac{-3}{-6} = -4 < 0.$

Отже, $(AB, CD) = -4 < 0$. Пара (A, B) розділяється парою (C, D).

2.25. $(AB,CD) = \dfrac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \dfrac{-5(x-1)}{-3(x-3)} = -3$. Звідси $9(x - 3) = -5(x - 1)$ і $x = 2\dfrac{2}{7}$. Отже, шукана точка – $D(2\dfrac{2}{7})$.

2.26. Позначимо через x і y координати точок C і D. Тоді $(AB, CD) = -1$, $\dfrac{AC}{BC} = -\dfrac{AD}{BD}$. У координатах $\dfrac{x-4}{x-2} = -\dfrac{y-4}{y-2}$. Звідси $xy - 3x - 3y + 8 = 0$. Дістали рівняння з двома змінними, яке має безліч розв'язків. Отже, існує безліч пар (C, D), які розділяють пару (A, B): кожному значенню x відповідатиме певне значення y. Наприклад, якщо $x_1 = 0$, то $y_1 = \dfrac{8}{3}$, тобто пара точок $C(0)$, $D\left(\dfrac{8}{3}\right)$ розділяє пару $A(4)$, $B(2)$; якщо $x_2 = 0{,}5$, то $y_2 = 2{,}6$, і т.д.

2.27. Подвійне відношення чотирьох точок прямої, заданих своїми координатами, має вигляд:

$$(AB, CD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B}.$$

Тоді маємо:

1) $\lambda = \dfrac{0-2}{0-3} = \dfrac{5-2}{5-3} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3} : \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{9}$;

2) $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{9}{4}$;

3) $1 - \lambda = \dfrac{5}{9}$;

4) $\dfrac{1}{1-\lambda} = \dfrac{9}{5}$;

5) $1 - \dfrac{1}{\lambda} = -\dfrac{5}{4}$;

6) $\dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = -\dfrac{4}{5}$.

2.28. Використаємо рівність $(AB, CD_\infty) = (AB, C)$.

$(AB_\infty, CD) = (CD, AB_\infty) = (CD, A) = \dfrac{CA}{DA}$.

У координатах:

1) $(AB_\infty, CD) = (CD, AB_\infty) = \dfrac{x_A - x_C}{x_A - x_D} = \dfrac{3+1}{3-5} = \dfrac{4}{-2} = -2$; $l = -2$;

2) $(AB_\infty, DC) = (DC, AB_\infty) = (DC, A) = \dfrac{DA}{CA} = -\dfrac{1}{2}$;

3) $(DB_\infty, CA) = (CA, DB_\infty) = (CA, D) = \dfrac{CD}{AD} = 3$;

4) $(CB_\infty, DA) = (DA, CB_\infty) = (DA, C) = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{3}{2}$;

5) $(DB_\infty, AC) = (AC, DB_\infty) = (AC, D) = \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{1}{3}$;

6) $(CB_\infty, AD) = (AD, CB_\infty) = (AD, C) = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{2}{3}$.

2.29. Побудова виконується аналогічно до розв'язання задачі 1 § 16.

2.30. Побудуємо вісь перспективності s_0 пучків S_1 і S_2 (рис. 2.126). Через точку S_1 і невласну точку прямої s_1 проведемо пряму $S_1P_{1\infty}$, яка перетне вісь перспективності s_0 у точці P_0. Позначимо через P_2 точку перетину прямої S_2P_0 і прямої s_2, точка P_2 ряду s_2 буде відповідною невласній точці $P_{1\infty}$ прямої s_1.

Через точку S_2 і невласну точку $R_{2\infty}$ прямої s_2 проведемо пряму $S_2R_{2\infty}$, вона перетне вісь перспективності s_0 у точці R_0. Позначимо через R_1 точку перетину прямої S_1R_0 і прямої s_1, точка R_1 ряду s_1 буде відповідною невласній точці ряду s_2.

Доведення правильності побудови таке саме, як і в задачі 1 § 16.

2.31. Побудова виконується аналогічно до розв'язання задачі 2 § 16.

2.32. Нехай дано два проективні ряди s_1 і s_2, задані парами відповідних точок A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 (рис. 2.127).

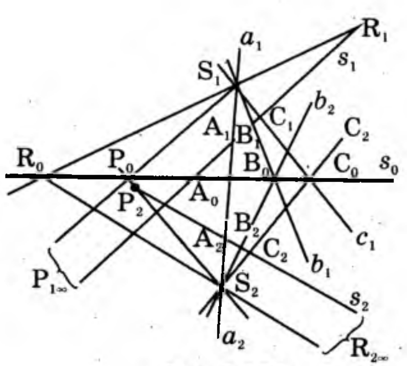


Рис. 2.126

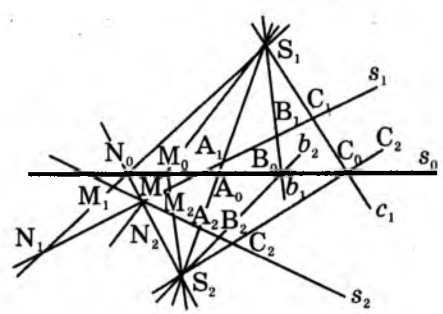


Рис. 2.127

Побудуємо вісь перспективності s_0 пучків S_1 і S_2. M – спільна точка рядів s_1 і s_2. Віднесемо її до ряду s_1, позначивши $M_1 = M$, і знайдемо їй відповідну точку M_2 на ряді s_2. Для цього точку $M_1 = M$ сполучимо з точкою S_1, пряма S_1M_1 перетне вісь s_0 у точці M_0. Точкою ряду s_2, відповідною точці M_1 ряду s_1, буде точка M_2 перетину ряду s_2 з прямою S_2M_0.

Далі точку M перетину рядів s_1 і s_2 віднесемо до точок ряду s_2, позначивши її N_2, і проведемо пряму S_2M до перетину з віссю перспективності s_0 у точці N_0. Точкою ряду s_1, відповідною спільній точці $M = N_2$, віднесеній до ряду s_2, буде точка N_1 перетину прямої S_1N_0 з прямою s_1. Доведення правильності побудови аналогічне доведенню в задачі 1 § 16.

2.33. Побудова виконується аналогічно побудові в попередній задачі за малим принципом двоїстості.

2.34. Дані перспективні пучки S_1 і S_2 проектують той самий ряд точок s. Можливі два випадки розміщення центрів S_1 і S_2 відносно осі перспективності s: 1) точки S_1 і S_2 розміщені в одній півплощині з межею s; 2) точки S_1 і S_2 розміщені в різних півплощинах відносно прямої s.

1. Нехай центри перспективних пучків S_1 і S_2 розміщені в одній півплощині з межею s. На відрізку S_1S_2 як на діаметрі побудуємо коло, яке перетинає пряму s у двох точках M і N (рис. 128а). Проведемо прямі $S_1M = m_1$ і $S_2M = m_2$, $S_1N = n_1$ і $S_2N = n_2$. Пари прямих m_1 і m_2, n_1 і n_2 є парами взаємно перпендикулярних відповідних прямих у перспективних пучках S_1 і S_2: $m_1 \perp m_2$ і $n_1 \perp n_2$, оскільки $\angle S_1MS_2 = \angle S_1NS_2 = 90^\circ$ як кути, що вписані в коло і опираються на діаметр.

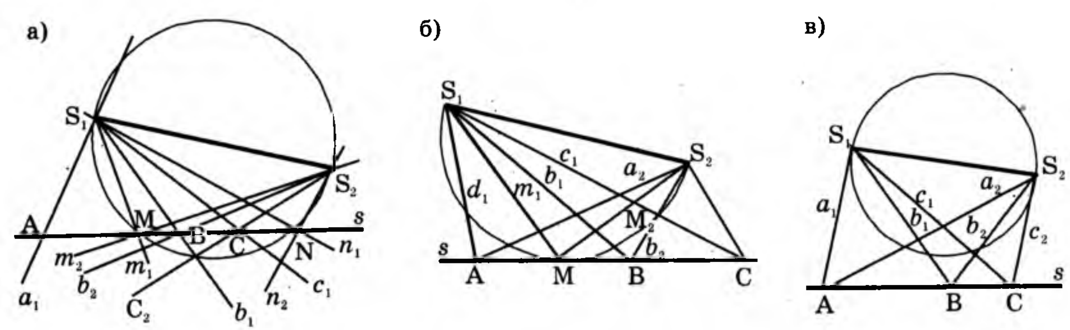


Рис. 2.128

У цьому випадку задача може мати 2 розв'язки (рис. 2.128а), один (рис. 2.128б), жодного (рис. 2.128в).

2. Якщо центри перспективних пучків S_1 і S_2 лежать у різних півплощинах відносно прямої s, то побудова взаємно перпендикулярних прямих в пучках S_1 і S_2 виконується аналогічно. Ця побудова виконана на рис. 2.129.

2.35. Нехай дано три прямі a, b, c пучка S. Перетнемо прямі пучка довільною прямою s. Точки перетину прямої s з прямими пучка позначимо відповідно через A, B, C. Побудуємо одним із способів точку D, гармонічно спряжену з точкою B відносно точок A і C так, щоб $(AC, BD) = -1$. Пряма SD буде шуканою. Дійсно, ряд $s(A, B, C, D, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}$ пучку $S(a, b, c, d, \ldots)$, тому $(AC, BD) = (ac, bd) = -1$. На рис. 2.130 побудова виконана на основі гармонічних властивостей повного чотиривершинника.

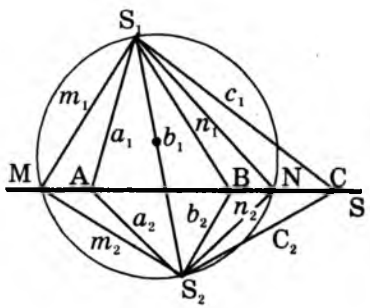


Рис. 2.129

2.36. Нехай $s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\wedge}\, s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ (рис. 2.131). Спроектуємо з точки A_1 точки ряду s_2 прямими $A_1A_2 = a_1$, $A_1B_2 = b_1$, $A_1C_2 = c_1$, а із центра A_2 – точки ряду s_1 прямими $A_2A_1 = a_2$, $A_2B_1 = b_2$, $A_2C_1 = c_2$. Дістанемо

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\, s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots),$$
$$A_2(a_2, b_2, c_2, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\, s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots).$$

Але

$$s_1(A_1, B_1, C_1, \ldots) \overline{\wedge}\, s_2(A_2, B_2, C_2, \ldots),$$

тому

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \ldots) \overline{\wedge}\, A_2(a_2, b_2, c_2, \ldots).$$

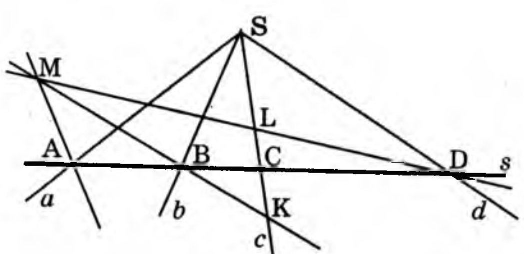


Рис. 2.130

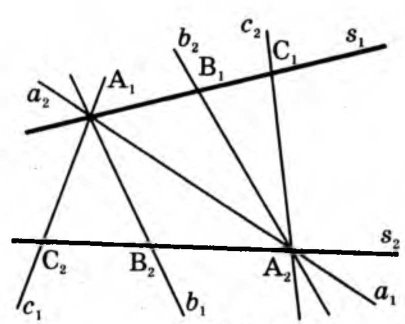


Рис. 2.131

Оскільки проективні пучки мають спільну пряму A_1A_2, яка сама собі відповідає, то $A_1(a_1, b_1, c_1, \ldots) \overline{\overline{\wedge}}\, A_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$.

2.37. Нехай $a \parallel b$ і відрізок AB лежить на прямій a (рис. 2.132). Візьмемо на площині довільну точку N і проведемо прямі AN і BN, вони перетнуть пряму b в точках C і D. Знайдемо точку $L = AD \times BC$. Пряма NL перетне відрізок AB у точці M, яка ділить відрізок AB навпіл.

Правильність побудови випливає з гармонічних властивостей повного чотиривершинника $NCLD$.

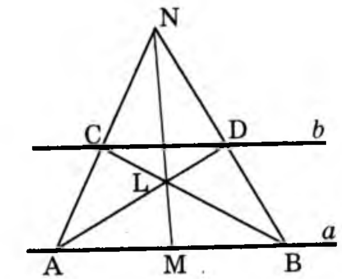


Рис. 2.132

2.38. Дано $a \parallel b$ і точку N, яка не належить ні a, ні b (рис. 2.133). Візьмемо довільну точку S площини і проведемо прямі SN і довільну SB, які перетнуть прямі a і b в точках A, B, C, D. Знайдемо точку L – середину відрізка CD (як у попередній задачі). На прямій b маємо відрізок CD, його середину L і точку N. Дістали зміст задачі 2 § 18, за якою будуємо пряму $c \parallel b$.

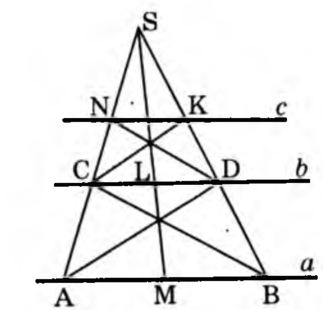


Рис. 2.133

2.39. Не залежить, оскільки $(AB, CD) = (BA, CD) = (AB, DC) = (CD, AB) = (CD, BA) = (DC, AB) = (DC, BA) = -1$.

2.40. Можуть, оскільки якщо дана четвірка точок гармонічна, то дане значення і йому обернене рівні між собою, рівні -1.

1) $(AB, CD) = -1$;

2) $(BA, CD) = -1$;

3) $(AC, BD) = 2$;

4) $(BC, AD) = 2$;

5) $(CA, BD) = \dfrac{1}{2}$;

6) $(CB, AD) = \dfrac{1}{2}$.

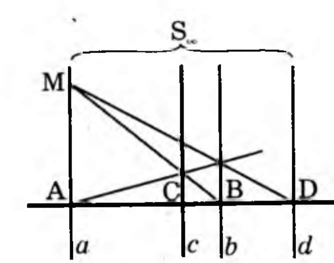


Рис. 2.134

2.41. Побудови виконуються аналогічно розв'язанню задачі 1 § 17.

2.42. Перетнемо пучок цих прямих a, b, c з невласним центром S_∞ довільною прямою s, дістанемо точки перетину A, B, C на прямій s. Побудуємо на прямій s точку D, гармонічно спряжену з точкою C відносно пари (A, B). Пряма d, проведена через точку D паралельно прямим a, b, c – шукана (рис. 2.134).

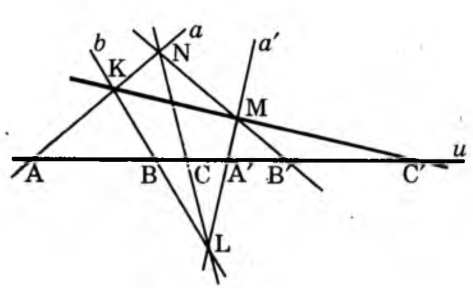


Рис. 2.135

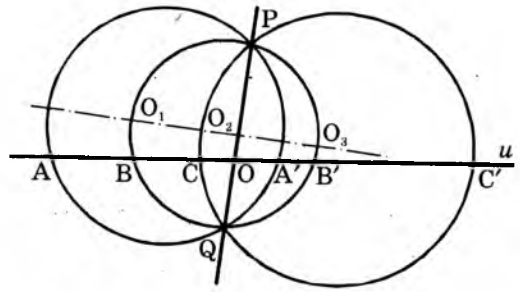


Рис. 2.136

2.43. Побудувати спочатку проективну відповідність двох рядів точок із спільним носієм, яка має дві подвійні точки X і Y (див. задачу 1 § 20). Потім із довільної точки S як спільного носія двох пучків спроектуємо точки ряду. Дістанемо два проективні пучки прямих із спільним носієм, які мають дві подвійні прямі SX і SY.

2.44. В еліптичній інволюції пари відповідних точок розділяють одна одну: $(A, A') \div (B, B')$. Через точки A і A' проведемо дві довільні прямі a і a' і перетнемо їх третьою довільною прямою b, яка проходить через точку B. Пряма b перетинає прямі a і a' в точках K і L. Проведемо пряму LC до перетину з прямою a в точці N (рис. 2.135), потім пряму $B'N$, яка перетне пряму a' у точці M. Шуканою точкою C' буде точка перетину прямих u і KM.

Правильність побудови випливає з теореми Дезарга в застосуванні до повного чотиривершинника $KNML$: пари протилежних його сторін KN і LM, KL і NM, NL і KM перетинають пряму в трьох парах точок A і A', B і B', C і C', які належать одній і тій самій інволюції.

2.45. В еліптичній інволюції на прямій відповідні пари розділяючі: $(A, A') \div (B, B')$. Через точки A і A' і довільну точку P, яка не належить прямій u, проведемо коло (O_1, R_1), а через точки B, B' і P проведемо коло (O_2, R_2) (рис. 2.136). Точку перетину цих кіл позначимо через Q. Пряма PQ – радикальна вісь кіл (O_1, R_1) і (O_2, R_2). Центром інволюції буде точка O перетину прямих PQ і u. Для побудови точки C', відповідної точці C в даній інволюції, проведемо через точки C, P і Q коло (O_3, R_3). Це коло перетне пряму u в шуканій точці C'. Дійсно,

$$OC \cdot OC' = OP \cdot OQ = \text{const}.$$

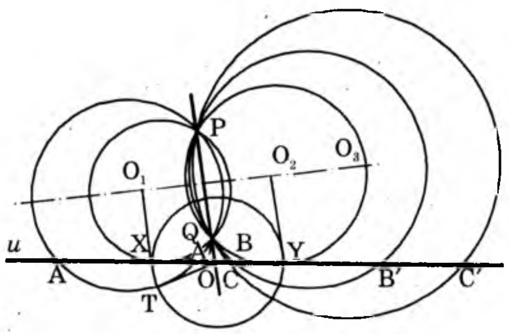


Рис. 2.137

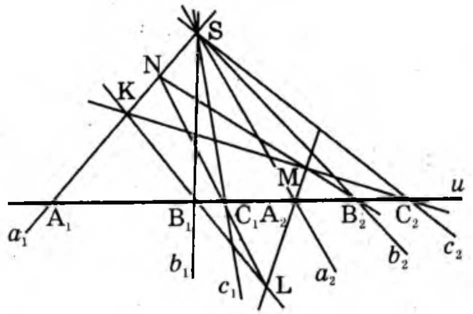


Рис. 2.138

2.46. Нехай на прямій u дано дві пари відповідних точок A і A', B і B' та точка C. Через точки A, A' і довільну точку P , яка не лежить на прямій u, проведемо коло (O_1, R_1) (рис. 2.137). Друге коло (O_2, R_2) проводимо через точки B, B' і P. Ці кола перетинаються в другій точці Q. Пряма PQ – їх радикальна вісь. Точка O перетину прямої u з прямою PQ – центр інволюції, заданої парою відповідних точок A і A', B і B'.

Для побудови точки C', інволюційно відповідної точці C, проведемо коло (O_3, R_3) через точки P, Q, C, воно перетне пряму u в шуканій точці C'. Це випливає з того, що $OC \cdot OC' = OP \cdot OQ = \text{const}$. Коло з центром у точці O і радіусом, рівним відрізку OT дотичної з точки O до одного з кіл пучка, перетне пряму u в точках X і Y, які є подвійними точками інволюції: $OX = OY = OT$.

2.47. Нехай пучки $S_1(a_1, b_1, c_1, \ldots)$ і $S_2(a_2, b_2, c_2, \ldots)$ зі спільним центром S утворюють еліптичну інволюцію прямих (рис. 2.138).

Перетнемо прямі даних пучків довільною прямою u. Тоді точки перетину прямих пучків з прямою u утворять на прямій u еліптичну інволюцію двох рядів точок $u_1(A_1, B_1, C_1, \ldots)$ і $u_2(A_2, B_2, C_2, \ldots)$ зі спільним носієм u.

Пряма c_1 пучка S_1 перетне пряму u в точці C_1. Побудуємо на прямій u точку C_2, інволюційно відповідну точці C_1 в інволюції, визначеній парами точок A і A_1, B і B_1 одним із відомих способів. Пряма SC_2, віднесена до пучка S_2, буде шуканою прямою c_2.

2.48. Підставимо в дану формулу значення x': $-5 = \dfrac{2x+1}{x-3}$.

Звідси знайдемо $x = 2$. Отже, точка $M'(-5)$ є образом точки $M(2)$ у даній відповідності.

2.49. За умовою $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Підставивши ці значення в дані формули, знайдемо $x'_1 : x'_2 = 11 : 5$. Отже, образом точки $A(3 : 2)$ у даній відповідності є точка $A'(11 : 5)$.

2.50. Щоб знайти формули оберненого перетворення, треба дану систему рівнянь розв'язати відносно x_1 і x_2. Дістанемо формули оберненого перетворення:

$$\begin{cases} \rho x_1 = 2x'_1 - x'_2, \\ \rho x_2 = -3x'_1 + 2x'_2. \end{cases}$$

2.51. Шукана точка D гармонічно спряжена з точкою A, тому

$$-1 = (BC, AD) = \frac{x_A - x_B}{x_A - x_C} : \frac{x_D - x_B}{x_D - x_C} = \frac{0-2}{0-3} : \frac{x_D - 2}{x_D - 3}.$$

Звідси $x_D = 2\frac{2}{5}$. Отже, шуканою є точка $D\left(2\frac{2}{5}\right)$.

2.52. За умовою $(AC, BD) = -1$. У координатах:

$$\frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = \frac{4-1}{4+2} : \frac{x_D - 1}{x_D + 2} = \frac{3}{6} : \frac{x_D - 1}{x_D + 2} = -1.$$

Звідси $x_D = 0$. Отже, шуканою є точка $D(0)$.

2.53. Подвійне відношення чотирьох прямих виражається через їх кутові коефіцієнти рівністю

$$(n_1 n_2, n_3 n_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2},$$

де n_1, n_2, n_3, n_4 – прямі, k_1, k_2, k_3, k_4 – їхні кутові коефіцієнти. За умовою задачі $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 0{,}5$, $n_4 = 4$. Тоді

$$(n_1 n_2, n_3 n_4) = \frac{0{,}5-1}{0{,}5-2} : \frac{4-1}{4-2} = \frac{2}{9}.$$

Отже, $(n_1 n_2, n_3 n_4) = \frac{2}{9}$.

2.54. Дано прямі n_1: $y = 0$, n_2: $x = 0$, n_3: $y = x$, n_4: $y = -x$. Тоді $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$, $k_3 = 1$, $k_4 = -1$ і

$$(n_1 n_2, n_3 n_4) = \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2} = \lim_{k_2 \to \infty} \left(\frac{1-0}{\frac{1}{k_2} - 1} : \frac{-1-0}{\frac{-1}{k_2} - 1} \right) = -1.$$

Отже, $(n_1 n_2, n_3 n_4) = -1$, тобто четвірка прямих n_1, n_2, n_3, n_4 – гармонічна.

2.55. Позначимо дані прямі n_1: $y = -2x$, n_2: $y = x$, n_3: $y = 3x$, а шукану пряму через n_4. За умовою задачі $(n_1 n_2, n_3 n_4) = -1$, або через кутові коефіцієнти прямих

$$\frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} : \frac{k_4 - k_1}{k_4 - k_2} = \frac{3+2}{3-1} : \frac{k_4 + 2}{k_4 - 1} = -1,$$

де k_4 – кутовий коефіцієнт прямої n_4. Звідси $k_4 = \frac{1}{7}$ і рівняння шуканої прямої n_4: $y = \frac{1}{7}x$.

2.56. Знайдемо подвійні точки даної інволюції. Для цього покладемо $x' = x$. Дістанемо квадратне рівняння $x^2 - x - 2 = 0$. Його корені $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Отже, дана інволюція на прямій має дві подвійні точки, тому маємо гіперболічну інволюцію.

2.57. Формули інволюції в декартових координатах мають вигляд $x' = \frac{ax + b}{cx - a}$. Треба знайти значення a, b і c. Для цього підставимо значення x і x' спочатку точок A і A', потім точок B і B'. Дістанемо систему двох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a - b - 2c = 0, \\ 5a - b - 14c = 0. \end{cases}$$

Розв'язками цієї системи у відношеннях є $\frac{a}{b} = 3$, $\frac{c}{b} = 1$. Тоді формула даної інволюції має вигляд: $x' = \frac{3x + 1}{x - 3}$.

2.58. Нехай точка $M(-2)$ належить першому ряду, тобто $x = -2$. Тоді за даною формулою знаходимо $x' = -\frac{1}{5}$. Отже, точці $M(-2)$ першого ряду відповідає точка $M'\left(-\frac{1}{5}\right)$ другого ряду. Нехай тепер точка

$M(-2)$ належить другому ряду, тобто $x' = -2$. Тоді знайдемо, що $x = -\frac{1}{5}$. Отже, точці $M(-2)$, віднесеній до другого ряду, відповідає точка $M'\left(-\frac{1}{5}\right)$ першого ряду.

Розділ 3

3.9. Аналогічно до розв'язання задачі 2.4 § 16 і прикладу 1 § 26.
3.10. 1. Вибрати дві з п'яти даних прямих за носії проективних рядів першого порядку, проективність яких встановлюється трьома парами точок перетину вибраних прямих з трьома іншими прямими. На вибраних носіях побудувати інші пари відповідних точок, які визначатимуть нові прямі пучка другого порядку (задача 2.3 § 16). 2. Аналогічно до розв'язання задачі 3.5 § 29.

3.11. Нехай лінія другого порядку задана п'ятьма точками A, B, C, D, E, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Виберемо дві з них, наприклад A і B, за центри твірних пучків першого порядку, проективна відповідність між прямими яких встановлюється трьома парами відповідних прямих AC і BC, AD і BD, AE і BE. Спільною прямою цих пучків є пряма $AB = m$. За означенням пряма m_2 пучка B, що відповідає спільній прямій m, віднесеній до першого пучка A, буде дотичною до ряду точок другого порядку в точці B, тобто дотичною до лінії другого порядку в точці B. Аналогічно, пряма m_1 пучка A, що відповідає прямій m, віднесеній до пучка B, буде дотичною до даної кривої в точці A. Отже, для побудови дотичних до даної лінії другого порядку в точках A і B треба побудувати образи спільної прямої m даних пучків, віднесеної спочатку до прямих першого пучка, а потім до прямих другого пучка.

3.12. Два проективні ряди точок утворюють пучок прямих (криву) другого порядку. За означенням точкою дотику прямої s_1 є образ спільної точки рядів s_1 і s_2, віднесений до ряду s_2. Отже, для побудови точок дотику прямих s_1 і s_2 треба на цих прямих побудувати образи спільної точки цих прямих, віднесеної спочатку до одного ряду, а потім до другого ряду (властивість 4 § 29).

3.13. Дві сторони кутів описують перспективні пучки, віссю перспективності яких є пряма m. Дві інші сторони цих кутів описують пучки, рівні двом першим, тому проективні між собою. Точки перетину відповідних прямих належать лінії другого порядку.

3.14. В обох випадках прямі описують рівні пучки. Якщо вони обертаються в однакових напрямах, то кут між ними залишається сталим. Якщо цей кут не нуль, то точка перетину прямих описує коло. Якщо цей кут нуль, то точка перетину описує нескінченно віддалену пряму. Якщо прямі обертаються в протилежних напрямах, то у двох положеннях вони будуть паралельними, і напрями їх у цих положеннях будуть перпендикулярними між собою. Це випливає з того, що паралельні їм прямі, проведені через нерухому точку, описують симетричні пучки і тому збігаються у двох перпендикулярних положеннях. В одному із паралельних положень прямі, що обертаються, можуть також суміститись; тоді точка їх перетину описує пряму, перпендикулярну до відрізка, який сполучає нерухомі точки, у його середині. Якщо ж паралельність в обох положеннях не є суміщення, то пучки, описані прямими, що обертаються, неперспективні, і точка їх перетину описує криву другого порядку з двома нескінченно віддаленими точками в перпендикулярних напрямах, тобто рівнобічну гіперболу з перпендикулярними асимптотами.

3.15. Нехай N, M, K – нерухомі точки, A, B, C – вершини трикутника (рис. 2.139). Коли сторона AB обертається навколо точки K, точки A,B описують на прямих a, b перспективні ряди; сторони AC, BC описують навколо точок N і K пучки, перспективні рядам (C) і (B), тобто проективні між собою. Прямі AC, BC можуть суміститися з прямою NM тільки тоді, коли пряма BC суміститься з нею, а це можливо лише в тому випадку, коли точка K лежить на прямій NM. Тому, якщо точки K, M, N не лежать на одній прямій, то пучки (AC), (BC) неперспективні, і точка C описує лінію другого порядку. Якщо ж точки K, M, N лежать на одній прямій, то пучки (AC), (BC) перспективні, і точка C описує пряму.

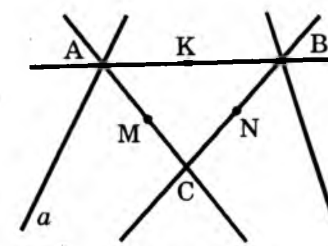


Рис. 2.139

3.16. Коли вершина C описує пряму u, сторони AC і BC описують перспективні пучки, а висоти BB_1 і AA_1 описують пучки, відповідно рівні цим пучкам, тому проективні між собою (рис. 2.140).

Прямі BB_1, AA_1 збігаються з прямою AB тільки тоді, коли сторони AC, BC стануть перпендикулярними до прямої AB. Це можливо лише в тому випадку, коли пряма u перпендикулярна до прямої AB. У цьому випадку пучки, які описують прямі BB_1, AA_1,

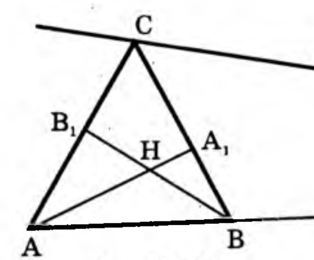


Рис. 2.140

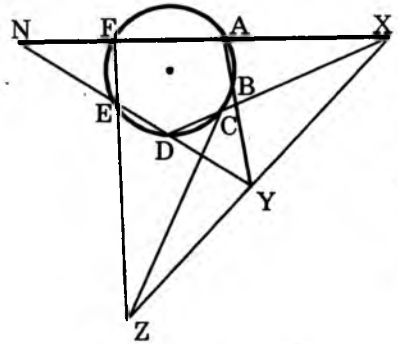


Рис. 2.141

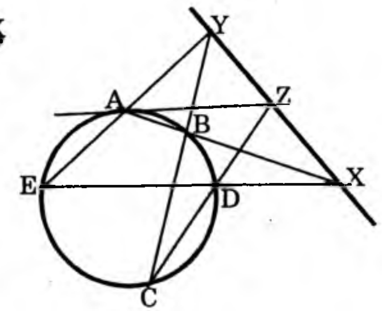


Рис. 2.142

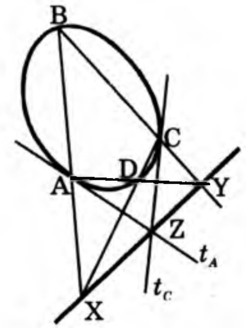


Рис. 2.143

перспективні, і тоді точка їх перетину H описує пряму, також перпендикулярну до AB, відмінну від прямої u.

Якщо пряма u не перпендикулярна прямій AB, то точка H описує лінію другого порядку, яка буде гіперболою з асимптотами, перпендикулярними до прямих AB і u, якщо u нахилена до AB, і параболою з віссю, перпендикулярною до AB і до u, якщо u паралельна AB.

3.17. Нехай дані п'ять точок A, B, C, D, E і пряма AN (рис. 2.141). Треба знайти точку F перетину прямої AN з лінією другого порядку k^2, заданою даними п'ятьма точками. Використовуємо теорему Паскаля до вписаного у криву k^2 шестивершинника $ABCDEF$, вершину F якого треба знайти. Оскільки напрям на точку F визначений деякою прямою AN, то можна знайти пряму Паскаля за двома точками $X = AN \times DC$ і $Y = AB \times ED$. Тоді пряма BC в перетині з прямою XY визначить точку Z, в якій перетинається третя пара протилежних сторін: $Z = BC \times EF$. Отже, шукану точку F знаходимо як точку перетину прямої AN і прямої ZE.

3.18. Використаємо теорему Паскаля для п'ятивершинника $ABCDE$, де A, B, C, D, E – дані п'ять точок лінії другого порядку k^2 (рис. 2.142). Точки перетину пар несуміжних сторін його визначають пряму Паскаля: $X = AB \times DE$, $Y = BC \times EA$. Для побудови дотичної в точці A проведемо пряму CD до перетину з прямою XY у точці Z. Тоді пряма AZ – дотична до даної лінії другого порядку в точці A. Справедливість побудови випливає з теореми Паскаля для п'ятивершинника $ABCDE$.

3.19. Дані точки A, B, C, D і дотична t_A у точці A (рис. 2.143). Застосуємо теорему Паскаля до вписаного в лінію другого порядку чотиривершинника $ABCD$. Пряма Паскаля визначається точками перетину пар протилежних сторін: $X = AB \times CD$ і $Y = AD \times BC$. Дотична t_A перетинає пряму XY у точці Z. Тоді пряма CZ – дотична до даної лінії другого порядку в точці C.

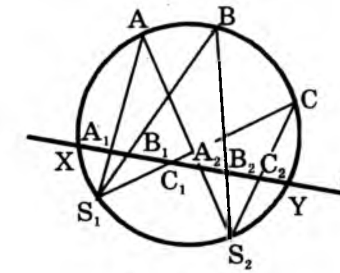


Рис. 2.144

3.20. Нехай S_1, S_2, A, B, C – дані п'ять точок кривої k^2 і d – довільна дана пряма (рис. 2.144). Виберемо точки S_1, S_2 за центри двох проективних пучків першого порядку

$$S_1(S_1A, S_1B, S_1C, \ldots) \barwedge S_2(S_2A, S_2B, S_2C, \ldots).$$

Ці проективні пучки проектують на прямій d два проективні ряди точок із спільним носієм d:

$$d(A_1, B_1, C_1, \ldots) \barwedge d(A_2, B_2, C_2, \ldots).$$

Шуканими точками перетину прямої d з кривою k^2 є подвійні точки X і Y встановленої на прямій d проективної відповідності двох рядів точок із спільним носієм d.

Якщо подвійні точки (а їх може бути не більше двох) збігаються, то пряма d буде дотичною до кривої k^2.

Якщо подвійні точки уявні, то пряма d не перетинає криву k^2.

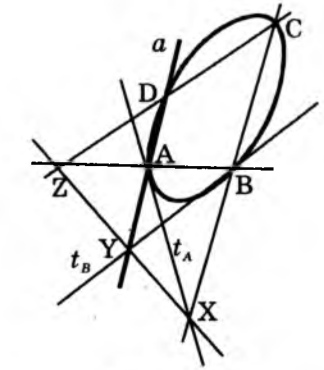


Рис. 2.145

3.21. Дані три точки A, B, C лінії другого порядку і дотичні t_A і t_B в точках A і B. Через точку A проведена довільна пряма a. Треба побудувати другу точку перетину прямої a з кривою (рис. 2.145).

Використаємо теорему Паскаля для чотиривершинника $ABCD$, в якому точка D – шукана. Пряма Паскаля визначається двома точками $X = t_A \times BC$ і $Y = t_B \times a$. Сторона AB перетинає пряму XY у точці Z. Тоді шукана точка D є точкою перетину прямої a з прямою CZ.

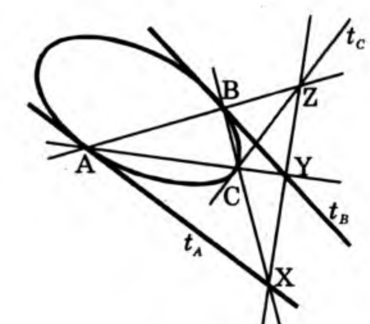


Рис. 2.146

3.22. Дано три точки A, B, C лінії другого порядку і дотичні t_A, t_B в точках A і B (рис. 2.146). Треба побудувати дотичну до заданої лінії в точці C.

Застосуємо теорему Паскаля до вписаного в лінію другого порядку тривершинника ABC. Пряма Паскаля визначається точками $X = t_A \times BC$ і $Y = t_B \times AC$.

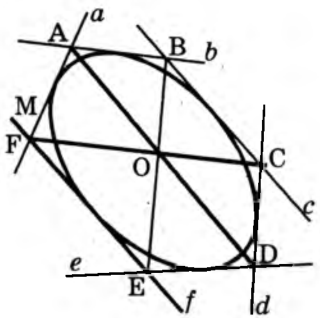


Рис. 2.147

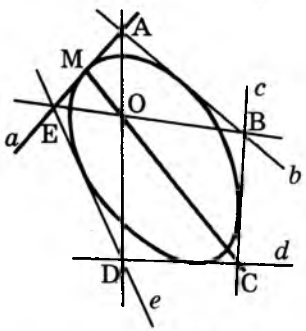


Рис. 2.148

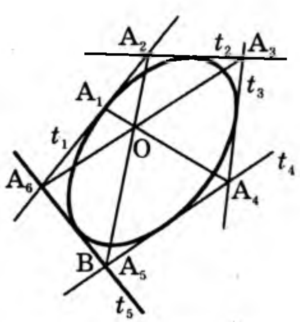


Рис. 2.149

Пряма AB перетинає пряму XY в точці Z. Тоді пряма CZ – дотична в точці C.

3.23. Нехай точка M дана на дотичній a. Розглянемо шестисторонник $abcdef$, описаний навколо кривої другого порядку, в якому f – шукана дотична (рис. 2.147).

Застосуємо до цього шестисторонника теорему Бріаншона. Вершини шестисторонника як точки перетину послідовних дотичних позначимо $A = a \times b$, $B = b\times c$, $C = c\times d$, $D = d\times e$, $E = e\times f$, $F = f\times a(= M)$.

Завдання зводиться до побудови точки E. Точка O Бріаншона як точка перетину прямих, що проходять через протилежні вершини шестисторонника, визначається прямими AD і CM. Тоді точка E знаходиться як точка перетину дотичної e з прямою OB, а пряма ME – шукана друга дотична, проведена з точки M до даної кривої.

3.24. Застосуємо до п'ятисторонника $abcde$, описаного навколо лінії другого порядку, теорему Бріаншона. Позначимо його вершини $A = a\times b$, $B = b\times c$, $C = c\times d$, $D = d\times a$ і шукану точку дотику прямої a через M. Точкою Бріаншона буде точка $O = AD\times BE$. Тоді точкою M дотику прямої a є точка перетину прямої a з прямою CO: $M = a\times CO$ (рис. 2.148).

3.25. Дані чотири дотичні t_1, t_2, t_3, t_4 і точка дотику A_1 на дотичній t_1 (рис. 2.149). Візьмемо на дотичній t_4 довільну точку B. Позначимо $t_1\times t_2 = A_2$, $t_2\times t_3 = A_3$, $t_3\times t_4 = A_4$. Застосуємо теорему Бріаншона до описаного навколо лінії другого порядку п'ятисторонника зі сторонами t_1, t_2, t_3, t_4 і шуканою дотичною t_5. Точка Бріаншона $O = A_2B\times A_1A_4$, тоді $A_3O\times t_1 = A_6$. Пряма BA_6 – шукана дотична. Змінюючи положення точки B на дотичній t_4, будемо мати інші дотичні до даної лінії другого порядку.

3.26. Нехай дані чотири дотичні t_1, t_2, t_3, t_4 і точка дотику A_1 дотичної t_1 (рис. 2.150). Позначимо $t_1\times t_2 = A_2$, $t_2\times t_3 = A_4$, $t_3\times t_4 = A_5$, $t_4\times t_1 = A_6$.

Шукану точку дотику дотичної t_2 позначимо A_3. Точкою Бріаншона буде точка $O = A_1A_4\times A_2A_5$. Тоді пряма A_6O перетне дотичну t_2 в шуканій точці дотику $A_3 = A_6O\times t_2$.

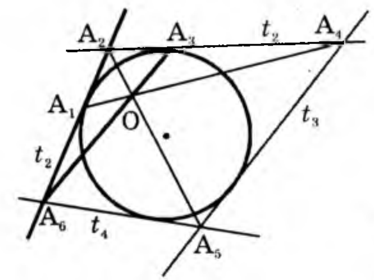


Рис. 2.150

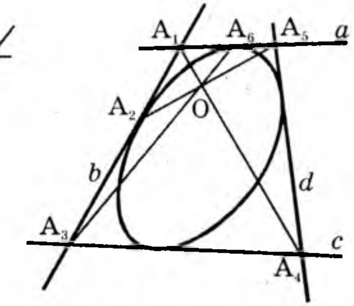


Рис. 2.151

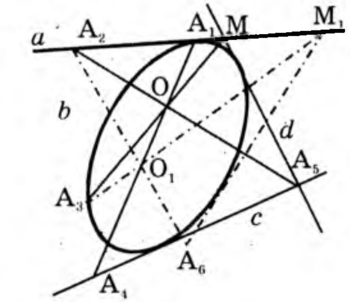


Рис. 2.152

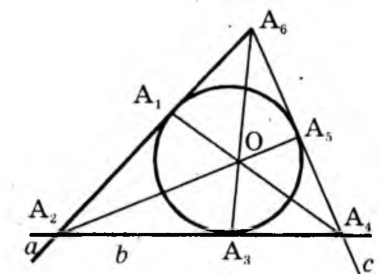


Рис. 2.153

3.27. *Перший спосіб*. Застосуємо теорему Бріаншона до чотиристоронника, утвореного даними трьома дотичними a, b, c і четвертою d – шуканою дотичною. Позначимо вершини цього чотиристоронника і точки дотику в такому порядку: $A_1 = a\times b$, A_2 – точка дотику дотичної b, $A_3 = b\times c$, $A_4 = c\times d$, $A_5 = d\times a$, A_6 – точка дотику дотичної a (рис. 2.151). Точку O Бріаншона візьмемо довільно на прямій A_3A_6. Тоді пряма A_1O перетне дотичну c в точці A_4, а пряма A_2O перетне дотичну a в точці A_5. Пряма $A_4A_5 = d$ – одна із шуканих дотичних. Змінюючи положення точки O на прямій A_3A_6, матимемо інші дотичні до даної лінії другого порядку.

Другий спосіб. Нехай точки A_1 і A_3 – точки дотику дотичних a і b. Крім того, позначимо $a\times b = A_2$, $b\times c = A_4$ (рис. 2.152). Тоді точкою Бріаншона буде точка $O = A_1A_4\times A_3M$, де M – довільна точка дотичної a. Позначивши $A_5 = A_2O\times c$, дістанемо пряму $MA_5 = d$ – шукану четверту дотичну до даної лінії другого порядку. Змінюючи положення точки M на прямій a, будемо мати інші дотичні до даної k^2. Наприклад, для точки $M_1\in a$ дістанемо дотичну $M_1A_6 = d$ і т.д.

3.28. Застосуємо теорему Бріаншона до трикутника, утвореного даними трьома дотичними. Позначимо вершини трикутника і точки дотику в такому порядку: A_1 – точка дотику прямої a, $A_2 = a\times b$, A_3 – точка дотику прямої b, $A_4 = b\times c$. Треба побудувати точку дотику A_5 дотичної c, $A_6 = a\times c$ (рис. 2.153). Точка Бріаншона $O = A_1A_4\times A_3A_6$. Проведемо пряму A_2O до перетину з дотичною c в точці A_5, яка і буде шуканою точкою дотику.

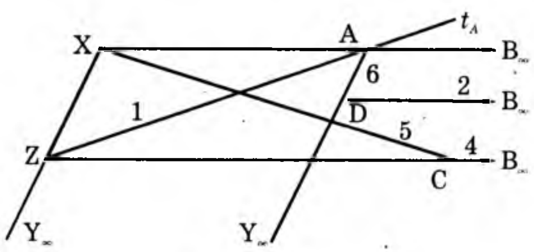


Рис. 2.154

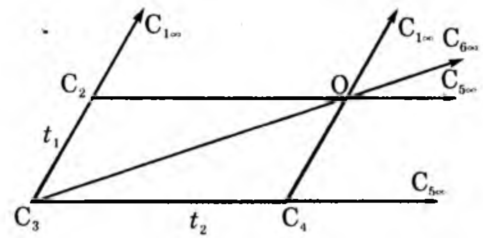


Рис. 2.155

3.29. Нехай дано точки A, B_∞, C, D (рис. 2.154). Застосуємо теорему Паскаля до вписаного в параболу чотиривершинника $AB_\infty CD$. Сторони і дотичні у двох вершинах візьмемо в такому порядку: 1) дотична t_A в точці A, 2) пряма AB_∞, 3) невласна пряма площини α_∞ (дотична в точці B_∞); 4) пряма CB_∞; 5) пряма CD; 6) пряма DA. Пряма Паскаля визначається точками $X = AB_\infty \times CD$ і $Y_\infty = \alpha_\infty \times DA$. Нехай Z – точка перетину прямої CB_∞ з прямою XY_∞, тоді пряма ZA – дотична в точці A.

3.30. Позначимо дані дотичні через t_1 і t_2, точки дотику на них через C_2 і C_4, напрям осі параболи – $C_{6\infty}$ (рис. 2.155). Застосуємо теорему Бріаншона до описаного навколо параболи трикутника, утвореного прямими t_1, t_2 і невласною прямою площини $t_{3\infty}$. Вершини і точки дотику зручно взяти в такому порядку: 1) невласна точка дотичної t_1 $C_{1\infty} = t_{3\infty} \times t_1$, 2) точка дотику дотичної t_1 – C_2; 3) $C_3 = t_1 \times t$; 4) точка дотику дотичної t_2 – C_4; 5) невласна точка дотичної t_2 – $C_{5\infty}$; 6) шукана точка дотику невласної прямої $t_{3\infty}$ – точка $C_{6\infty}$, яка визначає напрям осі параболи. Тоді точка O Бріаншона визначається як точка перетину прямої $C_2C_{5\infty}$, проведеної через точку C_2 паралельно дотичній t_2, і прямої $C_4C_{1\infty}$, проведеної через точку C_4 паралельно дотичній t_1. Пряма C_3O визначає напрям осі $C_{6\infty}$ параболи.

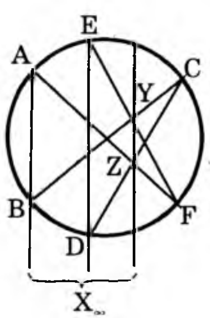


Рис. 2.156

3.31. Використати матеріал § 28.

3.32. Використати матеріал § 30.

3.33. Використати матеріал § 30.

3.34. Використати матеріал § 30.

3.35. Якщо, наприклад, невласною точкою конфігурації Паскаля – Паппа є одна з точок прямої Паскаля, то в шестивершиннику, вписаному в лінію другого порядку, має бути одна пара протилежних сторін, паралельних між собою, як на рис. 2.156: у шестивершиннику $ABCDEF$ пара протилежних

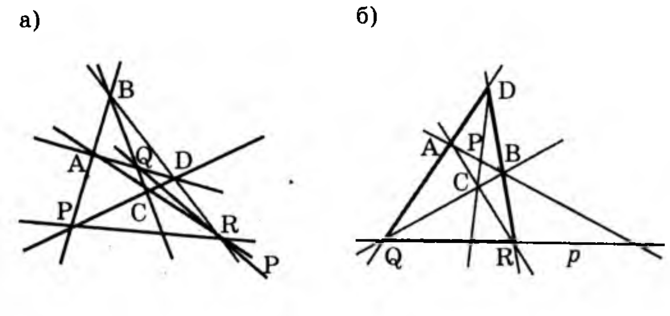


Рис. 2.157

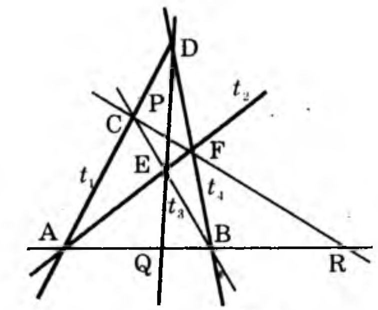


Рис. 2.158

сторін $AB \parallel DE$, їм відповідає точка X_∞ прямої Паскаля, визначена точками $Y = BC \times EF$ і $Z = CD \times FA$. При цьому $YZ \parallel AB$.

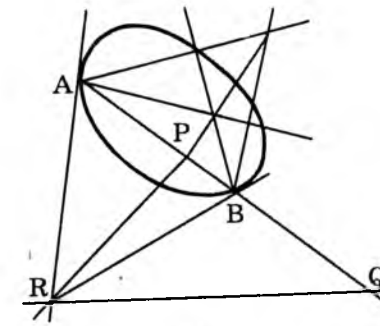


Рис. 2.159

3.36. В умові задачі не вказано, де знаходиться дана точка P відносно лінії другого порядку, тому можливі два випадки: 1) точка P поза кривою k^2; 2) точка P всередині кривої. Розв'язання задачі в обох випадках аналогічне: чотири точки A, B, C, D перетину двох прямих, які проходять через точку P, з кривою k^2 можна вважати вершинами повного чотиривершинника, а точку P – однією з його діагональних точок. Знайдемо дві інші діагональні точки: $R = AC \times BD$ і $Q = AD \times BC$. За властивостями полярного трикутника PQR та за означенням 4 поляри діагональ $RQ = p$ є полярою точки P (рис. 2.157а,б).

3.37. Дано точки A, B, з яких проведено дві пари дотичних t_1, t_2 і t_3, t_4 (рис. 2.158). Позначимо точки перетину дотичних: $C = t_1 \times t_3$, $D = t_1 \times t_4$, $E = t_2 \times t_3$, $F = t_2 \times t_4$. Тоді прямі CD, DF, FE, і CE можна розглядати як сторони повного чотиристоронника, описаного навколо лінії другого порядку k^2. Прямі AB, CF, DE, які сполучають пари протилежних вершин, є діагоналями, а точки їх перетину R, P, Q – діагональними точками.

За властивостями полярного трикутника PQR, якщо пряма $AB = QR$ є полярою, то полюсом прямої AB буде точка P.

У розглянутому розв'язанні задачі пряма AB не має спільних точок з кривою k^2. Аналогічним є розв'язання задачі, коли пряма має з k^2 одну або дві спільні точки.

3.38. Нехай вершина P лежить всередині накресленої лінії другого порядку k^2, A і B – точки перетину даної сторони з k^2 (рис. 2.159). Другу вершину Q полярного трикутника знайдемо, побудувавши точку, гармонічно спряжену з точкою P відносно точок A і B. Третю вершину R знайдемо як полюс поляри PQ. Точка R буде точкою перетину дотичних до k^2 в точках A і B.

Другий випадок розглядається аналогічно.

Розділ 4

4.3. Використати доведення теореми 4.2 § 31.

4.4. Відповідні пари точок визначають відповідні в даній колінеації дві прямі: прямим $u = AB$ і $v = CD$ відповідають прямі $u' = A'B'$ і $v' = C'D'$. Точці $O = AB \times CD$ відповідає точка $O' = A'B' \times C'D'$. Три пари відповідних точок A і A', B і B', O і O' визначають проективну відповідність рядів u і u'. Аналогічно три пари відповідних точок C і C', D і D', O і O' визначають проективну відповідність рядів v і v'. Нехай пряма поля ω перетинає прямі u і v в точках M і N. Побудуємо за встановленою проективною відповідністю рядів u і u', v і v' точки $M' \in u'$ і $N' \in v'$, відповідні точкам $M \in u$ і $N \in v$. Точки M' і N' визначають шукану пряму m' поля ω'.

4.5. На полі ω дані чотири прямі утворюють чотиристоронник $abcd$. Позначимо його вершини $A = a\times b$, $B = b\times c$, $C = c\times d$, $D = d\times a$. Точкам A, B, C, D у полі ω' відповідатимуть точки $A' = a'\times b'$, $B' = b'\times c'$, $C' = c'\times d'$, $D' = d'\times a'$. Маючи чотири пари відповідних точок, побудуємо точку $M' \in \omega'$, відповідну даній точці $M \in \omega$ (як у задачі 4.3).

4.6. Виконання побудови зводиться до знаходження чотирьох пар відповідних точок, як у задачі 4.5, потім до знаходження прямої m', як у задачі 4.4.

4.7. Використати розв'язання задачі 4.1 § 32.

4.8. Спочатку для довільної точки C, яка не належить прямій AA', побудувати відповідну їй точку C'. Маючи пару відповідних точок C і C' таких, що точка B не належить прямій CC', побудувати точку B', відповідну точці B, як у задачі 4.7.

4.9. Точки перетину відповідних прямих $M = a \times a'$ і $N = b \times b'$ визначають вісь гомології $s = MN$. Довільна пряма, проведена через точку S, перетне прямі a і a' у гомологічно відповідних точках A і A'. Далі побудова точки M', відповідної даній точці M, виконується як у задачі 4.7.

4.10. Оскільки центр гомології – невласна точка S_∞, то всі прямі, що сполучають пари відповідних точок, паралельні між собою, у даному випадку паралельні прямій AA'. Отже, точка M', відповідна точці M, лежатиме на прямій m, що проходить через точку M паралельно прямій AA' (рис. 2.160).

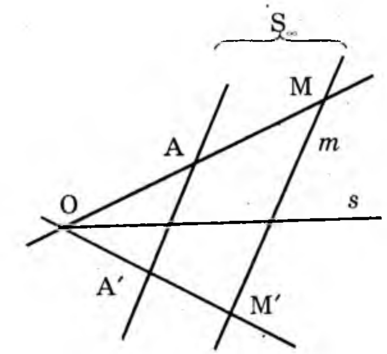


Рис. 2.160

Відповідні прямі перетинаються на осі гомології, тому для знаходження точки M' проведемо пряму AM до перетину з віссю s в точці O. Шуканою точкою M' буде точка перетину прямої m з прямою OA'.

4.11. Відповідні прямі AB і $A'B'$ перетинаються на осі гомології, а оскільки вісь гомології – невласна пряма s_∞, то $AB \parallel A'B'$. Тому точка B' лежатиме на прямій b, проведеній через точку A' паралельно прямій AB, і на прямій SB: $B' = b \times SB$ (рис. 2.161). Отже, якщо вісь гомології – невласна пряма, то така гомологія є гомотетією з центром S і коефіцієнтом $k = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SB'}{SB}$. У випадку, коли $k = -1$, матимемо центральну симетрію з центром S (її ще називають інволюційною гомологією).

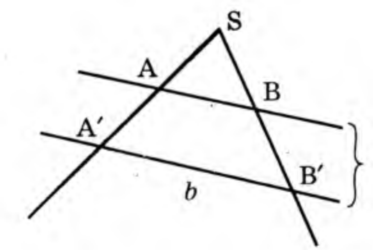


Рис. 2.161

4.12. Оскільки центр гомології невласний, то прямі, що сполучають відповідні точки, паралельні між собою. Тому точка M' лежатиме на прямій m, проведеній через точку M паралельно прямій AA' (рис. 2.162). Вісь гомології – невласна пряма s_∞, тому прямі, що сполучають образи, паралельні прямим, що сполучають прообрази, тобто $AM \parallel A'M'$. Звідси точка $M' = m \times n$, де n – пряма, що проходить через точку A' паралельно прямій AM. Отже, гомологія є паралельним переносом.

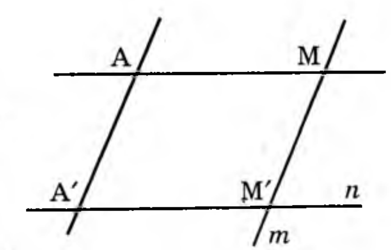


Рис. 2.162

4.13. Підставимо у формули

$$\rho x_1' = 2x_1 + x_2 - 3x_3,$$
$$\rho x_2' = x_1 - 3x_2 - 2x_3,$$
$$\rho x_3' = 3x_1 - x_2 + x_3$$

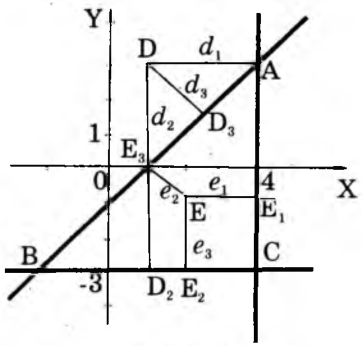


Рис. 2.163

замість x_1, x_2, x_3 координати точки A. Дістанемо $\rho x'_1 = -3$, $\rho x'_2 = -9$, $\rho x'_3 = -4$. Звідси $x'_1 : x'_2 : x'_3 = -3 : -9 : -4$. Отже, точці $A(-1 : 2 : 1)$ в даній колінеації відповідає точка $A'(-3 : -9 : -4)$. Аналогічно образом точки $B(2 : 0 : -1)$ є точка $B'(7 : 0 : 5)$.

4.14. Однорідні проективні координати x_1, x_2, x_3 точки M пропорційні відношенням відстаней даної точки до відстаней одиничної точки до відповідних сторін базисного (координатного) трикутника: $x_1 : x_2 : x_3 = \frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3}$, де d_1, d_2, d_3 і e_1, e_2, e_3 – відповідно відстані до сторін XY, OX, OY. Для точки O $d_1 \neq 0$, $d_2 = d_3 = 0$; для точки X $d_1 = d_3 = 0$, $d_2 \neq 0$; для точки Y $d_1 = d_2 = 0$, $d_3 \neq 0$. Тому координати вершин базисного трикутника будуть $O(1 : 0 : 0)$, $X(0 : 1 : 0)$, $Y(0 : 0 : 1)$.

4.15. Використаємо формулу відстані d точки $D(x_1; y_1)$ від прямої $Ax + By + C = 0$: $d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Нехай базисним трикутником є трикутник ABC, сторонами якого є прямі AC: $x - 4 = 0$; BC: $y + 3 = 0$; AB: $x - y - 1 = 0$ (рис. 2.163).

Підставивши у формулу відстані координати $D(1; 3)$ і $E(2; -1)$, знайдемо $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 6 : -3$ або $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : -1$. Отже, точка D має однорідні проективні координати $(1 : 2 : -1)$.

4.16. Рівняння сторін базисного трикутника проективної системи координат в однорідних декартових координатах матимуть вигляд $x_1 - 4x_3 = 0$, $x_2 - 3x_3 = 0$, $3x_1 + 12x_3 = 0$.

Використовуємо геометричний зміст однорідних проективних координат $x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{d_1}{e_1} : \frac{d_2}{e_2} : \frac{d_3}{e_3}$, де x'_1, x'_2, x'_3 – однорідні проективні координати точки D, а d_1, d_2, d_3, e_1, e_2, e_3 – відстані точок D і E до сторін базисного трикутника.

Позначивши однорідні декартові координати точки D через x_1, x_2, x_3 і знаючи координати точки $E(3; 2)$, або в однорідних декартових координатах $E(3 : 2 : 1)$, знайдемо:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \frac{x_1 - 4x_3}{-1} : \frac{x_2 - 3x_3}{-1} : \frac{3x_1 + 4x_2 - 12x_3}{5}$$

або

$$1 : 2 : 1 = \frac{x_1 - 4x_3}{-1} : \frac{x_2 - 3x_3}{-1} : \frac{3x_1 + 4x_2 - 12x_3}{5}.$$

Звідси маємо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 5x_1 - 20x_3 = 1, \\ 5x_2 - 15x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язки системи: $x_1 = -\frac{2}{10}$; $x_2 = \frac{1}{10}$; $x_3 = -\frac{1}{10}$.

Отже, однорідними декартовими координатами точки D є трійка чисел $(-2 : 1 : -1)$, а неоднорідними $x = 2$, $y = -1$.

4.17. Рівняння прямої в проективних координатах має вигляд

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \qquad (4.14)$$

Рівняння сторін координатного трикутника OXY будемо шукати як рівняння прямих, що проходять через дві дані точки.

Пряма XY проходить через точки $X(1 : 0 : 0)$ і $Y(0 : 1 : 0)$, тому координати цих точок задовольняють рівняння (4.14):

$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0$, звідси $a = 0$;

$a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0$, звідси $b = 0$.

Отже, рівняння прямої XY буде $cx_3 = 0$, але $c \neq 0$, тому $z = 0$. Аналогічно рівняння прямої OX буде $y = 0$, а прямої OY матиме вигляд $x = 0$. Проведемо довільну пряму через точку X, тобто пряма проходить через точку $X(1 : 0 : 0)$. Координати точки X задовольняють рівняння прямої $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0$, маємо $a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 = 0$, звідси $a_1 = 0$. Отже, рівняння прямої, яка проходить через вершину X координатного трикутника, має вигляд

$b_1x_2 + c_1x_3 = 0$.

4.18. Загальне рівняння лінії другого порядку в однорідних проективних координатах має вигляд

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 = 0. \qquad (4.16)$$

Координати вершин $X(1 : 0 : 0)$, $Y(0 : 1 : 0)$, $O(0 : 0 : 1)$ базисного трикутника задовольняють рівняння (4.16). Підставивши координати точок X, Y, O в рівняння (4.14), знайдемо: $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$.

Отже, рівняння такої лінії другого порядку буде

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0.$$

4.19. Вісь абсцис має рівняння $y = 0$, тому після перетворення вона перейде в пряму $2x - y + 3 = 0$. Вісь ординат має рівняння $x = 0$, їй відповідною буде пряма $x + 2y + 1 = 0$. Для невласної прямої XY принаймні одна з координат x або y перетворюється в нескінченність. Тому пряма XY перейде в пряму $x + y + 2 = 0$.

4.20. Формули оберненого перетворення мають вигляд:

$$x = \frac{6x' + 2y' - 4}{-2x' + y' + 3}; \quad y = \frac{-4x' - 3y' + 11}{-2x' + y' + 3}.$$

4.21. Формули колінеарного перетворення в декартових координатах мають вигляд:

$$x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}; \quad y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3}.$$

Координати точок O, E_1, E_2, E підставимо у праві частини цих рівностей, а координати точок O', E'_1, E'_2, E' – у ліві частини. Дістанемо систему з восьми рівнянь з дев'ятьма невідомими. Значення восьми коефіцієнтів знайдемо у відношеннях до дев'ятого, відмінного від нуля. Поклавши $a_1 = 1$, знайдемо всі інші коефіцієнти: $a_2 = -1$, $a_3 = 0$, $b_1 = 4$, $b_2 = 4$, $b_3 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 8$. Шукані формули мають вигляд

$$x' = \frac{x + 4y}{8}; \; y' = \frac{-x + 4y}{8}.$$

4.22. Колінеарне перетворення плоского поля w в плоске поле w' в однорідних проективних координатах виражається формулами

$$\begin{cases} \rho x_1' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3, \\ \rho x_2' = a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3, \\ \rho x_3' = a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3. \end{cases} \quad \text{де} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Підставивши у ці формули відповідні координати точок A, B, C, D і A', B', C', D', дістанемо систему з 12 однорідних рівнянь з 13 невідомими.

Розв'язки цієї системи одержимо у відношеннях до одного з невідомих, наприклад поділивши обидві частини кожного рівняння на ρ_1.

Формули даного колінеарного перетворення матимуть вигляд

$$\begin{cases} \rho x_1' = 7x_1 + 14x_2 + 21x_3, \\ \rho x_2' = -38x_1 + 30x_2 - 15x_3, \\ \rho x_3' = -49x_1 + 42x_2 - 21x_3. \end{cases}$$

Розділ 5

5.2. Нехай A_∞ і B_∞ – невласні точки прямих a і b. За умовою $a \perp b$, це означає, що в абсолютній інволюції образом точки A є точка B. Але за властивостями інволюційного перетворення точка A є образом точки B у цій же інволюції, тому $b \perp a$.

5.3. Позначимо через A_∞ невласну точку даної прямої a. В абсолютній інволюції на прямій a існує єдина точка A', відповідна точці A. Точки A_∞ і A' визначають єдину пряму $A_\infty A'$, яка за означенням буде перпендикулярною до прямої a.

5.4. Використати означення подібного перетворення і аналітичне його задання.

5.5. Використати означення руху площини та його аналітичне задання.

5.6. Шукана пряма проходить через точку M і точку перетину прямої a з невласною прямою u_∞.

5.7. Нехай пряма AB перетинає невласну пряму u_∞ в невласній точці C_∞. Тоді, побудувавши точку D, гармонічно спряжену з точкою C_∞ (одним із відомих способів) відносно точок A і B, дістанемо середину D відрізка AB.

5.8. Нехай у чотиривершиннику $ABCD$ AB і CD, BC і AD – пари протилежних сторін. Оскільки у паралелограма протилежні сторони паралельні, то точки перетину пар протилежних сторін даного чотирикутника визначають невласну пряму.

5.9. Позначимо через M і N точки перетину прямих BC і AB з невласною прямою u_∞. Тоді прямі MA і NC визначають шукану вершину D паралелограма.

5.10. Для побудови медіан трикутника досить знайти середини його двох сторін. Побудова середини відрізка з'ясована у задачі 5.7.

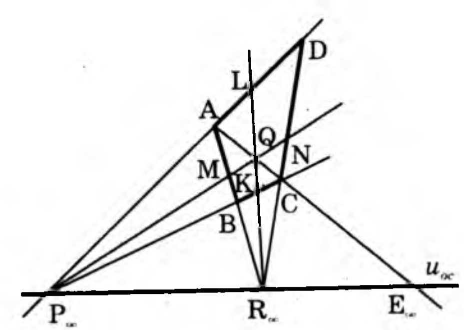


Рис. 2.164

5.11. Нехай дано паралелограм $ABCD$. Позначимо точки перетину паралельних сторін AD і BC, AB і DC з невласною прямою u_∞ відповідно через P_∞ і R_∞ (рис. 2.164).

Паралелограм $ABCD$ можна розглядати як повний чотиривершинник, тоді точки P_∞, R_∞, Q перетину пар його протилежних сторін будуть діагональними точками, а прямі $P_\infty R_\infty$, $P_\infty Q$, $R_\infty Q$ – його діагоналями. Нехай $M = P_\infty Q \times AB$, $N = P_\infty Q \times DC$, $L = R_\infty Q \times AD$, $K = R_\infty Q \times BC$ – точки перетину діагоналей із сторонами повного чотирившинника. За властивостями повного чотиривершинника $(AB, MR_\infty) = -1$ і $(DC, NR_\infty) = -1$. Оскільки R_∞ – невласна точка, то M і N – середини сторін AB і DC паралелограма $ABCD$. Крім того, діагональ $P_\infty Q$, на якій лежать точки M і N, проходить через невласну точку перетину паралельних сторін AD і BC. Тому пряма MN, що сполучає середини протилежних сторін AB і DC, паралельна стороні BC (і AD). Аналогічно доводиться, що пряма LK, що сполучає середини протилежних сторін AD і BC, паралельна стороні AB (і DC).

5.12. Добудувати даний трикутник ABC до повного чотиривершинника $ABCD$ і використати задачу 5.11.

5.13. Оскільки на відрізку AB відома середина M, то можна побудувати невласну точку P_∞ прямої AB як гармонічно спряжену з точкою M відносно точок A і B (одним із відомих способів). Тоді пряма CP_∞ паралельна прямій AB. Аналогічно знаходимо невласну точку R_∞ прямої AC, тоді пряма BR_∞ паралельна прямій AC. Точка D перетину прямих CP_∞ і BR_∞ буде четвертою вершиною шуканого паралелограма.

5.14. Проведемо через точку O дві довільні хорди AB і CD. Оскільки точка O є серединою хорд AB і CD, то четвертими гармонічними точками до точок A, C, O і C, D, O, спряженими з точкою O, будуть невласні точки прямих AB і CD. Побудовані дві невласні точки визначають невласну пряму площини.

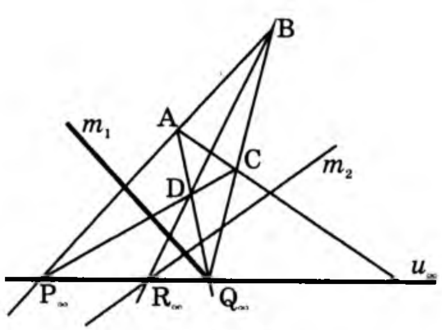


Рис. 2.165

5.15. Позначимо через P_∞, Q_∞, R_∞ точки перетину прямих AB, m_1, m_2 з невласною прямою u_∞. Тоді пряма AQ_∞ буде паралельною прямій BQ_∞ і перетинатиме пряму BR_∞ у точці D (рис. 2.165). Пряма $P_\infty A$ паралельна прямій $P_\infty D$ і перетинає пряму BQ_∞ у точці C. Чотирикутник $ABCD$ – шуканий паралелограм.

5.16. Нехай діагональ AC перетинає невласну пряму у точці P_∞, тоді можна побудувати точку O перетину діагоналей паралелограма як гармонічно спряжену з точкою P_∞ відносно точок A і C. Нехай пряма m перетинає невласну пряму u_∞ в точці M_∞, тоді діагональ BD лежить на прямій $M_\infty O$, яка в перетині з прямою AN_∞, де $N_\infty = n \times u_\infty$, дасть точку B. Якщо позначити через R_∞ точку перетину прямої BC з прямою u_∞, то знайдемо точку $D = AR_\infty \times BO$. Одержаний чотирикутник $ABCD$ – паралелограм.

5.17. Діаметр лінії другого порядку, спряжений з хордою AB, проходить через середину хорди AB. Середину O_1 хорди AB знайдемо як гармонічно спряжену точці A_∞ прямої AB ($A_\infty = AB \times u_\infty$) відносно точок A і B. Напрям шуканого діаметра визначається точками O і O_1.

5.18. За умовою дотичні повинні бути паралельними прямій m, тому вони проходять через точку M_∞ перетину прямої m з прямою u_∞. Побудуємо поляру точки M_∞, вона перетне лінію другого порядку в точках дотику, які разом з точкою M_∞ визначають шукані дотичні.

Частина III

Розділ 2

2.18. *Вказівка.* Оскільки точка A лежить у четвертому октанті, то обидві її проекції A_1 і A_2 на епюрі лежать нижче осі OX, лівіше осі OY. Виконання побудови профільної проекції A_3 показано на рис. 3.182.

2.19. *Вказівка.* Оскільки точка B лежить у шостому октанті, то всі три її проекції лежать над віссю OX, причому її фронтальна проекція B_2 лежить правіше осі OZ, а профільна B_3 – лівіше осі OZ. Побудова горизонтальної проекції B_1 виконана на рис. 3.183.

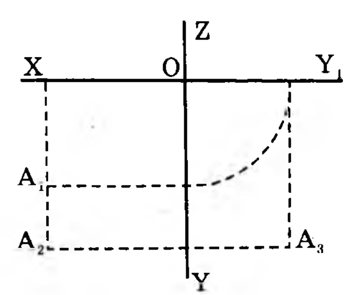


Рис. 3.182

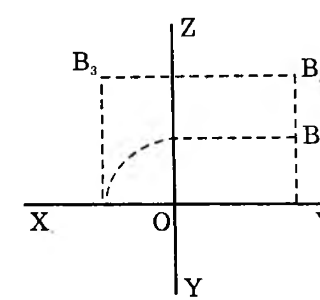


Рис. 3.183

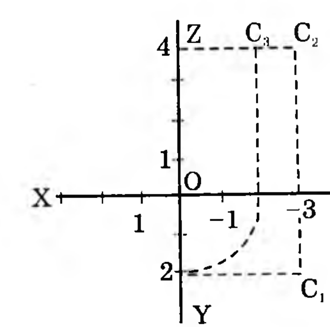


Рис. 3.184

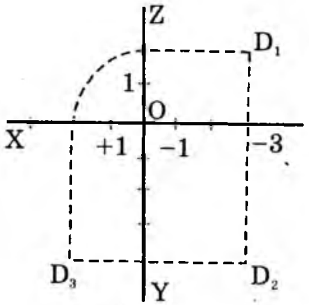


Рис. 3.185

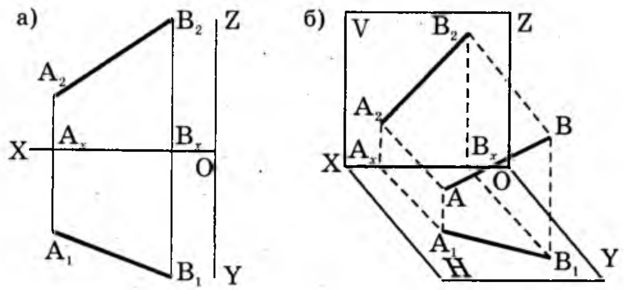


Рис. 3.186

2.20. *Вказівка.* За даними координатами точки C можна сказати, що вона розміщена у п'ятому октанті, тому всі її проекції лежатимуть правіше осі OZ, причому горизонтальна проекція C_1 лежить нижче осі OX, а фронтальна і профільна – вище осі OX (рис. 3.184).

2.21. *Вказівка.* Дані координати точки D вказують на те, що точка D лежить у сьомому октанті, тому горизонтальна проекція D_1 лежатиме вище осі OX, правіше осі OZ, фронтальна проекція D_2 лежатиме правіше осі OZ, нижче осі OX і профільна проекція D_3 займе положення лівіше осі OZ і нижче осі OX (рис. 3.185).

2.22. *Розв'язання.* 1. Будуємо спочатку комплексний рисунок: проведемо дві взаємно перпендикулярні прямі – горизонтальну OX і вертикальну OY, які перетинаються в точці O (рис. 3.186а).

На осі OX відкладемо відрізки $OA_x = 3$, $OB_x = 1$; проведемо через точки A_x і B_x перпендикуляри до осі OX і відкладемо на них відрізки $A_xA_1 = 2$ вниз, $A_xA_2 = 1$ вище OX, $B_xB_1 = 3$ вниз, $B_xB_2 = 3$ вище осі OX. Точки A_1, B_1 – горизонтальні проекції, B_2, A_2 – фронтальні проекції просторових точок A і B. Відрізки A_1B_1 і A_2B_2 – проекції просторового відрізка AB.

2. Для побудови просторового (наочного) рисунка візьмемо дві взаємно перпендикулярні площини H і V, приймемо пряму їх перетину за вісь OX проекцій. Точку O можна вибрати довільно. Оскільки всі координати обох точок додатні, то відрізок AB розміщений у першому октанті. Взявши півпрямі OY і OZ за осі прямокутної системи координат, будуємо точки A_1 і B_1 за їх координатами (x, y) у передній горизонтальній півплощині (рис 3.186б) і точки A_2, B_2 за координатами (x, z) у верхній фронтальній півплощині.

Щоб одержати зображення точок A і B, проведемо через точки A_1 і B_1 проектуючі прямі, паралельні осі OZ, а через точки A_2 і B_2 – паралельно осі OY. Перетин променів, проведених через точки A_1 і A_2, дає положення точки A у просторі, а перетин променів, проведених через точки B_1 і B_2, – положення точки B у просторі. Точки A і B визначають положення прямої AB у просторі.

2.23. *Вказівка.* Оскільки абсциси і аплікати обох точок додатні, а ординати від'ємні, то відрізок AB лежить у другому октанті.

2.24. *Вказівка.* Побудова горизонтальної проекції A_1B_1 за даними фронтальною A_2B_2 і профільною A_3B_3 проекціями відрізка AB виконана на рис. 3.187а, просторове зображення відрізка AB – на рис. 3.187б. Координати точки A при вибраній одиниці довжини визначаються довжинами відрізків $x_A = OA_x = 5$; $y_A = OA_y = A_1A_x$; $z_A = A_xA_2 = OA_z$; $x_B = OB_x = 2$; $y_B = OB_y = B_xB_1$; $z_B = B_xB_2 = OB_z$.

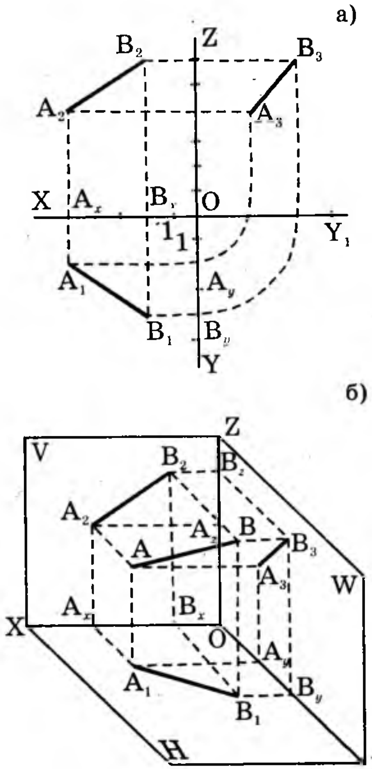


Рис. 3.187

2.25. *Вказівка.* Точка A належить прямій a, тому проекція $A_1 \in a_1$, $A_2 \in a_2$. Крім того, точки A_1 і A_2 лежать на одному перпендикулярі до осі OX. Тому A_1 – точка перетину прямої a_1 з прямою, яка проходить через точку A_2 перпендикулярно осі OX.

2.26. *Вказівка.* Горизонтальна проекція M_1 горизонтального сліду M прямої $a(a_1, a_2)$ збігається із самим слідом M, а фронтальна проекція M_2 лежить на осі OX, тому M_2 є точкою перетину фронтальної проекції a_2 прямої a з віссю OX, а M_1 – точка перетину a_1 з OX. Аналогічно горизонтальна проекція N_1 фронтального сліду N прямої a є точкою перетину прямої a_1 з віссю OX, а N_2 – точка перетину прямої a_2 з перпендикуляром до OX, проведеним через точку N_1.

2.27. *Вказівка.* Знайдемо спочатку проекції точок $B(B_1, B_2)$ і $C(C_1, C_2)$, в яких пряма a перетинає прямі b і c. Проекції B_2 і C_2 визначаються безпосередньо: $B_2 = a_2 \times b_2$, $C_2 = a_2 \times c_2$. Тоді проекції $B_1 = b_1 \times B_2B_1$ і $C_1 = c_1 \times C_2C_1$, де B_2B_1 і C_2C_1 перпендикулярні OX.

2.28. *Вказівка.* Спочатку побудуємо зображення прямої a, яка проходить через точку A паралельно площині проекцій V і лежить

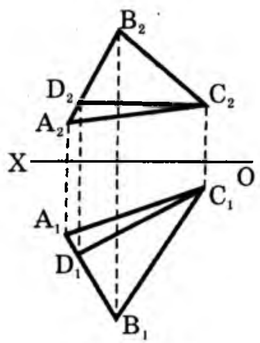


Рис. 3.188

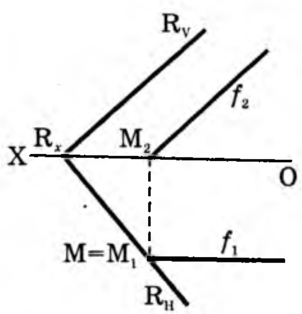


Рис. 3.189

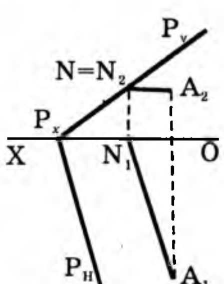


Рис. 3.190

у площині P. Горизонтальна проекція a_1 прямої a проходить через дану точку A_1 паралельно осі OX, її легко побудувати. Точка $M_1 = a_1 \times P_H$ – горизонтальна проекція горизонтального сліду прямої a у площині P. Знайдемо фронтальну проекцію $M_2 = OX \times M_1M_2$, де $M_1M_2 \perp OX$. Фронтальна проекція a_2 прямої a проходить через точку M_2 паралельно P_V. Тоді точка $A_2 = a_2 \times A_1A_2$, $A_1A_2 \perp OX$.

2.29. *Вказівка.* Оскільки вказано, через яку точку треба провести горизонталь, то зручно розпочати з побудови фронтальної проекції горизонталі, яка паралельна осі OX: через точку C_2 проведемо пряму, паралельну осі OX, до перетину зі стороною A_2B_2 у точці D_2 – одержали фронтальну проекцію C_2D_2 горизонталі (рис. 3.188). Далі через точку D_2 проводимо лінію зв'язку, перпендикулярну до осі OX, вона перетне сторону A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ у точці D_1 – горизонтальній проекції точки D. D_1C_1 – горизонтальна проекція шуканої горизонталі.

2.30. *Вказівка.* Проведемо горизонтальну проекцію f_1 фронталі f; це пряма, паралельна осі OX і віддалена від неї на 12 мм. Ця пряма перетне горизонтальний слід R_H площини R у точці $M = M_1$, яка є горизонтальним слідом фронталі f у площині R. Знайдемо фронтальну проекцію M_2 горизонтального сліду M прямої f і через точку M_2 проведемо фронтальну проекцію f_2 (фронталі f) паралельно фронтальному сліду R_V (рис. 3.189).

2.31. *Вказівка.* Через дані дві точки можна провести безліч площин. Побудуємо одну із них. Через точку A проведемо яку-небудь горизонталь і знайдемо її фронтальний слід $N = N_2$, а через точку P_X проведемо паралельно A_1N_1 горизонтальний слід P_H шуканої площини (рис. 3.190).

2.32. *Вказівка.* Нехай площина R задана на епюрі проекціями $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ і $A_2B_2 \parallel C_2D_2$ двох паралельних прямих AB і CD (рис. 3.191). Проведемо у площині R горизонталь BD (B_1D_1, B_2D_2) і фронталь BC(B_1C_1, B_2C_2). Знаходимо слід N (N_1, N_2) горизонталі BD. Через точку N_2 паралельно проекції B_2C_2 фронталі проводимо фронтальний слід R_V площини R до перетину з віссю OX в точці R_X, а через точку R_X паралельно проекції B_1D_1 проводимо горизонтальний слід R_H площини R.

2.33. *Вказівка.* Проводимо через дану горизонтальну проекцію A_1 пряму a_1 так, щоб вона перетнула горизонтальний слід P_H і вісь OX відповідно в точках $M = M_1$, яка є горизонтальним слідом прямої a, і N_1, яка є горизонтальною проекцією фронтального сліду прямої a. Далі будуємо точку $N = N_2$ – фронтальну проекцію фронтального сліду (на сліді P_V) і точку M_2 – фронтальну проекцію горизонтального сліду прямої a (на осі OX). M_2N_2 – фронтальна проекція допоміжної прямої a. Провівши лінію зв'язку проекцій точки A, знаходимо фронтальну проекцію A_2 точки A, яка належить площині P (оскільки точка A належить прямій a, яка лежить у площині P).

2.34. *Вказівка.* Нехай площини P і Q перетинаються по прямій a. Тоді горизонтальною проекцією M_1 горизонтального сліду прямої a в площинах P і Q є точка перетину горизонтальних слідів P_H і Q_H даних площин, а фронтальна проекція фронтального сліду прямої a – точка $N_2 = P_V \times Q_V$. За точками M_1 і N_2 знаходимо точки M_2 і N_1. Прямі M_1N_1 і M_2N_2 є проекціями a_1 і a_2 прямої a перетину площин P і Q (рис. 3.192).

2.35. *Вказівка.* Проведемо через дану пряму $a(a_1, a_2)$ горизонтально проектуючу площину $Q(Q_H, Q_V)$, задану слідами на епюрі (рис. 3.193). Горизонтальний слід Q_H збігається з горизонтальною проекцією a_1 прямої a, а фронтальний слід Q_V перпендикулярний осі OX. Площини P і Q перетинаються по деякій прямій $b(b_1, b_2)$, проекція b_1 якої збігається з прямою a_1, а фронтальну проекцію b_2 легко побудувати.

Шуканою точкою $A(A_1, A_2)$ перетину прямої a з площиною P є точка перетину прямих a і b, тому точка $A_2 = a_2 \times b_2$, а точка $A_1 = a_1 \times A_1A_2$, $A_1A_2 \perp OX$.

2.36. *Вказівка.* Можна побудувати перпендикуляр, провівши сліди площини ABC. Якщо слідів площини не будувати, то можна використати горизонталь AE і фронталь AD. Проекціями шуканого перпендикуляра MN будуть $M_1N_1 \perp A_1E_1$ і $M_2N_2 \perp A_2D_2$ (рис. 3.194).

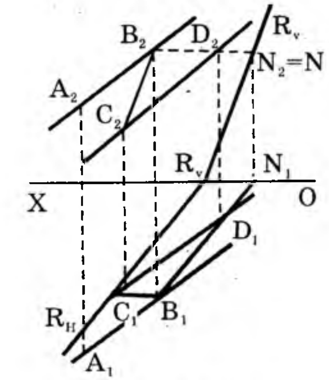


Рис. 3.191

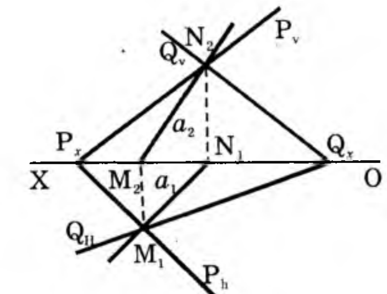


Рис. 3.192

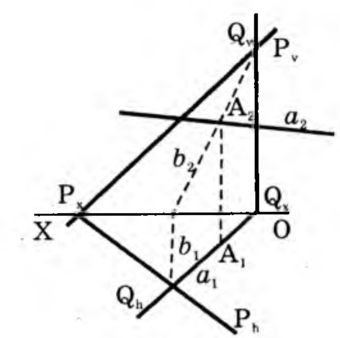


Рис. 3.193

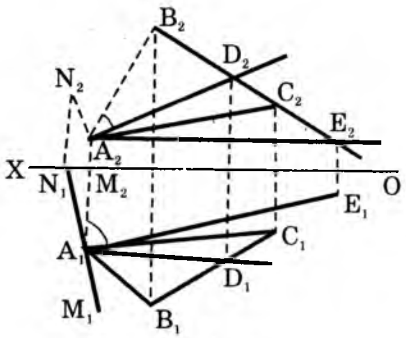


Рис. 3.194

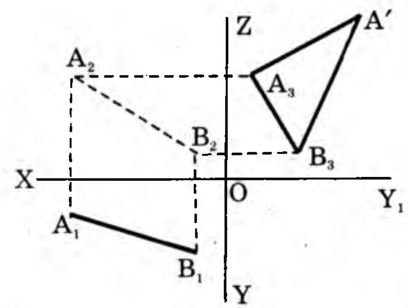


Рис. 3.195

2.37. *Вказівка.* Будуємо прямокутний трикутник A_3B_3A', у якого першим катетом є профільна проекція A_3B_3 відрізка AB, а другим A_3A' – різниця абсцис кінців A і B цього відрізка. Кут γ між проекцією A_3B_3 і гіпотенузою A_3A' – шуканий (рис. 3.195).

2.38. *Вказівка.* За властивостями паралельного проектування відношення відрізків прямої дорівнює відношенню їх проекцій. Тому для знаходження проекцій точки C, яка ділить відрізок AB у відношенні 2 : 3, треба відрізки A_1B_1 і A_2B_2 поділити на п'ять рівних частин і відкласти від точок A_1 і A_2 відрізки A_1C_1 і A_2C_2, рівні двом частинам. Точки C_1 і C_2 – шукані.

Розділ 3

3.13. Аналогічно до розв'язання задачі 3.1.
3.14. Дивись задачу 3.2.
3.15. Аналогічно до розв'язання задачі 3.3.
3.16. Дивись розв'язання задачі 3.5.
3.17. *Вказівка.* Задання площини ABC її слідами встановлює на площині зображень перспективно-афінне перетворення площини. Образом точки C на осі OZ є точка O – початок системи координат, тоді віссю перетворення є слід AB.

Тому для побудови довільної точки M у площині ABC треба провести довільну пряму через точку O у площині XOY до перетину з AB в точці N. На прямій ON взяти довільну точку M_3 за вторинну проекцію шуканої точки M. Тоді точка M – точка перетину з пря-

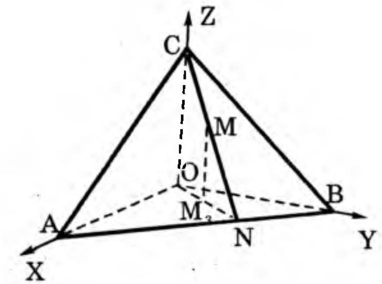


Рис. 3.196

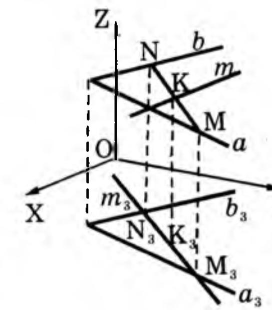


Рис. 3.197

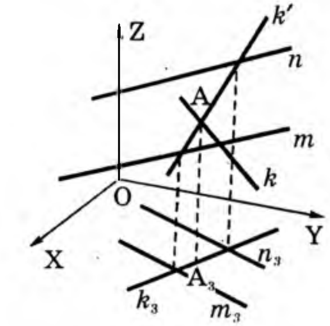


Рис. 3.198

мою CN прямої, проведеної через точку M_3 паралельно осі OZ – напряму перспективно-афінного перетворення (рис. 3.196).

3.18. *Розв'язання.* Перспективно-афінна відповідність у даному випадку встановлюється заданням двох пар відповідних прямих a, b і a_3, b_3. Для знаходження точки перетину прямої $(m,\ m_3)$ з даною площиною будуємо пряму, відповідну прямій $m_3 = M_3N_3$. Точка $K = MN \times m$ і є шуканою точкою перетину; її вторинна проекція – точка K_3 (рис. 3.197).

3.19. *Розв'язання.* Кожну з паралельних прямих задано аксонометричною проекцією m і n та вторинною проекцією m_3 і n_3, пряму k' – проекціями k і k_3 (рис. 3.198).

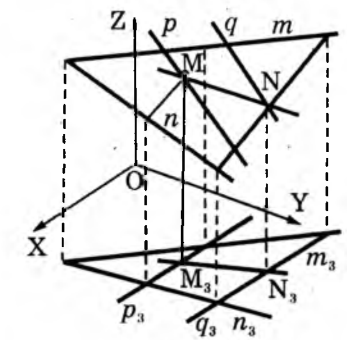


Рис. 3.199

1-й спосіб. Проведемо через пряму $(k,\ k_3)$ горизонтально проектуючу площину, вона перетне дану площину по прямій $(k',\ k_3)$. Тому шукана точка перетину матиме аксонометричну проекцію $A = k' \times k$ і вторинну проекцію A_3 на прямій k_3 як проекцію точки A $(AA_3 \parallel OZ)$.

2-й спосіб. Знайти сліди даних прямих, а потім сліди площини, в якій вони лежать.

3.20. *Розв'язання.* Використаємо перспективно-афінну відповідність. Нехай перша площина задана двома прямими, що перетинаються $(m,\ m_3)$ і $(n,\ n_3)$, а друга – двома паралельними прямими $(p,\ p_3)$ і $(q,\ q_3)$ (рис. 3.199).

Кожна із цих площин встановлює на площині зображення перспективно-афінну відповідність, яка визначається двома парами відповідних прямих. Для цього спочатку знайдемо на прямих p і p_3

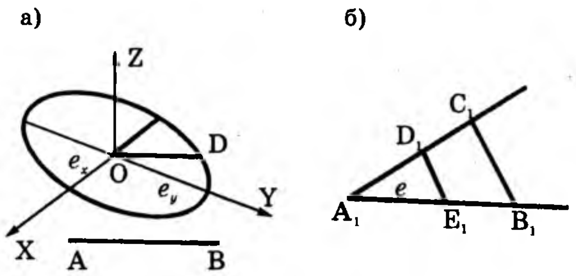


Рис. 3.200

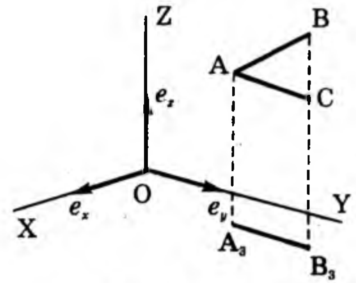


Рис. 3.201

пару відповідних точок у відповідності, встановленій першою даною площиною (n, m), це буде точка перетину прямої (p, p_3) з площиною (n, m) – точка (M, M_3).

Аналогічно знаходимо на прямих q і q_3 другу пару точок (N, N_3) перетину прямої (q, q_3) з площиною (n, m).

Прямі MN і M_3N_3 афінно-відповідні в обох відповідностях, вони і визначають лінію перетину даних площин. MN – її аксонометрична проекція, M_3N_3 – вторинна проекція на площині XOY.

3.21. *Розв'язання.* Аксонометрична проекція AB у даному випадку збігається з вторинною проекцією на площині XOY (рис.3.200а).

Побудуємо масштабний еліпс у площині XOY за двома спряженими діаметрами $2e_x$ і $2e_y$ і проведемо в ньому півдіаметр OD, паралельний даному відрізку AB. Тоді за інваріантністю відношення паралельних відрізків при паралельному проектуванні матимемо $\dfrac{A'B'}{O'D'} = \dfrac{AB}{OD}$, де $O'D'$ – радіус одиничного кола.

Отже, відрізок, рівний відрізку $A'B'$, може бути побудований як четвертий пропорційний до відрізків AB, OD і $e = O'D'$ – одиничний відрізок заданої у просторі прямокутної декартової системи координат. $A_1D_1 = OD$, $A_1C_1 = AB$, $A_1E_1 = e$, $A_1B_1 = A'B'$ (рис. 3.200б).

3.22. *Вказівка.* Побудуємо пряму $AC \parallel A_3B_3$ (рис. 3.201). Тоді трикутник ABC є аксонометричною проекцією прямокутного трикутника $A'B'C'$ з прямим кутом $A'C'B'$ (оскільки $B'B'_3 \perp A'_3B'_3$, а $A'C' \parallel A_3B_3$). Відрізок, рівний $B'C'$, будуємо як четвертий пропорційний до відрізків BC, e, e_z: $\dfrac{B'C'}{e} = \dfrac{BC}{e_z}$.

Відрізок, рівний відрізку $A'_3B'_3$, який лежить у площині XOY, будуємо як у попередній задачі. Цією ж побудовою знаходимо і відрізок $A'C'$, оскільки $A'C' = A'_3B'_3$.

Тоді шуканий відрізок, рівний відрізку $A'B'$, знайдемо як гіпотенузу прямокутного трикутника $A'B'C'$, два катети якого побудовано.

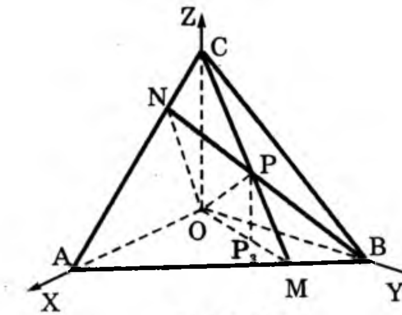


Рис. 3.202

3.23. *Вказівка.* Будуємо аксонометричну проекцію OM перпендикуляра $O'M'$ до прямої $A'B'$ (див. задачу 3.12). Площина $O'M'C'$ перпендикулярна до $A'B'$, тому вона перпендикулярна до площини $A'B'C'$ (рис. 3.202).

Аналогічно будуємо аксонометричну проекцію ON перпендикуляра $O'N'$ до прямої $A'C'$ (використовуючи масштабний еліпс у площині XOZ). Площина $O'B'N'$ перпендикулярна до площини $A'B'C'$. Пряма OP буде аксонометричною проекцією шуканого перпендикуляра, де $P = CM \times BN$.

3.24. *Розв'язання.* Паралельною проекцією такого квадрата є паралелограм, сторони якого паралельні спряженим діаметрам масштабного еліпса. Тому проводимо діаметр OA еліпса, паралельний даній прямій MN, і діаметр OB, йому спряжений. Далі з точки M проводимо пряму $MK \parallel OB$. На прямій MN відкладаємо відрізок $MN = 2OA$ і на прямій MK відрізок $MK = 2OB$. Відрізки MN і MK – сторони квадрата (рис. 3.203).

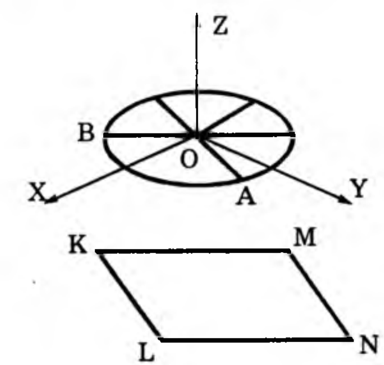


Рис. 3.203

Розділ 4

4.9. *Вказівка.* Використати рис. 3.129 задачі 4.1.

4.10. *Вказівка.* Дані перспективи a, b, c прямих a', b', c' і перспективи a_1, b_1, c_1 їх основ (рис. 3.204). Позначимо $C_{1\infty} = c_1 \times h$. Через перспективу основи $C_{1\infty}$ точки сходу прямої (c, c_1) проведемо перпендикуляр до лінії горизонту h, який перетне пряму c в точці C_∞ – картині точки сходу прямої (c, c_1).

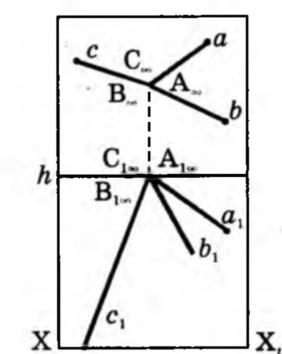


Рис. 3.204

Аналогічно знайдемо перспективу точки сходу та перспективу її основи прямих $a'(a, a_1)$ і

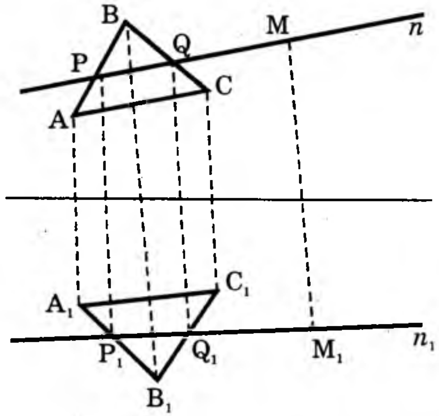


Рис. 3.205

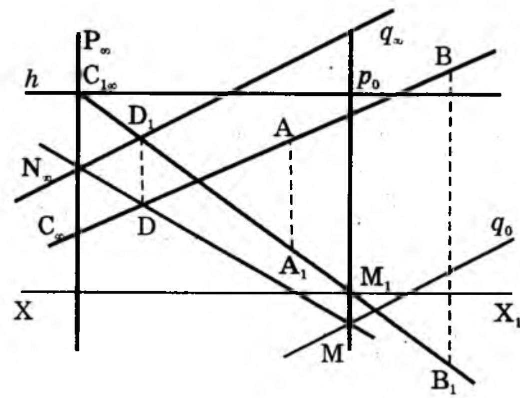


Рис. 3.206

$b'(b,\ b_1)$. Переконуємось, що точки сходу даних прямих збігаються, тому $a' \parallel c'$ і $b' \parallel c'$. Отже, дані прямі паралельні між собою, вони мають єдину спільну нескінченно віддалену точку, тобто точку сходу.

4.11. *Вказівка.* Проведемо через точку M_1 довільну пряму n_1, яка перетне прямі A_1B_1 і B_1C_1 відповідно в точках P_1 і Q_1 (рис. 3.205). Побудуємо перспективи точок P_1 і Q_1: $P_1P \perp h$ і $Q_1Q \perp h$, $P \in AB$, $Q \in BC$. Шукана точка $M = PQ \times M_1M$, де $M_1M \perp h$.

4.12. *Розв'язання.* Нехай пряма $A'B'$ задана картинами точок A, B і картинами їх основ, площина – слідом лінією сходу. Розв'язання задачі показано на рис. 3.206. На ньому XX_1 – основа картини, h – лінія горизонту, пряма $A'B'$ задана перспективами точок $A'(A, A_1)$, $B'(B, B_1)$, q_0 – слід заданої площини Q, q_∞ – лінія сходу цієї площини.

Проведемо через пряму AB горизонтально проектуючу площину P', її слід p_0 перпендикулярний до основи картини і проходить через точку M_1 перетину прямої A_1B_1 з основою XX_1. Точка $C_{1\infty}$ перетину лінії горизонту h з прямою $A'_1B'_1$ є точкою сходу прямої A_1B_1. Точку сходу прямої $A'B'$ дістаємо на прямій AB, якщо на цю пряму спроектувати точку $C_{1\infty}$ перпендикулярно до лінії горизонту – це точка C_∞. Пряма $C_\infty C_{1\infty}$ є лінією сходу площини P'. Точка $M = q_0 \times p_0$ є слідом лінії перетину площин P і P'. Такою лінією є лінія з картиною MN_∞, де $N_\infty = q_\infty \times p_\infty$, і картиною основи $M_1C_{1\infty} = A_1B_1$. Точка перетину цієї лінії з лінією AB – точка $D'(D, D_1)$ є шуканою.

4.13. *Вказівка.* Для побудови осі площини $(A'B'C') = \alpha$ досить знайти точки $C_0 = AB \times A_1B_1$, $B_0 = AC \times A_1C_1$, пряма B_0C_0 – вісь даної

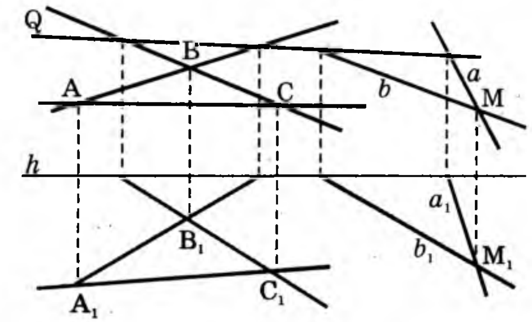


Рис. 3.207

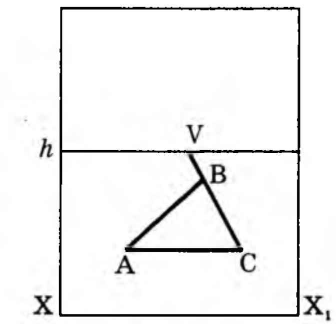


Рис. 3.208

площини. Для побудови лінії сходу треба побудувати точки сходу двох прямих, що лежать у даній площині α, наприклад точки сходу прямих (AB, A_1B_1) і (AC, A_1C_1). Слід площини α буде паралельний лінії сходу. Одну точку сліду можна знайти як точку перетину прямої (AB, A_1B_1) з картинною площиною (це точка (D, D_1) на рис. 3.128).

4.14. *Вказівка.* Для розв'язання задачі достатньо побудувати перспективи трьох довільних точок або двох довільних прямих, які лежать у цій площині (разом з перспективами їх основ).

Для цього побудуємо спочатку лінію сходу даної площини Q, потім через точку (M, M_1) проведемо дві довільні прямі a і b, які мають точки сходу на прямій Q. Прямі (a, a_1) і (b, b_1) визначають шукану площину (рис. 3.207).

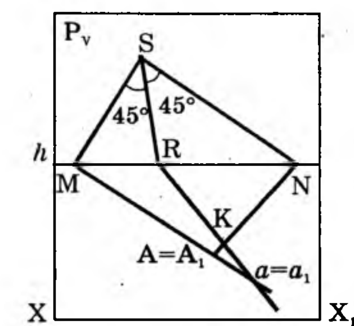


Рис. 3.209

4.15. *Вказівка.* Проведемо через точку A пряму, паралельну основі картини XX_1, і сполучимо точку B з головною точкою V (рис. 3.208). Нехай C – точка перетину проведених прямих. Тоді трикутник ABC є перспективою прямокутного трикутника, який лежить у предметній площині, причому один його катет паралельний картинній площині, а другий – перпендикулярний до неї. Обидва ці катети можна знайти прийомами, вказаними при розв'язанні задач 4.6, 4.7. Гіпотенуза трикутника, побудованого на цих катетах, є шукана натуральна величина відрізка AB.

4.16. *Вказівка.* Знаходимо точку сходу R даної прямої $a = a_1$ як точку перетину прямої a з лінією горизонту h (рис. 3.209). По обидві сторони від прямої SR, де S – картина точки зору S', проводимо прямі SM і SN, які утворюють з SR кути 45°. Тоді прямі AM і AN – перспективи шуканих прямих. Кут MSR – натуральна величина кута RKN.

Розділ 5

5.29. *Розв'язання.* Нехай дано зображення трикутної піраміди $SABC$, точки D на ребрі SA і прямої a в площині основи трикутника ABC (рис. 3.210).

Принаймні дві із сторін трикутника ABC не паралельні прямій a. Нехай це будуть сторони AC і AB, тоді їх продовження перетнуть пряму a в точках E і M відповідно. Точки D і E лежать у площині грані ASC по різні боки від прямої SC, тому прямі SC і DE перетинаються в якійсь точці F. Аналогічно точки D і M лежать в одній площині грані ASB, тому існує точка $K = DM \times SB$. Точки F і K належать площині перерізу DEM піраміди. Отже, трикутник DFK – шуканий переріз піраміди.

5.30. *Розв'язання. а*) У перерізі призми площиною одержимо трикутник, якщо січна площина перетинатиме лише три грані призми. Цей випадок матиме місце при будь-якому виборі прямої a, яка не перетинає сторін основи і при відповідному положенні точки K на бічному ребрі (ближче до нижньої основи) так, щоб січна площина не перетинала верхньої основи.

На рис. 3.211 маємо зображення призми $ABCA_1B_1C_1$, точку K на ребрі CC_1 і пряму a. Пряма a є слідом площини перерізу в площині основи призми. Побудуємо точки перетину прямої a з прямими AC і AB : $M = a \times AC$, $N = a \times AB$. Точку K на ребрі CC_1 потрібно вибрати так, щоб пряма MK перетнула бічне ребро AA_1 у внутрішній точці D (лежать у площині грані ACC_1A_1), тоді пряма DN перетне ребро BB_1 у внутрішній точці E. Трикутник DKE – шуканий переріз.

б) Щоб у перерізі трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через дану пряму a (слід цієї площини у площині основи призми) і точку K на бічному ребрі CC_1, одержали чотирикутник, треба точку K вибрати так, щоб площина перерізу перетнула верхню основу призми (рис. 3.212).

Побудова виконується як і у попередньому випадку: знаходимо точки M і N перетину даної прямої a зі сторонами нижньої основи $M = a \times AC$, $L = a \times BC$, $N = a \times AB$. Прямі MK і A_1C_1 лежать у площині грані AA_1C_1C, тому існує точка $D = MK \times A_1C_1$, аналогічно існує точка $E = KL \times BB_1$ (лежать у грані BB_1CC_1O) і точка $F = NE \times A_1B_1$ (лежать у площині грані ABB_1A_1). Чотирикутник $KDFE$ – шуканий переріз.

5.31. *Розв'язання.* На рис. 3.213 зображено трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$, точку K на бічному ребрі CC_1 і пряму MN, яка перетинає сторони основи AB і BC відповідно в точках M і N.

Пряма MN є слідом площини перерізу на площині основи ABC. Слід прямої AC – точка $F = MN \times AC$. Тоді пряма FK перетне сторону A_1C_1 у точці E. Площина перерізу перетне верхню основу призми по прямій ED, паралельній прямій MN (основи призми паралельні), $D \in A_1B_1$, а грань ABA_1B_1 по прямій DM. Отже, п'ятикутник $MNKED$ – шуканий переріз.

Примітка. Якщо точку K на ребрі CC_1 вибрати так, щоб площина перерізу не перетинала верхньої основи, то в перерізі одержимо чотирикутник. Рисунок виконати самостійно.

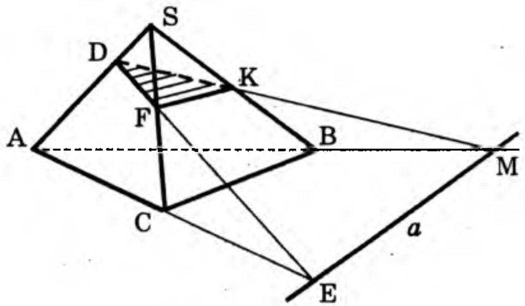


Рис. 3.210

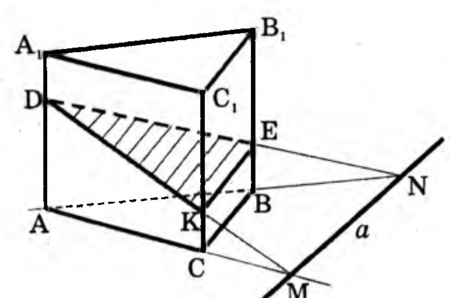


Рис. 3.211

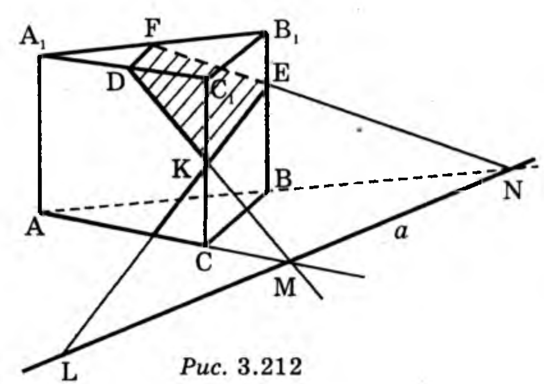


Рис. 3.212

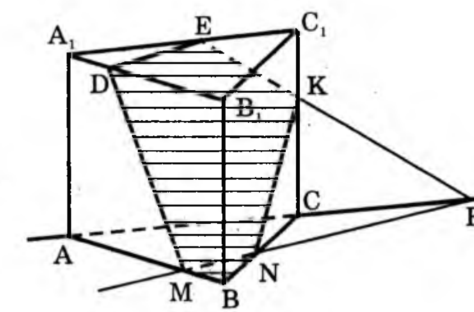


Рис. 3.213

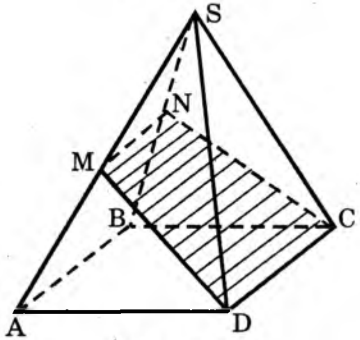


Рис. 3.214

5.32. *Розв'язання.* На рис. 3.214 дано зображення чотирикутної піраміди $SABCD$ і точку M на ребрі SA. Нехай січна площина проходить через сторону DC. Тоді площина перерізу DCM перетинає грань SAD по прямій DM, грань SBC – по прямій NC. Чотирикутник $DCNM$ – шуканий переріз.

5.33. *Розв'язання.* Дано зображення чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і три точки A_2, B_2, C_2 відповідно на ребрах AA_1, BB_1, CC_1 (рис. 3.215).

Використаємо метод внутрішнього проектування, яким є паралельне проектування у напрямі бічних ребер призми. Основу призми $ABCD$ можна розглядати як паралельну проекцію перерізу $A_2B_2C_2D_2$, три точки якої відомі. Тому повинна існувати і четверта точка перерізу на ребрі DD_1 або на його продовженні.

Проведемо діагоналі нижньої основи AC і BD, вони перетинаються в точці O. На відрізку A_2C_2 знайдемо точку O_2, проекцією якої є точка O ($OO_2 \parallel AA_1$). Тоді пряма B_2O_2 перетне ребро DD_1 в точці D_2.

Чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$ – шуканий переріз.

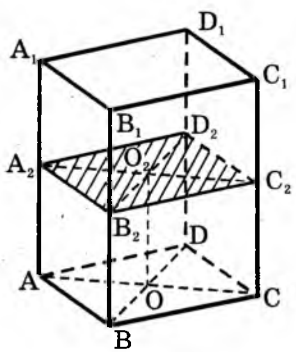


Рис. 3.215

5.34. *Розв'язання.* На рис. 3.216 дано зображення чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і трьох точок $A_2 \in AA_1$, $B_2 \in BB_1$, $K_2 \in CC_1D_1D$.

Використаємо метод внутрішнього проектування паралельно бічним ребрам призми: точки A, B, K_1 – паралельні проекції даних точок на площині основи ($K_1 \in DC$). Побудова перерізу передбачає знаходження точки D_2 або C_2 перетину бічного ребра призми з площиною перерізу. Побудуємо точку $C_2 \in CC_1$. Для цього проведемо діагональ AC основи, яка перетне відрізок BK_1 у точці O і знайдемо точку $O_2 = B_2K \times OO_2$, де $OO_2 \parallel BB_1$. Тоді точка $C_2 = A_2O_2 \times CC_1$ і $D_2 = C_2K \times DD_1$. Чотирикутник $A_2B_2C_2D_2$ – шуканий переріз.

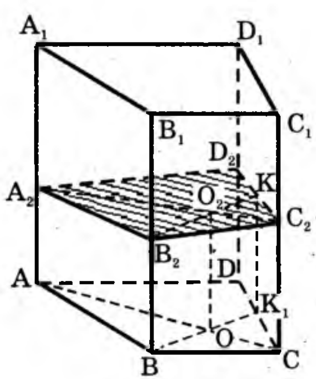


Рис. 3.216

5.35. *Розв'язання.* Оскільки слід MN не паралельний сторонам основи піраміди, то існують точки перетину сліду MN з продовженнями сторін основи. Нехай $X = MN \times AB$, $Z = MN \times AD$, $Y = MN \times DC$ (рис. 3.217).

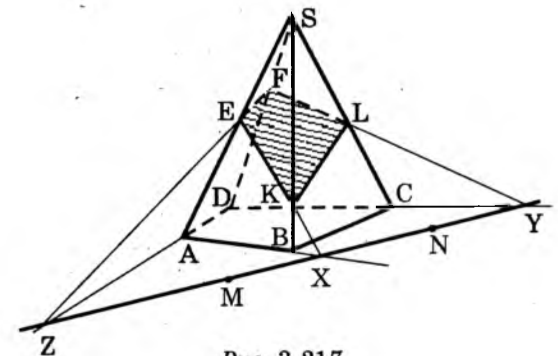


Рис. 3.217

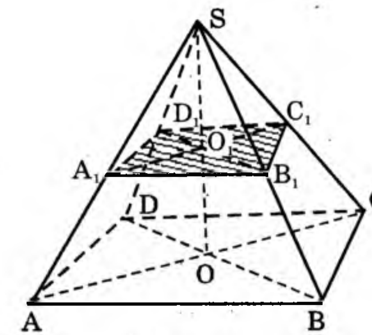


Рис. 3.218

Дана точка K лежить на бічному ребрі SB, тому в площині грані SAB пряма XK перетне ребро SA в точці E. У площині грані SAD пряма ZE перетне ребро SD у точці F, а в площині грані SCD пряма YF перетне ребро SC в точці L. Чотирикутник $KEFL$ – шуканий переріз.

5.36. *Розв'язання.* Дано зображення чотирикутної піраміди $SABCD$ і три точки $A_1 \in SA$, $B_1 \in SB$, $C_1 \in SC$ (рис. 3.218).

Задача передбачає знаходження точки D_1 перетину ребра SD з площиною перерізу. Використаємо метод внутрішнього проектування: точки A, B, C – центральні проекції точок A_1, B_1, C_1 на площині основи піраміди (з центром проектування в точці S).

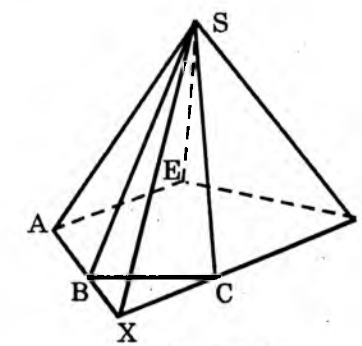


Рис. 3.219

Побудуємо точку $O = AC \times DB$ і точку $O_1 = A_1C_1 \times OS_1$, де O_1 – центральна проекція точки O в площині перерізу. Тоді $D_1 = SD \times B_1O_1$. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ – шуканий переріз.

5.37. *Розв'язання.* На рис. 3.219 дано зображення п'ятикутної піраміди $SABCDE$. Побудуємо лінію перетину несуміжних граней SAB і SCD. Лінією перетину граней є пряма. Одна точка цієї прямої відома – це точка S. Отже, досить знайти ще одну спільну точку цих граней. Такою точкою буде точка X перетину слідів AB і CD граней на площині основи піраміди: $X = AB \times CD$. Тоді SX – лінія перетину граней SAB і SCD.

5.38. *Розв'язання.* Дано зображення п'ятикутної призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ і три точки на її бічних гранях: $M \in AA_1B_1B$, $N \in CC_1D_1D$, $K \in AA_1F_1F$ (рис. 3.220).

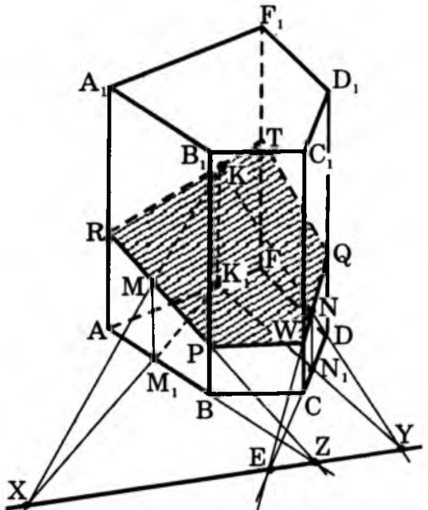


Рис. 3.220

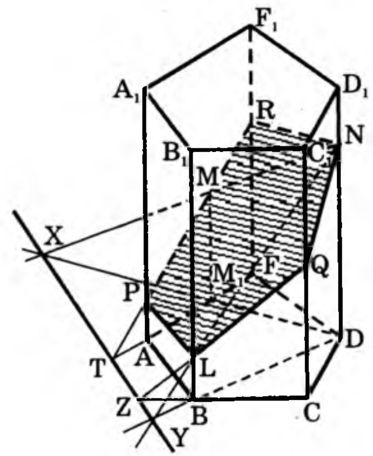


Рис. 3.221

Побудову виконаємо методом слідів. Слідом січної площини MNK на площині нижньої основи призми буде пряма XY, де $X = KM \times K_1M_1$, $Y = KN \times K_1N_1$, точки K_1, M_1, N_1 – паралельні проекції даних точок K, M, N на площині основи призми у напрямі її бічних ребер. Побудуємо точку $Z = XY \times AB$, тоді пряма ZM перетне ребра BB_1 і AA_1 у точках P і R, які належать площині перерізу. Аналогічно, побудувавши точку $E = XY \times DC$, знайдемо точки W і Q як точки перетину прямої EN з ребрами CC_1 і DD_1. Пряма RK у грані AA_1F_1F перетне ребро FF_1 у точці T перерізу. Сполучивши одержані на бічних ребрах точки відрізками, одержимо шуканий переріз $PRTQW$.

5.39. *Розв'язання.* На рис 3.221 зображена п'ятикутна призма $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$ і точки $N \in DD_1$, $L \in BB_1$, $M \in AA_1F_1F$. Побудуємо переріз цієї призми площиною MNL методом слідів. Знайдемо слід XY площини перерізу на площині нижньої основи призми: $X = MN \times DM_1$, $Y = NL \times DB$, де M_1 – паралельна проекція точки M на площині нижньої основи у напрямі бічних ребер призми: $M_1 \in AF$. Побудуємо точку $Z = XY \times BC$, тоді пряма ZL перетне бічне ребро CC_1 в точці Q. Аналогічно будуємо точку $T = XY \times FA$, тоді пряма TM перетне ребра AA_1 і FF_1 відповідно в точках P і R. Сполучивши одержані точки перетину січної площини з ребрами призми відрізками, одержимо п'ятикутник $NQLPR$ – шуканий переріз.

5.40. *Розв'язання.* Дано зображення п'ятикутної призми $ABCDLA_1B_1C_1D_1L_1$ і точки K на ребрі CC_1 (рис. 3.222). Для розв'язання задачі використаємо метод слідів. Нехай площина перерізу проходить через сторону AB нижньої основи і через точку K на ребрі CC_1. Тоді слідом площини перерізу в площині нижньої основи буде пряма AB. Таким чином, три вершини A, B, K перерізу відомі. Щоб знайти інші вершини, побудуємо на сліді AB точки $X = AB \times CD$ і $Y = AB \times DL$. Тоді пряма XK перетне ребро C_1D_1 у точці M і продовження ребра DD_1 у точці Z. Пряма YZ перетне ребро LL_1 у точці F і ребро L_1D_1 в точці N. Шестикутник $ABKMNF$ – шуканий переріз.

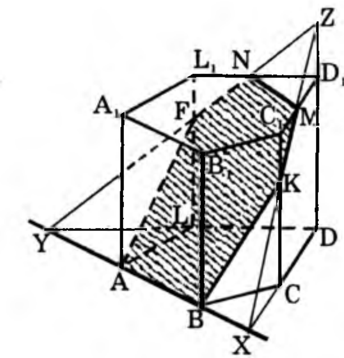


Рис. 3.222

Залежно від вибору точки K на ребрі CC_1 в перерізі можна одержати п'ятикутник (рис. 3.223).

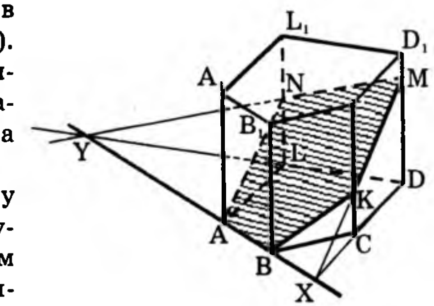


Рис. 3.223

5.41. *Розв'язання.* Дано зображення п'ятикутної призми $ABCDFA_1B_1C_1D_1F_1$, точки E на грані AA_1B_1B, точки K на грані BB_1C_1C, точки N на грані FF_1D_1D (рис. 3.224).

За основну площину α візьмемо площину нижньої основи призми, внутрішнім проектуванням – паралельне проектування, напрям якого збігається з напрямом бічних ребер призми. Побудуємо вторинні проекції E_1, K_1, N_1 даних точок E, K, N, при цьому $E_1 \in AB$, $K_1 \in BC$, $N \in DF$. Далі будуємо:

1) точку $Y_1 = E_1D \times K_1N_1$, $Y_1Y \perp \alpha$, $Y \in KN$ (у площині KNN_1K_1);
2) точку $R = EY \times DD_1$, $R \in DD_1$ – вершина перерізу;
3) точку $L = RN \times FF_1$ (у площині DD_1F_1F), L – вершина перерізу;
4) точку $X_1 = E_1K_1 \times BN_1$, пряму $X_1X \perp \alpha$, $X \in EK$ (у площині BN_1N);
5) точку $T = NX \times BB_1$, $T \in BB_1$ – вершина перерізу;
6) точку $H = TK \times CC_1$, $H \in CC_1$ – вершина перерізу;

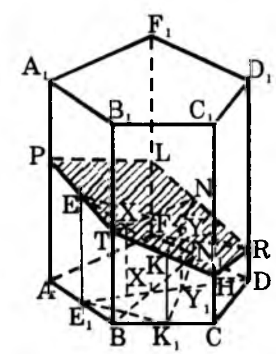


Рис. 3.224

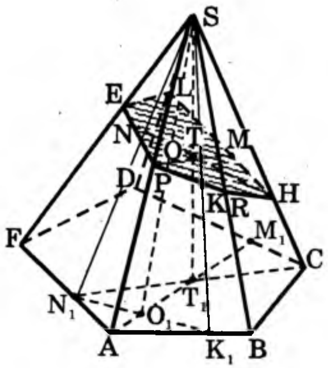


Рис. 3.225

7) точку $P = TE \times AA_1$, $P \in AA_1$ – вершина перерізу;

8) точку $L = RN \times FF_1$, $L \in FF_1$ – вершина перерізу.

П'ятикутник $HRLPT$ – шуканий переріз призми площиною.

5.42. *Розв'язання.* На рис. 3.225 дано зображення п'ятикутної піраміди $SABCDF$ і три точки $M \in SDC$, $N \in SFA$, $K \in SAB$.

Побудову перерізу виконаємо методом внутрішнього центрального проектування з центром S: точки M_1, N_1, K_1 – проекції даних точок M, N, K на площині основи піраміди. Знайдемо точку $O_1 = N_1K_1 \times AM_1$ і її прообраз $O = NK \times O_1S$, тоді пряма MO перетне ребро SA в точці P, а пряма PN – ребро SF у точці E, пряма PK – ребро SB у точці R. Далі побудуємо точку $T_1 = AM_1 \times N_1C$ і її прообраз $T = MP \times ST_1$, тоді пряма NT перетне ребро SC в точці H перерізу, а пряма HM перетне ребро SD в точці L.

П'ятикутник $PELHR$ – шуканий переріз.

Список літератури

1. *Александров А.Д.* Основания геометрии: Учеб. пособ. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
2. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия для 8–9 классов: Учеб. пособ. для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1991. – 464 с.
3. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия для 10–11 классов с углубленным изучением математики. – М.: Просвещение, 1992. – 464 с.
4. *Боровик В.Н.* Зображення просторових фігур та їх застосування до розв'язування задач на комбінацію тіл: Навч. посіб. – Чернігів: ЧДПУ, 2002. – 192 с.
5. *Боровик В.Н., Яковець В.П.* Основи геометрії: Навч. посіб. для студ. фіз.-матем. ф-ту. – Ніжин: НДПУ, 2003. – 186 с.
6. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы / *Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина.* – М.: Просвещение, 1990. – 336 с.
7. Геометрия: Учебник для 7–9 классов средней школы / *Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселёва.* – М.: Просвещение, 1992. – 207 с.
8. *Гильберт Д.* Основания геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1947.
9. *Глаголев Н.А.* Проективная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963. – 344 с.
10. *Глаголев Н.А.* Начертательная геометрия. – 3-е изд. – М.: Гостехиздат, 1953. – 220 с.
11. *Гордон В., Семенцев-Огиевский М.* Курс начертательной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 404 с.
12. *Гуревич Г.Б.* Проективная геометрия. – М.: Гостехиздат, 1960. – 320 с.
13. *Ефилов Н.В.* Высшая геометрия: Учеб. пособ. – М.: Физмагиз, 1961. – 528 с.
14. *Каган В.Ф.* Лобачевский. – М.: Изд. АН СССР, 1948. – 506 с.
15. *Каган В.Ф.* Основания геометрии: Учение об основаниях геометрии и ходе его исторического развития. – М.: ГИТТЛ., 1956. – 344 с.

16. *Кисельов А.П.* Геометрія. Ч.1. Планіметрія. Підручник для 6–8 кл. / За ред. і допов. Н.О. Глаголєва. – К.: Рад. шк., 1954. – 184 с.
17. *Кисельов А.П.* Геометрія. Ч.2. Стереометрія. Підручник для 9–10 кл. За ред. і доп. Н.О. Глаголєва. – К.: Рад. шк., 1972. – 96 с.
18. *Кованцов М.І.* Проективна геометрія. – К.: Вища школа, 1969. – 411 с.
19. *Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрия: Учеб. пособ. для 6–8 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1979. – 383 с.
20. *Костин В.И.* Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1946. – 304 с.
21. *Кутузов Б.В.* Геометрия: Пособие для учительских и педагогических институтов. – М.: Учпедгиз, 1955. – 296 с.
22. *Ливанова А.* Три судьбы. – М.: Знание, 1975. – 22 с.
23. Математика: Посібник для факультативних занять у 8 класі / *В.Н. Боровик, Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач і ін.* – К.: Рад. школа, 1981. – 208 с.
24. Математика: Посібник для факультативних занять в 10 класі / *В.Н. Боровик, Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач і ін.* – К.: Рад. школа, 1985. – 208 с.
25. *Нікулін М.А., Чуб О.Т., Коба В.І.* Проективна геометрія. – К.: Рад. школа, 1962. – 235 с.
26. Новое в школьной математике: Сборник / Составитель *И.М. Яглом.* – М.: Знание, 1972. – 280 с.
27. *Павлов В.О.* Збірник задач з проективної геометрії. – К.: Освіта, 1973. – 351 с.
28. *Погорєлов О.В.* Геометрія: Пдручник для 7–11 класів середньої школи.– К.: Освіта, 1973. – 351 с.
29. *Погорелов А.В.* Элементарная геометрия. – М.: Наука, 1972.
30. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
31. *Семенович О.Ф.* Геометрія. Аксіоматичний метод. – К.: Рад. школа, 1976. – 168 с.
32. *Семенович О.Ф.* Геометрія. Групи перетворень. – К.: Рад. школа, 1971. – 279 с.
33. *Семенович О.Ф.* Учебное пособие по проективной геометрии. – М.: Учпедгиз, 1962. – 200 с.
34. *Сергунова О.П., Котлова В.П.* Практикум з проективної геометрії. – К.: Вища школа, 1977. – 192 с.
35. *Смогоржевський О.С.* Основи геометрії. – К.: Вища школа, 1954.
36. *Черняев М.П.* Сборник задач по синтетической геометрии. – М.: Учпедгиз, 1954. – 72 с.
37. *Четверухин Н.Ф.* Проективная геометрия. – М.: Учпедгиз, 1953. – 350 с.

38. *Яковець В.П.* Основи геометрії: Навч. посіб. для студ. фіз.-матем. ф-ту. – Ніжин: НДПУ, 2000. – 66 с.
39. *Яковець В.П., Боровик В.Н.* Курс проективної геометрії: Навч. посіб. для студ. фіз.-матем. ф-ту. – Ніжин: НДПУ, 2002. – 255 с.
40. Энциклопедия элементарной математики: Книга четвёртая: Геометрия. – М.: Наука, 1963. – 568 с.
41. Энциклопедия элементарной математики: Книга пятая: Геометрия. – М.: Наука, 1966. – 624 с.

Навчальне видання

Боровик Василь Наумович
Яковець Василь Павлович

Курс вищої геометрії

Навчальний посібник

Директор видавництва Р.В. Кочубей
Головний редактор В.І. Кочубей
Технічний редактор Н.Ю. Курносова
Дизайн обкладинки і макет В.Б. Гайдабрус
Комп'ютерна верстка О.В. Бердинських, Д.І. Іовенко

ТОВ «ВТД «Університетська книга»
40030, м. Суми, вул. Кірова, 27
Тел.: (0542) 27-51-43
E-mail: publish@book.sumy.ua

Відділ реалізації
Тел./факс: (0542) 21-26-12, 21-11-25
E-mail: info@book.sumy.ua

Підписано до друку 23.09.04.
Формат 70x90 $^{1}/_{16}$. Папір офсетний. Гарнітура Скулбук.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 36,4. Обл.-вид. арк. 34,65.
Тираж 1000 прим. Замовлення № 3742

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 489 від 18.06.2001

Надруковано відповідно до якості
наданих діапозитивів у друкарні «Торнадо»
Україна, 61045, м. Харків, вул. Отакара Яроша, 18